

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

Université 8 Mai 1945 – Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
et des Sciences de la Matière  
Département de Mathématiques



### Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

**Master Académique en Mathématiques**

Option : **Equations aux dérivées partielles**

Par :

**Mr. Djafer MEZHOUD**

### **Intitulé**

**ÉTUDE DE PROBLÈMES INVERSESES**

**Dirigé par : Dr. Amara HITTA**

**Devant le jury**

**PRESIDENT  
EXAMINATEURS**

**F.LAKHAL  
N.BOUSSETILA  
G. REBAI**

**M.A.A  
M.C.A  
M.A.A**

**Univ-Guelma  
Univ-Guelma  
Univ-Guelma**

Session Juin 2011

# Remerciements

Je voudrais en premier lieu remercier chaleureusement Monsieur HITTA Amara, Maître de Conférences à l'Universitaire de Guelma qui a accepté de diriger ce travail. Ses précieux conseils et sa patience m'ont permis d'effectuer mes travaux dans des bonnes conditions.

---

Mes sincères remerciements vont à Monsieur LAKHAL Fahim, Maître Assistant à l'Université de Guelma, d'avoir accepté de présider le Jury, je tiens à lui exprimer mon extrême gratitude.

---

Je voudrais exprimer ma plus vive reconnaissance à Monsieur Nadjib BOUSSETILA, Maître de Conférences à l'Université de Guelma, et à Madame Ghania REBAI, Maître Assistante à l'Université de Guelma, pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail en me faisant l'honneur d'en être des examinateurs.

---

Enfin, Je serais reconnaissant envers les Enseignants, Chercheurs et les Etudiants, ainsi que tout le Staff Administratif de l'Université de Guelma.

Djaafer MEZHOUD

---

# Table des matières

---

<b>1</b>	<b>Rappels d'analyse fonctionnelle</b>	<b>4</b>
1.1	Espaces de Hilbert . . . . .	4
1.1.1	Définitions et exemples . . . . .	4
1.1.2	Propriétés des espaces de Hilbert . . . . .	6
1.1.3	Bases Hilbertiennes . . . . .	8
1.2	Opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert . . . . .	9
1.2.1	Propriétés générales . . . . .	9
1.2.2	Adjoint d'un Opérateur . . . . .	11
1.2.3	Opérateurs compacts . . . . .	12
1.3	Décomposition spectrale des opérateurs Auto-Adjoints Compacts . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Généralités sur les Problèmes Inverses</b>	<b>16</b>
2.1	Problèmes directs et problèmes inverses . . . . .	16
2.1.1	Présentation générale . . . . .	16
2.1.2	Exemples de problèmes inverses . . . . .	17
2.2	Problèmes bien et mal posés . . . . .	21
2.2.1	Concepts du problèmes bien et mal posés . . . . .	21
2.2.2	Définition d'un problèmes bien Posé . . . . .	21
2.2.3	Exemples de problèmes mal posés . . . . .	22

---

<b>3</b>	<b>Solution d'un problème inverse mal posé</b>	<b>26</b>
3.1	Théorème de Tikhonov . . . . .	27
3.2	Quasi-solution d'un problème inverse mal posé . . . . .	29
3.2.1	Existence et unicité d'une Quasi-solution . . . . .	29
3.3	Inverse généralisé (Moore-Penrose) . . . . .	31
3.3.1	Solution $LS$ et équation d'Euler . . . . .	31
3.3.2	Inverse généralisé $A_g$ . . . . .	34
3.3.3	Décomposition en valeurs singulières de $A_g$ . . . . .	36
3.3.4	Exemple de calcul de l'inverse généralisé $A_g$ pour un problème rétrograde ( équation de la chaleur) . . . . .	41
3.4	Procédure de régularisation . . . . .	44
3.4.1	Famille régularisante . . . . .	44
3.4.2	Algorithme de régularisation . . . . .	45
3.4.3	Régularisation de Tikhonov . . . . .	46

---

# RAPPELS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

---

Dans cette première partie, nous rappelons les principaux résultats d'analyse fonctionnelle dont nous aurons besoin, ainsi que des compléments concernant les opérateurs dans les espaces de Hilbert. Pour simplifier, nous considérons que des espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$  :

## 1.1 Espaces de Hilbert

Nous commençons par rappeler quelques définitions :

### 1.1.1 Définitions et exemples

**Définition 1.1.1** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . Une norme sur  $E$  est une application de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ , possédant les propriétés suivantes :

- (i)  $\forall x \in E, \|x\|_E \geq 0$  et  $\|x\|_E = 0 \Rightarrow x = 0$ ,
- (ii)  $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha x\|_E = |\alpha| \|x\|_E$ ,
- (iii)  $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$ .

**Exemple 1.1.1** Dans le cas où  $E$  est de dimension  $n$  (nous l'identifions alors à  $\mathbb{R}^n$ ), les normes suivantes sont les plus utilisées :

- (i)  $\|x\|_1 = \sum_1^n |x_i|$ ;
- (ii)  $\|x\|_2 = (\sum_1^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ ;

$$(iii) \|x\|_{\infty} = \max_{(1 \leq i)} |x_i|.$$

**Définition 1.1.2** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , Un produit scalaire sur  $E$  est une application de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ , notée  $(\cdot, \cdot)$ , possédant les propriétés suivantes :

$$(i) \forall (x, y, z) \in E^3, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z);$$

$$(ii) \forall (x, y) \in E^2, (x, y) = (y, x);$$

$$(iii) \forall x \in E, (x, x) \geq 0;$$

$$(iv) (x, x) \geq 0 \Rightarrow x = 0;$$

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace **préhilbertien**.

**Exemple 1.1.2**  $\mathbb{R}^n$  est un espace préhilbertien, si on le munit du produit scalaire euclidien usuel :

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

**Exemple 1.1.3** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . L'espace vectoriel des fonctions de carré intégrable sur  $\Omega$  est :

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \leq \infty \right\}$$

$L^2(\Omega)$  est un espace préhilbertien si on le munit du produit scalaire suivant :

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

**Remarque :** Un produit scalaire sur  $E$  définit une norme sur  $E$  par la formule suivante :

$$\|x\|_E = \sqrt{(x, x)}$$

Parmi les trois normes de l'exemple (1.1.1), seule la seconde, provient d'un produit scalaire.

**Définition 1.1.3** Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire.

**Exemple 1.1.4** *L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$ , muni du produit scalaire euclidien usuel, est un espace de Hilbert.*

Le résultat suivant est fondamental :

**Proposition 1.1.1** *L'espace vectoriel  $L^2(\Omega)$ , muni du produit scalaire défini dans l'exemple (1.1.3), est un espace de Hilbert.*

**Exemple 1.1.5 (Espace de Sobolev)** *Plaçons nous pour simplifier en une dimension, sur l'intervalle  $(0; 1)$ , L'espace de Sobolev d'ordre 1 est l'espace défini par :*

$$H^1(0; 1) = \left\{ u \in L^2(0; 1), \exists v \in L^2(0; 1), \forall \varphi \in C_c^1(0; 1), \int_0^1 u(t)\varphi'(t)dt = - \int_0^1 \varphi(t)v(t)dt \right\}.$$

où  $C_c^1(0, 1)$  désigne l'espace des fonctions continûment dérivables, à support compact dans  $(0; 1)$ . Cette définition est équivalente à celle, plus usuelle, utilisant la théorie des distributions. Pour  $u \in H^1(0; 1)$ , on note  $u' = v$ . On démontre que l'espace  $H^1(0; 1)$  est un espace de Hilbert si on le munit du produit scalaire suivant :

$$(u, v)_{H^1} = \int_0^1 u(t)v(t)dt + \int_0^1 u'(t)v'(t)dt.$$

Dans les applications on a souvent besoin du sous-espace de  $H^1$  correspondant aux fonctions nulles au bord, Ce sous-espace est noté  $H_0^1$ , et on peut le munir du produit scalaire suivant :

$$(u, v)_{H_0^1} = \int_0^1 u'(t)v'(t)dt.$$

On démontre (c'est une conséquence de l'Inégalité de Poincaré) que la norme correspondante est équivalente à la norme induite par celle de l'espace  $H^1$ .

## 1.1.2 Propriétés des espaces de Hilbert

**Proposition 1.1.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)** *Pour tous  $(x, y) \in E^2$ , on a l'inégalité :*

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

l'égalité n'a lieu que si  $x$  et  $y$  sont proportionnels.

**Proposition 1.1.3** (*Identité du Parallélogramme*) Pour tous  $(x; y) \in E^2$ , on a l'identité :

$$\|x + y\|_E^2 + \|x - y\|_E^2 = 2(\|x\|_E^2 + \|y\|_E^2)$$

Le résultat suivant est l'un des plus importants résultats de la théorie :

**Théoreme 1.1.1** (*de projection*) Soit  $F$  un sous-ensemble fermé, convexe de  $E$ , et  $z \in E$  donné. Il existe un unique élément  $x_0 \in F$  tel que :

$$\|z - x_0\|_E = \inf \|z - x\|_E, \quad \forall x \in F,$$

Le point  $x_0$  est caractérisé par l'inégalité suivante :

$$x_0 \in F \text{ et } (z - x_0, x - x_0) \leq 0, \quad \forall x \in F.$$

Le point  $x_0$  mis en évidence au theoreme (1.1.1), s'appelle la projection de  $z$  sur  $F$ . Dans le cas ou  $F$  est un sous-espace vectoriel, on peut préciser ce résultat :

**Proposition 1.1.4** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel fermé de  $E$ , et soit  $z \in E$ , La projection de  $z$  sur  $F$  est caractérisée par :

$$x_0 \in F \text{ et } (z - x_0, x) = 0, \quad \forall x \in F.$$

Dans un espace de Hilbert, on dit que deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul. L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel  $F$  est :

$$F^\perp = \{x \in E, (x, y) = 0, \quad \forall y \in F\}.$$

Une conséquence des résultats précédents est :

**Proposition 1.1.5** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  (non nécessairement fermé), on a :

$$F^\perp \oplus \overline{F} = E.$$



### 1.1.3 Bases Hilbertiennes

**Définition 1.1.4** Une base Hilbertienne d'un espace de Hilbert  $E$  est une suite  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  telle que :

(i)  $\|e_n\|_E = 1, \forall n,$

(ii)  $(e_n, e_m) = 0, \forall n \neq m,$

(iii) L'espace vectoriel engendré par les  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  est dense dans  $E$ .

Précisons la troisième condition : soit  $F_n = \text{vect}\{e_1, \dots, e_n\}$ , les sous-espaces  $F_n$  sont emboîtés :  $F_n \subset F_m$  pour  $n \leq m$ , donc  $F = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$  est un sous-espace vectoriel. La troisième condition de la définition exprime que ce sous-espace est dense dans  $E$ , c-à-d que tout élément de  $E$  peut être approché arbitrairement par un élément de  $F$ . On démontre que tout espace vectoriel séparable admet une base Hilbertienne, Etant donné une base Hilbertienne  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  de  $E$ , tout élément  $x \in E$  s'écrit :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n,$$

avec (c'est l'égalité de Bessel-Parseval) :

$$\|x\|_E^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2.$$

Un tel développement est unique, c-à-d que si on a un développement :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \text{ avec } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty,$$

alors :  $x_n = (x, e_n)$ .<sup>1</sup>

On sait construire explicitement des bases Hilbertiennes pour certains espaces  $L^2$ . Bien évidemment, une base orthogonale d'un espace vectoriel de dimension finie est une base hilbertienne.

---

1. Une base hilbertienne n'est pas une base algébrique, puisque le développement de  $x$  n'est pas une combinaison linéaire finie.

**Exemple 1.1.6** *Chaque une des deux suites de fonctions :*

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx) \right\}_{n \geq 1} \quad \text{et} \quad \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(nx) \right\}_{n \geq 1}$$

*forme une base Hilbertienne de  $L^2(0; \pi)$ . Dans ce cas, le développement d'un élément  $f \in L^2(0; \pi)$  dans l'une de ces deux bases s'identifie à un développement en série de Fourier (après prolongement par parité et périodicité).*

## 1.2 Opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert

L'analyse fonctionnelle fait interagir la topologie et l'algèbre linéaire. Ainsi, sur un espace de Hilbert, il sera naturel d'étudier les applications qui respectent, à la fois, la structure d'espace vectoriel (les applications linéaires) et la structure hilbertienne (les applications continues).

### 1.2.1 Propriétés générales

**Définition 1.2.1** *Un opérateur linéaire, continu  $A$  d'un espace de Hilbert  $E$  dans un espace de Hilbert  $F$  est une application linéaire continue de  $E$  dans  $F$ , c-à-d qui vérifie :*

- (i)  $\forall x \in E, Ax \in F$ ,
- (ii)  $\forall (x, y) \in E \times E, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$ ,
- (iii)  $\exists M > 0, \forall x \in E, \|Ax\|_F \leq M \|x\|_E$ .

Le plus petit nombre  $M$  qui vérifie la condition (iii) ci-dessus, s'appelle la norme de l'opérateur  $A$ , d'où ces définitions équivalentes :

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_E \neq 0} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Ax\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|Ax\|_F$$

On désigne par :  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des opérateurs linéaires continus définis sur  $E$  dans  $F$ , rappelons la définition des deux sous-espaces fondamentaux associés à un opérateur linéaire  $A$  :

**Définition 1.2.2** *A est un opérateur linéaire d'un espace de Hilbert E dans un espace de Hilbert F :*

(i) *Le noyau de A est le sous-espace de E défini par :*

$$N(A) = \{x \in E, Ax = 0\}$$

(ii) *L'image de A est le sous-espace de F défini par :*

$$R(A) = \{y \in F, \exists x \in E, Ax = y\}$$

Remarquons que  $N(A)$  est toujours fermé, en tant que image réciproque du sous espace fermé  $\{0\}$  de  $F$ , alors que  $R(A)$  peut ne pas être fermé ( nous verrons ça plus loin, voir proposition 1.2.4).

**Définition 1.2.3** *Un opérateur A est dit de rang fini si et seulement si son image  $R(A)$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie de F.*

Les théorèmes suivants sont des résultats fondamentaux de la théorie des opérateurs linéaires :

**Théorème 1.2.1** *(de l'application ouverte) Soient E, F des espaces de Banach<sup>2</sup> et  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ . On suppose que A est surjective. Alors A est ouverte, i.e. l'image par A de tout ouvert de E est un ouvert de F.*

De ce théorème, découle :

**Théorème 1.2.2** *(théorème de l'isomorphisme). Soient E, F des espaces de Banach. Toute bijection linéaire continue de E sur F a un inverse continu.*

**Théorème 1.2.3** *(théorème du graphe fermé). Soient E, F des espaces de Banach et  $A : E \rightarrow F$  une application linéaire. Alors A est continue si et seulement si le graphe de A est fermé dans  $(E \times F)$ .*

---

2. N'oubliant pas que tout Hilbert est un Banach.

Soit  $A$  un opérateur linéaire sur  $E$  dans  $F$ , le cas où l'espace d'arrivé  $F$  est le corps des scalaires, on parle de forme linéaire, l'espace vectoriel des formes linéaires continues s'appelle l'espace dual de  $E$ , et on le note par  $E'$ . Dans le cas d'un espace de Hilbert, le dual s'identifie de façon canonique à l'espace lui même :

**Théoreme 1.2.4** (de Riesz). Soit  $L$  une forme linéaire continue sur  $E$ , Il existe un unique vecteur  $x \in E$  tel que :

$$L(x) = (y, x), \forall x \in E.$$

### 1.2.2 Adjoint d'un Opérateur

On commence par énoncer le théoreme suivant :

**Théoreme 1.2.5** Soit  $A$  un opérateur linéaire continu de  $E$  dans  $F$ . Il existe un unique opérateur de  $F$  dans  $E$ , noté  $A^*$ , tel que :

$$\forall u \in E, \forall v \in F, (Au, v) = (u, A^*v).$$

Cet opérateur est appelé l'adjoint de  $A$ , il vérifie de plus :

$$(A^*)^* = A \text{ et } \|A^*\| = \|A\|.$$

**Remarque :** L'égalité  $(A^*)^* = A$  est équivalente à :

$$D((A^*)^*) = D(A) \text{ et } \forall x \in D(A), (A^*)^*x = Ax.$$

En dimension finie, en identifiant l'application linéaire  $A$  à sa matrice dans des bases orthogonales de  $R^n$  et  $R^p$ , on voit que la matrice de l'opérateur adjoint n'est autre que la matrice transposée de  $A$ .

La proposition suivante rassemble quelques propriétés simples de l'adjoint :

**Proposition 1.2.1** Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs linéaires continus,  $a$  et  $b$  deux scalaires, on a :

(i) *Linéarité* :  $(aA + bB)^* = aA^* + bB^*$ .

(ii) *Composition* :  $(AB)^* = B^*A^*$ .

Ils existent des relations remarquables entre le noyau et l'image d'un opérateur et ceux de son adjoint :

**Proposition 1.2.2** *Soit  $A$  est un opérateur linéaire continue,  $A^*$  son adjoint, On a les relations suivantes ( où  $\overline{X}$  indique l'adhérence de l'ensemble  $X$  ) :*

(i)  $N(A^*) = R(A)^\perp$  ;

(ii)  $N(A)^\perp = \overline{R(A)^*}$

**Définition 1.2.4** *Un opérateur dans  $E$  est dit auto-adjoint si et seulement s'il vérifie :*

$$\forall (x, y) \in E \times E, (Ax, y) = (x, Ay)$$

**Remarque** : En dimension finie, les opérateurs auto-adjoints sont ceux qui ont une matrice symétrique.

### 1.2.3 Opérateurs compacts

**Définition 1.2.5** *Soit  $A \in \mathcal{L}(E; F)$ . On dit que  $A$  est un opérateur compact si et seulement si l'image de toute partie bornée de  $E$  est relativement compacte dans  $F$ .*

**Remarque** Cette condition veut dire que si  $B \subset E$  est borné,  $\overline{A(B)}$  (l'adhérence de  $A(B)$ ) est compact dans  $F$ . citon, maintenant, quelques propriétés de base por les opérateurs compacts :

**Proposition 1.2.3** *Soit  $E$  ;  $F$  et  $G$  trois espaces de Hilbert.*

1. *L'ensemble des opérateurs compacts de  $E$  dans  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E; F)$*
2. *Si  $A_1 \in \mathcal{L}(E; F)$  et  $A_2 \in \mathcal{L}(F; G)$  est compact , alors  $A_1A_2 \in \mathcal{L}(E; G)$  est compact .*
3. *Si  $A_1 \in \mathcal{L}(E; F)$  est compact et  $A_2 \in \mathcal{L}(F; G)$ , alors  $A_1A_2 \in \mathcal{L}(E; G)$  est compact .*

4. Si  $A \in \mathcal{L}(E; F)$  est compact, alors  $A^* \in \mathcal{L}(F; E)$  est aussi compact.
5. Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'opérateurs compacts de  $E$  dans  $F$ , si  $A_n$  converge vers  $A$  dans  $\mathcal{L}(E; F)$  c'est-à-dire :

$$\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|_E \neq 0} \frac{\|A_n x - Ax\|_F}{\|x\|_E} \rightarrow 0$$

alors  $A$  est compact.

En d'autres termes, les opérateurs compacts forment un sous-espace vectoriel fermé de  $\mathcal{L}(E; F)$ , qu'on le note par :  $\mathcal{K}(E; F)$ .

Le théorème suivant fournit (dans le cas des espaces de Hilbert) une caractérisation à la fois utile et plus proche de l'intuition :

**Théorème 1.2.6** *Un opérateur de  $E$  dans  $F$  est compact si et seulement si il est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini.*

Ce théorème signifie que les opérateurs compacts sont ceux qui ressemblent le plus aux opérateurs de dimension finie usuels. Signalons que ce résultat n'est plus valable si  $E$  et  $F$  sont des espaces de Banach. Il existe par contre une différence, qui sera fondamentale pour l'étude des problèmes mal posés :

**Proposition 1.2.4** *Si  $E$  n'est pas de dimension finie, alors l'identité  $E \rightarrow E$  n'est jamais compacte.*

**Proposition 1.2.5** *Soit  $A$  un opérateur compact de  $E$  dans  $F$ , où  $E$  et  $F$  sont deux espaces de Hilbert qui ne sont pas de dimension finie. Alors  $A$  n'est jamais inversible dans  $\mathcal{L}(E; F)$ .*

**Remarque** Dans le corollaire précédent, l'inverse (algébrique) de  $A$  peut exister ou non ( $A$  peut ou non être injectif), mais s'il existe, il ne sera pas continu, ceci est lié au caractère non fermé de l'image de  $A$ ,

Pour conclure, nous citons une version abstraite de l'alternative de Fredholm. Ce résultat concerne les équations du type :

$$(I - A)x = y$$

où  $A$  est un opérateur compact dans  $E$ .

**Théorème 1.2.7** *Soit  $A$  un opérateur compact dans un espace de Hilbert  $E$  :*

- *Le noyau  $N(I - A)$  est de dimension finie, et l'image  $R(I - A)$  est fermée dans  $E$ .*
- *Si  $I - A$  est injectif, il est aussi surjectif, et alors l'inverse  $(I - A)^{-1}$  est continu .*
- *Si  $I - A$  n'est pas injectif, l'équation à une solution si et seulement si  $f \in N(I - A)^\perp$*

**Remarque :** Ce théorème s'étend aux opérateurs de la forme  $A + I$  compact le résultat analogue bien connu en dimension finie (pour tous les systèmes d'équations linéaires). Le troisième point du théorème veut dire que l'équation n'a de solution que si le second membre satisfait des conditions d'orthogonalité au noyau (de dimension finie).

### 1.3 Décomposition spectrale des opérateurs Auto-Adjoints Compacts

Dans toute cette section,  $A$  désigne un opérateur auto-adjoint compact dans  $E$  :

**Définition 1.3.1** *Le spectre de  $A$  est l'ensemble :*

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, A - \lambda I \text{ n'est pas inversible dans } \mathcal{L}(E)\}.$$

**Définition 1.3.2** *Un nombre  $\lambda \in \mathbb{C}$  est une valeur propre de  $A$  si et seulement si  $A - \lambda I$  n'est pas injectif.*

Remarquons que, à priori, si  $\lambda \in \sigma(A)$ , trois cas peuvent se produire pour l'opérateur  $A - \lambda I$  :

(i) il peut ne pas être injectif, et dans ce cas  $\lambda$  est une valeur propre,

3. Inversible dans  $\mathcal{L}(E)$ , veut dire que l'inverse est un opérateur linéaire continu

- (ii) il peut ne pas être surjectif,
- (iii) il peut être bijectif, mais l'inverse n'est pas continu.

Pour simplifier l'énoncé du théorème suivant, nous ferons l'hypothèse que l'opérateur  $A$  n'est pas de rang fini (si c'était le cas, les valeurs propres seraient en nombre fini, et "0" pourrait ne pas être une valeur propre).

**Proposition 1.3.1** Notons  $\sigma_p(A)$  l'ensemble des valeurs propres de l'opérateur  $A$  :

- $\sigma(A) = \{0\} \cup \sigma_p(A)$ ;
- Toute valeur propre non-nulle est de multiplicité finie ;
- L'opérateur  $A$  a au plus une infinité dénombrable de valeurs propres, dont le seul point d'accumulation possible est "0" ;
- Les valeurs propres de l'opérateur  $A$  sont réelles et des vecteurs propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux ;
- L'un des nombres  $\pm \|A\|$  est une valeur propre de l'opérateur  $A$ .

Les valeurs propres non-nulles d'un opérateur auto-adjoint compact peuvent donc être rangées en une suite qui tend vers "0". Nous pouvons maintenant énoncer le résultat le plus important de cette section :

**Théorème 1.3.1** Notons  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les valeurs propres de  $A$ , avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$ , Il existe une base hilbertienne  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $N(A)^\perp$  telle que  $\forall x \in E$  :

$$x = x_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (x, e_n) e_n \quad \text{et} \quad Ax = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n$$

où  $x_0 \in N(A)$ .

Bien entendu, la convergence des séries dans le théorème ci-dessus sont à prendre au sens de la norme de  $E$ . Ici encore, si l'opérateur  $A$  est de rang fini, les sommes ci-dessus sont en fait des sommes finies. Il est clair que tout opérateur donné par une formule comme la précédente est compact.



# GÉNÉRALITÉS SUR LES PROBLÈMES INVERSES

---

Dans ce chapitre, nous définissons de manière globale, ce que sont les problèmes inverses et en quoi ils sont pour la plupart mal posés, ces définitions seront illustrés par des exemples divers ;

## 2.1 Problèmes directs et problèmes inverses

### 2.1.1 Présentation générale

Deux problèmes sont dits inverses, l'un de l'autre, si la formulation de l'un met l'autre en cause : si le problème direct consiste à décrire et prédire les effets d'un phénomène connaissant les causes qui en sont à l'origine, le problème inverse, par opposition au problème direct, consiste à déterminer des causes connaissant des effets.

L'utilisation des termes : direct et inverse est relative, et dépendante de quoi est connu et quoi en cherche à déterminer, à titre d'exemple la prédiction de l'état futur d'un système physique connaissant son état actuel, est le modèle type du problème direct, on peut envisager divers problèmes inverses, par exemple, reconstituer l'état passé du système connaissant son état actuel ( si ce système est irréversible), ou la détermination d'un paramètre du système, connaissant son évolution ou une partie de son évolution (Identification d'un paramètre). En général problème inverse et problème direct sont complémentaires, en ef-

La résolution du problème inverse ne se fait pas sans une modélisation préalable du phénomène étudié, autrement dit sans la résolution du problème direct correspondant qui décrit comment les paramètres du modèle sont liés, ensuite, à partir des mesures expérimentales obtenues sur le phénomène réel, la démarche va consister à valider le modèle par résolution du problème inverse.

### 2.1.2 Exemples de problèmes inverses

Les problèmes inverses constituent une thématique extrêmement vaste, et apparaissent dans de nombreux domaines scientifiques qui peuvent être très différents les uns des autres, sans être exhaustif, nous citons :

- ✓ L'imagerie médicale (Echographie, Scanners, ...),
- ✓ L'ingénierie pétrolière (Identification de perméabilité, magnétisme, ...),
- ✓ L'hydrologie,
- ✓ La chimie (Détermination des constantes de réaction),
- ✓ Le radar (Détermination de la forme d'un obstacle),
- ✓ L'acoustique sous marine,
- ✓ La mécanique quantique (Détermination du potentiel),
- ✓ Le traitement d'image (Restauration d'images floues ) ... etc.

De point de vue formalisme mathématique, ces problèmes se répartissent en deux grandes parties : les problèmes inverses linéaires qui ramènent à la résolution d'une équation linéaire, et les problèmes inverses non-linéaires, qui sont le plus souvent, des problèmes d'identification des paramètres.

Et de point de vue technique, on peut les classer en deux catégories : les problèmes qui visent à déterminer les conditions aux limites ou des sources inconnues, et les problèmes liés à l'estimation de paramètres intrinsèques du système. Le premier type de problèmes apparaît dès que la mesure directe de la grandeur physique étudiée n'est pas accessible en

pratique. Dans la deuxième catégorie de problèmes inverses, l'objectif fixé est de déterminer à partir d'une connaissance partielle de l'état du système, les paramètres décrivant le modèle physique.

Dans ce qui suit, nous citons quelques problèmes inverses concrets :

### Exemple 1

Trouver un polynôme  $P$  de degré  $n$  avec comme donnés les  $n$  zéros  $x_1, x_2, \dots, x_n$  du polynôme  $P$ , ce problème est l'inverse du problème direct qui consiste à trouver les zéros du polynôme  $P$ , la solution du problème inverse est le polynôme  $P$  défini par  $P(x) = C(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$ , où  $C$  est une constante. (On remarque ici que la solution n'est pas unique!).

### Exemple 2

Trouver un polynôme  $P$ , étant donné les valeurs  $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$  du polynôme  $P$  aux points  $x_1, x_2, \dots, x_n$  est le problème inverse du problème direct qui consiste à évaluer  $P$  aux points  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , le problème inverse ici n'est que l'interpolation de **Lagrange**.

### Exemple 3

Donnant une matrice réelle symétrique  $A$  de dimension  $n \times n$  et  $n$  réels  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Trouver une matrice diagonale  $D$  telque la matrice  $A+D$  à pour valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  est le problème inverse du problème direct, qui consiste à déterminer les valeurs propres de la matrice  $A + D$ .

### Exemple 4

Pour déterminer la répartition de la température dans un matériau hétérogène occupant un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , on écrit tout d'abord la conservation de l'énergie :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div}(\vec{q}) = f(x, y, z) \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.1)$$

où :

- $T$  : la température,
- $\rho$  : la densité du fluide,
- $c$  : la chaleur spécifique,
- $\vec{q}$  : le flux de chaleur,
- $f$  : une source de chaleur.

Sachant que la loi de Fourier affirme que :  $\vec{q} = -K \mathbf{grad} T$  (où  $K$  est la conductivité), en éliminant  $\vec{q}$  dans (2.1), on obtient :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \mathbf{div}(K \mathbf{grad} T) = f(x, y, z) \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.2)$$

cette équation soit être complétée par des conditions aux limites sur le bord de  $\Omega$ , et une condition initiale, le problème direct est de déterminer  $T$  connaissant les coefficients physiques  $\rho, c$  et  $K$ , et bien sûr, la source de chaleur  $f$ , plusieurs problèmes inverses peuvent être posés :

- étant donné une mesure de la Température à un instant  $t_f > 0$ , déterminer la température initiale .
- étant donné une mesure de la température, déterminer certains coefficients de l'équation.

### Exemple 5(Problème inverse en Hydrologie)

Un milieu poreux est constitué d'une matrice rocheuse comportant des pores qui peuvent laisser passer l'eau, il est essentiellement impossible de décrire l'écoulement d'un fluide dans un tel milieu hétérogène, on utilise alors des modèles physiques simplifiés, le plus connue étant la loi de **DARCY**, qui relie la hauteur  $h(x, y, z, t)$  de l'eau dans le milieu appelée : charge *piezométrique* à la vitesse de filtration  $\vec{q}(x, y, z, t)$  par la relation :

$$\vec{q} = -K \mathbf{grad}(h) \quad (2.3)$$

où :  $K$  est le coefficient de conductivité hydrologique. On exprime également la conservation de la masse par :

$$S \frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{div}(\vec{q}) = f, \quad (2.4)$$

où :  $S$  est le coefficient d'emmagasinement spécifique et  $f$  est une source, d'où on obtient :

$$S \frac{\partial h}{\partial t} - \text{div}(K \text{grad}(h)) = f \quad (2.5)$$

à laquelle on ajoute des conditions aux limites et initiales.

Les problèmes de transport de contaminant font intervenir en plus de l'écoulement, la façon dont évolue la concentration d'une espèce portée par l'écoulement, Ce phénomène met en jeu trois mécanismes : la convection, la diffusion moléculaire et la dispersion cinématique, on s'intéresse à la convection, la quantité étudiée est la concentration  $C(x, y, z, t)$  du polluant, qui obéit à l'équation de type **Convection-diffusion** :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{\xi} \text{div}(C \vec{q}) - \text{div}(D \text{grad}C) = f_c, \quad (2.6)$$

où :

- $\xi$  porosité cinématique,
- $D$  tenseur de diffusion,
- $f_c$  source de polluant.

Le problème direct est constitué par les équations (2.5) et (2.6), on pratique, on résout (2.5) puis on résout (2.6),  $\vec{q}$  étant connue. Le problème inverse est alors, de chercher la conductivité hydrologique connaissant un nombre de mesures discrètes de la concentration.

### Exemple 6 (Imagerie médicale)

On présente dans cet exemple la technique utilisée pour les Scanners, où un tube à rayon  $\mathbf{X}$  est monté sur un portique qui entoure le patient, les rayons émis sont mesurés par des détecteurs placés en face des émetteurs, nous considérons la situation bidimensionnelles, sous certaines hypothèses, et après modélisation, on obtient l'équation différentielle :

$$-\ln \left( \frac{I_l}{I_0} \right) = \int_R f(s\mu + t\hat{\mu}) dt \quad (2.7)$$

où  $I_l$  et  $I_0$  sont les intensités à l'émetteur et au récepteur en dehors de l'objet,  $f$  est le coefficient d'atténuation et  $u$  est le vecteur normal à la droite suivie par le rayon  $\mathbf{X}$ , tandis

que  $\hat{u}$  est un vecteur unitaire orthogonal à  $u$ . Le problème direct consiste à déterminer l'intensité mesurée au récepteur, connaissant celle qui est envoyée par l'émetteur, et la fonction d'atténuation  $f$ . Le problème inverse est de déterminer la fonction  $f$  connaissant les deux intensités  $I_l$  et  $I_0$ .

## 2.2 Problèmes bien et mal posés

### 2.2.1 Concepts du problèmes bien et mal posés

La résolution des problèmes inverses est une problématique qui reste encore aujourd'hui très complexe, cette complexité provient du caractère *mal posé* des problèmes inverses, en effet, contrairement aux problèmes directs, qui sont souvent bien posé, où les même causes produisent les mêmes effets, pour les problèmes inverses, les mêmes effets puissent provenir de causes différentes, nous définissons plus précisément dans ce qui suit, c'est quoi un problème bien posé et un problème mal posé :

### 2.2.2 Définition d'un problèmes bien Posé

Généralement, la formulation mathématique d'un problème est sous la forme :

$$Ax = y \quad (2.8)$$

où :

- $x$  est l'inconnue,
- $y$  est la donnée (généralement des mesures expérimentales),
- $A$  est un opérateur d'un espace Banach  $X$  vers un espace de Banach  $Y$ .

Selon **Hadamard**<sup>1</sup>, le problème (2.8) est bien posé si :

1. Pour chaque  $y$  dans  $Y$ , il existe  $x$  dans  $X$  solution de (2.8).
2. La solution de (2.8) est unique,
3. La solution de (2.8) est stable vis à vis des perturbation,

---

1. Nous verons plus loin, d'autres définitions pour qu'un problème inverse soit bien posé.

ce qui équivalent à dire, le problème (2.8) est bien posé si :

1.  $A$  est surjective,
2.  $A$  est injective,
3.  $A^{-1}$  l'inverse de  $A$  est continu sur  $Y^2$ .

Par, opposition, un problème est dit mal posé lorsque l'une (où plusieurs) des conditions de Hadamard n'est pas respectée .

En pratique, lorsque on est en présence d'un problème mal posé, deux conditions citées ci-dessus peuvent être particulièrement problématiques, tout d'abord, l'absence de stabilité de la solution, peut engendrer une des importantes erreurs dans la résolution, en effet, pour une résolution numérique, si la solution ne dépend pas continûment des données du problème, alors cela signifie qu'une faible variation de ces données peut engendrer une importante variation sur la solution, quand à la non unicité de la solution, elle constitue également un problème sérieux, en effet, lorsque plusieurs solutions sont possibles, il devient nécessaire de trouver un moyen de choisir la meilleur, c'est à dire la plus exacte de point de vue physique.

### 2.2.3 Exemples de problèmes mal posés

Dans cette section nous présentons quelques problèmes inverses mal posés, et nous indiquons laquelle des conditions de Hadamard n'est pas vérifiée :

#### Exemple 1 ( Problème du Potentiel )

Supposons un corps  $D \subset \mathbb{R}^3$  avec une densité  $\rho(x)$  où  $x \in \mathbb{R}^3$ , ce corps génère un potentiel :

$$u(x) = \int_D \frac{\rho(y)}{4\pi |x - y|} dy, \quad (2.9)$$

on considère le problème inverse suivant :

" trouver la densité  $\rho(x)$ , étant donné le potentiel  $u(x)$  pour  $x \in B'_R = \{x, |x| \geq R\}$  loin de  $D$ ."

---

2. Le choix des espaces de départ et d'arrivée  $X$  et  $Y$  est très important dans cette définition.

Sachant qu'une masse ponctuelle  $m$  et une masse  $m$  uniformément distribuée dans une boule de rayon  $a$  génèrent le même potentiel  $u(x) = \frac{m}{|x|}$ , donc il n'est pas possible de déterminer d'une manière unique  $\rho(x)$  en mesurant  $u(x)$ , ce problème est donc mal posé, car la deuxième conditions de Hadamard n'est pas vérifiée.

**Exemple 2 ( Problème de dérivation )**

Considérons l'espace de Hilbert  $L^2(\Omega)$ , et l'opérateur intégral  $A$  définie par :

$$Af(x) = \int_0^x f(t)dt \tag{2.10}$$

il est facile de voir que cet opérateur est injectif et que  $A \in \mathcal{L}(L^2(0, 1))$ , par contre son image est le sous espace vectoriel

$$\mathbf{R}(A) = \{u \in H^1(0, 1), u(0) = 0\}.$$

où  $H^1(0, 1)$  est l'espace de sobolev, en effct, l'équation :

$$Af = g$$

est équivalente à :

$$f(x) = g'(x) \text{ et } g(0) = 0$$

L'image de  $A$  n'est pas fermée dans  $L^2(0, 1)$ , en conséquence, l'inverse de  $A$  n'est pas continu sur  $L^2(0, 1)$ . comme le montre l'exemple suivant :

considérons une fonction  $f \in C^1([0, 1])$ , et  $n \in \mathbb{N}$ , soit :

$$f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n} \sin(n^2x)$$

alors

$$f'_n(x) = f'(x) + n \cos(n^2x)$$

d'ou :

$$\| f - f_n \|_2 = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4n} \sin(2n^2) \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$$



mais :

$$\|f - f_n\|_2 = n \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \sin(2n^2) \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow +\infty$$

donc, la différence entre  $f'$  et  $f'_n$  peut être arbitrairement grande, alors que la différence entre  $f$  et  $f_n$  est arbitrairement petite.

### Exemple 3 ( Détermination d'une pararmètre )

On considère le problème elliptique en une dimension :

$$\begin{cases} -(a(x)u'(x))' = f(x), \\ u(-1) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

Dans cet exemple, nous prenons  $a(x) = x^2 + 1$ , et la solution  $u(x) = \frac{1-x^2}{2}$ , ce qui donne  $f(x) = 3x^2 + 1$ . Le problème direct consiste à calculer  $u$ , étant donné  $a$  et  $f$ . Pour le problème inverse, nous considérerons que  $f$  est connue, et nous chercherons à retrouver le coefficient  $a$  à partir d'une mesure de  $u$ . Pour cet exemple, volontairement simplifié, nous supposons que l'on mesure  $u$  en tout point de l'intervalle  $] -1, 1[$ , ce qui est bien évidemment irréaliste. Nous allons voir que même dans cette situation optimiste, nous sommes susceptibles de rencontrer des difficultés. En intégrant l'équation (2.11), et en divisant par  $u_0$ , nous obtenons l'expression suivante pour  $a$  (en supposant que  $u_0$  ne s'annule pas, ce qui est faux sur notre exemple) :

$$a(x) = \frac{C}{u'(x)} + \frac{1}{u'(x)} \int_0^x f(t) dt \quad (2.12)$$

ce qui donne, dans notre cas particulier :

$$a(x) = \frac{C}{x} + x^2 + 1 \text{ pour } x \neq 0$$

où  $C$  est une constante d'intégration. Nous voyons que, même dans ce cas particulier,  $a$  n'est pas déterminée par les données, c-à-d  $u$ . Bien entendu dans ce cas, il est clair que la bonne solution correspond à  $C = 0$ , puisque c'est la seule valeur pour laquelle  $a$  est bornée. Pour pouvoir discriminer parmi les différentes solutions possibles, nous avons du faire appel à une information supplémentaire (on parle généralement d'une information à

priori). Il y a dans ce problème deux sources d'instabilité : tout d'abord l'équation (2.12) fait intervenir  $u'$ , et nous venons de voir que le passage de  $u$  à  $u'$  est source d'instabilité. Il s'agit là d'un phénomène commun aux problèmes linéaires et non-linéaires. Par contre, la division par  $u'$  montre une instabilité spécifique des problèmes non-linéaires. Si  $u'$  s'annule, la division est impossible. Si  $u'$  est simplement petite, la division sera cause d'instabilité.

---

## SOLUTION D'UN PROBLÈME INVERSE MAL POSÉ

---

En générale un problème inverse est mal posé et la solution directe :

$$x = A^{-1}y$$

d'un problème inverse de la forme :

$$Ax = y \tag{3.1}$$

peut produire une absurdité, donc le problème doit être reformuler d'une manière où il devient bien posé pour avoir une solution stable, cette dernière ne sera qu'une approximation de celle exacte. Le terme *Régularisation* regroupe l'ensemble des techniques mathématiques qui permet de transformer un problème inverse mal posé en un autre bien posé, et obtenir une solution dépend continûment des données.

Sachant qu'un problème inverse mal posé dépend du triplet  $\{A, X, Y\}$ , on entend par résoudre un problème mal posé, portée les modification sur ce triplet pour rendre le problème (3.1) bien posé.

Dans ce chapitre, nous allons détailler l'aspect théorique de quelques méthodes qui permet de résoudre un problème inverse mal posé, en définissant des nouvelles notion d'inversion et de solution, de façon que la solution obtenue, dépend continûment des données et soit proche, dans un sens, de la solution exacte :

### 3.1 Théorème de Tikhonov

Soit  $A : X \rightarrow Y$  un opérateur linéaire continu et injectif d'un espace métrique  $X$  dans un espace métrique  $Y$ , l'inverse de  $A$  existe, mais n'est pas forcément continue partout dans  $Y$ , donc le problème est mal posé, car la solution ne dépend pas continûment des données, pour le rendre bien posé, on va restreindre le domaine de  $A^{-1}$  sur une partie de  $Y$ , pour cela, nous considérons  $\widehat{X} \subset X$ , un sous espace de  $X$  et on définit le sous-espace  $\widehat{Y}$  de  $Y$ , par :

$$\widehat{Y} = \{y \in Y, Ax = y, \forall x \in \widehat{X}\},$$

c-à-d :  $\widehat{Y}$  est l'image de  $\widehat{X}$  par  $A$ , on suppose que la solution exacte  $x_e$  du problème (3.1) appartient à  $\widehat{X}$ , nous verrons que dans le cas où le sous espace  $\widehat{X}$  est compact, alors, l'inverse  $A^{-1}$  sera continu sur  $\widehat{Y}$ , et par la suite, la solution obtenue sera stable :

**Théorème 3.1.1 (Tikhonov)** Soit  $A$  un opérateur linéaire, continu et injectif d'un espace métrique  $X$  vers un espace métrique  $Y$ , soit  $\widehat{X} \subset X$  et  $\widehat{Y} = \{y \in Y, Ax = y, \forall x \in \widehat{X}\}$ , si  $\widehat{X}$  est compact, alors l'inverse :  $A^{-1} : \widehat{X} \rightarrow \widehat{Y}$  est continu sur  $\widehat{Y}$ .

Du théorème de Tikhonov, découlent deux corollaires importants :

**Proposition 3.1.1** Soit  $y_e \in \widehat{Y}$  la mesure exacte qui correspond à la solution exacte  $x_e$ . si  $x_e \in \widehat{X}$  alors :  $A^{-1}y_e = x_e$

**Proposition 3.1.2** Soit  $\{y_n\}_{n \geq 1}$  une suite de mesures dans  $\widehat{Y}$  et on définit la suite  $\{x_n\}_{n \geq 1} = \{A^{-1}y_n\}_{n \geq 1}$  qui correspond à  $\{y_n\}_{n \geq 1}$  dans  $\widehat{X}$ , alors si  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \tilde{y}$  selon la norme de  $Y$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \tilde{x}$  selon la norme de  $X$  et de plus  $A\tilde{x} = \tilde{y}$ .

La proposition (3.1.1) assure l'unicité de la solution pour le problème (3.1), pendant que la proposition (3.1.2) montre que la solution est stable. En effet, nous supposons que, dans le problème (3.1), la donnée  $y$  est connue approximativement, posons  $y^\varepsilon = y_e + \varepsilon$  où  $\varepsilon$  représente le bruit sur la donnée, si on suppose que :  $y^\varepsilon \in \widehat{Y}$ , c-à-d que la donnée atteinte de bruit reste toujours dans le sous-espace  $\widehat{Y}$ , dans cette situation, l'inverse  $A^{-1}$

est continu et  $x^\varepsilon = A^{-1}y^\varepsilon$  est unique et dépend continûment de  $y^\varepsilon$ , autrement dit : si  $y^\varepsilon \rightarrow y_e$  alors  $x^\varepsilon \rightarrow x_e$ , donc le problème est bien posé, mais dans un nouvel sens, qui sera précisé par le théorème suivant :

**Théorème 3.1.2 (Lavrentiev)** *Le problème de résoudre l'équation mal posé :*

$$Ax = y, \quad x \in \widehat{X} \quad \text{et} \quad y \in \widehat{Y}$$

*est bien posé si :*

- (i) *Il est connu a priori qu'une solution  $f_e$  existe, et elle est dans  $\widehat{X}$ ,*
- (ii) *La solution est unique,*
- (iii) *Des petites variations sur la donnée  $y$ , ne la font pas sortir de l'espace  $\widehat{Y}$ .*

Le caractère *bien posé* selon Lavrentiev est dit : *conditionnel*, et si le sous espace  $\widehat{X}$  est différent de l'espace  $X$ , on dit qu'on a mis le problème dans une *classe de correction*. Dans ce sens, le caractère bien posé, selon Lavrentiev differt de la définition classique d'un problème bien posé de Hadamard en :

- (i) l'équation  $Af = g$  n'est pas considéré pour des mesures quelconque en  $Y$  tout entier.
- (ii) L'opérateur inverse  $A^{-1}$  n'est pas obligé d'être continue sur l'espace  $Y$  tout entier, mais uniquement sur l'image de l'espace de classe de correction.

Pour savoir comment peut-on appliquer ce résultat à un problème inverse mal posé nous proposons l'exemple suivant :

**Exemple 3.1.1** *Considérons le problème inverse mal posé suivant :*

$$Ax(s) = \int_0^1 k(s,t)x(t) = y(s)$$

*tel que :*

$$k(s,t) = \begin{cases} s(1-t)/T, & 0 \leq s \leq t \\ t(1-s)/T, & t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

*si on considère que l'opérateur  $A$  défini sur l'espace  $X = C[0,1]$ , on cherche à déterminer  $x(s)$ , étant connu  $y(s)$ .*

Si on se restreint au sous-espace  $\hat{X}$  compact dans  $X$ , qui est défini par :

$$\hat{X} = \{x \in X, \|x\|_1^2 = \|x\|_0^2 + \|x'\|_0^2 < C\}$$

où  $C$  est une constante positive donnée. Alors, le théorème de Tikhonov garantit que l'inverse de  $A$  est continu sur cette classe de correction.

### 3.2 Quasi-solution d'un problème inverse mal posé

On traite toujours le problème (3.1). où  $A : X \rightarrow Y$  est un opérateur linéaire continu et injectif d'un espace métrique  $X$  dans l'espace métrique  $Y$ , A cause des erreurs de mesure sur la donnée  $y$ , cette dernière peut ne pas appartenir à l'espace  $\hat{Y} = A\hat{X}$ , dans ce cas, le théorème de Tikhonov n'est pas applicable, ce qui nous oblige à approcher la solution exacte par une autre, qui lui sera plus proche, et dépendra continûment des données.

Cette nouvelle solution qui sera appelée : **Quasi-solution**, fera l'objet de la présente section :

**Définition 3.2.1** Un élément  $\hat{x} \in \hat{X}$  minimisant la fonctionnelle :  $\rho_Y(Ax, y)$  pour un  $y \in Y$  sur le sous-espace  $\hat{X}$  est dit Quasi-solution de l'équation

$$Ax = y,$$

autrement dit,  $\hat{x} \in \hat{X}$  est une Quasi-solution si et seulement si :

$$\rho_Y(A\hat{x}, y) = \inf_{x \in \hat{X}} \rho_Y(Ax, y)$$

#### 3.2.1 Existence et unicité d'une Quasi-solution

D'après la définition précédente, pour qu'une quasi-solution existe, il n'est pas nécessaire d'exiger, a priori, que la solution exacte soit dans  $\hat{X}$  et que les données soient prises dans  $\hat{Y}$ , car une quasi-solution pourrait exister pour une donnée  $\hat{y}$  quelconque dans  $Y$ , comme l'assure le prochain théorème qu'on abordera plus loin. Mais d'une autre part, une

quasi-solution, quand elle existe, elle n'est pas forcément unique. Notons par  $D$  l'ensemble des quasi-solutions, alors on doit disposer d'un moyen (des conditions supplémentaires) pour que la quasi-solution soit unique et dépende continûment du second membre de l'équation (3.1), ces conditions sont donné par le même théorème. Mais avant de l'évoquer, commençons d'abords par définir la projection d'un élément de  $Y$  dans l'un de ces sous-espaces :

**Définition 3.2.2** Soit  $y \in Y$  et  $Q$  un sousespace de l'espace  $Y$ , Un élemnt  $q \in Q$  est dit *projection* de l'élément  $y$  dans  $Q$  (on écrit  $q = Py$ ) si :

$$\rho_Y(q, y) = \rho_Y(y, Q)$$

avec :

$$\rho_Y(y, Q) = \inf_{z \in Q} \rho_Y(y, z).$$

**Théoreme 3.2.1** Si l'équation  $Ax = y$  a, au moins, une solution dans un compact  $\hat{X}$  et si la projection de chaque élément de  $Y$  dans  $\hat{Y} = A\hat{X}$  est unique. Alors le problème (3.1) a une solution unique, et cette solution dépend continûment de  $y$ .

Si les hypothèses de ce théorème sont vérifiées, alors le problème mal posé (3.1) devient bien posé dans le compact  $\hat{X}$ . Mais parmi ces hypothèses, on a l'unicité de la projection, la question qui ce pose donc, c'est dans quelle cas la projection d'un élément  $y \in Y$  dans  $\hat{Y} = A\hat{X}$  est unique?, Le théoreme suivant, nous propose une condition suffisante pour que cette projection soit unique :

**Théoreme 3.2.2** Supposons que

(i)  $\hat{X}$  est convexe,

(ii) toute sphère dans l'espace  $Y$  est strictement convexe.

Alors : une quasi-solution de l'équation  $Ax = y$  dans le compact  $\hat{X}$  est unique et elle dépend continûment de la donnée  $y$ .

**Remarque :** Le faite de supposer que  $\hat{X}$  est convexe, assure, via la linéarité de  $A$ , la convexité de  $\hat{Y}$ , d'où on conclut l'unicité de la projection.

### 3.3 Inverse généralisé (Moore-Penrose)

Pour déterminer une Quasi-solution de l'équation :  $Ax = y$ , on a vu qu'on doit la chercher dans un compact  $\hat{X}$  inclu dans l'espace de départ  $X$ , pour ce qui suit, on va ommetre cette condition, et nous supposons de plus que l'espace image  $R(A)$ , ne couvre pas forcément l'espace de mesure  $Y$ , c-à-d : si  $y_e$  représente la donnée exacte, et  $y^\epsilon$  la donnée entachée par une erreur  $\epsilon$ , alors il se peut que :

$$y^\epsilon = y_e + \epsilon \notin R(A).$$

Dans telle situation, non pas seulement que la solution peut ne pas être unique, mais elle peut n'exister même pas, c'est la motivation d'introduire une nouvelle approximation pour la solution de l'équation  $Ax = y$ .

Dans cette section, nous désignerons par  $A$  un opérateur linéaire continu d'un espace de Hilbert  $H_1$  dans un espace de Hibert  $H_2$ , et étant donné  $y \in H_2$ , nous cherchons à déterminer  $x$  solution de (3.1) :

#### 3.3.1 Solution $LS$ et équation d'Euler

**Définition 3.3.1** Soit  $A : H_1 \rightarrow H_2$  un opérateur linéaire continu,  $y \in H_2$ ,  $\hat{x} \in H_1$  est dite solution  $LS$  (Least-squares) de l'équation (3.1) c'est elle vérifie :

$$\| A\hat{x} - y \| = \inf \{ \| Ax - y \|, x \in H_1 \}.$$

D'après la définition, et de point de vue géométrique, la solution  $LS$ , réalise la distance minimale entre le sous-espace  $R(A)$  et la mesure  $y$ .

Il est évident que, si  $y \in \mathbf{R}(A)$ , alors toute solution de (3.1) est une solution  $LS$ .

si  $y \notin \mathbf{R}(A)$ , alors la solution  $LS$  peut ne pas exister comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple 3.3.1** Soient  $X = C[a, b]$  menu de la norme  $\| \cdot \|_2$ ,  $Y = L^2[a, b]$ , et nous considérons l'opérateur identité  $I : X \rightarrow Y$ , si on prend  $y \in Y$  avec  $y \notin Y$ , et on utilise



la densité de  $X$  dans  $Y$ , alors :

$$\inf\{\|Ix - y\|, x \in X\} = \inf\{\|x - y\|, x \in X\} = 0$$

mais il n'existe aucun élément  $\hat{x} \in X$  tel que  $\|\hat{x} - y\| = 0$ .

Maintenant, nous donnons quelques conditions nécessaires pour l'existence d'une solution LS pour une donnée  $y$  quelconque dans  $Y$  :

**Théoreme 3.3.1** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces vectoriels normés, et un opérateur linéaire  $A : X \rightarrow Y$ , si l'une des conditions suivantes est vérifiées :

- (i)  $R(A)$  est de dimension finie, ou si
- (ii)  $Y$  est un espace de hilbert, et  $R(A)$  est un sous-espace fermé dans  $Y$ ,

Alors, une solution LS de (3.1) existe pour tout  $y \in Y$ .

Pour une classe importante de problèmes inverses, les deux conditions citées dans le théorème précédent, n'ont aucun chance d'être vérifiées. Ces conditions peuvent être relaxer, en prenant la donnée  $y$  dans un sous-espace approprié de  $Y$  :

**Théoreme 3.3.2** Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux espaces de Hilbert<sup>1</sup>, et un opérateur linéaire  $A : H_1 \rightarrow H_2$ , et  $P : H_2 \rightarrow H_1$  la projection orthogonale dans  $\overline{R(A)}$ . Pour tout  $y \in Y$ , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) l'équation (3.1) admet une solution LS.
- (ii)  $y \in R(A) \oplus R(A)^\perp$ .
- (iii) l'équation  $Ax = Py$  admet une solution.

**Remarque :** Elargir l'existence d'une solution (au sens approximatif) à une classe de mesures  $y$  en dehors de  $R(A)$ , de sorte qu'elle couvre le sous-espace :

$$R(A) \oplus R(A)^\perp$$

est très satisfaisant comme résultat, vue que  $R(A) \oplus R(A)^\perp$  est "prèsque" l'espace  $H_2$  tout entier, car on a ce résultat :

1. Le résultat rest vrai si on remplace  $H_1$  par un espace vectoriel quelconque.

**Théoreme 3.3.5** Soit  $A : H_1 \rightarrow H_2$  un opérateur linéaire continu, et  $A^*$  son adjoint, alors :

$$N(A^*A) = N(A).$$

L'unicité de la solution  $LS$ , et liée, alors à l'injectivité de l'opérateur  $A$  comme on a vu dans la proposition (3.3.1).

Dans ce qui suit ; nous examinons le cas où  $A$  n'est pas injectif, c-à-d la solution  $LS$  existe mais n'est pas unique, donc le problème est toujours mal-posé et une nouvelle approximation est donc nécessaire :

### 3.3.2 Inverse généralisé $A_g$

$A$  est un opérateur linéaire continu d'un espace de Hilbert  $H_1$  dans un espace de Hilbert  $H_2$ , étant donné  $y \in H_2$ , nous cherchons toujours à déterminer  $x$  solution de l'équation (3.1), on a vu précédemment que si  $N(A)$  est non vide, alors la solution  $LS$  peut ne pas être unique, notons toujours par :  $S_y$  l'ensemble de toutes ces solutions, on a le résultat suivant :

**Théoreme 3.3.6** Si  $y \in R(A) \oplus R(A)^\perp$ , alors l'ensemble  $S_y$  est un convexe fermé non vide de  $H_1$ .

Donc, d'après ce théorème, il existe un unique  $x_g \in S_y$ , dans la norme est minimale, ce qui nous amène à proposer cette définition :

**Définition 3.3.2**  $x_g \in H_1$  est dite solution généralisée de (3.1) si :

$$\|x_g\| = \inf\{\|h\|, \text{ ou } h \text{ est une solution } LS \text{ de (3.1)}\}.$$

**Définition 3.3.3** On appelle l'opérateur  $A_g$  définie de  $D(A_g) = R(A) \oplus R(A)^\perp$  dans  $H_2$  et qui associe à chaque  $y \in D(A_g)$  l'unique solution généralisé  $x_g$ , l'inverse généralisé (Moore-Penrose Generalised inverse) de  $A$ .

Commençons par ce premier résultat concernant l'opérateur  $A_g$  :

**Théoreme 3.3.7**  $\forall y \in D(A_g)$  on a :  $x_e = A_g y \in N(A)^\perp$  autrement dit :

$$R(A_g) \subset N(A)^\perp.$$

Le théoreme suivant propose une nouvelle définition (équivalente bien sûr) pour l'inverse généralisé  $A_g$  :

**Théoreme 3.3.8** Si  $\tilde{A} \equiv A | N(A)^\perp$  représente la restriction de  $A$  sur  $N(A)^\perp$ , alors pour tout  $y \in D(A_g) = R(A) \oplus R(A)^\perp$ , on a :

$$A_g y = \tilde{A}^{-1} P y$$

où  $P y$  est la projection de  $y$  sur  $\overline{R(A)}$ .

Notons par  $Q$  et  $P$  les projections orthogonales sur  $N(A)$  et  $\overline{R(A)}$  respectivement, le théorème suivant regroupe quelques propriétés de l'opérateur  $A_g$  :

**Théoreme 3.3.9** l'opérateur généralisé  $A_g$  vérifie :

1.  $AA_g A = A$
2.  $A_g A A_g = A_g$
3.  $A_g A = I - Q$
4.  $AA_g = P |_{D(A_g)}$

**Remarque :** Nous voyons qu'à partir d'un opérateur  $A$  qui est même pas injectif, avec une image  $R(A)$  n'est pas nécessairement dense dans  $H_2$ , on a construit un inverse généralisé  $A_g$  de  $A$  et qui est de plus, défini sur sous-espace dense de  $H_2$ . La question qui se pose maintenant et quand à la continuité de  $A_g$ , c-à-d, la stabilité de la solution obtenue, en général  $A_g$  n'est pas continu, mais il est toujours fermé :

**Théoreme 3.3.10**  $A$  un opérateur linéaire continu d'un espace de Hilbert  $H_1$  dans un espace de Hilbert  $H_2$ , l'inverse généralisé  $A_g$  est un opérateur fermé, il est continu si et seulement si  $R(A)$  est fermée .

D'après le théorème précédent, le problème de la recherche d'une solution généralisée pour l'équation  $Ax = y$  n'est pas bien posé au sens de Hadamard que si  $R(A)$  est fermée, malheureusement une grande classe de problèmes inverses ne vérifie pas cette condition, prenant par exemple le cas où l'opérateur  $A$  est compact, et son image est de dimension infinie ( les équations intégrales à noyau non dégénéré ), on a vu dans la première partie que  $R(A)$  n'est pas fermé, d'où l'opérateur inverse généralisé  $A_g$  ne peut pas être continu, et des petites perturbations sur les données peuvent donc, créer une grande erreur sur la solution, c-à-d que l'inversion ici est toujours un problème mal posé, nous examinons cette situation sur un opérateur compact, mes à travers la **décomposition en valeurs singulières** :

### 3.3.3 Décomposition en valeurs singulières de $A_g$

Dans cette partie on suppose que  $A$  est un opérateur linéaire compact d'un espace de Hilbert  $H_1$  dans un espace de Hilbert  $H_2$ , on montre sans peine que  $A^*A$  et  $AA^*$  sont deux opérateurs auto-adjoints compacts dans  $H_1$  et  $H_1$  respectivement, les deux opérateurs sont positifs dans le sens  $(A^*Ax, x) \geq 0$  et  $(AA^*x, x) \geq 0$ , car, pour le premier on a  $(A^*Ax, x) = (Ax, Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0$  et pour le deuxième  $(AA^*x, x) = (A^*x, A^*x) = \|A^*x\|^2 \geq 0$ . donc leurs valeurs propres sont positifs, et de plus ils ont les mêmes valeurs propres strictement positifs, pour le prouver, supposons que  $x$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda > 0$  pour l'opérateur  $A^*A$ , alors :  $A^*Ax = \lambda x \neq 0$ , d'où  $Ax \neq 0$ , et  $AA^*(Ax) = A(A^*Ax) = A(\lambda x) = \lambda(Ax)$ , donc  $Ax$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$  pour l'opérateur  $AA^*$  et inversement, on obtient la même chose.

Dans le premier chapitre, on a vu que  $A^*A$  a au plus une infinité dénombrable de vecteurs propres orthonormaux :  $\{v_1, v_2, \dots\}$  qui correspondent aux valeurs propres non nulles :  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  et la famille  $\{v_1, v_2, \dots\}$  forme une base orthonormale de  $\overline{R(A^*A)}$  la fermeture de l'image de  $A^*A$ , et comme  $\overline{R(A^*A)} = N(A^*A)^\perp$ , on aura :

$$\overline{R(A^*A)} = N(A)^\perp$$

Posons  $\mu_j := \sqrt{\lambda_j}$  et  $u_j = \mu_j^{-1} Av_j$ , alors :

$$A^* u_j = \mu_j^{-1} A^* A v_j = \mu_j^{-1} \lambda_j v_j = \mu_j v_j \quad (3.3)$$

et

$$A v_j = \mu_j u_j \quad (3.4)$$

d'où :

$$A A^* u_j = \mu_j A v_j = \mu_j^2 v_j = \lambda_j u_j \quad (3.5)$$

ce qui implique que  $\{u_1, u_2, \dots\}$  forme une famille de vecteurs propres auto-orthogonaux de  $A A^*$ , cette famille est complète dans :  $\overline{\mathbf{R}(A A^*)} = \mathbf{N}(A A^*)^\perp = \mathbf{N}(A^*)^\perp$

**Définition 3.3.4** On appelle "valeurs singulières" de l'opérateur  $A$  les valeurs  $\mu_j$ , et "vecteurs singuliers" de  $A$  les vecteurs  $\{v_j, u_j\}$ , et "système singulier" de  $A$ , le système  $\{v_j, u_j; \mu_j\}$ .

Le sous-espace  $\mathbf{N}(A)$  est fermée dans  $H_1$ , donc tout élément de  $x \in H_1$  s'écrit :

$$x = m + n, \quad \text{avec : } m \in \mathbf{N}(A) \text{ et } n \in \mathbf{N}(A)^\perp$$

comme  $m$  est la projection de  $x$  sur  $\mathbf{N}(A)$ , on a  $m = \tilde{P}x$ , avec  $\tilde{P}$  est la projection orthogonale sur  $\mathbf{N}(A)$ , tandis que la famille  $\{v_j\}$  est complète dans  $\mathbf{N}(A)^\perp$  alors, on peut écrire :

$$x = \tilde{P}x + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j v_j \quad (3.6)$$

où :  $\alpha_j = (x, v_j)$ , d'où :

$$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j A v_j = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \mu_j u_j$$

**Définition 3.3.5** L'expression :

$$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j A v_j = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \mu_j u_j$$

est dite : *décomposition en valeurs singulières de l'opérateur  $A$ .*

Revenons maintenant à l'équation :

$$Ax = y$$

d'après le développement en valeurs singulières de  $Ax$ , et si  $x$  est une solution de (3.1), alors :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j A v_j = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \mu_j u_j = y$$

d'où :

$$(y, u_j) = \alpha_j \mu_j = \mu_j (x, v_j)$$

ce qui impose une restriction sur la mesure  $y$ , car d'une part  $u_j$  est une famille complète dans  $\mathbf{N}(A^*)^\perp = \overline{\mathbf{R}(A)}$  d'où  $y \in \overline{\mathbf{R}(A)}$  et d'autre part :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1} |(y, u_j)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 = \|x\|^2 - \|Px\|^2 \leq \|x\|^2 < \infty$$

inversement, si  $y \in \overline{\mathbf{R}(A)}$  et  $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1} |(y, u_j)|^2 < \infty$  alors tout élément  $x$  de la forme :

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(y, u_j)}{\mu_j} v_j + v$$

est une solution de l'équation, pour  $v$  quelconque dans  $\mathbf{N}(A)$ ; ce qui nous permet de conclure le théorème suivant :

**Théorème 3.3.11** *l'équation  $Ax = y$  admet une solution si et seulement si :*

i  $y \in \overline{\mathbf{R}(A)}$ ,

ii  $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1} |(y, u_j)|^2 < \infty$ .

Les deux conditions citées dans le théorème précédent sont dites : *les conditions d'existence de Picard*. sachant que  $A^*A$  a un nombre fini ou une infinité dénombrable de valeurs propres, et comme la famille  $u_j$  est complète dans  $\mathbf{N}(A^*)^\perp = \overline{\mathbf{R}(A)}$ , donc le premier cas se produit uniquement quand  $\overline{\mathbf{R}(A)}$  est de dimension finie, dans le deuxième cas (qui nous intéresse de plus), on doit avoir  $\lambda_j \rightarrow 0$  pour  $j \rightarrow \infty$ , donc si l'équation (3.1)

admet une solution, la deuxième condition doit être vérifiée, alors le terme  $|(y, u_j)|$  doit tendre vers 0 plus vite que  $u_j$ .

Toujours, puisque les données  $y$  peuvent ne pas appartenir à  $\mathbf{R}(A)$  et même à  $\overline{\mathbf{R}(A)}$ , donc on doit faire recours à l'opérateur inverse généralisé  $A_g$ . Utilisant le système singulier  $\{v_j, u_j; \mu_j\}$  de l'opérateur compact  $A$ , on donne, dans le théorème suivant, un développement pour l'opérateur inverse généralisée en une série :

**Théorème 3.3.12** Soit  $\{v_j, u_j; \mu_j\}$  un système singulier de l'opérateur compact  $A$ , on a :

$$(i) \ y \in D(A_g) = \mathbf{R}(A) \oplus \mathbf{R}(A)^\perp \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1} |(y, u_j)|^2 < \infty$$

(ii) pour  $y \in D(A_g)$ ,

$$A_g y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(y, u_j)}{\mu_j} v_j$$

La condition (i) est dite : **critère de Picard** pour l'existence d'une solution généralisée, et l'expression en (ii) est le développement en valeurs singulières de l'opérateur  $A_g$ .

**Remarque :** Si on pose  $x = A_g y$  alors :

$$Ax = A(A_g y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(y, u_j)}{\mu_j} Av_j = \sum_{j=1}^{\infty} (y, u_j) u_j = Py$$

donc pour déterminer la solution généralisée, on procède en deux étapes : on commence par remplacer  $y$  avec son projection  $Py$  sur  $\overline{\mathbf{R}(A)}$  ; puis en cherche l'unique  $x$  qui vérifie :  $Ax = Py$  ce qui est exactement ce que nous avons vu dans le Theoreme (3.3.2) , de plus le critère d'existence de Picard affirme qu'une solution généralisé du problème mal posé  $Ax = y$  existe si les coefficients( dits de Fourier généralisé )  $|(y, u_j)|$  décroissent plus vite que les valeurs  $\mu_j$ ,

Examinons maintenant la stabilité de cette solution, c-à-d la continuité de l'opérateur inverse généralisé  $A_g$ , dans le cas où  $\mathbf{R}(A)$  n'est pas de dimension finie, on a ce théorème :

**Théorème 3.3.13** Soit  $A$  un opérateur linéaire compact d'un espace de Hilbert  $H_1$  dans un espace de Hilbert  $H_2$ , si  $\mathbf{R}(A)$  est de dimension infini alors :

*l'opérateur  $A_g$  n'est pas borné*

Pour le voir, prenons :  $\|u_j\| = 1$ , alors :

$$\|A_g u_j\| = \frac{1}{\mu_j} \rightarrow \infty \text{ pour } j \rightarrow +\infty$$

Dans le but d'obtenir une approximation de la solution généralisée  $A_g y$  on peut faire une troncature à l'ordre  $n$  dans le *DVS* de l'opérateur  $A_g$ , c-à-d prendre la solution  $x_n$  définie par :

$$x_n = \sum_{j=1}^n \frac{(y, u_j)}{\mu_n} v_j,$$

cette solution converge bien vers  $A_g y$ , mais la question qui s'impose ici :

" à quel ordre  $n$  on doit s'arrêter ? "

supposons qu'on a une mesure  $y^\delta$  proche de la donnée exacte  $y$  telque

$$y^\delta \in D(A_g) \text{ et } \|y^\delta - y\| \leq \delta$$

on note par  $x_n^\delta$  la solution tronquée qui correspond à la mesure  $y^\delta$  nous allons estimer :  $\|x_n^\delta - x_n\|$ ; on a :

$$\begin{aligned} \|x_n^\delta - x_n\|^2 &= \left\| \sum_{j=1}^n \frac{(y^\delta - y, u_j)}{\mu_j} v_j \right\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{|(y^\delta - y, u_j)|^2}{\mu_j^2} \\ &\leq \frac{1}{\mu_n^2} \sum_{j=1}^n |(y^\delta - y, u_j)|^2 \\ &\leq \frac{\delta^2}{\mu_n^2}. \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \|x_n^\delta - A_g y\| &\leq \|x_n^\delta - x_n\| + \|x_n - A_g y\| \\ &\leq \|x_n - A_g y\| + \delta \mu_n^{-1}. \end{aligned}$$



cette estimation d'erreur illustre une propriété caractéristique pour les solutions des problèmes inverses mal posés ; pour un ordre de troncature  $n$ , l'erreur diminue avec le bruit sur la donnée  $\delta$ , mais si on fixe le niveau de bruit sur les données, l'erreur sur la solution tend vers l'infini quand  $n$  tend vers l'infini.

L'estimation :

$$\|x_n^\delta - A_g y\| \leq \|x_n - A_g y\| + \delta \mu_n^{-1} \quad (3.7)$$

montre que le choix de l'ordre  $n$  de troncature doit dépendre du bruit  $\delta$  sur les données, c-à-d  $n = n(\delta)$ , de sorte qu'on obtient :

$$\delta \mu_n^{-1} \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \delta \rightarrow 0.$$

il y'a ici deux exigences incompatibles en  $n$  ; il doit être grand pour que  $\|x_n - A_g y\|$  soit petite, mais non pas assez grand pour que  $\delta \mu_n^{-1}$  ne soit pas très grande. Dans la section suivante, on détermine explicitement une solution généralisée  $x_g$  pour un problème inverse mal posé, avec une étude de la stabilité de la solution :

### 3.3.4 Exemple de calcul de l'inverse généralisé $A_g$ pour un problème rétrograde (équation de la chaleur)

Dans cette partie, on va déterminer explicitement une solution généralisée  $x_g = A_g y$  pour un problème inverse mal-posé, et on termine par une discussion concernant sur la stabilité de cette solution :

Nous considérons l'équation de la chaleur en une dimension :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad x \in [0, \pi], \quad t \geq 0, \quad (3.8)$$

avec les conditions de Dirichlet au bord homogènes :

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.9)$$

nous supposons qu'on a une mesure exacte de la température à l'instant  $t = 1$ , qu'on va considérer comme finale, cette mesure est donnée par :

$$f(x) = u(x, 1), \quad x \in [0, \pi]. \quad (3.10)$$

de plus, nous supposons que la température est maintenue égale à "0" sur le bord, c-à-d :

$$f(0) = f(\pi) = 0; \quad (3.11)$$

notre but est de déterminer la température initiale :

$$v_0(x) = u(x, 0), \quad x \in [0, \pi]. \quad (3.12)$$

La famille  $\{\varphi_n(x)\}$  définie par :  $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx)$  est hortonormale et complète dans  $L^2[0, \pi]$ , ainsi,  $v_0 \in L^2[0, \pi]$  peut être développer comme suivant :

$$v_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \quad x \in [0, \pi] \text{ avec } c_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} v_0(\tau) \sin(n\tau) d\tau. \quad (3.13)$$

En utilisant la méthode de séparation des variables, pour le problème direct : (3.6), (3.7) et (3.10), on pose :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \varphi_n(x), \quad x \in [0, \pi], \quad t \geq 0. \quad (3.14)$$

Alors, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(t) \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \varphi_n''(x) \quad (3.15)$$

et comme  $\varphi_n''(x) = -n^2 \varphi_n(x)$  alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(t) \varphi_n(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n(t) \varphi_n(x) \quad (3.16)$$

sachant que le système  $\{\varphi_n\}$  est orthonormal, il vient de (3.14) que  $a_n$  estb solution du problème à valeurs initiales suivant :

$$\begin{cases} a'_n(t) = -n^2 a_n(t) & t \geq 0, \\ a_n(0) = c_n. \end{cases}$$

les donditions initiales proviennentt de (3.11) et (3.12), Pour tout :  $n \in \mathbb{N}^*$ , on obtient :

$$a_n(t) = c_n e^{-n^2 t},$$

De (3.12), on aura :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \varphi_n(x).$$

Et de (3.8), on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2} \varphi_n(x) \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^{\pi} v_0(\tau) \sin(n\tau) d\tau \right\} e^{-n^2} \sin(nx). \end{aligned}$$

Avec :

$$k(x, \tau) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} \sin(n\tau) \sin(nx),$$

on aura :

$$\int_0^{\pi} k(x, \tau) v_0(\tau) d\tau = f(x) \quad (3.17)$$

ainsi, le problème inverse est équivalent à résoudre l'équation de Fredholm de première espèce (3.15), notons qu'un système singulier pour l'opérateur intégral est donné par :

$$\left\{ e^{-n^2}; \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx) \right\}.$$

et comme ce système est complet dans dans  $L^2[0, \pi]$ , on aura :  $\mathbf{N}(A) = \mathbf{N}(A^*) = \{0\}$  et  $D(A_g) = \mathbf{R}(A)$  qui est dense dans  $L^2[0, \pi]$ . D'après le Théorème (3.3.12), le problème inverse (3.15) admet une solution généralisée si et seulement si :

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{2n^2} |f_n|^2 < \infty \quad (3.18)$$

est vérifiée, avec :  $f_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} f(\tau) \sin(n\tau) d\tau$  sont les coefficients classiques de Fourier de  $f$ , dans cette situation, la solution est donnée par :

$$v_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2} f_n \sin(nx). \quad (3.19)$$

(3.16) et (3.17) montrent à quel point, le problème inverse est mal posé : une solution existe pour une mesure  $f$  dans les coefficient de Fourier  $\{f_n\}$  décroient plus vite que

**Théorème 3.4.1** Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux espaces de Hilbert, et  $A$  un opérateur linéaire fermée de  $H_1$  dans  $H_2$ . la famille régularisante  $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$  de l'opérateur  $A$  est uniformément continue si et seulement si  $\mathbf{R}(A)$  est fermé dans  $H_2$ .

Comme conséquence du théorème précédent, on a :

**Proposition 3.4.1** Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux espaces de Hilbert, et  $A$  un opérateur linéaire fermée de  $H_1$  dans  $H_2$ . si  $\mathbf{R}(A)$  n'est pas fermée dans  $H_2$ , alors pour tout  $\delta > 0$  et pour tout  $y \in D(A_g)$ , il existe  $\tilde{y} \in H_2$  tel que :  $\|y - \tilde{y}\| \leq \delta$  et  $\{\|R_\alpha \tilde{y}\|\}$  est non-bornée.

Supposons que  $\tilde{y}$  est une donnée inexacte dans le voisinage de la donnée exacte  $y \in D(A_g)$ , la proposition précédente montre l'importance de choisir le **paramètre de régularisation**  $\alpha$  dépendant de  $\tilde{y}$  dans le sens :

$$R_\alpha \tilde{y} \rightarrow A_g y \quad \text{quand} \quad \|y - \tilde{y}\| \rightarrow 0.$$

### 3.4.2 Algorithme de régularisation

Supposons que  $\{R_\alpha\}$  est une famille régularisante pour l'opérateur  $A$ , soient  $y \in D(A_g)$  et  $\tilde{y} \in H_2$  tel que :

$$\|y - \tilde{y}\| \leq \delta$$

où  $\delta$  est le niveau de bruit sur la donnée exacte  $y$ , dans le cas où  $\mathbf{R}(A)$  est fermé, on a le résultat suivant :

**Théorème 3.4.2** Supposons que  $\mathbf{R}(A)$  est fermé. Alors pour tout  $y \in Y$ ,

$$\|A_g y - R_\alpha \tilde{y}\| \leq \|A_g y - R_\alpha y\| + c\delta$$

où  $c \geq \sup_{\alpha>0} \|R_\alpha\|$ . D'où, pour tout  $y \in Y$  ;

$$R_\alpha \tilde{y} \rightarrow A_g y \quad \text{quand} \quad \alpha \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0.$$

Maintenant, nous supposons que  $\mathbf{R}(A)$  n'est pas fermé, on a :

$$\|A_g y - R_\alpha \tilde{y}\| \leq \|A_g y - R_\alpha y\| + \|R_\alpha\| \delta. \quad (3.20)$$

Le second terme de droite de l'équation (3.20), représente la majoration de l'erreur due au niveau de bruit  $\delta$ . Par la proposition (3.4.1) nous avons vu qu'on peut avoir  $\|R_\alpha\| \rightarrow \infty$  quand  $\alpha \rightarrow 0$  il ne faut donc pas choisir  $\alpha$  trop petit sinon l'erreur peut devenir très grande. par contre le premier terme de droite de l'équation (3.20) tend vers 0 quand  $\alpha$  tend vers 0 par définition de  $R_\alpha$ . Nous allons faire tendre le niveau de bruit  $\delta$  vers 0 et nous allons choisir une stratégie de régularisation  $\alpha := \alpha(\delta)$  de manière à ne pas commettre une trop grande erreur sur la vraie solution  $A_g y$ .

La donnée d'une famille régularisante  $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$  avec un choix d'une stratégie de régularisation  $\alpha := \alpha(\delta)$ , s'appelle **algorithme de régularisation** si :

$$\alpha(\delta) \rightarrow 0 \text{ et } R_{\alpha(\delta)} \tilde{y} \rightarrow A_g y \text{ quand } \delta \rightarrow 0$$

Dans la prochaine section nous proposons une famille régularisante connue sous le nom : **Régularisation de Tikhonov**, suivie d'une discussion concernant quelques choix possibles de paramètre de régularisation :

### 3.4.3 Régularisation de Tikhonov

Dans la régularisation de Tikhonov, la solution régularisée :

$$x_\alpha y := R_\alpha y$$

pour  $y \in Y$ , est définie comme l'unique élément, qui minimise la **fonctionnelle de Tikhonov**  $F(x)$  définie par :

$$F(x) = \|Ax - y\|^2 + \alpha \|x\|^2, \quad x \in H_2.$$

L'existence et l'unicité de ce minimum, sont assurés par le théorème suivant :

**Théoreme 3.4.5** Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux espaces de Hilbert, et  $A$  un opérateur linéaire continu de  $H_1$  dans  $H_2$ ,  $y \in H_2$  et  $\alpha > 0$ . Alors la solution  $x_\alpha$  de l'équation (3.21) minimise la fonctionnelle  $F(x)$ .

Mais comme d'une part, le minimum de la fonctionnelle  $F(x)$  ( $A$  est considéré toujours continu) est unique, et d'une autre part la solution de l'équation (3.1) est unique aussi, donc on peut conclure par le théorème suivant :

**Théoreme 3.4.6** Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux espaces de Hilbert, et  $A$  un opérateur linéaire continu de  $H_1$  dans  $H_2$ , on a pour  $x \in H_1$  :

$$\|Ax - y\| + \alpha \|x\| = \inf_{u \in H_1} \{\|Au - y\|^2 + \alpha \|u\|^2\}$$

si et seulement si :

$$(A^*A + \alpha I)x = A^*y$$

De ce théorème, on peut redonner une définition équivalente pour la famille des opérateurs bornés  $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ , comme suivant :

pour tout  $\alpha > 0$  et  $y \in H_2$  on a :

$$R_\alpha y = (A^*A + \alpha I)^{-1} A^*y$$

d'où, pour tout  $y \in D(A_g)$  :

$$\begin{aligned} (A^*A + \alpha I)A_g y &= A^*A A_g y + \alpha A_g y \\ &= A^*y + \alpha A_g y \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} A_g y - R_\alpha y &= \alpha (A^*A + \alpha I)^{-1} A_g y \\ &= A_\alpha A_g y. \end{aligned}$$

avec :  $A_\alpha := \alpha(A^*A + \alpha I)^{-1}$ . D'après la relation (3.23) du théorème (3.4.4), pour tout  $x \in \mathbf{R}(A^*A)$  et  $z \in H_1$  tel que  $x = A^*Az$ , on a :

$$\begin{aligned} \|A_\alpha x\| &= \|A_\alpha A^*Az\| \\ &= \alpha \| (A^*A + \alpha I)^{-1} A^*Az \| \\ &= \alpha \| z \| . \end{aligned}$$

Donc, pour tout  $x \in \mathbf{R}(A^*A)$ ,  $\| \alpha(A^*A + \alpha I)^{-1}x \| \rightarrow 0$  quand  $\alpha \rightarrow 0$ , et sachant que :  $\mathbf{R}(A^*A)$  est dense dans  $\mathbf{N}(A)^\perp = \mathbf{R}(A_g)$ , alors, pour tout  $y \in D(A_g)$ , on a :

$$\| \alpha(A^*A + \alpha I)^{-1}A_y \| \rightarrow 0 \text{ quand } \alpha \rightarrow 0$$

qui est équivalent à dire que :

$$R_\alpha y \rightarrow A_g y \text{ quand } \alpha \rightarrow 0$$

pour tout  $y \in D(A_g)$ . donc les opérateurs  $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$  forment bien une famille régularisante de l'opérateur  $A$ .

Dans la suite, nous supposons que la donnée exacte  $y$  est perturbée par un bruit, c-à-d au lieu de résoudre l'équation (3.21) pour  $y \in D(A_g)$  on l'a résoud pour  $\tilde{y}$ , et au lieu d'obtenir la solution régularisée  $x_\alpha = R_\alpha y$ , on obtient la solution :  $\tilde{x}_\alpha = R_\alpha \tilde{y}$ , où  $\{R_\alpha\}_\alpha$  représente la famille régularisante de Tikhonov. nous savons que dans le cas où  $\mathbf{R}(A)$  n'est pas fermée, alors  $\{\|R_\alpha\|, \alpha > 0\}$  n'est pas bornée, donc si  $\tilde{y}$  est proche de  $y$ , rien n'assure que  $\tilde{x}_\alpha$  soit proche de  $x_\alpha$ . Comme avant, pour tout  $y \in D(A_g)$ , on utilise les notations :

$$x_g = A_g y \text{ et } x_\alpha = R_\alpha y.$$

Et pour  $\delta > 0$ , soit  $y^\delta \in H_2$  tel que :  $\|y - y^\delta\| \leq \delta$  et

$$x_\alpha^\delta = R_\alpha y^\delta$$

sachant que  $x_\alpha$  est solution de (3.21), alors :

$$\alpha x_\alpha = A^* y - A^* A x \in \mathbf{R}(A^*).$$

Mais  $\mathbf{R}(A^*) \subset \mathbf{N}(A)^\perp$ , par conséqnce :  $x_\alpha \in \mathbf{N}(A)^\perp$ , mais on a montrer que la famille  $\{v_j\}$  est base complète dans  $\mathbf{N}(A)^\perp$ , donc, on peut écrire :

$$x_\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} c_j v_j, \quad c_j = (x_\alpha, v_j).$$

Remplaçons ça dans (3.21), on obtient :

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j + \alpha) c_j v_j = A^* y,$$

d'où :

$$(\lambda_j + \alpha) c_j = (A^* y, v_j) = (y, A v_j) = \mu_j(y, u_j),$$

finalemnt, on obtient :

$$x_\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_j(y, u_j) v_j}{\lambda_j + \alpha}.$$

de même, on obtient :

$$x_\alpha^\delta = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_j(y^\delta, u_j) v_j}{\lambda_j + \alpha},$$

ce qui donne :

$$x_\alpha - x_\alpha^\delta = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_j}{\lambda_j + \alpha} (y - y^\delta, u_j) v_j,$$

Par passage à la norme, on obtient :

$$\|x_\alpha - x_\alpha^\delta\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j}{(\lambda_j + \alpha)^2} |(y - y^\delta, u_j)|^2 \leq \frac{1}{\alpha^2} \|y - y^\delta\|^2,$$

car :

$$\frac{\lambda_j}{(\lambda_j + \alpha)^2} = \frac{\lambda_j}{\lambda_j + \alpha} \cdot \frac{1}{\lambda_j + \alpha} \leq 1 \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}.$$

On aura donc cette estimation :

**Proposition 3.4.2** *Pour tout  $\alpha > 0$  et  $\delta > 0$ ,*

$$\|x_\alpha - x_\alpha^\delta\| \leq \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}.$$



Pour estimer l'erreur entre la solution régularisée perturbée  $x_\alpha^\delta$  et la solution généralisée, on procède comme suivant :

$$\begin{aligned} \|x_g - x_\alpha^\delta\| &= \|x_g - x_\alpha + x_\alpha - x_\alpha^\delta\| \\ &\leq \|x_g - x_\alpha\| + \|x_\alpha - x_\alpha^\delta\| \\ &\leq \|x_g - x_\alpha\| + \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}. \end{aligned}$$

Et terminons par le théorème suivant, qui propose une stratégie de régularisation :

**Théorème 3.4.7** *Si la stratégie de régularisation  $\alpha := \alpha(\delta)$  de sorte que :*

$$\alpha(\delta) \rightarrow 0 \text{ et } \frac{\delta}{\sqrt{\alpha(\delta)}} \rightarrow 0 \text{ quand } \delta \rightarrow 0,$$

alors :

$$\|x_g - x_\alpha^\delta\| \rightarrow 0 \text{ quand } \delta \rightarrow 0.$$

Appliquons une telle stratégie, on aura une approximation stable de la solution généralisée en utilisant la régularisation de Tikvonov, comme exemple d'une telle stratégie, on peut prendre  $\alpha(\delta) := c_0 \delta^{2(1-\nu)}$  où  $\nu \in ]0, 1[$  avec une constante  $c_0 > 0$ .

---

## Bibliographie

---

- [1] C.W.GROETSCH *Inverse Problems in the Mathematical Sciences*.Vieweg, WIESBADEN,1993 .
- [2] A.KIRSCH *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*,Number 120 in Applied Mathematical Sciences, Springer, NEW-YORK,1996
- [3] D.N.GHOSH ROY & L.S.COUCHEMAN *Inverse Problems and Inverse Scattering of Plane Waves*, Academic Press, CALIFORNIA,2001
- [4] L.P. LEBEDEV, I.I. VOROVICH & G.M.L. GLADWELL *Applications in Mechanics and Inverse Problems*, Kluwer Academic Publishers,NEW YORK, BOSTON, DORDRECHT, LONDON, MOSCOW,2002
- [5] H. W. ENGEL, M. HANKE, & A. NEUBAUER *Regularization of Inverse Problems*.Kluwer Academic Publishers, DORDRECHT, 1996.
- [6] M. THAMBAN NAIR *Linear Operator Equation, Approximation and Regularization*.World Scientific Publishing, Singapore, 2009.