

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université 8 Mai 1945 – Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

510.216



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master Académique en Mathématiques
Option : Equations aux dérivées partielles



Par :

Mlle : BEDDIAFI Hanane

et

Mlle : KHECHAIMIA Nabila

Intitulé

*Méthode de Rothe appliquée sur un problème
hyperbolique intégrodifférentielle avec conditions
intégrales*

Dirigé par : Dr. CHAOUI Abderazak

Devant le jury

PRESIDENT	M.Z.AISSAOUI	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	F. ELLAGGOUNE	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	A. MEHRI	MAA	Univ-Guelma
	N. AZZOUZA	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2011

114 → 1150

E5.12

Méthode de Rothe appliquée sur un
problème semilinéaire hyperbolique
intégrodifférentielle avec conditions
intégrales

Beddiàfi Hanane

Khechaimia Nabila

Remerciement

Par ce modeste travail qui restera toujours notre compensation pour nos longues années d'études, nous remercions :

« Dieu » pour son aide et sa bénédiction.

Notre encadreur le docteur « Chaoui Abderazak » pour nous avoir guidé à l'élaboration de ce travail avec ces conseils, ses critiques et ses encouragements.

Je remercie très vivement la personne sans laquelle toute ceci n'existerait pas monsieur le docteur « F. ELLAGGOUNE » pour ces précieux conseils et ses orientations qui nous permis de bien préparer notre exposé de soutenance et lui exprimons tout notre gratitude et notre respect.

Je remercie monsieur les membres du jury pour la caution qu'ils ont bien voulu apporter à ce travail et à qui nous devons notre profond respect et notre très haute considération.

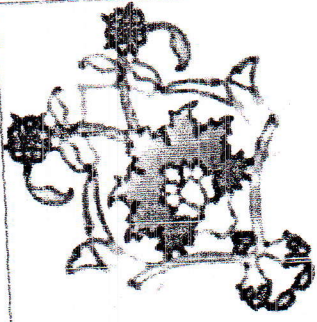
Nous tenons à remercier également l'ensemble des enseignants, pour nous avoir honorer leur présence on particulier :

Monsieur « N. AZZOUZA »

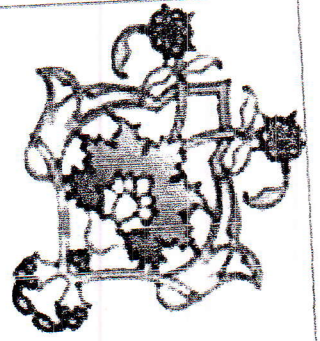
Professeur « M.Z. AISSAOUI »

Monsieur « A. MEHRI »

Enfin , nous tenons à adresser nous plus vifs remerciement à tout les personnes qui de près où de loin nous aide à la réalisation de ce mémoire.



ANNIVERSAIRE



*A celui que les rois s'inclinent devant sa majesté et les césars
devant sa force ; à celui que la sagesse revient à ses conseils et son
cœur est rempli de tendresse et de patience , à toi papa .*

*A celle que le soleil a brillé pour éclairer ses yeux, qui a offert la
beauté aux fleurs et le charme à tout ce qui est beau pour la personne
qui n'a jamais cessé de me porter aide et courage , à toi maman .*

A mes chers frères :Issam , Djamel dine,Ossama.

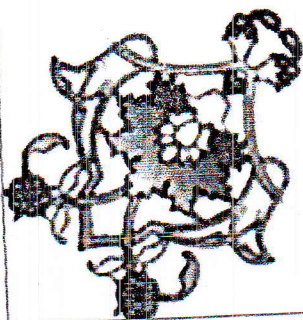
A ma sœur :Sanna.

A tout mes amies surtout :

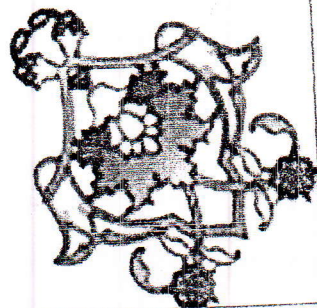
*Fairouz,Sabrina,Mariam,Souad,Nawel,Sonia ,Basma,Gigi,Dalel,Souhil
a , Leila, Amina, Fouzia, Nabila, Razika*

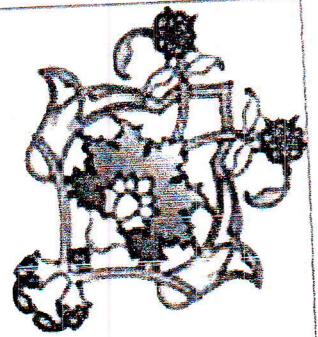
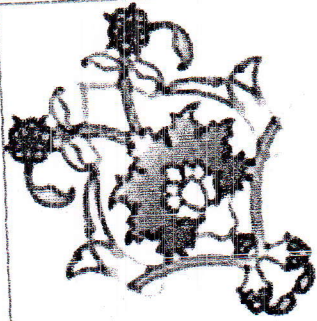
A tout ma famille.

A tout ceux que j'aime et qui m'aiment



NABILA





LE MARIAGE

A celui que les rois s'inclinent devant sa majesté et les césars devant sa force ; à celui que la sagesse revient à ses conseils et son cœur est rempli de tendresse et de patience , a toi papa .

A celle que le soleil a brillé pour éclairer ses yeux, qui a offert la beauté aux fleurs et le charme à tout ce qui est beau pour la personne qui na jamais cesse de me porter aide et courage , a toi maman .

A mes chers frères : Abd elali , Adel.

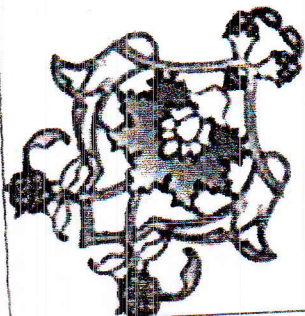
A ma sœur : Soraia.

A tout mes amies surtout :

S.Ibtissem,Razika , Samiha , Rima,Selma,Dadi,Madjda,Sihem et Ibtissem.

A tout ma famille.

A tout ceux que j'aime et qui m'aiment



HANANE

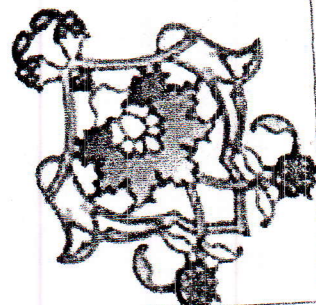


Table des matières

1	Rappel d'analyse fonctionnelle	3
1.1	Espace de sobolev	3
1.1.1	Espace de $H^1(\Omega)$	4
1.1.2	Espace de $H^2(\Omega)$	4
1.2	Les inégalités utilisées	5
1.2.1	Inégalité de Cauchy	5
1.2.2	L' ϵ inégalité	6
1.3	Convergence faible	6
2	Position du problème et estimations a priori	9
2.1	Introduction	9
2.2	Espaces fonctionnels et hypothèses	10
2.3	Schéma de discrétisation et estimations a priori	14
3	Existence et unicité de la solution faible	36
3.1	Résultat de convergence	36
3.2	Résultat de l'existence et d'unicité	42

Introduction

L'idée de la méthode de Rothe est de mener les calculs dans un espace fonctionnel non classique et d'introduire une généralisation naturelle de la notion de solution faible pour le problème étudié.

Appliquant cette idée nous établissons les estimations a priori nécessaires, sur la base desquelles la convergence d'un schéma d'approximation semi-déscretisé correspondant est démontré.

Le schéma de la méthode de Rothe est comme suite :

On divise l'intervalle du temps en n sous intervalles $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1..n$.

où $t_j = jh$ et $h = \frac{T}{n}$.

On note par $u_j = u_j(x) = u_j(x, jh)$ les approximations de u .

On remplace les dérivées de la fonction u , $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ par :

$$\delta u_j = \frac{u_j - u_{j-1}}{h} \quad \text{et} \quad \delta^2 u_j = \frac{\delta u_j - \delta u_{j-1}}{h} \quad \text{pour tout } t = t_j.$$

On obtient un système formé de n équations en x où l'inconnu est $u_j(x)$ donc on approxime le problème posé à tout point $t = t_j$, $j = 1..n$, par un nouveau problème discret.

On détermine les fonctions u^n solutions du système obtenu.

On construit les fonctions de Rothe définies par :

$$u^n(t) = u_{j-1} + \delta u_j(t - t_j) \quad , t \in [t_{j-1}, t_j] \quad , j = 1..n$$

$$\bar{u}^{(n)}(t) = \begin{cases} u_j \\ U_0 \end{cases} \quad t \in [t_{j-1}, t_j] \quad , j = 1..n$$

Après avoir démontré quelques estimations pour la solution approchée, nous établissons la convergence de la solution approchée $u^n(t)$ vers la solution du problème posé.

Chapitre 1

Rappel d'analyse fonctionnelle

1.1 Espace de sobolev

Soit : $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$.

On définit l'espace de sobolev $W^{p,k}(\Omega)$ par :

$$W^{p,k}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \text{ existe et } D^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}$$

On munit les espaces de sobolev par une structure d'espaces normés dont les normes sont définies par :

$$\|f\|_{W^{p,k}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad 1 \leq p < \infty.$$

$$\|f\|_{W^{p,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha f(x)| \quad p = +\infty$$

Si $p = 2$: H^k est un espace de Hilbert.

1.1.1 Espace de $H^1(\Omega)$

On appelle espace de sobolev d'ordre 1 sur Ω , l'espace :

$$H^1(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n \right\}$$

On munit $H^1(\Omega)$ du produit scalaire :

$$(f, g)_{1,\Omega} = \int_{\Omega} \left(fg + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)$$

La norme correspondante sera :

$$\|f\|_{1,\Omega} = \sqrt{(f, f)_{1,\Omega}}$$

1.1.2 Espace de $H^2(\Omega)$

On appelle espace de sobolev d'ordre 2 sur Ω , l'espace :

$$H^2(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega), \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n \right\}$$

On munit $H^2(\Omega)$ du produit scalaire :

$$(f, g)_{2, \Omega} = \int_{\Omega} \left(fg + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} \right) \right)$$

La norme correspondante sera :

$$\|f\|_{2, \Omega} = \sqrt{(f, f)_{2, \Omega}}$$

1.2 Les inégalités utilisées

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

1.2.1 Inégalité de Cauchy

$$\forall u, v \in L^2(\Omega), \quad \left| \int_{\Omega} uv \, dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} |u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |v|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left| \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N u_i v_i \, dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N u_i^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N v_i^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

1.2.2 L' ε inégalité

$$|xy| \leq \frac{\varepsilon}{2} x^2 + \frac{1}{2\varepsilon} y^2$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x, y$

1.3 Convergence faible

Soit E un espace de Banach

Définition 1.3.1 (x_n) converge faiblement dans E vers x si l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x', x_n \rangle = \langle x', x \rangle$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall x' \in E'$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x', x_n - x \rangle = 0$$

Proposition 1.3.1 :

On note $x_n \rightarrow x$ faiblement dans E par :

$$x_n \rightharpoonup x$$

Remarque 1.3.1 :

1. Si $x_n \rightarrow x$ fortement ($\|x_n - x\|_E \rightarrow 0$) $\Rightarrow x_n \rightharpoonup x$ car :

$$\forall x' \in E' : |\langle x', x_n - x \rangle| \leq \|x'\|_* \|x_n - x\| \rightarrow 0$$

2. Si $\dim E = n < \infty$ on a équivalence de deux notions :

$$m \geq 1, x^m = (x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m), \dim E' = n$$

$$\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \text{ base de } E \Rightarrow \{e_j^*\}_{j=1}^n \text{ base dual tq :}$$

$$e_j^*(e_i) = \delta_{ji}$$

$$= \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$x^m \rightharpoonup x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow \forall i \in \overline{1, n}, x' = e_i^* :$$

$$\langle e_i^*, x^m - x \rangle = x_i^m - x_i \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n |x_i^m - x_i| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$$

Alors :

$$\|x^m - x\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{ce qui donne} \quad \|x^m - x\| \rightarrow 0$$

Car toute les normes de E sont équivalentes.

Théorème 1.3.1 Soit E un espace de Banach réflexif et x_n une suite bornée dans E , alors il est possible d'extraire une sous suite de x_n qui converge faiblement dans E .

Théorème 1.3.2 (de Riesz) [10]

E un espace de Hilbert, soit $f \in E'$, il existe un élément unique $u \in E$

$tq :$

$$\begin{cases} f(v) = (v, u) \\ \|f\|_* = \|u\| \end{cases} \quad \forall v \in E$$

Remarque 1.3.2 :

1. $v_n \rightarrow v \Leftrightarrow \forall u \in E, \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n, u) = (v, u)$

Car :

$$v_n \rightarrow v \Leftrightarrow \forall f \in E' : f(v_n) \rightarrow f(v)$$

théorème de Riesz $\Leftrightarrow f(v_n) = (u, v_n)$

2. *On a le théorème :*

Toute suite bornée dans un espace de Hilbert possède une sous suite faiblement convergente .

Chapitre 2

Position du problème et estimations a priori

2.1 Introduction

On va étudier le problème :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) + \int_0^t a(t-s)k(s, u(x, s)) ds \quad (x, s) \in (0, 1) \times (0, T) \quad (2.1.1)$$

Avec les conditions initiales :

$$u(x, 0) = U_0(x) \quad x \in (0, 1) \quad (2.1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = U_1(x)$$

Et les conditions intégrales :

$$\int_0^1 u(x, t) dx = \int_0^1 xu(x, t) dx = 0 \quad (2.1.3)$$

L'espace des fonctions continues de I dans $B(0, 1)$, noté $C(I, B(0, 1))$ est un Banach pour la norme :

$$\|x\|_{C(I, B(0, 1))} = \max_I \|x(t)\|_B$$

On dénote par $V_B, C^{0,1}(I, X)$ et $C^{1,1}(I, X)$ les espaces suivantes :

$$V_B = \left\{ \phi \in B(0, 1) \text{ tq : } \int_0^1 \phi dx = 0 \right\}$$

$$C^{0,1}(I, X) = \{u : I \rightarrow X \text{ tq } u \text{ est lipchitzienne continue} \}$$

$$C^{1,1}(I, X) = \left\{ u \in C^{0,1}(I, X) \text{ tq } \frac{du}{dt} \in C^{0,1}(I, X) \right\}$$

Où X est un espace normé.

On peut voir la fonction :

$$f : (0, 1) \times I \longmapsto f(x, t) \in \mathbb{R}$$

Comme une fonction associant à $t \longmapsto f(t)$ définie de I dans un espace fonctionnel.

En posant :

$$f(t) : x \in (0, 1) \longmapsto f(x, t)$$

Pour résoudre le problème (2.1.1) – (2.1.3), on suppose que :

$H_1)$ f doit satisfaire :

$$\begin{cases} f(t) \in L^2(0, 1) \\ \|f(t) - f(t')\|_B \leq l|t - t'| \end{cases}$$

l constante positive.

$H_2)$ $U_0(x), U_1(x) \in H^2(0, 1)$

$H_3)$ U_0, U_1 vérifient :

$$\int_0^1 U_0(x) dx = \int_0^1 xU_0(x) dx = 0 \quad (2.2.1)$$

$$\int_0^1 U_1(x) dx = \int_0^1 xU_1(x) dx = 0 \quad (2.2.2)$$

$H_4)$ a est une fonction continue telle que :

$$|a(t) - a(t')| \leq C_1|t - t'|$$

$k : I \times B_2^1 \rightarrow L^2(0, 1)$ est continue pour les deux variables et vérifie :

$$\|k(t, u)\|_B \leq \|u(t)\|_B$$

H_5) Pour $u(t), v(t) \in V$, on a :

$$\|k(t, u) - k(t, v)\| \leq L(t)\|u(t) - v(t)\|_B$$

p.p. $t \in I$ ou $L \in L^1(I)$ une fonction positive.

Définition 2.2.1 Une fonction $u : I \rightarrow L^2(0, 1)$ est dite solution faible du

(2.1.1) – (2.1.3) si :

1.

$$u \in C^{0,1}(I, V)$$

2.

$$\frac{du}{dt} \in L^\infty(I, V) \cap C^{0,1}(I, B_2^1(0, 1)) \text{ et } \frac{d^2u}{dt^2} \in L^\infty(I, B_2^1(0, 1))$$

3.

$$u(0) = U_0 \text{ dans } V \text{ et } \frac{du}{dt}(0) = U_1 \text{ dans } B_2^1(0, 1)$$

4. Pour tout $\phi \in V$ et p.p. $t \in I$, l'identité :

$$\int_I \left(\frac{d^2u}{dt^2}(t), \phi \right)_{B_2^1} dt + \int_I (u(t), \phi) dt = \int_I \left(f(t) + \int_0^t a(t-s)k(s, u) ds, \phi \right)_{B_2^1} dt \quad (2.2.3)$$

est satisfaite.

Théorème 2.2.1 Supposons que les hypothèses $(H_1 - H_4)$ sont vérifiées, alors

il existe une solution faible u du problème (2.1.1) – (2.1.3) au sens de la

définition (2.2.1).

De plus, si (H_5) est satisfaite, alors u est unique.

2.3 Schéma de discrétisation et estimations a priori

On divise l'intervalle en n sous intervalles de longueur $h = \frac{T}{n}$, et notons :

$$u_j = u(t_j), \quad \text{tq } t_j = jh, \quad j = 1..n$$

Pour $j = 1..n$, on résout successivement le problème stationnaire linéaire :

$$\frac{u_j - 2u_{j-1} + u_{j-2}}{h^2} - \frac{d^2 u_j}{dx^2} = f_j + h \sum_{i=0}^{j-1} a_{ji} k_i \quad (2.3.1)$$

$$\int_0^1 u_j(x) dx = 0 \quad (2.3.2)$$

$$\int_0^1 x u_j(x) dx = 0 \quad (2.3.3)$$

Où

$$\left\{ \begin{array}{l} f_j = f(t_j) \\ a_{ji} = a(t_j - t_i) \\ k_i = k(t_i, u_i) \end{array} \right.$$

On a :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = \frac{\partial U_0}{\partial x}(x) = U_1(x) = \frac{U_0(x) - u_{-1}(x)}{h}$$

Donc :

$$\begin{aligned} u_{-1}(x) &= U_0(x) - hU_1(x) \\ u_0(x) &= U_0(x) \end{aligned} \quad x \in (0, 1)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \delta u_j &= \frac{u_j - u_{j-1}}{h} \\ \delta^2 u_j &= \frac{\delta u_j - \delta u_{j-1}}{h} \end{aligned} \quad \text{et} \quad j = 0..n$$

Et définissons la suite de Rothe (u_n) des fonctions lipchitziennes continues définies de :

$$I \longrightarrow H^2(0, 1) \cap V$$

Par :

$$u^n(t) = u_{j-1} + \delta u_j(t - t_j), \quad t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = 1..n \quad (2.3.4)$$

Et les fonctions auxiliaires suivantes :

$$\delta u^n(t) = \delta u_{j-1} + \delta^2 u_j(t - t_j), \quad t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = 1..n \quad (2.3.5)$$

$$\bar{u}^{(n)}(t) = \begin{cases} u_j & t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = 1..n \\ U_0 & t \in [-h, 0] \end{cases} \quad (2.3.6)$$

$$\bar{\delta u}^{(n)}(t) = \begin{cases} \delta u_j & t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = 1..n \\ U_1 & t \in [-h, 0] \end{cases} \quad (2.3.7)$$

Théorème 2.3.1 le problème (2.3.1) – (2.3.3) admet une unique solution

$$u_j \in H^2(0, 1) \text{ pour } n \geq 1, j = 1..n$$

Démonstration 2.3.1 Supposons que u_{j-1} et u_{j-2} sont toujours connues et qu'elles soient dans $H^2(0, 1)$, alors $f_j \in L^2(0, 1)$.

La solution général de (2.3.1) – (2.3.3) est donnée par :

$$u_j(x) = k_1(x) \cosh \frac{x}{h} + k_2(x) \sinh \frac{x}{h}, \quad x \in (0, 1) \quad (2.3.8)$$

Où k_1, k_2 sont deux fonctions de x telles que :

$$\begin{cases} \frac{dk_1}{dx}(x) \cosh \frac{x}{h} + \frac{dk_2}{dx} \sinh \frac{x}{h} = 0 \\ \frac{dk_1}{dx}(x) \sinh \frac{x}{h} + \frac{dk_2}{dx} \cosh \frac{x}{h} = h \left[\frac{-2u_{j-1} + u_{j-2}}{h^2} - f_j - h \sum_{i=0}^{j-1} a_{ji} k_i \right] \end{cases} \quad (2.3.9)$$

En remarquant que le déterminant de (2.3.9) est :

$$\Delta = \cosh^2 \frac{x}{h} - \sinh^2 \frac{x}{h} = 1$$

Alors :

$$\begin{cases} \frac{dk_1}{dx}(x) = hF_j(x) \sinh \frac{x}{h} \\ \frac{dk_2}{dx}(x) = hF_j(x) \cosh \frac{x}{h} \end{cases} \quad (2.3.10)$$

Où :

$$F_j(x) = \frac{-2u_{j-1} + u_{j-2}}{h^2} - f_j - h \sum_{i=0}^{j-1} a_{ji} k_i \quad (2.3.11)$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} k_1(x) = h \int_0^x F_j(\xi) \sinh \frac{\xi}{h} d\xi + \lambda_1 \\ k_2(x) = h \int_0^x F_j(\xi) \cosh \frac{\xi}{h} d\xi + \lambda_2 \end{cases} \quad (2.3.12)$$

D'après l'identité (2.3.8) on a :

$$u_j(x) = h \int_0^x F_j(\xi) \sinh \frac{x-\xi}{h} d\xi + \lambda_1 \cosh \frac{x}{h} + \lambda_2 \sinh \frac{x}{h} \quad (2.3.13)$$

Choisissons (λ_1, λ_2) telles que (2.3.2), (2.3.3) soient vérifiées, alors :

$$\begin{cases} \lambda_1 \int_0^1 \cosh \frac{x}{h} dx + \lambda_2 \int_0^1 \sinh \frac{x}{h} dx = -h \int_0^1 \int_0^x F_j(\xi) \sinh \frac{x-\xi}{h} d\xi dx \\ \lambda_1 \int_0^1 x \cosh \frac{x}{h} dx + \lambda_2 \int_0^1 x \sinh \frac{x}{h} dx = -h \int_0^1 \int_0^x x F_j(\xi) \sinh \frac{x-\xi}{h} d\xi dx \end{cases} \quad (2.3.14)$$

Et par suite :

$$\begin{cases} \lambda_1 \sinh \frac{1}{h} + \lambda_2 \left(\cosh \frac{1}{h} - 1 \right) = - \int_0^1 \int_0^x F_j(\xi) \sinh \frac{x-\xi}{h} d\xi dx \\ \lambda_1 \left(\sinh \frac{1}{h} - h \cosh \frac{1}{h} + h \right) + \lambda_2 \left(\cosh \frac{1}{h} - h \sinh \frac{1}{h} \right) = \int_0^1 \int_0^x x F_j(\xi) \sinh \frac{x-\xi}{h} d\xi dx \end{cases} \quad (2.3.15)$$

Puisque le déterminant de (2.3.15) :

$$\Delta(h) = 2h - 2h \cosh \frac{1}{h} + \sinh \frac{1}{h}$$

Donc :

$$\Delta(h) = 2 \sinh \frac{1}{2h} \left(\cosh \frac{1}{2h} - 2h \sinh \frac{1}{2h} \right) \quad (2.3.16)$$

ne s'annule pas $\forall h > 0$, alors le système (2.3.15) admet une unique solution $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

Ce qui implique que le problème (2.3.1) – (2.3.3) a une unique solution :

$$u_j \in H^2(0, 1) \text{ (puisque } F_j \in L^2(0, 1) \text{)}$$

Remarque 2.3.1 Dans la suite, C denote une constante positive indépendante de n, j et de h .

Lemme 2.3.1 il existe $C > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tq :

$$\|\delta u_j\|_{B_2^1}^2 + \|u_j\|^2 \leq C, \quad j = 1..n, \quad n > N$$

Démonstration 2.3.2 Soit $\phi \in V$, il est facile d'avoir :

$$\int_0^x (x - \xi) \phi(\xi) d\xi = \mathfrak{S}_x^2 \phi \quad \forall x \in (0, 1)$$

tq

$$\mathfrak{S}_x^2 \phi = \mathfrak{S}_x(\mathfrak{S}_x \phi) = \int_0^x d\xi \int_0^\xi \phi(\mu) d\mu$$

Ce qui implique :

$$\mathfrak{S}_1^2 \phi = \int_0^1 (1 - \xi) \phi(\xi) d\xi$$

Alors :

$$\mathfrak{S}_1^2 \phi = \int_0^1 \phi(\xi) d\xi - \int_0^1 \xi \phi(\xi) d\xi \quad (2.3.17)$$

Multiplions (2.3.1) par $\mathfrak{S}_x^2 \phi$ pour tout $j = 1..n$ et intégrons sur $(0, 1)$,

on obtient :

$$\int_0^1 \left(\frac{u_j - 2u_{j-1} + u_{j-2}}{h^2} \right) \mathfrak{S}_x^2 \phi dx - \int_0^1 \frac{d^2 u_j}{dx^2}(x) \mathfrak{S}_x^2 \phi dx = \int_0^1 \left(f_j(x) + h \sum_{i=0}^{j-1} a_{ji} k_i \right) \mathfrak{S}_x^2 \phi dx$$

On a :

$$\begin{aligned} \delta^2 u_j &= \frac{\delta u_j - \delta u_{j-1}}{h} \\ &= \frac{u_j - 2u_{j-1} + u_{j-2}}{h^2} \end{aligned}$$

Donc :

$$\int_0^1 \delta^2 u_j(x) \mathfrak{S}_x^2 \phi dx - \int_0^1 \frac{d^2 u_j}{dx^2}(x) \mathfrak{S}_x^2 \phi dx = \int_0^1 \left(f_j(x) + h \sum_{i=0}^{j-1} a_{ji} k_i \right) \mathfrak{S}_x^2 \phi dx \quad (2.3.18)$$

Intégrons par parties chaque terme de (2.3.18) et utilisons (2.3.17)

on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \delta^2 u_j(x) \mathfrak{S}_x^2 \phi \, dx &= \int_0^1 \frac{d}{dx} (\mathfrak{S}_x(\delta^2 u_j)) \mathfrak{S}_x^2 \phi \, dx \\
&= (\mathfrak{S}_x(\delta^2 u_j)) \mathfrak{S}_x^2 \phi \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \mathfrak{S}_x(\delta^2 u_j) \mathfrak{S}_x \phi \, dx \\
&= -(\delta^2 u_j, \phi)_{B_2^1}
\end{aligned}$$

Où :

$$\mathfrak{S}_x(\delta^2 u_j) \mathfrak{S}_x^2 \phi \Big|_{x=0}^{x=1} = \mathfrak{S}_1(\delta^2 u_j) \mathfrak{S}_1^2 \phi - \mathfrak{S}_0(\delta^2 u_j) \mathfrak{S}_0^2 \phi = 0$$

Et

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{d^2 u_j}{dx^2}(x) \mathfrak{S}_x^2 \phi \, dx &= \frac{du_j}{dx}(x) \mathfrak{S}_x^2 \phi \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{du_j}{dx}(x) \mathfrak{S}_x \phi \, dx \\
&= - \int_0^1 \frac{du_j}{dx}(x) \mathfrak{S}_x \phi \, dx \\
&= -u_j(x) \mathfrak{S}_x \phi \Big|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 u_j(x) \phi(x) \, dx \\
&= (u_j, \phi)
\end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \left(f_j + h \sum_{i=0}^{j-1} a_{ji} k_i \right) \mathfrak{S}_x^2 \phi \, dx &= \int_0^1 \frac{d}{dx} \mathfrak{S}_x \left(f_j + h \sum_{i=0}^{j-1} a_{ji} k_i \right) \mathfrak{S}_x^2 \phi \, dx \\
 &= \mathfrak{S}_x \left(f_j + h \sum_{i=0}^{j-1} a_{ji} k_i \right) \mathfrak{S}_x^2 \phi \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \mathfrak{S}_x \left(f_j + h \sum_{i=0}^{j-1} a_{ji} k_i \right) \mathfrak{S}_x \phi \, dx \\
 &= - \left(f_j + h \sum_{i=0}^{j-1} a_{ji} k_i \cdot \phi \right)_{B_2^1}
 \end{aligned}
 \tag{2.3.19}$$

Alors (2.3.18) devient :

$$(\delta^2 u_j, \phi)_{B_2^1} + (u_j, \phi) = \left(f_j + h \sum_{i=0}^{j-1} a_{ji} k_i, \phi \right)_{B_2^1}, \quad \forall \phi \in V, \quad \forall j = 1..n
 \tag{2.3.20}$$

Posons $\phi = \delta u_j$ (il est clair que $\phi = \delta u_j \in V$) dans (2.3.20),

on obtient :

$$(\delta^2 u_j, \delta u_j)_{B_2^1} + (u_j, \delta u_j) = \left(f_j + h \sum_{i=0}^{j-1} a_{ji} k_i, \delta u_j \right)_{B_2^1}, \quad \forall j = 1..n$$

Donc :

$$\left(\frac{\delta u_j - \delta u_{j-1}}{h}, \delta u_j \right)_{B_2^1} + \left(u_j, \frac{u_j - u_{j-1}}{h} \right) = (f_j, \delta u_j)_{B_2^1} + h \sum_{i=0}^{j-1} (a_{ji} k_i, \delta u_j)_{B_2^1}, \quad \forall j = 1..n$$

Alors :

$$\begin{aligned}
 (\delta u_j - \delta u_{j-1}, \delta u_j)_{B_2^1} + (u_j, u_j - u_{j-1}) &= h^2 \sum_{i=0}^{j-1} (a_{ji} k_i, \delta u_j)_{B_2^1} \\
 &\quad \forall j = 1..n \\
 &\quad + h(f_j, \delta u_j)_{B_2^1}
 \end{aligned}$$

En utilisant les identités :

$$2(u_j, u_j - u_{j-1}) = \|u_j\|^2 + \|u_j - u_{j-1}\|^2 - \|u_{j-1}\|^2$$

$$2(\delta u_j, \delta u_j - \delta u_{j-1})_{B_2^1} = \|\delta u_j\|_{B_2^1}^2 + \|\delta u_j - \delta u_{j-1}\|_{B_2^1}^2 - \|\delta u_{j-1}\|_{B_2^1}^2$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
 \|\delta u_j\|_{B_2^1}^2 + \|\delta u_j - \delta u_{j-1}\|_{B_2^1}^2 - \|\delta u_{j-1}\|_{B_2^1}^2 + \|u_j\|^2 + \|u_j - u_{j-1}\|^2 - \|u_{j-1}\|^2 \\
 = 2h^2 \sum_{i=0}^{j-1} (a_{ji} k_i, \delta u_j)_{B_2^1} + 2h(f_j, \delta u_j)_{B_2^1} \quad \forall j = 1..n
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 \|\delta u_j\|_{B_2^1}^2 - \|\delta u_{j-1}\|_{B_2^1}^2 + \|u_j\|^2 - \|u_{j-1}\|^2 &\leq 2Ch^2 \sum_{i=0}^{j-1} \|k_i\|_{B_2^1} \|\delta u_j\|_{B_2^1} \\
 &\quad + 2h\|f_j\|_{B_2^1} \|\delta u_j\|_{B_2^1}
 \end{aligned} \tag{2.3.21}$$

On prend $\varepsilon = 1$ dans l'é inégalité :

$$\begin{aligned} 2\|k_i\|_{B_2^1}\|\delta u_j\|_{B_2^1} &\leq 2\|u_j\|\|\delta u_j\|_{B_2^1} \\ &\leq \|u_j\| + \|\delta u_j\|_{B_2^1} \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} 2h\|f_j\|\|\delta u_j\|_{B_2^1} &\leq 2h\|f\|_{C(I, B_2^1)}\|\delta u_j\|_{B_2^1} \\ &\leq Ch + Ch\|\delta u_j\|_{B_2^1}^2 \end{aligned}$$

Substituons dans (2.3.21) on aura :

$$\begin{aligned} \|\delta u_j\|_{B_2^1}^2 - \|\delta u_{j-1}\|^2 + \|u_j\|^2 - \|u_{j-1}\|^2 &\leq Ch\|\delta u_j\|_{B_2^1}^2 \\ &\quad + Ch^2 \sum_{i=0}^{j-1} \|u_j\|^2 \quad (2.3.22) \\ &\quad + Ch \end{aligned}$$

Choisissons le naturel N tel que $C\frac{T}{N} < 1$, alors pour $n > N$,

l'inégalité (2.3.21) implique :

$$\begin{aligned} (1 - Ch)[\|\delta u_j\|_{B_2^1}^2 + \|u_j\|^2] &\leq (1 + Ch^2)[\|\delta u_{j-1}\|_{B_2^1}^2 + \|u_{j-1}\|^2] \\ &\quad + Ch^2 \sum_{i=0}^{j-1} \|u_j\|^2 \quad (2.3.23) \\ &\quad + Ch \end{aligned}$$

En appliquant cette inégalité récuressivement, on obtient :

$$(1 - Ch)^j [\|\delta u_j\|_{B_2^1}^2 + \|u_j\|^2] \leq (1 + jch^2)^j [\|\delta U_0\|_{B_2^1}^2 + \|U_0\|^2] + jCh$$

Et on a :

$$\begin{aligned} \left[\frac{1 + jCh^2}{1 - Ch} \right]^n &\longrightarrow \exp(n(\ln(1 + Ch) - \ln(1 - Ch))) \text{ quand } n \rightarrow \infty \\ &= e^{2nC \frac{T}{n}} \\ &= C \end{aligned}$$

Alors :

$$\|\delta u_j\|_{B_2^1}^2 + \|u_j\|^2 \leq C [\|\delta U_0\|_{B_2^1}^2 + \|U_0\|^2] + \frac{jCh}{1 - Ch}$$

Donc :

$$\|\delta u_j\|_{B_2^1}^2 + \|u_j\|^2 \leq C$$

Lemme 2.3.2 il existe $C > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$ t.q :

$$\|\delta^2 u_j\|_{B_2^1}^2 + \|\delta u_j\|^2 \leq C \quad , j = 1..n, n > N$$

Démonstration 2.3.3 La difference $(2.3.20)_j - (2.3.20)_{j-1}$ donne :

$$\begin{aligned}
(\delta^2 u_j, \phi)_{B_2^1} - (\delta^2 u_{j-1}, \phi)_{B_2^1} + (u_j, \phi) - (u_{j-1}, \phi) &= \left(f_j + h \sum_0^{j-1} a_{ji} k_i, \phi \right)_{B_2^1} \\
&\quad - \left(f_{j-1} + h \sum_0^{j-2} a_{j-1i} k_i, \phi \right)_{B_2^1} \\
\forall \phi \in V, \forall j = 1..n
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
(\delta^2 u_j, \phi)_{B_2^1} + (u_j - u_{j-1}, \phi) &= (\delta^2 u_{j-1}, \phi)_{B_2^1} \\
&\quad + h(a_{jj-1} k_i, \phi)_{B_2^1} \\
&\quad + h \sum_{i=0}^{j-2} ((a_{ji} - a_{j-1i}) k_i, \phi)_{B_2^1} \\
&\quad + (f_j - f_{j-1}, \phi)_{B_2^1}
\end{aligned} \tag{2.3.24}$$

Posons $\phi = \delta^2 u_j$ dans (2.3.24), on obtient :

$$\begin{aligned}
(\delta^2 u_j, \delta^2 u_j)_{B_2^1} + (u_j - u_{j-1}, \delta^2 u_j) &= (\delta^2 u_{j-1}, \delta^2 u_j)_{B_2^1} \\
&\quad + h(a_{jj-1} k_i, \delta^2 u_j)_{B_2^1} \\
&\quad + h \sum_{i=0}^{j-2} ((a_{ji} - a_{j-1i}) k_i, \delta^2 u_j)_{B_2^1} \\
&\quad + 2(f_j - f_{j-1}, \delta^2 u_j)_{B_2^1}
\end{aligned}$$

Donc :

Et les conditions intégrales :

$$\int_0^1 \theta(x, t) dx = E(t)$$
$$t \in [0, T]$$
$$\int_0^1 x\theta(x, t) dx = M(t)$$

En utilisant la transformation :

$$\theta(x, t) = u(x, t) + r(x, t)$$

Où :

$$\left\{ \begin{array}{l} r(x, t) = 6(2M(t) - E(x))x - 2(3M(t) - 2E(t)) \\ g(x, t) = f(x, t) + \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \\ \theta_0(x) = U_0(x) + r(x, 0) \\ \theta_1(x) = U_1(x) + \frac{\partial r}{\partial t}(0) \end{array} \right.$$

Bibliographie

- [1] J.R.CANNON. *The solution of the heat equation subject to the specification of energy*, quart. Appl. Math. 21 (1963) 155-160.
- [2] A.BOUZIANI , N.MERAZGA. *Rothe time discretisation method applied to a quasilinear wave equation subject to integral conditions*, Adv. Difference Equ.3 (2004) 211-235.
- [3] D.BAHUGUNA , A.K.PANI, V.RAGHAVENDRA. *Rothe's method to semilinear hyperbolic integrodifferential equations*.
Journal of Applied Mathematics and stochastic, Vol.3, N₀4 (1990) 245-252.
- [4] D.BAHUGUNA. *Quasilinear integrodifferential equations in Banach spaces* . Nonlinear analysis , theory , methods and applications, Vol.24,N₀.2 (1995) 175-183.
- [5] D.BAHUGUNA, V.RAGHAVENDRA. *Rothe's method to parabolic integrodifferential equations via abstract integrodifferential equations*.

Appl.anal.33,153-167 (1989).

[6] M.P.SAPAGOVAS and R.YU.CHEGIES .

On some boundary value problems with a nonlocal condition.

Differential Equation,23(1987).N₀7, 858-863,translation from
differential'nye Uravneniya 23(1987).N₀7,1268-1274.

✕ [7] J.KACUR. *Method of Rothe in evolution equation .*

Teubner-Texte zur Mathematic,V.80, BSB.B.G. Teubner
Verlagsgesellschaft,Leipzig,1985.

[8] J.KACUR. *Application of Rothe's method to perturbed linear hyperbolic
equations and variational inequalities .Czech.Math.J.34 (109), 1984,
92-106.*

✕ [9] A. GUEZANE-LAKOUD, M. S. JASMATI, A. CHAOUI *Rothe's method
for an integrodifferential equation with integral conditions,
Nonlinear Analysis.72 (2010) 1522-1530.(2010).*

✕ [10] HAIM BREZIS. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications.*

Document saisi par T_EX au format L^AT_EX.
Mille Merci au Docteur *Abd erazak Chaoui*