République Algérienne Dèmocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 45-Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

510,11

جامعة 08 ماي 45 قالمة
مصلحة
الإعارة
الخارجية
كلية الرياضيات، الإعلام الآلي وعلوم المادة

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de MASTER Académique en Mathématiques

Option : Equations aux Dérivées Partielles

Par :

Abdelkrim HIMEUR

Intitulé

Formes sectorielles fermées et génération de semigroupes

Dirigé par : Mr. BOUSSETILA Nadjib

Devant le jury

Président	**K. Benarioua**	**Univ. Guelma**
Rapporteur	**N. Boussetila**	**Univ. Guelma**
Examinateur 1	**S. Badraoui**	**Univ. Guelma**
Examinateur 2	**S. Djenaoui**	**Univ. Guelma**

Session Juin 2011

U Guelma 08 Mai 45

FMISM Département de Mathématiques

Mémoire de MASTER

Formes sectorielles fermées et génération de semi-groupes

Option : Equations aux Dérivées Partielles

Par : Abelkrim HIMEUR

Dirigé par : Mr. BOUSSETILA Nadjib

Année Universitaire 2011

Table des matières

§ Introduction

La méthode des formes sectorielles fermées nous fournit un outil pratique et efficace pour résoudre les questions de génération d'un semi-groupe, et l'étude qualitative des équations d'évolution dans le cadre hilbertien. On trouve les traces d'originalité de cette approche dans les travaux de T. Kato et J.L. Lions.

On commence notre investigation par un rappel sur les semi-groupes et les théorèmes de génération via l'approche opérateur-résolvante de Hille-Yosida, et Lummer-Philips. Ensuite, on introduit la théorie des formes sectorielles fermées et la correspondance entre cette dernière et une classe spéciale d'opérateurs qui sont des générateurs de semi-groupes analytiques. On étudie aussi l'extension fermée de Friedrichs d'une forme fermable et sa relation avec les opérateurs m-sectoriels, où on donne des résultats de génération pour une classe de formes elliptiques très large.

Chapitre 1

Formes sesquilinéaires

1.1 Définitions et propriétés élémentaires

On se place dans un cadre hilbertien H sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$, où la norme et le produit scalaire sont notés respectivement par $||.||$ et $(.;.)$.
Dans cette première section, on donne quelques rappels sur les formes sesquilinéaires qui seront utiles pour la suite. Une large partie de ces résultats est donnée dans le cadre général des espaces vectoriels.

Définition 1.1.1. On dit que B est une forme sesquilinéaire sur H si $B : H \times H \longrightarrow \mathbb{K}$, telle que $\forall (x,y,z) \in H^3, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$,

$$B(\alpha x + y, z) = \alpha B(x,z) + B(y,z), \ B(x, \beta y + z) = \overline{\beta} B(x,y) + B(x,z).$$

ici $\overline{\beta}$ est le conjugué de β
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on dit alors que B est une forme bilinéaire sur E.

Définition 1.1.2. Une forme sesquilinéaire B sur H est dite hermitienne si

$$\forall x, y \in E, B(x,y) = \overline{B(y,x)}.$$

Si $\mathbb{K} := \mathbb{R}$, on dit alors que B est une forme bilinéaire symétrique.

Définition 1.1.3. Soit B une forme sesquilinéaire sur H. On dit que :

1. B est positive si, pour tout $x \in H, B(x,x) \geq 0$.
2. B est définie positive si, pour tout $x \in E \setminus \{0\}, B(x,x) > 0$.

3. Une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive sur H est appelée un produit scalaire sur E si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et un produit hermitien si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Proposition 1.1.1. *Soit B une forme sesquilinéaire sur H.*

1. *Si B est hermitienne alors, pour tout $x\in H, B(x,x)\in R$.*
2. *Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, alors B est hermitienne si et seulement si, pour tout $x\in E, B(x,x)\in\mathbb{R}$*

Proposition 1.1.2. (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Soit B une forme sesquilinéaire hermitienne positive sur H. Alors on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\forall x,y\in H, |B(x,y)|\leq\sqrt{B(x,x)}\sqrt{B(y,y)}.$$

Proposition 1.1.3. *Soit B une forme sesquilinéaire sur H. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *B est continue;*
2. *B est continue en $(0,0)$;*
3. *Il existe $k\geq 0$ tel le que, pour tout $x,y\in H$, on a $|B(x,y)|\leq k||x||||y||$.*

Notation. On note par $S_2(H)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des formes sesquilinéaires continues sur H. Si $B\in S_2(H)$, on pose

$$||B||=\sup\{|B(x,y)|,\ ||x||\leq 1, ||y||\leq 1\},$$

ce qui définit une norme sur $S_2(H)$. En particulier, on a

$$\forall x,y\in H,\ |B(x,y)|\leq ||B||||x||||y||.$$

Proposition 1.1.4. *Si $T\in\mathscr{L}(H)$, alors on a*

$$||T||=\sup\{|(Tx;y)|,\ ||x||\leq 1, ||y||\leq 1\}.$$

Proposition 1.1.5. *Pour $T\in\mathscr{L}(H)$, on note $B_T\in S_2(H)$ l'application définie par*

$$\forall x,y\in H,\ B_T(x,y):=(Tx;y).$$

Alors l'application $\Phi:\mathscr{L}(H)\longrightarrow S_2(H), T\longmapsto\Phi(T)=B_T$ est un isomorphisme isométrique, i.e., une application linéaire bijective telle que, pour tout $T\in\mathscr{L}(H), ||\Phi(T)||=||T||$.

Définition 1.1.4. Soit $T\in\mathscr{L}(H)$. On dit que T est positif (resp. défini positif) si l'application B_T définie par $(T.;.)$ est une forme sesquilinéaire positive (resp. définie positive). Autrement dit,

$$\begin{cases} T \text{ est positif si, pour tout } x\in H,\ (Tx;x)\geq 0;\\ T \text{ est défini positif si, pour tout } x\in H\setminus\{0\},\ (Tx;x)>0.\end{cases}$$

1.2 Formes sesquilinéaires fermées

Soit $\mathfrak{a}$ une forme sesquilinéaire sur H, i.e., $\mathfrak{a}$ est une application définie sur $H \times H$ dans $\mathbb{K}$ telle que pour toute $\alpha \in \mathbb{K}$ et $u, v, h \in H$

$$\mathfrak{a}(\alpha u + v, h) = \alpha \mathfrak{a}(u, h) + \mathfrak{a}(u, h) \quad et \quad \mathfrak{a}(u, \alpha v + h) = \overline{\alpha}\mathfrak{a}(u, v) + \mathfrak{a}(u, h) \tag{1.1}$$

Il est bien connu [1] que toute forme linéaire continue est uniquement représentée par un opérateur borné. Plus précisément, on a la caractérisation suivante :

Proposition 1.2.1. *On suppose que $\mathfrak{a}(.,.) : H \times H \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme sesquilinéaire continue. Alors il'existe un opérateur unique borné T sur H tel que :*

$$\mathfrak{a}(u, v) = (Tu; v), \quad \forall u, v \in H.$$

Définition 1.2.1. Une forme sesquilinéaire $\mathfrak{a}$ est dite ***coercive*** s'il existe une constante positive $\delta > 0$ telle que :

$$\Re \mathfrak{a}(u, u) \geq \delta \|u\|^2, \quad \forall u \in H.$$

Théorème 1.2.1. **[Lax-Milgram]** *Soit $\mathfrak{a}$ une forme sesquilinéaire continue et coercive sur H. Soit l une forme linéaire continue sur H. Alors il'existe un unique $v \in H$ tel que :*

$$l(u) = \mathfrak{a}(u, v), \quad \forall u \in H.$$

1.3 Opérateurs associés aux formes sesquilinéaires non bornés

1.3.1 Formes fermées et formes fermables

Dans cette section, on considère des formes sesquilinéaires qui ne sont pas définies sur H tout entier. Ces formes sont non-bornées jouent un rôle très important dans l'étude des équations elliptiques et paraboliques. Pour la simplicité, on va les appeler formes sesquilinéaires au lieu de "formes non-bornées".

Définition 1.3.1. Soit $\mathfrak{a} : D(\mathfrak{a}) \times D(\mathfrak{a}) \to \mathbb{K}$ une forme sesquilinéaire, où $D(\mathfrak{a})$ est un *s.e.v.* de H, el l'ensemble $D(\mathfrak{a}) \times D(\mathfrak{a})$ est le domaine de définition de $\mathfrak{a}$. On dit que :

1. $\mathfrak{a}$ est densément définie (ou à domaine dense) si
$$D(\mathfrak{a}) \text{ est dense dans } H. \tag{1.2}$$
2. $\mathfrak{a}$ est accrétive si
$$\Re \mathfrak{a}(u, u) \geq 0, \quad \forall u \in H. \tag{1.3}$$

1. *cf.* théorème de représentation de Riesz.

3. $\mathfrak{a}$ est continue s'il'existe une constante $M > 0$ telle que

$$|\mathfrak{a}(u,v)| \leq M\|u\|_{\mathfrak{a}}\|v\|_{\mathfrak{a}}, \quad \forall u,v \in D(\mathfrak{a}), \tag{1.4}$$

   où $\|u\|_{\mathfrak{a}} := \sqrt{\Re\mathfrak{a}(u,u) + \|u\|^2}$.

4. $\mathfrak{a}$ est fermée si

$$(D(\mathfrak{a}), \|.\|_{\mathfrak{a}}) \text{ est un espace complet.} \tag{1.5}$$

► Si $\mathfrak{a}$ satisfait les conditions (1.2)-(1.5), alors on montre aisément que $\|.\|_{\mathfrak{a}}$ est une norme sur $D(\mathfrak{a})$, et on l'appelle norme associée a la forme $\mathfrak{a}$.

Définition 1.3.2. Soit $\mathfrak{a}$ une forme sesquilinéaire sur H. La forme adjointe de $\mathfrak{a}$ est la forme sesquilinéaire $\mathfrak{a}^*$ définie par :

$$\mathfrak{a}^*(u,v) := \overline{\mathfrak{a}(v,u)} \text{ avec } D(\mathfrak{a}^*) = D(\mathfrak{a}).$$

La partie symétrique de $\mathfrak{a}$ est définie par :

$$\mathfrak{b} := \frac{1}{2}(\mathfrak{a} + \mathfrak{a}^*),\ D(\mathfrak{b}) = D(\mathfrak{a}).$$

On dit que $\mathfrak{a}$ est symétrique si $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}$, i.e.,

$$\mathfrak{a}(u,v) = \overline{\mathfrak{a}(v,u)}, \quad \forall u,v \in D(\mathfrak{a}).$$

Soit $\mathfrak{a}$ une forme sesquilinéaire vérifiant les propriétés (1.2)-(1.5), alors $D(\mathfrak{a})$ est un espace de Hilbert, où le produit scalaire est noté par :

$$(u,v)_{\mathfrak{a}} := \frac{1}{2}[\mathfrak{a}(u,v) + \mathfrak{a}^*(u,v)] + (u,v), \quad \forall u,v \in D(\mathfrak{a}).$$

Remarque 1.3.1.

1. $\|.\|_{\mathfrak{a}}$ est équivalent à $\|.\|_{\mathfrak{b}}$, où $\mathfrak{b}$ est la partie symétrique de $\mathfrak{a}$.
2. Si H est un Hilbert complexe, alors toute forme sesquilinéaire peut s'écrire sous la forme

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + i\mathfrak{c},\ D(\mathfrak{a}) = D(\mathfrak{b}) = D(\mathfrak{c}), \tag{1.6}$$

   où $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux formes sesquilinéaires symétriques. En effet, il suffit de prendre

$$\mathfrak{b} := \frac{1}{2}(\mathfrak{a} + \mathfrak{a}^*) \text{ et } \mathfrak{c} := \frac{1}{2i}(\mathfrak{a} - \mathfrak{a}^*).$$

Dans ce cas, $\mathfrak{b}$ est la partie réelle de $\mathfrak{a}$ (resp. $\mathfrak{c}$) est la partie imaginaire de $\mathfrak{a}$.

Dans la suite, on va se limiter aux formes accrétives, i.e., les formes qui vérifient la propriété (1.3). On peut considérer aussi les formes inférieurement bornées, i.e., les formes qui vérifient

$$\Re\mathfrak{a}(u,u) \geq -\gamma(u;u), \forall u \in D(\mathfrak{a}),$$

où γ est une constante positive.

Remarque 1.3.2. L'étude des formes inférieurement bornées est similaire à celle des formes accrétive, il suffit de remarquer que, par une simple perturbation, on se ramène au cas des formes accrétives : on choisit γ de façon que $\mathfrak{a}_\gamma$ soit accrétive, où

$$\mathfrak{a}_\gamma = (\mathfrak{a}+\gamma)(u,v) := \mathfrak{a}(u,v) + \gamma(u;v), u, v \in D(\mathfrak{a}).$$

Remarque 1.3.3.

i) Si B est l'opérateur associé à la forme accrétive $\mathfrak{a}_\gamma$, alors $A = B - \gamma I$ est l'opérateur associé à la forme $\mathfrak{a}$.

ii) Si $\mathfrak{a}$ est une forme symétrique, alors la propriété de l'accrétivité (1.3) signifie que $\mathfrak{a}$ est positive i.e,

$$\mathfrak{a}(u,u) \geq 0, \forall u \in D(\mathfrak{a})$$

Ainsi, pour les formes symétriques, on utilise le terme positif (positive) où accrétif (accrétive) pour se référer à la propriété (1.3).

iii) La condition (1.4) signifie que la forme sesquilinéaire $\mathfrak{a}$ est continue sur l'espace $(D(\mathfrak{a}), ||.||_\mathfrak{a})$. On verra par la suite que La petite borne M vérifiant (1.4) est d'intérêt important.

Proposition 1.3.1. *Soit* $\mathfrak{a} : H \times H \longrightarrow \mathbb{K}$ *une forme sesquilinéaire fermée et accrétive. Alors* $||.||$ *et* $||.||_\mathfrak{a}$ *sont équivalentes sur* H.

Preuve. Pour tout $u \in H$, on a

$$||u|| \leq ||u||_\mathfrak{a} = [||u||^2 + \Re\mathfrak{a}(u,u)]^{\frac{1}{2}}.$$

D'autre part, l'injection $I : (H, ||.||_\mathfrak{a}) \longrightarrow H$ est continue. Puisque I est bijective, alors I^{-1} existe et continue (grâce au théorème du graphe fermé), donc il existe une constante positive $C > 0$ telle que

$$||u||_\mathfrak{a} \leq C||u||, \quad \forall u \in H.$$

Définition 1.3.3. Soit $\mathfrak{a} : D(\mathfrak{a}) \times D(\mathfrak{a}) \to \mathbb{C}$, $D(\mathfrak{a}) \subset H$ où H est complexe. On dit que $\mathfrak{a}$ est sectorielle s'il existe $C > 0$ telle que

$$|\Im\mathfrak{a}(u,u)| \leq C\Re\mathfrak{a}(u,u), \quad \forall u \in D(\mathfrak{a}). \tag{1.7}$$

L'image numérique de $\mathfrak{a}$ est l'ensemble

$$\mathcal{N}(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{a}(u,u),\ u \in D(\mathfrak{a}),\ ||u|| = 1\}. \tag{1.8}$$

Il est clair que $\mathfrak{a}$ satisfait (1.7) si et seulement si $\mathcal{N}(\mathfrak{a}) \subset \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \arctan(C)\}$.

Proposition 1.3.2. *Toute forme sectorielle sur un espace de Hilbert complexe H est continue. Plus précisément, si*

$$|\Im\mathfrak{a}(u,u)| \leq \mathscr{C}\Re\mathfrak{a}(u,u), \forall u \in D(\mathfrak{a}), \tag{S}$$

où $\mathscr{C} \geq 0$, alors

$$|\mathfrak{a}(u,v)| \leq (1+\mathscr{C})(\Re\mathfrak{a}(u,u))^{\frac{1}{2}}(\Re\mathfrak{a}(u,v))^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u,v \in D(\mathfrak{a}).$$

Preuve. D'après (1.6), on a $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + i\mathfrak{c}$, où $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ sont des formes symétriques et $\mathfrak{b}$ est positive. Par Cauchy-Schwartz, on peut écrire

$$|\mathfrak{b}(u,v)| \leq \mathfrak{b}(u,u)^{\frac{1}{2}}\mathfrak{b}(v,v)^{\frac{1}{2}}.$$

Il reste à estimer le terme $|\mathfrak{c}(u,v)|$. Pour cela, on remplace v par $e^{i\psi}v$ pour certain ψ. Sans perdre la généralité de la question, on peut supposer que $\mathfrak{c}(u,v)$ est réelle. Dans ce cas, d'après l'identité de polarisation

$$\mathfrak{c}(u,v) = \frac{1}{4}[\mathfrak{c}(u+v,u+v) - \mathfrak{c}(u-v,u-v)],$$

et la condition (S), il vient

$$\begin{aligned} |\mathfrak{c}(u,v)| &\leq \frac{\mathscr{C}}{4}[\mathfrak{b}(u+v,u+v) + \mathfrak{b}(u-v,u-v)] \\ &= \frac{\mathscr{C}}{4}[\mathfrak{b}(u,u) + \mathfrak{b}(v,v)]. \end{aligned}$$

En remplacant u par $\sqrt{\varepsilon}u$ dans l'inégalité précédente, on obtient

$$|\mathfrak{c}(u,v)| \leq \frac{\mathscr{C}}{2}\left[\sqrt{\varepsilon}\mathfrak{b}(u,u) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\mathfrak{b}(v,v)\right].$$

Si $\mathfrak{b}(u,u) \neq 0$, on choisit $\varepsilon = \dfrac{\mathfrak{b}(v,v)}{\mathfrak{b}(u,u)}$, et on obtient

$$|\mathfrak{c}(u,v)| \leq \mathscr{C}\mathfrak{b}(u,u)^{\frac{1}{2}}\mathfrak{b}(v,v)^{\frac{1}{2}} = \mathscr{C}(\Re\mathfrak{a}(u,u))^{\frac{1}{2}}(\Re\mathfrak{a}(v,v))^{\frac{1}{2}}.$$

Si $\mathfrak{b}(u,u) = 0$, alors $\mathfrak{c}(u,v) \leq \dfrac{\mathscr{C}}{2}\mathfrak{b}(v,v)$. En remplaçant v par λv pour $\lambda > 0$ et faisant tendre $\lambda \to 0$, on obtient $\mathfrak{c}(u,v) = 0$. Ce qui achève la démonstration.
La réciproque de la proposition 1.8 est donnée par le lemme :

Lemme 1.3.1. *Si $\mathfrak{a}$ est une forme sesquilinéaire accrétive et continue sur un espace de Hilbert complexe H, alors $I + \mathfrak{a}$ est sectorielle. Plus précisément, si $\mathfrak{a}$ satisfait (1.4) pour certaine constante $M > 0$, alors*

$$|\Im[(u;u) + \mathfrak{a}(u,u)]| \leq M\Re[(u;u) + \mathfrak{a}(u,u)], \forall u \in D(\mathfrak{a}).$$

Preuve. La preuve découle immédiatement de :

$$|\Im[(u;u)+\mathfrak{a}(u,u)]| = |\Im\mathfrak{a}(u,u)| \leq |\mathfrak{a}(u,u)|,$$

et l'hypothèse de continuité (1.4). On note ici que la continuité de la forme $\mathfrak{a}$ peut s'écrire sous la forme :

$$|\mathfrak{a}(u,v)| \leq M'[\Re\mathfrak{a}(u,u)+\omega\|u\|^2]^{\frac{1}{2}}[\Re\mathfrak{a}(v,v)+\|v\|^2]^{\frac{1}{2}},$$

pour certaines constantes ω et $M' > 0$.

Il est clair que les normes $[\Re\mathfrak{a}(u,u)+\omega\|u\|^2]^{\frac{1}{2}}$ et $[\Re\mathfrak{a}(u,u)+\|u\|^2]^{\frac{1}{2}}$ sont équivalentes. Pour cette raison, on choisit d'écrire (1.4) et $\|.\|_{\mathfrak{a}}$ sans la constante supplémentaire ω.

• Il est préférable dans certains problèmes de considérer une forme $\mathfrak{a}$ satisfaisant (1.2)-(1.4) mais pas (1.5). Dans ce cas, on essaie de trouver une extension de $\mathfrak{a}$ qui est une forme fermée définie sur un sous-espace de H.

Définition 1.3.4. Une forme sesquilinéaire accrétive $\mathfrak{a}$ est dite fermable s'il existe une forme accrétive $\mathfrak{c}$ fermée, définie sur $D(\mathfrak{c}) \subset H$, telle que $D(\mathfrak{a}) \subseteq D(\mathfrak{c})$ et $\mathfrak{a}(u,v) = \mathfrak{c}(u,v)$ pour tout $u, v \in D(\mathfrak{a})$.

Remarque. En général, l'extension $\mathfrak{c}$ n'est pas unique, mais on peut toujours définir une plus petite extension fermée (aux sens de l'inclusion) :

$$\begin{aligned} D(\overline{\mathfrak{a}}) := \{u \in H \text{ tel que } .\exists u_n \in D(\mathfrak{a}) : u_n \to u \text{ dans } H \text{ et} \\ \mathfrak{a}(u_n-u_m, u_n-u_m) \to 0, \text{ quand } n,m \to \infty\}, \end{aligned}$$

et

$$\overline{\mathfrak{a}}(u,v) := \lim_{n\to\infty} \mathfrak{a}(u_n, v_n), \tag{1.9}$$

pour $u, v \in D(\overline{\mathfrak{a}})$, où $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites d'éléments de $D(\mathfrak{a})$ qui convergent respectivement vers u et v (par rapport à la norme de H) et $\mathfrak{a}(u_n-u_m, u_n-u_m) \to 0$, quand $n, m \to \infty$.

Notation. Soient $a(.,.)$ et $b(.,.)$ deux formes sesquilinéaire. La notation $a \subset b$ signifie que

$$D(a) \subset D(b) \text{ et } \forall u, v \in D(a), a(u,v) = b(u,v).$$

Proposition 1.3.3. *Soit $\mathfrak{a}$ une forme sesquilinéaire densément définie, accrétive et continue. Si $\mathfrak{a}$ est fermable, alors $\overline{\mathfrak{a}}$ est bien définie et satisfait (1.2)-(1.5). De plus, toute extension fermée de $\mathfrak{a}$ est une extension de $\overline{\mathfrak{a}}$, i.e., s'il existe $\mathfrak{c}_2$ forme sesquilinéaire fermée telle que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{c}_2$, alors $\mathfrak{a} \subset \overline{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{c}_2$*

Preuve. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites fixées de $D(\mathfrak{a})$ qui convergent dans H et $\mathfrak{a}(u_n-u_m, u_n-u_m) \to 0$, $\mathfrak{a}(v_n-v_m, v_n-v_m) \to 0$, quand $n, m \to \infty$. pour montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{a}(u_n, v_n)$ existe, on utilise la continuité de $\mathfrak{a}$ et l'hypothèse (1.4), on obtient

$$\begin{aligned} |\mathfrak{a}(u_n,v_n)-\mathfrak{a}(u_m,v_m)| &= |\mathfrak{a}(u_n-u_m,v_n)+\mathfrak{a}(u_m,v_n-v_m)| \\ &\leq M\|u_n-u_m\|_{\mathfrak{a}}\|v_n\|_{\mathfrak{a}} + M\|v_n-v_m\|_{\mathfrak{a}}\|u_n\|_{\mathfrak{a}}. \end{aligned}$$

Comme $||u_n - u_m||_{\mathfrak{a}}$ et $||v_n - v_m||_{\mathfrak{a}} \to 0$, quand $n, m \to \infty$, les suites $(||u_n||_{\mathfrak{a}})_n$ et $(||v_n||_{\mathfrak{a}})_n$ sont bornées. Il vient donc d'après l'inégalité précédente que $\mathfrak{a}(u_n, v_n)$ est une suite de Cauchy, ainsi elle est convergente.
La quantité $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{a}(u_n, v_n)$ est indépendante du choix des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$. En effet, si $(u'_n)_n$ et $(v'_n)_n$ satisfont les même propriétés que celles vérifiées par $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$, alors

$$\begin{aligned}|\mathfrak{a}(u_n, v_n) - \mathfrak{a}(u'_n, v'_n)| &= |\mathfrak{a}(u_n - u'_n, v_n) + \mathfrak{a}(u'_n, v_n - v'_n)| \\ &\leq M||u_n - u'_n||_{\mathfrak{a}}||v_n||_{\mathfrak{a}} + M||v_n - v'_n||_{\mathfrak{a}}||u'_n||_{\mathfrak{a}}.\end{aligned}$$

Maintenant, si $\mathfrak{a}_1$ est une extension fermée de $\mathfrak{a}$ alors $||u_n - u'_n||_{\mathfrak{a}} = ||u_n - u'_n||_{\mathfrak{a}_1} \to 0$ quand $n \to \infty$, puisque $(u_n)_n$ et $(u'_n)_n$ convergent vers la même limite dans l'espace de Hilbert $(D(\mathfrak{a}_1), ||.||_{\mathfrak{a}1})$. En appliquant le même raisonnement à $||v_n - v'_n||_{\mathfrak{a}}$, on obtient $|\mathfrak{a}(u_n, v_n) - \mathfrak{a}(u'_n, v'_n)| \to 0$ quand $n \to \infty$. Par construction, $D(\mathfrak{a})$ est dense dans $(D(\overline{\mathfrak{a}}), ||.||_{\overline{\mathfrak{a}}})$, et donc (1.2)-(1.4) restent vraies pour $\overline{\mathfrak{a}}$.

Remarque 1.3.4. La densité de $D(\mathfrak{a})$ nous assure que toute extension fermée de $\mathfrak{a}$ est aussi une extension de $\overline{\mathfrak{a}}$.

Enfin, on montre que $\overline{\mathfrak{a}}$ est fermée. Soit $(u_n)_n \subset D(\mathfrak{a})$ une suite de Cauchy par rapport à la norme $||.||_{\overline{\mathfrak{a}}}$. Donc, elle est convergente dans H, et de la définition de $\overline{\mathfrak{a}}$, il résulte que $u \in D(\overline{\mathfrak{a}})$, ou $u = \lim_{n\to\infty} u_n$. De plus,

$$\overline{\mathfrak{a}}(u_n - u, u_n - u) = \lim_m \mathfrak{a}(u_n - u_m, u_n - u_m).$$

Donc

$$\lim_n \overline{\mathfrak{a}}(u_n - u, u_n - u) = 0,$$

Ce que signifie que la suite $(u_n)_n$ est convergente dans $(D(\overline{\mathfrak{a}}), ||.||_{\overline{\mathfrak{a}}})$.

Définition 1.3.5. Si la forme $\mathfrak{a}$ est fermable, alors $\overline{\mathfrak{a}}$ définie par (1.9) de domaine $D(\overline{\mathfrak{a}})$ est appelée la **fermeture** de $\mathfrak{a}$.

Remarque 1.3.5.

1. La preuve de la proposition 1.3.3 montre que, si $\mathfrak{a}$ est une forme sesquilinéaire vérifiant (1.2)-(1.4) et $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ sont deux suites convergents dans H, telles que $\mathfrak{a}(u_n - u_m, u_n - u_m)$ et $\mathfrak{a}(v_n - v_m, v_n - v_m) \to 0$ quand $n, m \to \infty$, alors la limite du côté droit de (1.9) existe. De plus, si $\mathfrak{a}$ est fermée, alors cette limite est $\mathfrak{a}(u, v)$, *où* u et v sont les limites dans H de $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$, respectivement.
2. Il résulte aussi de la *même* preuve que si $\mathfrak{a}$ est une forme sesquilinéaire satisfaisant (1.2)-(1.4), alors la forme $\overline{\mathfrak{a}}$ est fermée et elle est bien définie (i.e., la limite est indépendante du choix des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.

Proposition 1.3.4. *Soit $\mathfrak{a}$ une forme sesquilinéaire densément définie, accrétive et continue. Alors $\mathfrak{a}$ est fermable si et seulement si on a : $\forall (u_n)_n \in D(\mathfrak{a})$, $u_n \to 0$ dans H et $\mathfrak{a}(u_n - u_m, u_n - u_m) \to 0$ quand $(n, m \to \infty)$ alors $\mathfrak{a}(u_n, u_m) \to 0$ quand $n \to \infty$.*

Preuve. On suppose que $\mathfrak{a}$ est fermable et soit $\mathfrak{a}_1$ une extension fermée de $\mathfrak{a}$. Si $u_n \to 0$ dans H et $\mathfrak{a}(u_n - u_m, u_n - u_m) \to 0$, alors $(u_n)_n$ converge vers 0 dans $(D(\mathfrak{a}_1), ||\cdot||_{\mathfrak{a}1})$. D'après la remarque 1.3.5, on conclut que $\mathfrak{a}(u_n, u_n) = \mathfrak{a}_1(u_n, u_n) \to 0$.
Montrons maintenant la réciproque. Pour cela, on construit une extension fermée en prenant la complétion de $D(\mathfrak{a})$ par rapport à la norme $||.||_{\mathfrak{a}}$. Plus précisément, on montre que la forme $\overline{\mathfrak{a}}$ donnée par (1.9) de domaine $D(\overline{\mathfrak{a}})$ est bien définie (par la remarque 1.3.5), $\overline{\mathfrak{a}}$ sera une extension fermée de $\mathfrak{a}$. D'après la remarque 1.3.5, la limite du côté droit de (1.9) existe. Il reste à prouver que la limite est indépendante du choix des suites u_n et v_n. Soient u'_n et v'_n deux autres suites vérifiant $u'_n \to u, v'_n \to v$ dans H et $||u'_n - u'_m||_{\mathfrak{a}}, ||v'_n - v'_m||_{\mathfrak{a}} \to 0$ quand $n, m \to \infty$. On peut écrire :

$$\begin{aligned}|\mathfrak{a}(u_n, v_n) - \mathfrak{a}(u'_n, v'_n)| &= |\mathfrak{a}(u_n - u'_n, v_n) + \mathfrak{a}(u'_n, v_n - v'_n)| \\ &\leq M||u_n - u'_n||_{\mathfrak{a}}||v_n||_{\mathfrak{a}} + M||v_n - v'_n||_{\mathfrak{a}}||u'_n||_{\mathfrak{a}}.\end{aligned}$$

La suite $w_n := u_n - u'_n$ vérifie que $w_n \to 0$ dans H et

$$||w_n - w_m||_{\mathfrak{a}} \leq ||u_n - u_m||_{\mathfrak{a}} + ||u'_n - u'_m||_{\mathfrak{a}} \to 0, \text{ quand} n, m \to \infty.$$

Ce qui montre que $\mathfrak{a}(w_n, w_n) \to 0$ quand $n \to \infty$. Pour le reste de la preuve, on applique le même raisonnement à la suite $v_n - v'_n$. Ainsi, $|\mathfrak{a}(u_n, v_n) - \mathfrak{a}(u'_n, v'_n)| \to 0$ quand $n \to \infty$.

Exemple 1. On considère dans $H = L^2(\mathbb{R})$, la forme

$$\mathfrak{a}(u, v) = u(0)\overline{v(0)}, \; D(\mathfrak{a}) = C_c(\mathbb{R}), \tag{1.10}$$

avec $(C_c(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues à support compacts dans $\mathbb{R})$.
Alors $\mathfrak{a}$ est densément définie, symétrique et positive mais n'est pas fermable. En effet, on choisit la suite $u_n \in C_c(\mathbb{R})$ telle que $u_n(0) = 1$ pour tout n et telle que $u_n \to 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$. D'où $\mathfrak{a}(u_n - u_m, u_n - u_m) = 0$ et $u_n \to 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$ mais $\mathfrak{a}(u_n, u_n) = 1$ pour tout n. Donc $\mathfrak{a}$ n'est pas fermable d'après la proposition 1.3.4.

Exemple 2. On considère dans $H = L^2(\mathbb{R})$ la forme

$$\mathfrak{a}(u, v) = \int_{\mathbb{R}} u'(x)v(x)dx, \; D(\mathfrak{a}) = H^1(\mathbb{R}). \tag{1.11}$$

On montre que la forme $\mathfrak{a}$ n'est pas fermable.

Définition 1.3.6. Soit $\mathfrak{a}$ une forme sesquilinéaire accrétive et densément définie sur H. Un sous-espace D de $D(\mathfrak{a})$ est dit un **domaine essentiel** (on dit aussi **coeur**) pour $\mathfrak{a}$ si D est dense dans $D(\mathfrak{a})$ muni de la norme $||.||_{\mathfrak{a}}$. Soit D un sous-espace de $D(\mathfrak{a})$. La restriction de $\mathfrak{a}$ à D est la forme (notée $\mathfrak{a}_{|D}$) définie par

$$\mathfrak{a}_{|D}(u, v) = \mathfrak{a}(u, v), \; D(\mathfrak{a}_{|D}) = D.$$

On établit maintenant une relation entre la fermeture d'une forme sesquilinéaire et son domaine essentiel.

Proposition 1.3.5. *Soit $\mathfrak{a}$ une forme sesquilinéaire densément définie et accrétive. On suppose que $\mathfrak{a}$ est fermée et continue. On note par D un sous-espace de $D(\mathfrak{a})$. Alors D est un domaine essentiel pour $\mathfrak{a}$ si et seulement si la fermeture de $\mathfrak{a}_{|D}$ est $\mathfrak{a}$, i.e., $\overline{\mathfrak{a}_{|D}} = \mathfrak{a}$.*

Preuve. La forme $\mathfrak{a}$ est une extension fermée de $\mathfrak{a}_{|D}$, donc est une extension de $\overline{\mathfrak{a}_{|D}}$. On suppose que D est un domaine essentiel pour $\mathfrak{a}$ et soit $u \in D(\mathfrak{a})$. Il existe alors une suite $u_n \in D$ telle que $\|u_n - u\|_{\mathfrak{a}} \to 0$ quand $n \to \infty$. Ainsi, (u_n) converge vers u dans H et $\mathfrak{a}(u_n - u_m, u_n - u_m) \to 0$ quand $n, m \to \infty$. Ce qui montre que $u \in D(\overline{\mathfrak{a}_{|D}})$. D'où $\mathfrak{a}_{|D} = \mathfrak{a}$.
Réciproquement, supposons que $\mathfrak{a}_{|D} = \mathfrak{a}$ et soit $u \in D(\mathfrak{a}) = D(\overline{\mathfrak{a}_{|D}})$. Il vient de la définition de la fermeture qu'il existe une suite $(u_n) \in D$ qui converge vers u dans H et telle que $\mathfrak{a}_{|D}(u_n - u_m, u_n - u_m) \to 0$ quand $n, m \to \infty$. Ceci montre que (u_n) converge vers u par rapport à la norme $\|.\|_{\mathfrak{a}}$, et que D est un domaine essentiel pour $\mathfrak{a}$

1.3.2 Perturbation des formes sesquilinéaires

Dans cette section, on étudie la fermeture et la continuité de la somme de deux formes sesquilinéaires.
Pour deux formes sesquilinéaires $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, on définit leur somme par :

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(u,v) = \mathfrak{a}(u,v) + \mathfrak{b}(u,v), \; D(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = D(\mathfrak{a}) \cap D(\mathfrak{b}).$$

Théorème 1.3.1. *Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux formes sesquilinéaires accrétives sur H. Alors la somme $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ est accrétive, de plus :*

1. *Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont continues, alors $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ est continue.*
2. *Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont fermées, alors $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ est fermée.*
3. *Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont fermables, alors $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ est fermable.*

Preuve. L'accrétivité de la somme est évidente. On suppose que $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont fermées. Soit $(u_n) \subset D(\mathfrak{a}) \cap D(\mathfrak{b})$ une suite de Cauchy pour la norme $\|.\|_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$. Les inégalités $\|.\|_{\mathfrak{a}} \leq \|.\|_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$ et $\|.\|_{\mathfrak{b}} \leq \|.\|_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$ impliquent que la suite (u_n) est de Cauchy par rapport à la norme $\|.\|_{\mathfrak{a}}$ et $\|.\|_{\mathfrak{b}}$. Il s'en suit donc que la suite (u_n) converge pour les deux normes. La limite dans les deux espaces $(D(\mathfrak{a}), \|.\|_{\mathfrak{a}})$ et $(D(\mathfrak{b}), \|.\|_{\mathfrak{b}})$ est la même, donc la limite appartient à $D(\mathfrak{a}) \cap D(\mathfrak{b})$. L'inégalité $\|.\|_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} \leq \|.\|_{\mathfrak{a}} + \|.\|_{\mathfrak{b}}$ implique que (u_n) converge pour la norme $\|.\|_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$. En conséquence, $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$ est fermée. Si les deux formes sont fermables, alors la somme de leurs fermetures $\overline{\mathfrak{a}} + \overline{\mathfrak{b}}$ est fermée d'après la propriété 2). Ainsi, $\overline{\mathfrak{a}} + \overline{\mathfrak{b}}$ est une exteension fermée de $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$. Ce qui montre que $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ est fermable et sa fermeture, notée $\overline{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$, est la restriction de $\overline{\mathfrak{a}} + \overline{\mathfrak{b}}$.

Définition 1.3.7. Soit $\mathfrak{a}$ une forme sesquilinéaire densément définie, accrétive, continue et fermée. Une forme sesquilinéaire $\mathfrak{a}'$ avec $D(\mathfrak{a}')$ est dite $\mathfrak{a}$-bornée si $D(\mathfrak{a}) \subset D(\mathfrak{a}')$ et s'il existe des constants positives α et β telle que

$$|\mathfrak{a}'(u,u)| \leq \alpha |\mathfrak{a}(u,u)| + \beta \|u\|^2, \quad \forall u \in D(\mathfrak{a}) \tag{1.12}$$

La plus petite constante α pour laquelle (1.12) est vérifiée, est appelée la $\mathfrak{a}$-bornitude de $\mathfrak{a}'$. Sous la condition de fermeture des formes, on montre que $\mathfrak{a}'$ est $\mathfrak{a}$-bornée dès que $D(\mathfrak{a}) \subseteq D(\mathfrak{a}')$. Plus précisément, on a :

Proposition 1.3.6. *Soit $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ deux formes sesquilinéaires accrétives et continues. On suppose que $\mathfrak{a}$ est fermée, $\mathfrak{a}'$ est fermable, et $D(\mathfrak{a}) \subset D(\mathfrak{a}')$. Alors $\mathfrak{a}'$ est $\mathfrak{a}$-bornée.*

Preuve. Puisque la forme $\mathfrak{a}'$ est fermable, sa restriction à $D(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a}'_{|D(\mathfrak{a})} : D(\mathfrak{a}) \times D(\mathfrak{a}) \to \mathbb{K}$ est aussi fermable. Ainsi, $\mathfrak{a}'_{|D(\mathfrak{a})}$ est fermable agissant sur l'espace de Hilbert $(D(\mathfrak{a}), ||.||_{\mathfrak{a}})$. Sa fermeture (comme une forme sur $(D(\mathfrak{a}), ||.||_{\mathfrak{a}})$) coïncide avec elle même. D'après la proposition 1.3.1, il existe une constante positive M telle que pour tout $u \in D(\mathfrak{a})$

$$|\mathfrak{a}'(u,u)| \leq M||u||_{\mathfrak{a}}^2 = M[||u||^2 + \Re\mathfrak{a}(u,u)].$$

Par conséquent, $\mathfrak{a}'$ est $\mathfrak{a}$-bornée.

On suppose que $\mathfrak{a}$ est une forme sesquilinéaire accrétive et continue. Notons $\mathfrak{b} := \frac{1}{2}[\mathfrak{a}+\mathfrak{a}^*]$ la partie symétrique de $\mathfrak{a}$. On rappelle que $\mathfrak{b}(u,u) = \Re\mathfrak{a}(u,u)$ pour tout $u \in D(\mathfrak{a})$. En utilisant la continuité de $\mathfrak{a}$, on obtient pour tout $u \in D(\mathfrak{a})$

$$\mathfrak{b}(u,u) \leq |\mathfrak{a}(u,u)| \leq M||u||_{\mathfrak{a}}^2 = M[||u||^2 + \mathfrak{b}(u,u)].$$

Il résulte de cette inégalité qu'une forme $\mathfrak{a}'$ est $\mathfrak{a}$-bornée si et seulement si elle est $\mathfrak{b}$-bornée.

Théorème 1.3.2. *Soit $\mathfrak{a}$ une forme sesquilinéaire accrétive et continue sur un espace complexe H. On suppose que $\mathfrak{a}'$ est une forme sesquilinéaire telle que $D(\mathfrak{a}) \subseteq D(\mathfrak{a}')$ et*

$$|\mathfrak{a}'(u,u)| \leq \alpha\Re\mathfrak{a}(u,u) + \beta||u||^2, \quad \forall u \in D(\mathfrak{a}), \tag{1.13}$$

où α, β sont deux constantes positives avec $\alpha < 1$. Alors la forme somme $\mathfrak{t} := \mathfrak{a} + \mathfrak{a}' + \beta I$ de domaine $D(\mathfrak{t}) = D(\mathfrak{a})$, est accrétive et continue. De plus,

1. *$\mathfrak{t}$ est fermée si et seulement si $\mathfrak{a}$ est fermée.*
2. *$\mathfrak{t}$ est fermable si et seulement si $\mathfrak{a}$ est fermable.*

Preuve. Puisque le domaine de $\mathfrak{t}$ est $D(\mathfrak{a})$, et $D(\mathfrak{a}) \subseteq D(\mathfrak{a}')$, alors d'après (1.13) et la condition $\alpha < 1$, on a pour tout $u \in D(\mathfrak{a})$,

$$\Re\mathfrak{t}(u,u) = \Re\mathfrak{a}(u,u) + \Re\mathfrak{a}'(u,u) + \beta||u||^2 \geq (1-\alpha)\Re\mathfrak{a}(u,u).$$

D'où, $\mathfrak{t}$ est accrétive.
En utilisant la continuité de $\mathfrak{a}$, on obtient d'après le lemme 1.3.1 et (1.13)

$$\begin{aligned}
|\Im\mathfrak{t}(u,u)| &\leq |\Im\mathfrak{a}(u,u)| + |\Im\mathfrak{a}'(u,u)| \\
&\leq \alpha\Re\mathfrak{a}(u,u) + \beta||u||^2 + M[\Re\mathfrak{a}(u,u) + ||u||^2] \\
&\leq \frac{M+\alpha}{1-\alpha}\Re\mathfrak{t}(u,u) + (M+\beta)||u||^2 \\
&\leq \mathscr{C}\Re[\mathfrak{t}(u,u) + ||u||^2],
\end{aligned}$$

pour certaine constante $\mathscr{C}$ positive. Ainsi, la forme $\mathfrak{t}+I$ est sectorielle. De la proposition 1.8 on déduit que $\mathfrak{t}$ est continue.
Les inégalités

$$\Re\mathfrak{t}(u,u) \geq (1-\alpha)\Re\mathfrak{a}(u,u) \text{ et } \Re\mathfrak{t}(u,u) \leq (1+\alpha)\Re\mathfrak{a}(u,u)+2\beta\|u\|^2.$$

Montrent que les normes $\|u\|_{\mathfrak{a}}$ et $\|u\|_{\mathfrak{t}}$ sont équivalentes sur $D(\mathfrak{a})$, et donc la première propriété du théorème s'obtient. Pour montrer la propriété 2), on suppose que $\mathfrak{a}$ est fermable et soit $(u_n) \in D(\mathfrak{a})$ telle que $u_n \to 0$ dans H et $\mathfrak{t}(u_n-u_m, u_n-u_m) \to 0$ quand $n,m \to \infty$. Alors $\Re\mathfrak{a}(u_n-u_m, u_n-u_m) \to 0$ quand $n,m \to \infty$. Puisque les normes $\|.\|_{\mathfrak{a}}$ et $\|.\|_{\mathfrak{t}}$ sont équivalentes, de la continuité de $\mathfrak{a}$, il vient que $\mathfrak{a}(u_n-u_m, u_n-u_m) \to 0$ quand $n,m \to \infty$, et la proposition 1.3.4 garantie que $\mathfrak{a}(u_n,u_n) \to 0$ quand $n \to \infty$. D'après ce qui précède et la continuité de $\mathfrak{t}$, la proposition 1.3.4 nous permet de conclure que $\mathfrak{t}$ est fermable. La réciproque s'obtient de la même façon.

Proposition 1.3.7. *Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ deux formes sesquilinéaires accrétives et continues. On suppose que $D(\mathfrak{a}) = D(\mathfrak{a}')$ et les normes $\|.\|_{\mathfrak{a}}$ et $\|.\|'_{\mathfrak{a}}$ sont équivalentes. Alors*

1. *$\mathfrak{a}$ est fermée si et seulement si $\mathfrak{a}'$ est fermée.*
2. *$\mathfrak{a}$ est fermable si et seulement si $\mathfrak{a}'$ est fermable.*

1.3.3 Opérateurs associés aux formes sesquilinéaires A.C.F

Soit $\mathfrak{a}$ une forme sesquilinéaire densément définie, accrétive, continue et fermée sur H. Pour cette forme, on peut définir un opérateur non borné A défini comme suit :

$$(A.A) \quad \begin{cases} D(A) = \{u \in H \text{ tel que } \exists v \in H : \mathfrak{a}(u,\phi) = (v;\phi), \quad \forall \phi \in D(\mathfrak{a})\} \\ Au = v. \end{cases}$$

Remarque 1.3.6. Le domaine de A est l'ensemble des éléments $u \in D(A)$ pour lesquels la forme linéaire $\phi \to \mathfrak{a}(u,\phi)$ est continue sur $D(a)$ par rapport à la norme de H.

Définition 1.3.8. Pour l'opérateur linéaire A défini par la formule $(A.A)$, on dit alors que A est l'opérateur associé à la forme $\mathfrak{a}$.

Proposition 1.3.8. *Soit $\mathfrak{a}$ une forme sesquilinéaire densément définie, accrétive, continue et fermée, et notons par A l'opérateur associé à la forme sesquilinéaire $\mathfrak{a}$. Alors A est densément défini, et pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $A+\lambda I$ est inversible, i.e, $(A+\lambda I)^{-1} \in \mathscr{L}(H)$, de plus,*

$$\|\lambda(\lambda I + A)^{-1} f\| \leq \|f\|, \forall \lambda > 0, \quad \forall f \in H.$$

Preuve. Soit $\lambda > 0$. Posons

$$\|u\|_\lambda = \sqrt{\Re\mathfrak{a}(u,u) + \lambda\|u\|^2}, u \in D(\mathfrak{a}).$$

La norme $\|.\|_\lambda$ est équivalente à la norme $\|.\|_{\mathfrak{a}}$, d'où $V := (D(\mathfrak{a}), \|.\|_\lambda)$ est un espace de Hilbert. Il résulte de (1.4) que la forme $\lambda + \mathfrak{a}^*$ définie par $(\lambda + \mathfrak{a}^*)(u,v) = \lambda(u,v) + \mathfrak{a}^*(u,v)$ est bornée sur V.

De plus, elle est coercive sur V.
Pour $f \in H$, soit

$$\phi(v) := (v; f), \quad v \in V.$$

Il est clair que ϕ est une forme linéaire continue sur V. Donc, par le théorème de Lax-Milgram, il existe un élément unique $u \in V$ tel que

$$\phi(v) = \mathfrak{a}^*(v, u) + \lambda(v; u) = \overline{\mathfrak{a}(u, v)} + \lambda(v; u), \quad \forall v \in V.$$

De cette dernière représentation et la définition de l'opérateur A, il résulte que $u \in D(A)$ et $(\lambda I + A)u = f$. Donc $R(\lambda I + A) = H$. L'hypothèse de l'accrétivité (1.3) implique que $\lambda I + A$ est injectif, et donc inversible.
Soit maintenant $f \in H$ et $u \in D(A)$ tel que $(\lambda I + A) = f$. En multipliant dans H les deux côtes de l'égalité $(\lambda I + A)u = f$ par u et en utilisant

$$\Re(Au; u) = \Re\mathfrak{a}(u, u) \geq 0,$$

il vient que

$$\Re(f; u) \geq \lambda \|u\|^2.$$

Ce qui implique $\lambda\|u\| \leq \|f\|$, d'où

$$\|\lambda(\lambda I + A)^{-1} f\| \leq \|f\|.$$

En fin, on montre que $D(A)$ est dense dans H. Soit $v \in H$ tel que

$$(v; u) = 0, \quad \forall u \in D(A).$$

Puisque $I + A$ est inversible, il existe alors $\psi \in D(A)$ tel que $v = (I + A)\psi$, et pour $u = \psi$, on obtient

$$0 = (v; \psi) = ((I + A)\psi; \psi) = \|\psi\|^2 + (A\psi; \psi).$$

La positivité de $\Re(A\psi; \psi) = \Re\mathfrak{a}(\psi, \psi) \geq 0$ implique que $\psi = 0$ et donc $v = 0$.
Notons que pour la forme $\mathfrak{a}$ vérifiant (1.2)-(1.5), la forme adjointe $\mathfrak{a}^*$ vérifie aussi les même propriétés. Donc, on peut associer à $\mathfrak{a}^*$ un opérateur A^* qui est l'adjoint de A.

Proposition 1.3.9. *L'opérateur associé à $\mathfrak{a}^*$ est A^*. En particulier, si $\mathfrak{a}$ est symétrique alors A est auto-adjoint.*

Preuve. Notons par B l'opérateur associé à la forme $\mathfrak{a}^*$, et soit $u \in D(B)$. Par définition, on pout écrire

$$\mathfrak{a}^*(u, \phi) = (Bu; \phi), \quad \forall \phi \in D(\mathfrak{a}^*) = D(\mathfrak{a}).$$

D'où

$$(Bu; \phi) = \mathfrak{a}^*(u, \phi) = \overline{\mathfrak{a}(\phi, u)} = \overline{(A\phi; u)}, \quad \forall \phi \in D(A).$$

Ce qui montre que $u \in D(A^*)$ et $A^*u = Bu$. Il nous reste à vérifier que $D(A^*) \subseteq D(B)$. Pour cela, soit $v \in D(A^*)$ fixé. D'après la proposition 1.3.8, il existe $\psi \in D(B)$ telle que $(I+A^*)v = (I+B)\psi$, donc $(I+A^*)v = (I+A^{ast})\psi$, ce qui entraîne,

$$(v-\psi;(I+A)u) = ((I+A^*)(v-\psi);u) = 0, \quad \forall u \in D(A).$$

De l'inversibilité de $I+A$ est inversible, il résulte que $v = \psi \in D(B)$.

• On a vu dans la proposition 1.3.8 que l'opérateur A associé à $\mathfrak{a}$ est densément défini dans H, et il l' est aussi dans $D(\mathfrak{a})$ muni de la norme $\|.\|_{\mathfrak{a}}$.

Lemme 1.3.2. *Soit $\mathfrak{a}$ une forme sesquilinéaire densément définie, accrétive, continue et fermée, et soit A l'opérateur associé à $\mathfrak{a}$. Alors $D(A)$ est un domaine essentiel pour $\mathfrak{a}$.*

En vertu de ce lemme et la proposition 1.3.5, on conclut que la forme $\mathfrak{a}$ coincide avec la fermeture de la restriction de $\mathfrak{a}$ sur $D(A)$, i.e, $\mathfrak{a} = \overline{\mathfrak{a}_{|D(\mathfrak{a})}}$.

Définition 1.3.9.

1. Un opérateur $B : D(B) \subseteq H \to H$ est dit sectoriel s'il existe une constante positive $\mathscr{C}$, telle que
$$|\Im(Bu;u)| \leq \mathscr{C}\Re(Bu;u), \quad \forall u \in D(B). \tag{1.14}$$
2. L'image numérique de l'opérateur B est l'ensemble
$$\mathscr{N}(B) := \{(Bu;u), u \in D(B), \|u\| = 1\}.$$

► Il est clair que B vérifie (1.14) si et seulement si

$$\mathscr{N}(B) \subset \{z \in C, |\arg z| \leq \arctan \mathscr{C}\}.$$

► Tout opérateur associé à une forme sectorielle est un opérateur sectoriel. La réciproque est aussi vraie.

Proposition 1.3.10. *Soit $\mathfrak{a}$ une forme sesquilinéaire densément définie, accrétive, continue et fermée. On note par A l'opérateur associé à $\mathfrak{a}$. les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathfrak{a}$ est sectorielle.*
2. *A est sectoriel.*

La preuve de la proposition 1.3.10 est une conséquence immédiate du lemme suivant.

Lemme 1.3.3. *Soit $\mathfrak{a}$ une forme sesquilinéaire densément définie, accrétive, continue et fermé, et soit A l'opérateur associé à $\mathfrak{a}$. Alors, l'image numérique $\mathscr{N}(A)$ de A est dense dans l'image numérique $\mathscr{N}(\mathfrak{a})$ de $\mathfrak{a}$*

Preuve. La preuve découle du lemme 1.3.2.

Lemme 1.3.4. *Soit A un opérateur à domaine dense tel que $\Re(Au;u) \geq 0$ pour tout $u \in D(A)$. On suppose de plus que :*

1. *Il existe une constante $\alpha \geq 0$, telle que l'opérateur $\alpha I + A$ est sectoriel (ici H est complexe).*
2. *A est symétrique (ici H est réel). Alors la forme définie par*

$$\mathfrak{a}(u,v) := (Au;v) \text{ de domaine } D(\mathfrak{a}) = D(A)$$

est fermable.

Preuve. On suppose que (1) est vérifiée. On a

$$\mathfrak{a}(u,v) = ((\alpha I + A)u;v) - \alpha(u;v).$$

D'après la proposition 1.3.2, la forme sectorielle $(u,v) \to ((\alpha I + A)u;v)$ est continue, d'où $\mathfrak{a}$ est continue.
Si (2) est vérifiée, alors $\mathfrak{a}$ est continue (il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz), et pour montrer que $\mathfrak{a}$ est fermable, il suffit d'appliquer la proposition 1.3.4. En effet, soit $(u_n) \subset D(A)$ telle que $u_n \to 0$ dans H et $\mathfrak{a}(u_n - u_m, u_n - u_m) \to 0$ quand $n,m \to \infty$. La continuité de la forme $\mathfrak{a}$ donne

$$\begin{aligned}|\mathfrak{a}(u_n,u_n)| &\leq |\mathfrak{a}(u_n - u_m, u_n)| + |\mathfrak{a}(u_n,u_m)| \\ &\leq M\|u_n - u_m\|_{\mathfrak{a}}\|u_n\|_{\mathfrak{a}} + |(Au_m;u_n)|.\end{aligned}$$

Par hypothèse, $\|u_n - u_m\|_{\mathfrak{a}} \to 0$ quand $n,m \to \infty$ et donc $\|u_n\|_{\mathfrak{a}}$ est bornée. D'autre part, pour tout m, $|(Au_m;u_n)| \to 0$ quand $n \to \infty$. Donc $\mathfrak{a}(u_n,u_n) \to 0$ quand $n \to \infty$.

Remarque 1.3.7. Le rôle de l'hypothèse (1) et (2) dans le lemme 1.3.4 est pour assurer la continuité de la forme

$$\mathfrak{a}(u,v) := (Au;v), \quad D(\mathfrak{a}) = D(A). \tag{1.15}$$

- La preuve montre que cette forme est fermable dès que elle est continue. L'hypothèse de continuité ne peut pas être enlevée, de plus sur un espace de Hilbert réel, la condition $(Au,u) \geq 0$ pour tout $u \in D(A)$ ne suffit pas pour assurer la fermeture de $\mathfrak{a}$.
- Lorsque la forme définie par (1.15) est fermable, l'opérateur associé à la fermeture de $\mathfrak{a}$ est une extension de A.

Proposition 1.3.11. *Soit $B : D(B) \subseteq H \to H$ un opérateur fermé à domaine dense. Alors l'opérateur B^*B définie par*

$$\begin{cases} D(B^*B) = \{u \in D(B),\ Bu \in D(B^*)\} \\ B^*B = B^*(Bu) \end{cases}$$

est un opérateur auto adjoint à domaine dense.

Preuve. On introduit la forme symétrique

$$\mathfrak{a}(u,v) = (Bu;Bv),\ D(\mathfrak{a}) = D(B).$$

Puisque B est fermé, alors $\mathfrak{a}$ est une forme fermée, donc il existe un opérateur auto-adjoint (à domaine dense) associé à $\mathfrak{a}$, par définition,

$$\begin{cases} D(A)=\{u\in D(\mathfrak{a}), \exists v\in H : (Bu;B\phi)=(v;\phi), \quad \forall \phi\in D(\mathfrak{a})\} \\ Au=v. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} D(A) &= \{u\in D(B), \exists v\in H : (Bu;B\phi)=(v;\phi), \quad \forall \phi\in D(B)\} \\ &= \{u\in D(B), Bu\in D(B^*)\}, \end{aligned}$$

et $Au=B^*(Bu)$. Ce qui montre que $A=B^*B$.

Lemme 1.3.5. *Soit $\mathfrak{a}$ une forme sesquilinéaire densément définie, accrétive, continue et fermée. Soit $(u_n)\subset(D(\mathfrak{a}),\|.\|_{\mathfrak{a}})$ une suite bornée qui converge vers u dans H. Alors $u\in D(\mathfrak{a})$ et on a $\Re\mathfrak{a}(u,u)\leq \liminf_n \Re\mathfrak{a}(u_n,u_n)$.*

Preuve. Puisque la suite (u_n) est bornée dans $(D(\mathfrak{a}),\|.\|_{\mathfrak{a}})$, alors on peut extraire une sous-suite $(u_{n_k})\subset(u_n)$ faiblement convergente. Soit $\phi\in D(\mathfrak{a})$ la limite faible de (u_{n_k}). Pour tout $v\in D(\mathfrak{a})$, on a

$$(u_{n_k};v)+\mathfrak{b}(u_{n_k},v)\to(\phi;v)+\mathfrak{b}(\phi,v), \quad \text{quand } n_k\to\infty, \tag{1.16}$$

ou $\mathfrak{b}$ est la partie symétrique de $\mathfrak{a}$. Notons par B l'opérateur auto-adjoint associé à $\mathfrak{b}$. la formule (1.16) a lieu aussi pour tout $v\in D(B)$ et donc

$$(u_{n_k};(I+B)v)\to(\phi;(I+B)v).$$

La convergence faible de (u_{n_k}) vers $u\in H$ implique que

$$(u;(I+B)v)=(\phi;(I+B)v), \quad \forall v\in D(B).$$

En vertu de la proposition 1.3.8, et le fait que $(I+B)$ est inversible, on conclut que $u=\phi\in D(\mathfrak{a})$. En prenant $v=u$ dans (1.16), on obtient $\mathfrak{b}(u,u)=\lim_k \mathfrak{b}(u_{n_k},u)$. A partir delà et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient $\mathfrak{b}(u,u)\leq\liminf(u_{n_k},u_{n_k})$. Il en résulte donc que $\mathfrak{b}(u,u)\leq \liminf(u_{n_k},u_{n_k})$ car on peut remplacer (u_n) dans le calcul précédent pour toute sous-suite.

Chapitre 2

Semi-groupes d'opérateurs non-bornés

2.1 Définitions et notions préliminaires

Un opérateur linéaire est une application $A : D(A) \subseteq H_1 \longrightarrow H_2$ linéaire, où $D(A)$ est le domaine de définition de l'application linéaire A, qui est un sous-espace vectoriel de H_1, que l'on suppose en général dense dans H_1.

• Tout opérateur A est complètement défini par son graphe $\mathbf{G}(A)$ qui est un sous-espace vectoriel de $H_1 \times H_2$ défini par $\mathbf{G}(A) = \{(v, Av), \quad v \in D(A)\}$.

Pour tout opérateur linéaire $A : D(A) \subseteq H_1 \longrightarrow H_2$, on note par :

$$\mathbf{N}(A) = \{h \in D(A),\ Ah = 0\} \text{ (noyau de } A\text{)},$$

$$\mathbf{R}(A) = \{h_2 = Ah_1,\ h_1 \in D(A)\} \text{ (image de } A\text{)}.$$

Définition 2.1.1. On dit qu'un opérateur A est fermée si son graphe $G(A)$ est fermé dans $H_1 \times H_2$, i.e., pour toute suite $(u_n) \subset D(A)$ telle que $u_n \longrightarrow u$ dans H_1 et $Au_n \longrightarrow v$ dans H_2, alors $u \in D(A)$ et $v = Au$.

► L'opérateur fermé A peut être considéré comme un opérateur borné de son domaine de définition $D(A)$ muni de la norme du graphe ($\|u\|_G := \|u\|_{H_1} + \|Au\|_{H_2}$) dans H_1.

Théorème 2.1.1. *[Théorème du graphe fermé] Si l'opérateur fermé A est défini sur tout l'espace H_1, alors A est borné*

$$(A \text{ fermé et } D(A) = H_1 \Longrightarrow A \text{ borné}).$$

Définition 2.1.2. Soit $A : D(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur non-borné à domaine dense. On peut définir l'opérateur non-borné A^* adjoint de l'opérateur A, comme suit :

$$A^* : D(A^*) \subset H_2 \longrightarrow H_1$$
$$D(A^*) = \left\{v \in H_2 : \exists c > 0 \text{ tel que } |(v, Au)| \le c\|u\|_{H_1}, \quad \forall u \in D(A)\right\}.$$

▶ Si $A : D(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ est un opérateur non-borné à domaine dense, alors A^* est fermé.

Définition 2.1.3. On dit qu'un opérateur $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ est symétrique lorsque

$$\forall u, v \in D(A), \ (Au, v) = (u, Av)$$

Définition 2.1.4. L'opérateur $A : \mathscr{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ est dit auto-adjoint si $A = A^*$, i.e.,

$$D(A) = D(A^*) \text{ et } (v, Au) = (Av, u), \quad \forall u, v \in D(A).$$

2.1.1 Spectre et résolvante d'un opérateur non borné

Soit $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur non borné que l'on suppose fermé [1 2 3] et à domaine dense.

Définition 2.1.5. On appelle *ensemble résolvant* de A, l'ensemble

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A_\lambda = \lambda I - A \text{ est bijectif}\}.$$

Son complémentaire dans le plan complexe s'appelle le *spectre* de A et sera noté $\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$.

• On note que si $\lambda \in \rho(A)$, l'inverse $R(\lambda; A) = A_\lambda^{-1}$ est défini sur tout l'espace et est fermé. Par le théorème du graphe fermé, il est borné, i.e., $A_\lambda^{-1} \in \mathscr{L}(H)$. Cet opérateur est appelé la *résolvante* de A.

• L'ensemble résolvant $\rho(A)$ est un ouvert du plan complexe et l'application $\rho(A) \ni \lambda \longmapsto R(\lambda; A)$ est analytique sur chaque composante connexe de $\rho(A)$. La résolvante satisfait à l'équation fonctionnelle suivante dite *identité de la résolvante* :

$$R(\lambda_1; A) - R(\lambda_2; A) = (\lambda_2 - \lambda_1) R(\lambda_1; A) R(\lambda_2; A).$$

• Le spectre de A est donc un fermé de $\mathbb{C}$, et si de plus l'opérateur A est borné, alors $\sigma(A)$ est un compact non vide.

Examinons à présent de plus prés la structure du spectre.

• Le premier sous-ensemble important du spectre est le *spectre ponctuel* :

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A_\lambda \text{ n'est pas injectif}\}.$$

1. L'hypothèse de fermeture est nécessaire pour faire une théorie spectrale raisonnable.
2. Si A n'est pas fermé, alors $\rho(A) = \emptyset$.
3. Si $A = A^*$, alors $\sigma(A) \neq \emptyset$ et $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

©2011 U Guelma

Un élément λ de $\sigma_p(A)$ est dit *valeur propre* de A, il lui correspond un $0 \neq \vartheta \in D(A)$ tel que $A_\lambda \vartheta = 0$, que l'on appelle *vecteur propre* (fonction propre quand H est un espace de fonctions) correspondant à λ.

- Si $\lambda \in \sigma(A) \backslash \sigma_p(A)$ donc A_λ est injectif mais non surjectif. Deux cas se présentent :
- Si $\mathbf{R}(A_\lambda)$ n'est pas dense, on dit alors que $\lambda \in \sigma_r(A)$ le spectre *résiduel* de A.
- Si $\mathbf{R}(A_\lambda)$ est dense, on dit alors que $\lambda \in \sigma_c(A)$ le spectre *continu* de A.

Définition 2.1.6. On dit qu'un opérateur A est fermable dans H s'il admet un prolongement fermé.

On vérifie aussitôt que A est fermable dans H si et seulement si l'adhérence $\overline{G(A)}$ de son graphe est un graphe. Autrement dit A est fermable si et seulement si pour toute suite $(u_n) \subset \mathcal{D}(A)$ telle que $u_n \longrightarrow 0$ et $Au_n \longrightarrow v$, alors $v = 0$.
L'opérateur fermé $\overline{A}$ dont le graphe $G(\overline{A}) = \overline{G(A)}$ est appelé fermeture de A.

Définition 2.1.7. On suppose que A est fermable. Alors Il existe une petite extension fermée unique (au sens de l'inclusion), notée $\overline{A}$, définie comme suit :

$$D(\overline{A}) = \{u \in H \text{ tel que } \exists u_n \in D(B) : \lim_n u_n = u \text{ et } \lim_{n \longrightarrow \infty} Au_n \text{ existe}\}, \tag{1.17}$$

on pose

$$\overline{A}u := \lim_n Au_n. \tag{1.18}$$

Définition 2.1.8. Soit A un opérateur de domaine $D(A) \subseteq H$. Le sous espace vectoriel de $(D(A))$ est appelé domaine essentiel pour A s'il est dense dans $D(A)$ par rapport à la norme du graphe $\|.\|_G = \|.\| + \|A.\|$.
Soit $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire, et V un s.e.v. de $D(A)$. La restriction de A à V est l'opérateur

$$A_{|V}u := Au, \ u \in V = D(A_{|V}).$$

Proposition 2.1.1. *Soient A un opérateur fermé et D un sous espace vectoriel de $D(A)$. Alors D est un domaine essentiel pour A si et seulement si, la fermeture de $A_{|D}$ est A, i.e., $\overline{A_{|D}} = A$*

2.2 Semi-groupes d'opérateurs linéaires

2.2.0.1 Généralités

Définition 2.2.1. On appelle semi-groupe fortement continu à un paramètre une famille $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ d'opérateurs bornés sur H vérifiant les propriétés suivantes :
(i) $S(0) = I$,
(ii) $S(t+s) = S(t)S(s), \quad \forall t \geq 0, s \geq 0$,
(iii) $\forall u \in H, \ \lim_{t \searrow 0} \|S(t)u - u\| = 0, \quad \forall u \in E$.

On associe à tout semi-groupe son générateur $-A$ défini par :

$$-Au = \lim_{t \searrow 0} \left\{ \frac{S(t)u - u}{t} \right\} \qquad (s_1)$$

pour tout u tel que la limite (s_1) existe dans la topologie de la norme de $\mathscr{X}$, ce qui définit le sous espace $\mathscr{D}(A)$, domaine de l'opérateur A. Les premières propriétés des semi-groupes sont rassemblées dans la proposition suivante :

Proposition 2.2.1. *Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigroupe d'opérateurs sur H, et $-A$ son générateur. Alors :*
(a) $t \longmapsto S(t)$ est une fonction fortement continue de $[0,\infty[$ dans $\mathscr{L}(H)$.
(b) Il existe des constantes $M_A \geq 1$ et $\gamma_A \in \mathbb{R}$ telles que

$$||S(t)|| \leq M_A e^{\gamma_A t}. \qquad (s_2)$$

(c) A est un opérateur fermé et son domaine $\mathscr{D}(A)$ est dense dans H.
(d) Pour tout $u \in \mathscr{D}(A)$, $S(t)u$ est dérivable au sens de la norme de H et

$$\frac{d}{dt}(S(t)u) = -AS(t)u = -S(t)Au. \qquad (s_3)$$

(e) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\Re\lambda > \gamma_A$, alors $-\lambda$ est dans l'ensemble résolvant $\rho(A)$, et la résolvante $R(\lambda;A) = (A+\lambda)^{-1}$ de A a l'expression suivante

$$R(\lambda;A) = (A+\lambda)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)dt. \qquad (s_4)$$

L'intégrale (s_4) est définie au sens fort sur tout intervalle borné $[0,T]$, et converge en norme d'opérateur lorsque $T \longrightarrow \infty$. De plus par l'inégalité (s_2) on a

$$||(A+\lambda)^{-1}|| \leq \frac{M_A}{\Re\lambda - \gamma_A}. \qquad (s_5)$$

En fonction des valeurs des constantes M_A et γ_A, on distingue plusieurs classes de semi-groupes :
- Si $\gamma_A \leq 0$, on dit que $S(t)$ est un semi-groupe borné.
- Si $\gamma_A \leq 0$ et $M_A = 1$, on dit que $S(t)$ est un semi-groupe contractant.

2.2.0.2 Caractérisation des générateurs

Le résultat principal est le théorème de HILLE-YOSIDA.

Théorème 2.2.1. *Un opérateur $-A$ fermé à domaine dense dans un espace de Banach H est le générateur d'un semi-groupe si et seulement si il existe des constantes M_A et γ_A telles que tout réel $\lambda > \gamma_A$ soit dans l'ensemble résolvant $\rho(-A)$ et que*

$$||(\lambda + A)^{-m}|| \leq \frac{M_A}{(\lambda - \gamma_A)^m}$$

pour tout $\lambda > \gamma_A$ et tout entier $m \geq 1$. On alors l'estimation

$$||S(t)|| = ||e^{-tA}|| \leq M_A e^{t\gamma A}.$$

Corollaire 2.2.1. *Un opérateur $-A$ fermé à domaine dense dans un espace de Banach $\mathcal{X}$ est le générateur d'un semi-groupe contractant si et seulement si* $]0,+\infty[\subseteq \rho(-A)$ *et pour tout* $\lambda>0$ *on a l'inégalité* $\|(\lambda I+A)^{-1}\|\leq \frac{1}{\lambda}$.

Définition 2.2.2. Soit $\psi\in(0,\frac{\pi}{2}]$ et considérons l'ensemble

$$\Sigma(\psi):=\{z\in\mathbb{C}\ :\ z\neq 0 \text{ et } |\arg z|<\psi\}.$$

la famille des opérateurs $(T(z))_{z\in\Sigma(\psi)}$ est dite semi-groupe analytique (d'angle ψ) si

1. $T(0)=I$ et $T(z+z')=T(z)T(z')$ pour $z,z'\in\Sigma(\psi)$;
2. L'application $z\to T(z)$ **est analytique sur** $\Sigma(\psi)$;
3. $\lim\limits_{z\to 0}T(z)x=x$ **pour tout** $x\in E, 0<\psi'<\psi$ et $z\in\Sigma(\psi')$.

Remarque Si l'ensemble $\{\|T(z)\|,\quad z\in\Sigma(\psi')\}$ est borné pour tout $0<\psi'<\psi$, alors $T(z)_{z\in\Sigma(\psi')}$ est dit semi-groupe analytique borné.

Définition 2.2.3. Un opérateur $(B,D(B))$ linéaire fermé, à domaine dense dans un espace de Hilbert H $(\overline{D(B)}=E)$ est dit sectoriel (d'angle ψ) si

1. Il existe ψ, $0<\psi<\frac{\pi}{2}$ tel que $\Sigma_{\psi+\frac{\pi}{2}}=\{\lambda\in\mathbb{C}: |\arg(\lambda)|<\frac{\pi}{2}+\psi\}\cup\{0\}\subset\rho(B)$.
2. Pour $\theta\in(0,\psi)$, il existe $M>0$ telle que $\|R(\lambda,B)\|\leq\frac{M}{|\lambda|}$ pour $\lambda\in\overline{\Sigma}_{\psi+\frac{\pi}{2}-\theta}$ et $\lambda\neq 0$

Théorème 2.2.2. *Soit* $B:D(B)\subset H\to H$ *un opérateur à domaine dense, où* H *est un espace de Hilbert complexe. Alors* B *engendre un semi-groupe analytique dans* $\Sigma(\psi)$ *si et seulement si* $\Sigma(\psi+\frac{\pi}{2})\subseteq\rho(B)$ *et pour tout* $\theta\in(0,\psi)$, *on a*

$$\sup_{\lambda\in\Sigma(\theta+\frac{\pi}{2})}\|\lambda(\lambda I-B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)}<\infty.$$

- *On suppose que* B *engendre un semi-groupe analytique dans le secteur* $\Sigma(\psi)$, $\psi>0$. *Une application directe de la formule de Cauchy montre qu'il existe une constante* $M>0$ *telle que*

$$\|BT(t)u\|\leq\frac{M}{t}\ \textit{pour tout}\ u\in H\ \textit{et}\ t>0. \tag{1.19}$$

- *L'analyticité de semi-groupe* $(T(t))_{t\geq 0}$ *dans le secteur* $\Sigma(\psi)$ *entraîne que pour tout* $\theta\in(-\psi,\psi)$, $(T(e^{i\theta t}))_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe fortement continu sur* H, *où son générateur est* $e^{i\theta}B$.

2.2.1 Opérateurs accrétifs sur un espace de Hilbert.

Définition 2.2.4.

1. On dit qu'un opérateur A est **accrétif** si

$$\Re(Au;u) \geq 0, \quad u \in D(A).$$

2. On dit que A est **m-accrétif (ou maximal accrétif)** s'il est accrétif et $1 \in \rho(-A)$.

Remarque La définition (2.2.12) est équivalente à la définition suivante :

• Un opérateur linéaire A est dit m-accrétif si, pour tout $\Re\lambda > 0$,

$$(A+\lambda)^{-1} \in \mathscr{L}(H) \qquad \text{et} \qquad \|(A+\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{\Re\lambda}$$

On montre que, si A est un opérateur linéaire m-accrétif, alors A est fermé, de domaine dense est maximal-accrétif. En effet, A est fermé puisque, pour $\lambda > 0$, $(A+\lambda)^{-1} \in \mathscr{L}(H)$.
On a $\|(A+\lambda I)^{-1}\| \leq \lambda^{-1}$, d'où pour tout $u \in D(A)$

$$\|u\| \leq \frac{1}{\lambda}\|(A+\lambda)u\|$$

et

$$\|u\|^2 \leq \frac{1}{\lambda^2}\|Au\|^2 + \frac{2}{\lambda}\Re(Au,u) + \|u\|^2, \quad 0 \leq \frac{1}{\lambda}\|Au\|^2 + 2\Re(Au,u).$$

Si l'on fait tendre $\lambda \to \infty$, on doit avoir $\Re(Au,u) \geq 0$, d'où A est accrétif.
Soit maintenant A_1 une extension accrétive de A, alors $(A_1+\lambda)^{-1}$ est une extension de $(A+\lambda)^{-1}$ pour $\Re\lambda > 0$, mais $D[(A+\lambda)^{-1}] = H$, d'où $A_1 \equiv A$.
Enfin, $D(A) = R[(A+\lambda)^{-1}]$ pour $\Re\lambda > 0$; montrons que $((A+\lambda)^{-1}u, v) = 0, \forall v \in H \Rightarrow v = 0$.
Prenons $u = v$ et posons $(A+\lambda)^{-1}v = w$, on a alors

$$0 = \Re((A+\lambda)^{-1}v, v) = \Re(w, (A+\lambda)w) \geq \Re\lambda\|w\|^2,$$

d'où $w = 0, v = 0$ *et* $D(A)$ est dense.

• Il est clair qu'un opérateur associe à une forme accrétive est un opérateur accrétif.

• Si la forme sesquilinéaire est densément définie, accrétive, continue et fermée, alors son opérateur associé est m-accrétif.

Lemme 2.2.1. *Soit A un opérateur accrétif à domaine dense. Alors A est fermable, et sa fermeture $\overline{A}$ est accrétive. De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $R(\lambda I + A)$ est dense dans $R(\lambda I + \overline{A})$.*

Preuve. Soit $(u_n)_n \subset D(A)$ une suite convergente vers 0 et Au_n converge vers v dans H. Pour tout $\omega \in D(A)$, on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Re(Au(u_n+\omega); u_n+\omega) \\ &= \Re(Au_n; u_n) + \Re(Au_n; \omega) + \Re(A\omega; u_n) + \Re(A\omega; \omega). \end{aligned}$$

Par passege à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\Re(v;\omega)+\Re(A\omega;\omega)\geq 0$. En appliquant le même raisonnement avec $\lambda\omega$ pour $\lambda>0$, et en faisant tendre $\lambda\longrightarrow 0$, on obtient $\Re(v;\omega)\geq 0$. On reprend le même raisonnement avec $-\omega$, on obtient $\Re(v;w)\leq 0$. Ce qui nous permet de conclure que $\Re(v;w)=0$, et donc $(v;w)=0$. Puisque cette égalité est vraie pour tout $\omega\in D(A)$ qui est dense dans H, alors $v=0$. Donc A est fermable.
L'accrétivété de $\overline{A}$ et la densité de $R(\lambda+A)$ dans $R(\lambda+\overline{A})$ se démontrent aisément, il suffit d'utiliser la définition de $\overline{A}$ et un simple argument d'approximation.

Lemme 2.2.2. *Soit A un opérateur a domaine dense sur H.*

1. *Si A est fermé et accrétif, alors $(A+I)$ est injectif est $R(I+A)$ est fermée.*
2. *Si A est m-accrétif, alors $(0,\infty)\subset\rho(-A)$ et $\lambda(\lambda I+A)^{-1}$ est une contraction sur H pour tout $\lambda>0$.*
3. *Si A est accrétif, alors $\overline{A}$ est m-accrétif si et selement si il existe $\lambda>0$ tel que $R(\lambda I+A)$ est dense dans H.*

Preuve.

1. Soit $u\in D(A)$ tel que $u+Au=0$. De l'accrétivité de A, on a
$$(u;u)\leq\Re(u+Au;u)=0\Longrightarrow u=o,$$
d'où $I+A$ est injectif. Dans le but de montrer que $R(I+A)$ est fermée, considérons alors $(u_n)\subset D(A)$ telle que u_n+Au_n converge vers v dans H. Puisque $(u_n;u_n)\leq\Re(u_n+Au_n;u_n)$, il vient donc que (u_n) est bornée. On peut écrire :
$$\begin{aligned}(u_n-u_m;u_n-u_m)&\leq\Re(u_n-u_m;u_n-u_m+Au_n-Au_m)\\&\leq\|u_n-u_m\|\|u_n+Au_n-u_m-Au_m\|.\end{aligned}$$
On remarque que (u_n) est une suite de Cauchy. Si u est sa limite, alors Au_n converge vers $v-u$. La fermeture de A implique que $u\in D(A)$ et $v=u+Au\in R(I+A)$.
Mais $1\in\rho(-A)$ si et seulement si $I+A$ est inversible. Ainsi, A est m-accrétif si et seulement si $R(I+A)$ est dense.
2. On suppose que A est m-accrétif et soit $\lambda>0$. On a $\lambda\in\rho(-A)$ si et seulement si $\lambda I+A$ est inversible. En appliquant 1) à l'opérateur accrétif $\lambda^{-1}A$, on voit qu'il suffit de montrer que $R(\lambda I+A)$ est dense. Soit $f\in H$ tel que
$$(f;\lambda u+Au)=0,\quad u\in D(A).$$
Puisque A est m-accrétif, alors on peut trouver $v\in D(A)$ tel que $f=v+Av$.
Pour $u=v$, l'égalité précédente donne $v=0$, et donc $f=0$. D'où $R(\lambda I+A)$ est dense.
Maintenant, pour $f\in H$ fixé, et $u\in D(A)$ tels que $f=\lambda u+Au$. On a
$$\begin{aligned}\|f\|^2&=\Re(\lambda u+Au;\lambda u+Au)\\&\geq\lambda^2\|u\|^2+2\lambda\Re(Au;u)\\&\geq\lambda^2\|u\|^2.\end{aligned}$$
De cette inégalité, on voit clairement que $\lambda(\lambda I+A)^{-1}$ est un opérateur de contraction sur H.

3. D'après 2), si $\overline{A}$ est m-accrétif alors $\lambda I+\overline{A}$ est inversible pour $\lambda > 0$ et le lemme 2.2.1 nous assure que $R(\lambda I+A)$ est dense dans $R(\lambda I+\overline{A})=H$.
   Inversement, on suppose que $R(\lambda I+A)$ est dense pour certain $\lambda > 0$, donc $I+\lambda^{-1}A$ est un opérateur à image dense. Donc, d'après 1), $\lambda^{-1}\overline{A}$ est m-accrétif.
   Maintenant, en vertu de 2) on conclut que $\alpha I+\lambda^{-1}\overline{A}$ est inversible pour tout $\alpha > 0$. Ceci implique, en particulier que $I+\overline{A}$ est inversible, et donc $\overline{A}$ est m-accrétif.

Théorème 2.2.3. *Soit $A : D(A)\subset H \to H$ un opérateur à domaine dense. Les assertions suivants sont équivalentes.*

1. *L'opérateur A est fermable et $(-\overline{A})$ est un générateur de semi-groupe de contraction sur H.*
2. *$\overline{A}$ est m-accrétif.*
3. *A est accrétif et il existe une constante $\lambda > 0$ telle $R(\lambda I+A)$ est dense.*

Preuve. L'équivalance entre les points 2) et 3) a été étudiée dans le lemme 2.2.1. On suppose maintenant que 2) a lieu . D'après le lemme 2.2.1, $(0.\infty)\subset\rho(-\overline{A})$ et $\lambda(\lambda I+\overline{A})^{-1}$ est un opérateur de contraction sur H.
D'après le théorème de Hille-Yosida, l'opérateur $-\overline{A}$ engendre un C_0-semi-groupe $(e^{-t\overline{A}})_{t\geq 0}$ sur H. De plus, pour tout $u\in D(A)$, on a

$$\frac{d}{dt}||e^{-t\overline{A}}u||^2=-2\Re(\overline{A}e^{-t\overline{A}}u;e^{-t\overline{A}}u)\leq 0.$$

Donc, $||e^{-t\overline{A}}u||^2\leq ||u||^2$ pour rout $t\geq 0$.
A partir delà et la densité de $D(\overline{A})$, il vient que $e^{-t\overline{A}}$ est une contraction sur H pour tout $t\geq 0$. Ce qui prouve l'assertion 1).
Inversement, on suppose que A est fermable et $(-\overline{A})$ engendre un C_0-semi-groupe de contraction $(e^{-t\overline{A}})_{t\geq 0}$. Donc, pour tout $t\geq 0$

$$\Re(u-e^{-t\overline{A}}u;u)\geq 0 \ \forall u\in H.$$

En appliquant cette inégalité a $u\in D(\overline{A})$, on obtient

$$\Re(\overline{A}u;u)=\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\Re(u-e^{-t\overline{A}}u;u)\geq 0$$

Ce qui montre que $\overline{A}$ est accrétif.
Puisque $(-\overline{A})$ est un générateur de C_0-semi-groupe de contraction, $(0,\infty)\subseteq\rho(-A)$. D'où $\overline{A}$ est m-accrétif.
Soit A un opérateur à domaine dense, accrétif et $\overline{A}$ sa fermeture. Alors l'opérateur $\overline{A}$ est accrétif. Le théorème qui suit donne des conditions suffisantes pour que $\overline{A}$ soit m-accrétif.

Théorème 2.2.4. *Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur accrétif. On suppose qu' il existe un opérateur S m-accrétif et satisfait les deux conditions suivantes :*

1. $D(S) \subseteq D(A)$
2. *Il existe une constante $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que*

$$\Re(Au; Su) \geq -\alpha(u; Su), \quad \forall u \in D(S).$$

Alors la fermeture $\overline{A}$ de A est m-accrétive et $D(S)$ est un domaine essentiel de $\overline{A}$.

Preuve. Sans perdre la généralité du problème, on peut supposer que $\alpha \geq 0$. Considérons maintenant l'opérateur $A + \alpha I$ au lieu de A. On voit (d'après 3) du lemme 2.2.1) qu'on peut supposer que $\alpha = 0$.

Soit $B_n = A(I + \frac{1}{n}S)^{-1}, n \geq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'opérateur B_n est borné sur H (découle de 1) et le théorème du graphe fermé). De plus,

$$\Re\left(Au; \left(I + \frac{1}{n}S\right)u\right) = \Re(Au; u) + \frac{1}{n}\Re(Au; Su) \geq 0 \quad \forall u \in D(S).$$

Ce qui implique que B_n est accrétif. D'autre part, l'ensemble résolvent de l'opérateur B_n est non vide, d'où d'après 3) du lemme 2.2.1, on conclut que b_n est m-accrétif. De la formule

$$I + A + \frac{1}{n}S = (u + B_n)\left(I + \frac{1}{n}S\right),$$

il résulte que l'opérateur $I + A + \frac{1}{n}S$ de domaine $D(S)$ est inversible. D'où pour tout $f \in H$ et tout $n \in N$, il existe $u_n \in D(S)$ tel que

$$u_n + Au_n + \frac{1}{n}Su_n = f. \tag{1.20}$$

On en déduit donc

$$||u_n|| \leq ||f|| \ \ et \ \ ||\frac{1}{n}Su_n|| \leq 2||f||. \tag{1.21}$$

La première inégalité résulte de l'accrétivité de $A + \frac{1}{n}S$, puis que

$$\begin{aligned}(u_n; u_n) &\leq \Re\left(u_n + Au_n + \frac{1}{n}Su_n; u_n\right) \\ &= \Re(f; u_n) \\ &\leq ||f|| ||u_n||.\end{aligned}$$

La deuxième inégalité résulte de la première inégalité et l'estimation :

$$\begin{aligned}
\|\frac{1}{n}Su_n\|^2 &\leq \Re\left(Au_n + \frac{1}{n}Su_n; \frac{1}{n}Su_n\right)\\
&= \Re\left(f - u_n; \frac{1}{n}Su_n\right)\\
&\leq (\|f\| + \|u_n\|)\left\|\frac{1}{n}Su_n\right\|
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\overline{A}$ est m-accrétif.
D'après le lemme 2.2.1, il suffit de montrer la densité de l'image de l'opérateur $I + \overline{A}$.
Tout d'abord, on va montrer que l'opérateur $I + A$ de domaine $D(S)$ est d'image dense.
Soit $f \in H$ tel que

$$(f; u + Au) = 0 \ , \quad \forall u \in D(S), \tag{1.22}$$

et soit $(u_n) \subset D(S)$ vérifiant (1.20). De (1.22), on a

$$(f; f) = \left(u_n + Au_n + \frac{1}{n}Su_n; f\right) = \left(\frac{1}{n}Su_n; f\right). \qquad 1.23$$

D'autre part, puisque S est m-accrétif, il résulte alors que S^* est densément défini. En effet, on voit clairement que $I + S^*$ est inversible avec $(I + S^*)^{-1} = ((I + S)^{-1})^*$. Si $u \in H$ tel que $(u; v) = 0, \forall v \in D(S^*)$, alors on peut écrire $u = (I+S)\phi$ pour un certain $\phi \in D(S)$, et l'on obtient $(\phi; (I+S^*)v) = 0$, pour tout $v \in D(S^*)$. L'égalité $R(I + S^*) = H$ donne $\phi = 0$, et donc $u = 0$.
On considère maintenant une suite $(f_k) \subset D(S^*)$ qui converge vers f dans H. On a

$$\begin{aligned}
\left|\left(\frac{1}{n}Su_n; f\right) - \left(\frac{1}{n}Su_n; f_k\right)\right| &\leq \left\|\frac{1}{n}Su_n\right\| \|f - f_k\|\\
&\leq 2\|f\|\|f - f_k\|.
\end{aligned}$$

Il s'en suit donc $|(\frac{1}{n}Su_n; f) - (\frac{1}{n}Su_n; f_k)|$ converge vers 0,quant $k \to \infty$, uniformément par rapport à n.
D'où, en utilisant l'inégalité

$$\left|\left(\frac{1}{n}Su_n; f_k\right)\right| = \frac{1}{n}|(u_n; S^*f_k)| \leq \frac{1}{n}\|f\|\|S^*f_k\|$$

on obtient

$$\left|\left(\frac{1}{n}Su_n; f\right)\right| \to 0 \text{ quand } n \to \infty$$

On conclut de (1.23) que $f = 0$. Ainsi, on a prouvé que la fermeture B de la restriction de A sur $D(S)$ est m-accrétive.

Puisque $I+\overline{A}$ est une extension de $I+B$, alors $(I+\overline{A})D(\overline{A})=H$. Donc, $\overline{A}$ est m-accrétif.
Enfin, il reste à prouver que $B=\overline{A}$ pour conclure que $D(S)$ est un domaine essentiel pour $\overline{A}$.
Si $u\in D(\overline{A})$, il existe $v\in D(B)$ tel que

$$u+\overline{A}u=v+Bv=v+\overline{A}v.$$

Or $I+\overline{A}$ est injectif, donc $u=v\in D(B)$

Remarque 2.2.1. Soit A et B deux opérateur définis sur espace de Banach X. On suppose que S est fermé, A est fermable et $D(S)\subseteq D(A)$. Alors il existe deux constantes α et b telles que

$$||Au||\leq\alpha||Su||+b||u|| \quad pour\ tout \quad u\in D(S).$$

La preuve repose sur le théorème du graphe fermé.

2.3 Formes sesquilinéaires et théorèmes de génération

2.3.1 Semi-groupes sur les espaces de Hilbert

Dans cette section, on reprend les mêmes notations que celles utilisées dans la section 1.3.3.
Soit $\mathfrak{a}$ une forme sesquilinéaire densément définie, accrétive, continue et fermée sur un espace de Hilbert, et soit A l'opérateur linéaire associé à $\mathfrak{a}$
Il est claire que A est accrétif puisque $\mathfrak{a}$ est accrétive. Comme conséquence du théorème 2.2.3 et de la proposition 1.3.8, on a

Proposition 2.3.1. *L'opérateur $-A$ est un générateur d'un semi-groupe de contraction sur H.*
Dans le résultat qui suit, on montre que le semi-groupe engendré par $-A$ est analytique. Plus précisément :

Théorème 2.3.1. *Soit H un espace de Hilbert complexe. Notons par $(e^{-tA})_{t\geq 0}$ le semi-groupe engendré par l'opérateur $-A$. Alors $(e^{-tA})_{t\geq 0}$ est analytique dans le secteur $\Sigma(\frac{\pi}{2}-\arctan M)$ où M est la constante de la continuité (cf. l'hypothèse 1.4). De plus, pour tout $\varepsilon\in]0,1]$, $e^{-\varepsilon z}e^{-zA}$ est une contraction sur H pour tout $z\in\Sigma(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{M}{\varepsilon})=\Sigma(\arctan(\frac{M}{\varepsilon}))$.*

Preuve. L'hypothèse de continuité (1.4) implique que, pour tout $\varepsilon\in]0.1]$

$$\begin{aligned}|\Im(Au;u)| &\leq M[\Re(Au;u)+(u;u)]\\ &\leq \frac{M}{\varepsilon}[\Re(Au;u)+\varepsilon(u;u)] \quad pour\ tout \quad u\in D(A).\end{aligned}$$

D'où, si on pose $B=A+\varepsilon I$, l'inégalité précédente montre que B est sectoriel

$$|\Im(Bu;u)|\leq\frac{M}{\varepsilon}\Re(Bu;u) \quad pour\ tout \quad u\in D(B).$$

D'après le théorème 2.3.2 ou le théorème 2.3.4, on conclut que $-B$ est un générateur de semi-groupe analytique dans le secteur $\Sigma(\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{M}{\varepsilon}))$. De plus, e^{-zB} est une contraction pour tout $z \in \Sigma(\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{M}{\varepsilon}))$ puisque $e^{-tB} = e^{-\varepsilon t}e^{-tA}, t > 0$, d'où le résultat.
On remarque, si on peut écrire (1.4) sous la forme

$$|\mathfrak{a}(u,v)| \leq M'[\Re\mathfrak{a}(u,u) + \omega\|u\|^2]^{1/2}[\Re\mathfrak{a}(v,v) + \omega\|v\|^2]^{1/2}$$

avec une constante $M' < M$, alors il vient que $(e^{-tA})_{t\geq 0}$ est un semi-groupe analytique dans le secteur $\Sigma(\frac{\pi}{2} - \arctan(M'))$. De plus, $e^{-\omega z}e^{-zA}$ est une contraction sur H pour tout z dans le même secteur.
On rappelle que tout opérateur B à domaine dense et accrétif est fermable (*cf.* lemme 2.2.1). Notons $\overline{B}$ sa fermeture.

Théorème 2.3.2. *Soit $B : D(B) \subset H \to H$ un opérateur à domaine dense. On suppose que B et B^* sont sectoriels, i.e., il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in D(B)$ et $v \in D(B^*)$,*

$$|\Im(Bu;u)| \leq C\Re(Bu;u) \quad et \quad |\Im(B^*u;u)| \leq C\Re(B^*u;u). \tag{1.24}$$

Alors $-\overline{B}$ engendre un C_0-semi-groupe $(e^{-t\overline{B}})_{t\geq 0}$ sur H. De plus, ce semi-groupe est analytique dans le secteur $\Sigma(\frac{\pi}{2} - \arctan(C))$ et $e^{-z\overline{B}}$ est un opérateur de contraction sur H pour tout $z \in \Sigma(\frac{\pi}{2} - \arctan(C))$.

Preuve. En utilisant la définition de $\overline{B}$, on voit qu'on peut étendre l'inégalité (1.24) pour les éléments de $D(\overline{B})$.
D'autre part, de la définition de l'adjoint B^*, B^* est une extension de $(\overline{B})^*$. D'où, (1.24) est vérifiée pour tout $v \in D(\overline{B}^*)$.
Soit maintenant $u \in D(\overline{B})$ tel que $\|u\| = 1$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} \|(\lambda I - \overline{B})u\| &\geq |\lambda u - \overline{B}u; u| \\ &= |\lambda - (\overline{B}u;u)| \\ &\geq dist(\lambda, \Sigma(\arctan C)). \end{aligned}$$

D'où, on a

$$\|(\lambda I - \overline{B})u\| \geq dist(\lambda, \Sigma(\arctan C))\|u\| \quad pour \ tout \quad u \in D(\overline{B}). \tag{1.25}$$

Il résulte que pour $\lambda \notin \overline{\Sigma(\arctan C)}$, l'opérateur $\lambda I - \overline{B}$ est injectif. De plus, $R(\lambda I - \overline{B})$ est fermée pour tout $\lambda \notin \overline{\Sigma(\arctan C)}$. Pour voir cela, soit $v_k = \lambda_k - \overline{B}u_k$ une suite convergente vers $v \in H$. De (1.25), on déduit que (u_k) est une suit de Cauchy. Soit u la limite de $(u_k)_k$. Puisque $\overline{B}$ est fermée alors $u \in D(\overline{B})$ et $v = (\lambda I - \overline{B})u \in R(\lambda I - \overline{B})$.
Montrons maintenant que $R(\lambda I - \overline{B})$ est dense pour $\lambda \notin \overline{\Sigma(\arctan(C))}$. Si $g \in H$ tel que

$$(g; \lambda u - \overline{B}u) = 0 \quad pour \ tout \quad u \in D(\overline{B}),$$

$dist(\lambda, \Sigma(\arctan(C))) > 0$ et on utilise la même démarche que celle utilisée dans la preuve du théorème précédent.
Soit λ fixé tel que $dist(\lambda, \Sigma(\arctan(C))) > 0$. On peut écrire :

$$\begin{aligned}\lambda I - \overline{B} &= \lambda_0 I - \overline{B} + \lambda I - \lambda_0 I \\ &= (\lambda_0 I - \overline{B})[I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - \overline{B})^{-1}].\end{aligned}$$

En utilisant (1.26) pour λ_0, on voit que $\lambda I - \overline{B}$ est inversible pour tout λ tel que $|\lambda - \lambda_0| < dist(\lambda_0, \Sigma(\arctan C))$. En répétant cette procédure, on obtient $\lambda \in \rho(\overline{B})$ pour tout λ tel que $dist(\lambda, \Sigma(\arctan(C))) > 0$. L'estimation (1.26) découle immédiatement de la condition de sectorialité de B.
Ainsi, on a montré le théorème suivant.

Théorème 2.3.3. *Soit $B : D(B) \subset H \to H$ un opérateur à domaine dense. On suppose que B est sectoriel, i.e.,*

$$|\Im(Bu;u)| \leq C\Re(Bu;u) \quad pour \ tout \ u \in D(B). \tag{1.27}$$

où $C \geq 0$. On suppose en outre qu'il existe $\lambda_0 \in \rho(B)$ avec $dist(\lambda_0, \Sigma(\arctan(C))) > 0$. Alors $-B$ engendre un C_0 semi groupe qui est analytique sur le secteur $\Sigma(\frac{\pi}{2} - \arctan(C))$ et telle que e^{-zB} est une contraction sur H pour tout $z \in \Sigma(\frac{\pi}{2} - \arctan(C))$.

Remarque 2.3.1. L'étude des semi-groupes analytiques associés à des formes sesquilinéaires exige que H soit complexe. Dans le cas où H est réel, on utilise la procédure de compléxification suivante : Soit $H_C := H + iH$. On définit la forme

$$\tilde{\mathfrak{a}}(u + iv; g + ih) := \mathfrak{a}(u, g) + \mathfrak{a}(v, h) + i[\mathfrak{a}(v, g) - \mathfrak{a}(u, h)]. \tag{1.28}$$

pour tout $u, v, g, h \in D(\mathfrak{a})$. Le domaine de $\tilde{\mathfrak{a}}$ est donné par $D(\mathfrak{a}) + iD(\mathfrak{a})$.
On vérifie aisément que les conditions (1.2)-(1.5) sont vérifiées pour $\tilde{\mathfrak{a}}$. Le semi-groupe associé à $\tilde{\mathfrak{a}}$ est donné par :

$$T(t)(u + iv) := e^{-tA}u + ie^{-tA}v.$$

i.e., le complexifié du semi-groupe $(e^{-tA})_{t\geq 0}$. Le semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est analytique sur H_C. A partir delà, on obtient des résultats intéressants concernant le semi-groupe $(e^{-tA})_{t\geq 0}$ sur H. En particulier, $e^{-tA}H \subseteq D(A) \subseteq D(\mathfrak{a})$ pour tout $t > 0$.

2.3.2 Extrapolation à l'antidual $D(\mathfrak{a})'$

On reprend les mêmes notations comme précédemment. On note par $\mathfrak{a}$ une forme sesquilinéaire densément définie, accrétive, continue et fermée sur un espace de Hilbert H, et par A l'opérateur linéaire associé à $\mathfrak{a}$.

Soit $(e^{-tA})_{t\geq 0}$ le semi-groupe engendré par $(-A)$. Dans cette section, on étend ce semi-groupe pour un domaine plus large, et on établit des résultats similaires à ceux établis dans la section précédente. Notre intérêt réside dans le fait qu'il est utile dans des certaines situations de travailler sur un espace plus large.
Par exemple, la fonction $t \to e^{-tA}u$ admet une dérivée en $t=0$ seulement si $u \in D(A)$. Cette remarque donne un autre point de vue sur le semi-groupe $(e^{-tA})_{t\geq 0}$, ce qui suggère d'introduire une autre structure plus vaste, pour contourner certaines problèmes de régularité.
Notons $D(\mathfrak{a})'$ l'anti-dual de l'espace $D(\mathfrak{a})$, i.e., l'espace des formes linéaires continues ϕ telles que

$$\phi(u+v)=\phi(u)+\phi(v), \phi(\alpha u)=\overline{\alpha}(u), \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, u, v \in D(\mathfrak{a}).$$

Lorsque H est réel, $D(\mathfrak{a})'$ est le dual de $D(\mathfrak{a})$. En identifiant H avec H', il vient

$$D(\mathfrak{a}) \subset H \approxeq H' \subset D(\mathfrak{a})' \tag{1.29}$$

avec une injection continue et dense.
Le crochet de dualité entre $D(\mathfrak{a})'$ et $D(\mathfrak{a})$ est noté par $\langle .,. \rangle$, i.e.,

$$\phi(u)=\langle \phi, u\rangle, \quad \phi u \in D(\mathfrak{a})', \quad u \in D(\mathfrak{a}).$$

Dans le cas où $\phi \in H$ et $u \in D(\mathfrak{a})$, alors $<\phi, u>=(\phi; u)$.
Soit $u \in D(\mathfrak{a})$ fixé et considérons la fonctionnelle

$$\phi(v) := \mathfrak{a}(u, v), \quad v \in D(\mathfrak{a}).$$

De l'hypothèse de continuité (1.4), il résulte que ϕ est continue sur $D(\mathfrak{a})$, d'où $\phi \in D(\mathfrak{a})'$. Ainsi, elle peut être représentée sous la forme $\phi(v) =< \mathscr{A} u, v >$. où $\mathscr{A} u \in D(\mathfrak{a})'$ dépend de u. De la linéarité de la forme sesquilinéaire $\mathfrak{a}$, on voit que $\mathscr{A}$ est un opérateur linéaire de $D(\mathfrak{a})$ dans $D(\mathfrak{a})'$.
De plus, l'hypothèse (1.4) nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
||\mathscr{A} u||_{D(\mathfrak{a})'} &= \sup_{||v||_{\mathfrak{a}}\leq 1} |<\mathscr{A} u, v>| \\
&= \sup_{||v||_{\mathfrak{a}}\leq 1} |\mathfrak{a}(u,v)| \\
&\leq M||u||_{\mathfrak{a}}.
\end{aligned}$$

Donc, $\mathscr{A}$ est un opérateur continu de $(D(\mathfrak{a}), ||.||_{\mathfrak{a}})$ dans $D(\mathfrak{a})'$.
Remarque. On peut considérer $\mathscr{A}$ comme étant un opérateur non borné sur $D(\mathfrak{a})'$, de domaine $D(\mathscr{A}) = D(\mathfrak{a})$, défini par :

$$\mathfrak{a}(u,v) =< \mathscr{A} u, v >, \quad \forall u, v \in D(\mathfrak{a}). \tag{1.30}$$

Soit maintenant A l'opérateur associé à la forme sesquilinéaire $\mathfrak{a}$ (définie dans la section 1.2.3).
De la définition de A et la densité de $D(\mathfrak{a})$, on voit que

$$D(A) = \{u \in D(\mathscr{A}) : \mathscr{A} u \in H\} \quad et \quad Au = \mathscr{A} u \quad pour \quad u \in D(A).$$

Le résultat qui suit montre que le semi-groupe $(e^{-tA})_{t\geq 0}$ s'étend de H à un domaine plus large $D(\mathfrak{a})'$.

L'estimation (1.35) montre que $\lambda I + I + \mathscr{A}$ est inversible sur $D(\mathfrak{a})'$ pour tout $\lambda \notin -\Sigma(\theta)$.
En effet, il est clair que $\lambda I + I + \mathscr{A}$ est injectif, de plus, $R(\lambda I + I + \mathscr{A})$ est dense $D(\mathfrak{a})'$ et

$$(\lambda I + I\mathscr{A})D(\mathscr{A}) \supseteq (\lambda I + I + \mathscr{A})D(\mathscr{A}) = H,$$

où l'égalité du côté droit découle du fait que $\lambda \in \rho(-A)$ (*cf.* théorème 2.3.1 et 2.2.2).
Enfin, si $(\lambda I + I + \mathscr{A})u_n$ est une suite convergente dans $D(\mathfrak{a})'$, alors on obtient d'après (1.35) que (u_n) est de Cauchy dans $D(\mathfrak{a})$, et donc elle est converge dans $D(\mathfrak{a})$.
De la continuité de $\mathscr{A} : D(\mathfrak{a}) \to D(\mathfrak{a})'$, on obtient que $R(\lambda I + I\mathscr{A})$ est fermée.
Par conséquent $(\lambda I + I + \mathscr{A})$ est inversible sur $D(\mathfrak{a})'$ pour $\lambda \notin -\Sigma(\theta)$.
Soit $v \in D(\mathfrak{a})$, on a

$$\begin{aligned} |\lambda||<u,v>| &= |<\phi,v> - (u;v) - \mathfrak{a}(u,v)| \\ &\leq ||\phi||_{D(\mathfrak{a})'}||v||_{\mathfrak{a}} + (M+1)||u||_{\mathfrak{a}}||v||_{\mathfrak{a}}. \end{aligned}$$

En prenant le sup sur $||v||_{\mathfrak{a}} \leq 1$ et en utilisant (1.35), on obtient

$$\begin{aligned} |\lambda|||u||_{D(\mathfrak{a})'} &\leq ||\phi||_{D(\mathfrak{a})'} + (M+1)||u||_{\mathfrak{a}} \\ &\leq ||\phi||_{D(\mathfrak{a})'} + (M+1)C||\phi||_{D(\mathfrak{a})'} \\ &= C'||(\lambda I + I\mathscr{A})u||_{D(\mathfrak{a})'}. \end{aligned}$$

On conclut donc que $\lambda I + I + \mathscr{A}$ est inversible sur $D(\mathfrak{a})'$ pour $\lambda \notin -\Sigma(\theta)$ et

$$\sup_{\lambda \notin -\Sigma(\theta)} ||\lambda(\lambda I + I + \mathscr{A})^{-1}||_{\mathscr{L}(D(\mathfrak{a})')} < \infty.$$

Le théorème 2.2.2 nous assure que $-\mathscr{A} + I$ engendre un semi-groupe sur $D(\mathfrak{a})'$ qui est analytique dans le secteur $\Sigma(\frac{\pi}{2} - \arctan(M))$.
On revient maintenant à la preuve de (1.31).
Soit $f \in H$ et $u(t) = e^{-t\mathscr{A}}f - e^{-tA}f$. A partir de l'injection $H \subset D(\mathfrak{a})'$, il résulte que $\frac{d}{dt}e^{-tA}f$ existe (pour $t > 0$) dans $D(\mathfrak{a})'$, et

$$\frac{d}{dt}u(t) = -\mathscr{A}u(t), t > 0,$$

donne $u(t) = e^{-t\mathscr{A}}u(0)$. D'où l'égalité recherchée.

- On a montré le théorème (2.3.4) dans le cas H est complexe. Si H est réel, on utilise procédure de compléxification, on obtient que le semi-groupe $T(t)_{t\geq 0}$ défini sur $(D(\mathfrak{a}) + iD(\mathfrak{a}))'$ est analytique dont son générateur est l'opérateur associé a la forme définie par la forme (1.28).
- Si $\phi \in D(\mathfrak{a})'$, alors il existe une suite $(u_n) \subset H$ telle que $u_n \to \phi$ dans $D(\mathfrak{a})'$, d'où $T(t)\phi = \lim T(t)u_n = \lim e^{-tA}u_n$ (on note ici que $e^{-tA}u_n \in H$). En conséquence, $T(t)\phi \in D(\mathfrak{a})'$ pour tout $t \geq 0$. D'où, $T(t)D(\mathfrak{a})' \subseteq D(\mathfrak{a})'$ pour tout $t \geq 0$. Ainsi, la restriction de $(T(t))_{t\geq 0}$ à $D(\mathfrak{a})'$ est un C_0-semi-groupe dont le générateur est $\mathscr{A}$.

Remarque On a montré dans ce théorème que, si H est complexe, alors

$$\sup_{z\in\Sigma(\psi)} ||e^{-z}e^{-z.\mathscr{A}}||_{\mathscr{L}(_{D(\mathfrak{a})'})} < \infty.$$

pour $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} - \arctan(M)$.
Pour les mêmes raisons comme dans le théorème 2.3.1, on a

$$\sup_{z\in\Sigma(\psi)} ||e^{-\varepsilon z}e^{-z.\mathscr{A}}||_{\mathscr{L}(D(\mathfrak{a})')} < \infty.$$

Pour $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{M}{\varepsilon})$ et $\varepsilon \in]0,1]$.
Si la forme $\mathfrak{a}$ est sectorielle, i.e.,

$$|\Im\mathfrak{a}(u,u)| \leq \Re\mathfrak{a}(u,u) \ \ pour \ \ tout \ \ u \in D(\mathfrak{a}). \tag{1.36}$$

alors

$$\sup_{z\in\Sigma(\psi)} ||e^{-z.\mathscr{A}}||_{\mathscr{L}D(\mathfrak{a})'} < \infty$$

pour $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} - \arctan(M)$.
La preuve est la même comme dans la précédente. En remplaçant (1.4) par (1.36), i.e., on peut remplacer $I + \mathscr{A}$ par $\mathscr{A}$ dans la preuve précédente. On note ici que ces estimation auront lieu aussi dans l'espace $D(\mathfrak{a}), ||.||_{\mathfrak{a}}$. Plus précisément, pour tout $\varepsilon \in (0,1]$,

$$\sup_{z\in\Sigma(\psi)} ||e^{-\varepsilon z}e^{-zA}||_{\mathscr{L}(D(\mathfrak{a}))} < \infty \tag{1.37}$$

pour tout $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{M}{\varepsilon})$. En effet, soit $u \in D(\mathfrak{a})$. On pout écrire

$$\begin{aligned}||e^{-zA}u||_{\mathfrak{a}}^2 &= \Re < e^{-z.\mathscr{A}}\mathscr{A}u, e^{-zA}u > + ||e^{-zA}u||_{\mathfrak{a}} \\ &\leq ||e^{-z.\mathscr{A}}\mathscr{A}u||_{D(\mathfrak{a})'}||e^{-zA}u||_{\mathfrak{a}} + ||e^{-zA}u||^2.\end{aligned}$$

D'où

$$||e^{-zA}u||_{\mathfrak{a}}^2 \leq ||e^{-z.\mathscr{A}}\mathscr{A}u||_{D(\mathfrak{a})'} + 2||e^{-zA}u||^2. \tag{1.38}$$

D'après le théorème 2.3.1 et les remarques précédentes, on voit que les termes $||e^{-z\varepsilon}e^{-z.\mathscr{A}}||_{D(\mathfrak{a})'}$ et $||e^{-z\varepsilon}e^{-zA}||_{\mathscr{L}(H)}$ sont uniformément bornés sur $\Sigma(\psi)$ pour $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{M}{\varepsilon})$. A partir de cette remarque et la bornitude de $\mathscr{A} : D(\mathfrak{a}) \to D(\mathfrak{a})'$, alors (1.37) résulte de (1.36), et on obtient

$$\sup_{z\in\Sigma(\psi)} ||e^{-zA}||_{\mathscr{L}(D(\mathfrak{a}))} \leq \infty. \tag{1.39}$$

© 2011 U Guelma

Preuve de lemme 1.3.2. On commence tout d'abord par l'inclusion $e^{-tA}H \subseteq D(A)$ pour $t > 0$. En effet, si H est complexe, le semi-groupe $(e^{-tA})_{t\geq 0}$ engendré par $-A$ est analytique sur H (*cf.* théorème 2.3.1). Ce qui implique donc l'inclusion recherchée.
Dans le cas où H est réel, on utilise la procédure de compléxification pour obtenir un semi-groupe analytique $(e^{-t(A+iA)})_{t\geq 0}$ sur $H+iH$, a partir duquel on obtient $e^{-tA}H \subseteq D(A)$ pour $t > 0$.
On montre maintenant que chaque élément $u \in D(\mathfrak{a})$ peut être approché dans $(D(\mathfrak{a}), ||.||_{\mathfrak{a}})$ par $e^{-tA}u$. On a

$$\begin{aligned} ||e^{-tA}u-u||_{\mathfrak{a}}^2 &= \Re < e^{-t\mathscr{A}}\mathscr{A}u - \mathscr{A}u, e^{-tA}u-u > + ||e^{-tA}u-u||^2 \\ &\leq ||e^{-t\mathscr{A}}\mathscr{A}u-\mathscr{A}u||_{D(\mathfrak{a})'}||e^{-tA}u-u||_{\mathfrak{a}} + ||e^{-tA}u-u||^2. \end{aligned}$$

D'où

$$||e^{-tA}u-u||_{\mathfrak{a}}^2 \leq ||e^{-t\mathscr{A}}\mathscr{A}u-\mathscr{A}u||_{D(\mathfrak{a})'} + 2||e^{-tA}u-u||^2.$$

La continuité forte de $(e^{-t\mathscr{A}})_{t\geq 0}$ sur $D(\mathfrak{a})'$, (resp.$(e^{-tA})_{t\geq 0}$ sur H) impliquent

$$||e^{-tA}u-u||_{\mathfrak{a}} \to 0 \text{ quand } t \to 0.$$

Ce qui achève la preuve due lemme.
Remarque
- $e^{-tA}H \subseteq D(A) \subseteq D(\mathfrak{a})$ pour $t > 0$, et la restriction de $(e^{-tA})_{t\geq 0}$ sur $(D(\mathfrak{a}), ||.||_{\mathfrak{a}})$ est un C_0semi-groupe
- Sur la base du théorème 2.3.4 ainsi que les arguments utilisés dans la preuve, on montre

$$||e^{-zA}u-u||_{\mathfrak{a}} \to 0 \; quand \; z \to 0, z \in \Sigma(\psi),$$

  pour tout $u \in D(\mathfrak{a})$ et pour toute $\psi \in [0, \frac{\pi}{2} - \arctan(M)[$.
- Pour $t \geq 0$, on note par $(T(t))_{t\geq 0}$ la restriction de $(e^{-tA})_{t\geq 0}$ sur $D(\mathfrak{a})$.
- $(T(t))_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe sur $(D(\mathfrak{a}), ||.||_{\mathfrak{a}})$, de plus il est analytique dans le secteur $\Sigma(\frac{\pi}{2} - \arctan(M))$ lorsque H est complexe.
- Si $-B$ est le générateur de $(T(t))_{t\geq 0}$, alors

$$D(B) = \{u \in D(A), Au \in D(\mathfrak{a})\}, \; Bu = Au \text{ pour tout } u \in D(B).$$

2.3.3 Relation entre formes, opérateurs, et semi-groupes

On a arrive maintenant à énoncer les principaux théorèmes de notre travail.
Soit $\mathfrak{a}$ une forme sesquilinéaire satisfaisant les hypothèses (1.2)-(1.5). Dans cette partie, on montre qu'il y a une **unique correspondance** entre les formes sesquilinéaires et une classe d'opérateurs et semi-groupes.
• Le premier résultat montre que $\mathfrak{a}$ peut être entièrement déterminée par le semi-groupe $(e^{-tA})_{t\geq 0}$ engendré par $-A$, où A est l'opérateur associé à $\mathfrak{a}$.

Lemme 2.3.1. *Soit $\mathfrak{a}$ une forme sesquilinéaire densément définie, accrétive, continue et fermée. Soit $u \in H$. Alors*

$$u \in D(\mathfrak{a}) \Leftrightarrow \sup_{t>0} \frac{1}{t} \Re(u - e^{-tA}u; u) < \infty. \qquad (a)$$

De plus, pour tout $u, v \in D(\mathfrak{a})$,

$$\mathfrak{a}(u,v) = \lim_{t \downarrow 0}(u - e^{-tA}u; v). \qquad (b)$$

Preuve. Soit $u, v \in D(\mathfrak{a})$, par le théorème 2.3.4, on a

$$\frac{1}{t}(u - e^{-tA}u; v) = \frac{1}{t} < u - e^{-t\mathscr{A}}u, v > .$$

Puisque $u \in D(\mathfrak{a}) = D(\mathscr{A})$, on a

$$\frac{1}{t} < u - e^{-tA}u; v > \rightarrow < \mathscr{A}u, v > = \mathfrak{a}(u,v) \ quand \ t \rightarrow 0.$$

Ce qui prouve (b). En particulier,

$$\frac{1}{t}(u - e^{-tA}u; v) \rightarrow \mathfrak{a}(u,v), \quad \forall u \in D(\mathfrak{a}).$$

Soit maintenant $u \in H$ tel que $\sup_{t>0} \frac{1}{t} \Re(u - e^{-tA}u; u) < \infty$. Pour $\lambda > 0$, on note $(\lambda I + A)^{-1} = R(\lambda)$.

On a

$$\begin{aligned}
\Re\mathfrak{a}(\lambda R(\lambda)u; \lambda R(\lambda)u) &= \Re\lambda(AR(\lambda)u; \lambda R(\lambda)u) \\
&= \Re\lambda(u - \lambda R(\lambda)u; \lambda R(\lambda)u) \\
&\leq \Re\lambda(u - \lambda R(\lambda)u; u) \\
&= \Re\int_0^\infty \lambda^2 e^{-\lambda t}(u - e^{-tA}; u)dt \\
&\leq \sup_{t>0} \frac{1}{t}\Re(u - e^{-tA}u; u)\int_0^\infty t\lambda^2 e^{-\lambda t}dt \\
&= \sup_{t>0} \frac{1}{t}\Re(u - e^{-tA}u; u)\int_0^\infty se^{-s}ds.
\end{aligned}$$

Il vient donc $\lambda R(\lambda)u$ est uniformément borné par rapport à λ dans $(D(\mathfrak{a}), ||\cdot||_{\mathfrak{a}})$ (on rappelle ici que $\lambda R(\lambda)$ est une contraction sur H d'après la proposition 1.3.8). De plus, $\lambda R(\lambda)$ converge fortement vers l'opérateur identité I quant $\lambda \rightarrow \infty$.
En effet, grâce à la proposition 1.3.8, l'estimation $||u - \lambda R(\lambda)u|| = ||R(\lambda)Au|| \leq \lambda^{-1}||Au||, u \in D(A)$, et la densité de de $D(A)$ dans H, on obtient la convergence souhaitée.
En vertu du lemme 1.3.5, on obtient que $u \in D(\mathfrak{a})$.
• Si A est un opérateur associé à une forme sesquilinéaire densément définie, accrétive, continue et fermée, alors $I + A$ est sectoriel (*cf.* lemme 1.3.1) et A est m-accrétive (*cf.* proposition 1.3.8).

$z \in \Sigma(\psi)$, $e^{-z}T(z)$ *est une contraction sur* H. *Alors la forme donnée par*

$$\mathfrak{a}(u,v) := \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(u - T(t)u; v),$$
$$D(\mathfrak{a}) := \{u \in H, \sup_{t>0} \frac{1}{t}\Re(u - e^{-tA}u; u) < \infty\},$$

est densément définie, accrétive, continue et fermée et $(T(t))_{t\geq 0}$ *est son semi-groupe.*

Bibliographie

[1] T. Kato ; Perturbation Theory of Linear Operators, Springer-Verlag 1995.
[2] E. M. Ouhabaz ; Analysis of Heat Equations on Domains, Princeton University Press 2004.