République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

Université 08 Mai 1945 – Guelma

Faculté des Mathématiques et d'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master Académique en Mathématiques
Option : Equations aux Dérivées Partielles

Par :

ZIOU Kenza

Intitulé

Méthode d'itération monotone et applications aux équations paraboliques

Dirigé par :

Dr. BADRAOUI Salah

Devant les membres du jury :

Président :	S. BAKOUCHE	Univ-Guelma
Examinateur :	N. BOUSSETILA	Univ-Guelma
Examinateur :	D. BELLAOUAR	Univ-Guelma

Session Juin 2011

Remerciement

Tout d'abord j´exprime mes remerciements sincères à Monsieur

Salah Badraoui

Mon encadreur qui a dirigé mon travail et m´a conseillé

Judicieusement.

J´exprime aussi mes remerciements à tous les enseignants du

Département des sciences exactes qui ont contribué à notre formation

pour avoir le diplôme de Master en mathématiques appliquées.

Merci à ma famille, qui m´ont offert des bonnes conditions pour continuer

mes études, leur soutien

Je ne voudrais pas oublier tous mes amis qui m´ont soutenue et encouragée

durant mes études.

Enfin je remercie tous ceux qui de loin ou de prés ont contribué à

l'élaboration et à l'aboutissement de ce travail.

Table des matières

Introduction

La méthode des sous-solutions et sur-solutions est une technique fructueuse pour démontrer des résultats de l'existence pour les problèmes non linéaire. L'idée de base est de modifier le problème donné à un problème plus simple et utiliser ensuite la théorie de Schauder et la théorie des inégalités différentielles pour établir les résultats d'existence du problème original.

De manière générale, cette méthode consiste en ce qui suit :
(i) Construire une suite d'une certaine classe approximant les solutions.
(ii) Montrer la convergence de la suite construite.
(iii) Démontrer que la fonction limite est réellement solution du problème posé.

La méthode d'itération monotone peut être utilisée pour le calcul numériques des solutions.

La méthode d'itération monotone s'utilise pour démontrer l'existence et l'unicité des solutions pour les équations simples et les systèmes d'équations elliptiques et aussi paraboliques.

Dans ce mémoire on étudie cette méthode pour les équations parabiliques.

Chapitre 1

Rappel sur les fonctions holderiennes et estimations de Schauder

1.1 Espaces des fonctions continues sur un ouvert

Soit $\varnothing \neq \Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert.

Définition 1. **(Fonctions Holderiennes)** Pour $m \in \mathbb{N}^*$ on désigne par $\mathcal{C}^m(\Omega)$ l'espace des fonctions continues dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre m sont continues sur Ω.

Dédinition 2. On note $\mathcal{C}_b^m(\Omega)$ le sous espace de $\mathcal{C}^m(\Omega)$ constitué des fonctions de cet espace dont les dérivées d'ordre $\leq m$ sont bornées et uniformément continues sur Ω. En dotant ce sous espace de la norme :

$$\|u\|_{m,b} = \sum_{|\beta| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \left| D^\beta u(x) \right|$$

on obtient un espace de Banach.

Dédinition 3. Si $0 < \alpha \leq 1$. On désigne par $\mathcal{C}_b^{0,\alpha}(\Omega)$ l'espace des fonctions holderiennes d'ordre α, à savoir :

$$\mathcal{C}_b^{0,\alpha}(\Omega) = \{u \in \mathcal{C}_b(\Omega) : \exists C > 0, \forall x, y \in \Omega, \ |u(x) - u(y)| \leq C \, |x - y|^\alpha \}$$

Plus généralement on définit :

$$C_b^{m,\alpha}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} u \in C_b^m(\Omega) : \exists C > 0, \forall |\beta| \leq m, \ \forall x, y \in \Omega, \\ \left|D^\beta u(x) - D^\beta u(y)\right| \leq C\,|x-y|^\alpha \end{array} \right\}$$

Muni de la norme :

$$\|u\|_{m,\alpha} = \|u\|_{m,b} + \sum_{|\beta|=m} \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{\left|D^\beta u(x) - D^\beta u(y)\right|}{|x-y|^\alpha}$$

l'espace $C_b^{m,\alpha}(\Omega)$ est un espace de Banach.

1.2 Estimations de Schauder

Soit oit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné de frontière $\partial\Omega$ réguliere de classe $C^{2+\alpha}$ $(0 < \alpha \leq 1)$ et $T > 0$ un nombre réel. On note par

$$Q =]0, T[\times \Omega, \ \Gamma = [0, T] \times \partial\Omega, \ \partial_p Q = (\{0\} \times \Omega) \cup \Gamma$$

Soit l'opérateur A défini par $Au \equiv u_t - Lu$, où

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(t,x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(t,x) u$$

est un opérateur strictement uniformément elliptique, c-à-d

$$\exists\ 0 < \beta_1 \leq \beta_2 : \beta_1 \sum_{i,j=1}^n \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \beta_2 \sum_{i,j=1}^n \xi_i^2$$

pour tout $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

On suppose que

$$a_{ij}, b_i, c \in C^{\alpha/2,\alpha}\left(\overline{Q}\right) [0, T] \times \overline{\Omega})$$

Si $u \in C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}(\overline{Q})$ $(\overline{Q} = [0, T] \times \overline{\Omega})$ est une solutions du problème

$$\begin{array}{rcl} Au & \equiv & f(t,x) \\ u & = & g\ , \ \text{sur } \Gamma \\ u & = & g_0, \ \text{sur } \overline{\Omega} \end{array}$$

où $f \in C^{\alpha/2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right), g \in C^{(1+\alpha)/2, 1+\alpha}(\overline{Q}), g_0 \in C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}\right)$, alors il existe une constante $\beta = \beta(n, \alpha, \beta_1, \beta_2) > 0$:

$$\|u\|_{1+\alpha/2, 2+\alpha} \leq \beta \left(\|f\|_{\alpha/2,\alpha} + \|g\|_{1+\alpha/2, 2+\alpha} + \|g_0\|_{2+\alpha} \right)$$

Chapitre 2

Principe du maximum pour les équations paraboliques

2.1 Rappel et définitions

Définition 1. Un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$ est un sou ensemble non vide connexe de $\mathbb{R}^n$.

Définition 2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine et $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction régulière. Le laplacien Δu de la fonction u est défini par

$$\Delta u = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \tag{1.1}$$

Théorème 1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné, et $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. En un point de maximum $x^* \in \Omega$ on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}(x^*) = 0, \text{ pour tout } k = 1, \ldots, n \tag{1.2}$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}(x^*) \leq 0, \text{ pour tout } k = 1, \ldots, n \tag{1.3}$$

2.2 Principe du maximum pour une équation simple

Théorème 2 (Principe du maximum). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné de frontère $\partial\Omega$ et $T > 0$ un nompbre réel. On note par

$$Q =]0, T[\times \Omega,\ \Gamma = [0, T] \times \partial\Omega,\ \partial_p Q = \left(\{0\} \times \overline{\Omega}\right) \cup \Gamma \tag{2.1}$$

Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ et $\lambda > 0$ une constante vérifiant

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \Delta u \leq 0, \text{ sur } Q \tag{2.2}$$

alors

$$\max_{\overline{Q}} u = \max_{\partial_p Q} u \tag{2.3}$$

Démonstartion.
• Supposos tout d'abord que $\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \Delta u < 0$ dans Q.
Pour $\varepsilon \in]0, T[$, soit

$$Q_\varepsilon =]0, T - \varepsilon[\times \Omega \tag{2.4}$$

Comme $u \in C\left(\overline{Q}_\varepsilon\right)$, il existe un point $(t', x') \in \overline{Q}_\varepsilon$ tel que $u(t', x') = \max_{\overline{Q}_\varepsilon} u$.
Si $(t', x') \in Q_\varepsilon$, la condition nécessaire $u_t(t', x') = 0$ et $\Delta u(t', x') \leq 0$ donne $u_t(t', x') - \lambda \Delta u \geq 0$ ce qui contredit l'hypothèse.
Si $(t', x') \in \{T\} \times \Omega$ alors $u_t(T', x') \geq 0$ et $\Delta u \leq 0$ ceci qui donne la même contradiction. Ainsi $(t', x') \in \partial_p Q$.
Comme tout point $(t, x) \in [0, T] \times \overline{\Omega}$ (avec $T' < T$), il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(t, x) \in \overline{Q}_\varepsilon$, alors $\max_{\overline{Q}} u = \max_{\partial_p Q} u$.

• Supossons $\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \Delta u \leq 0$ dans Q. Introduisons la fonction $v = u - kt$ avec $k > 0$ une constante, alors

$$v_t - \lambda \Delta v = u_t - \lambda \Delta u - k < 0 \tag{2.5}$$

et

$$\max_{\overline{Q}} u = \max_{\overline{Q}} (v + kt) \leq \max_{\overline{Q}} v + kT = \max_{\partial_p Q} v + kT \leq \max_{\partial_p Q} u + kT$$

Passons à la limite lorsque $k \longrightarrow 0$ dans (2.8) on obtient la relation (2.3).

Remarque. Le théorème reste vrai pour $\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \Delta u + cu \leq 0$, sur Q où $c = c(t, x) \leq c_0$ est une fonction continue et majoré sur Q. Dans ce cas il suffit de faire le changement de variable $u = e^{\alpha t} v$ avec $\alpha \leq -c_0$.

Considérons maintenant un cas plus général.

2.3 Principe du maximum pour un cas plus génaral

Dans ce qui suit on s'interesse avec les opérateurs différentiels de la forme

$$Au \equiv u_t - Lu \tag{3.1}$$

où l'opérateur L est défini par

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \tag{3.2}$$

Définition 3. L'opéreteur L est dit elliptique en un point $x \in \Omega$ s'il existe une constante $\mu(x) > 0$ telle que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \mu(x) \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i^2 \tag{3.3}$$

pour tout $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.
L'opérateur L se nomme elliptique dans un domaine Ω s'il est elliptique en tout point $x \in \Omega$.
L'opérateur L se nomme uniformément elliptique dans un domaine Ω si (2.3) est vérifiée pour tout point $x \in \Omega$ et il existe une constante $\mu_0 > 0$ telle que $\mu(x) \geq \mu_0$, pour tout $x \in \Omega$.

Définition 4. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle carrée. La matrice C se nomme orthogonale si $CC^{tr} = I$ ou bien $(C^{tr})^{-1} = C$. Ici C^{tr} est la matrice transposée de C.

Il est facile de montrer qu'une matrice $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij}c_{ik} = \delta_{jk} \tag{3.5}$$

ou bien si et seulement si

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik}c_{jk} = \delta_{ij} \tag{3.6}$$

Une transformation de coordonées de la forme $y = Cx$ où C est une matrice orthogonale s'appelle transformation orthogonale.

Théorème 3. Soit L un opérateur elliptique défini par (3.2), alors sous une trasformation orthogonale de la forme $y = Cx$, l'opérateur L prend la forme

$$L_1 v = \sum_{k,m=1}^{n} b_{km}(y)\frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_m} \tag{3.7}$$

où $u(x) = u(C^{-1}y) = v(y)$ et $b_{km}(y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(C^{-1}y)c_{ki}c_{mj}$. De plus, l'opérateur L_1 est elliptique.

Démonstration. Comme $\frac{\partial y}{\partial xi} = c_{ij}$, on applique la dérivée de la fonction composée

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,j,k,m=1}^{n} a_{ij}(C^{-1}y)c_{ki}c_{mj}\frac{\partial^2 v(y)}{\partial x_i \partial x_j} \tag{3.8}$$

Définissons la matrice $B = (b_{km})$ par la relation

$$b_{km} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(C^{-1}y)c_{ki}c_{mj} \tag{3.9}$$

nous trouvons L de la forme L_1.
Pour établir l'ellipticité de L_1, prenons $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\sum_{k,m=1}^{n} b_{km}\xi_k\xi_m = \sum_{i,j,k,m=1}^{n} a_{ij}c_{ki}c_{mj}\xi_k\xi_m \tag{3.10}$$

Posons $\lambda_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ki}\xi_k$, nous trouvons

$$\sum_{k,m=1}^{n} b_{km}\xi_k\xi_m = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\ \lambda_i\lambda_j \tag{3.11}$$

Ainsi, par l'ellipticité de L et la relation (3.6)

$$\begin{aligned}\sum_{k,m=1}^{n} b_{km}\xi_k\xi_m &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\lambda_i\lambda_j \geq \mu(x)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 \\ &= \mu(x)\sum_{i,k,m=1}^{n} c_{ki}\xi_k c_{mi}\xi_m \\ &= \mu(x)\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2 \end{aligned}\tag{3.12}$$

On remarque que :
- La quantité $\mu(x)$ est aussi préservée par les transformations orthogonales.
- Si l'opérateur L est uniformément elliptique, alors l'opérateur L_1 est aussi uniformément elliptique.

Théorème 4. Un opérateur L de la forme (3.4) est elliptique en un point x^* si et seulement s'il existe une transformation linéaire $z = Dx$ où $D = (d_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que L devient le laplacien en ce point x^* dans les coordonnées $\{z_k\}_{k=1}^{n}$.

Démonstration. De l'algèbre linéaire, pour toute matrice symétrique $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice orthogonale $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $B = CAC^{-1}$ est diagonale. Si on fait une telle diagonalisation en un point x^* on trouve

$$\sum_{k,m=1}^{n} b_{km}(x^*)\lambda_k\lambda_m = \sum_{k=1}^{n} b_{kk}(x^*)\lambda_k^2 \geq \mu(x^*)\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2, \quad \text{pour tout} \quad (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \tag{3.13}$$

Il s'ensuit de (3.13) que

$$b_{kk}(x^*) \geq \mu(x^*) > 0 \tag{3.14}$$

Alors de (3.7), au point x^*, on aura

$$Lu = \sum_{k,m=1}^{n} b_{km}(x^*)\frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_m} \tag{3.15}$$

Introduisons une autre transformation

$$z_k = \frac{1}{\sqrt{b_{kk}(x^*)}} y_k, \; k = 1, \dots, n \tag{3.16}$$

En fonction de x :

$$z_k = \frac{1}{\sqrt{b_{kk}(x^*)}} \sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_j = \sum_{j=1}^{n} d_{kj}x_j \tag{3.17}$$

où $d_{kj} = \frac{c_{kj}}{\sqrt{b_{kk}(x^*)}}$.

Au point x^* on a : $Lu = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 w}{\partial z_k^2} = \Delta w$ où $w(z) = u(D^{-1}x)$.

Remarque. Si l'opérateur L est uniformément elliptique, alors $b_{kk}(x) \geq \mu(x) \geq \mu_0 > 0$, pour tout $x \in \Omega$, et l'opérateur L se transforme au laplacien sur Ω.

Définition 5. L'opérateur différentielle L défini par

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(t,x)u \tag{3.18}$$

est dit uniformément elliptique si sa partie principale $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ est uniformément elliptique.

Théorème 5. (Principe du maximum). Soit l'opérateur A défini par

$$Au \equiv u_t - Lu \tag{3.19}$$

où L est un opérateur uniformément elliptique. S'il existe une fonction $u \in C^{1,2}(\overline{Q})$ vérifiant

$$Au \leq 0, \text{ dans } Q \tag{3.20}$$

alors

$$\max_{\overline{Q}} u = \max_{\partial_p Q} \mathrm{u} \tag{3.21}$$

Démonstration. Commençons par le cas où $Au < 0$, dans Q.
Supposons par la l'absurde qu'il existe $(t^*, x^*) \in Q$ tel que $\max_{\overline{Q}} u = u(t^*, x^*) > 0$. Alors

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(t^*, x^*) = 0 \tag{3.22}$$

et d'après le théorème 4,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t^*, x^*) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t^*, x^*) = \Delta w(t^*, z^*) \tag{3.23}$$

comme $w(t^*, z^*)$ est le maximum de w dans Q' l'image de Q par la transformation $z = Dx$, alors

$$\Delta w(t^*, z^*) \leq 0 \tag{3.24}$$

Par conséquent, de (3.22), (3.23) et (3.24) on aura

$$Au(t^*, z^*) \geq 0 \tag{3.25}$$

ceci contredit l'hpotèse $Au < 0$, dans Q.
Si $Au \leq 0$, dans Q on passe à la fonction $v = u - kt$ avec $k > 0$ une contante.

Chapitre 3

Méthode d'itération monotone

3.1 Introduction

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné de frontière $\partial\Omega$ réguliere de classe $C^{2+\alpha}$ $(0 < \alpha \leq 1)$ et $T > 0$ un nombre réel. On note par

$$Q =]0, T[\times \Omega, \, \Gamma = [0, T] \times \partial\Omega, \; \partial_p Q = (\{0\} \times \Omega) \cup \Gamma \tag{1.1}$$

Soit l'opérateur

$$Au \equiv u_t - Lu \tag{1.2}$$

où

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(t,x)u \tag{1.3}$$

Soit le problème non-linéaire parabolique suivant

$$\begin{aligned} Au &= f(t,x,u), \quad (t,x) \in Q \\ u &= g, \quad (t,x) \in \Gamma \\ u &= g_0, \quad x \in \overline{\Omega} \end{aligned} \tag{P}$$

Déinition 1. Une fonction $v \in C^{1,2}(\overline{Q})$ s'appelle sous-solution du problème (P) si elle vérifie

$$\begin{aligned} Av &\leq f(t,x,v), \quad (t,x) \in Q \\ u &\leq g, \quad (t,x) \in \Gamma \\ u &\leq g_0, \quad x \in \overline{\Omega} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Une fonction $w \in C^{1,2}(\overline{Q})$ s'appelle sur-solution du problème (P) si elle vérifie

$$\begin{aligned} Aw &\geq f(t,x,w), \quad (t,x) \in Q \\ u &\geq g, \quad (t,x) \in \Gamma \\ u &\geq g_0, \quad x \in \overline{\Omega} \end{aligned} \tag{1.5}$$

On a alors le résultat suivant.

Théorème 1. On suppose que
(H1) les fonctions a_{ij}, b_i, $c \in C^{\alpha/2,\alpha}\left(\overline{Q};\mathbb{R}\right)$ et $c \leq 0$ sur $\overline{Q}$.
(H2) l'opérateur L est uniformément elliptique
(H3) la fonction $f \in C^{\alpha/2,\alpha}\left(\overline{Q}\times\mathbb{R};\mathbb{R}\right)$ et vérifie la condition de Nagumo : il existe une fonction strictement croissante $\psi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$|f(t,x,u)| \leq \psi\left(|u|\right), \quad \text{pour tout} \quad (t,x,u) \in \overline{Q}\times\mathbb{R}$$

(H4) la fonction $g \in C^{(1+\alpha)/2,1+\alpha}\left(\Gamma\times\mathbb{R};\mathbb{R}\right)$ et $g_0 \in C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega};\mathbb{R}\right)$.
(H5) le problème (P) vérifie la condition de compatibilité

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} g(t,x) = g_0(x), \quad \text{pour tout} \quad x \in \partial\Omega$$

(H6) Il existe une sous-solution v et une sur-solution w de (P).
Alors, le problème (P) possède une solution $u \in C^{1+\alpha/2,2+\alpha}\left(\overline{Q};\mathbb{R}\right)$ telle que

$$v(t,x) \leq u(t,x) \leq w(t,x), \quad \text{pour tout} \quad (t,x) \in \overline{Q} \tag{1.6}$$

De plus

$$\|D_x u(t,x)\| \leq N \quad \text{sur} \quad \overline{Q} \tag{1.7}$$

où $N = N(v,w,g,g_0)$ est une constante qui q'appelle la constante de Nagumo.

Démonstration. Voir Ladde-Lakshmakintham-Vatsala [ ]

On remarque que ce théorème ne donne pas l'unicité de la solution. Dans le paragraphe suivant on donne une condition de plus pour que le problème (P) possède une solution minimale et une solution maximale.

3.2 Solutions minimales et solutions maximales

Définition 2. Soit v une sous-solution de (P) et w une sur-solution de (P) telle que $v \leq w$ sur $\overline{Q}$. On appelle solution minimale $\rho = \rho(t,x)$ et solution maximale $r = r(t,x)$ de (P) si : u est une solution de (P) telle que $v \leq u \leq w$ sur $\overline{Q}$, alors :

$$v \leq \rho \leq u \leq r \leq w$$

Théorème 2. Supposons que les conditions (H1)-(H6) sont vérifiées et aussi la condition suivante
(H7) Il existe une constante M telle que

$$f(t,x,u_2) - f(t,x,u_1) \geq -M(u_2 - u_1)$$

pour tout $v \leq u_1 \leq u_2 \leq w$ sur $\overline{Q}$. Alors, il existe deux suites monotones (v_k) et (w_k) qui convergent dans $C^{1,2}(\overline{Q};\mathbb{R})$ vers ρ et r respectivement. De plus ρ et r sont les solutions minimale et maximale de (P).

Démonstration. La démonstartion se fait en plusieures étapes.
Etape 1. Tout d'abord, on considère le problème modifié suivant

$$\begin{aligned} Au &= h(t,x,u) - Mu, \quad (t,x) \in Q \\ u &= g, \quad (t,x) \in \Gamma \\ u &= g_0, \quad x \in \overline{\Omega} \end{aligned} \tag{P1}$$

où M est la constante définie dans l'hypothèse (H7) et la fonction h est définie par

$$h(t,x,u) = f(t,x,\delta) + M\delta(t,x) \tag{2.1}$$

où $\delta \in C^{(1+\alpha)/2,1+\alpha}\left(\overline{Q};\mathbb{R}\right)$ telle que $v \leq \delta \leq w$ sur $\overline{Q}$.
Le problème (P1) est équivalente au problème suivant

$$\begin{aligned} Bu &= h(t,x,u), \quad (t,x) \in Q \\ u &= g, \quad (t,x) \in \Gamma \\ u &= g_0, \quad x \in \overline{\Omega} \end{aligned} \tag{P2}$$

où

$$Bu = u_t - Lu + Mu \tag{2.2}$$

On remarque que la fonction h est indépendante de u.
L'existence d'une solution de (P2) s'ensuit de la vérification des hypothèses du théorème 1.

Vérifions (H3) : pour tout $t, t' \in [0,T]$, alors

$$\begin{aligned}
|h(t,x,u) - h(t',x,u)| &\leq |f(t,x,\delta(t,x)) - f(t',x,\delta(t',x))| \\
&\quad + M\,|\delta(t,x) - \delta(t',x)| \\
&\leq k(f)\left(|t-t'|^{\alpha/2} + |\delta(t,x) - \delta(t',x)|^{\alpha}\right) \\
&\quad + M\,|\delta(t,x) - \delta(t',x)| \\
&\leq k(f)\left(|t-t'|^{\alpha/2} + k_t^{\alpha}(\delta)\,|t-t'|^{\alpha(1+\alpha)/2}\right) \\
&\quad + Mk_t^{\alpha}(\delta)\,|t-t'|^{(1+\alpha)/2} \\
&\leq C(k(f), k_t(\delta), M, T)\,|t-t'|^{\alpha/2}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

où $C(k(f), k_t(\delta), M, T) = k(f)\left(1 + k_t^{\alpha}(\delta) T^{\alpha^2/2}\right) + Mk_t^{\alpha}(\delta)T^{1/2}$ est une constante positive. Donc h est lipshitzienne en t d'ordre α.
Pour tout $x, y \in \overline{Q}$ on a

$$\begin{aligned}
|h(t,x,u) - h(t,y,u)| &\leq |f(t,x,\delta(t,x)) - f(t,y,\delta(t,y))| \\
&\quad + M\,|\delta(t,x) - \delta(t,y)| \\
&\leq k(f)\left(|x-y|^{\alpha} + |\delta(t,x) - \delta(t,y)|^{\alpha}\right) \\
&\quad + M\,|\delta(t,x) - \delta(t,y)| \\
&\leq k(f)\left(|x-y|^{\alpha} + k_x^{1+\alpha}(\delta)\,|x-y|^{\alpha(1+\alpha)}\right) \\
&\quad + Mk_x(\delta)\,|x-y|^{1+\alpha} \\
&\leq C(k(f), k_x(\delta), M, T)\,|x-y|^{\alpha}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

où $C(k(f), k_x(\delta), M, T, \Omega) = k(f)\left(1 + k_x^{1+\alpha}(\delta)\,(\mathrm{diam}\,(\Omega))^{\alpha^2}\right) + Mk_x(\delta)\mathrm{diam}(\Omega)$, où $\mathrm{diam}(\Omega)$ est le diamètre de Ω.
Donc h est lipshitzienne en t d'ordre α. par conséquent $h \in C^{\alpha/2,\alpha}\left(\overline{Q} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}\right)$. De plus :

$$\begin{aligned}
|h(t,x,u)| &\leq |h(t,x,\delta(t,x))| + M\,|\delta(t,x)| \\
&\leq \psi\left(|\delta(t,x)|\right) + M\,|\delta(t,x)| \\
&\quad \psi\left(\delta_0 + \delta_1\right) + M(\delta_0 + \delta_1)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

où $\delta_0 = \min_{(t,x)\in\overline{Q}} \delta(t,x)$ et $\delta_1 = \max_{(t,x)\in\overline{Q}} \delta(t,x)$.

Démontrons la condition (H6) : La fonction v est une sous-dolution de (P2). En effet, comme $\delta \geq v$, d'après la condition (H7) :

$$f(t,x,\delta) - f(t,x,v) \geq -M(\delta - v)$$

ce qui implique que

$$f(t,x,v) + Mv \leq f(t,x,\delta) + M\delta \tag{2.6}$$

et comme v est une sous-solution de (P) c-à-d $Av \leq f(t,x,v)$ on obtient de ceci et de (2.6)

$$Av + Mv \leq f(t,x,v) + Mv \leq f(t,x,\delta) + M\delta = h(t,x,v) \tag{2.7}$$

c-à-d $Bv \leq h(t,x,v)$.
De la même façon on démontre que w est une sur-solution de (P2).
Ainsi, d'après le théorème 1, le problème (P2) possède une solution $u \in C^{1+\alpha/2,2+\alpha}\left(\overline{Q};\mathbb{R}\right)$ avec $v \leq u \leq w$ sur $\overline{Q}$.

Etape 2. Montrons que la solution u de (P2) est unique.
Supposons par l'absurde qu'il existe une autre solution $z \in C^{1+\alpha/2,2+\alpha}\left(\overline{Q};\mathbb{R}\right)$ avec $v \leq z \leq w$ sur $\overline{Q}$. Comme $u \neq z$, alors il existe au moins un point $(t,x) \in]0,T] \times \Omega$ tel que $u\ (t,x) \neq z(t,x)$.
(i) Supposons que $u\ (t,x) > z(t,x)$. Alors la fonction $u - z$ attiendra son positive maximum en un certain point $(t^*,x^*) \in \overline{Q}$ avec $t^* > 0$, i.e :u $(t^*,x^*) - z(t^*,x^*) > 0$. La fonction $u - z$ est une solution du problème

$$\begin{aligned} B(u-z) &= h(t,x,u) - h(t,x,z) \ \text{ dans } Q \\ u - z &= 0, \ \text{ sur } \Gamma \\ u - z &= 0, \ \text{ sur } \overline{\Omega} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Alors, d'après le principe du maximum $u - z$ atteint son maximum sur $\partial_p Q$, i.e mais $(u-z)/\partial_p Q = 0$, ceci contredit $u\ (t^*,x^*) - z(t^*,x^*) > 0$. Par conséquent $u \leq z$ sur Q.
(ii) De la même façon, si on suppose que $u\ (t,x) < z(t,x)$ pour un un point $(t,x) \in]0,T] \times \Omega$, on tombre dans une contradiction et on trouve que $u \geq z$ sur $\overline{Q}$. On conclut alors que $u = z$ sur $\overline{Q}.(t^*,x^*)$.

Etape 3. Soit le segment

$$\langle u, v\rangle = \left\{u \in C^{1,2}\left(\overline{Q}, \mathbb{R}\right) : v \leq u \leq w\right\} \tag{2.9}$$

et l'ensemble

$$E = \left\{\delta \in \langle u, v\rangle \quad \text{et} \quad \delta \in C^{(1+\alpha)/2, 1+\alpha}\left(\overline{Q}; \mathbb{R}\right)\right\} \tag{2.10}$$

On définit l'application

$$S : E \longrightarrow C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}\left(\overline{Q}; \mathbb{R}\right)$$

par

$$S(\delta) = u \ \text{ où } \ u \ \text{ est la solution unique de (P2) relativement à } \ \delta \tag{2.11}$$

Lemme 1. L'application S possède les propriétés suivantes

$$S(v) \geq v \quad \text{et} \quad S(w) \leq w. \tag{2.12}$$

et S est un opérateur croissant sur le segment $\langle v, w\rangle$, i.e

$$u_1, u_2 \in \langle v, w\rangle : u_1 \leq u_2 \Longrightarrow S(u_1) \leq S(u_2) \tag{2.13}$$

Démonstration du lemme 1. On prend $\delta = v$, alors $S(\delta) = S(v) \in C^{1,2}(\overline{Q}, \mathbb{R})$ et $S(v) \in \langle v, w\rangle$ c-à-d $S(v) \geq v$.
Aussi, si on prend $\delta = w$, alors $S(\delta) = S(w) \in C^{1,2}(\overline{Q}, \mathbb{R})$ et $S(w) \in \langle v, w\rangle$ c-à-d $S(w) \leq w$.
Montrons que S est croissant : Soit $\delta_1, \delta_2 \in \langle v, w\rangle$ avec δ_1, δ_2 et soit $S(\delta_1) = u_1$ et $S(\delta_2) = u_2$. On suppose par l'absurde que $u_2 > u_1$ on tombe dans une contradiction en utlisant le principe du maximum.

Etape 4. Construction des suites (v_k) et (w_k).
D'après le lemme 1, on peut définir la suite

$$v_k = S(v_{k-1}), \ v_0 = v \tag{2.14}$$

et la suite

$$w_k = S(w_{k-1}), \ w_0 = w \tag{2.15}$$

La suite (v_k) est croissante et la suite (w_k) est décroissante. En effet

$v_1 = S(v_0) \geq v_0$ (d'après le lemme 1) . Comme $v_1 \geq v_0 \Longrightarrow S(v_1) \geq S(v_0)$, c-à-d $v_2 \geq v_1$ et ainsi de suite.
Aussi, $w_1 = S(w_0) \leq w_0 = w$ (d'après le lemme 1). Comme $w_1 \leq w_0$ $\Longrightarrow S(w_1) \leq S(w_0)$, c-à-d $w_2 \leq w_1$ et ainsi de suite.
Aussi $v \leq w \Longrightarrow S(v) \leq S(w)$, c-à-d $v_1 \leq w_1 \Longrightarrow S(v_1) \leq S(w_1)$, c-à-d $v_2 \leq w_2$ et ainsi de suite.
On trouve finalement

$$v = v_0 \leq v_1 \leq \ldots \leq v_k \leq v_{k+1} \leq w_{k+1} \leq w_k \leq \ldots w_1 \leq w_0 = w \tag{2.16}$$

Etape 5. On démontre aussi (v_k) est uniformément bornée dans $C^{1+\alpha/2,2+\alpha}\left(\overline{Q};\mathbb{R}\right)$, c-à-d, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|v_k\|_{1+\alpha/2,2+\alpha} \leq C \tag{2.17}$$

En effet, d'après l'estimation de Schauder, il existe une constante $\beta > 0$:

$$\begin{aligned}
\|v_1\|_{1+\alpha/2,2+\alpha} &\leq \beta\left(\|h(t,x,v)\|_{\alpha/2,\alpha} + \|g\|_{1+\alpha/2,2+\alpha} + \|g_0\|_{2+\alpha}\right) \\
&\leq \beta\left(\|f(t,x,v)\|_{\alpha/2,\alpha} + M\|v\|_{\alpha/2,\alpha} + \|g\|_{1+\alpha/2,2+\alpha} + \|g_0\|_{2+\alpha}\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|v_2\|_{1+\alpha/2,2+\alpha} &\leq \beta\left(\|h(t,x,v_1)\|_{\alpha/2,\alpha} + \|g\|_{1+\alpha/2,2+\alpha} + \|g_0\|_{2+\alpha}\right) \\
&\leq \beta\left(\|f(t,x,v_1)\|_{\alpha/2,\alpha} + M\|v_1\|_{\alpha/2,\alpha} + \|g\|_{1+\alpha/2,2+\alpha} + \|g_0\|_{2+\alpha}\right)
\end{aligned}$$

et ainsi de suite

$$\begin{aligned}
\|v_k\|_{1+\alpha/2,2+\alpha} &\leq \beta\left(\|h(t,x,v_{k-1})\|_{\alpha/2,\alpha} + \|g\|_{1+\alpha/2,2+\alpha} + \|g_0\|_{2+\alpha}\right) \\
&\leq \beta\left(\|f(t,x,v_{k-1})\|_{\alpha/2,\alpha} + M\|v_{k-1}\|_{\alpha/2,\alpha} + \|g\|_{1+\alpha/2,2+\alpha} + \|g_0\|_{2+\alpha}\right)
\end{aligned}$$

et comme $v_k \in \langle v, w \rangle$, alors $\|f(t,x,v_{k-1})\|_{\alpha/2,\alpha} + M\|v_{k-1}\|_{\alpha/2,\alpha} \leq C_1$ et par cobséquent on obtient (2.17).
Comme $C^{1+\alpha/2,2+\alpha}\left(\overline{Q};\mathbb{R}\right)$ s'injecte compactement dans $C^{1,2}\left(\overline{Q};\mathbb{R}\right)$, la suite (v_k) est relativement compact dans $C^{1,2}\left(\overline{Q};\mathbb{R}\right)$. Ceci implique qu'l existe une suite partielle $\left(v_{\varphi(k)}\right)$ telle que

$$\lim_{k\to\infty} v_{\varphi(k)} = v^* \quad \text{dans} \quad C^{1,2}\left(\overline{Q};\mathbb{R}\right) \tag{2.18}$$

D'autre part, de la monotonicité de (v_k) :

$$\lim_{k\to\infty} v_k(t,x) = \rho(t,x), \quad \text{pour tout} \quad (t,x) \in \overline{Q} \tag{2.19}$$

Et comme la convergence dans $C^{1,2}\left(\overline{Q};\mathbb{R}\right)$ est plus forte que la convergence ponctuelle, alors de (2.18) et (2.19)

$$v^* = \rho \ \text{ dans } \ \overline{Q} \tag{2.20}$$

Par conséquent de (2.20) dans (2.18)

$$\lim_{k\to\infty} v_{\varphi(k)} = \rho \ \text{ dans } \ C^{1,2}\left(\overline{Q};\mathbb{R}\right) \tag{2.21}$$

c-à-d, la fonction ρ est une valeur d'adhérence de (v_k) dans $C^{1,2}\left(\overline{Q};\mathbb{R}\right)$. De la monotonicité de (v_k), on conclut que ρ est l'unique valeur d'adhérence de (v_k). Comme la fermeture de (v_k) est une partie compacte dans $C^{1,2}\left(\overline{Q};\mathbb{R}\right)$, alors (v_k) admet unr seule valeur d'adhérence, et par conséquent (v_k) converge vers $\rho \in \langle v, w\rangle$

$$\lim_{k\to\infty} v_k = \rho \ \text{ dans } \ C^{1,2}\left(\overline{Q};\mathbb{R}\right) \tag{2.22}$$

De la même manière on démontre que la suite (w_k) converge dans $C^{1,2}\left(\overline{Q};\mathbb{R}\right)$ vers une limite qui se note $r \in \langle v, w\rangle$

$$\lim_{k\to\infty} w_k = r \ \text{ dans } \ C^{1,2}\left(\overline{Q};\mathbb{R}\right) \tag{2.23}$$

Ainsi

$$\lim_{k\to\infty} v_k = \rho \ \text{ et } \ \lim_{k\to\infty} Bv_k = B\rho \ \text{ uniformément sur } \ \overline{Q} \tag{2.24}$$

et

$$\lim_{k\to\infty} w_k = r \ \text{ et } \ \lim_{k\to\infty} Bv_k = B\rho \ \text{ uniformément sur } \ \overline{Q} \tag{2.25}$$

et

$$\lim_{k\to\infty} \left(f(t,x,v_{k-1}) + MBv_{k-1}\right) = f(t,x,\rho) + M\rho \ \text{ uniformément sur } \ \overline{Q} \tag{2.26}$$

et

$$\lim_{k\to\infty} \left(f(t,x,w_{k-1}) + MBw_{k-1}\right) = f(t,x,r) + Mr \ \text{ uniformément sur } \ \overline{Q} \tag{2.27}$$

De (2.24)-(2.27) dans (P2) on obtient

$$\begin{aligned} B\rho(t,x) &= f(t,x,\rho) + M\rho, \quad \text{dans } Q \\ \rho &= g, \quad \text{sur } \Gamma \\ \rho(0,x) &= g_0, \quad \text{sur } \overline{\Omega} \end{aligned} \tag{2.28}$$

et

$$\begin{aligned} Br(t,x) &= f(t,x,r) + Mr, \quad \text{dans } Q \\ r &= g, \quad \text{sur } \Gamma \\ r(0,x) &= g_0, \quad \text{sur } \overline{\Omega} \end{aligned} \tag{2.29}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} A\rho(t,x) &= f(t,x,\rho), \quad \text{dans } Q \\ \rho &= g, \quad \text{sur } \Gamma \\ \rho(0,x) &= g_0, \quad \text{sur } \overline{\Omega} \end{aligned} \tag{2.30}$$

et

$$\begin{aligned} Ar(t,x) &= f(t,x,r), \quad \text{dans } Q \\ r &= g, \quad \text{sur } \Gamma \\ r(0,x) &= g_0, \quad \text{sur } \overline{\Omega} \end{aligned} \tag{2.31}$$

c'est-à-dire ρ et r sont des solutions du problème (P).

Montrons que ρ est la solution minimale de (P) dans $\langle v, w\rangle$.
Soit $u \in \langle v, w\rangle$ une solution de (P). Comme $v_0 \leq u \leq w_0$ et $S(u) = u$, il s'ensuit du lemme 1 que :

$$v_1 = S(v_0) \leq S(u) = u \quad \text{sur } \overline{Q} \tag{2.32}$$

.

Aussi :

$$u = S(u) \leq S(w_0) = w_1 \quad \text{sur } \overline{Q} \tag{2.33}$$

De (2.32)-(2.33) on conclut que

$$v_1 \leq u \leq w_1 \text{ sur } \overline{Q} \tag{2.34}$$

On suppose que $v_k \leq u \leq w_k$ sur $\overline{Q}$, alors d'après le lemme 1

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= S(v_k) \leq S(u) = u \\ &\text{et} \\ S(u) &= u \leq S(w_k) = w_{k+1} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$v_{k+1} \leq u \leq w_{k+1} \quad \text{sur} \quad \overline{Q}$$

Par le principe du raisonnement pa récurrence

$$v_k \leq u \leq w_k \quad \text{sur} \quad \overline{Q}, \text{ pour tout } \ k \tag{2.35}$$

Passons à la limite lorsque $k \to \infty$ dans (2.35)

$$\rho \leq u \leq r \tag{2.36}$$

ce qui montre que ρ est la solution minimale et r est la solution maximale de (P) dans le segment $\langle v, w \rangle$.

3.3 Unicilté de la solution

Pour assurer l'unicité de la solution de (P), on ajoute une autre condition

(H8a) Pour tout $u_1, u_2 \in \langle v, w \rangle$, il existe une constante $\lambda \leq - \min\limits_{(t,x)\in\overline{Q}} c(t,x)$ telle que

$$(u_2 - u_1)\left(f(t,x,u_2) - f(t,x,u_1)\right) \leq \lambda \left(u_2 - u_1\right)^2$$

Théorème 3. Sous les conditions (H1)-(H8a), le problème (P) possède une solution unique $u \in \langle v, w \rangle$. Cette solution peut être obtenue comme la limite des suites monotones (v_k) et (w_k).

Démonstration. Il suffit de démontrer que la solution minimale coincide avec la solution maximale sur $\overline{Q}$. Pour ce faire, considérons la fonction

$$\theta(t,x) = (\rho - r)^2 \tag{3.1}$$

On a les relations suivantes

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial t} &= 2(\rho - r)\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial r}{\partial t}\right), \\
\frac{\partial \theta}{\partial x_i} &= 2(\rho - r)\left(\frac{\partial \rho}{\partial x_i} - \frac{\partial r}{\partial x_i}\right), \\
\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} &= 2(\rho - r)\left(\frac{\partial \rho}{\partial x_j} - \frac{\partial r}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial \rho}{\partial x_i} - \frac{\partial r}{\partial x_i}\right) \\
&\quad + 2(\rho - r)\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j}\right)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

De (3.2) on conclut de (H8) que

$$\begin{aligned}
A\theta &= 2(\rho - r)\left(A\rho + c\rho - (Ar + cr)\right) - 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\left(\frac{\partial \rho}{\partial x_i} - \frac{\partial r}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial \rho}{\partial x_j} - \frac{\partial r}{\partial x_j}\right) \\
&= 2(\rho - r)\left(A\rho - Ar\right) + 2c(\rho - r)^2 - 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \\
&= 2\left(f(t,x,\rho) - f(t,x,r)\right) + 2c(\rho - r)^2 \\
&\leq 2\lambda(\rho - r)^2 + 2c(\rho - r)^2 \\
&\leq 2(\rho - r)^2(\lambda + c)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

où $\xi_i = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_i} - \frac{\partial r}{\partial x_i}\right)$ et $-2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \leq 0$ car A est uniformément elliptique.

Dans la relation (2.39) si on prend $\lambda \leq -\min_{(t,x)\in\overline{Q}} c(t,x)$ on obtient

$$A\theta \leq 0, \quad \text{sur } Q \tag{3.4}$$

Comme $\theta \in C^{1,2}\left(\overline{Q}\right)$, on conclut du principe du maximum que $\theta \leq 0$ sur $\overline{Q}$, et par conséquent $\theta = 0$ sur $\overline{Q}$, ce qui implique que $\rho = r$ sur $\overline{Q}$. Ainsi, $\rho = r$ est la seule solution dans $\langle v, w\rangle$.

Une autre condition suffisnate donne l'unicité de la solution :

(H8b) Il existe une constante M' telle que

$$f(t,x,u_2) - f(t,x,u_1) \geq -M'(u_2 - u_1)$$

pour tout $v \leq u_1 \leq u_2 \leq w$ sur $\overline{Q}$.

Théorème 4. Sous les conditions (H1)-(H8b), le problème (P) possède une solution unique $u \in \langle v, w\rangle$. Cette solution peut être obtenue comme la limite des suites monotones (v_k) et (w_k).

Démonstration. Il suffit de démontrer que $r \leq \rho$. En effet, considérons la fonction $p = \rho - r$. Alors

$$Ap = f(t,x,\rho) - f(t,x,r) \geq -M'p, \text{ sur } Q \tag{3.5}$$

Comme $p \in C^{1,2}\left(\overline{Q}\right)$, on conclut du principe du maximum que $p \geq 0$ sur $\overline{Q}$, et par conséquent $\rho = r$.

Remarque. Les conditions (H8a) et (H8b) sont satisfaites si la fonction f est lipschitzienne en u sur le segment $\langle v, w\rangle$, c-à-d

$$\exists k > 0(\text{const.}) : |f(t,x,u_1) - f(t,x,u_2)| \leq k\,|u_1 - u_2|\,, \tag{3.6}$$

pour tout $(t,x) \in \overline{Q}$ et $u_1, u_2 \in \langle v, w\rangle$.
Pour cela, il suffit de prendre $M = k$ et $M' = -k$.

Chapitre 4

Applications de la méthode d'itération monotone

Donnons quelques exemples où la méthode d'itération monotone s'applique.

4.1 Exemple 1.

Soit le problème parabolique suivant

$$\begin{aligned} u_t - \lambda \Delta u &= u(1-u^2),\ (t,x) \in Q \\ u &= g(t,x),\ (t,x) \in \Gamma \\ u(0,x) &= u_0(x), x \in \overline{\Omega} \end{aligned} \tag{P1}$$

où $\lambda > 0$ est une constante. $f(u) \equiv u(1-u^2)$, g et u_0 sont des fontions positives suffisamment régulières.

La fonction nulle $v \equiv 0$ est une sous-solution de (P1). En effet :

- $v_t - \lambda \Delta v = 0$, sur Q.
- $v = 0 \leq g(t,x)$, sur Γ.
- $v(0,x) = 0 \leq u_0(x)$, sur $\overline{\Omega}$.

Chaque fonction constante $w(t,x) = c_0 \geq \max \left\{ 1, \max\limits_{(t,x)\in\Gamma} g(t,x), \max\limits_{x \in \overline{\Omega}} u_0(x) \right\}$ est une sur-solution de (P1). En effet

- $w_t - \lambda \Delta w \equiv 0 \geq f(c_0)$.
- $w = c_0 \geq g(t,x)$, sur Γ.

• $w(0,x) = c_0 \geq u_0(x)$, sur $\overline{\Omega}$.
Alors, le problème (P1) possède une solution clasique positive u dans le segment $\langle 0, c_0 \rangle$.

Nous montrons aussi que la solution est unique dans ce segment. Pour cela, il suffit de démontrer que f est lipschitzienne sur $\langle 0, c_0 \rangle$:

$$\begin{aligned} |f(u_1) - f(u_2)| &\leq \left|u_1^3 - u_2^3\right| + |u_1 - u_2| \\ &\leq \left(1 + u_1^2 + u_1 u_2 + {u_2}^2\right) |u_1 - u_2| \\ &\leq k\,|u_1 - u_2| \end{aligned}$$

pour tout $u_1, u_2 \in \langle 0, c_0 \rangle$, où $k = 1 + 3c_0^2$.

4.2 Exemple 2.

Soit le problème parabolique unidimensionnel suivant

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= f(x,u),\ t > 0,\ x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\ u &= 0,\ (t,x) \in \Gamma \\ u(0,x) &= 0, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned} \tag{P2}$$

où $f(x,u) = u + \frac{3}{1+u^2} \sin^{2/3} x$.
La fonction f est lipshitzienne . En effet

$$\begin{aligned} |f(x_1,u_1) - f(x_2,u_2)| &= \left| u_1 + \frac{3}{1+u_1^2} \sin^{2/3} x_1 - \left(u_2 + \frac{3}{1+u_2^2} \sin^{2/3} x_2\right)\right| \\ &\leq |u_1 - u_2| + 3\left|\frac{1}{1+u_1^2} \sin^{2/3} x_1 - \frac{1}{1+u_2^2} \sin^{2/3} x_1\right| \\ &\quad + \left|\frac{3}{1+u_2^2} \sin^{2/3} x_1 - \frac{3}{1+u_2^2} \sin^{2/3} x_2\right| \end{aligned} \tag{1}$$

D'après le théorème des accroissements finis

$$\left|\frac{1}{1+u_1^2} \sin^{2/3} x_1 - \frac{1}{1+u_2^2} \sin^{2/3} x_1\right| \leq |u_1 - u_2| \tag{2}$$

et

$$\left|\frac{1}{1+u_2^2}\sin^{2/3}x_1 - \frac{1}{1+u_2^2}\sin^{2/3}x_2\right| \leq \frac{2}{3}|x_1 - x_2| \tag{3}$$

De (2) et (3) dans (1) :

$$\begin{aligned} |f(x_1,u_1) - f(x_2,u_2)| &\leq |x_1 - x_2| + 3|u_1 - u_2| \\ &\leq 3(|x_1 - x_2| + |u_1 - u_2|) \end{aligned} \tag{4}$$

On peut vérifier facilement que

$$v = -2e^t$$

est une sous-solution de (P2), et

$$w = e^{4t}$$

est une sur-solution de (P2). De plus $v \leq w$. Comme f est une fonction lipschitzienne, alors d'après la théorie de la méthode d'itération monotone, le problème (P2) possède une solution unique u telle que

$$-2e^t \leq u(t,x) \leq e^{4t},\ t \geq 0, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Conclusion

L'opérateur $Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ avec $a_{ij} = a_{ji}$ est elliptique, alors il existe une transformation lineaire $z = Dx$ pour laquelle L devient l'operateur de Laplace dans les coordonnées $(z_k)_k$. Ce résultat nous aide à démontrer le principe de maximum pour un opérateur parabolique sous forme générale $(3.18) - (3.19)$ en appliquant celui pour un opérateur parabolique sous forme simple.

▶ La méthode des sous-solutions et sur-solutions est applicable pour la démonstration de l'existence de solutions.

▶ Le principe du maximum est un outil puissant pour montrer l'unicité de la solution des équations et systèmes paraboliques et elliptiques.

▶ Le théoreme 1 nous donne des conditions suffisantes pour que le problème (P) admet une solution dans le segment $< v, w >$ où v, w sont une sous- solution et sur-solution respectivement avec $v \leq w$. Si de plus f satisfait à (H7) alors on peut construire deux suites monotones telles que la suite croissante converge vers la solution minimale et la suite décroissante converge vers la solution maximale. Notons que toutes ces conditions nous ne donnent pas l'unicité de la solution. Pour assurer l'unicité de la solution, il faut ajouter d'autres conditions. Nous avons vu que la condition (H8a) ou la condition (H8b) sont suffisantes.

Notons aussi que ces résultats concernent seulement l'existence et l'unicité de la solution dans le segment $< v, w >$ et ne sont pas des résultats généraux, c.à.d à l'exterieur du segment on ne peut rien dire.

Bibliographie

[1] G.S. Ladde, V. Lakshmikantham & A.S. Vatsala, Monotone iterative techniques for nonlinear differential equations ,Wiley, Eastern Distribution Center, 1985.

[2] Z. Wu, J. Yin & C. Wang, Elliptic & Parabolic Equations, World Scientific, 2006.