République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 – Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : Equations aux dérivées partielles

Par :

Mlle : BEDDIAFI Hanane et Mlle : KHECHAIMIA Nabila

Intitulé

Méthode de Rothe appliquée sur un problème hyperbolique intégrodifférentielle avec conditions intégrales

Dirigé par : Dr. CHAOUI Abderazak

Devant le jury

PRESIDENT	M.Z.AISSAOUI	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	F. ELLAGGOUNE	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	A. MEHRI	MAA	Univ-Guelma
	N. AZZOUZA	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2011

$11^h \to 11^h 50$

E5.12

Méthode de Rothe appliquée sur un problème semilinéaire hyperbolique intégrodifférentielle avec conditions intégrales

Beddiàfi Hanane Khechaimia Nabila

Remerciement

Par ce modeste travail qui restera toujours notre compensation pour nos longues années d'études, nous remercions :

« Dieu »pour son aide et sa bénédiction.

Notre encadreur le docteur « **Chaoui Abderazak**» pour nous avoir guider à l'élaboration de ce travail avec ces conseils, ses critiques et ses encouragements.

Je remercie très vivement la personne sans laquelle toute ceci n'existerait pas monsieur le docteur « **F. ELLAGGOUNE**» pour ces précieux conseils et ses orientations qui nous permis de bien préparer notre exposé de soutenance et lui exprimons tout notre gratitude et notre respect.

Je remercie monsieur les membres du jury pour la caution qu'ils ont bien voulu apporter à ce travail et à qui nous devons notre profond respect et notre tres haute considération.

Nous tenons à remercier également l'ensemble des enseignants, pour nous avoir honorer leur présence on particulier :

Monsieur « **N. AZZOUZA**»

Professeur« **M.Z.AISSAOUI**»

Monsieur « **A. MEHRI** »

Enfin , nous tenons à adresser nous plus vifs remerciement à tout les personnes qui de prés où de loin nous aide à la réalisation de ce mémoire.

DEDICACE

A celui que les rois s'inclinent devant sa majesté et les césars devant sa force ; à celui que la sagesse revient a ses conseils et son cœur est rempli de tendresse et de patience , a toi papa .

A celle que le soleil a brillé pour éclairer ses yeux, qui a offert la beauté aux fleurs et le charme a tout ce qui est beau pour la personne qui na jamais cesse de me porter aide et courage , a toi maman .

A mes chers frères :Issam , Djamel dine,Ossama.

A ma sœur :Sanna.

A tout mes amies surtout :

Fairouz,Sabrina,Mariam,Souad,Nawel,Sonia ,Basma,Gigi,Dalel,Souhila , Leila, Amina, Fouzia, Nabila, Razika

A tout ma famille.

A tout ceux que j'aime et qui m'aiment

NABILA

DEDICACE

A celui que les rois s'inclinent devant sa majesté et les césars devant sa force ; à celui que la sagesse revient a ses conseils et son cœur est rempli de tendresse et de patience , a toi papa .

A celle que le soleil a brillé pour éclairer ses yeux, qui a offert la beauté aux fleurs et le charme a tout ce qui est beau pour la personne qui na jamais cesse de me porter aide et courage , a toi maman .

A mes chers frères :Abd elali , Adel.

A ma sœur :Soraia.

A tout mes amies surtout :

S.Ibtissem,Razika ,Samiha ,Rima,Selma,Dadi,Madjda,Sihem et Ibtissem.

A tout ma famille.

A tout ceux que j'aime et qui m'aiment

HANANE

Table des matières

Introduction

L'idée de la méthode de Rothe est de mener les calculs dans un espace fonctionnel non classique et d'introduire une généralisation naturelle de la notion de solution faible pour le problème étudié.
Appliquant cette idée nous établissons les estimations a priori nécessaires, sur la base des quelles la convergence d'un schéma d'approximation semi discrétisé correspondant est démontré.
Le schéma de la méthode de Rothe est comme suite :
On divise l'intervalle du temps en n sous intervalles $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1..n$.

où $t_j = jh$ et $h = \frac{T}{n}$.

On note par $u_j = u_j(x) = u_j(x, jh)$ les approximants de u.

On remplace les dérivées de la fonction u, $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ par :

$\delta u_j = \dfrac{u_j - u_{j-1}}{h}$ et $\delta^2 u_j = \dfrac{\delta u_j - \delta u_{j-1}}{h}$ pour tout $t = t_j$.

On obtient un système formé de n équations en x où l'inconnu est $u_j(x)$ donc on approxime le problème posé à tout point $t = t_j$, $j = 1..n$, par un nouveau problème discret.
On détermine les fonctions u^n solutions du système obtenu.
On construit les fonctions de Rothe définies par :

$$u^n(t) = u_{j-1} + \delta u_j(t - t_j) \quad , t \in [t_{j-1}, t_j] \quad , j = 1..n$$

$$\bar{u}^{(n)}(t) = \begin{cases} u_j \\ & t \in [t_{j-1}, t_j] \quad , j = 1..n \\ U_0 \end{cases}$$

Aprés avoir démontré quelques estimations pour la solution approchée, nous établissons la convergence de la solution approchée $u^n(t)$ vers la solution du problème posé.

Chapitre 1

Rappel d'analyse fonctionnelle

1.1 Espace de sobolev

Soit : $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$.

On définit l'espace de sobolev $W^{p,k}(\Omega)$ par :

$$W^{p,k}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \text{ existe et } D^\alpha f \in L^P(\Omega), \forall\ |\alpha| \leq k\}$$

On munit les espaces de sobolev par une structure d'espaces normés dont les normes sont définies par :

$$\|f\|_{W^{p,k}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega |D^\alpha f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad 1 \leq p < \infty.$$

$$\|f\|_{W^{p,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq k} sup_{x\in\Omega} |D^\alpha f(x)| \qquad p = +\infty$$

Si $p = 2$: H^k est un espace de Hilbert.

1.1.1 Espace de $H^1(\Omega)$

On appelle espace de sobolev d'ordre 1 sur Ω, l'espace :

$$H^1(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \quad 1 \leq i \leq n \right\}$$

On munit $H^1(\Omega)$ du produit scalaire :

$$(f, g)_{1,\Omega} = \int_\Omega \left(fg + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)$$

La norme correspendande sera :

$$\|f\|_{1,\Omega} = \sqrt{(f, f)_{1,\Omega}}$$

1.1.2 Espace de $H^2(\Omega)$

On appelle espace de sobolev d'ordre 2 sur Ω, l'espace :

$$H^2(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega), \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \in L^2(\Omega), \quad 1 \leq i \leq n \right\}$$

On munit $H^2(\Omega)$ du produit scalaire :

$$(f,g)_{2,\Omega} = \int_\Omega \left(fg + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} \right) \right)$$

La norme correspendande sera :

$$\|f\|_{2,\Omega} = \sqrt{(f,f)_{2,\Omega}}$$

1.2 Les inégalités utilisées

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

1.2.1 Inégalité de Cauchy

$$\forall u, v \in L^2(\Omega), \quad \left| \int_\Omega uv \, dx \right| \leq \left(\int_\Omega |u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left| \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} u_i v_i \, dx \right| \leq \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{N} u_i^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{N} v_i^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

1.2.2 L'ε inégalité

$$|xy| \leq \frac{\varepsilon}{2} x^2 + \frac{1}{2\varepsilon} y^2$$

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \forall x, y$$

1.3 Convergence faible

Soit E un espace de Banach

Définition 1.3.1 *(x_n) converge faiblement dans E vers x si l'on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} < x', x_n > = < x', x >$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \forall x' \in E'$$

$$\lim_{n\to+\infty} < x', x_n - x > = 0$$

Proposition 1.3.1 :

On note $x_n \to x$ faiblement dans E par :

$$x_n \rightharpoonup x$$

Remarque 1.3.1 :

1. *Si $x_n \to x$ fortement $(\|x_n - x\|_E \to 0) \Rightarrow x_n \rightharpoonup x$ car :*

$$\forall x' \in E' : \ | < x', x_n - x > | \leq \|x'\|_\star \|x_n - x\| \to 0$$

2. *Si* $\dim E = n < \infty$ *on a équivalence de deux notions :*

$$m \geq 1, \ x^m = (x_1^m, x_2^m, \ldots\ldots, x_n^m), \ \dim E' = n$$

$$\{e_1, e_2, \ldots\ldots., e_n\} \text{ base de } E \Rightarrow \{e_j^\star\}_{j=1}^n \text{ base dual tq :}$$

$$\begin{aligned} e_j^\star(e_i) &= \delta_{ji} \\ &= \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

$$x^m \rightharpoonup x = (x_1, x_2, ..., x_n) \quad \Rightarrow \quad \forall i = \overline{1,n},\ x' = e_i^\star :$$

$$< e_i^\star, x^m - x >= x_i^m - x_i \quad \overset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i^m - x_i| \quad \overset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Alors :

$$\|x^m - x\|_1 \to 0 \quad \text{ce qui donne} \quad \|x^m - x\| \to 0$$

Car toute les normes de E sont équivalente.

Théorème 1.3.1 *Soit E un espace de Banach reflexif et x_n une suite bornée dans E, alors il est possible d'extraire une sous suite de x_n qui converge faiblement dans E.*

Théorème 1.3.2 (*de Riesz*) [10]

E un espace de Hilbert, soit $f \in E'$, il existe un élément unique $u \in E$

tq :

$$\begin{cases} f(v) = (v, u) \\ \\ \|f\|_\star = \|u\| \end{cases} \quad \forall v \in E$$

Remarque 1.3.2 *:*

1. $v_n \rightharpoonup v \Leftrightarrow \forall u \in E, \ \lim\limits_{n \to \infty} (v_n, u) = (v, u)$

   Car :

   $$v_n \rightharpoonup v \Leftrightarrow \forall f \in E' : \ f(v_n) \to f(v)$$

   théorème de Riesz $\Leftrightarrow \quad f(v_n) = (u, v_n)$

2. *On a le théorème :*

   Toute suite bornée dans un espace de Hilbert possède une sous suite faiblement convergente .

Chapitre 2

Position du problème et estimations a priori

2.1 Introduction

On va étudier le problème :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) + \int_0^t a(t-s)k(s,u(x,s))\,ds \qquad (x,s) \in (0,1) \times (0,T) \tag{2.1.1}$$

Avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned} u(x,0) &= U_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,0) &= U_1(x) \end{aligned} \qquad x \in (0,1) \tag{2.1.2}$$

Et les conditions intégrales :

$$\int_0^1 u(x,t)\,dx = \int_0^1 xu(x,t)\,dx = 0 \tag{2.1.3}$$

L'espace des fonctions continues de I dans $B(0,1)$,noté $C(I, B(0,1))$ est un Banach pour la norme :

$$\|x\|_{C(I,B(0,1))} = \max_I \|x(t)\|_B$$

On dénote par $V_B, C^{0,1}(I,X)$ et $C^{1,1}(I,X)$ les espaces suivantes :

$$V_B = \left\{\phi \in B(0,1) \text{ tq} : \int_0^1 \phi\, dx = 0\right\}$$

$$C^{0,1}(I,X) = \{u : I \to X \text{ tq u est lipchitzienne continue }\}$$

$$C^{1,1}(I,X) = \left\{u \in C^{0,1}(I,X) \text{ tq } \frac{du}{dt} \in C^{0,1}(I,X)\right\}$$

Où X est un espace normé.

On peut voir la fonction :

$$f : (0,1) \times I \longmapsto f(x,t) \in \mathbb{R}$$

Comme une fonction associant à $t \longmapsto f(t)$ définie de I dans un espace fonctionnel.

En posant :

$$f(t) : x \in (0,1) \longmapsto f(x,t)$$

Pour résoudre le problème $(2.1.1)-(2.1.3)$,on suppose que :

$H_1)$ f doit satisfaire :

$$\begin{cases} f(t) \in L^2(0,1) \\ \|f(t)-f(t')\|_B \leq l|t-t'| \end{cases}$$

l constante positive.

$H_2)$ $U_0(x), U_1(x) \in H^2(0,1)$

$H_3)$ U_0, U_1 vérifient :

$$\int_0^1 U_0(x)\,dx = \int_0^1 xU_0(x)\,dx = 0 \tag{2.2.1}$$

$$\int_0^1 U_1(x)\,dx = \int_0^1 xU_1(x)\,dx = 0 \tag{2.2.2}$$

$H_4)$ a est une fonction continue telle que :

$$|a(t)-a(t')| \leq C_1|t-t'|$$

$k : I \times B_2^1 \to L^2(0,1)$ est continue pour les deux variables et vérifie :

$$\|k(t,u)\|_B \leq \|u(t)\|_B$$

H_5) Pour $u(t), v(t) \in V$, on a :

$$\|k(t,u) - k(t,v)\| \leq L(t)\|u(t) - v(t)\|_B$$

p.p. $t \in I$ ou $L \in L^1(I)$ une fonction positive.

Définition 2.2.1 *Une fonction $u : I \to L^2(0,1)$ est dite solution faible du $(2.1.1) - (2.1.3)$ si :*

1. $$u \in C^{0,1}(I, V)$$
2. $$\frac{du}{dt} \in L^\infty(I, V) \cap C^{0,1}\left(I, B_2^1(0,1)\right) \ \ et\ \ \frac{d^2u}{dt^2} \in L^\infty(I, B_2^1(0,1))$$
3. $$u(0) = U_0 \ \ dans\ V\ \ et\ \ \frac{du}{dt}(0) = U_1 \ \ dans\ B_2^1(0,1)$$
4. *Pour tout $\phi \in V$ et p.p. $t \in I$, l'identité :*

$$\int_I \left(\frac{d^2u}{dt^2}(t), \phi\right)_{B_2^1} dt + \int_I (u(t), \phi)\, dt = \int_I \left(f(t) + \int_0^t a(t-s)k(s,u)\, ds, \phi\right)_{B_2^1} dt \tag{2.2.3}$$

est satisfaite.

Théorème 2.2.1 *Supposons que les hypothèses $(H_1 - H_4)$ sont vérifies, alors il existe une solution faible u du problème $(2.1.1) - (2.1.3)$ au sens de la* *définition* (2.2.1).

De plus, si (H_5) *est satisfaite, alors* u *unique.*

2.3 Schéma de discrétisation et estimations a priori

On divise l'intervale en n sous intervals de longueur $h = \frac{T}{n}$, et notons :

$$u_j = u(t_j), \quad \text{tq } t_j = jh, \quad j = 1..n$$

Pour $j = 1..n$, on resoud successivement le problème stationnaire linéaire :

$$\frac{u_j - 2u_{j-1} + u_{j-2}}{h^2} - \frac{d^2 u_j}{dx^2} = f_j + h \sum_{i=0}^{j-1} a_{ji} k_i \tag{2.3.1}$$

$$\int_0^1 u_j(x)\, dx = 0 \tag{2.3.2}$$

$$\int_0^1 x u_j(x)\, dx = 0 \tag{2.3.3}$$

Où

$$\begin{cases} f_j = f(t_j) \\ a_{ji} = a(t_j - t_i) \\ k_i = k(t_i, u_i) \end{cases}$$

On a :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = \frac{\partial U_0}{\partial x}(x) = U_1(x) = \frac{U_0(x) - u_{-1}(x)}{h}$$

Donc :

$$\begin{aligned} u_{-1}(x) &= U_0(x) - hU_1(x) \\ u_0(x) &= U_0(x) \end{aligned} \qquad x \in (0,1)$$

Alors :

$$\delta u_j = \frac{u_j - u_{j-1}}{h} \quad et \quad \delta^2 u_j = \frac{\delta u_j - \delta u_{j-1}}{h} \qquad j = 0..n$$

Et définissons la suite de Rothe (u_n) des fonctions lipchitziennes continues

définies de :

$$I \longrightarrow H^2(0,1) \cap V$$

Par :

$$u^n(t) = u_{j-1} + \delta u_j(t - t_j), \quad t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = 1..n \tag{2.3.4}$$

Et les fonctions auxiliaires suivantes :

$$\delta u^n(t) = \delta u_{j-1} + \delta^2 u_j(t - t_j), \quad t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = 1..n \tag{2.3.5}$$

$$\bar{u}^{(n)}(t) = \begin{cases} u_j & t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = 1..n \\ U_0 & t \in [-h, 0] \end{cases} \tag{2.3.6}$$

$$\bar{\delta u}^{(n)}(t) = \begin{cases} \delta u_j & t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = 1..n \\ U_1 & t \in [-h, 0] \end{cases} \tag{2.3.7}$$

Théorème 2.3.1 *le problème* $(2.3.1)-(2.3.3)$ *admit une unique solution*

$$u_j \in H^2(0,1) \text{ pour } n \geq 1,\ j=1..n$$

Démonstration 2.3.1 *Supposons que* u_{j-1} *et* u_{j-2} *sont toujours connues et qu'elles soient dans* $H^2(0,1)$*, alors* $f_j \in L^2(0,1)$.

La solution général de $(2.3.1)-(2.3.3)$ *est donnée par :*

$$u_j(x) = k_1(x)\cosh\frac{x}{h} + k_2(x)\sinh\frac{x}{h} \quad ,x \in (0,1) \tag{2.3.8}$$

Où k_1, k_2 *sont deux fonctions de* x *telles que :*

$$\begin{cases} \dfrac{dk_1}{dx}(x)\cosh\dfrac{x}{h} + \dfrac{dk_2}{dx}\sinh\dfrac{x}{h} = 0 \\ \dfrac{dk_1}{dx}(x)\sinh\dfrac{x}{h} + \dfrac{dk_2}{dx}\cosh\dfrac{x}{h} = h\left[\dfrac{-2u_{j-1}+u_{j-2}}{h^2} - f_j - h\displaystyle\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i\right] \end{cases} \tag{2.3.9}$$

En remarquant que le déterminant de $(2.3.9)$ *est :*

$$\Delta = \cosh^2\frac{x}{h} - \sinh^2\frac{x}{h} = 1$$

Alors :

$$\begin{cases} \dfrac{dk_1}{dx}(x) = hF_j(x)\sinh\dfrac{x}{h} \\ \dfrac{dk_2}{dx}(x) = hF_j(x)\cosh\dfrac{x}{h} \end{cases} \tag{2.3.10}$$

Où :

$$F_j(x) = \frac{-2u_{j-1} + u_{j-2}}{h^2} - f_j - h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i \tag{2.3.11}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} k_1(x) = h\displaystyle\int_0^x F_j(\xi)\sinh\frac{\xi}{h}\,d\xi + \lambda_1 \\ k_2(x) = h\displaystyle\int_0^x F_j(\xi)\cosh\frac{\xi}{h}\,d\xi + \lambda_2 \end{cases} \tag{2.3.12}$$

D'aprés l'identité (2.3.8) *on a :*

$$u_j(x) = h\int_0^x F_j(\xi)\sinh\frac{x-\xi}{h}\,d\xi + \lambda_1\cosh\frac{x}{h} + \lambda_2\sinh\frac{x}{h} \tag{2.3.13}$$

Choisissons (λ_1, λ_2) *telles que* (2.3.2), (2.3.3) *soient vérifie ,alors :*

$$\begin{cases} \lambda_1\displaystyle\int_0^1 \cosh\frac{x}{h}\,dx + \lambda_2\int_0^1 \sinh\frac{x}{h}\,dx = -h\int_0^1\int_0^x F_j(\xi)\sinh\frac{x-\xi}{h}\,d\xi\,dx \\ \lambda_1\displaystyle\int_0^1 x\cosh\frac{x}{h}\,dx + \lambda_2\int_0^1 x\sinh\frac{x}{h}\,dx = -h\int_0^1\int_0^x xF_j(\xi)\sinh\frac{x-\xi}{h}\,d\xi\,dx \end{cases} \tag{2.3.14}$$

Et par suite :

$$\begin{cases} \lambda_1\sinh\frac{1}{h} + \lambda_2\left(\cosh\frac{1}{h} - 1\right) = -\displaystyle\int_0^1\int_0^x F_j(\xi)\sinh\frac{x-\xi}{h}\,d\xi\,dx \\ \lambda_1\left(\sinh\frac{1}{h} - h\cosh\frac{1}{h} + h\right) + \lambda_2\left(\cosh\frac{1}{h} - h\sinh\frac{1}{h}\right) = \displaystyle\int_0^1\int_0^x xF_j(\xi)\sinh\frac{x-\xi}{h}\,d\xi\,dx \end{cases} \tag{2.3.15}$$

Puisque le déterminant de (2.3.15) *:*

$$\Delta(h) = 2h - 2h\cosh\frac{1}{h} + \sinh\frac{1}{h}$$

Donc :

$$\Delta(h) = 2\sinh\frac{1}{2h}\left(\cosh\frac{1}{2h} - 2h\sinh\frac{1}{2h}\right) \tag{2.3.16}$$

ne s'annule pas $\forall h > 0$, *alors le système* (2.3.15) *admet une unique solution* $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

Ce qui implique que le problème (2.3.1) $-$ (2.3.3) *a une unique solution :*

$$u_j \in H^2(0,1)(\text{ puisque } F_j \in L^2(0,1)\ )$$

Remarque 2.3.1 *Dans la suite, C denote une constante positive indépendente de n, j et de h.*

Lemme 2.3.1 *il existe $C > 0$ et $N \in \mathbb{N}^\star$ tq :*

$$\|\delta u_j\|^2_{B_2^1} + \|u_j\|^2 \leq C, \quad j = 1..n,\ n > N$$

Démonstration 2.3.2 *Soit $\phi \in V$, il est facile d'avoir :*

$$\int_0^x (x-\xi)\phi(\xi)\, d\xi = \Im_x^2\phi \qquad \forall x \in (0,1)$$

tq

$$\Im_x^2\phi = \Im_x(\Im_x\phi) = \int_0^x d\xi \int_0^\xi \phi(\mu)\, d\mu$$

Ce qui implique :

$$\Im_1^2\phi = \int_0^1 (1-\xi)\phi(\xi)\,d\xi$$

Alors :

$$\Im_1^2\phi = \int_0^1 \phi(\xi)\,d\xi - \int_0^1 \xi\phi(\xi)\,d\xi \tag{2.3.17}$$

Multiplions (2.3.1) *par* $\Im_x^2\phi$ *pour tout* $j = 1..n$ *et intégrons sur* $(0,1)$,

on obtient :

$$\int_0^1 \left(\frac{u_j - 2u_{j-1} + u_{j-2}}{h^2}\right)\Im_x^2\phi\,dx - \int_0^1 \frac{d^2u_j}{dx^2}(x)\Im_x^2\phi\,dx = \int_0^1 \left(f_j(x) + h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i\right)\Im_x^2\phi\,dx$$

On a :

$$\begin{aligned}\delta^2 u_j &= \frac{\delta u_j - \delta u_{j-1}}{h}\\ &= \frac{u_j - 2u_{j-1} + u_{j-2}}{h^2}\end{aligned}$$

Donc :

$$\int_0^1 \delta^2 u_j(x)\Im_x^2\phi\,dx - \int_0^1 \frac{d^2u_j}{dx^2}(x)\Im_x^2\phi\,dx = \int_0^1 \left(f_j(x) + h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i\right)\Im_x^2\phi\,dx \tag{2.3.18}$$

Intégrons par parties chaque terme de (2.3.18) *et utilisons* (2.3.17)

on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \delta^2 u_j(x)\Im_x^2\phi\,dx &= \int_0^1 \frac{d}{dx}\left(\Im_x(\delta^2 u_j)\right)\Im_x^2\phi\,dx \\
&= (\Im_x(\delta^2 u_j))\Im_x^2\phi\,\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \Im_x(\delta^2 u_j)\Im_x\phi\,dx \\
&= -(\delta^2 u_j,\phi)_{B_2^1}
\end{aligned}$$

Où :

$$\Im_x(\delta^2 u_j)\,\Im_x^2\phi\,\Big|_{x=0}^{x=1} = \Im_1(\delta^2 u_j)\,\Im_1^2\phi - \Im_0(\delta^2 u_j)\,\Im_0^2\phi = 0$$

Et

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{d^2 u_j}{dx^2}(x)\Im_x^2\phi\,dx &= \frac{du_j}{dx}(x)\Im_x^2\phi\,\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{du_j}{dx}(x)\Im_x\phi\,dx \\
&= -\int_0^1 \frac{du_j}{dx}(x)\Im_x\phi\,dx \\
&= -u_j(x)\Im_x\phi\,\Big|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 u_j(x)\phi(x)\,dx \\
&= (u_j,\phi)
\end{aligned}$$

On a aussi :

$$\int_0^1 \left(f_j + h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i\right) \Im_x^2\phi\, dx = \int_0^1 \frac{d}{dx}\Im_x\left(f_j + h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i\right)\Im_x^2\phi\, dx$$

$$= \Im_x(f_j + h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i)\Im_x^2\phi|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \Im_x(f_j + h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i)\Im_x\phi dx$$

$$= -\left(f_j + h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i, \phi\right)_{B_2^1} \qquad (2.3.19)$$

Alors (2.3.18) *devient :*

$$(\delta^2 u_j, \phi)_{B_2^1} + (u_j, \phi) = \left(f_j + h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i, \phi\right)_{B_2^1} \quad ,\forall\phi\in V \quad ,\forall j = 1..n \qquad (2.3.20)$$

Posons $\phi = \delta u_j$(*il est clair que* $\phi = \delta u_j \in V$) *dans* (2.3.20) ,

on obtient :

$$(\delta^2 u_j, \delta u_j)_{B_2^1} + (u_j, \delta u_j) = \left(f_j + h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i, \delta u_j\right)_{B_2^1} \quad ,\forall j = 1..n$$

Donc :

$$\left(\frac{\delta u_j - \delta u_{j-1}}{h}, \delta u_j\right)_{B_2^1} + \left(u_j, \frac{u_j - u_{j-1}}{h}\right) = (f_j, \delta u_j)_{B_2^1} + h\sum_{i=0}^{j-1}(a_{ji}k_i, \delta u_j)_{B_2^1} \quad ,\forall j = 1..n$$

Alors :

$$\begin{aligned}(\delta u_j - \delta u_{j-1}, \delta u_j)_{B_2^1} + (u_j, u_j - u_{j-1}) &= h^2 \sum_{i=0}^{j-1} (a_{ji} k_i, \delta u_j)_{B_2^1} \\ &+ h(f_j, \delta u_j)_{B_2^1}\end{aligned} \qquad \forall j = 1..n$$

En utilisant les identités :

$$2(u_j, u_j - u_{j-1}) = \|u_j\|^2 + \|u_j - u_{j-1}\|^2 - \|u_{j-1}\|^2$$

$$2(\delta u_j, \delta u_j - \delta u_{j-1})_{B_2^1} = \|\delta u_j\|^2_{B_2^1} + \|\delta u_j - \delta u_{j-1}\|^2_{B_2^1} - \|\delta u_{j-1}\|^2_{B_2^1}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}&\|\delta u_j\|^2_{B_2^1} + \|\delta u_j - \delta u_{j-1}\|^2_{B_2^1} - \|\delta u_{j-1}\|^2_{B_2^1} + \|u_j\|^2 + \|u_j - u_{j-1}\|^2 - \|u_{j-1}\|^2 \\ &= 2h^2 \sum_{i=0}^{j-1} (a_{ji} k_i, \delta u_j)_{B_2^1} + 2h(f_j, \delta u_j)_{B_2^1}\end{aligned} \qquad \forall j = 1..n$$

Donc :

$$\begin{aligned}\|\delta u_j\|^2_{B_2^1} - \|\delta u_{j-1}\|^2_{B_2^1} + \|u_j\|^2 - \|u_{j-1}\|^2 &\leq 2Ch^2 \sum_{i=0}^{j-1} \|k_i\|_{B_2^1} \|\delta u_j\|_{B_2^1} \\ &+ 2h\|f_j\|_{B_2^1} \|\delta u_j\|_{B_2^1}\end{aligned} \tag{2.3.21}$$

On prend $\varepsilon = 1$ *dans l'ε inégalité :*

$$\begin{aligned} 2\|k_i\|_{B_2^1}\|\delta u_j\|_{B_2^1} &\leq 2\|u_j\|\|\delta u_j\|_{B_2^1} \\ &\leq \|u_j\| + \|\delta u_j\|_{B_2^1} \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} 2h\|f_j\|\|\delta u_j\|_{B_2^1} &\leq 2h\|f\|_{C(I,B_2^1)}\|\delta u_j\|_{B_2^1} \\ &\leq Ch + Ch\|\delta u_j\|_{B_2^1}^2 \end{aligned}$$

Substituons dans (2.3.21) *on aura :*

$$\begin{aligned} \|\delta u_j\|_{B_2^1}^2 - \|\delta u_{j-1}\|^2 + \|u_j\|^2 - \|u_{j-1}\|^2 &\leq Ch\|\delta u_j\|_{B_2^1}^2 \\ &+ Ch^2\sum_{i=0}^{j-1}\|u_j\|^2 \\ &+ Ch \end{aligned} \tag{2.3.22}$$

Choisissons le naturel N *tel que* $C\frac{T}{N} < 1$*,alors pour* $n > N$*,*

l'inégalité (2.3.21) *implique :*

$$\begin{aligned} (1 - Ch)[\|\delta u_j\|_{B_2^1}^2 + \|u_j\|^2] &\leq (1 + Ch^2)[\|\delta u_{j-1}\|_{B_2^1}^2 + \|u_{j-1}\|^2] \\ &+ Ch^2\sum_{i=0}^{j-1}\|u_j\|^2 \\ &+ Ch \end{aligned} \tag{2.3.23}$$

En appliquant cette inégalité réccuressivement ,on obtient :

$$(1-Ch)^j[\|\delta u_j\|^2_{B^1_2} + \|u_j\|^2] \leq (1+jch^2)^j[\|\delta U_0\|^2_{B^1_2} + \|U_0\|^2]$$
$$+jCh$$

Et on a :

$$\left[\frac{1+jCh^2}{1-Ch}\right]^n \longrightarrow \exp(n(\ln(1+Ch)-\ln(1-Ch))) \text{ quand }, n\to\infty$$
$$= e^{2nC\frac{T}{n}}$$
$$= C$$

Alors :

$$\|\delta u_j\|^2_{B^1_2} + \|u_j\|^2 \leq C\,[\,\|\delta U_0\|^2_{B^1_2} + \|U_0\|^2] + \frac{jCh}{1-Ch}$$

Donc :

$$\|\delta u_j\|^2_{B^1_2} + \|u_j\|^2 \leq C$$

Lemme 2.3.2 *il existe $C>0$ et $N\in\mathbb{N}^\star$ t.q :*

$$\|\delta^2 u_j\|^2_{B^1_2} + \|\delta u_j\|^2 \leq C \quad ,j=1..n\,,n>N \quad .$$

Démonstration 2.3.3 *La difference $(2.3.20)_j-(2.3.20)_{j-1}$ donne :*

$$
\begin{aligned}
(\delta^2 u_j, \phi)_{B^1_2} - (\delta^2 u_{j-1}, \phi)_{B^1_2} + (u_j, \phi) - (u_{j-1}, \phi) &= \left(f_j + h \sum_0^{j-1} a_{ji} k_i, \phi \right)_{B^1_2} \\
&- \left(f_{j-1} + h \sum_0^{j-2} a_{j-1i} k_i, \phi \right)_{B^1_2} \\
&\forall \phi \in V, \ \forall j = 1..n
\end{aligned}
$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
(\delta^2 u_j, \phi)_{B^1_2} + (u_j - u_{j-1}, \phi) &= (\delta^2 u_{j-1}, \phi)_{B^1_2} \\
&+h(a_{jj-1} k_i, \phi)_{B^1_2} \\
&+h \sum_{i=0}^{j-2} ((a_{ji} - a_{j-1i}) k_i, \phi)_{B^1_2} \\
&+(f_j - f_{j-1}, \phi)_{B^1_2}
\end{aligned}
\tag{2.3.24}
$$

Posons $\phi = \delta^2 u_j$ dans (2.3.24),on obtient :

$$
\begin{aligned}
(\delta^2 u_j, \delta^2 u_j)_{B^1_2} + (u_j - u_{j-1}, \delta^2 u_j) &= (\delta^2 u_{j-1}, \delta^2 u_j)_{B^1_2} \\
&+h(a_{jj-1} k_i, \delta^2 u_j)_{B^1_2} \\
&+h \sum_{i=0}^{j-2} ((a_{ji} - a_{j-1i}) k_i, \delta^2 u_j)_{B^1_2} \\
&+2(f_j - f_{j-1}, \delta^2 u_j)_{B^1_2}
\end{aligned}
$$

Donc :

Et les conditions intégrales :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \theta(x,t)\,dx &= E(t) \\ \int_0^1 x\theta(x,t)\,dx &= M(t) \end{aligned} \qquad t \in [0,T]$$

En utilisant la transformation :

$$\theta(x,t) = u(x,t) + r(x,t)$$

Où :

$$\begin{cases} r(x,t) = 6(2M(t) - E(x))x - 2(3M(t) - 2E(t)) \\ g(x,t) = f(x,t) + \dfrac{\partial^2 r}{\partial t^2} \\ \theta_0(x) = U_0(x) + r(x,0) \\ \theta_1(x) = U_1(x) + \dfrac{\partial r}{\partial t}(0) \end{cases}$$

Bibliographie

[1] J.R.CANNON. *The solution of the heat equation subject to the specification of energy*, quart. Appl. Math. 21 (1963) 155-160.

[2] A.BOUZIANI , N.MERAZGA. *Rothe time discretisation method applied to a quasilinear wave equation subject to integral conditions*, Adv. Difference Equ.3 (2004) 211-235.

[3] D.BAHUGUNA , A.K.PANI,V.RAGHAVENDRA. *Rothe's method to semilinear hyperbolic integrodifferential equations.* Journal of Applied Mathematics and stochastic, Vol.3, $N_0$4 (1990) 245-252.

[4] D.BAHUGUNA. *Quasilinear integrodifferential equations in Banach spaces* . Nonlinear analysis , theory , methods and applications, Vol.24,N_0.2 (1995) 175-183.

[5] D.BAHUGUNA, V.RAGHAVENDRA. *Rothe's method to parabolic integrodifferential equations via abstract integrodifferential equations.*

Appl.anal.33,153-167 (1989).

[6] M.P.SAPAGOVAS and R.YU.CHEGIES .

On some boundary value problems with a nonlocal condition.

Differential Equation,23(1987).$N_0$7, 858-863,translation from

differential'nye Uravneniya 23(1987).$N_0$7,1268-1274.

[7] J.KACUR. *Method of Rothe in evolution equation .*

Teubner-Texte zur Mathematic,V.80, BSB.B.G. Teubner

Verlagsgesellschaft,Leipzig,1985.

[8] J.KACUR. *Application of Rothe's method to perturbed linear hyperbolic equations and variatinol inequalities* .Czech.Math.J.34 (109), 1984, 92-106.

[9] A. GUEZANE-LAKOUD, M. S. JASMATI, A. CHAOUI *Rothe's method for an integrodifferential equation with integral conditions, Nonlinear Analysis.*72 (2010) 1522-1530.(2010).

[10] HAIM BREZIS. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications.*

Document saisi par TEX au format LATEX.
Mille Merci au Docteur *Abd erazak Chaoui*