République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 – Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux dérivées partielles**

Par :

Mr. Abdelouahad BOUHABIB et Mr. Badreddine ZEDOURI

Intitulé

Opérateurs de régularisation et ses applications pour une classe des équations hyperboliques

Dirigé par : Dr. Abderrazek CHAOUI

Devant le jury

PRESIDENT	**K. FERNANE**	**M.A.A**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**H. FUJITA**	**Pr**	**Univ-Guelma**
	N. AZZOUZA	**M.C.B**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2011

Remerciements

Au terme de ce travail le fruit de notre formation, le plus grand merci tout d'abord revient au bon « **Dieu** » le tout puissant pour son aide et le courage, la patience et la confiance en soi qi' il nous a donné pour surmonter toutes les difficultés durant nos études ainsi que l'endurance pour termine ce projet.

Nous tenons à adresser nos remerciement les plus chaleureux et nos profondes gratitudes à notre encadreur « Dr : chaoui Abderrezek » pour nous avoir proposé le sujet de ce mémoire, c'est grâce à sa grande disponibilité, ses conseils, ses orientations et ses encouragements que nous avons pu mener à bien ce travail.

Nous remercions également tous les membres de jury qu'ils nous ont fait le grand honneur de bien vouloir accepter de juger notre travail.

Nous remercions beaucoup tous nos enseignants du département de Mathématique qui ont contribué à notre formation.

Nous n'oublions pas toutes les personnes qu'on ne peut pas citer et qui de prés ou de loin ont apporté leur contribution à l'élaboration de ce travail.

Dédicaces

Je dédie cet humble travail, fruit des longues années de mes études à :

La fontaine de l'amour ma mère qui m'a donné la vie, l'espoir, et la tendresse.

A ASMA, SANNA, ADEL, SADDEK, SALAH, et à toute la famille

Aussi, je dédie ce mémoire :

A tous mes amis, mes connaissances, et compagnons de parcours.

A tous ceux qui j'estime

Et m'estiment.

ABDELOUAHAD

Dédicaces

Je dédie cet humble travail, fruit des longues années de mes études à :

La fontaine de l'amour ma mère qui m'a donné la vie , l'espoir, et la tendresse.

Mon très cher père pour le quel les mots ne suffiront jamais pour le remercier.

Et à toute la famille.

Aussi, je dédie ce mémoire :

A tous mes amis, mes connaissances, et compagnons de parcours.

A tous ceux qui j'estime

Et m'estiment.

Badredddine

Table des matières

0.1 Introduction

Le premier problème aux limites de Gaursat qui a été étudié est le problème engendré par l'équation des ondes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} = 0 \\ u(t_1, 0) = \varphi_1(t_1), \quad u(0, t_2) = \varphi_2(t_2), \quad \varphi_1(0) = \varphi_2(0) \end{cases}$$

Grâce à la méthode des approximations succesives, la théorie du problème de Goursat a connu un grand développement, ce qui a permis de montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème de Gaursat pour une équation hyperbolyque avec les coefficients bornés.

Une série des problèmes aux limites est élaborée dans les trvaux de Brich et Yurchuk. Ces auteurs ont étudié un problème mixte avec les conditions de Gaursat, engendré par une équation hyperbolique, ainsi le problème de Gaursat engendré par une équation abstraite de seconde ordre. La méthode utlisée dans ce travaux est celle des inégalités énergétiques. On décrit brièvement les résultats obtenus.

Soient $D =]0, T_1[\times]0, T_2[$, H un espace de Hilbert. On considère dans H le problème de Goursat suivant

$$Lu = d\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + A(t)u = f(t)$$

L'opérateur A(t) est linéaire, borné et de domaine de définition indépendant de la variable t. Les auteurs ont démontré que cette équation avec les conditions de Goursat admet une solution unique sous certaines conditions.

Dans les années 90, plusieur résultats sont apparus, traitant les problèmes de Cauchy unidimentionnel, avec des coefficients à domaines variables; Parmis ces travaux, on peut citer ceux de Lomovtsev[17-23]. Plus précisément Lomovtsev a étudié le problème suivant :

$$\begin{cases} Lu = \dfrac{d^2 u}{dt^2} + A(t)u = f(t), t \in [0, T] \\ l_0 u = u|_{t=0} = \varphi, \quad l_1 u = \dfrac{du}{dt|_{t=0}} = \psi \end{cases}$$

où l'opérateur $A(t)$ est non borné à domaine variable, dans un espace de Hilbert et vérifie certaines conditions. Dans ces travaux, en utilisant la méthode des inégalités énergétiques, Lomovtsev a étudié des problèmes engendrés par des conditions de Cauchy homogènes ou non homogènes, et des équations d'ordre un ou d'ordres supérieur.

Dans ce mémoire on démontre l'existence et l'unicité de la solution forte généralisée d'un problème aux limites à domaines variables engendré par l'équation hyperpolique :

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + A(t)u = f(t), \quad t = (t_1, t_2)$$

et les conditions de Goursat :

$$l_1 u = u|_{t_2=0} = 0, \quad l_2 u = u|_{t_1=0} = 0.$$

On suppose que l'opérateur $A(t)$ est linéaire, auto-djoint dans un espace de Hilbert à domaine $D(A(t))$dense dans H et dépendant de la variable t.

La méthode utilisée est celle des inégalitées énergétiques qu'on détaillera dans le deuxiéme chapitre. Le mémoire se compose de trois parties essentielles.

Chapitre 1 :Dans ce chapitre, nous rappellons quelques théorèmes d'analyse fonctionnelle, nous donnons aussi certaines notions importantes sur les opérateurs à domaines variables comme la continuité et la différentiabilité et nous définissons les opérateurs de régularisation $A_\varepsilon^{-1}(t)$ et leurs propriétés.

Chapitre 2 : Dans ce chapitre, on définit les opérateurs de régularisations $A_\varepsilon^{-1}(t)$ et leurs propriétés. On expose la méthode des inégalités énergétiques et quelques inégalités fonctionnelles.

Chapitre 3 : Dans ce chapitre, On considère dans un espace de Hilbert un Problème de Goursat engendré par une classe d'équations opérationnelles hyperboliques, on a supposé que les coefficients opérationnels sont à domaines dépendant du temps et possèdent une singularité. L'existence et l'unicité de la solution forte ont été établies, la méthode fonctionnelle utilisée est celle des estimations à priori. Ce travail a été accepté pour la publication.

La mémoire est clôturé par une bibliographie.

Chapitre 1

Rappels d'Analyse fonctionnelle

Résumé

Dans ce chapitre, nous rappellons quelques théorèmes d'analyse fonctionnelle, nous donnons aussi certaines notions importantes sur les opérateurs à domaines variables comme la continuité et la différentiabilité et nous définissons les opérateurs de régularisation $A_\varepsilon^{-1}(t)$ et leurs propriétés.

1.1 Les opérateurs

Dans la suite on désigne par X et Y deux espaces normés, H un espace de Hilbert et A un opérateur linéaire.

Définition 1.1.1 *Soit* A *un opérateur linéaire, tells que* D(A) = X.
A *est borné si et seulement si il existe une constante* $c > 0$ *telle que*

$$\|Ax\| \leq C\,\|x\|\,, \quad \forall x \in X.$$

Dans le cas contraire on dit que l'opérateur A est non borné.

Théorème 1.1.1 *Soit A un opérateur linéaire, défini partout dans X. Pour que A soit continu il faut et il suffit qu'il soit borné.*

Preuve

Soit A est continu.
Supposons que A non borné c'est à dire :
Pour tout $M > 0$, $\exists x$ tel que $\|Ax\| > M\|x\|$
En particulier pour tout entier n il existe x_n tel que

$$\|Ax_n\| > n\|x_n\|,$$

posons $\xi_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$ on a $\xi_n \to 0$ quand $n \to \infty$ dans X.
Et comme A est continue on en déduit que :

$$lim_{n\to\infty}\|A\xi_n\| = 0,$$

or

$$\|A\xi_n\| = \frac{1}{n\|x_n\|}\|Ax_n\| > \frac{n\|x_n\|}{n\|x_n\|} = 1.$$

Ce qui est contraduction avec ce qui précéde. .

Théorème 1.1.2 *L'opérateur A^{-1} existe et est borné sur son image $R(A)$ si et seulement s'il existe une constante $m > 0$ telle que*

$$\|Ax\| \geq m \|x\|, \quad \forall x \in D(A).$$

Preuve

A^{-1} existe et borné $\Rightarrow \exists M > 0, \quad \forall y \in R(A), \quad \|A^{-1}y\| \leq M\|y\|$.
On pose $x = A^{-1}y$ c'est à dire

$$y = Ax \Rightarrow \|x\| \leq M\|Ax\|.$$

A^{-1} existe il suffit de montrer que $A : D(A) \to R(A)$ est injectif.
Si $Ax = 0$ alors on a :

$$\|x\| \leq 0 \Rightarrow x = 0$$

donc A est injectif et cela implique que A béjectif donc A^{-1}existe.
A^{-1} est bornée :
Soit $y \in R(A) \Rightarrow \exists x = A^{-1}y \in D(A)$.
Alors :

$$\|A(A^{-1}y)\| \geq C\|A^{-1}y\| \Rightarrow \|y\| \geq C\|A^{-1}y\|.$$
$$\Rightarrow \|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{c}\|y\|.$$

.

Théorème 1.1.3 *Soient H un espace de Hilbert et F un sous espace vectoriel de H. Pour que F soit dense dans H il faut et il suffit qu'il n'existe pas de vecteur non nul orthogonal à F, i.e.*

$$F^{\perp} = \{0\}.$$

Preuve

Si F est fermé alors $F = (F^{\perp})^{\perp}$.
Nous avons toujour $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$. Supposons donc $x \in (F^{\perp})^{\perp}$, en utilisant l'existence de la projection orthogonal x_F de x sur F, $x = x_F + (x - x_F)$ avec $x_F \in F$ et $(x - x_F) \in F^{\perp}$.
Alors

$$\begin{aligned} \|x - x_F\| &= (x - x_F, x - x_F) \\ &= (x, x - x_F) - (x_F, x - x_F) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nous en conclusons que $x - x_F = 0$. Nous avons donc $x \in F$ ce qui montre l'inclusion apposée : $(F^{\perp})^{\perp} \subset F$.
Maintenant si F n'est pas fermé

$$F \subset \overline{F} \Rightarrow (F^{\perp})^{\perp} \subset (\overline{F}^{\perp})^{\perp}.$$

D'aprés qui possède, nous avons alors

$$\overline{F} = (\overline{F}^{\perp})^{\perp}.$$

Donc

$$F \subset (F^{\perp})^{\perp} \subset \overline{F}.$$

Ce implique que

$$(F^{\perp})^{\perp} = \overline{F}.$$

On a

$$(F^{\perp})^{\perp} = \overline{F} = H \Leftrightarrow F^{\perp} = H^{\perp} = \{0\}.$$

.

Définition 1.1.2 *L'opérateur $\overline{A}$ est fermé si son graphe est fermé dans $H \times H$.*

Définition 1.1.3 *On dit qu'un opérateur A est extension d'un opérateur B si $G(B) \subset G(A)$ on écrit alors $B \subset A$.*

Définition 1.1.4 *Un opérateur A est fermable s'il possède une extension fermée. Si C'est le cas il possède une plus extension fermée (au sens de l'inclusion des graphe) appelée fermeture de A et notée $\overline{A}$.*

Proposition 1.1.1 *A est fermable si et seulement si $\overline{G(A)}$ est le graphe d'un opérateur linéaire et alors*

$$G(\overline{A}) = \overline{G(A)}$$

Théorème 1.1.4 (Théorème de graphe férmé) *Soit X et Y deux espaces de Hilbert. Soit A un opérateur linéaire de X dans Y. On suppose que $G(A)$ est fermé dans $X \times Y$ alors l'opérateur A est continu.*

Preuve

On considére sur X les deux normes :

$$\|x\|_1 = \|x\|_X + \|Ax\|_Y$$

et

$$\|x\|_2 = \|x\|_X.$$

$\|x\|_1$: Cette norme appellé norme de graphe.

Comme $G(A)$ est fermé, X muni de la norme $\|.\|_1$ est un espace de Banach. D'autre part on a :

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1.$$

Par conséquent ces deux normes sont équivalentes, il existe une constante $C > 0$ telle que $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$.

Donc $\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X$.

Théorème 1.1.5 *Soit $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire.*
Supposons qu'il existe une constante $M > 0$ telle qu'on ait :

$$\|x\| \leq M \|Ax\| . \tag{I}$$

Alors

1. $\ker A = \{0\}$
2. $R(\overline{A}) = \overline{R(A)}$

Preuve

1) Soit $x \in \ker(A)$ alors pour tout $x \in D(A)$, $Ax = 0$.
D'aprés l'inégalité (I), on a :

$$\|x| \leq 0 \Rightarrow x = 0.$$

Donc $\ker(A) = 0$.

2) Soit $y \in \overline{R(A)}$ alors il existe $x_n \in D(A)$ telle que $Ax_n \to y$, on remarque d'après l'inégalité (I) que

$$\|x_p - x_q\| \leq M \|Ax_p - Ax_q\| .$$

d'où x_n est une suite de Cauchy dans $D(A) \subset \overline{D(A)}$ donc elle est convergente dans $\overline{D(A)} = D(\overline{A})$, soit $x_0 \in D(\overline{A})$ sa limite, on a :

$$\begin{cases} x_n \to x_0 \\ Ax_n \to y \end{cases}$$

donc, $y = \overline{A}x_0 \in R(\overline{A})$, d'où $\overline{R(A)} \subset R(\overline{A})$.
Autre sens :
On a $A \subset \overline{A}$, donc $R(A) \subset R(\overline{A})$.
Cela implique que $\overline{R(A)} \subset R(\overline{A})$.

.

Définition 1.1.5 *Soit $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire, on appelle adjoint de A, l'opérateur*

$$A^* : D(A^*) \subset Y^* \longrightarrow X^*$$

défini par

$$\begin{cases} D(A^*) = \{v \in Y^* / \ \exists w \in X^* : (v, Au) = (w, u), \quad \forall u \in D(A)\}. \\ A^* v = w \end{cases}$$

Théorème 1.1.6 *Pour que la représentation $(v, Au) = (w, u)$ soit unique pour tout $u \in D(A)$ avec $w \in X^*$, il faut et il suffit que $\overline{D(A)} = X$ et dans ce cas A^* est un opérateur fermé.*

Définition 1.1.6 *L'opérateur A est dit auto-adjoint si*

$$D(A) = D(A^*), \quad (Ax, y) = (x, A^*y), \quad \forall x, y \in D(A).$$

Dans ce cas le nombre (Ax, x) est réel et $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} |(Ax, x)|$.

Définition 1.1.7 *L'opérateur A est dit positif*

$$(Ax, x) \geq 0, \quad \forall\, x \in D(A).$$

Théorème 1.1.7 *Soit $A : D(A) \longrightarrow H$ un opérateur linéaire, auto-adjoint positif, alors il existe un opérateur $B : D(B) \longrightarrow H$ telle que*

$$D(A) \subset D(B), \quad Ax = B(Bx), \forall x \in D(A).$$

L'opérateur B est appelé racine carrée de l'opérateur A et on le note par $A^{\frac{1}{2}}$.

Théorème 1.1.8 *Soit H un espace de Hilbert et soit F un sous espace vectoriel fermé dans H alors*

$$H = F \oplus F^{\perp}.$$

Preuve

Soit $x \in H$ et écrivons $x = P_F(x) + (x - P_F(x))$.
On a bien que $P_F(x) \in F$et $(x - P_F(x)) \in F^{\perp}$. D'aprés les propriétées de la projection orthogonale sur un sous espace vectoriel, ce qui montre que H est la somme de F et $F^{\perp}$.
On vérifié en suite que la somme est directe : Si $x \in F \cap F^{\perp}$ alors $\langle x, x\rangle = 0$, donc $x = 0$.
Ce qui termine la démonstation. .

Théorème 1.1.9 *Soit $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire auto-adjoint.*
Alors :

$$(KerA)^{\perp} = \overline{R(A)}.$$

Corollaire 1 *Soit $F \subset E$ un espace vectoriel tel que $\overline{F} \neq E$. Alors il existe $f \in E'$, $f \neq 0$ tel que*

$$(f, x) = 0 \qquad \forall x \in F$$

Remarque 1 *On applique souvent le corollaire pour montrer qu'un sous espace vectoriel $F \subset E$ est dense. On considère une forme linéaire et continue f sur E telle que $f = 0$ sur F et on prouve que f est identiquement nulle sur E.*

1.2 Opérateur dépendant d'un paramètre

Soient X et Y deux espaces de Banach et $\{A(t)\}$ une famille d'opérateur $(0 \leq t \leq T)$ où $A(t) : D(A(t)) \longrightarrow Y, D(A(t)) \subset X$ qui dépend du temps.

1.2.1 Continuité par rapport au paramètre.

Définition 1.2.1 *La famille d'opérateurs $\{A(t)\}$ est dite fortement continue au point $t_0 \in [0, T[$ en $u(t_0) \in D(A(t_0))$ s'il existe $u(t) \in D(A(t))$ telle que $u(t) \longrightarrow u(t_0)$ dans X et $A(t)\,u(t) \longrightarrow A(t_0)u(t_0)$ dans Y lorsque t tend vers t_0.*

1.2.2 Dérivation par rapport au paramètre

Définition 1.2.2 *La famille d'opérateurs $A(t)$ est dite fortement dérivable au point $t_0 \in [0, T[$ en $u(t_0) \in D(A(t_0))$ s'il existe $u(t) \in D(A(t)), v(t_0) \in D(A(t_0))$ telle que*

$$\frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} \longrightarrow v(t_0)$$

et

$$\frac{A(t)u(t) - A(t_0)u(t_0)}{t - t_0} \longrightarrow w(t_0)$$

dans Y lorsque t tend vers t_0 et la limite $w(t_0)$ ne dépend pas du choix de $u(t)$. On définit $A'(t)$ la dérivée de $A(t)$ par la relation suivante :

$$A'(t_0)\, u(t_0) = w(t_0) - A(t_0)v(t_0)$$

Chapitre 2

Opérateurs abstraits de régularisation

Résumé

Dans ce chapitre, on définit les opérateurs de régularisations $A_\varepsilon^{-1}(t)$ et leurs propriétés. On expose la méthode des inégalités énergétiques et quelques inégalités fonctionnelles.

2.1 Définition et propriétés

Définition 2.1.1 *Soit A un opérateur linéaire auto-adjoint, défini de $D(A)$ dans H tel que*

$$(Av, v) \geq c_1 |v|^2, \quad \forall v \in D(A).$$

Pour ε positif on définit la famille d'opérateurs suivante :

$$A_\varepsilon^{-1} = (I + \varepsilon A)^{-1}$$

A_ε^{-1} s'appelle opérateur abstrait de régularisation.

Théoreme 2.1.1 *L'opérateur A_ε^{-1} est borné et vérifie*

$$\|A_\varepsilon^{-1}\| \leq \frac{1}{1 + \varepsilon c_1}. \tag{P$_1$}$$

Preuve

Pour montrer la propriété (P_1) on va utiliser le Théorème du graphe fermé. Vu que l'opérateur A_ε est fermé, montrons qu'il est surjectif.

Nous avons $A_\varepsilon : D(A) \subset H \longrightarrow H$, les Théorèmes 1.1.8 et 1.1.9 et entraînent :

$$H = Ker(A_\varepsilon) \oplus \overline{R(A_\varepsilon)}.$$

Montrons que $Ker(A_\varepsilon) = \{0\}$.

Soit $x \in Ker(A_\varepsilon)$ alors $A_\varepsilon x = 0$ d'où :

$$\begin{aligned} \varepsilon Ax &= -x \Rightarrow (\varepsilon Ax, x) = (-x, x) = -|x|^2 \geq \varepsilon c_1 |x|^2 \\ &\Rightarrow (\varepsilon c_1 + 1)|x|^2 \leq 0 \Rightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Montrons que $\overline{R(A_\varepsilon)} = R(A_\varepsilon)$, on a :

$$\begin{aligned} (A_\varepsilon u, u) &= |u|^2 + \varepsilon(Au, u) \\ &\geq (\varepsilon c_1 + 1)|u|^2. \qquad (a_1) \end{aligned}$$

D'après le théorème 1.1.5 on conclut que

$$\overline{R(A_\varepsilon)} = R(A_\varepsilon),$$

et d'après le théorème 1.1.2, A_ε^{-1} existe et est borné sur $R(A_\varepsilon)$.De (a_1) on peut tirer la relation

$$(1+\varepsilon c_1)\,|u| \leq |A_\varepsilon u|, \quad \forall u \in D(A). \qquad (a_2)$$

Soit $u = A_\varepsilon^{-1}v$, oú v est un élément quelconque de H, d'après la relation (a_2) on a

$$(1+\varepsilon c_1)|A_\varepsilon^{-1}v| \leq |v|, \forall v \in H$$

d'où

$$\frac{|A_\varepsilon^{-1}v|}{|v|} \leq \frac{1}{(1+\varepsilon c_1)}, \quad \forall v \in H,$$

en passant au sup, l'inégalité (P_1) est démontrée. .

Théoreme 2.1.2 *Les opérateurs de régularisation A_ε^{-1} vérifient les propriétés suivantes*

$$\varepsilon A A_\varepsilon^{-1} = I - A_\varepsilon^{-1}. \qquad (\mathrm{P}_2)$$

$$|\varepsilon A A_\varepsilon^{-1}x| = |Ix - A_\varepsilon^{-1}x| \ \ lorsque \ \ \varepsilon \longrightarrow 0 \qquad (\mathrm{P}_3)$$

$$L'operateur \ \ A_\varepsilon^{-1} \ \ est \ \ positif, auto-adjoint \ \ et \ \ commute \ \ avec A. \qquad (\mathrm{P}_4)$$

Preuve

Pour montrons (P_2), on a

$$\varepsilon A A_\varepsilon^{-1} = \varepsilon\left(\frac{A_\varepsilon - I}{\varepsilon}\right) A_\varepsilon^{-1} = I - A_\varepsilon^{-1}.$$

Pour montrer (P_3) on doit établir que $|A_\varepsilon^{-1}x - x| \longrightarrow 0$ lorsque ε tend vers 0.

D'après la propriété (P_2) on peut voir que l'opé rateur AA_ε^{-1} est uniformément borné et

$$\begin{aligned} &\left|A_\varepsilon^{-1}x - x\right| = \left|\varepsilon A A_\varepsilon^{-1}x\right| \leq \varepsilon \left|AA_\varepsilon^{-1}x\right| \leq \varepsilon \left\|AA_\varepsilon^{-1}\right\| |x| \\ \Rightarrow \quad &\left\|A_\varepsilon^{-1} - I\right\| \leq \varepsilon \left\|AA_\varepsilon^{-1}\right\| \rightarrow 0 \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Pour montrer (P_4) on remarque que

$$A^{-1}A_\varepsilon = A^{-1}(I+\varepsilon A) = A^{-1} + \varepsilon A^{-1}A = A^{-1} + \varepsilon I.$$

D'autre part

$$A_\varepsilon A^{-1} = (I+\varepsilon A)A^{-1} = A^{-1} + \varepsilon A^{-1}A = A^{-1} + \varepsilon I,$$

d'où A commute avec A_ε^{-1}. .

Théoreme 2.1.3 *Si l'opérateur $A^{-1}(t)$ est différentiable alors $A_\epsilon^{-1}(t)$ est différentiable et on a :*

$$\frac{d(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t))}{t} = \frac{-1}{\varepsilon}\frac{dA_\varepsilon^{-1}(t)}{dt}. \tag{P$_5$}$$

$$\frac{dA_\varepsilon^{-1}(t)}{dt} = \varepsilon A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)\frac{dA^{-1}(t)}{dt}A(t)A_\varepsilon^{-1}(t). \tag{P$_6$}$$

Preuve

Montrons (P_5) . En effet : d'après (P_2) on a

$$\begin{aligned}
&\varepsilon AA^{-1} = I - A_\varepsilon^{-1}\\
&\Rightarrow \varepsilon\frac{d\left(AA_\varepsilon^{-1}\right)}{dt} = -\frac{dA_\varepsilon^{-1}}{dt}\\
&\Rightarrow \frac{d\left(AA_\varepsilon^{-1}\right)}{dt} = \frac{-1}{\varepsilon}\frac{dA_\varepsilon^{-1}(t)}{dt}
\end{aligned}$$

Montrons (P_6) . En effet : d'après (P_2) on a

$$\begin{aligned}
&\frac{dA}{dt}A_\varepsilon^{-1} + \frac{dA_\varepsilon^{-1}}{dt}A = \frac{-1}{\varepsilon}\frac{dA_\varepsilon^{-1}}{dt}\\
&\Rightarrow \frac{dA}{dt}A_\varepsilon^{-1} = \frac{-1}{\varepsilon}\frac{dA_\varepsilon^{-1}}{dt}(I+\varepsilon A)\\
&\Rightarrow \frac{-1}{\varepsilon}\frac{dA_\varepsilon^{-1}}{dt}A_\varepsilon = \frac{dA}{dt}A_\varepsilon^{-1}\\
&\Rightarrow \frac{dA_\varepsilon^{-1}}{dt} = -\varepsilon A_\varepsilon^{-1}\frac{dA}{dt}A_\varepsilon^{-1},
\end{aligned}$$

comme $AA^{-1} = I$ et A, A_ε^{-1} commute

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt}A^{-1} = -A\frac{dA^{-1}}{dt} \Rightarrow \frac{dA_\varepsilon^{-1}}{dt} = \varepsilon AA_\varepsilon^{-1}\frac{dA^{-1}}{dt}AA_\varepsilon^{-1} \tag{2.1}$$

.

2.2 Quelques inégalités utiles

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. **Inégalité de Cauchy**

$$\forall u, v \in L_2(\Omega), |\int\limits_\Omega uvdx| \leq (\int\limits_\Omega |u|^2dx)^{\frac{1}{2}}(\int\limits_\Omega |v|^2dx)^{\frac{1}{2}}.$$

Inégalité de Cauchy avec l'ε

Qu'on appelle aussi l'ε **-inégalité**

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2, \forall\varepsilon > 0, \forall a, b. \tag{2.2}$$

Inégalité de Poincaré-Friedrichs

$$\int_I u(t)dt \leq c_1 \int_I u_t^2dt.$$

Inégalité triangulaire

$$(\int_\Omega (u+v)^2dx)^{\frac{1}{2}} \leq (\int_\Omega u^2dx)^{\frac{1}{2}} + (\int_\Omega v^2dx)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.3}$$

2.3 Etude des équations différentielles par une méthode fonctionnelle

La méthode des inégalités de l'énergie, appelée aussi méthode d'analyse fonctionnelle, trouve son origine dans les travaux de I.G. Petrovsky, où elle a été utilisée dans la résolution du problème de Cauchy lié aux équations du type hyperbolique. Par la suite les développements importants de la méthode sont dus à J. Leray et L. Garding. Cette méthode a été également utilisée et développée dans les travaux de O. A. Ladyzenskaya, K. Friedrichs et N. I.Yurchuk. Le schéma de la méthode a été donné pour la première fois par A. A. Dezin, et qui peut être résumé comme suit : Pour l'opérateur L engendré par le problème considéré, on démontre l'inégalité énergétique du type

$$\|u\|_E \leq C\|Lu\|_F, \forall u \in D(L) \tag{1}$$

La démonstration se base sur une analyse précise des formes obtenues en multipliant l'équation donnée par un opérateur Mu contenant la fonction u ou ses dérivées et une certaine fonction poids. Le choix de l'opérateur Mu est fondamental, il est dicté par l'équation et les conditions aux limites. Ensuite dans les topologies fortes des espaces E et F, on construit la fermeture $\overline{L}$ de l'opérateur L et la solution de l'équation $\overline{L}u = \mathcal{F}, \mathcal{F} \in F$ est appelée solution forte du problème considéré. A l'aide d'un passage à la limite, on prolonge l'inégalité (1) à $u \in D\left(\overline{L}\right)$.

Comme l'opérateur L^{-1} est continu on conclut pour l'image de l'opérateur $\overline{L}$ l'égalité $R\left(\overline{L}\right) = \overline{R\left(L\right)}$. Pour la démonstration de l'existence de la solution forte pour tout $\mathcal{F} \in F$, il suffit d'établir la densité de $R(L)$ dans F qui est obtenue à l'aide des opérateurs de régularisation. Le choix des opérateurs de régularisation est lié au caractère du problème étudié.

La méthode des estimations à priori est une méthode efficace pour l'étude de beaucoup de problèmes de la physique mathématique, elle est fondée sur un support théorique solide et est développée dans un cadre abstrait élégant. Mais dans l'application de cette méthode on trouve des difficultés parmi lesquelles nous citons :

. Le choix des espaces fonctionnels.

. Le choix du multiplicateur Mu

. Le choix de l'opérateur de régularisation. Les questions sont tellement variées et récentes, que l'élaboration d'une théorie générale est encore prématurée. Chaque problème nécessite une étude spéciale, d'où l'actualité du thème.

Chapitre 3

Application sur une equation hyperbolique

Résumé

On considère dans un espace de Hilbert un Problème de Goursat engendré par une classe d'équations opérationnelles hyperboliques, on a supposé que les coefficients opérationnels sont à domaines dépendant du temps et possèdent une singularité. L'existence et l'unicité de la solution forte ont été établies, la méthode fonctionnelle utilisée est celle des estimations à priori. Ce travail a été accepté pour la publication.

3.1 Position du problème.

Soit H un espace de Hilbert où la norme et le produit scalaire sont notés respectivements par $|.|, (,)$.

Soit Ω un rectangle borné de $\mathbb{R}^2$ tel que $\Omega =]0, T_1[\times]0, T_2[$.

On considère donc le problème de Goursat suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + T(t)u = f(t) & (3.1) \\ \\ u(t_1, 0) = u(0, t_2) = 0 & (3.2) \end{cases}$$

On suppose que $\{T(t), t \in \Omega\}$ est une famille des opérateurs linéaires, non bornés, auto-adjoints dans H et à domaines $D_t(T)$ dépendants de la variable $t = (t_1, t_2) \in \Omega$ et denses dans H, on suppose aussi que les conditions suivantes sont vérifiées :

a) Il existe une constante $c_1 > 0$ telle que :

$$|v(t)|_t^2 = (T(t)v(t), \ \ v(t)) \geq c_1 |v(t)|^2, \ \forall v(t) \in D_t(T) \ \ \forall t \in \Omega$$

b) Les opérateurs inverses de $T(t)$ existent et sont fortement différentiables par rapport à t dans H, de plus

$$\frac{\partial T^{-1}(t)}{\partial t_1}, \frac{\partial T^{-1}(t)}{\partial t_2}, \frac{\partial^2 T^{-1}(t)}{\partial t_1 \partial t_2} \in \beta(\Omega, \mathcal{L}(H))$$

où : $\mathcal{L}(H)$ est l'espace des opérateurs linéaires bornés de H à valeurs dans H muni de la norme

$$|T|_{\mathcal{L}(H)} = \sup_{\substack{u \in H \\ u \neq 0}} \frac{|Tu|}{|u|}.$$

$\beta(I, \mathcal{L}(H))$ est l'espace de Banach des opérateurs bornés.

c) Il existe deux constantes $a_1 > 0, \ \ a_2 > 0$ telle que :

$$-Re(\frac{\partial T^{-1}(t)}{\partial t_i} u(t), u(t)) \leq a_i (T^{-1}(t)u(t), u(t)), \ \ \forall u \in H, \ \ i = 1, 2$$

On définit sur D_t le produit scalaire énergétique qu'on le note $(,)_t$ par

$$(u, v)_t = (T(t)u, v), \ \ \forall u, \ \ v \in D_t(T)$$

3.3 Existence de la solution forte généralisée

Théoreme 3.3.1 *On suppose que les conditions (a), (b), (c) sont satisfaites. Alors pour $f \in F$, il existe une unique solution forte généralisée $u \in D(\overline{L})$ du probléme (3.1) – (3.2) telle que $u = (\overline{L})^{-1}(f)$, vérifiant l'inégalité (3.4)*

Preuve

d'aprés un corollaire du théoreme de Hahn-Banach, il suffit de prouver que si

$$\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} \varkappa(t_1, s_2)\,(Lu, \Lambda v)\,dt_1dt_2 = 0, \quad \forall u \in D(L) \tag{3.5}$$

pour $v \in E_0$, alors $v = 0$.

Soit $C(\Omega, H)$ l'ensemble des fonctions $v \in C^\infty$ telles que $v|_{t_2=0} = 0$; $v|_{t_1=0} = 0$, comme $C\,(\Omega, H)$ est dense dans E_0, on va démontrer que si (3.5) est vérifié pour $v \in C\,(\Omega, H)$, alors $v = 0$.

En substuant la foncton u dans la relation (3.5) par $T_\varepsilon^{-1}(t)h$, où $h \in E_0$, on obtient

$$\begin{aligned}
&2Re\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} \varkappa(t_1,t_2)(T_\varepsilon^{-1}(t)\frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2}, \Lambda v)dt_1dt_2\\
=\; &-2Re\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} \varkappa(t_1,t_2)\frac{\partial^2 T_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_1 \partial t_2}h, \Lambda v)dt_1dt_2\\
&-2Re\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} \varkappa(t_1,t_2)(\frac{\partial T_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_2}\frac{\partial h}{\partial t_1} + \frac{\partial T_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_1}\frac{\partial h}{\partial t_2}, \Lambda v)dt_1dt_2\\
&-2Re\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} \varkappa(t_1,t_2)\left(T\,(t)\,T_\varepsilon^{-1}(t)h, \Lambda v\right)dt_1dt_2.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

D'après la condition (b) et les propriétés des opérateurs de régulatisations, alors les operateurs

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_1 \partial t_2}, \\ \dfrac{\partial T_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_1}, \\ \dfrac{\partial T_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_2}, \\ \text{et} \\ T(t)\,T_\varepsilon^{-1}(t) \end{cases}$$

sont bornés dans H. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'inégalité de Poincaré-Friedrichs, on aura que le membre droit de (3.6) en valeur absolue est estimé par

$$\gamma \left(\left\| \frac{\partial h}{\partial t_1} \right\|^2_{L_2(\Omega,H)} + \left\| \frac{\partial h}{\partial t_2} \right\|^2_{L_2(\Omega,H)} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \varkappa(t_1,t_2) T_\varepsilon^{-1}(t) h \Lambda v \right\|_{L_2(\Omega,H)}$$

où γ est une constante positive. Soit w une solution du problème suivant :

$$\begin{cases} e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)} t_1 t_2 \Lambda w = \Lambda v \\ w(0,t_2) = w(t_1,0) = 0 \end{cases}$$

On pose $h = w$, on a les calcules suivantes : soit

$$\begin{aligned} & \int_0^{s_1}\int_0^{s_2} \varkappa(t_1,t_2) e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)} t_1 t_2 \left(T_\varepsilon^{-1}(t) \frac{\partial^2 w}{\partial t_1 \partial t_2}, \frac{\partial w}{\partial t_1} + \frac{\partial w}{\partial t_2} \right) dt_1 dt_2 \\ = & \int_0^{s_1}\int_0^{s_2} \varkappa(t_1,t_2) e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)} t_1 t_2 \left(T_\varepsilon^{-1}(t) \frac{\partial^2 w}{\partial t_1 \partial t_2}, \frac{\partial w}{\partial t_2} \right) dt_1 dt_2 \qquad (K_1) \\ + & \int_0^{s_1}\int_0^{s_2} \varkappa(t_1,t_2) e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)} t_1 t_2 \left(T_\varepsilon^{-1}(t) \frac{\partial^2 w}{\partial t_1 \partial t_2}, \frac{\partial w}{\partial t_1} \right) dt_1 dt_2 \qquad (K_2) \end{aligned}$$

On intégre par partie la formmule K_1 par rapport a t_1 on obtient :

$$\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} \varkappa(t_1,t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_1t_2\left(T_\varepsilon^{-1}(t)\frac{\partial w}{\partial t_2},\frac{\partial^2 w}{\partial t_1\partial t_2}\right)dt_1dt_2$$
$$= \int_0^{s_2}\left[\varkappa(t_1,t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_1t_2\left(T_\varepsilon^{-1}(t)\frac{\partial w}{\partial t_2},\frac{\partial w}{\partial t_2}\right)\right]_{t_1=s_1}dt_2$$
$$+c\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} \varkappa(t_1,t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_1t_2\left(T_\varepsilon^{-1}(t)\frac{\partial w}{\partial t_2},\frac{\partial w}{\partial t_2}\right)dt_1dt_2$$
$$-\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} \varkappa(t_1,t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_2\left(T_\varepsilon^{-1}(t)\frac{\partial w}{\partial t_2},\frac{\partial w}{\partial t_2}\right)dt_1dt_2$$
$$+\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} \varkappa(t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_1t_2\left(T_\varepsilon^{-1}(t)\frac{\partial w}{\partial t_2},\frac{\partial w}{\partial t_2}\right)dt_1dt_2$$
$$-\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} \varkappa(t_1,t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_1t_2\left(\frac{\partial T_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_1}\frac{\partial w}{\partial t_2},\frac{\partial w}{\partial t_2}\right)dt_1dt_2$$
$$-\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} \varkappa(t_1,t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_1t_2\left(T_\varepsilon^{-1}(t)\frac{\partial^2 w}{\partial t_1\partial t_2},\frac{\partial w}{\partial t_2}\right)dt_1dt_2$$

Ce qui donne :

$$2Re\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} \varkappa(t_1,t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_1t_2\left(T_\varepsilon^{-1}(t)\frac{\partial w}{\partial t_2},\frac{\partial^2 w}{\partial t_1\partial t_2}\right)dt_1dt_2$$
$$= \int_0^{s_2}\left[\varkappa(t_1,t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_1t_2\left|T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)\frac{\partial w}{\partial t_2}\right|^2\right]_{t_1=s_1}dt_2$$
$$+c\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} \varkappa(t_1,t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_1t_2\left|T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)\frac{\partial w}{\partial t_2}\right|^2dt_1dt_2$$
$$-\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} \varkappa(t_1,t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_2\left|T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)\frac{\partial w}{\partial t_2}\right|^2dt_1dt_2$$
$$+\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} \varkappa(t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_1t_2\left|T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)\frac{\partial w}{\partial t_2}\right|^2dt_1dt_2$$
$$-\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} \varkappa(t_1,t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_1t_2\left(\frac{\partial T_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_1}\frac{\partial w}{\partial t_2},\frac{\partial w}{\partial t_2}\right)dt_1dt_2 \qquad (3.7)$$

De même maniére pour K_2 par rapport t_2 on obtient :

$$\begin{aligned}
&2Re\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} \varkappa(t_1,t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_1t_2\left(T_\varepsilon^{-1}(t)\frac{\partial w}{\partial t_1},\frac{\partial^2 w}{\partial t_1\partial t_2}\right)dt_1dt_2\\
&=\int_0^{s_1}\left[\varkappa(t_1,t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_1t_2\left|T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)\frac{\partial w}{\partial t_1}\right|^2\right]_{t_2=s_2}dt_1\\
&+c\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} \varkappa(t_1,t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_1t_2\left|T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)\frac{\partial w}{\partial t_1}\right|^2 dt_1dt_2\\
&-\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} \varkappa(t_1,t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_1\left|T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)\frac{\partial w}{\partial t_1}\right|^2 dt_1dt_2\\
&+\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} \varkappa(t_1)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_1t_2\left|T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)\frac{\partial w}{\partial t_1}\right|^2 dt_1dt_2\\
&-\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} \varkappa(t_1,t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_1t_2\left(\frac{\partial T_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_2}\frac{\partial w}{\partial t_1},\frac{\partial w}{\partial t_1}\right)dt_1dt_2 \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
&\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} \varkappa(t_1,t_2)t_1t_2e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}\left(T\,(t)\,T_\varepsilon^{-1}(t)w,\frac{\partial w}{\partial t_1}+\frac{\partial w}{\partial t_2}\right)dt_1dt_2\\
&=\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} \varkappa(t_1,t_2)t_1t_2e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}\left(T\,(t)\,T_\varepsilon^{-1}(t)w,\frac{\partial w}{\partial t_1}\right)dt_1dt_2 \qquad (K_3)\\
&+\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} \varkappa(t_1,t_2)t_1t_2e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}\left(T\,(t)\,T_\varepsilon^{-1}(t)w,\frac{\partial w}{\partial t_2}\right)dt_1dt_2 \qquad (K_4)
\end{aligned}$$

On intégre par partie la formmule K_3 par rapport a t_1 on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} \varkappa(t_1,t_2)t_1t_2e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}\left(T\left(t\right)T_\varepsilon^{-1}(t)w,\frac{\partial w}{\partial t_1}\right)dt_1dt_2\\
=&\int_0^{s_2}\left[\varkappa(t_1,t_2)t_1t_2e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}\left(T\left(t\right)T_\varepsilon^{-1}(t)w,w\right)\right]_{t_1=s_1}dt_2\\
&+c\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}\varkappa(t_1,t_2)t_1t_2e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}\left(T\left(t\right)T_\varepsilon^{-1}(t)w,w\right)dt_1dt_2\\
&-\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}\varkappa(t_1,t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_2\left(T\left(t\right)T_\varepsilon^{-1}(t)w,w\right)dt_1dt_2\\
&+\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}\varkappa(t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_1t_2\left(T\left(t\right)T_\varepsilon^{-1}(t)w,w\right)dt_1dt_2\\
&-\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}\varkappa(t_1,t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_1t_2\left(\frac{\partial\left(T(t)T_\varepsilon^{-1}(t)\right)}{\partial t_1}w,w\right)dt_1dt_2\\
&-\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}\varkappa(t_1,t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_1t_2\left(T\left(t\right)T_\varepsilon^{-1}(t)\frac{\partial w}{\partial t_1},w\right)dt_1dt_2
\end{aligned}$$

implique que :

$$\begin{aligned}
&2Re\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}\varkappa(t_1,t_2)t_1t_2e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}\left(T\left(t\right)T_\varepsilon^{-1}(t)w,\frac{\partial w}{\partial t_1}\right)dt_1dt_2\\
=&\int_0^{s_2}\left[\varkappa(t_1,t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_1t_2\left|T^{\frac{1}{2}}\left(t\right)T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)w\right|^2\right]_{t_1=s_1}dt_2\\
&+c\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}\varkappa(t_1,t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_1t_2\left|T^{\frac{1}{2}}\left(t\right)T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)w\right|^2dt_1dt_2\\
&-\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}\varkappa(t_1,t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_2\left|T^{\frac{1}{2}}\left(t\right)T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)w\right|^2dt_1dt_2\\
&+\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}\varkappa(t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_1t_2\left|T^{\frac{1}{2}}\left(t\right)T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)w\right|^2dt_1dt_2\\
&-\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}\varkappa(t_1,t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_1t_2\left(\frac{\partial\left(T(t)T_\varepsilon^{-1}(t)\right)}{\partial t_1}w,w\right)dt_1dt_2 \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

De même maniére pour (K_4) par rapport a t_2 :

$$\begin{aligned}
&2Re\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}\varkappa(t_1,t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_1t_2\left(T\left(t\right)T_{\varepsilon}^{-1}(t)w,\frac{\partial w}{\partial t_2}\right)dt_1dt_2\\
=&\int_0^{s_1}\left[\varkappa(t_1,t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_1t_2\left|T^{\frac{1}{2}}\left(t\right)T_{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}(t)w\right|^2\right]_{t_2=s_2}dt_1\\
&+c\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}\varkappa(t_1,t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_1t_2\left|T^{\frac{1}{2}}\left(t\right)T_{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}(t)w\right|^2dt_1dt_2\\
&-\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}\varkappa(t_1,t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_1\left|T^{\frac{1}{2}}\left(t\right)T_{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}(t)w\right|^2dt_1dt_2\\
&+\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}\varkappa(t_1)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_1t_2\left|T^{\frac{1}{2}}\left(t\right)T_{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}(t)w\right|^2dt_1dt_2\\
&-\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}\varkappa(t_1,t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_1t_2\left(\frac{\partial\left(T(t)T_{\varepsilon}^{-1}(t)\right)}{\partial t_2}w,w\right)dt_1dt_2 \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

On remplace les formules (3.7), (3.8), (3.9), (3.10) dans l'équation (3.6) on obtient :

$$\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)t_1t_2\left(\left|T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)\frac{\partial w}{\partial t_1}\right|^2+\left|T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)w\,(t)\right|_t^2\right)dt_1dt_2$$

$$+\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)t_1t_2\left(\left|T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)\frac{\partial w}{\partial t_2}\right|^2+\left|T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)w\,(t)\right|_t^2\right)dt_1dt_2$$

$$+\int_0^{s_2}\left[\varkappa(t_1,t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_1t_2\left|T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)\frac{\partial w}{\partial t_2}\right|^2+\left|T^{\frac{1}{2}}(t)\,T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)w\right|^2\right]_{t_1=s_1}dt_2$$

$$+\int_0^{s_1}\left[\varkappa(t_1,t_2)e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}t_1t_2\left|T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)\frac{\partial w}{\partial t_1}\right|^2+\left|T^{\frac{1}{2}}(t)\,T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)w\right|^2\right]_{t_2=s_2}dt_1$$

$$=\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)t_2\left(\left|T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)\frac{\partial w}{\partial t_1}\right|^2+\left|T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)w\,(t)\right|_t^2\right)dt_1dt_2+$$

$$\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)t_1\left(\left|T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)\frac{\partial w}{\partial t_1}\right|^2+\left|T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)w\,(t)\right|_t^2\right)dt_1dt_2$$

$$-c\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)t_1t_2\left(\left|T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)\frac{\partial w}{\partial t_1}\right|^2+\left|T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)\frac{\partial w}{\partial t_2}\right|^2\right)dt_1dt_2$$

$$-2c\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)t_1t_2\left|T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)w\right|_t^2dt_1dt_2$$

$$-2Re\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)t_1t_2\left(\frac{\partial^2T_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_1\partial t_2}w,\Lambda w\right)dt_1dt_2$$

$$-2Re\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)t_1t_2\left(\frac{\partial T_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_1}\frac{\partial w}{\partial t_2}+\right.$$

$$\left.\frac{\partial T_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_2}\frac{\partial w}{\partial t_1},\Lambda w\right)dt_1dt_2+Re\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} e^{c(T_1+T_2-t_1d-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)t_1t_2\times$$

$$\left(\left(\frac{\partial T_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_1}\frac{\partial w}{\partial t_2},\frac{\partial w}{\partial t_1}\right)+\left(\frac{\partial T_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_2}\frac{\partial w}{\partial t_1},\frac{\partial w}{\partial t_2}\right)\right)dt_1dt_2$$

$$+Re\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)t_1t_2\times$$

$$\left(\left(\frac{\partial\left(T\,(t)\,T_\varepsilon^{-1}(t)\right)}{\partial t_2}w,w\right)+\left(\frac{\partial\left(T\,(t)\,T_\varepsilon^{-1}(t)\right)}{\partial t_1}w,w\right)\right)dt_1dt_2 \qquad (3.11)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et prenant en considération que $\left\|\dfrac{\partial^2T_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_1\partial t_2}\right\|$

et $\left\|\dfrac{\partial T_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_i}\right\|$ tendent vers 0 quand ε tend vers 0 alors le $5^{\text{ième}}$, $6^{\text{ième}}$, et le $7^{\text{ième}}$ terme dans le coté droit du (3.10) peuvent être estimer par 0. En appliquant les propriétés des opérateurs de régularisation et la condition (c) sur la dernière intégrale, on a les calcules suivantes :

Pour $\varepsilon \longrightarrow 0$ on a :

$$\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)t_1t_2\left(\left|T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)\frac{\partial w}{\partial t_1}\right|^2+\left|T_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t)u\,(t)\right|_t^2\right)dt_1dt_2$$
$$\longrightarrow \int_0^{s_1}\int_0^{s_1} e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)t_1t_2\left(\left|\frac{\partial w}{\partial t_1}\right|^2+|w\,(t)|_t^2\right)dt_1dt_2$$

Le même calcul pour le $2^{\text{iéme}}$, $3^{\text{iéme}}$ et $4^{\text{iéme}}$ termes dans le coté gauche de l'équation (3.11).

Il y a :

$$\begin{aligned}
Re\left(\frac{\partial(T(t)T_\varepsilon^{-1}(t))}{\partial t_i}w,w\right) &= -Re\left(T(t)T_\varepsilon^{-1}(t)\frac{\partial T_\varepsilon^{-1}(t))}{\partial t_i}T(t)T_\varepsilon^{-1}(t)w,w\right)\\
&= -Re\left(\frac{\partial T_\varepsilon^{-1}(t)}{\partial t_i}T_\varepsilon^{-1}(t)w,T(t)T_\varepsilon^{-1}(t)w\right)\\
&\leq a_i(T^{-1}(t)T(t)T_\varepsilon^{-1}w,T(t)T_\varepsilon^{-1}(t)w)\\
&\leq a_i(T_\varepsilon^{-1}(t)w,T(t)T_\varepsilon^{-1}(t)w)=a_i|T_\varepsilon^{-1}(t)w(t)|_t^2
\end{aligned}$$

Donc on obtient :

$$Re\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)t_1t_2\left[\left(\frac{\partial(T(t)T_\varepsilon^{-1}(t))}{\partial t_1}w,w\right)+\left(\frac{\partial(T(t)T_\varepsilon^{-1}(t))}{\partial t_2}w,w\right)\right]dt_1dt_2$$
$$\leq (a_1+a_2)\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)|T_\varepsilon^{-1}(t)w(t)|_t^2dt_2dt_2$$

Et pour $\varepsilon \longrightarrow 0$ on a :

$$(a_1+a_2)\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)|T_\varepsilon^{-1}(t)w(t)|_t^2dt_2dt_2 \longrightarrow$$
$$(a_1+a_2)\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} e^{c(s_1+s_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)|w(t)|_t^2dt_2dt_2$$

D'apés les formules précédentes il résulte que :

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)t_1t_2\left(\left|\frac{\partial w}{\partial t_1}\right|^2+|w(t)|_t^2\right)dt_1dt_2+\\
&\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)t_1t_2\left(\left|\frac{\partial w}{\partial t_1}\right|^2+|w(t)|_t^2\right)dt_1dt_2\\
\leq\ &\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)t_2\left(-ct_1+1\right)\left|\frac{\partial w}{\partial t_1}\right|^2 dt_1dt_2\\
&\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)t_1\left(-ct_2+1\right)\left|\frac{\partial w}{\partial t_2}\right|^2 dt_1dt_2\\
&(-2c+a_2+a_1)\int_0^{s_1}\int_0^{s_1} e^{c(T_1+T_2-t_1-t_2)}\varkappa(t_1,t_2)t_1t_2\,|w|_t^2\,dt_1dt_2. \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

$> 0, T_1$

$c > \frac{1}{T_1}$

pour $c \geq \max\left\{\frac{1}{T_1}, \frac{1}{T_2}, \frac{a_2+a_1}{2}\right\}$ le membre droit du (3.12) est négatif, alors $\left|\frac{\partial w}{\partial t_1}\right| = \left|\frac{\partial w}{\partial t_2}\right| = |w|_t^2 = 0$ ce qui donne $v = 0$, en effet pour $v \in C(\Omega, H)$, l'opérateur Λ est inversible et si $\Lambda v = g$ alors

$$
v = \begin{cases} \int_{t_1-t_2}^{t_1} g(s_1, s_1 - t_1 + t_2)\,ds_1, & t_1 \geq t_2 \\ \int_{t_2-t_1}^{t_2} g(s_2 + t_1 - t_2, s_2)\,ds_2, & t_1 < t_2. \end{cases}
$$

Bibliographie

[1] **H.Brezis**, *"Annalyse fonctionnelle Théorie et applications"*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983.

[2] **N.I. BRICH, N.I. YURCHUK.** *Goursat's problem for abstract second order linear differential equations.* Diff. Uravn, 7, 1017-1030, (1971).

[3] **N.I. BRICH, N.I. YURCHUK.** *Some new boundary value problems for a class of partial differential equations.* Diff. Uravn, 6, 1624-1630, (1968).

[4] **T.KATO**, *"Perturbation theory for linear operateurs",Spring-Verlag,Second edition,* 1980.

[5] **P.Lévy-Bruhl**, *Introduction á la théoric spectralc, DUNOD, paris,* 2003.

[6] **F.E. LOMOVTSEV**, *Necessary and sufficient conditions for the uniquess solvability of the Cauchy problem for second order hyperbolic equations with a variable domain of operator equations.* Diff. Uravn. Vol 28. N° 5. 712-722. (1992).

[7] **F.E. LOMOVTSEV**, *Differentiation and integration with respect to the parameter of infinite variable operators with variable domains of definition.* Doklad. Nats. Akad. Nauk. Belarusi. Vol 43, N° 1, 13-15, (1999).

[8] **F.E. LOMOVTSEV**, *The Cauchy problem for second order complete hyperbolic differential equation with variable domains of operator coefficients.* Diff. Uravn. N°. 4, 542 -548, 575.(2000).