République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 – Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux dérivées partielles**

Par :

Melle. Semeh HADDAD et Melle. Assia HADDAD

Intitulé

La solution stationnaire du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau

Dirigé par : Pr. Hisao FUJITA YASHIMA

Devant le jury

PRESIDENT	N. TABOUCHE	M.A.A	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	H. FUJITA YASHIMA	Prof	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	F. ELLAGGOUNE	M.C.A	Univ-Guelma
	L. ZENKOUFI	M.A.A	Univ-Guelma

Session Juin 2011

$15^h \to 15^h50$

ES. 13

UNIVERSITÉ 08 MAI 45 GUELMA

FIMSM

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de Master

Option : Equation aux dérivées partielles

La solution stationnaire du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau .

Par

Sameh Haddad et Assia Haddad

Dirigé par Mr.Hisao Fujita Yashima

Année universitaire 2011

Table des matières

Remerciements

Nous voudrions en premier lieu remercier Monsieur **Hisao Fujita Yashima** d'avoir dirigé notre mémoire, et de nous avoir initié à l'étude d'un phénomène intéressante, ainsi qu'à de passionnants sujets de recherche. Ses conseils, sa disponibilité, sa rigueur intellectuelle à laquelle nous avons pu nous référe et sa clairvoyance mathématique m'ont permis de venir à bout de ce travail.

Nous aimerions aussi exprimer nos gratitude aux Mmes : **N.Tabouche,L.Zenkoufi** et monsieur **F.Ellaggonne** qui nous font l'honneur d'être membres du jury de soutenance.
Nous remercions chaleureusement nos parents pour nous avoir éduqués dans un milieu où la connaissance, l'effort sont importants.

Nous voudrions remercier nos camarades de l'université et d'ailleurs, qui nous ont accompagnées pendant ces années. Merci à eux pour leurs gentillesse et pour les discussions partagées. Nos pensées vont à nos amies, pour tout ce qu'ils nous apportent, mais surtout pour leurs amitié.

Enfin, nous tenons à exprimer nos profonde affection à nos familles, qui nous ont toujours soutenues.

Nous terminons avec un remerciement bien particulier à quiconque qui de prés ou de loin a contribué à notre réussite.

Chapitre 1

Introduction

Soucieux de futur de notre planète, le monde s'intéresse aux problèmes du climat et désire en connaitre le mécanisme et les conséquences. Pour répondre à des nombreuses questions qui se posent, la modilisation mathématique des phénomènes atmosphériques et météorologiques est aujourd'hui plus nécessaire que jamais. Toute fois à cause de la complexité des phénomènes jusqu'à maintenant la majorité des scientifiques se contentait des modèles complets et on s'est contenté de modèles partiels ou simplifiés.

Nous nous intéressons à la structure des nuages et de la pluie. En effet, l'atmosphére contient H_2O en trois états : gazeux, liquide et solide à la température normale de notre environnement. L'eau en état liquide dans l'atmosphére se trouve sous la forme de gouttelettes ; quand celles-ci sont petites, elles sont suspendues dans l'air, ce qui forme des nuages ; quand elles sont relativement grandes, elles descendent avec de différentes vitesses, ce que nous appelons commênément la pluie.

Comme on le connait bien, la transition de phase de l'eau dans l'atmosphére, en faisant naitre des nuages et en provoquant de la pluie, joue le rôle très important dans l'études des phénomènes météorologiques. L'étude mathématique d'un système d'équations qui décrit d'une manière suffisamment complète les phénomènes atmosphériques impliquant la transition de phase de l'eau est donc fort souhaitable. Il y a eu plusieurs tentative de modélisation mathématique de ces phénomènes. Mais jusqu'a présent la complexité des phénomènes nous a empêché d'établir un système d'équations assez complet et de l'analyser pour obtenir des caractérisations fondamentales.

Dans [2], [5] on a proposé un modéle mathématique pour le mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau et démontré un théorème d'existance et d'unicité pour un système d'équations approchées de ce modèle.

Le but de l'étude que nous présentons dans la présent mémoire est d'analyser l'équation de proçussus de coagulation de gouttelettes dans le champs de gravitation, en démontrant l'existence et l'unicité de la solution ainsi que sa régularité. Notre travail se base sur [4], complété par l'analyse de la régularité dans le cadre des espaces de Sobolev (voir [1]). Du poit de vue technique les insfruments principaux sont les propriétés des opérateurs intégraux et le théorème de Cauchy-Lipshitz dans un espace de Banach, outre des techniques habituelles de l'estimation dans des espaces de Sobolev.

Dans le chapitre 2 nous étudions le système d'équations du modèle général.
Dans le chapitre 3 nous étudions la solution stationnaire dans le cas simple.
Et à la fin dans le chapitre 4 nous étudions la régularité de la solution.

Chapitre 2

Système d'équations du modèle général

2.1 - Description de la formation et l'évaporation des gouttelettes.

Pour décrire la formation et l'évaporation des gouttelettes, rappelons d'abord que la condensation aura lieu quand la densité de la vapeur d'eau notée $\pi(x,t)$ dans l'air dépasse la densité de la vapeur saturée notée $\bar{\pi}_s = \bar{\pi}_s(T)$, qui est fonction de la température T, et que l'évaporation de l'eau des gouttelettes aura lieu quand $\pi(x,t) < \bar{\pi}_s(T)$.

Introduisons une fonction $S_l(m)$ qui représente la surface des gouttelettes de masse m, où nous considérons m comme la somme de la masse de H_2O et de celle des noyaux (dits *aérosols*) à l'exception des gouttelettes d'eau de diamètre trop petit. Nous supposons que

$$S_l(m) \in C^1([0,\infty[), \tag{2.1}$$

$$S_l(m) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq m \leq \bar{m}_a/2, \qquad S_l(m) = 3^{2/3}(4\pi)^{1/3}m^{2/3} \quad \text{pour} \quad m \geq \bar{m}_A \tag{2.2}$$

avec $0 < \bar{m}_a < \bar{m}_A < \infty$ ($\bar{m}_a$ et $\bar{m}_A$ représentent les bornes inférieure et supérieure de la masse des aérosols susceptibles de la formation de gouttelettes).

Avec $S_l(m)$ ainsi définie et avec $\pi(x,t)$ et $\bar{\pi}_s(T)$, nous introduisons la quantité de condensation sur les gouttelettes de masse m (par unité de masse)

$$h_{gl}^0(m) = h_{gl}^0(T,\pi,m) = K_1 \frac{S_l(m)}{m}(\pi - \bar{\pi}_s(T)), \tag{2.3}$$

où K_1 est le coefficient positif de la vitesse de condensation ou d'évaporation. On introduit également la quantité totale de condensation sur toutes les gouttelettes

$$H_{gl}^{0}(T,\pi,\sigma)=K_1\big(\pi-\bar{\pi}_s(T)\big)\int\limits_0^\infty \frac{S_l(m)}{m}\sigma(m)dm, \tag{2.4}$$

où $\sigma(m)$ désigne la densité de H_2O à l'état liquide contenue dans des gouttelettes de masse m. On a évidemment

$$h_{gl}^{0}(m)=\frac{m^{-1}S_l(m)}{\int\limits_0^\infty m'^{-1}S_l(m')\sigma(m')dm'}H_{gl}^{0}(T,\pi,\sigma).$$

En outre, on introduit la probabilité avec laquelle une gouttelette de masse m apparaît avec le début de condensation et celle avec laquelle une gouttelette de masse m disparaît suite à l'achèvement de l'évaporation. On définit la probabilité de la formation de nouvelles gouttelettes de masse m donnée par

$$g_0(m)[N^*-\tilde{N}(\sigma)]^+[\pi-\bar{\pi}_s(T)]^+, \tag{2.5}$$

où N^* est le nombre total de gouttelettes qui peuvent être formées dans l'unité de volume, tandis que $\tilde{N}(\sigma)$ représente le nombre dans l'unité de volume des aérosols qui se trouvent déjà dans des gouttelettes et est donné par

$$\tilde{N}(\sigma)=\int_0^\infty \frac{\sigma(m)}{m}dm+C_l\int_0^\infty \sigma(m)dm.$$

De manière analogue on définit la probabilité de disparition des gouttelettes

$$g_1(m)[\pi-\bar{\pi}_s(T)]^-. \tag{2.6}$$

Comme au moment du début de la condensation ou de l'achèvement de l'évaporation la masse de la gouttelette m est celle du noyau (aérosol) qui ne s'annule pas, on suppose que

$$g_0(\cdot),\ g_1(\cdot)\in C^1([0,\infty[),\qquad \operatorname{supp} g_0(\cdot)\subset[\bar{m}_a,\bar{m}_A]\,,\qquad \operatorname{supp} g_1(\cdot)\subset[0,\bar{m}_A]. \tag{2.7}$$

2.2 - Système d'équations.

Les quantités physiques que nous devons considérer sont la densité de l'air sec ϱ, la densité de la vapeur π, la densité de l'eau liquide $\sigma(m)$, la vitesse de l'air v, la vitesse des gouttelettes

$u(m)$, la température T et la pression p. On suppose que la pression est déterminée par l'équation

$$p = R(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h})T, \tag{2.8}$$

où R, μ_a et μ_h sont respectivement la constante universelle des gaz, la masse molaire moyenne de l'air et la masse molaire de l'eau. D'autre part, supposons que la vitesse $u(m)$ des gouttelettes de masse m est donnée par

$$u(m,x,t) = v(x,t) - \frac{1}{\alpha_l(m)}f, \tag{2.9}$$

où $v(x,t)$ est la vitesse de l'air, $\alpha_l(m)$ le coefficient de frottement entre les gouttelettes et l'air et $f = \frac{d\Phi}{dx}$ la force extérieure donnée par le grandient d'un potentiel $\Phi(x)$. On suppose que $\alpha_l(\cdot) \in C^1([0,\infty[)$, $\alpha_l(m) > 0\ \forall m \in [0,\infty[$.

Nous allons considérer le système d'équations dans le domaine en une dimension $I :=]0,1[$, aux extrémités duquel nous posons les conditions aux limites homogènes pour v et les conditions non-homogènes $T(0,t) = a_T$, $T(1,t) = b_T$ pour T. Il nous est commode de considérer, au lieu de T, la fonction inconnue ϑ définie par

$$T = T_0 + \vartheta, \qquad T_0(x) = (1-x)a_T + xb_T. \tag{2.10}$$

Dans la suite toutefois nous continuons à utiliser T dans l'expression de $\bar{\pi}_s(T)$ et les expressions qui le contiennent, mais dans les calculs nous devons traiter ϑ, en rappelant (2.10). Nous allons envisager dans le domaine $I =]0,1[$ et pour nous $t \geq 0$ le système d'équation que nous proposons est le suivant :

$$(\varrho+\pi)(\partial_t v + v\partial_x v) = \eta\partial_x^2 v - R\partial_x\Big[\Big(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h}\Big)(\vartheta + T_0)\Big] - \Big(\varrho + \pi + \int_0^\infty \sigma(m)dm\Big)f \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}(\varrho+\pi)c_v(\partial_t\vartheta + v\partial_x\vartheta) + R\Big(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h}\Big)(\vartheta + T_0)\partial_x v &= \\ = \kappa\partial_x^2\vartheta + \eta(\partial_x v)^2 + E_{rad} + L_{gl}H_{gl} - (\varrho+\pi)c_v v\partial_x T_0\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\partial_t \varrho + \partial_x(\varrho v) = 0 \tag{2.13}$$

$$\partial_t \pi + \partial_x(\pi v) = -H_{gl}(T, \pi, \sigma) \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} \partial_t \sigma(m) + \partial_x\big(\sigma(m)u(m)\big) + \partial_m\big(mh_{gl}(m)\sigma(m)\big) = h_{gl}(T,\pi,m)\sigma(m) + \\ + \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m')\sigma(m-m')dm' - m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m)\sigma(m')dm' + \\ + g_0(m)\big[N^* - \tilde{N}(\sigma)\big]^+[\pi - \bar{\pi}_s]^+ - g_1(m)\big[\pi - \bar{\pi}_s(T)\big]^-\sigma(m) \end{aligned} \tag{2.15}$$

où η est le coefficient de viscosité, c_v la chaleur spécifique de l'air, κ le coefficient de thermoconductibilité, L_{gl} la chaleur latente, E_{rad} la source de la chaleur (comme celle due á la radiation) et $\beta(m, m')$ la probabilité de rencontre entre une gouttelettes de masse m et une de masse m' ; η ; c_v ; κ et L_{gl} sont considérés comme constantes strictement positives. Les équations (2.11)–(2.13) sont formulées sur la base de la mécanique des fluides classique, tandis que les équations (2.14)–(2.15) résultent des considérations du paragraphe précédent. Le systme d'équations (2.11)–(2.15) doit etre considéré avec les conditions aux limites

$$v = 0, \ \vartheta = 0 \qquad \text{pour} \quad x = 0 \ \text{ et } \ x = 1. \tag{2.16}$$

Pour la formulation des équations présentées ci-dessus, voir [2], [5]. Pour le processus de coagulation, voir [3], [6].

Chapitre 3

Solution stationnaire dans le cas simple

3.1 Réduction au système d'équations du cas stationnaire

Nous allons considérer le cas stationnaire du système d'équations (2.11)–(2.15), c'est-à-dire

$$\partial_t v = \partial_t \vartheta = \partial_t \varrho = \partial_t \pi = \partial_t \sigma = 0. \tag{3.1}$$

On les substitue dans (2.11) - (2.15). En outre dans cette étude nous supposons que

$$v = 0. \tag{3.2}$$

Si nous substituons les conditions (3.1)-(3.2) dans (2.11), l'équation se réduit à

$$-R\partial_x[(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h})(\vartheta + T_0)] - (\varrho + \pi + \int_0^\infty \sigma(m)dm)f = 0. \tag{3.3}$$

Maintenant nous substituons $v = 0$ et $\partial_t \varrho = 0$ dans l'équation (2.13). Alors les deux membres de l'équation s'annule ; donc l'équation se réduit à une équation évidente "$0 = 0$".
Si nous substituons $\partial_t \pi = 0$ et $v = 0$ dans l'équation (2.14), alors l'équation se réduit à

$$-H_{gl}(T, \pi, \sigma) = 0. \tag{3.4}$$

L'équation (3.4) signifie qu'il n'existe ni condensation ni évaporation. Or, pour que la condensation ainsi que l'évaporation soit absente, il faut que π soit égale à la densité de la vapeur satirée $\bar{\pi}_s(T)$,

$$\pi = \bar{\pi}_s(T). \tag{3.5}$$

Considérons en fin l'équation (2.12). Nous substituons dans cette équation les relation $\partial_t \vartheta = 0$, $v = 0$, $H_{gl} = 0$ et nous supposons que la source de l'énergie E_{rad} est égale à zéro. Alors l'équation se réduit à

$$\kappa \partial_x^2 \vartheta = 0. \tag{3.6}$$

On voit aisément que l'équation (3.6), jointe à la condition (2.16), $\vartheta = 0$ pour $x = 0$ et $x = 1$, implique que

$$\vartheta = 0. \tag{3.7}$$

En effet, de la relation

$$\kappa \partial_x^2 \vartheta = 0$$

il résulte que

$$\partial_x \vartheta = c_1.$$

Donc on a

$$\vartheta = c_1 x + c_2.$$

Mais, comme on a

$$\vartheta = 0 \qquad \text{pour} \quad x = 0\ ,$$

on a $c_2 = 0$. En outre, la condition

$$\vartheta = 0 \qquad \text{pour} \quad x = 1$$

implique que $c_1 = 0$. Donc on en déduit que

$$\vartheta = 0.$$

En rappelant la définition (2.3) de $h_{gl}(m)$ et en y substituant la relation $\pi = \bar{\pi}_S(T)$ (voir (3.5)), on a

$$h_{gl}(m) = 0.$$

En substituant cette relation dans (2.15), on a

$$\partial_x(\sigma(m)u(m)) = \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m', m')\sigma(m')\sigma(m-m')dm' \tag{3.8}$$

$$-m\int_0^\infty \beta(m, m')\sigma(m)\sigma(m')dm'.$$

Maintenant nous retournons à l'équation (3.3) et nous y substituons $\vartheta = 0$ et $\pi(x) = \bar{\pi}_S(T)$. Alors on voit que cette équation se réduit á :

$$-R\partial_x[(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\bar{\pi}_S(T)}{\mu_h})T_0] - (\varrho + \bar{\pi}_S(T) + \int_0^\infty \sigma(m)dm)f = 0. \tag{3.9}$$

En conclusion, on peut remarquer que dans le cas stationnaire avec $v = 0$ le système d'équations (2.11)–(2.15) se réduit à système de deux équations (3.8)–(3.9). Dans la suite nous allons étudier ce nouveau système d'équations avec les conditions

$$\sigma(m, 1) = \bar{\sigma}(m), \tag{3.10}$$

$$\int_0^1 \varrho(x)dx = 1. \tag{3.11}$$

Avant d'envisager la question de l'existence et l'unicité de la solution, on va établir la propriété suivante.

Remarque 3.1.1 *On suppose que $\beta(m_1, m_2) = 0$ pour $m_1 + m_2 \geq \bar{M} - 1$. On suppose en outre que*

$$\bar{\sigma}(m) = 0 \qquad \textit{pour} \;\; m \leq \bar{m} + \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0).$$

Si $\sigma(m, x)$ vérifie l'équation (3.8) et la condition (3.10), alors on a

$$\operatorname{supp}(\sigma(\cdot, x)) \subset]\bar{m}, \bar{M}[\qquad \textit{pour tout } x \in [0, 1].$$

3.2 Existence et unicité de la solution.

Dans ce paragraphe nous allons établir le théorème d'existence et unicité pour le système d'équations (3.8)–(3.9). Nous rappellons d'abort le théorème suivant.

Théorème 3.2.1 *Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq p \leq \infty$.*
Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $y \mapsto f(x - y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$.
On pose

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y)g(y)dy.$$

Alors $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}.$$

Pour la démonstration, voir [1], pp. 66–67.

Maintenant nous démontrons le théorème principal.

Théorème 3.2.2 *Le système des équations* (3.8)–(3.9) *avec les conditions* (3.10) *et* (3.11) *admet une solution* (ϱ, σ) *et une seule dans la classe*

$$(\varrho, \sigma) \in C^0(I) \times C^0(I; L^1(\mathbb{R}_+)).$$

Preuve.

Nous allons chercher la solution du système des équations (3.8)–(3.9). On note

$$T(x) = T_0(x)$$

où $T_0(x)$ est défini dans l'équations (2.10).

On rappelle que, comme nous considérons le cas d'équilibre, on a

$$\pi(x) = \bar{\pi}_s(T)$$

(voir (3.5)).

Comme nous l'avons vu ci-dessus, le système d'équation (2.11)–(2.15) se réduit à

$$-\frac{R}{\mu_a}\partial_x(\varrho.T) - \varrho f - \int_0^\infty \sigma(m) f dm = \frac{R}{\mu_h}\partial_x(\bar{\pi}_s(T)T) + \bar{\pi}_s(T) f, \tag{3.12}$$

$$\partial_x(\sigma(m,x)u(m)) = \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m', m')\sigma(m', x)\sigma(m-m', x)dm' \tag{3.13}$$

$$-m\int_0^\infty \beta(m, m')\sigma(m, x)\sigma(m', x)dm'.$$

Donc il suffit de résoudre le système d'équation (3.12)–(3.13). On sait que $0 \leq \sigma$. L'autre propriété importante est le lemme suivant.

Lemme 3.2.1 *Si* $\sigma(m, x)$ *satisfait à* (3.13), *alors*

$$\int_0^\infty (\sigma(m, x)u(m)) = const.$$

(c'est -à- dire cette intégrale ne dépand pas de x)

Preuve. Pour démontrer ce lemme il faut montrer que

$$I = \int_0^\infty \int_0^m \frac{m}{2}\beta(m-m', m')\sigma(m')\sigma(m-m')dm'dm \tag{3.14}$$

.

$$-\int_0^\infty \int_0^\infty m\beta(m, m')\sigma(m')\sigma(m)dm'dm = 0.$$

Pour le premier membre on utilise le changment de variable φ

$$\varphi \begin{cases} q = m - m' \\ r = m' \end{cases} \tag{3.15}$$

telle que

$$det J_\varphi = 1$$

donc on a

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{q+r}{2}\beta(q, r)\sigma(r)\sigma(q)drdq - \int_0^\infty \int_0^\infty m\beta(m, m')\sigma(m')\sigma(m)dm'dm$$

Et comme q, r sont des variables arbitraires, on peut écrire

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{m+m'}{2}\beta(m, m')\sigma(m')\sigma(m)dm'dm - \int_0^\infty \int_0^\infty m\beta(m, m')\sigma(m')\sigma(m)dm'dm.$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{m'-m}{2}\beta(m, m')\sigma(m')\sigma(m)dm'dm.$$

Grâce à la symétrie de la fonction $\beta(m, m') = \beta(m', m)$, on a

$$I = -\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{m-m'}{2}\beta(m', m)\sigma(m')\sigma(m)dm'dm$$

Et d'après le théorème de Fubini on a

$$I = -\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{m-m'}{2}\beta(m', m)\sigma(m)\sigma(m')dmdm',$$

d'oú on obtient

$$I = -I,$$

ce qui implique que

$$I = 0.$$

Etant démontré que la deuxième membre de (3.13) est égal à 0,

on a

$$\partial_x(\sigma(m,x)u(m)) = 0,$$

d'où on obtient

$$\forall x \in [0,1] \qquad \int_0^\infty (\sigma(m,x)u(m)) = const.$$

□

Corollaire 3.2.1 *Si $\sigma(m,x)$ satisfait à (3.13), alors*

$$\|\sigma(\cdot,x)\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \leq c < \infty$$

Preuve. On rappelle que $\sigma(m) = 0$ pour $m \leq \bar{m}_a$ et $m \geq m_A$

donc on a

$$\inf_{m\in[\bar{m}_a,m_A]} u(m) \int_0^\infty \sigma(m,x)dm \leq \int_0^\infty \sigma(m,x)u(m)dm \leq \sup_{m\in[\bar{m}_a,m_A]} u(m) \int_0^\infty \sigma(m,x)dm.$$

et comme on a

$$0 < \inf_{m\in[\bar{m}_a,m_A]} u(m) \leq \sup_{m\in[\bar{m}_a,m_A]} u(m) < \infty,$$

on a

$$\frac{1}{\sup_{m\in[\bar{m}_a,m_A]} u(m)} \leq \int_0^\infty \sigma(m,x)dm = \|\sigma(\cdot,x)\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \leq \frac{1}{\inf_{m\in[\bar{m}_a,m_A]} u(m)} \int_0^\infty \sigma(m,x)u(m)dm.$$

L'inégalité résulte du lemme 3.2.1 et de cette dernière inégalité.

□

Donc pour résoudre le système (3.12)–(3.13) on choisit un espace de Banach convenable. En effet, comme on le verra, l'espace $L^1(\mathbb{R}_+)$ est adéquat à notre problème. Toutefois, comme nous l'avons vu dans la remarque 3.1.1, on peut supposer que $\mathrm{supp}(\sigma(\cdot,x)) \subset]\bar{m},\bar{M}[$, ce qui implique que

$$\|\sigma(\cdot,x)\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} = \|\sigma(\cdot,x)\|_{L^1(\bar{m},\bar{M})}.$$

Donc dans la suite on va utiliser $L^1(\bar{m},\bar{M})$ au lieu de $L^1(\mathbb{R}_+)$.

Maintenant nous rappelons le théorème d'existence et unicité de la solution locale pour les équations différentielles ordinaires.

Définition 3.2.1 *(problème de Cauchy) Soit d un entier strictement positif, $u_0 \in \mathbb{R}^d$ et f une fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On appelle problème de Cauchy le problème suivant : trouver $u : [0,t_1[\to \mathbb{R}^d$ ($t_1 > 0$; on admet le cas $t_1 = \infty$), de classe $C^1([0,t_1[;\mathbb{R}^d)$, telle que*

$$\frac{du}{dt} = f(u(t)), \qquad \textit{pour } t > 0, \qquad u(0) = u_0 \tag{3.16}$$

Définition 3.2.2 *(Application lipschitzienne.) Soit V un espace vectoriel normé, et f application de V dans V. On dit que f est lipschitzienne sur V s'il existe une constante $L > 0$ telle que :*

$$\|f(u_1) - f(u_2)\|_V \leq L\|u_1 - u_2\|_V \qquad \forall u_1, u_2 \in V. \tag{3.17}$$

On dit que f est localement lipschitzienne sur V si, pour tout $M > 0$ il existe une constante $L_M > 0$ telle que :

$$\|f(u_1) - f(u_2)\|_V \leq L_M\|u_1 - u_2\|_V \qquad \forall u_1, u_2 \in V,\ \|u_1\|_V \leq M,\ \|u_2\|_V \leq M. \tag{3.18}$$

Théorème 3.2.3 *(Cauchy-Lipschitz) On suppose que la fonction $f(\cdot)$ est localement lipschitzienne. Alors il existe un $t_1 > 0$ tel que le problème de Cauchy (3.16) admet une unique solution $u \in C^1([0,t_1[,\mathbb{R}^d)$.*
En outre, si la fonction $f(\cdot)$ est lipschitzienne, alors le problème de Cauchy (3.16) admet une unique solution $u \in C^1([0,\infty[,\mathbb{R}^d)$.

On peut généraliser ce théorème pour les fonctions inconnues à valeurs dans un espace de Banach.

Théorème 3.2.4 *(Cauchy-Lipschitz-Picard.) Soit E un espace de Banach et soit $F : E \to E$ une application telle que*

$$\|Fu - Fv\| \leq L\|u - v\| \qquad \forall u, v \in E (L \geq 0.) \tag{3.19}$$

Alors pour tout $u_0 \in E$ il existe $u \in C^1([0, \infty[; E)$ unique telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Fu & sur \quad [0, \infty[\\ u(0) = u_0 & donnée\ initiale. \end{cases} \tag{3.20}$$

Pour la démonstration, voir [1], pp. 104–105.

Commençons par l'équation (3.13). Comme $u(m)$ ne dépend pas de x, on a $\partial_x(\sigma(m, x)u(m)) = u(m)\partial_x\sigma(m, x)$, ce qui nous permet de l'écrire dans la forme

$$\frac{d\sigma}{dx} = F(\sigma), \tag{3.21}$$

où

$$\begin{aligned} F(\sigma) = & \frac{m}{2u(m)} \int_0^m \beta(m - m' - m')\sigma(m', x)\sigma(m - m', x)dm' \\ & - \frac{m}{u(m)} \int_0^\infty \beta(m, m')\sigma(m, x)\sigma(m', x)dm' \end{aligned} \tag{3.22}$$

avec la condition initiale (3.10). Ici nous considérons l'équation (3.21) comme une équation différentielle ordinaire à valeurs dans l'espace de Banach $L^1(\mathbb{R}_+)$ et $F(\cdot)$ comme un opérateur défini sur $L^1(\mathbb{R}_+)$ à valeurs dans $L^1(\mathbb{R}_+)$.

Pour appliquer le théorème de de Cauchy-Lipschitz généralisé (le théorème 3.2.4) aux équations dans un espace de Banach et démontrer l'éxistence et l'unicité de la solution locale du problème de Cauchy (3.21), (3.10), il suffit de démontrer que l'opérateur $F(\cdot)$ défini dans (3.22) vérifie localement la condition de Lipschitz, c'est-à-dire la condition (3.18).

Pour cela on pose

$$C_\beta = \sup_{m,m'} \frac{m}{u(m)}\beta(m, m').$$

On a alors

$$\|F(\sigma_1) - F(\sigma_2)\|_{L^1} = \int_{\bar{m}}^{\bar{M}} |F(\sigma_1) - F(\sigma_2)|dm' =$$

$$= \int_{\bar{m}}^{\bar{M}} |\frac{m}{2u(m)} \int_0^m \beta(m - m', m')(\sigma_1(m')\sigma_1(m - m') - \sigma_2(m')\sigma_2(m - m'))dm'$$

$$-\frac{m}{u(m)}\int_0^\infty \beta(m,m')(\sigma_1(m)\sigma_1(m') - \sigma_2(m)\sigma_2(m'))dm'|dm$$

$$\leq C_\beta[\int_{\bar{m}}^{\bar{M}}\int_0^\infty |\sigma_1(m')(\sigma_1(m-m') - \sigma_2(m-m'))$$

$$+(\sigma_1(m') - \sigma_2(m'))\sigma_2(m-m')|dm'dm$$

$$+\int_{\bar{m}}^{\bar{M}}\int_0^\infty |\sigma_1(m)(\sigma_1(m') - \sigma_2(m')) + (\sigma_1(m) - \sigma_2(m))\sigma_2(m')|dm'dm]$$

D'après l'inégalité de Hölder, et d'après le théorème 3.2.1 on a

$$\|F(\sigma_1) - F(\sigma_2)\|_{L^1} \leq$$

$$\leq C_\beta(\|\sigma_1 * (|\sigma_1 - \sigma_2|)\|_{L^1} + \|(|\sigma_1 - \sigma_2|) * \sigma_2\|_{L^1}$$

$$+\int_{\bar{m}}^{\bar{M}} (|\sigma_1(m)|\|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^1} + |\sigma_1(m) - \sigma_2(m)|\|\sigma_2\|_{L^1})dm)$$

$$\leq C_\beta(\|\sigma_1\|_{L^1}\|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^1} + \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^1}\|\sigma_2\|_{L^1} + (\|\sigma_1\|_{L^1} + |\sigma_2\|_{L^1})\|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^1})$$

$$\leq C_\beta\|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^1}.$$

Donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz on a l'éxistence et l'unicité de la solution locale σ dans un intervalle $[1-\varepsilon, 1]$. Pour prolonger la solution σ dans $x \in [0,1]$ il faut et il suffit d'établir une inégalité

$$\|\sigma(\cdot, x)\|_{L^1(\bar{m},\bar{M})} \leq C$$

avec une constante $C < \infty$.

Mais c'est l'affirmation de corollaire au lemme 3.2.1.

On pose

$$G(x) = \frac{R}{\mu_h}\partial_x(\bar{\pi}_s(T)T) + \bar{\pi}_s(T)f + \int_0^\infty \sigma f dm$$

Alors l'équation (3.12) se réduit à

$$\frac{R}{\mu_a}T\partial_x\varrho + (\frac{R}{\mu_a}\partial_x T + f)\varrho = G(x), \tag{3.23}$$

Nons cherchons la solution ϱ de (3.23) satisfaisant à

$$\int_0^1 \varrho(x)dx = 1. \tag{3.24}$$

Chapitre 4

Régularité de la solution

Théorème 4.0.5 *Soit $\sigma = \sigma(m,x)$ la solution de l'équation (3.8) obtenue dans le théorème 3.2.2. Soit $F(.)$ l'opérateur défini dans (3.22). Alors on a*

$$\|\sigma(\cdot,x)\|_{L^p}^p \leq \|\sigma(\cdot,1)\|_{L^p}^p \exp^{Cp(x-1)}, \tag{4.1}$$

$$\|\partial_m\sigma(\cdot,x)\|_{L^p}^p \leq \|\partial_m\sigma(\cdot,1)\|_{L^p}^p \exp^{Cp(x-1)} + C\int_1^x \|\sigma(\cdot,x)\|_{L^p}^p \exp^{Cp(x-x')} dx'. \tag{4.2}$$

avec une constante C.

Remarque 4.0.1 *On a, quelques soient $\alpha, \beta > 0$*

$$\begin{aligned} \alpha^\epsilon \cdot \beta^{1-\epsilon} &\leq \epsilon\alpha + (1-\epsilon)\beta \\ &\leq \alpha + \beta. \end{aligned}$$

Preuve.

On va démontrer que la fonction $f(x) = \alpha^x\beta^{1-x}$ est convexe.

En effet, si $f(x)$ est convexe, alors

$$\begin{aligned} f(\epsilon) = \alpha^\epsilon\beta^{1-\epsilon} &\leq (1-\epsilon)f(0) + \epsilon f(1) \\ &= (1-\epsilon)\beta + \epsilon\alpha. \end{aligned}$$

On considère que

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dx}f(x) &= \tfrac{d}{dx}[\exp^{(\log\alpha)x}\exp^{(\log\beta)(1-x)}] \\ &= (\log\alpha)\exp^{(\log\alpha)x}\exp^{(\log\beta)(1-x)} \\ &- (\log\beta)\exp^{(\log\alpha)x}\exp^{(\log\beta)(1-x)}. \end{aligned}$$

On a en outre
$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}f(x) &= \frac{d}{dx}[(\log\alpha-\log\beta)\exp^{(\log\alpha)x}\exp^{(\log\beta)(1-x)}]\\ &= (\log\alpha-\log\beta)^2\alpha^x\beta^{(1-x)}.\end{aligned}$$

On remarque que pour $0 \leq x \leq 1$

$$(\log\alpha-\log\beta)^2\alpha^x\beta^{(1-x)} > 0$$

Alors la fonction
$$f(x) = \alpha^x\beta^{1-x}$$

est convexe.

□

Lemme 4.0.2 *Soit* $\sigma = \sigma(m,x)$ *la solution de l'équation* (3.8) *obtenue dans la théorème 3.2.2. Soit* $F(.)$ *l'opérateur défini dans* (3.22). *Alors on a*

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dx}\|\sigma(\cdot,x)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^+)} \leq C\|\sigma\|^p_{L^p(\mathbb{R}^+)} \tag{4.3}$$

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dx}\|\partial_m\sigma(\cdot,x)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^+)} \leq C\|\partial_m\sigma\|^p_{L^p(\mathbb{R}^+)} + C\|\sigma\|^p_{L^p(\mathbb{R}^+)} \tag{4.4}$$

Preuve.

On écrit l'équation
$$\partial_x\sigma = F(\sigma). \tag{4.5}$$

1) On multiplié cette équation (4.5) par σ^{p-1} $(p>1)$, et on l'intègre sur $\mathbb{R}^+$.

On définit
$$C_\beta = \sup_{m,m'}\beta(m,m').$$

Alors
$$\frac{1}{p}\frac{d}{dx}\|\sigma\|^p_{L^p(\mathbb{R}^+)} = \int_{\mathbb{R}^+}\sigma^{p-1}F(\sigma)dm =$$

$$= \int_0^\infty \sigma^{p-1}(m,x)[\frac{m}{2u(m)}\int_0^m \beta(m-m'-m')\sigma(m',x)\sigma(m-m',x)dm'$$

$$-\frac{m}{u(m)}\int_0^{\infty}\beta(m,m')\sigma(m,x)\sigma(m',x)dm']dm$$

$$\leq C_\beta[\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\sigma^{p-1}(m,x)\sigma(m',x)\sigma(m-m',x)dm'dm$$

$$+\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\sigma^{p}(m,x)\sigma(m',x)dm'dm]$$

$$\leq C_\beta\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\sigma^{p-1}(m,x)\sigma(m',x)\sigma(m-m',x)dm'dm$$

$$\leq C_\beta\int_0^{\infty}\sigma^{p-1}(m,x)(\sigma*\sigma)(m)dm$$

D'après l'inégalité d'Hölder, et le théorème 3.2.1 on a

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{p}\tfrac{d}{dx}\|\sigma\|^p_{L^p(\mathbb{R}^+)} \leq\ & C_\beta\|\sigma^{p-1}\|_{L^q(\mathbb{R}^+)}\|\sigma*\sigma\|_{L^p(\mathbb{R}^+)}\\ \leq\ & C_\beta\|\sigma^{p-1}\|_{L^q(\mathbb{R}^+)}\|\sigma\|_{L^1}\|\sigma\|_{L^p(\mathbb{R}^+)},\end{aligned}$$

où $q=\frac{p}{p-1}$.
Comme $\sup\limits_{0\leq x\leq 1}\|\sigma\|_{L^1}<\infty$ il existe une constante C telle que

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{p}\tfrac{d}{dx}\|\sigma\|^p_{L^p(\mathbb{R}^+)} \leq\ & C\|\sigma\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{R}^+)}\|\sigma\|_{L^p(\mathbb{R}^+)}\\ =\ & C\|\sigma\|^p_{L^p(\mathbb{R}^+)}\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dx}\|\sigma(\cdot,x)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^+)}\leq C\|\sigma\|^p_{L^p(\mathbb{R}^+)}$$

2) On multiplié l'équation (4.5) par $(\partial_m\sigma)|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m$,

et on intègre sur $\mathbb{R}_+$ de sorte qu'on a

$$\int_0^{\infty}(\partial_m\sigma)|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\partial_x\sigma dm=\int_0^{\infty}(\partial_m\sigma)|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m F(\sigma)dm$$

donc

$$\int_0^{\infty}(\partial_m\sigma)|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\partial_x\sigma dm=$$

$$=\int_0^{\infty}(\partial_m\sigma)|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m(\frac{m}{2u(m)}\int_0^{m}\beta(m-m',m')\sigma(m',x)\sigma(m-m',x)dm'$$

$$-\frac{m}{u(m)}\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,x)\sigma(m',x)dm')dm$$

$$\leq |\frac{1}{2u(m)}\int_0^\infty\int_0^m (\partial_m\sigma)|\partial_m\sigma|^{p-2}\beta(m-m',m')\sigma(m',x)\sigma(m-m',x)dm'dm|$$

$$+|\frac{1}{2u(m)}\int_0^\infty (\partial_m\sigma)|\partial_m\sigma|^{p-2}m\beta(0,m)\sigma(m)\sigma(0)dm|$$

$$+|\frac{1}{2u(m)}\int_0^\infty\int_0^m (\partial_m\sigma)|\partial_m\sigma|^{p-2}m(\partial_m\beta(m-m',m'))\sigma(m',x)\sigma(m-m',x)dm'dm|$$

$$+|\frac{1}{2u(m)}\int_0^\infty\int_0^m (\partial_m\sigma)|\partial_m\sigma|^{p-2}m\beta(m-m',m')\sigma(m',x)(\partial_m\sigma(m-m',x))dm'dm|$$

$$+|\frac{1}{u(m)}\int_0^\infty\int_0^\infty (\partial_m\sigma)|\partial_m\sigma|^{p-2}\beta(m-m',m')\sigma(m',x)\sigma(m,x)dm'dm|$$

$$+|\frac{1}{u(m)}\int_0^\infty\int_0^\infty (\partial_m\sigma)|\partial_m\sigma|^{p-2}m(\partial_m\beta(m-m',m'))\sigma(m',x)\sigma(m,x)dm'dm|$$

$$+|\frac{1}{u(m)}\int_0^\infty\int_0^\infty (\partial_m\sigma)|\partial_m\sigma|^{p-2}m\beta(m-m',m')\sigma(m',x)(\partial_m\sigma(m,x))dm'dm|$$

comme on a supposé que $\beta(.,.)$ est une fonction régulière et bornée et que $\sigma(m') = 0$ pour $m' \leq m_a$, on a

$$\int_0^\infty (\partial_m\sigma)|\partial_m\sigma|^{p-2}m\beta(0,m)\sigma(m)\sigma(0)dm = 0,$$

$$m(\partial_m\beta(m-m',m')) \leq C_{\beta_2},$$

et

$$m\beta(m-m',m') \leq C_{\beta_3}$$

En outre d'après le corollaire du lemme 3.2.1, on a

$$\int_0^\infty \sigma(m',x)dm' \leq C_4.$$

On pose $\quad C=\sup\{C_{\beta_1},C_{\beta_2},C_{\beta_3},C_4\}$

donc

$$\int_0^\infty(\partial_m\sigma)|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\partial_x\sigma dm\leq$$

$$\leq C(\int_0^\infty|\partial_m\sigma|^{p-1}(\sigma*\sigma)(m)dm+\int_0^\infty|\partial_m\sigma|^{p-1}(\sigma*\partial_m\sigma)(m)dm$$

$$+\int_0^\infty|\partial_m\sigma|^{p-1}\sigma(m)dm+\int_0^\infty|\partial_m\sigma|^{p-1}(\partial_m\sigma(m))dm).$$

D'après l'inégalité de Hölder on a

$$\int_0^\infty(\partial_m\sigma)|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\partial_x\sigma dm\leq$$

$$\leq C(\||\partial_m\sigma|^{p-1}\|_{L^q(\mathbb{R}^+)}\|\sigma*\sigma\|_{L^p(\mathbb{R}^+)}+\||\partial_m\sigma|^{p-1}\|_{L^q(\mathbb{R}^+)}\|\sigma*\partial_m\sigma\|_{L^p(\mathbb{R}^+)}$$

$$+\||\partial_m\sigma|^{p-1}\|_{L^q(\mathbb{R}^+)}\|\sigma\|_{L^p(\mathbb{R}^+)}+\||\partial_m\sigma|^{p-1}\|_{L^q(\mathbb{R}^+)}\|\partial_m\sigma\|_{L^p(\mathbb{R}^+)}).$$

Où $q=\frac{p}{p-1}$.

D'après le théorème 3.2.1

$$\int_0^\infty(\partial_m\sigma)|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\partial_x\sigma dm\leq$$

$$\leq C(\|\partial_m\sigma\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{R}^+)}\|\sigma\|_{L^p(\mathbb{R}^+)}+\|\partial_m\sigma\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{R}^+)}\|\partial_m\sigma\|_{L^p(\mathbb{R}^+)}$$

$$+\|\partial_m\sigma\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{R}^+)}\|\sigma\|_{L^p(\mathbb{R}^+)}+\|\partial_m\sigma\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{R}^+)}\|\partial_m\sigma\|_{L^p(\mathbb{R}^+)})$$

$$\leq C(\|\partial_m\sigma\|^{p}_{L^p(\mathbb{R}^+)}+\|\partial_m\sigma\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{R}^+)}\|\sigma\|_{L^p(\mathbb{R}^+)}).$$

Et de la remarque 4.0.1, on conclut que

$$\begin{aligned}\|\partial_m\sigma\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{R}^+)}\|\sigma\|_{L^p(\mathbb{R}^+)}=&\ (\|\partial_m\sigma\|^{p}_{L^p(\mathbb{R}^+)})^{\frac{p-1}{p}}(\|\sigma\|^{p}_{L^p(\mathbb{R}^+)})^{\frac{1}{p}}\\ \leq&\ \|\partial_m\sigma\|^{p}_{L^p(\mathbb{R}^+)}+\|\sigma\|^{p}_{L^p(\mathbb{R}^+)}\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^\infty (\partial_m \sigma)|\partial_m \sigma|^{p-2}\partial_m \partial_x \sigma dm \leq C\|\partial_m \sigma\|^p_{L^p(\mathbb{R}^+)} + C\|\sigma\|^p_{L^p(\mathbb{R}^+)}.$$

ce qui équivaut à

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dx}\|\partial_m \sigma(\cdot, x)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^+)} \leq C\|\partial_m \sigma\|^p_{L^p(\mathbb{R}^+)} + C\|\sigma\|^p_{L^p(\mathbb{R}^+)}.$$

□

Maintenant nous allons démontrer le théorème 4.0.5.

Preuve. 1) De l'inégalité (4.3) on obtient

$$\|\sigma(\cdot, x)\|^p_{L^p} \leq \|\sigma(\cdot, 1)\|^p_{L^p} \exp^{Cp(x-1)}.$$

En effet

on accepte facilement que

$$\frac{d}{dx}Y(x) = pcY(x), \qquad Y(0) = Y_0$$

admet la solution

$$Y(x) = Y_0 \exp^{Cpt}.$$

Donc d'après le théorème de comparaison pour les équations différenttielles ordinaires on a

$$\|\sigma(\cdot, x)\|^p_{L^p} \leq \|\sigma(\cdot, 1)\|^p_{L^p} \exp^{Cp(x-1)}.$$

2) De façon analogue, on estimer le seconde inégalité du lemme (4.4).

On le connaît bien que la solution de l'équation

$$\frac{d}{dx}Y(x) = CY(t) + Z(t), \qquad Y(0) = Y_0$$

est

$$Y(x) = Y_0 \exp^{Cpt} + \int_0^t CZ(t') \exp^{C(t-t')} dt'.$$

Alors on déduit que (par la comparaison)

$$\|\partial_m \sigma(\cdot,x)\|_{L^p}^p \leq \|\partial_m \sigma(\cdot,1)\|_{L^p}^p \exp^{Cp(x-1)} + C\int_1^x \|\sigma(\cdot,x)\|_{L^p}^p \exp^{Cp(x-x')} \, dx'.$$

$\square$

Bibliographie

[1] Brezis, H, Analyse fonctionnelle - théorie et appliction -, Edit Masson 1987.

[2] Fujita-yashima, H., Campana, V., Aissaoui, M. Z, Système d'équations d'un du mouvement de l'air impliquant la transition de phase de l'eau dans l'atmosphère, Quaderno Dip. Mat. Univ. Torino, No. 12(2009).

[3] Fujita-Yashima, H.Modelisation de la physique des fluides. Cours à l'université de Guelma, 2011.

[4] Belhireche, H., Solution stationnaire de l'équation de le chute de gouttellettes. manuserit, Guelma, 2011.

[5] Belhireche, H., H Aissaoui, M.Z., Fujita-Yashima, H. Equations monodimensionnelles du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau. Dip. Mat. Univ. Torino No. 12(2010).

[6] Stéphane Mischler, (Equation de Smoluchowski) Contributions à l'étide mathématique de quelques modèles issus de la physique hors équilibre. Thèse d'habilitation 2001. Université de Versailles Saint-Quentin.