

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université 8 mai 1945 Guelma  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie Mécanique



## **THESE**

Présentée par :

**DAGHBOUDJ Samir**

En vue de l'obtention du diplôme de

**Doctorat en Sciences**

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Construction Mécanique

**Etude Comparative des Approches Hyper et Hypo Elastiques Utilisées  
dans l'Etude du Comportement Mécanique des Renforts Tissés**

Soutenue le : **14/05/2015**

Devant le Jury :

Elwandi FATMI

Hamid SATHA

Nouredine OUELAA

Farid GHELDANE

Mohamed GUERIOUNE

Ahmed ROULI

Prof. Université de Guelma

Prof. Université de Guelma

Prof. Université de Guelma

Prof. Université d'Annaba

Prof. Université d'Annaba

M/C-A Université de Tébessa

Président

Rapporteur

Examineur

Examineur

Examineur

Examineur

**Année 2015**



## • Remerciements

Je tiens à remercier vivement Monsieur le Professeur Satha Hamid mon directeur de thèse, pour sa confiance, son aide précieuse et surtout la disponibilité qu'il m'a accordée.

Particulièrement Je remercie Monsieur le Professeur Philippe Boisse, qui m'a bien reçu dans le laboratoire LaMCoS de l'Insa de Lyon France pendant mes stages de courtes durées. Il m'a fourni un environnement de travail très agréable et surtout pour son aide précieuse.

Je suis très reconnaissant envers Professeur Emmanuelle Vidale Sallé, pour tout le temps qu'elle m'a consacré pour mener à terme ce travail.

Je remercie vivement Docteur Yamina Aimene pour son énorme aide et soutien, ses précieux conseils et sa patience lorsqu'elle m'a guidé dans mon travail.

Je remercie aussi Professeur Djamel Ouinas de l'université de Mostaghanem pour son aide et son soutien moral.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance au Professeur Elwandi Fatmi pour avoir bien voulu me faire l'honneur de présider mon jury de thèse et pour ses conseils précieux et son aide variée.

Je remercie également Messieurs : Professeur Nouredine Ouelaa, Professeur Farid Gheldane, Professeur Mohamed Guerioune et Docteur Ahmed Rouili qui ont accepté d'examiner ce travail et de faire partie de mon jury de thèse.

Enfin, je remercie tout le personnel technique et administratif du département de Génie Mécanique de l'Université de Guelma. Je remercie également tous ceux qui de loin ou de près ont contribué à l'aboutissement de ce travail.

Que toutes ces personnes trouvent ici ma profonde gratitude pour m'avoir fait bénéficier de leur confiance scientifique et technique.

# Résumé

La connaissance du comportement mécanique des renforts tissés est nécessaire dans de nombreuses applications en particulier pour la simulation des opérations de mise en forme. Le cisaillement est l'un des principaux modes de déformation des renforts tissés.

Ce travail est consacré à l'étude du comportement mécanique des tissus de renfort pour composites par deux modèles, hypo et hyper élastiques, à l'échelle macroscopique. Ces deux modèles sont implémentés dans le code de calcul Abaqus /Explicit par le biais de deux routines utilisateurs (Vumat), qui sont programmées en Fortran.

Pour valider ces deux modèles, des simulations numériques, par des tests élémentaires (traction unidirectionnelle, cisaillement simple et objectivité) sont conduites sur un tissu de renfort de type taffetas de verre. Une confrontation des résultats numériques obtenus par les deux modèles avec d'autres analytiques a montré que les deux modèles sont satisfaisants.

La connaissance du comportement en cisaillement des renforts tissés est indispensable dans de nombreuses applications. Dans ce contexte, les résultats d'un Bias extension test réalisé au laboratoire LaMCoS de l'Insa de Lyon sur un tissu de renfort type NCF de carbone (Non-Crimp-Fabrics) sont exploités pour effectuer une analyse numérique de ce test.

## **Mots-Clés :**

Composites, comportement mécanique, hypoélasticité, hyperélasticité

# Abstract

The knowledge of the mechanical behavior of woven fabrics is necessary in many applications, in particular, for the simulation of textile composite forming. However, in-plane shear behavior of textile performs is the most studied mechanical property, because this mode of deformation is necessary for forming on double curvature surfaces.

This work is dedicated to the study of the mechanical behavior of some woven composites reinforcement by two models, hypo and hyper elastic, at macroscopic scale. The two models are implemented in Abaqus/Explicit code through user materials routines (Vumat), which are programmed in Fortran.

For the validation, numerical simulations of the elementary tests are conducted. Obtained results with both models seem very satisfactory.

Bias extension tests have been conducted at LaMCoS laboratory of INSA Lyon, on reinforcing fabrics type carbon NCF (Non-Crimp-Fabrics), results are operated to perform a numerical analysis of this test.

## **Key words:**

Composites, mechanical behaviour, hypo elasticity, hyper elasticity

## ملخص

الهدف الأساسي من هذه العمل هو دراسة السلوك الميكانيكي للأنسجة المستعملة في صناعة المواد المركبة بواسطة نموذجين الأول (hyperélastique) و الثاني (hypoélastique) على المستوى الماكروسكوبي. استعملنا برنامج المحاكاة (Abaqus /Explicit) من أجل فحص دقة النموذجين و ذلك بإجراء مجموعة من الاختبارات الأساسية على عينة نسيج مصنوع من ألياف الزجاج فكانت النتائج مقبولة.

تعتبر معرفة السلوك الميكانيكي من نوع إجهاد القص أساسية لما لهذا الأخير من أهمية. من أجل ذلك قمنا بإجراء مجموعة من التجارب على مستوى مخبر LaMCoS بجامعة ليون الفرنسية على عينات نسيج مصنوعة من ألياف الكربون نوع (NCF) لمعرفة سلوكها الميكانيكي من نوع إجهاد القص.

قمنا باستغلال النتائج المتحصل عليها في برنامج محاكاة لهذا الاختبار باستعمال البرنامج (Abaqus /Explicit) فكانت النتائج جيدة.

## الكلمات المفتاحية

المواد المركبة - السلوك الميكانيكي - نموذج (hypoélastique) - نموذج (hyperélastique) - محاكاة رقمية.

# • Liste des figures

## Chapitre 1

Fig.1.1 Domaines d'application des matériaux composites : a) Défense b) Aérospatiale c) Aéronautique d) Industrie navale e) Industrie f) Sport	5
Fig.1.2 Constituant de base d'un composite	6
Fig.1.3 Organigramme des différents types de matrices	7
Fig.1.4 Les structures géométriques des renforts de composites	7
Fig. 1.5 Mats de verre	9
Fig.1.6 Différents formes de tissu tissus bidirectionnels pour des renforts surfaciques	10
Fig.1.7 Exemples de quelques tissus : a) tissu unidirectionnel b) renfort tricoté c) NCF	10
Fig.1.8 Tissu multidirectionnel	11
Fig.1.9 Exemples de mailles élémentaires de renforts tissés :(a) taffetas. (b) serge 2x2	11
Fig.1.10 Non glissement entre réseaux chaînes et de trames	13
Fig.1.11 Allongements d'un tissu dans la direction des mèches	14
Fig.1.12 Cisaillement d'un tissu	14
Fig.1.13 Direction de sollicitation en tension des fibres dans la direction $\alpha$	16
Fig.1.14 Dispositif d'un essai de traction bi-axiale	16
Fig.1.15 Phénomène de l'embuvage d'un tissu	17
Fig.1.16 Tension dans une mèche sollicitée en traction bi-axiale	17
Fig.1.17 Comportement en tension bi axiale pour un tissu sergé de Carbone	18
Fig.1.18 Comportement non linéaire en cisaillement plan du renfort tissé	19
Fig.1.19 Dispositif expérimental picture frame : a) réseau chaîne trame avant déformation b) réseau chaîne trame après déformation	20
Fig.1.20 Eprouvette montée sur le cadre de cisaillement avec talons d'aluminium	20
Fig. 1.21 Essai de cisaillement Bias test sur éprouvettes en NCF	22
Fig. 1.22 Etats initial et déformé d'une éprouvette	22
Fig. 1.23 Simulation d'un Bias extension test	23
Fig. 1.24 Géométrie de l'éprouvette du Bias test avant et après déformation	23
Fig. 1.25 Moulage par injection de résine liquide RTM	25
Fig. 1.26 Simulation d'une mise en forme d'un renfort tissé	26

## Chapitre 2

Fig. 2.1 Différentes échelles de description des renforts tissés	28
Fig. 2.2 Principe de la méthode de l'algorithme de filet	30
Fig. 2.3 Représentation à l'échelle mésoscopique d'une CER d'un renfort type NCF	32
Fig. 2.4 Modèle mésoscopique (CER) prélevé d'un tissu taffetas (47214 ddl)	33

Fig. 2.5 Modèle semi discret prélevé d'un tissu taffetas (216 ddl)	33
Fig. 2.6 Modèle élément fini utilisé dans l'approche semi-discrète	33
Fig. 2.7 Bases de Green-Naghdi tissés et matérielle	35

### Chapitre 3

Fig. 3.1 Configuration de référence et configuration déformée	42
Fig. 3.2 Transformation de vecteurs matériels	44
Fig. 3.3 Transformation d'un volume matériel	45
Fig. 3.4 Transport d'une surface $dS_0$ par le tenseur $\bar{\bar{F}}$	46
Fig. 3.5 Décomposition polaire	47
Fig. 3.6 Transport par le tenseur $\bar{\bar{F}}$ d'une surface $ds$	49
Fig. 3.7 Repère initial et tourné par la rotation polaire $\bar{\bar{Q}}$	52
Fig. 3.8 Bases de Green-Naghdi et matérielle avant et après transformation	53
Fig. 3.9 Schéma simplifié des différentes bases d'étude	53
Fig. 3.10 Déformation d'un matériau hyperélastique	57
Fig. 3.11 Exemples d'utilisation de matériaux hyperélastiques	59
Fig. 3.12 Directions fortes anisotropies dans un milieu anisotrope	61
Fig. 3.13 Orientation initiale et après déformation des mèches	64
Fig. 3.13 Influence de l'angle de cisaillement sur les tensions dans les mèches	69

### Chapitre 4

Fig. 4.1 Armure du tissu de renfort utilisé dans l'étude	76
Fig. 4.2 Taffetas de verre équilibré utilisé dans cette étude	76
Fig. 4.3 Courbe de référence (ULM)	77
Fig. 4.4 Courbe effort normalisé en fonction de l'angle de cisaillement en degré	77
Fig. 4.5 Courbe effort normalisé en fonction de l'angle de cisaillement en radian	78
Fig. 4.6 Courbe contrainte de cisaillement en fonction de l'angle de cisaillement en Radian	79
Fig. 4.7 Base locale de l'élément membrane M3D4R	82
Fig. 4.8 Base locale orientée de l'élément membrane M3D4R	82
Fig. 4.9 Conditions aux limites test de traction simple	83
Fig. 4.10 Allongement de l'élément soumis au test de traction simple ( $l=2.l_0$ )	83

Fig. 4.11 Evolution des contraintes de Cauchy numériques $\sigma_{11}$ , $\sigma_{22}$ , $\sigma_{12}$ dans la base de Green Naghdi (Test de traction simple)	87
Fig. 4.12 Conditions aux limites du test cisaillement simple	88
Fig. 4.13 Visualisation du champ de contraintes de l'élément soumis au test de cisaillement simple	89
Fig. 4.14 Evolution des composantes numériques des contraintes dans la direction 1 des fibres (Test de cisaillement simple)	91
Fig. 4.15 Evolution des composantes numériques des contraintes dans la direction 2 des fibres (Test de cisaillement simple)	92
Fig. 4.16 Evolution des composantes numériques des contraintes de Cauchy $\sigma_{11}$ , $\sigma_{22}$ , $\sigma_{12}$ dans la base de Green Naghdi (Test de cisaillement simple)	93
Fig. 4.17 Conditions aux limites test d'objectivité	94
Fig. 4.18 Visualisation du champ de contraintes de l'élément pendant le test d'objectivité	94
Fig. 4.19 Evolution des composantes numériques des contraintes de Cauchy $\sigma_{11}$ , $\sigma_{22}$ , $\sigma_{12}$ dans la base de Green Naghdi (Test d'objectivité)	97
Fig. 4.20 Les différentes bases de projection des tenseurs	98
Fig. 4.21 Composantes expérimentales $S_{11}$ et $S_{22}$ en fonction du de la déformation	100
Fig. 4.22 Composantes expérimentales $S_{11}$ et $S_{22}$ en fonction de l'élongation	101
Fig.4.23 Composantes $S_{11}$ et $S_{22}$ expérimentales et données par le modèle hyperélastique	103
Fig. 4.24 Courbe de référence (ULM)	104
Fig.4.25 Composantes expérimentales $S_{12}$ en fonction du cosinus de l'angle entre les mèches	104
Fig.4.26 Composantes $S_{12}$ expérimentales et données par le modèle hyper élastique	106
Fig. 4.27 Evolution des contraintes de Cauchy (Test de traction simple)	108
Fig. 4.28 Evolution des contraintes de Cauchy (Test du cisaillement simple)	109
Fig. 4.29 Evolution des contraintes de Cauchy (Test d'objectivité)	111
Fig. 4.30 Comparaison des contraintes de Cauchy des deux modèles hypo et hyperélastique obtenues sur le test de traction simple	112
Fig. 4.31 Comparaison des contraintes de Cauchy des deux modèles hypo et hyperélastique obtenues sur le test cisaillement simple	113
Fig. 4.32 Comparaison des contraintes de Cauchy des deux modèles hypo et hyperélastique obtenues sur le test d'objectivité	113

## Chapitre 5

Fig.5.1 Renfort NCF : a) multiplies b) mon-plie	116
Fig.5.2 Exemple d'utilisation d'un renfort NCF : a) Préforme b) pièce finie	116
Fig.5.3 Eprouvettes NCF1-1 et NCF2-2 utilisées dans les essais	117
Fig.5.4 Eprouvettes NCF1-2 et NCF2-1 utilisées dans les essais	117
Fig.5.5 Machine de traction utilisée pour des tests de Bias extension test à l'INSA de Lyon	119
Fig.5.6 Eprouvette du Bias extension test (avant et après déformation)	119
Fig.5.7 Schéma cinématique de l'éprouvette utilisée dans le bias test	120
Fig.5.8 Dispositif de maintien des éprouvettes NCF utilisées dans les essais	121
Fig.5.9 Courbes force-déplacement : NCF testés perpendiculairement aux petits stitches	122
Fig.5.10 Courbes force-déplacement : NCF testés parallèlement aux petits stitches	122
Fig.5.11 Courbes force-déplacement : NCF testés parallèlement et perpendiculairement aux petits stitches	123
Fig.5.12 Courbes force-angle de cisaillement : NCF testés perpendiculairement aux petits stitches	123
Fig.5.13 Courbes force-angle de cisaillement : NCF testés parallèlement aux petits stitches	124
Fig.5.14 Courbes force normalisée -angle de cisaillement NCF testés perpendiculairement aux petits stitches	127
Fig.5.15 Courbes force normalisée -angle de cisaillement NCF testés parallèlement aux petits stitches	127
Fig.5.16 Courbes contraintes de cisaillement -angle de cisaillement NCF testés perpendiculairement aux petits stitches	128
Fig.5.17 Courbes contraintes de cisaillement -angle de cisaillement NCF testés parallèlement aux petits stitches	128
Fig.5.18 Conditions aux limites sur l'éprouvette du Bias extension test	130
Fig.5.19 Répartition de l'angle de cisaillement dans l'éprouvette NCF <sub>11</sub> (Maillage 112 éléments)	130
Fig.5.20 Répartition de l'angle de cisaillement dans l'éprouvette NCF <sub>21</sub> (Maillage 112 éléments)	131
Fig.5.21 Répartition de l'angle de cisaillement dans l'éprouvette NCF <sub>22</sub>	131

(Maillage 112 éléments)	
Fig.5.22 Répartition de l'angle de cisaillement dans l'éprouvette NCF <sub>12</sub>	131
(Maillage 112 éléments)	
Fig.5.23 Comparaison des angles numériques et théoriques éprouvette NCF <sub>11</sub>	132
Fig.5.24 Comparaison des angles numériques et théoriques éprouvette NCF <sub>21</sub>	132
Fig.5.25 Comparaison des angles numériques et théoriques éprouvette NCF <sub>22</sub>	133
Fig.5.26 Comparaison des angles numériques et théoriques éprouvette NCF <sub>12</sub>	133
Fig.5.27 Courbes efforts déplacements numérique et expérimentale : NCF <sub>11</sub>	134
Fig.5.28 Courbes efforts déplacements numérique et expérimentale : NCF <sub>21</sub>	134
Fig.5.29 Courbes efforts déplacements numérique et expérimentale : NCF <sub>22</sub>	135
Fig.5.30 Courbes efforts déplacements numérique et expérimentale : NCF <sub>12</sub>	135
Fig.5.31 Les différentes densités de maillages étudiés	136
Fig.5.32 Courbes (NCF <sub>11</sub> ) : effort-déplacements numériques et expérimentales pour 4 maillages	137
Fig.5.33 Courbes (NCF <sub>21</sub> ) : effort-déplacements numériques et expérimentales pour 4 maillages	138
Fig.5.34 Courbes (NCF <sub>22</sub> ) : effort-déplacements numériques et expérimentales pour 4 maillages	138
Fig.5.35 Courbes (NCF <sub>12</sub> ) : effort-déplacements numériques et expérimentales pour 4 maillages	139

## • Liste des tableaux

### Chapitre 3

Tableau 3.1 : Expressions des invariants de tension et de cisaillement	63
--	----

### Chapitre 4

Tableau 4.1 Différents caractéristiques du tissu utilisé dans cette étude	76
Tableau 4.2 Paramètres de traction du modèle hyperélastique	103
Tableau 4.3 Paramètres de cisaillement du modèle hyperélastique	105
Tableau 4.4 Les variables d'état sollicitées à la sortie de la routine (modèle hyper élastique)	106
Tableau 4.5 Les variables d'état fournies par Abaqus (test traction simple)	107
Tableau 4.6 Les variables d'état fournies par Abaqus (test cisaillement simple)	109
Tableau 4.7 Les variables d'état fournies par Abaqus (test d'objectivité)	110

### Chapitre 5

Tableau 5.1 Différentes densités de maillage	136
--	-----

# • Sommaire

<b>Introduction générale</b>	1
<b>Chapitre 1 : Les matériaux composites et les renforts tissés</b>	
1.1 Introduction	4
1.2 Définition d'un composite	5
1.3 Constituants d'un composite	6
1.3.1 La matrice	6
1.3.2 Les renforts	7
1.3.3 Les fibres constituant les renforts	8
1.4 Les différentes architectures des renforts	8
1.4.1 Les mats	9
1.4.2 Les tissus bidirectionnels	9
1.4.3 Les tissus unidirectionnels (UD)	10
1.4.4 Les Non-Crimp-Fabrics (NCF)	10
1.4.5 Les renforts tricotés	10
1.4.6 Les multidirectionnels	11
1.5 Caractéristiques des renforts tissés	12
1.6 Comportement mécanique des renforts tissés	12
1.6.1 Modes de déformation des renforts	13
1.6.1.1 Non glissement chaîne et trame	13
1.6.1.2 Allongement dans la direction des mèches	13
1.6.1.3 Déformation de cisaillement dans le plan	14
1.6.1.4 Déformation de flexion	15
1.6.1.5 Déformation de compression	15
1.6.1.6 Compaction transverse	15
1.6.2 Comportement mécanique en traction bi-axiale	15
1.6.3 Comportement mécanique en flexion	18
1.6.4 Comportement mécanique en cisaillement	18
1.6.5 Essais de cisaillement	19

1.6.5.1 Essai de cadre (Picture Frame test)	19
1.6.5.2 Le Bias extension test	21
1.7 Formage des renforts à fibres continues	23
1.8 Mise en forme des composites	23
1.9 Procédé de mise en forme R.T.M	24
1.10 Avantages du procédé R.T.M	25
1.11 Simulation des procédés de mise en forme des renforts tissés	25
1.12 Conclusion	26

## **Chapitre 2 : Différents modèles utilisés pour l'étude du comportement mécanique des renforts tissés**

2.1 Introduction	27
2.2 Les différentes échelles de description des renforts tissés	27
2.2.1 Echelle microscopique	27
2.2.2 Echelle mésoscopique	27
2.2.3 Echelle macroscopique	28
2.3 Simulation de la mise en forme des renforts tissés	29
2.3.1 Méthodes géométriques	29
2.3.2 Méthodes mécaniques	31
2.3.2.1 Approche continue	31
2.3.2.2 Approche discrète	31
2.3.2.3 Approche semi-discrète	32
2.4 Modèles hypoélastiques utilisés dans l'étude du comportement mécanique des renforts tissés	33
2.5 Modèles hyperélastiques utilisés dans l'étude du comportement mécanique des renforts tissés	37
2.5.1 Hyperélasticité isotrope	38
2.5.2 Hyperélasticité anisotrope	39
2.8 Conclusion	39

## **Chapitre 3 : Modélisation en grandes transformations du comportement mécanique des renforts de composites**

3.1 Mécanique des milieux continus en grandes transformations	40
3.1.1 Définition d'un milieu continu	40
3.1.2 Mécanique des milieux continus	40
3.1.3 Cinématique d'un milieu continu	40

3.1.4	Notions de configurations	41
3.1.4.1	Description des grandes transformations	41
3.1.4.2	Eléments matériels	41
3.1.4.3	Configuration de référence et configuration actuelle	41
3.1.4.4	Description des mouvements	43
3.1.5	Définition des tenseurs de déformation	44
3.1.5.1	Transformation d'un volume	45
3.1.5.2	Transformation de surface	45
3.1.5.3	Décomposition polaire	46
3.1.5.4	Taux de déformation	47
3.1.6	Statique	47
3.2	Modèle hypoélastique	49
3.2.1	Hypoélasticité	49
3.2.2	Hypoélasticité pour le cas des renforts tissés	50
3.2.3	Suivie de la direction des fibres	50
3.2.4	Objectivité des lois de comportement	51
3.2.5	Principe de l'indifférence matérielle	51
3.2.6	Dérivée objective en rotation	51
3.2.7	Le modèle hypoélastique utilisé dans la modélisation des fibres matérielles	53
3.2.8	Détermination des contraintes des fibres matérielles	53
3.3	Modèle hyperélastique	57
3.3.1	Elasticité non linéaire	57
3.3.2	Principes de base	57
3.3.2.1	Elongation	57
3.3.2.2	Les invariants principaux	58
3.3.2.3	Hyperélasticité	58
3.3.2.4	Lois de comportements pour les matériaux hyperélastiques	59
3.3.3	Modèles hyperélastiques utilisés pour les renforts tissés	60
3.3.3.1	Modes de déformation des renforts tissés	60
3.3.3.2	Anisotropie des renforts tissés	60
3.3.3.3	Lois constitutives hyperélastiques pour le cas des renforts tissés	61
3.3.4	Modèle hyper élastique retenu	61
3.3.4.1	Formulation d'un potentiel pour la loi de comportement	61
3.3.4.2	Formulation de la loi de comportement hyper élastique avec les	63

invariants de type 1	
3.3.4.2.1 Les invariants de tension	63
3.3.4.2.2 Les invariants de cisaillement	64
3.3.4.2.3 Expression de la loi de comportement	64
3.3.4.2.4 Dérivées des invariants de tension	65
3.3.4.2.5 Dérivées des invariants de cisaillement	65
3.3.4.2.6 Tenseur de contraintes de Piola Kirchhoff 2	66
3.3.4.3 Formulation de la loi de comportement hyper élastique avec les invariants de type 2	67
3.3.4.3.1 Expression de la loi de comportement	67
3.3.4.3.2 Dérivées des élongations ( $\lambda_i$ )	67
3.3.4.3.3 Dérivées des cosinus de $\theta$	67
3.3.4.3.4 Tenseur de contraintes de Piola Kirchhoff 2	68
3.3.4.4 Expression du potentiel	69
3.3.4.4.1 Expression du potentiel d'énergie avec les invariants de type 1	70
3.3.4.4.2 Expression du potentiel d'énergie avec les invariants de type 2	71
3.3.4.4.3 Tenseur de contrainte de Piola Kirchhoff 2 avec les invariants de type 1	71
3.3.4.4.4 Tenseur de contrainte de Piola Kirchhoff 2 avec les invariants de type 2	71
3.3.4.5 Identification des paramètres du modèle hyperélastique potentiel	72
3.3.4.6 Procédure d'identification	74
3.4 Conclusion	74
<b>Chapitre 4 : Comparaison des deux modèles hypo et hyperélastique</b>	
4.1 Introduction	75
4.2 Renfort utilisé dans cette étude	75
4.3 Validation du modèle hypoélastique	79
4.3.1 Implémentation d'une routine utilisateur sous Abaqus	79
4.3.2 Vumat à deux directions de fibres	79
4.3.3 Principe de fonctionnement de l'algorithme de la Vumat	80
4.3.4 Tests de base utilisés dans la validation de l'algorithme du modèle Hypoélastique	81
4.3.4.1 Test de traction unidirectionnelle	83
4.3.4.1.1 Résultats analytiques du test de traction simple	84
4.3.4.1.2 Résultats de la simulation du test de traction simple	86
4.3.4.2 Test de cisaillement simple	88

4.3.4.2.1 Résultats analytiques du test cisaillement simple	89
4.3.2.2.2 Résultats de la simulation du test cisaillement simple	91
4.3.4.3 Test d'objectivité	93
4.3.4.3.1 Résultats analytiques du test d'objectivité	95
4.3.4.3.2 Résultats de la simulation du test d'objectivité	96
4.4 Validation du modèle hyperélastique	98
4.4.1 Implémentation d'une routine utilisateur sous Abaqus	98
4.4.2 Principe de fonctionnement de l'algorithme	99
4.4.3 Identification des paramètres du modèle hyperélastique	100
4.4.3.1 Interpolation de la traction	100
4.4.3.2 Interpolation du cisaillement	103
4.4.4 Tests de base pour la validation du modèle hyperélastique	106
4.4.4.1 Test de traction unidirectionnelle	107
4.4.4.2 Test de cisaillement simple	108
4.4.4.3 Test d'objectivité	110
4.4.4.3.1 Résultats de la simulation du test d'objectivité	108
4.5 Comparaison des deux modèles hypo et hyperélastique	112
4.5.1 Test de traction simple	112
4.5.2 Test de cisaillement simple	112
4.5.1 Test d'objectivité	113
4.6 Conclusion	114
<b>Chapitre 5 : Etudes expérimentale et numérique d'un essai de cisaillement Bias extension test: cas d'un NCF de Carbonne</b>	
5.1 Introduction	115
5.2 Les renforts de composite NCF	115
5.3 Principe de l'essai Bias extension test	118
5.4 Démarche expérimentale	120
5.4.1 Préparation des échantillons	120
5.4.2 Protocole expérimental	120
5.4.3 Résultats	121
5.4.4 Interprétation des résultats	124
5.4.4.1 Influence des petits stitches sur le comportement en cisaillement des NCF	124
5.4.4.2 Procédure de normalisation de la force de cisaillement et détermination du module de rigidité au cisaillement	125
5.5 Simulation de l'essai du Bias extension test	129
5.5.1 Analyse de la variation de l'angle de cisaillement	130
5.5.2 Analyse des déplacements	133
5.6 Conclusion	139
<b>Conclusion générale</b>	140
<b>Annexe A</b>	142
<b>Annexe B</b>	143

**Annexe C**  
**Annexe D**

145  
147

# **Introduction Générale**

## • Introduction générale

Au cours des deux dernières décennies, l'utilisation des matériaux composites a rapidement augmenté surtout dans le domaine de l'industrie aéronautique (les deux avions porteurs en cours de construction, l'Airbus A350 et le Boeing 787 sont composés de plus de 50 % en masse de composites), de l'automobile et du transport ; ce qui a conduit au développement et à l'élaboration de nouveaux matériaux composites avec la volonté d'allier les qualités techniques (haute résistance mécanique et thermique, capacité d'amortissement des vibrations, absence de corrosion ...) au besoin d'alléger et réduire la masse de ces matériaux [1].

Un composite est constitué de plusieurs matériaux non miscibles qui ont, dans la plus part des cas, une ossature appelée renfort composée elle-même de fibres dont le rôle est d'assurer la tenue mécanique et par une matrice de rigidité inférieure assurant la cohésion de l'ensemble. A l'opposé des matériaux classique, comme par exemple les métaux, dans la réalisation des composites, le matériau final et la géométrie de la pièce sont obtenus simultanément et les propriétés et les performances de la structure finale dépendent à la fois des constituants (fibres et matrice) et de la façon dont ils sont assemblés [2].

Les procédés de fabrication des composites sont généralement du type formage, ils sont souvent spécifiques et se basent sur l'absence de la matrice (ou sur son état non durcie comme pour le cas des renforts pré-imprégnés) pour permettre aux renforts les déformations nécessaires à leur mise en forme.

Les renforts tissés sont utilisés dans la fabrication des matériaux composites et spécialement dans le cas des pièces à doubles courbures qui nécessitent, à cause de leurs formes spécifiques, une déformation de cisaillement dans le plan du renfort. En conséquences, ces matériaux composites et leurs mécanismes particuliers qui s'appuient sur la mécanique des milieux fibreux, demandent des analyses expérimentales et des modèles spécifiques pour décrire et prédire leur comportement mécanique au cours de leur mise en forme et notamment le développement d'outils de simulation [3].

Vu la taille et la complexité des pièces composites fabriquées, les procédés basés sur des campagnes d'essais-erreurs deviennent très difficiles ; ce qui nous met dans l'obligation de faire recours à des simulations des procédés de mise en forme.

Des logiciels de simulation du drapage de ces renforts tissés secs (c'est-à-dire avant l'injection de la résine) à l'échelle macroscopique, sont nécessaires à l'étape du design des structures composites pour pouvoir déterminer les conditions de faisabilité de leur mise en forme et connaître la direction des fibres dans la pièce composite en service.

Beaucoup de travaux et d'efforts ont été consacrés pour la mise au point de ces logiciels qui peuvent être classés en deux grandes familles. Une première famille, purement géométrique, a été développée à partir d'algorithmes dits de filet. Une seconde famille qui se base sur la méthode des éléments finis prend en considération le comportement mécanique du renfort tissé pendant sa mise en forme. Pour cette seconde famille, il est nécessaire de connaître le comportement mécanique du renfort tissé sec pendant l'opération de drapage.

L'objectif du travail présenté dans ce manuscrit est l'étude, par deux modèles hyper et hypoélastique, du comportement mécanique des renforts tissés de composites à l'échelle macroscopique.

Ce travail est consacré à une étude comparative entre deux modèles utilisés dans l'étude du comportement mécanique des tissus de renfort pour composites. Le premier est un modèle hypo élastique basé sur des lois en taux. Le second est un modèle hyper élastique basé sur un potentiel d'énergie. La validation de ces deux modèles est réalisée par des essais de base sur des renforts de type taffetas de verre par des simulations numériques par le code de calcul Abaqus.

Des essais de cisaillement « Bias extension test » ont été réalisés au Laboratoire LaMCoS de l'INSA de Lyon sur des échantillons en tissu de Carbone Non Crimp Fabrics (NCF). Les résultats expérimentaux sont ensuite comparés à des résultats numériques obtenus suite à des simulations par le code de calcul Abaqus.

Ce manuscrit est organisé en cinq chapitres relativement indépendants.

Le chapitre 1 est consacré à une présentation générale des matériaux composites et des renforts tissés ainsi qu'à leurs différents modes de déformation et leurs procédés de mise en forme.

Dans le chapitre 2, nous présentons les différents modèles ainsi que les approches utilisées dans l'étude du comportement mécanique des renforts tissés.

Dans le chapitre 3, et après un bref rappel des concepts fondamentaux de la mécanique des milieux continus en grandes transformations, les deux modèles hypo élastique et hyperélastique seront présentés en détails.

Dans le quatrième chapitre, les deux modèles retenus dans cette étude sont implémentés par le biais de routines utilisateurs dans le code de calcul Abaqus/Explicit. Leur validation est faite par des essais de base sur un échantillon de tissu de renfort de type taffetas de verre.

Le cinquième et dernier chapitre a été réservé à une étude expérimentale d'un essai de cisaillement Bias extension test menée sur des échantillons de tissus de type NCF de Carbone. Une validation de cette étude a été réalisée par des simulations par implémentation du modèle hypoélastique dans le code de calcul Abaqus. Le travail a été clôturé par une conclusion générale.

# Chapitre 1

## **Les matériaux composites et les renforts tissés**

# Chapitre 1

## Les matériaux composites et les renforts tissés

### 1.1 Introduction

Les matériaux composites ont été utilisés, depuis longtemps, pour résoudre des problèmes technologiques. Ils ont commencé à attirer l'attention à partir des années 60, et cela depuis la découverte des composites à base de polymère ; ainsi les composites sont devenus les matériaux d'engineering les plus importants et les plus utilisés dans diverses applications (industrie automobile, articles de sports, aéronautique, industrie maritime etc..) (figure 1.1).

Parmi tous les matériaux, les composites ont le potentiel de remplacer l'acier et l'aluminium, largement utilisés dans l'industrie et peuvent ainsi épargner 60 à 80% du poids des composants. Les matériaux composites disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels ; ils apportent de nombreux avantages fonctionnels, légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite. Ils permettent aussi d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques. Ils contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu, offrent une meilleure isolation thermique et phonique et pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions.

Dans chacun des domaines d'application (automobile, bâtiment, électricité, équipements industriels,...), leurs performances remarquables sont à l'origine de solutions technologiques innovantes.

Parmi les composites, on distingue deux types :

1. **Les GD** (Les composites à grandes diffusions) qui représentent 95% des composites utilisés ; ce sont en général des plastiques armés ou renforcés, avec un taux de renfort avoisinant 30% pratiquement pour 90% des cas. Les principaux constituants de base sont les résines polyesters dont 95% sont des thermodurcissables avec des fibres de verre dans 99% des renforts utilisés. Malgré que les GD soient caractérisés par des propriétés mécaniques intéressantes, celles-ci restent inférieures à celles des métaux.
2. **Les HP** (Les composites à hautes performances) sont principalement utilisés dans le domaine de l'industrie aéronautique. Caractérisés par leur coût élevé, ces renforts sont plutôt

des fibres de carbone ou d'aramide (kevlar) longues. Ils sont généralement utilisés avec des résines époxydes avec un taux de renfort supérieur à 50%. Leurs propriétés mécaniques (résistance et rigidité) sont largement supérieures à celles des métaux et cela contrairement aux GD.



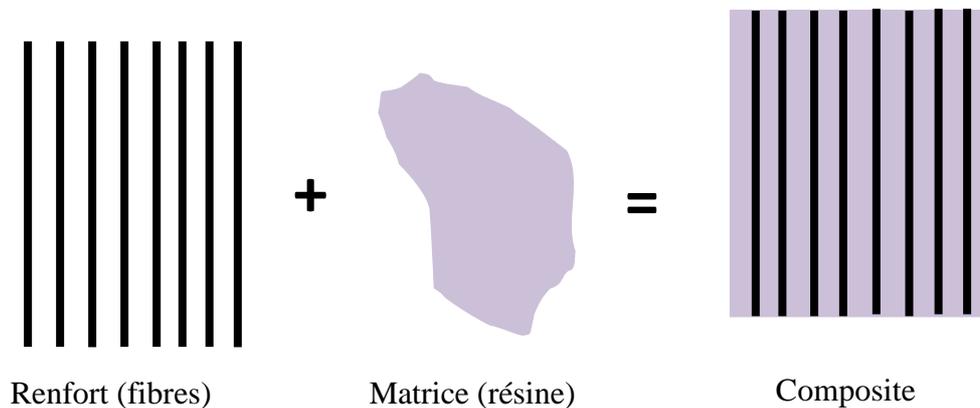
*Fig. 1.1 Domaines d'application des matériaux composites : a) Défense b) Aérospatiale c) Aéronautique d) Industrie navale e) Energie f) Sport*

## 1.2 Définition d'un composite

Un composite est un matériau en phase solide constitué d'au moins deux matériaux non miscibles, qui donnent un nouveau matériau de propriétés meilleures que celles des constituants considérés à parts [4], [5]. Ils ont dans la plus part des cas une ossature appelée renfort, composée elle-même de fibres dont le rôle est d'assurer la tenue mécanique et d'une matrice de rigidité inférieure assurant la cohésion et le transfert des actions à l'ensemble du matériau composite (figure 1.2).

Les matériaux composites offrent aux industriels et aux designers la possibilité de réaliser de nouveaux matériaux de plus en plus performants avec des propriétés parfois

contradictaires (faible poids avec une tenue mécanique et thermique élevée). A l'opposé des matériaux classiques, dans la réalisation des composites, le matériau final et la géométrie de la pièce sont obtenus simultanément. Les propriétés et performances de la structure finale dépendent à la fois des constituants (fibres et matrice) et de la façon dont ils sont mis en forme.



*Fig.1.2 Constituant de base d'un composite*

### 1.3 Constituants d'un composite

#### 1.3.1 La matrice

La matrice qui peut être organique ou minérale, a pour rôle de lier les fibres, répartir les contraintes subites, apporter la tenue chimique de la structure et donner la forme désirée au produit. On utilise actuellement surtout des résines thermodurcissables (TD) que l'on associe à des fibres longues, mais l'emploi de polymères thermoplastiques (TP) renforcés par fibres courtes se développe fortement (figure 1.3).

Les principales résines thermodurcissables sont les polyesters très largement utilisés, les résines époxy (ou époxydes) qui constituent la résine type pour les composites HP et les résines phénoliques. Les principales résines thermoplastiques utilisées dans les composites sont le polypropylène (PP), les polyamides (PA) et le polyéther-éther-cétone (PEEK).

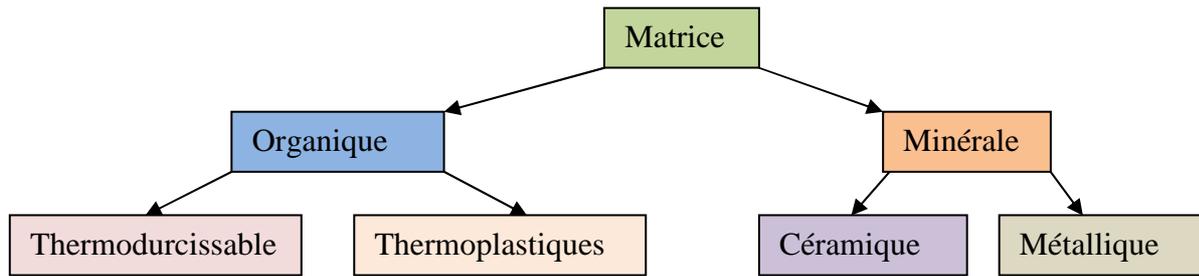


Fig.1.3 Organigramme des différents types de matrices

### 1.3.2 Les renforts

Les renforts ont pour rôle principal de supporter l'essentiel de l'effort mécanique appliqué au matériau et cela grâce à leurs caractéristiques mécaniques élevées (module et limite d'élasticité). Selon le cas d'utilisation et le domaine d'application, ils peuvent se présenter sous forme de fibres continues ou courtes (diamètres de 5 à 20  $\mu\text{m}$ ), ou bien de particules (nano fibres ou charges) (figure 1.4).

Grace à leurs d'excellentes caractéristiques mécaniques, les fibres sont actuellement les plus utilisées pour renforcer les composites. Elles sont de type organique (fibres en polyamide, polyester, polypropylène ...) et inorganique (fibres de verre, de carbone, ....) ou encore naturelles (cellulose de bois...).

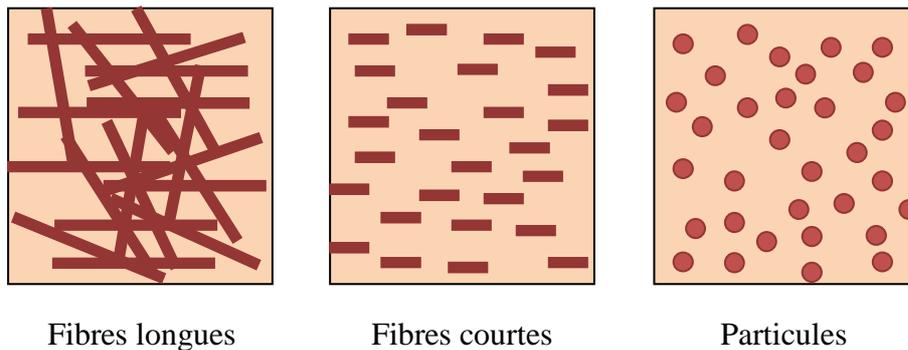


Fig. 1.4 Les structures géométriques des renforts de composites

La fonction principale des fibres dans un composite est de supporter les charges, en général de 70 à 90 % de l'effort appliqué et de confier à la structure sa rigidité, sa résistance mécanique et thermique.

### 1.3.3 Les fibres constituant les renforts

Une fibre textile est un solide à une dimension dont la structure cristalline est fortement orientée [4]. On définit une fibre par sa section moyenne dans la direction transversale. Elle est caractérisée par un diamètre moyen très faible, de l'ordre de 5 à 30  $\mu\text{m}$ , sa longueur totale peut varier de 2 cm à plusieurs kilomètres. Parmi les différents types de fibres utilisées comme renforts on peut citer :

- **Les fibres de verre**

Obtenues par extrusion du verre à travers une filière percée de trous de 1 à 2 mm de diamètre, puis étirées jusqu'à obtenir des diamètres de 5 à 15  $\mu\text{m}$ , enduites et bobinées (Roving). Il existe différentes types E, R et S selon la proportion des composants ( $\text{SiO}_2$ ,  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ,  $\text{B}_2\text{O}_3$ ,  $\text{CaO}$ ,  $\text{MgO}$ ). Les meilleures propriétés étant obtenues pour les plus fortes proportions de Silice (verre S, 65%).

- **Les fibres de carbone**

Elles sont fabriquées à partir de fibres de polymère préalablement tissées, et carbonisées sous tension en plusieurs étapes, oxydation (100 à 200  $^\circ\text{C}$ ) puis pyrolyse (1500- 2500  $^\circ\text{C}$ ). Selon la température et le temps de cuisson les fibres présentent une "haute résistance" (HR) ou un "haut module" (HM).

- **Les fibres de polymère**

Les plus connues sont les fibres de polyamides aromatiques, connues sous la marque commerciale de "Kevlar".

- **Les charges :**

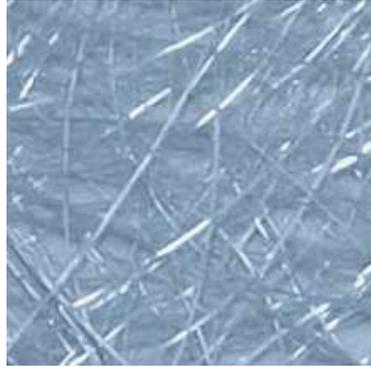
Les charges sont des particules solides que l'on disperse au sein de la matrice. Elles peuvent être minérales, organiques (végétales ou synthétiques) ou métalliques. L'ajout des ces charges à un polymère de base, permet de modifier de manière sensible ces propriétés mécaniques, électriques ou thermiques et permet aussi d'améliorer l'aspect de sa surface.

### 1.4 Les différentes architectures des renforts de composites

Les renforts sont assemblés dans le but de faciliter leur mise en forme. On peut distinguer cinq catégories de renforts : les mats, les tissus bidirectionnels, les tissus UD (unidirectionnels) et les NCF (Non Crimp Fabrics), les tricots et les tissus multidirectionnels.

### 1.4.1 Les mats

Ce sont des nappes de filaments composées de fibres courtes et discontinues, orientées aléatoirement et maintenues ensemble par un liant soluble, ce qui offre une propriété quasi isotrope au composite final [4]. Ce sont des matériaux déformables, peu couteux et souvent utilisés avec un taux volumique de fibres important (figure 1.5).



*Fig. 1.5 Mats de verre*

### 1.4.2 Les tissus bidirectionnels

Le tissu destiné au renfort de composites est une surface souple, constituée par un assemblage régulier de fils tissés ou torsadés, obtenue par entrecroisement des mèches selon deux directions perpendiculaires, chaîne et trame. Ils peuvent avoir différentes armures [6] et [7], on distingue principalement, la toile ou le taffetas, le sergé et le satin (figure 1.6).

- **Le taffetas**

Le fil de trame passe alternativement en dessus puis en dessous de chaque mèche de chaîne. Le produit obtenu est plat, relativement rigide, peu déformable et caractérisé par un embuvage important (figure 1.6 a).

- **Le sergé (nxm) :**

Le fil de trame passe au dessus de m fils de chaîne, chacun passant à son tour sur n fils de trame. Cette armure est à la fois souple et dense (figure 1.6 b).

- **Le satin de n :**

Chaque fil de trame flotte au dessus de (n-1) fils de chaîne. Ces tissus sont très souples, plats et déformables (figure 1.6 c).

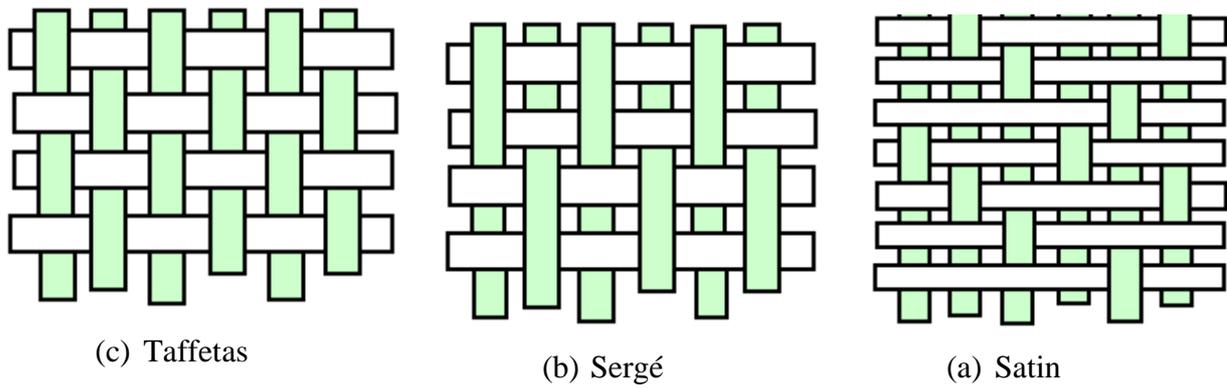


Fig.1.6. Différents formes de tissu tissus bidirectionnels pour des renforts surfaciques

### 1.4.3 Les tissus unidirectionnels (UD)

Ces tissus sont fabriqués à base de deux nappes de mèches superposées (figure 1.7 a).

### 1.4.4 Les Non Crimp Fabrics (NCF)

Ces tissus sont formés d'une nappe de fils de chaîne parallèles cousus par des fils de trame. Ils sont très utilisés en particulier dans les applications aéronautiques (figure 1.7 b).

### 1.4.5 Les renforts tricotés

Les renforts tricotés sont formés par bouclage d'un ou plusieurs fils et offrent de plus grandes possibilités de motifs que le tissage (figure 1.7 c). Une description détaillée de ce type de renfort est proposée dans [8], [9], [10]. Leur principale caractéristique est la très grande déformabilité qui leur confère une excellente formabilité ainsi qu'une très bonne perméabilité qui permet plus de facilité lors de l'injection de la résine. Les renforts tricotés présentent une forte ténacité ; ce qui offre une grande résistance aux chocs pour les composites renforcés d'un tricot [3].

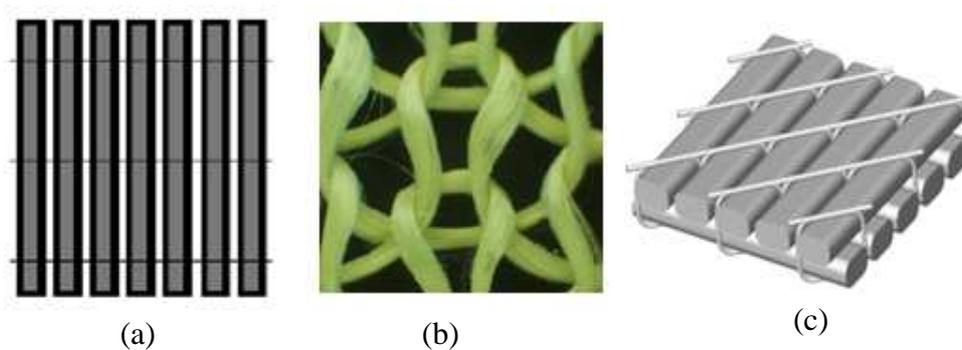


Fig.1.7 Exemples de quelques tissus : a) tissu unidirectionnel b) renfort tricoté c) NCF

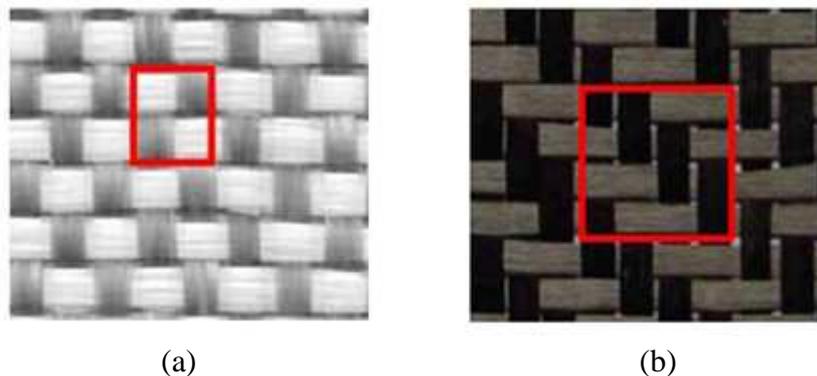
### 1.4.6 Les multidirectionnels

Ce sont des structures 3D formées de fibres orientées dans plusieurs directions de l'espace. Les multidirectionnels sont composés de plusieurs couches qui sont liées, ce qui rend très faible le risque de délaminage. Les composites renforcés par des tissus multidirectionnels sont caractérisés par une masse volumique faible tout en conservant parfaitement leur rigidité [3], [11]. Ils sont préférables pour des applications exigeant des hautes performances en particulier l'aérospatiale (figure 1.8).



*Fig.1.8 Tissu multidirectionnel*

Tous ces renforts sont constitués de la répétition d'un motif, appelé maille élémentaire. La connaissance de la géométrie de ce motif permet de reconstruire le tissu complet par périodicité [4] (figure 1.9).



*Fig.1.9 Exemples de mailles élémentaires de renforts tissés : (a) taffetas. (b) serge 2x2*

## 1.5 Caractéristiques des renforts tissés

Il existe dans la pratique une grande variété de tissus de renfort pour composites. On pourra ainsi construire des tissus mixtes en utilisant des matériaux différents dans les directions chaînes et trames, ou bien des tissus hybrides, en employant des fils de natures différentes dans la même direction.

On parle de tissu équilibré lorsque les fils de chaîne et de trame sont identiques ou très semblables et que le motif du tissage est symétrique [4]. Le comportement mécanique d'un tissu de renfort dépend fortement des mèches qui le constituent et de leurs armures. Les principales caractéristiques d'un tissu de renfort pour les matériaux composites sont :

- Pour le fil : sa nature, son type, son mode d'assemblage (avec ou sans torsion), le traitement de sa surface, sa ténacité, sa résistance à la rupture en traction, sa rigidité et sa masse linéique en tex (1tex = 1g/km).
- Pour le tissu : son armure, sa contexture (densité en fil/mm de tissu), son embuvage.

L'embuvage caractérise l'ondulation des mèches de chaîne (en%), il est défini par :

$$\text{Embuvage} = \frac{\text{longueur d'un fil} - \text{longueur du tissu dont il est extrait}}{\text{longueur du tissu}}$$

## 1.6 Comportement mécanique des renforts tissés

La connaissance du comportement mécanique des renforts tissés est d'une grande importance, du fait qu'elle permet de prédire la forme finale du renfort tissé soumis à différentes sollicitations mécaniques, lors de sa mise en forme sur le moule pour formage.

Il convient bien de connaître ce comportement par une démarche qui se base à la fois sur une approche expérimentale pour comprendre le comportement et le quantifier et sur un travail de modélisation.

Le comportement des renforts tissés a pour spécificité, la prédominance de la rigidité de tension sur toutes les autres formes de rigidité. Les mèches qui forment le renfort ont une rigidité à la traction très élevée dans l'axe des filaments due à l'addition des rigidités des fibres qui les constituent. Cependant, le comportement en cisaillement est une condition indispensable pour toute étude de mise en forme des renforts tissés, [2], [12], [13].

## 1.6.1 Modes de déformation des renforts

### 1.6.1.1 Non glissement chaîne et trame

Les essais de formage réalisés sur des tissus de renfort de composites ont montré que les réseaux chaînes et trames ne glissent pas relativement les uns sur les autres [2], [13], [14] [15].

Si on considère un tissu de renfort pour composite, ayant deux directions orthogonales avant déformation, on constate, qu'après l'opération de formage, ces deux directions deviennent courbes en conservant leur continuité ; ce qui implique que les fils superposés initialement le restent après déformation, et que le formage se fait sans glissement entre les mèches (figure 1.10).

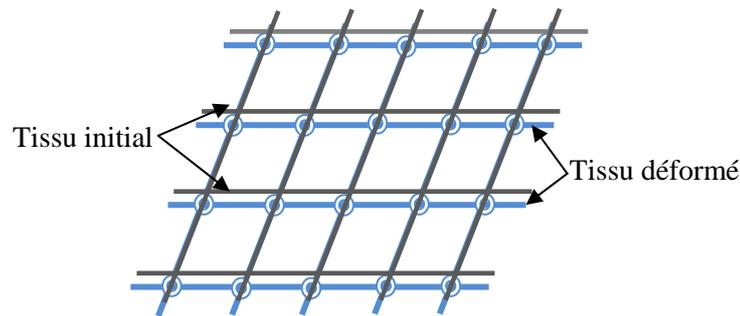
Le renfort se comporte ainsi comme un treillis articulé. Le seul mouvement relatif entre la chaîne et la trame se limite donc à une rotation des fibres les unes par rapport aux autres. Cette hypothèse majeure nous permettra d'utiliser des modèles continus équivalents aux milieux fibreux.



*Fig.1.10 Non glissement entre réseaux chaînes et de trames [2]*

### 1.6.1.2 Allongement dans la direction des mèches

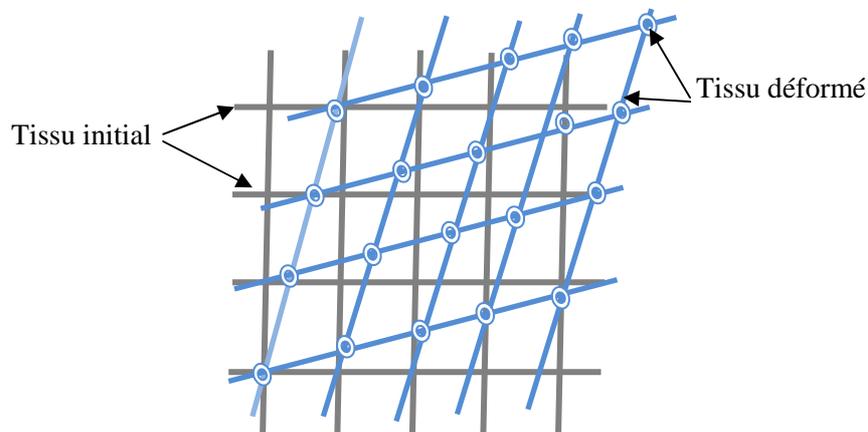
Si le tissu de renfort est sollicité en tension dans la direction de ses mèches, il subit alors un allongement dans cette direction (figure 1.11). Ces allongements sont en général très faibles (seulement de l'ordre de quelques pour cent) ; cela est dû à la grande rigidité à la traction des fibres constituant le tissu de renfort ; Cette déformation peut correspondre à des énergies de déformation très importantes [4].



*Fig.1.11 Allongements d'un tissu dans la direction des mèches*

### 1.6.1.3 Déformation de cisaillement dans le plan

Cette déformation est due à une rotation des mèches autour des points d'articulation des réseaux chaînes et trames ; (effet treillis) (figure 1.12) [4], c'est le mécanisme principal de déformation dans les renforts tissés. Ces déformations peuvent être très grandes même sous l'effet d'efforts faibles jusqu'à un certain angle appelé angle de blocage ou verrouillage. Après cet angle les déformations deviennent petites [9].



*Fig.1.12 Cisaillement d'un tissu*

#### 1.6.1.4 Déformation de flexion

La rigidité en flexion d'un tissu de renfort sec ou pré imprégné est très faible, cette propriété est exploitée dans la mise en forme des renforts sur les moules au cours du formage (drapage) [6], [7], [16], [17], [18]. Dans certains matériaux épais ou composés de fibres peu flexibles, la rigidité en flexion devient importante et peut influencer le comportement du renfort [17].

#### 1.6.1.5 Déformation de compression

Le flambement d'un tissu soumis à un effort de compression est immédiat même si cet effort est très faible [18].

#### 1.6.1.6 Compaction transverse

Lorsque le renfort est soumis à une sollicitation de compaction perpendiculairement à son plan, il s'écrase d'abord très facilement puis avec une rigidité plus grande lorsque les vides entre les fibres se combent [19].

### 1.6.2 Comportement mécanique en traction bi-axiale

Le comportement mécanique du tissu de renfort est hérité de celui des fibres qui constituent ses mèches. Du fait que le diamètre de la fibre est très petit devant sa longueur ; celle-ci ne peut être soumise qu'à des tensions dans sa direction longitudinale  $\vec{h}_\alpha$  (figure 1.13).

Dans cette direction les mèches sont composées de milliers de fibres juxtaposées qui peuvent glisser entre elles ; sous une sollicitation de traction, les fibres subissent un allongement très faible en raison de leur rigidité longitudinale très importante.

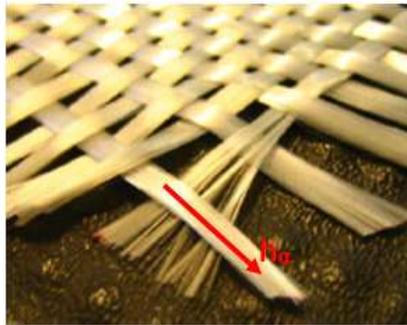
Des essais de traction, pratiqués sur le tissu dans les directions des mèches, ont montré que les mèches seules ont un comportement linéaire, par contre pour le renfort, le tissage est à l'origine d'un phénomène d'embuvage qui peut être mis en évidence sur des tests de traction bi-axiale (figure 1.14) [2].

La tension des mèches dépend principalement de deux facteurs : l'allongement des fibres et l'embuvage (figure 1.15). Le fait de tirer la fibre selon une direction ceci entraîne la rétraction de la fibre dans l'autre direction ; ainsi la tension dans la mèche dépend de la déformation subite par celle-ci et également de celle se trouvant dans l'autre direction.

Ainsi, on peut noter que le comportement en traction du renfort dépend du rapport des déformations dans les directions chaîne et trame. On observe ainsi une phase durant laquelle la rigidité demeure très faible avant de retrouver un comportement linéaire correspondant à un allongement des fibres (figure 1.16) [15].

Pour caractériser le comportement d'un tissu en tension, soit on fait recourt à des techniques expérimentales, soit à des simulations numériques [3].

Pour définir expérimentalement une loi de comportement d'un tissu, on utilise une machine de traction bi-axiale (figure 1.14) qui permet de réaliser l'essai de traction dans une direction (chaîne), en maintenant constante, la déformation dans la deuxième direction (trame). Ainsi pour chaque rapport  $k = \frac{\varepsilon_{chaîne}}{\varepsilon_{trame}}$ , on obtient les courbes de traction (figure 1.17).



*Fig.1.13 Direction de sollicitation en tension des fibres dans la direction  $\alpha$*



*Fig.1.14 Dispositif d'un essai de traction bi-axiale*

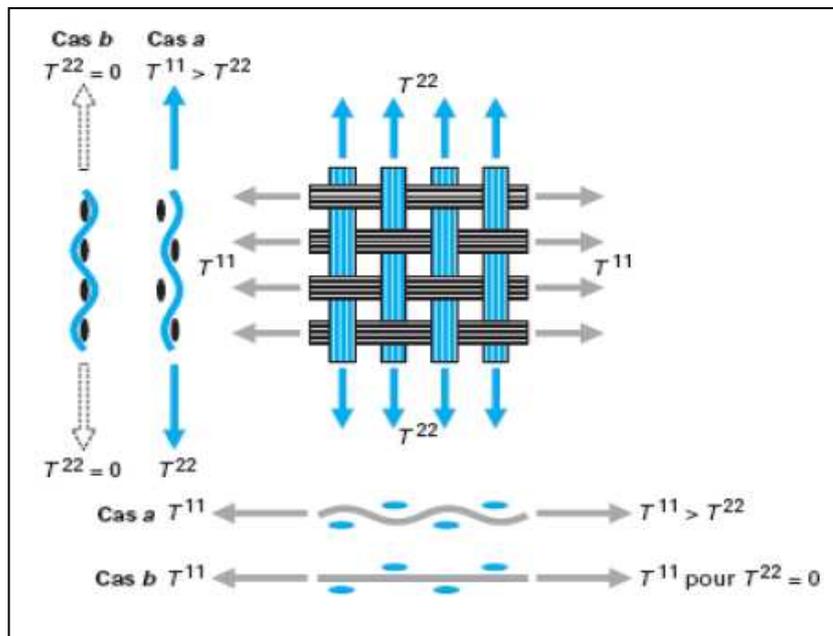


Fig.1.15 Phénomène de l'embuvage d'un tissu [2]

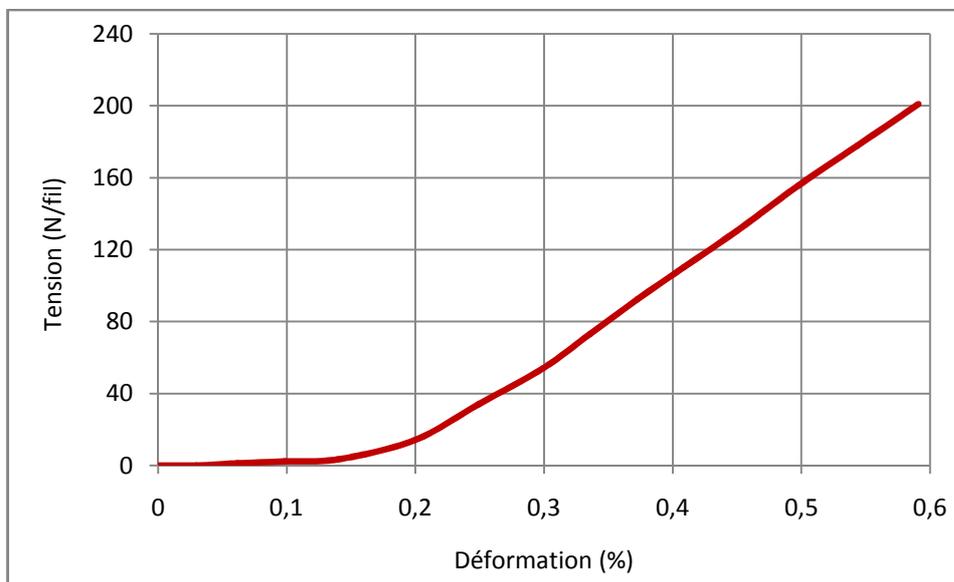


Fig.1.16 Tension dans une mèche sollicitée en traction bi-axiale [20]

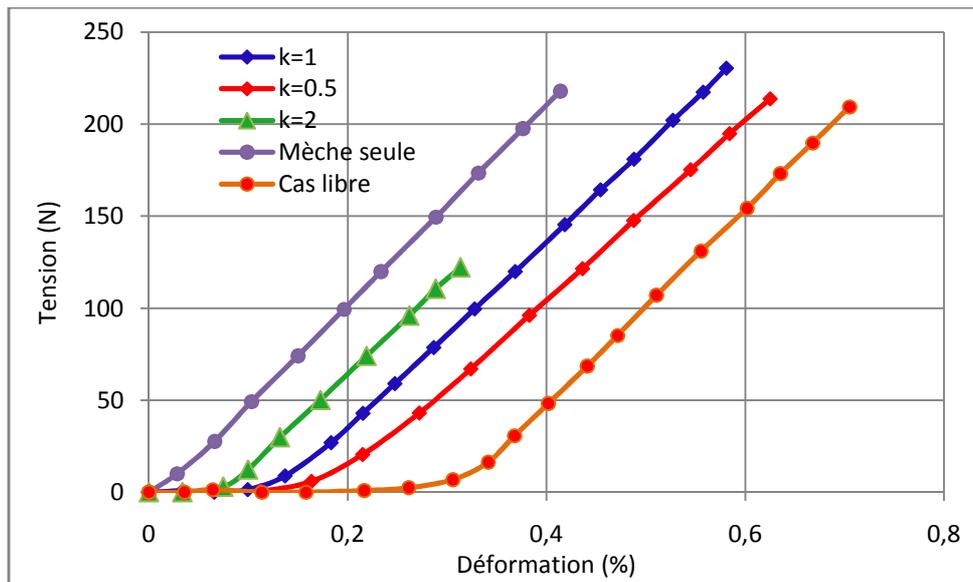


Fig.1.17 Comportement en tension bi axiale pour un tissu sergé de Carbone [15]

### 1.6.3 Comportement mécanique en flexion

La rigidité de flexion d'un tissu de renfort est très faible, ceci est dû essentiellement à la faible section des fibres ainsi qu'à leur glissement relatif. Cette rigidité est souvent négligeable. C'est une caractéristique mécanique des tissus de renfort très importante puisque c'est elle qui permet leur drapage ainsi que leur mise en forme.

Elle est aussi responsable d'une grande partie de l'apparition des plis. Le tissu est souvent modélisé par une membrane (rigidité de flexion nulle). Pour le cas de certains matériaux, qui sont ou bien épais ou bien composés de fibres peu flexibles, la rigidité à la flexion peut être significative et dans ce cas on devrait assimiler le renfort tissé à une coque [9].

### 1.6.4 Comportement mécanique en cisaillement

Le cisaillement est l'un des principaux modes de déformation des renforts tissés, ce phénomène est dû à une rotation des mèches autour des points d'articulation du réseau chaîne trame (figure 1.11) [2], c'est le mécanisme principal de déformation des renforts tissés.

Les essais de cisaillement plan réalisés sur des tissus de renfort ont montré le caractère non linéaire de leur comportement. Dans ce cadre, les études sont nombreuses en raison de la

prédominance de ce caractère dans l'étude des renforts tissés [19], [21], [22], [23], [24], [25], [26].

Au cours d'un essai de cisaillement, la rigidité en cisaillement est faible dans un premier temps ; ce qui engendre de grandes distorsions favorisant le formage, ces variations angulaires peuvent être très importantes, avoisinant les 70° dans certains cas [19].

Les courbes issues des essais de cisaillement pratiqués sur des renforts tissés permettent d'observer trois phases distinctes (figure 1.18) [2], [19]. Dans la première zone, la rigidité du tissu est très faible, elle a un caractère linéaire. La seconde est une zone transitoire non linéaire qui correspond à une rigidification progressive. Enfin une troisième zone caractérisée par une rigidité nettement supérieure à celle des deux phases précédentes.

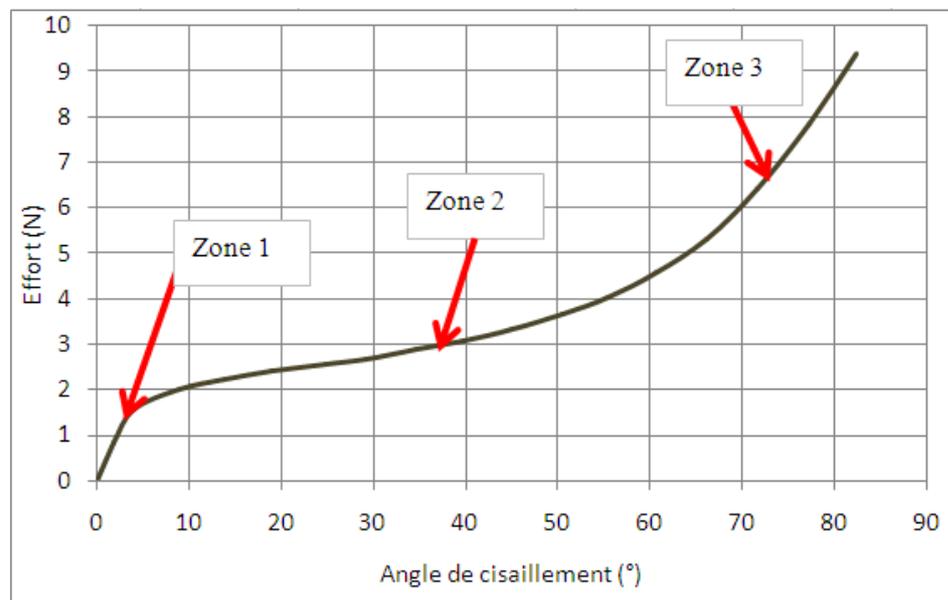


Fig.1.18 Comportement non linéaire en cisaillement plan du renfort tissé

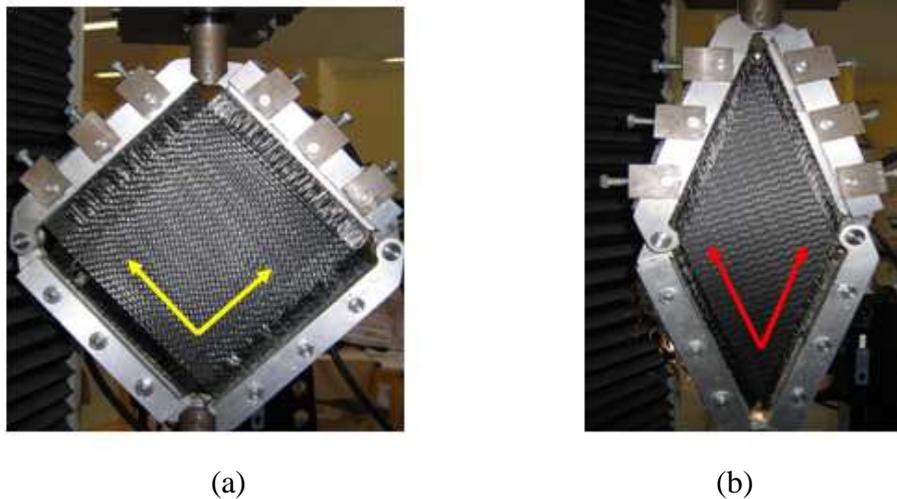
## 1.6.5 Essais de cisaillement

### 1.6.5.1 Essai de cadre (Picture Frame test)

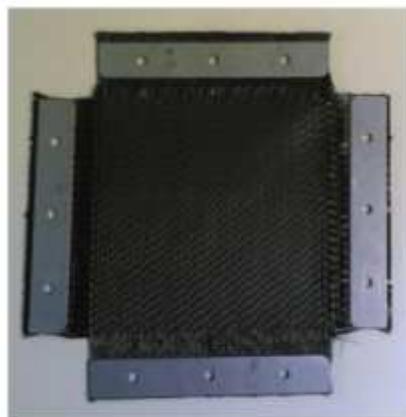
Le Picture frame est un test de cisaillement qui permet de générer une sollicitation de cisaillement pur à un tissu de renfort [27], [28], [29], [30],[31]. A l'aide d'une machine de traction, l'éprouvette en tissu de renfort est montée sur un cadre qui est composé de quatre barres articulées entre elles. Deux sommets juxtaposés de ce cadre sont liés aux mâchoires mobiles de la machine de traction, tandis que les deux autres sont laissés libres (figure 1.19).

Le cadre a une géométrie initiale semblable à un carré qui se déforme en losange et qui permet de transmettre par sa géométrie la sollicitation de cisaillement pur à l'éprouvette, il permet théoriquement d'obtenir une zone de cisaillement pur sur toute la zone tissée de l'éprouvette [13].

Les mèches de l'éprouvette doivent être alignées avec les côtés du dispositif. Pour cela, l'éprouvette est maintenue à l'aide de talons obtenus par le collage de plaques d'aluminium sur chacun de ses bords (figure 1.20). Lors de la préparation de l'éprouvette, il faut veiller à ce que les mèches soient parallèles, et que l'éprouvette n'ai aucune distorsion lors du collage pour éviter d'avoir des tensions qui peuvent demeurer lors du cisaillement.



*Fig.1.19 Dispositif expérimental picture frame : a) réseau chaîne trame avant déformation  
b) réseau chaîne trame après déformation*



*Fig.1.20 Eprouvette montée sur le cadre de cisaillement avec talons d'aluminium*

La cinématique du cadre permet de définir les déformations dues au mouvement du cadre. Il a été démontré que celles-ci ne dépendent que du déplacement imposé par la machine d'essai. L'angle de cisaillement  $\gamma$  est défini comme étant la variation d'angle entre les deux réseaux de mèches (chaînes et trames). Un calcul cinématique simple permet de relier le déplacement ( $d$ ) du cadre à l'angle de cisaillement  $\gamma$  grâce à la relation géométrique suivante :

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - 2 \arccos \left( \frac{D + d}{\sqrt{2}D} \right) \quad (1.1)$$

### 1.6.5.2 Le Bias extension test

Le Bias extension test apparaît comme une autre alternative pour l'évaluation et la caractérisation du comportement en cisaillement des renforts tissés [18], [29],[27],[32], [34].

Il consiste à encastrier une éprouvette en tissu rectangulaire orientée à plus ou moins  $45^\circ$  dans la direction de l'application de l'effort de traction (figure 1.21) [21], [26], [29], [32], [33], [34], la cinématique induite permet de solliciter l'échantillon en cisaillement pur qui exclut tout allongement des fibres. Lorsque l'éprouvette est tirée de  $L$  à  $L+d$ , elle prend la forme schématisée sur la figure.1.22.

L'avantage de ce type d'essai, en plus de sa simplicité, est qu'aucune fibre n'est sollicitée en traction, vu que l'énergie de tension dans le sens des fibres est très grande devant celle de cisaillement, l'apparition de tension dans les mèches peut rendre les résultats de l'essai erronés ou imprécis.

Dans les essais du Bias extension test, l'éprouvette est normalisée de telle sorte qu'elle ait une longueur égale au moins au double de sa largeur, dans le but mettre en évidence et bien visualiser la zone de cisaillement [33], [34].



Fig. 1.21 Essai de cisaillement Bias extension test sur éprouvette en NCF

Le Bias extension test permet de déterminer le comportement en cisaillement d'un tissu de renfort, lequel est nécessaire à prendre en compte dans des simulations numériques par éléments finis par exemple (figure 1.23).

On peut distinguer trois zones dans un échantillon de tissu soumis à un essai de Bias extension test (figure 1.24). Une première zone de cisaillement pur (en blanc) cisailée d'un angle  $\gamma$ , une seconde en demi cisaillement (en bleu) cisailée d'un angle  $\frac{\gamma}{2}$  et enfin une troisième sans cisaillement (en jaune) [18].

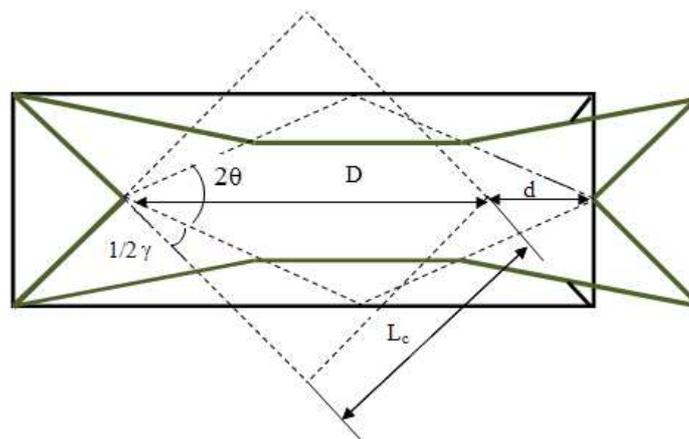


Fig. 1.22 Etats initial et déformé d'une éprouvette

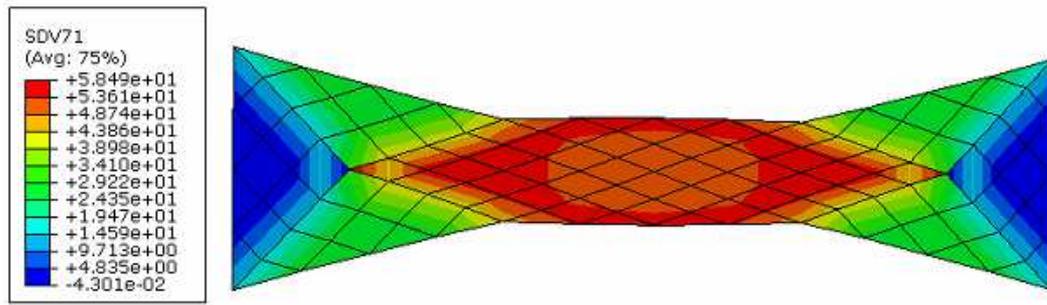


Fig. 1.23 Simulation d'un Bias extension test

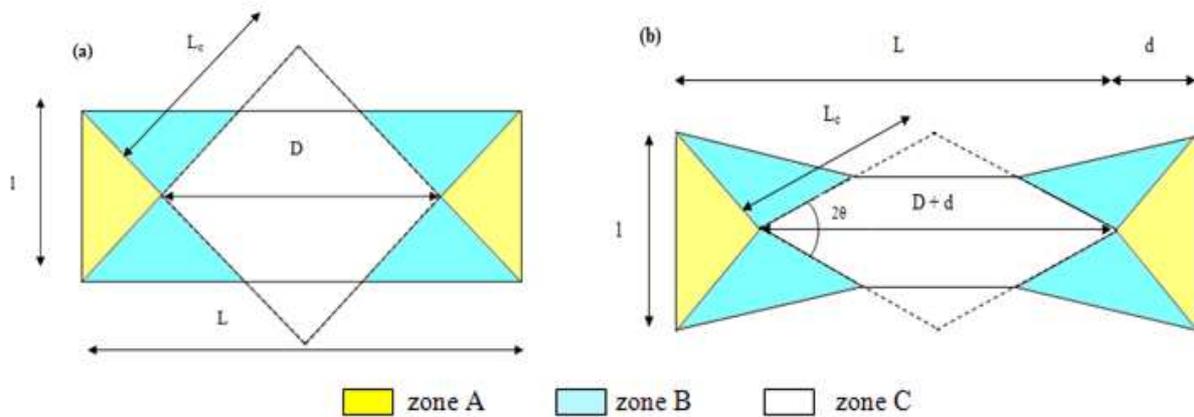


Fig. 1.24 Géométrie de l'éprouvette du Bias extension test avant et après déformation

### 1.7 Formage des renforts à fibres continues

Il existe en pratique deux types de formage : le premier est celui des composites à fibres courtes dans lesquels les fibres contribuent à l'amélioration des propriétés mécaniques du composite mais la matrice représente l'élément de base. Dans le deuxième type de formage qui concerne les composites à fibres continues, le renfort joue le rôle principal dans le comportement du composite, par contre la résine, dans le cas où elle est présente, joue un rôle moins important car elle est soit fluide soit pâteuse.

### 1.8 Mise en forme des composites

Contrairement au cas des matériaux classiques et traditionnels, la mise en forme des composites est très diversifiée et présente beaucoup de spécificités. Ainsi les procédés de

formage des composites sont assez divers et complexes et dépendent de la nature du renfort, de la matrice et de la pièce à obtenir. Il est important de noter que le formage des composites fibreux est utilisé dans le cas de l'élaboration des pièces minces [4].

Le formage concerne le renfort fibreux, pour obtenir généralement des formes surfaciques 3D, complexes et non développables à partir de tissus plans. Le cisaillement plan et la flexion sont les mécanismes principaux de déformation des renforts, ce sont eux qui sont responsables de l'obtention de la forme finale complexe du composite.

Dans le formage des composites, deux types de résine sont généralement employés :

- **Les résines thermodurcissables**

Pour ce type de résine, on parle souvent du procédé RTM (Resin Transfer Moulding) et du drapage.

- **Les résines thermoplastiques**

Elles sont employées pour les formages des CFRTP (Composite Fiber Reinforced Thermo Plastic).

### **1.9 Procédé de mise en forme R.T.M**

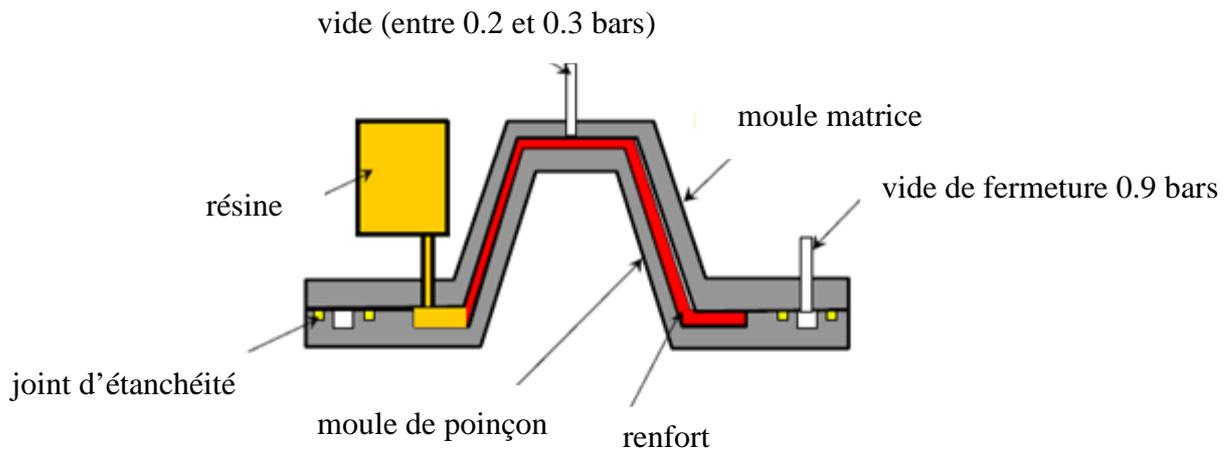
Le Resin Transfer Moulding ou (R.T.M.) (figure 1.25) est un procédé de mise en forme des renforts tissés de composite qui consiste à mettre en forme le renfort sec, avant l'injection de la résine [4], [5], [6], [35]. Ce procédé comporte deux phases principales.

- **Formage du renfort sec**

Cette opération se fait en général par emboutissage. Le renfort est placé sur une matrice maintenue par un serre-flan et mis en forme grâce à un poinçon. La fonction du serre-flan est le maintien du renfort tout en autorisant son glissement entre le renfort et le poinçon.

- **Injection de la résine**

Cette opération se fait à haute température suivie d'une polymérisation, le moule étant maintenu fermé au cours de cette phase, puis d'un refroidissement et d'un démoulage de la pièce finie.



*Fig. 1.25 Moulage par injection de résine liquide RTM*

### 1.10 Avantages du procédé R.T.M

Le procédé R.T.M. connaît aujourd'hui un grand essor à cause de sa faculté à être mis en œuvre dans le cadre de l'industrie [4], [6], [3], [19], [36], [37]. Il présente plusieurs avantages, à savoir la rapidité de mise œuvre, la possibilité d'automatisation et la grande précision du point de vue épaisseur et état de surface de la pièce.

### 1.11 Simulation des procédés de mise en forme des renforts tissés

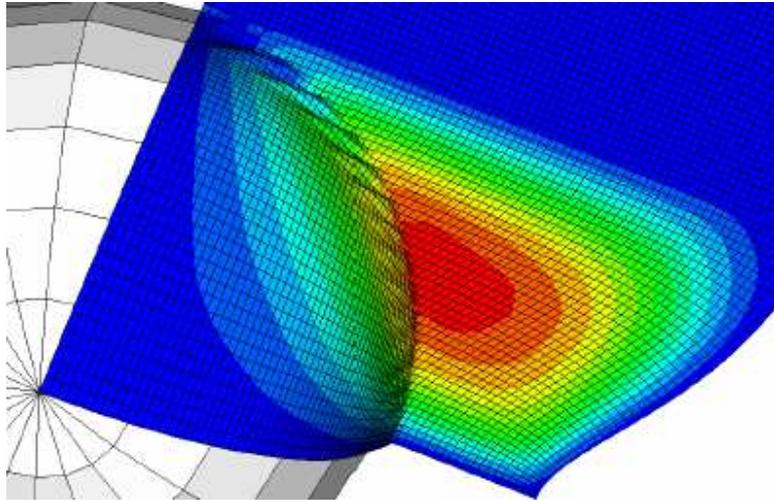
Les procédés de mise en forme des composites restent encore coûteux, ce qui justifie l'emploi de méthodes numériques pour simuler ces procédés (figure 1.26).

L'intérêt de la caractérisation du comportement mécanique des renforts tissés est de pouvoir alimenter de modèles adéquats des simulations numériques des procédés de mise en forme de ceux-ci.

De ce fait, la simulation numérique est une opération industrielle très importante, devenue indispensable dans la conception des procédés (outillage, forme, chargement...etc.), et permet, en effet, d'éviter de faire recours à des campagnes d'essais expérimentaux souvent onéreux et difficiles à mettre au point. Dans le cadre des renforts fibreux, la simulation a deux objectifs principaux :

- L'étude de la faisabilité de la mise en forme des pièces de formes complexes notamment à doubles courbures.

- La prévision des défauts et des anomalies qui peuvent surgir lors d'une mise en forme (plissement, rupture des fibres, défauts d'orientation des fibres...etc.).



*Fig. 1.26 Simulation d'une mise en forme d'un renfort tissé [37]*

## **1.12 Conclusion**

Ce premier chapitre décrit les différentes classes de matériaux composites qui occupent une place de plus en plus importante dans les différents secteurs de technologie et de l'industrie. Cette importance provient en fait de leurs qualités et performances (légèreté, résistance mécanique et chimique très élevées, maintenance réduite, liberté de formes...etc.).

Nous avons présenté une description de leurs constituants de base : les principales familles de matrices et les différents types de renforts. Un accent a été mis sur les différentes catégories de renforts tissés, leur comportement mécanique spécifique ainsi que leurs modes de déformations.

Les procédés de fabrication des matériaux composite sont basés sur des opérations de mise en forme du tissu de renfort sec ou pré-impregné. Pour étudier la faisabilité de ses procédés de formage, en évitant de faire recours à des campagnes d'essais expérimentaux souvent coûteuses. Il est indispensable de mettre au point des simulations qui nécessitent la connaissance du comportement mécanique de ces tissus de renfort.

# Chapitre 2

Différents modèles utilisés  
pour l'étude du comportement  
mécanique des renforts tissés

## Chapitre 2

# Différents modèles utilisés pour l'étude du comportement mécanique des renforts tissés

### 2.1 Introduction

L'une des caractéristiques principales des matériaux composites est leur grande diversité (fibres courtes ou longues, matrice thermodurcissable ou thermoplastique etc..).

Il existe plusieurs modèles pour décrire leur comportement mécanique et différentes méthodes pour leur mise en œuvre. On s'intéresse dans cette étude au comportement mécanique du tissu sec, qui représente la première phase du procédé (RTM). On présente ici différents modèles et approches spécifiques aux renforts tissés pour composite « secs ».

### 2.2 Les différentes échelles de description des renforts tissés

Les renforts tissés sont constitués par des mèches qui sont-elles mêmes composées de milliers de fibres. Le comportement du tissu est hérité de celui de la mèche qui à son tour dépend du comportement de la fibre. Ainsi Les renforts tissés sont caractérisés par un comportement mécanique à caractère multi échelles. On peut distinguer trois échelles de description lors de l'étude des renforts tissés pour composites : microscopique, mésoscopique et macroscopique.

#### 2.2.1 Echelle microscopique

L'échelle microscopique est principalement liée à la fibre (de l'ordre du  $\mu\text{m}$ ) qui représente l'élément de base du renfort tissé (figure 2.1). A ce niveau de description, les modèles de comportement sont basés sur des procédures d'homogénéisation. Dans ce cadre, plusieurs travaux basés sur des modèles qui décrivent le comportement du tissu à l'échelle de la fibre ont été entrepris [13], [23], [38].

#### 2.2.2 Echelle mésoscopique

A cette échelle, la description concerne la mèche (de l'ordre du mm) qui est elle-même composée de milliers de fibres (figure 2.1). Cette échelle met en évidence les motifs du tissage, la forme et les caractéristiques de la mèche qui est considérée comme un milieu continu anisotrope.

On définit la cellule élémentaire représentative minimale (CER) appelée parfois maille élémentaire qui représente la plus petite structure permettant de décrire le comportement du tissu complet. On peut citer beaucoup de travaux basés sur des modèles mésoscopiques qui décrivent le comportement des tissus à l'échelle de la mèche [38-40].

### 2.2.3 Echelle macroscopique

A cette échelle (de l'ordre du cm au m) (figure 2.1), on décrit le renfort comme un milieu continu bidimensionnel (ou tridimensionnel, comme pour le cas des multi-plies), dont le comportement mécanique est fortement piloté par la direction des fibres.

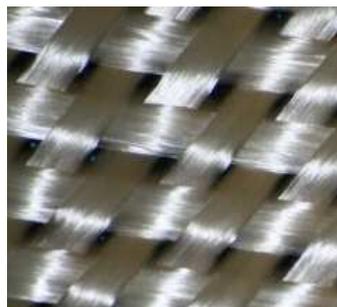
On décrit à l'échelle macroscopique le renfort complet, ce qui permet en particulier de simuler des opérations de mise en forme. Le renfort est constitué de mèches, composées elles-mêmes de milliers de fibres.

Le comportement de ces fibres dépend évidemment directement de leur direction. Ces fibres ont une rigidité en traction prépondérante. En revanche, leur rigidité en flexion est très faible. La compaction des fibres dans une mèche est prise en compte dans certains travaux [41].

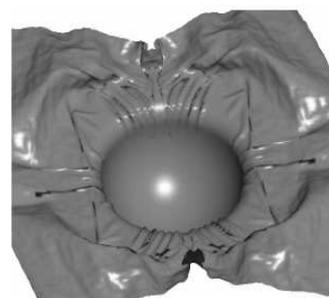
Il en résulte que quelque soit l'échelle de description, les renforts tissés sont caractérisés par un comportement mécanique anisotrope directement piloté par la direction des fibres.



Echelle microscopique



Echelle mésoscopique



Echelle macroscopique

*Fig. 2.1 Différentes échelles de description des renforts tissés*

## 2.3 Simulation de la mise en forme des renforts tissés

Le procédé RTM (Resin Transfer Moulding) présenté et détaillé au § 1.9 est souvent utilisé dans la mise en forme des composites à renforts tissés [28], [42-43]. L'étape de mise en forme du renfort sur le moule est une étape très importante voir même principale de ce procédé.

Lors d'une opération de mise en forme, on doit veiller au mieux pour que celle-ci puisse être réalisée sans défauts, comme par exemple le plissement du tissu de renfort, la déchirure des fibres, le glissement entre les réseaux et les porosités résiduelles [19].

La faisabilité est un paramètre très important dans la réussite de cette opération, elle concerne principalement les réglages du procédé, à savoir le positionnement initial du renfort, les efforts sur les outils (poinçon, serre-flan), la vitesse et la température de fabrication.

La réponse au mieux à toutes ces exigences est obtenue classiquement à la suite d'une série d'essais-erreurs souvent très onéreuses du point de vue coûts et temps passé aux divers réglages. Il est donc impératif de mettre au point des modélisations et des simulations de l'opération de mise en forme des renforts tissés de composite [2].

Pour cela, il existe plusieurs approches classées souvent dans deux grandes catégories:

1. Les méthodes géométriques de drapage.
2. Les méthodes mécaniques basées sur des calculs par éléments finis.

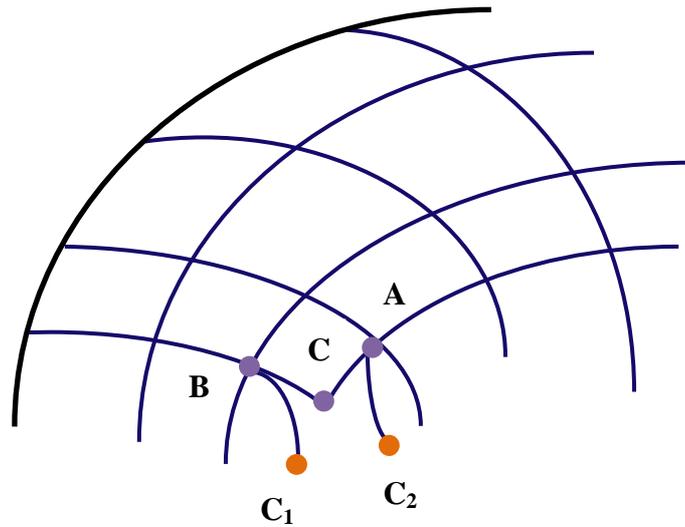
### 2.3.1 Méthodes géométriques

Ces méthodes géométriques, dites aussi cinématiques sont basées sur des algorithmes de filet. Introduits pour la première fois par Mack et Taylor [44], ces algorithmes ne tiennent pas en compte les conditions aux limites, ni le comportement mécanique du renfort (le résultat est identique quel que soit la nature du matériau utilisé).

Elles sont basées sur les hypothèses suivantes [2], [45-49]:

- Les mèches sont considérées inextensibles
- Les intersections entre les réseaux chaînes et trames ne peuvent pas glisser
- des mèches agissent comme des pivots
- Les rotations entre les mèches (chaînes et trames) sont libres.

Ces méthodes présentent l'avantage d'être rapides et économiques en temps de calcul. Des modèles qui reposent sur cette méthode, sont introduits dans des logiciels commerciaux de simulations (MSC/ Patran Laminate Modler).



*Fig. 2.2 Principe de la méthode de l'algorithme de filet [2]*

Le principe du drapage est montré sur la [figure 2.2](#). Sur le filet, la position d'un nœud C appartenant au tissu de renfort, est déterminée à partir de celles de deux nœuds voisins A et B dont les positions sont déjà connues. AC et BC représentent les longueurs respectives entre ces points supposés connus. C est défini comme l'intersection de deux géodésiques en provenance de A et B et qui se coupent en C.

C'est un problème mathématique non linéaire de minimisation de la distance entre les deux points qui est résolu numériquement par la méthode des différences finies [\[4\]](#). La surface de l'outil doit être définie analytiquement par des éléments courbes.

Afin d'initier le drapage comme c'est montré sur la [figure 2.2](#), il est nécessaire de positionner un premier nœud et de fixer deux directions initiales de dépose (chaîne et trame), ces directions coïncident généralement avec les axes de symétrie.

### 2.3.2 Méthodes mécaniques

Ces méthodes tiennent en considération le comportement mécanique des renforts tissés ainsi que les conditions aux limites et permettent de fournir les informations non disponibles avec les méthodes de filet.

Certaines d'entre elles, sont basée sur la méthode de calcul par éléments finis qui prend en considération les grandes distorsions observées sur la préforme ainsi que les grands déplacements imposés par le poinçon lors de la phase de mise en forme du renfort sec [50]. Ces méthodes sont généralement basées sur des hypothèses simplifiées pour réduire au mieux les temps de calculs.

#### 2.3.2.1 Approche continue

Les renforts tissés sont des milieux qui présentent beaucoup de spécificités à cause de leur caractère multi-échelles. Au niveau microscopique (la fibre) et mésoscopique (la mèche), ils sont considérés comme des milieux hétérogènes non continus. Par contre, à l'échelle macroscopique, ils sont postulés comme étant des milieux continus anisotropes [4], [31], [51-52].

L'approche continue est basée sur des modèles dits macroscopiques qui tiennent en compte du comportement global homogénéisé du renfort. Dans le cadre de cette approche il existe deux principales méthodes de description du comportement mécanique des renforts tissés dites hyper et hypo élastiques.

#### 2.3.2.2 Approche discrète

Dans plusieurs travaux, contrairement à l'approche continue, l'approche discrète concerne la modélisation du comportement du tissu de renfort, à l'échelle mésoscopique ou microscopique ; on considère les constituants du renfort qui sont les mèches [36], [53-55] et les fibres [56-57].

La description des composants du modèle à basse échelle présente l'avantage d'être détaillée et précise, mais son inconvénient c'est qu'elle est coûteuse du point de vue numérique. On peut noter que le nombre important de fibres limite les calculs à des petites structures [3]. Certains auteurs utilisent des éléments finis poutres ou barres pour la modélisation des mèches (figure 2.3) [19], [55-60].

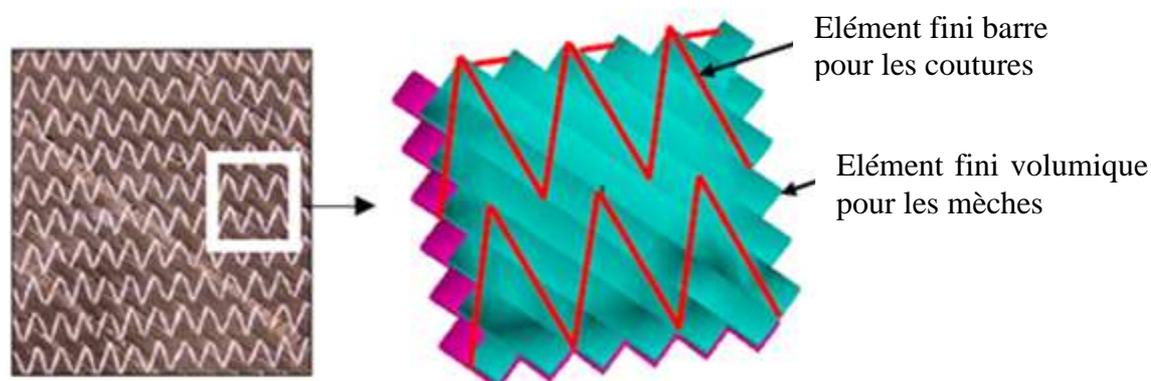


Fig. 2.3 Représentation à l'échelle mésoscopique d'une CER d'un renfort type NCF [3]

### 2.3.2.3 Approche semi-discrète

Cette approche associe l'emploi de la méthode des éléments finis à une analyse mésoscopique [61-65]. Elle peut être classée comme intermédiaire entre les deux approches discrète et continue.

Elle consiste à représenter un groupe de cellules élémentaires (CER) par un seul élément fini ; ce qui permet de réduire considérablement le nombre de degrés de liberté (figure 2.4) et (figure 2.5).

Les déformations en tension, en cisaillement plan et en flexion sont calculées pour ces cellules représentatives à partir des déplacements nodaux.

Des éléments finis quadrangulaires semi discrets composés de cellules élémentaires ont été développés par les auteurs dans [66] (figure 2.6). Dans les travaux menés dans [3], [64], [67], les auteurs utilisent des éléments triangulaires. Cette approche a été étendue aux renforts interlock 3D. Un modèle a été proposé dans [9], [10] pour des renforts 3D interlock basé sur des éléments barres pour modéliser les tensions des mèches et des éléments finis solides pour décrire le cisaillement et la compaction transverse. Ce type de modélisation a été employé aussi par l'auteur dans [19].



Fig. 2.4 Modèle mésoscopique (CER) prélevé d'un tissu taffetas (47214 ddl) [38]

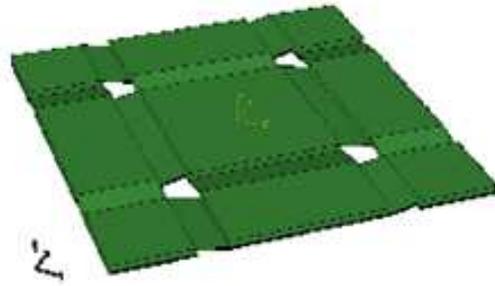


Fig. 2.5 Modèle semi discret prélevé d'un tissu taffetas (216 ddl) [38]

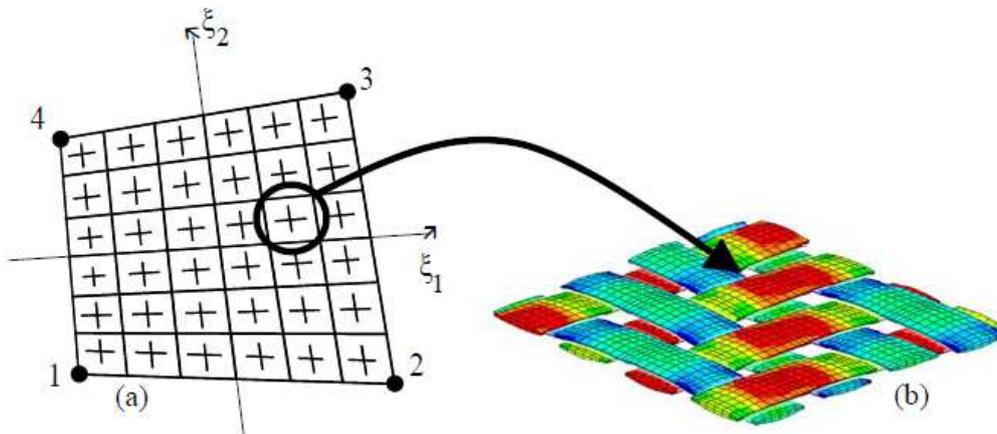


Fig. 2.6 Modèle élément fini utilisé dans l'approche semi-discrète [14]

## 2.4 Modèles hypoélastiques utilisés dans l'étude du comportement mécanique des renforts tissés

Pour déterminer le comportement mécanique des renforts tissés, des modèles hypoélastiques continus ont été développés par plusieurs auteurs [8], [31], [51-55], [63], [68], [70].

Plusieurs codes de calcul par éléments finis tels que : (Abaqus, Ansys, Dyna, Castem, Aster etc..), utilisent ces modèles basés sur des équations constitutives en taux, dites lois hypoélastiques. Il s'agit, pour ces modèles, de décrire sur un milieu continu équivalent le comportement du renfort, en essayant de tenir compte au mieux des phénomènes

mésoscopiques et microscopiques misent en jeu (écrasement des fibres, frottement entre les mèches, verrouillage, embuvage...).

$$\overline{\overline{\sigma}}^\nabla = \overline{\overline{\overline{C}}} : \overline{\overline{D}} \quad (2.1)$$

Avec :

$$\overline{\overline{\sigma}}^\nabla = \dot{\overline{\overline{\sigma}}} + \overline{\overline{\sigma}}\overline{\overline{\Omega}} - \overline{\overline{\Omega}}\overline{\overline{\sigma}} \quad (2.2)$$

Dans cette relation,  $\overline{\overline{\sigma}}$  est le tenseur Eulérien de Cauchy,  $\overline{\overline{D}}$  le tenseur des taux de déformation tandis que  $\overline{\overline{\overline{C}}}$  représente le tenseur de comportement, orienté par un vecteur unitaire dans la direction matérielle des fibres.  $\overline{\overline{\sigma}}^\nabla$  représente la dérivée objective de  $\overline{\overline{\sigma}}$ .

Ce type de lois s'adapte au calcul incrémental basé sur l'intégration de la relation (2.1), en se basant sur le schéma classique de Hughes et Winget [71]. Beaucoup de codes de calcul par éléments finis, notamment Abaqus/Explicit utilisent ce type de calcul.

$$[\sigma^{n+1}]_{e_i^{n+1}} = [\sigma^n]_{e_i^n} + [C^{n+1/2}]_{e_i^{n+1/2}} [\Delta \varepsilon^{n+1/2}]_{e_i^{n+1/2}} \quad (2.3)$$

Avec :

$$[\Delta \varepsilon^{n+1/2}]_{e_i^{n+1/2}} = [D^{n+1/2}]_{e_i^{n+1/2}} \Delta t \quad (2.4)$$

Dans cette relation  $\overline{e}$ ,  $\overline{e}^{n+1}$  et  $\overline{e}^{(n+1)/2}$  représentent les différentes formes de la base pilotant la dérivée objective en rotation respectivement aux incréments n, (n+1) et en milieu d'incrément  $\frac{(n+1)}{2}$ . Cette formule présente une approximation qui n'est correcte que si le pas de temps est suffisamment petit, ce qui est le cas d'un schéma explicite.

L'avantage principal de ce type de modèles hypoélastiques est leur aptitude à être implémenté sous forme de routine utilisateur, dans les codes de calcul par éléments finis en schéma explicite comme Abaqus/Explicit [72] utilisé dans cette étude. Il s'agit d'exprimer, à chaque incrément (n), l'état de contraintes à l'incrément suivant (n+1), en fonction de l'état de contraintes à l'incrément (n). L'implémentation se fait grâce à la relation (2.3).

On peut citer quelques modèles hypoélastiques couramment utilisés dans l'étude du comportement mécanique des renforts tissés :

- **Modèle avec formulation dite de Green-Naghdi**

Ce modèle développé par les auteurs dans [31], utilise la base de Green-Naghdi ( $\bar{e}$ ) pour piloter la dérivée objective en rotation. Il s'agit donc de la base qui suit la rotation du corps rigide moyenne de la matière. Les vecteurs de cette base sont définis par :

$$\bar{e}_i = \bar{\bar{R}} \cdot \bar{e}_i^0 \quad (2.5)$$

Dans cette relation,  $(\bar{e}_i^0)$  est la base initiale des fibres supposées, orthogonales,  $(\bar{e}_i)$  représente la base de Green-Naghdi et  $\bar{\bar{R}}$  le tenseur de rotation du corps rigide.

Les valeurs des incréments de contraintes et déformation sont données dans la base de Green-Naghdi.

L'avantage majeur de ce modèle est que son implémentation dans une routine de comportement dans le logiciel Abaqus/Explicit est « naturelle », puisqu'il correspond au type de modèle utilisé par défaut par ce logiciel.

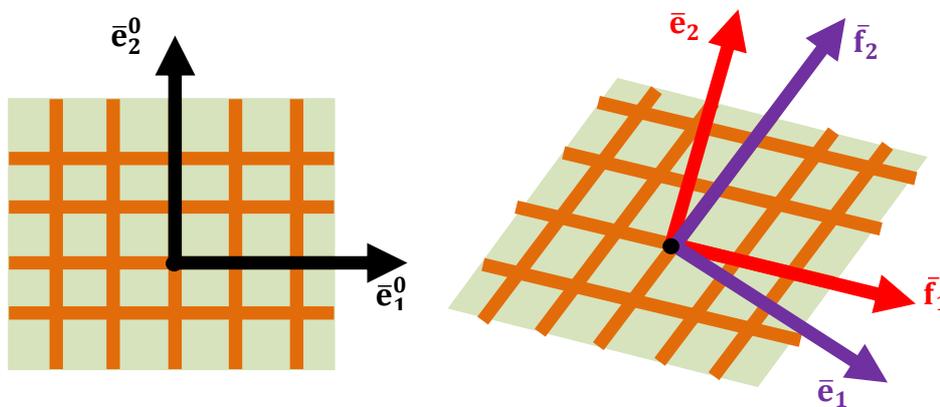


Fig. 2.7 Bases de Green-Naghdi et matérielle

- **Modèle non-orthogonal de Cao**

Ce modèle, appelé modèle de Cao, a été proposé pour la première fois par Dong [52], puis développé par Cao dans [31], pour décrire le comportement des renforts tissés à l'échelle macroscopique.

Ce modèle utilise une loi hypoélastique basée sur les dérivées objectives de Green-Naghdi. Il prend en considération le caractère non-orthogonal qui caractérise le

comportement des tissus de renfort (les mèches sens chaîne et sens trame qui sont perpendiculaires avant déformation, ne le restent plus après).

- **Modèle de comportement à deux directions de fibres**

Le principe de base de ce modèle de comportement hypoélastique, est la superposition des états de contraintes obtenus pour chacune des deux directions des fibres (figure 2.7). L'état de contrainte dans chacune des deux directions est déterminé indépendamment de l'autre direction. Ensuite les contraintes obtenues sont superposées. Les contraintes de cisaillement, quand à elles, seront déterminées à partir de l'angle de cisaillement formé entre les deux directions des fibres.

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{\text{fibre 1}} + \bar{\sigma}_{\text{fibre 2}} \quad (2.6)$$

Pour chacune des deux directions de fibres, les contraintes longitudinales (traction) sont prépondérantes. Les autres composantes des contraintes dans chaque direction de fibre n'ont pas été prises en compte. Mais, il est toutefois possible d'affiner le modèle en tenant compte des phénomènes d'embuvage et de compaction. Les contraintes de cisaillement dépendent, avant tout, de la variation d'angle relatif entre les deux directions de fibres. L'effet de ce comportement en cisaillement est réparti entre les deux directions des fibres.

- **Loi hypoélastique dans la direction des fibres**

Le modèle développé ici et qui sera détaillé plus loin (chapitre 3), est basé sur une loi de comportement hypoélastique. Celle-ci utilise une dérivée objective en rotation pilotée par la direction des fibres. Elle est utilisée dans le repère fibreux pour chaque direction de fibres et a la forme suivante :

$$(\bar{\sigma}^k)^\nabla = \bar{C}^k : \bar{D}^k \quad (2.7)$$

Dans cette relation,  $(\bar{\sigma}^k)^\nabla$  représente la dérivée objective en rotation pilotée par la direction de la fibre (k) (k=1,2 pour les tissus de renfort 2 D), pour chacune des deux directions on associe une base matérielle  $\bar{f}_k$  :

$$\begin{bmatrix} d\sigma_{11}^k & d\sigma_{12}^k & d\sigma_{13}^k \\ d\sigma_{21}^k & d\sigma_{22}^k & d\sigma_{23}^k \\ d\sigma_{31}^k & d\sigma_{32}^k & d\sigma_{33}^k \end{bmatrix}_{\bar{f}_k} = [\bar{\bar{C}}]_{\bar{f}_k} : [\bar{d\varepsilon}]_{\bar{f}_k} \quad (2.8)$$

En tenant compte de l'hypothèse des contraintes plane du tissu de renfort et du comportement considéré de type membrane, la relation (2.8) devient :

$$\begin{bmatrix} d\sigma_{11}^k & d\sigma_{12}^k \\ d\sigma_{21}^k & d\sigma_{22}^k \end{bmatrix}_{\bar{f}_k} = [\bar{\bar{C}}]_{\bar{f}_k} : [\bar{d\varepsilon}]_{\bar{f}_k} \quad (2.9)$$

Si l'expression du tenseur de constitution  $[\bar{\bar{C}}]_{\bar{f}_k}$  est donnée par la relation :

$$[\bar{\bar{C}}]_{\bar{f}_k} = \begin{bmatrix} E_1 & G_{12} \\ G_{12} & E_2 \end{bmatrix}_{\bar{f}_k} \quad (2.10)$$

Il en résulte une loi hypoélastique simplifiée, pour les fibres de direction initiale  $k$  :

$$d\sigma_{11}^k = E_1 \cdot d\varepsilon_{11}^k \quad (2.11)$$

$$d\sigma_{22}^k = E_2 \cdot d\varepsilon_{22}^k \quad (2.12)$$

## 2.5 Modèles hyperélastiques utilisés dans l'étude du comportement mécanique des renforts tissés

A l'échelle macroscopique, une autre approche continue a été développée dans [4], [19], [73] celle-ci considère le renfort tissé comme un matériau hyperélastique pour lequel on postule l'existence d'un potentiel de déformation  $W$  élastique qui vérifie le principe d'indifférence matérielle.

Dans ce cas, le matériau hyperélastique ne dissipe pas d'énergie et dans la configuration initiale, sa loi de comportement est donnée par la relation :

$$\bar{\bar{S}} = 2 \frac{\partial W}{\partial \bar{\bar{C}}} \quad (2.13)$$

Dans cette relation,  $\bar{\bar{S}}$  est le second tenseur de Piola Kirchhoff,  $\bar{\bar{C}}$  représente le tenseur de Cauchy Green droit.  $W$  est le potentiel élastique de déformation exprimé en fonction des invariants du tenseur  $\bar{\bar{C}}$ .

### 2.5.1 Hyperélasticité isotrope

Il existe une diversité de potentiels pour décrire le comportement des matériaux hyperélastiques isotropes compressibles ou incompressibles. Parmi ces potentiels, on distingue ceux qui sont écrit en fonction des invariants des tenseurs de déformations et ceux qui sont exprimés en fonction des élongations.

De nombreux ouvrages présentent ces potentiels hyperélastiques très couramment utilisés [4], [6], [28], [74-79]. Nous rappelons ici quelques-uns de ces modèles.

- **Modèle de Mooney-Rivlin**

Mooney et Rivlin proposent un modèle hyperélastique assez bien adapté au cas des déformations relativement faibles. Ce modèle est basé sur une fonction d'énergie de déformation sous la forme d'une série de puissance des paramètres  $(I_1-3)$  et  $(I_2-3)$  de la forme :

$$W(I_1, I_2) = \sum_{ij=0}^{\infty} C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (2.14)$$

Les coefficients  $C_{ij}$  sont des constantes matérielles obtenues par identifications suite à des essais expérimentaux conventionnels. Pour le cas d'un modèle à deux paramètres, la relation devient :

$$W(I_1, I_2) = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \quad (2.15)$$

- **Modèle d'Ogden**

Le modèle d'Ogden est un modèle qui est utilisé pour décrire le comportement non linéaire des matériaux hyperélastiques tels que les caoutchoucs, les polymères et les tissus. Le modèle a été développé par Ray W. Ogden en 1972 [78]. Ce modèle est basé sur une densité d'énergie fonction des trois élongations principales. Cette densité fournit une excellente corrélation avec les données expérimentales pour des élongations inférieures à 7 en traction simple et à 4 en cisaillement pur et en traction bi-axiale. Les paramètres de ce modèle  $\mu_r$  et  $\alpha_r$  sont déterminés par identification avec les données issues de quelques essais de base.

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mu_r}{\alpha_r} (\lambda_1^{\alpha_r} + \lambda_2^{\alpha_r} + \lambda_3^{\alpha_r} - 3) \quad (2.16)$$

- **Modèle Yeoh**

Le modèle de Yeoh [79] dépend uniquement du premier invariant  $I_1$  ; la densité d'énergie est donnée par la relation suivante :

$$W(I_1) = \sum_{n=1}^i C_{i0} (I_1 - 3)^i \quad (2.17)$$

- **Modèle Neo Hookean**

Dans ce modèle, on ne tient compte que du premier terme du potentiel  $W$  de Mooney-Rivlin, Ce qui conduit à l'expression du modèle de Neo-Hooke :

$$W(I_1) = C_{10}(I_1 - 3) \quad (2.18)$$

### 2.5.1 Hyperélasticité anisotrope

- **Modèle de Weiss**

Ce modèle a été développé par Weiss [80], pour décrire le comportement mécanique des matériaux isotrope transverse. C'est en fait une extension du modèle de Mooney-Rivlin avec un terme supplémentaire constitué d'une fonction exponentielle du paramètre  $I_4$ , pour modéliser le comportement de la fibre.

$$W(I_1, I_2, I_4) = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) + C_3(e^{I_4} - I_4) \quad (2.19)$$

## 2.6 Conclusion

Ce deuxième chapitre a été consacré à l'état de l'art des recherches menées sur les différents modèles et approches utilisés dans l'étude du comportement mécanique des renforts tissés.

Nous avons commencé par un aperçu sur les différentes échelles de description des renforts tissés. Ensuite les méthodes géométriques et mécaniques employées dans la modélisation et la simulation de l'opération de mise en forme des renforts tissés de composite ont été rappelées.

Nous avons enfin terminé ce chapitre par une présentation des différents modèles de comportement utilisés pour les renforts tissés. Un accent a été mis sur les modèles de comportement hypoélastique basé sur les lois en taux et les modèles hyperélastiques qui dérivent d'un potentiel de déformation élastique.

# Chapitre 3

Modélisation en grandes  
transformations du  
comportement mécanique des  
renforts de composites

## Chapitre 3

# Modélisation en grandes transformations du comportement mécanique des renforts de composites

### 3.1 Mécanique des milieux continus en grandes transformations

#### 3.1.1 Définition d'un milieu continu

Un milieu solide ou fluide, bien qu'il soit constitué d'atomes à l'échelle microscopique, peut être considéré hypothétiquement d'un point de vue macroscopique comme continu, c'est à dire que ses propriétés sont des fonctions continues des variables d'espace  $(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$  et du temps  $(t)$ .

C'est un milieu idéal, puisque la matière est réellement discontinue et la continuité parfaite d'un domaine matériel n'existe pas. Les moyens d'investigation tels que les microscopes électroniques, montrent clairement que la matière est faite de juxtaposition d'éléments ne possédant pas tous les mêmes caractéristiques. De ce fait, la continuité du domaine matériel ne pourra être qu'une approximation.

#### 3.1.2 Mécanique des milieux continus

La mécanique des milieux continus tend à ignorer les détails de la structure moléculaire ou microscopique de la matière en supposant que la structure du matériau réellement discontinue peut être remplacée par un milieu hypothétique continu. Ceci implique que les caractéristiques physiques d'un volume infinitésimal  $(dV)$  peuvent être considérées les mêmes que celles obtenues pour des corps de dimensions finies (volume  $V$ ).

La mécanique des milieux continus permet de représenter théoriquement l'état des contraintes et des forces internes, qui s'exercent dans un milieu à l'état statique comme à l'état dynamique. Cette science est basée sur un concept fondamental qui est la prise en considération des déformations d'un corps ainsi que les variations de température qui accompagnent ces déformations.

#### 3.1.3 Cinématique d'un milieu continu

La cinématique est l'étude du mouvement des corps, sans tenir compte des causes qui le provoque. La cinématique du milieu continu a pour but d'introduire les outils

mathématiques pour décrire une cinématique quelconque et ce, indépendamment des forces qui l'engendrent.

Au cours d'une grande transformation, un solide occupe plusieurs configurations successives, il est donc nécessaire de préciser dans quel cadre se fait la description de ses déformations et contraintes.

### 3.1.4 Notions de configurations

#### 3.1.4.1 Description des grandes transformations

La description des mouvements d'un milieu solide dans le cadre des grandes transformations géométriques, nécessite le repérage des particules (M), qui constituent ce milieu au fil du temps.

La notion de référentiel est liée à celle de l'observateur. On appelle référentiel, noté, **R**, un ensemble de points animés d'un mouvement de corps rigide. Pour repérer les positions spatiales des particules (M), il est commode d'introduire, dans le référentiel, un repère **R** souvent orthonormé. Dans ce repère qui matérialise le référentiel, une particule (M) à l'instant (t) fixé a pour coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$ .

L'ensemble des positions spatiales  $(x_i)$  occupées par les particules (M) du solide, à chaque instant (t), représente sa configuration à cet instant (t) et qu'on note  $(C_t)$ . On introduit souvent une configuration de référence  $(C_0)$  qui est une configuration particulière connue du solide à un instant  $(t_0)$  connu.

#### 3.1.4.2 Eléments matériels

Un élément matériel qui appartient à un solide ( $\Omega$ ) (ligne, surface ou volume), est une partie de ce solide qui est constituée par les mêmes particules, lorsque ce solide subit une transformation bien déterminée qui est un déplacement ou bien une déformation par rapport à une configuration initiale dite de référence.

Un segment matériel peut être représenté par un vecteur dit matériel ou fibre matérielle, une surface est caractérisée par une aire et un vecteur normal ; elle est dite facette matérielle [81].

#### 3.1.4.3 Configuration de référence et configuration actuelle

On considère l'espace euclidien  $R^3$  muni d'un repère orthonormé  $R(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$  direct d'origine (O) supposé fixe. Soit ( $\Omega$ ) un milieu continu de cet espace. On appelle configuration de référence ou configuration non déformée de ( $\Omega$ ), l'ensemble des positions

de ses particules à un instant de référence ( $t_0$ ) quelconque mais fixé. Soit ( $M$ ) une particule de ( $\Omega$ ) quelconque mais fixée, la position ( $M_0$ ) de ( $M$ ) à l'instant de référence est alors repérée par le vecteur :

$$\bar{X} = \overline{OM_0} = X_k \cdot e_k \quad (3.1)$$

Les variables ( $X_1, X_2, X_3$ ) qui représentent les coordonnées des particules de ( $\Omega$ ) à l'instant de référence ( $t_0$ ), sont appelées variables de Lagrange.

Soit ( $t$ ) l'instant actuel ou courant, on appelle configuration actuelle ou encore configuration déformée de ( $\Omega$ ) à l'instant ( $t$ ), l'ensemble des positions de ses particules à cet instant.

Soit ( $M$ ) une particule de ( $\Omega$ ) quelconque mais fixée, la position ( $M_t$ ) de cette particule à l'instant ( $t$ ) est repérée par le vecteur :

$$\bar{x} = \overline{OM_t} = x_k \cdot e_k \quad (3.2)$$

Les variables ( $x_1, x_2, x_3$ ) coordonnées des particules de ( $\Omega$ ) à l'instant de courant ( $t$ ), sont appelées variables d'Euler.

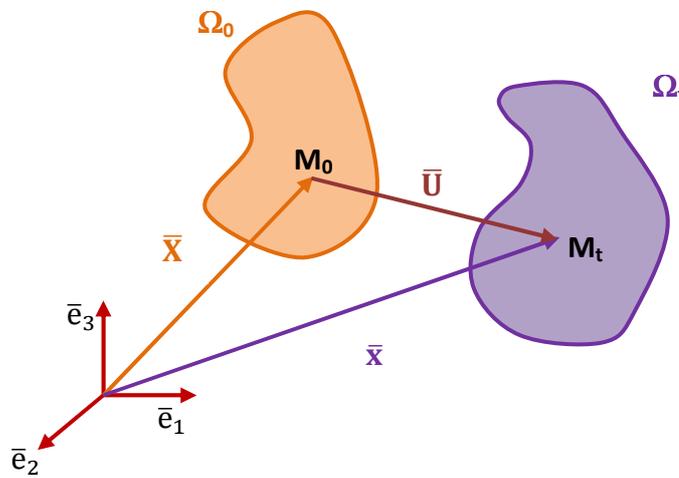


Fig. 3.1 Configuration de référence et configuration déformée

### 3.1.4.4 Description des mouvements

Soit un solide déformable ( $\Omega$ ) qui occupe une configuration initiale ( $C_0$ ) à l'instant ( $t_0$ ) et une autre actuelle ( $C_t$ ) au temps ( $t$ ). Il existe deux façons de décrire le mouvement de ce solide ; une description eulérienne où il est repéré par sa position ( $\bar{x}$ ) actuelle à l'instant ( $t$ ) et une description lagrangienne dans laquelle il est repéré par sa position initiale ( $\bar{X}$ ) à ( $t_0$ ).

Le mouvement de ce solide est défini complètement par la fonction  $\bar{x}(\bar{X}, t)$  qui donne la position ( $\bar{x}$ ) du solide au temps ( $t$ ) référencé par ( $\bar{X}$ ).

Cette fonction permet de définir la transformation qui permet de passer de la configuration ( $C_0$ ) à la configuration actuelle ( $C_t$ ) (figure 3.1). On peut aussi définir une fonction ( $\Phi$ ) qui associe à tout point matériel  $M_0(\bar{X})$  de ( $C_0$ ) un point  $M(\bar{x})$  de ( $C_t$ ) :

$$\bar{x} = \Phi(\bar{X}) = \bar{X} + \bar{U}(\bar{X}) \quad (3.3)$$

$\bar{X}$  est la position du point ( $M_0$ ), qui s'écrit dans le système de coordonnées matérielles :

$$X_i = (X_1, X_2, X_3) \quad (3.4)$$

$\bar{x}$  représente la position du point  $M$ , il est écrit dans le système de coordonnées spatiales par :

$$x_i = (x_1, x_2, x_3) \quad (3.5)$$

$\bar{U}$  est le vecteur déplacement du point considéré.

$$\bar{U} = \bar{x} - \bar{X} \quad (3.6)$$

On définit le tenseur gradient de la transformation d'ordre 2, appelé aussi application linéaire tangente qui sert au transport matériel d'un vecteur de la configuration ( $C_0$ ) à la configuration ( $C_t$ ) par :

$$\bar{\mathbb{F}} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{X}} \quad (3.7)$$

Ce tenseur qui fait grand usage dans l'étude des grandes transformations est une quantité très importante voir même clef dans la description des déformations d'un milieu continu. Il permet de relier la position relative de deux particules avant et après déformation.

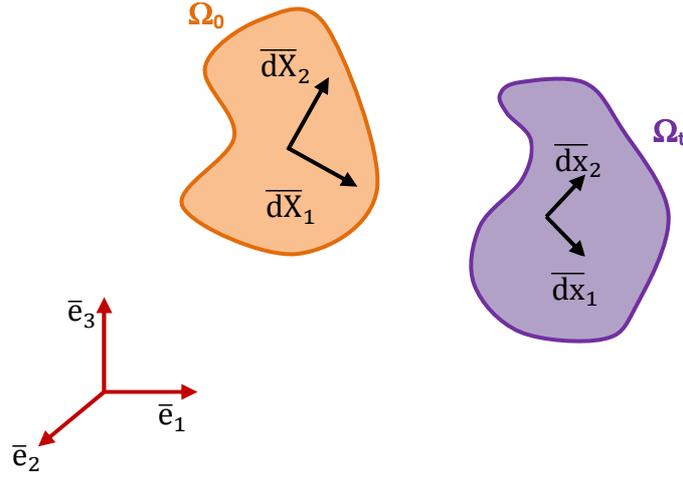


Fig. 3.2 Transformation de vecteurs matériels

### 3.1.5 Définition des tenseurs de déformation

Le tenseur gradient de déformation  $\bar{\mathbb{F}}$  ne permet pas tout seul d'avoir une bonne mesure de la déformation ; par contre, il nous permet de construire deux tenseurs qui sont déterminants dans la quantification de la déformation d'un milieu continu [28], [82-85]. Pour cela, considérons deux vecteurs élémentaires  $\bar{dX}_1$  et  $\bar{dX}_2$  qui, après transformation, deviennent  $\bar{dx}_1$  et  $\bar{dx}_2$  (figure 3.2) et exprimons le produit scalaire de ces deux vecteurs avant et après déformation :

$$\bar{dx}_1 \cdot \bar{dx}_2 = (\bar{\mathbb{F}} \cdot \bar{dX}_1) \cdot (\bar{\mathbb{F}} \cdot \bar{dX}_2) = \bar{dX}_1 \cdot (\bar{\mathbb{F}}^T \cdot \bar{\mathbb{F}}) \cdot \bar{dX}_2 = \bar{dX}_1 \cdot (\bar{\mathbb{C}}) \cdot \bar{dX}_2 \quad (3.8)$$

On définit ainsi un nouveau tenseur symétrique d'ordre deux  $\bar{\mathbb{C}} = \bar{\mathbb{F}}^T \cdot \bar{\mathbb{F}}$ , appelé tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit. Inversement, on peut définir le produit scalaire des deux vecteurs de la configuration actuelle par :

$$\bar{dX}_1 \cdot \bar{dX}_2 = (\bar{\mathbb{F}}^{-1} \cdot \bar{dx}_1) \cdot (\bar{\mathbb{F}}^{-1} \cdot \bar{dx}_2) = \bar{dx}_1 \cdot (\bar{\mathbb{F}}^{-T} \cdot \bar{\mathbb{F}}^{-1}) \cdot \bar{dx}_2 = \bar{dx}_1 \cdot (\bar{\mathbb{B}}) \cdot \bar{dx}_2 \quad (3.9)$$

On peut aussi définir le tenseur symétrique du second ordre, appelé tenseur des dilatations de Cauchy Green gauche  $\bar{\mathbb{B}}$ . A partir de ces deux tenseurs, on peut aussi définir deux nouveaux tenseurs respectivement le tenseur de Green Lagrange  $\bar{\mathbb{E}}$  donné par la relation (3.8) et celui d'Euler-Almansi  $\bar{\mathbb{e}}$  (3.9).

$$\bar{\mathbb{E}} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbb{C}} - \bar{\mathbb{I}}) \quad (3.10)$$

$$\bar{\bar{e}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{I}} - \bar{\bar{B}}^{-1}) \quad (3.11)$$

### 3.1.5.1 Transformation d'un volume

Le tenseur gradient de déformation permet aussi de transformer un élément de volume ( $dV$ ) de la configuration de référence en un élément ( $dv$ ) dans la configuration actuelle par l'intermédiaire d'une quantité de transport appelée Jacobien de la transformation.

$$J = \det \bar{\bar{F}} = \det\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{X}}\right) = \frac{\rho}{\rho_0} \quad (3.12)$$

Tel que :

$$dv = J \cdot dV \quad (3.13)$$

$\rho$  et  $\rho_0$  sont les masses volumiques, respectivement aux configurations initiale et actuelle.

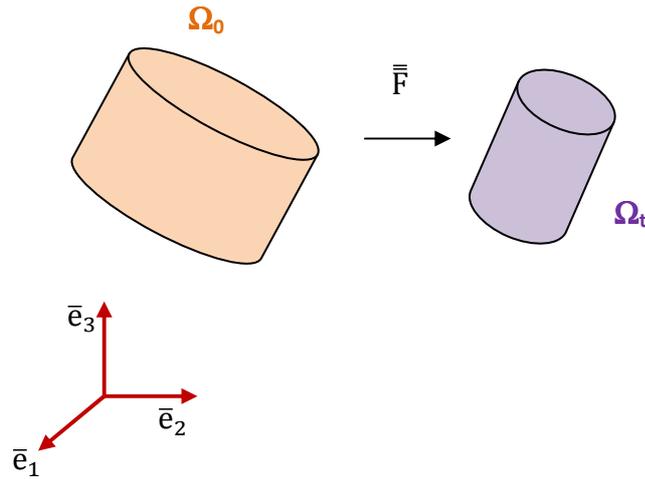


Fig. 3.3 Transformation d'un volume matériel

### 3.1.5.2 Transformation de surface

Un élément de surface ( $dS$ ), de normale unitaire ( $\bar{\bar{N}}$ ) défini dans ( $C_0$ ) (figure 3.4) est transformé par  $\bar{\bar{F}}$  en un élément de surface ( $ds$ ) de normale unitaire ( $\bar{\bar{n}}$ ) dans la configuration ( $C_t$ ) par la relation :

$$\bar{\bar{n}} \cdot ds = J \cdot \bar{\bar{F}}^{-T} \cdot \bar{\bar{N}} \cdot dS_0 \quad (3.14)$$

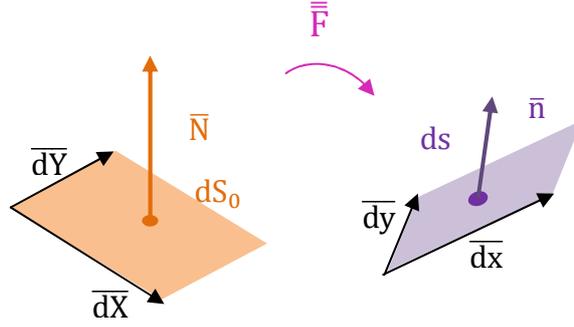


Fig. 3.4 Transport d'une surface  $dS_0$  par le tenseur  $\bar{\bar{F}}$

### 3.1.5.3 Décomposition polaire

Le tenseur  $\bar{\bar{F}}$  peut être aussi écrit d'après le théorème de la décomposition polaire [4], [83] :

$$\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{R}} \cdot \bar{\bar{U}} = \bar{\bar{V}} \cdot \bar{\bar{R}} \quad (3.15)$$

$\bar{\bar{R}}$  représente le tenseur orthogonal de rotation pure,  $\bar{\bar{U}}$  et  $\bar{\bar{V}}$  sont respectivement les tenseurs d'élongation droit et gauche qui peuvent être écrits, en fonction des tenseurs de Cauchy Green droit et gauche,

$$\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{F}}^T \cdot \bar{\bar{F}} = \bar{\bar{U}}^2 \quad (3.16)$$

$$\bar{\bar{B}} = \bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{F}}^{-T} = \bar{\bar{V}}^2 \quad (3.17)$$

Les tenseurs  $\bar{\bar{C}}$  et  $\bar{\bar{U}}$  sont utilisés dans la description des déformations dans la configuration initiale, tandis que  $\bar{\bar{B}}$  et  $\bar{\bar{V}}$  sont employées pour les décrire dans la configuration actuelle [74-77], [83], [86-87].

$$\bar{\bar{U}} = \bar{\bar{C}}^{\frac{1}{2}} \quad (3.18)$$

$$\bar{\bar{V}} = \bar{\bar{B}}^{\frac{1}{2}} \quad (3.19)$$

....

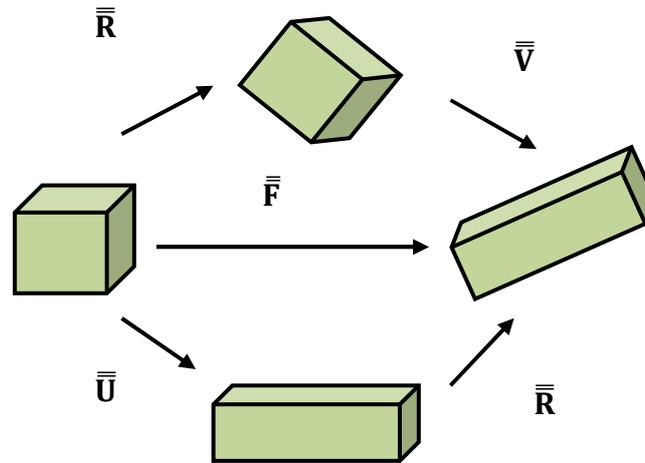


Fig. 3.5 Décomposition polaire

### 3.1.5.4 Taux de déformation

Les déformations sont mesurées soit dans la configuration de référence ( $C_0$ ) soit dans la configuration actuelle ( $C_t$ ). Les vitesses de ces déformations, appelées aussi taux de déformation, peuvent être définies grâce au tenseur du taux de déformation lagrangien, qui représente le taux de variation au cours du temps ou dérivée particulière du tenseur de Green-Lagrange  $\dot{\bar{\mathbf{E}}}$ , et par le tenseur taux de déformation spatial (eulérien) noté  $\bar{\mathbf{D}}$  qui est relié au tenseur précédant  $\dot{\bar{\mathbf{E}}}$  par les relations :

$$\bar{\mathbf{D}} = \bar{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \dot{\bar{\mathbf{E}}} \cdot \bar{\mathbf{F}}^{-1} \quad (3.20)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{E}}} = \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \bar{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{F}} \quad (3.21)$$

### 3.1.6 Statique

Dans les grandes transformations, il est indispensable de faire la distinction entre les grandeurs eulériennes et celles lagrangiennes.

Puisqu'il existe plusieurs tenseurs de contrainte pour définir l'état de contrainte dans un milieu déformable, on doit distinguer entre ceux qui sont définis dans la configuration initiale  $C_0$  et ceux de la configuration actuelle ( $C_t$ ). Dans la configuration actuelle ( $C_t$ ), le vecteur de contrainte ( $\bar{\mathbf{t}}$ ) est défini par la relation :

$$\bar{\mathbf{t}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}} \quad (3.22)$$

La relation (3.22) stipule que :  $\bar{\sigma}$  est le tenseur de Cauchy symétrique qui transforme le vecteur unitaire  $\bar{n}$  d'une surface ( $dS_0$ ) en un vecteur de contrainte ( $\bar{t}$ ) appliqué sur la surface ( $ds$ ) (figure 3.4). Notons aussi que :

$$\bar{d}f = \bar{\sigma} \cdot \bar{n} \cdot ds \quad (3.23)$$

Dans cette relation, ( $\bar{d}f$ ) représente l'effort de cohésion d'après le principe de Cauchy. Cette expression peut être exprimée dans la configuration initiale ; ce qui permet de définir le premier tenseur de Piola Kirchhoff en substituant (3.14) dans (3.23) :

$$\bar{d}f = \bar{\sigma} \cdot J \cdot \bar{F}^{-T} \cdot \bar{N} \cdot dS_0 = \bar{P} \cdot \bar{N} \cdot dS_0 \quad (3.24)$$

Ce qui permet d'introduire les relations suivantes :

$$\bar{t}_0 = \bar{P} \cdot \bar{N} \quad (3.25)$$

Et :

$$\bar{P} = J \cdot \bar{\sigma} \cdot \bar{F}^{-T} \quad (3.26)$$

$\bar{t}_0$  est appelé pseudo vecteur contrainte et  $\bar{P}$  le premier tenseur de Piola Kirchhoff, appelé aussi tenseur de Boussinesq ; c'est un tenseur non symétrique qui représente, en fait, un état intermédiaire. Il n'est ni eulérien ni lagrangien. On peut construire à partir de ce tenseur, un tenseur lagrangien symétrique. Pour cela, introduisons virtuellement un vecteur ( $\bar{d}f_0$ ) transformé de  $\bar{d}f$  par  $\bar{F}^{-}$  tel que :

$$\bar{d}f = \bar{F} \cdot \bar{d}f_0 \quad (3.27)$$

Le vecteur ( $\bar{d}f_0$ ) n'a pas de sens physique car la notion de force ne peut avoir un sens que dans la configuration actuelle ; cependant, l'avantage de cette transformation de ( $\bar{d}f$ ) dans ( $C_0$ ) c'est qu'elle nous permet d'écrire :

$$\bar{d}f_0 = \bar{S} \cdot \bar{N} \cdot dS_0 \quad (3.28)$$

Dans cette relation,  $\bar{S}$  est le second tenseur de Piola Kirchhoff, on introduit aussi le tenseur eulérien de Kirchhoff défini par :

$$\tau = J \cdot \bar{\sigma} \quad (3.29)$$

Compte tenu des définitions précédentes, on peut écrire que :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{P}} \cdot J^{-1} \cdot \bar{\bar{F}}^T \quad (3.30)$$

$$\bar{\bar{S}} = \bar{\bar{F}}^{-1} \cdot \bar{\bar{P}} \quad (3.31)$$

$$\bar{\bar{S}} = \bar{\bar{F}}^{-1} \cdot J \cdot \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{\bar{F}}^{-T} \quad (3.32)$$

$$\bar{\bar{\sigma}} = J^{-1} \cdot \bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{S}} \cdot \bar{\bar{F}}^T \quad (3.33)$$

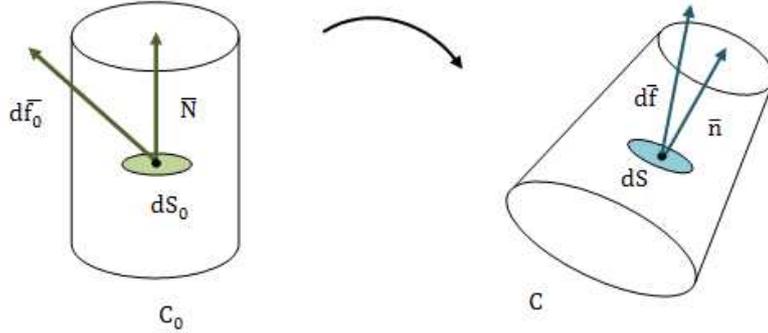


Fig. 3.6 Transport, par le tenseur  $\bar{\bar{F}}$ , d'une surface  $ds$

## 3.2 Modèle hypoélastique

### 3.2.1 Hypoélasticité

Dans l'écriture des lois de comportement des matériaux élastiques non linéaires, on utilise souvent des modèles hypoélastiques si l'état de contrainte est lié directement à l'état de déformation actuel et au chemin de chargement.

Ces modèles sont décrits par une fonctionnelle dont la forme est donnée par la relation suivante [3], [8], [10], [13], [35], [37], [88], [89]:

$$F(\bar{\bar{\sigma}}, d\bar{\bar{\sigma}}, \bar{\bar{\varepsilon}}, d\bar{\bar{\varepsilon}}) = 0 \quad (3.34)$$

Dans cette expression,  $(d\bar{\bar{\sigma}})$  et  $(d\bar{\bar{\varepsilon}})$  désignent respectivement les incréments de contrainte et de déformation. L'hypothèse de l'hypoélasticité stipule que l'incrément de contrainte dépend en même temps des incréments de déformation et de contrainte. Dans ce cas, les équations de comportement s'expriment sous deux formes [88], [13], [35], [89]:

$$d\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\bar{C}}}(\bar{\bar{\sigma}}, \bar{\bar{\varepsilon}}, \cdot) \cdot d\bar{\bar{\varepsilon}} \quad (3.35)$$

$$d\bar{\bar{\varepsilon}} = \bar{\bar{\bar{D}}}(\bar{\bar{\sigma}}, \bar{\bar{\varepsilon}}, \cdot) \cdot d\bar{\bar{\sigma}} \quad (3.36)$$

Un grand nombre de travaux sur les tissus de renforts ont permis d'élaborer des modèles hypoélastiques basés sur ces relations incrémentales [8], [13], [35], [37].

### 3.2.2 Hypoélasticité pour le cas des renforts tissés

A cause de la nature spécifique des déformations des renforts tissés, on utilise dans la modélisation de leur comportement mécanique, des modèles hypoélastiques qui prennent en considération les larges déformations et les non-linéarités qui en découlent. Ces modèles sont de la forme :

$$\bar{\sigma}^\nabla = \bar{\mathbb{C}} : \bar{\mathbb{D}} \quad (3.37)$$

Ou bien, en utilisant la notation indicielle :

$$\sigma_{ij}^\nabla = C_{ijkl} \cdot D_{kl} \quad (3.38)$$

Dans cette relation,  $(\sigma_{ij})$  est le tenseur eulérien de Cauchy,  $(D_{kl})$  le tenseur des taux de déformation tandis que  $(C_{ijkl})$  représente le tenseur de comportement orienté par un vecteur unitaire dans la direction matérielle des fibres et  $(\sigma_{ij}^\nabla)$  la dérivée objective de  $(\sigma_{ij})$  définie pour éviter les perturbations dues aux mouvements de corps rigides en rotation dans la dérivée temporelle directe  $\sigma_{ij}^\circ$  dont l'expression est donnée par :

$$\bar{\sigma}^\circ = \frac{d\bar{\sigma}}{dt} \quad (3.39)$$

Ce type de lois s'adapte au calcul incrémental par intégration de la loi (3.37).

### 3.2.3 Suivi de la direction des fibres

La problématique principale du modèle du milieu continu équivalent à un milieu fibreux, est le suivi de la direction forte anisotropie.

### 3.2.4 Objectivité des lois de comportement

Le principe d'objectivité stipule qu'une grandeur reste invariante pour tout changement d'observateur (indépendance des grandeurs devant le choix de l'observateur) [83], [37], [74], [74-75].

Par exemple une contrainte ne peut pas être nulle pour un observateur fixe, alors qu'elle ne l'est pas pour un autre observateur mobile, c'est une grandeur dite objective.

Une vitesse peut être nulle pour un observateur et peut ne pas l'être pour un autre, elle n'est pas objective. Le principe d'objectivité se résume dans l'invariance des grandeurs devant des rotations.

Dans ce qui suit, on présente les formules de transformations objectives qui permettent de tester l'objectivité des grandeurs eulériennes considérées dans l'écriture d'une loi de comportement. Si  $A$  est une grandeur eulérienne qui, tournée par un tenseur orthogonal ( $\bar{Q}$ ) devient ( $\tilde{A}$ ) donc :

- $A$  est un scalaire alors :  $\tilde{A} = A$
- $A$  est un vecteur alors :  $\tilde{A} = \bar{Q} \cdot A$
- $A$  est un tenseur d'ordre 2 alors :  $\tilde{A} = \bar{Q} \cdot A \cdot \bar{Q}^T$

### 3.2.5 Principe de l'indifférence matérielle

Ce principe signifie que l'écriture des équations tensorielles est la même dans tout référentiel [13], [35], [37], [74-75], [83]. Une loi de comportement doit vérifier le principe de l'indifférence matérielle (s'écrire sous une forme qui est indépendante de l'observateur). De ce fait, les grandeurs utilisées dans l'expression d'une loi de comportement doivent être objectives. Soit  $\bar{\bar{A}}$  un tenseur eulérien obtenu par rotation du tenseur  $\bar{A}$  supposé objectif, donc on peut écrire que :

$$\bar{\bar{A}} = \bar{Q} \cdot \bar{A} \cdot \bar{Q}^T \quad (3.40)$$

Si on dérive cette expression, on obtient :

$$\dot{\bar{\bar{A}}} = \dot{\bar{Q}} \cdot \bar{A} \cdot \bar{Q}^T + \bar{Q} \cdot \dot{\bar{A}} \cdot \bar{Q}^T + \bar{Q} \cdot \bar{A} \cdot \dot{\bar{Q}}^T \quad (3.41)$$

Il paraît clairement que  $\dot{\bar{\bar{A}}}$  n'est pas objectif car les deux derniers termes ne doivent pas apparaître dans la relation (3.41) ; ainsi, on peut dire qu'une dérivée temporelle directe d'un tenseur objectif n'est pas objective.

Dans une loi de comportement, on ne peut pas utiliser des dérivées directes pour satisfaire le principe d'objectivité. Pour éviter ce problème, on est généralement ramené à dériver, dans un référentiel fixe, par rapport à la matière afin d'éliminer les termes de rotations parasites ; on construit ainsi une dérivée objective [13], [35], [37].

### 3.2.6 Dérivée objective en rotation

Soit ( $\bar{Q}$ ) une rotation qui définit par rapport au référentiel, un repère dit « repère tourné » (figure 3.7) ; la dérivée objective dans le mouvement de rotation ( $\bar{Q}$ ) est la dérivée

pour un observateur qui serait fixe dans le repère tourné. On utilise ainsi le tenseur de contrainte de Cauchy  $\bar{\bar{\sigma}}$ .

$$\bar{\bar{\sigma}}^\nabla = \bar{\bar{Q}} \left( \frac{d}{dt} (\bar{\bar{Q}}^T \cdot \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{\bar{Q}}) \right) \cdot \bar{\bar{Q}}^T \quad (3.42)$$

On peut réécrire cette dérivée objective sous une autre forme. Pour ceci, calculons la dérivée temporelle directe de  $\bar{\bar{\sigma}}$  faisant apparaître les vecteurs de base du repère tourné:

$$\{\bar{\bar{e}}_i\} = \{\bar{\bar{e}}_1, \bar{\bar{e}}_2, \bar{\bar{e}}_3\} \quad (3.43)$$

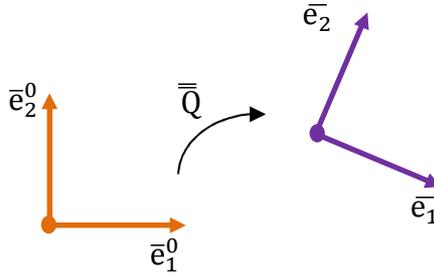


Fig. 3.7 Repères initial et tourné par la rotation polaire  $\bar{\bar{Q}}$

On définit le spin du repère  $\{\bar{\bar{e}}_i\}$  par :

$$\bar{\bar{\Omega}} = \dot{\bar{\bar{Q}}} \cdot \bar{\bar{Q}}^T \quad (3.44)$$

Tel que :

$$\dot{\bar{\bar{e}}}_i = \bar{\bar{\Omega}} \cdot \bar{\bar{e}}_i \quad (3.45)$$

Sachant que :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \sigma_{ij} \bar{\bar{e}}_i \otimes \bar{\bar{e}}_j \quad (3.46)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\bar{\sigma}}} &= \sigma_{ij} \dot{\bar{\bar{e}}}_i \otimes \bar{\bar{e}}_j + \sigma_{ij} \bar{\bar{e}}_i \otimes \dot{\bar{\bar{e}}}_j \\ \dot{\bar{\bar{\sigma}}} &= \sigma_{ij} \bar{\bar{e}}_i \otimes \bar{\bar{e}}_j + \sigma_{ij} (\bar{\bar{\Omega}} \cdot \bar{\bar{e}}_i) \otimes \bar{\bar{e}}_j + \sigma_{ij} \bar{\bar{e}}_i \otimes (\bar{\bar{\Omega}} \cdot \bar{\bar{e}}_j) \\ \dot{\bar{\bar{\sigma}}} &= \bar{\bar{\sigma}}^\nabla + \bar{\bar{\Omega}} \cdot \bar{\bar{\sigma}} + \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{\bar{\Omega}} = \bar{\bar{\sigma}}^\nabla + \bar{\bar{\Omega}} \cdot \bar{\bar{\sigma}} - \bar{\bar{\Omega}} \cdot \bar{\bar{\sigma}} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\dot{\bar{\bar{\sigma}}} = \bar{\bar{\sigma}}^\nabla + \bar{\bar{\Omega}} \cdot \bar{\bar{\sigma}} - \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{\bar{\Omega}} \quad (3.47)$$

Si le tenseur  $\bar{\bar{\Omega}} = \dot{\bar{\bar{Q}}} \cdot \bar{\bar{Q}}^T$  est orthogonal, alors  $\bar{\bar{\sigma}}^\nabla = \bar{\bar{\sigma}}^{\nabla GN}$

### 3.2.7 Le modèle hypoélastique utilisé dans la modélisation des fibres matérielles

Cette approche, utilisée dans la modélisation des fibres matérielles, est caractérisée par l'emploi d'une dérivée objective qui est basée sur le tenseur de rotation des fibres  $\bar{\bar{Q}}$ . Pour définir l'état de déformation sur la fibre, on suit l'évolution de la direction forte anisotropie. La dérivée objective de Green Naghdi du tenseur de Cauchy est donnée par la relation (3.42), où  $\bar{\bar{Q}}$  représente la rotation de la base initiale à la base matérielle de la fibre. Pour le cas des tissus bidirectionnels, elle est basée sur les deux directions chaîne et trame ; donc l'expression de  $\bar{\bar{Q}}$  est donnée par la relation :

$$\bar{\bar{Q}} = \bar{f}_1 \otimes \bar{e}_1 + \bar{f}_2 \otimes \bar{e}_2 \quad (3.48)$$

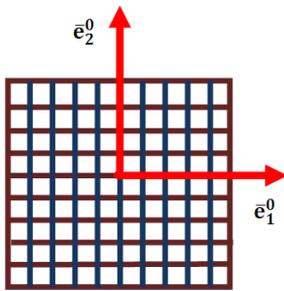


Fig. 3.8 Bases de Green-Naghdi et matérielle avant et après transformation

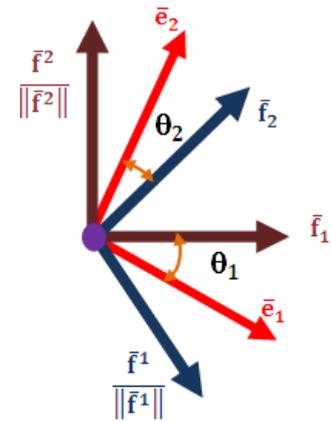
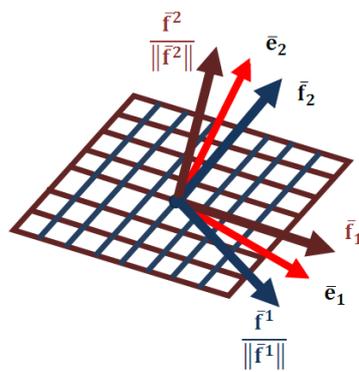


Fig.3.9 Schéma simplifié des différentes bases d'étude

### 3.2.8 Détermination des contraintes des fibres matérielles

Le tenseur de comportement  $\bar{\bar{C}}$  est orienté selon la direction des fibres, il est impératif d'actualiser et de mettre à jour les directions actuelles des fibres pour que les lois constitutives puissent être écrites correctement [13], [35], [37]. Une fois les directions des fibres actualisées, il devient possible de transformer les déformations depuis la base de Green Naghdi  $\bar{e}_\alpha$  (figures 3.8 et 3.9).

Pour nos calculs, nous utilisons le code de calcul Abaqus, celui-ci fournit les tenseurs gradients de la transformation  $\bar{\bar{F}}$  et le tenseur de déformation pure droit  $\bar{\bar{U}}$  ; ce qui permet de calculer le tenseur de rotation  $\bar{\bar{R}}$  par décomposition polaire du tenseur  $\bar{\bar{F}}$  :

$$\bar{\bar{R}} = \bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{U}}^{-1} \quad (3.49)$$

La base de Green Naghdi est actualisée par transport de l'orientation initiale de la base  $\bar{e}_\alpha^0$  par la matrice de passage  $\bar{R}$  :

$$\bar{e}_\alpha = \bar{R} \cdot \bar{e}_\alpha^0 \quad (3.50)$$

Pour le cas des tissus 2D ( $\alpha=1,2$ ), les directions actuelles des fibres  $\bar{f}_\alpha$  sont obtenues par transport de  $\bar{f}_\alpha^0$  par le tenseur  $\bar{F}$ ; notons ici, qu'au départ (état non déformé) les bases  $\bar{f}_\alpha^0$  et  $\bar{e}_\alpha^0$  coïncident.

$$\bar{f}_\alpha = \frac{\bar{F} \cdot \bar{e}_\alpha^0}{\|\bar{F} \cdot \bar{e}_\alpha^0\|} \quad (3.51)$$

Pour déterminer l'orientation actuelle entre la base GN et les directions des fibres matérielles, considérons les directions des fibres matérielles  $\bar{f}_1$  et  $\bar{f}_2$  (figures 3.8 et 3.9). Sachant que ces deux directions ne sont plus orthogonales après déformation, il devient impératif de construire deux bases orthogonales dont chacune serait orientée suivant l'un des deux axes confondus avec les deux directions matérielles fibres (chaînes et trames).

La première base  $(\bar{f}_1, \frac{\bar{f}_2}{\|\bar{f}_2\|})$ ; forme un angle  $\theta_1$  avec la base de Green Naghdi tel que :

$$\theta_1 = (\bar{e}_1, \bar{f}_1) \quad (3.52)$$

La deuxième base  $(\bar{f}_2, \frac{\bar{f}_1}{\|\bar{f}_1\|})$ ; forme un angle  $\theta_2$  avec la base de Green Naghdi tel que :

$$\theta_2 = (\bar{e}_2, \bar{f}_2) \quad (3.53)$$

Avec :

$$\bar{f}^\alpha \cdot \bar{f}_\beta = \delta_\beta^\alpha \quad (3.54)$$

$\delta_\beta^\alpha$  représente le symbole de Kronecker qui fait grand usage dans le calcul tensoriel, sa valeur est égale à 1 pour  $\alpha = \beta$  et 0 dans le cas contraire. Ainsi, on peut définir les deux matrices de passage  $T_1$  et  $T_2$  entre ces deux bases et celle de Green Naghdi :

$$[T_1]_{(\bar{e}, \bar{f}_1)} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Et

$$[T_2]_{(\bar{e}, \bar{f}_2)} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Dans ces deux expressions,  $\bar{e} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$  représente la base de Green Naghdi,  $(\bar{f}_1, \frac{\bar{f}^2}{\|\bar{f}^2\|})$  la base orthogonale ayant comme premier axe le vecteur  $\bar{f}_1$  qui représente la direction matérielle de la fibre 1 (sens chaîne) et  $\frac{\bar{f}^2}{\|\bar{f}^2\|}$  le second vecteur normalisé orthogonal à  $\bar{f}_1$ ,  $\theta_1$  est l'angle compris entre les vecteurs  $\bar{f}_1$  et  $\bar{e}_1$  de même  $(\bar{f}_2, \frac{\bar{f}^1}{\|\bar{f}^1\|})$  est la base orthogonale défini par les vecteurs  $\bar{f}_2$  de la direction matérielle de la fibre 2 (sens trame) et  $\frac{\bar{f}^1}{\|\bar{f}^1\|}$  orthogonale à  $\bar{f}_2$ .

L'incrément de déformation  $[d\varepsilon]_e$  est fourni par le code de calcul Abaqus à la fin de chaque boucle comme Output, ce qui permet de calculer les incréments de déformation par rapport à la première base  $(\bar{f}_1, \frac{\bar{f}^2}{\|\bar{f}^2\|})$  en utilisant les principes de changement de bases :

$$[d\varepsilon]_{f_1} = [T_1]^T \cdot [d\varepsilon]_e \cdot [T_1] \quad (3.57)$$

Les incréments de déformations cumulés sur la deuxième direction matérielle  $\bar{f}_2$  par rapport à la seconde base  $(\bar{f}_2, \frac{\bar{f}^1}{\|\bar{f}^1\|})$  sont calculés à partir de la relation :

$$[d\varepsilon]_{f_2} = [T_2]^T \cdot [d\varepsilon]_e \cdot [T_2] \quad (3.58)$$

$d\varepsilon_{11}^{f_1}$  et  $d\varepsilon_{22}^{f_2}$  représentent les composantes normales du tenseur des incréments de déformation,  $d\varepsilon_{11}^{f_1}$  agit sur la première direction matérielle  $\bar{f}_1$  et  $d\varepsilon_{22}^{f_2}$  sur la seconde direction  $\bar{f}_2$ . Les composantes tangentielles ou contraintes de cisaillement qui représentent la variation de l'angle entre les chaînes et les trames au cours de la déformation  $d\varepsilon_{12}^{f_1}$  et  $d\varepsilon_{12}^{f_2}$  sont données par la relation :

$$d\gamma = d\varepsilon_{12}^{f_1} + d\varepsilon_{12}^{f_2} \quad (3.59)$$

Les incréments de contraintes, dans les deux directions de fibres  $\bar{f}_1$  et  $\bar{f}_2$  sont ensuite calculés grâce aux composantes du tenseur de constitution qui lient les incréments de déformation à ceux de contraintes par rapport aux deux bases considérées :

$$[d\sigma]_{f_1} = [C]_{f_1} \cdot [d\varepsilon]_{f_1} \quad (3.60)$$

Et :

$$[d\sigma]_{f_2} = [C]_{f_2} \cdot [d\varepsilon]_{f_2} \quad (3.61)$$

$[C]_{f_1}$  et  $[C]_{f_2}$  représentent les tenseurs de constitution appelés aussi tenseurs de rigidité par rapport aux deux bases considérées.

$$[C]_{f_1} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Et :

$$[C]_{f_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Si on considère que les rigidités en tension  $E_1$  et  $E_2$  respectivement, et le module de cisaillement  $G_{12}$  sont les seules composantes non nulles du tenseur de constitution, les relations (3.60) et (3.61) deviennent :

$$\begin{bmatrix} d\sigma_{11}^{f_1} \\ d\sigma_{22}^{f_1} \\ d\sigma_{12}^{f_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_{11}^{f_1} \\ d\varepsilon_{22}^{f_1} \\ d\varepsilon_{12}^{f_1} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Et :

$$\begin{bmatrix} d\sigma_{11}^{f_2} \\ d\sigma_{22}^{f_2} \\ d\sigma_{12}^{f_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_{11}^{f_2} \\ d\varepsilon_{22}^{f_2} \\ d\varepsilon_{12}^{f_2} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Les incréments de contraintes calculés d'après les relations (3.64) et (3.65) sont ensuite cumulés selon la formulation classique de Hughes et Winget (paragraphe 2.6.1).

$$[\sigma^{n+1}]_{f_1^{n+1}} = [\sigma^n]_{f_1^n} + [d\sigma]_{f_1^{n+1/2}} \quad (3.66)$$

Et :

$$[\sigma^{n+1}]_{f_2^{n+1}} = [\sigma^n]_{f_2^n} + [d\sigma]_{f_2^{n+1/2}} \quad (3.67)$$

A la fin, les contraintes dans les deux directions des fibres sont calculées d'après les relations (3.66) et (3.67) puis projetées dans la base de Green Naghdi grâce à la transformation suivante :

$$[\sigma]_{\bar{e}} = [T_1]^T \cdot [\sigma]_{f_1} \cdot [T_1] + [T_2]^T \cdot [\sigma]_{f_2} \cdot [T_2] \quad (3.68)$$

### 3.3 Modèle hyperélastique

#### 3.3.1 Elasticité non linéaire

Dans le cadre de l'étude des grandes déformations, un matériau peut atteindre des valeurs élevées de déformations tout en restant élastique. De tels matériaux sont reconnus sous le nom de matériaux hyperélastiques. Leurs principales caractéristiques sont les suivantes [69]:

- Toute analyse de ces matériaux, se fait dans le cadre de l'hypothèse des grandes déformations.
- Les déformations ne sont pas permanentes.
- Il n'y a aucune proportionnalité entre les contraintes et les déformations.
- La relation contrainte-déformation est obtenue par la dérivation de la fonction énergie de déformation  $W$ .

#### 3.3.2 Principes de base

##### 3.3.2.1 Elongation

La figure 3.10 présente une barre de longueur initiale ( $L_0$ ) soumise à l'action d'une force d'étirement ( $F$ ), sa longueur après transformation devient ( $L$ ) et l'expression de sa déformation est donnée par :

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{u}{L_0} \quad (3.69)$$

Dans cette relation ( $u$ ) est le déplacement provoqué par la force ( $F$ ), l'élongation est défini comme étant le rapport entre les longueurs après et avant déformation.

$$\lambda = \frac{L}{L_0} = \frac{L_0 + u}{L_0} = 1 + \varepsilon \quad (3.70)$$

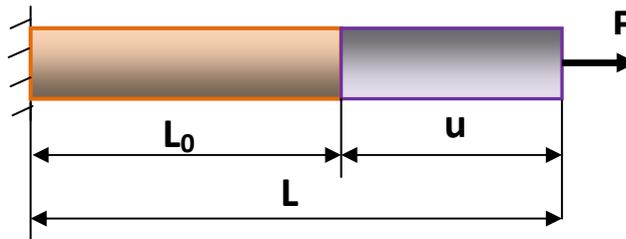


Fig. 3.10 Déformation d'un matériau hyperélastique

Pour les matériaux élastiques non linéaires, il existe trois (03) élongations principales  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$  qui permettent de mesurer les déformations.

### 3.3.2.2 Les invariants principaux

Les invariants de déformations  $I_1, I_2, I_3$  sont des grandeurs indépendantes du système de coordonnées choisi pour la mesure des déformations.

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (3.71)$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \cdot \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \cdot \lambda_1^2 \quad (3.72)$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 \cdot \lambda_3^2 \quad (3.73)$$

### 3.3.2.3 Hyperélasticité

L'hyperélasticité d'un matériau est sa capacité de subir des grandes déformations élastiques lorsqu'il est soumis à des petites forces sans perdre ses propriétés d'origine [90], [91].

#### Définition 1

Si un matériau hyperélastique a un comportement non linéaire ; cela signifie que sa déformation n'est pas directement proportionnelle à la charge appliquée.

#### Définition 2

Un matériau élastique est hyperélastique s'il existe une fonction scalaire notée  $W = W(\bar{\bar{E}})$  qui dépend du tenseur de Cauchy appelée fonction d'énergie de déformation. Cette fonction énergie de déformation  $W$  peut être aussi écrite en fonction des invariants du tenseur de Green Cauchy droit  $\bar{\bar{C}}$ .

#### Définition 3

Un matériau hyperélastique est un matériau élastique non linéaire en grandes transformations pour le quel on postule l'existence d'une fonction énergie de déformation, appelée souvent potentiel hyperélastique duquel dérive la loi de comportement. Ce potentiel, noté ( $W$ ), peut être exprimé en fonction du tenseur gradient de la transformation  $\bar{\bar{F}}$  [4], [6], [28], [67], [74-75], [77], [83], [92].

$$W = W(\bar{\bar{F}}) \quad (3.74)$$

Pour les matériaux hyperélastiques, la fonction énergie de déformation ( $W$ ) peut être donnée en fonction des invariants du tenseur de Green Cauchy droit  $\bar{\bar{C}}$ . Un matériau hyperélastique doit vérifier les critères suivant [4], [6], [28] :

- L'existence d'une configuration de référence libre de toute contrainte
- Le matériau ne doit pas dissiper de l'énergie

Le potentiel élastique ( $W$ ) doit vérifier et respecter le principe de l'indifférence matérielle quel que soit le tenseur  $\bar{\bar{Q}}$  orthogonal [83].

$$W = W(\bar{\bar{Q}}, \bar{\bar{F}}) \quad (3.75)$$

Pour le cas d'une rotation issue d'une décomposition polaire du tenseur gradient de la transformation  $\bar{\bar{F}}$ , nous avons  $\bar{\bar{Q}} = \bar{\bar{R}}^T$  et cette relation devient :

$$W = W(\bar{\bar{R}}^T, \bar{\bar{F}}) = W(\bar{\bar{U}}) \quad (3.76)$$

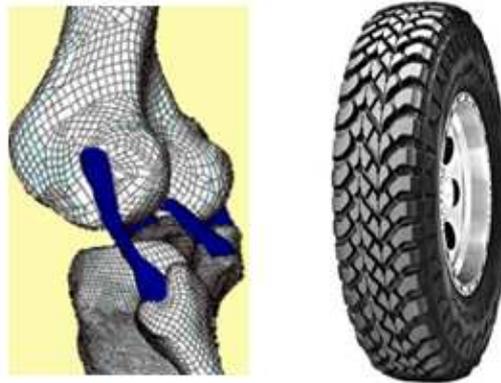


Fig. 3.11 Exemples d'utilisation de matériaux hyperélastiques

### 3.3.2.4 Lois de comportements pour les matériaux hyperélastiques

En introduisant le second tenseur de Piola Kirchhoff  $\bar{\bar{S}}$ , et en se basant sur l'hypothèse qui stipule qu'un matériau hyperélastique ne dissipe pas de l'énergie [28], la forme générale de la loi de comportement d'un matériau hyperélastique est donnée en fonction du tenseur de Cauchy Green droit  $\bar{\bar{C}}$ , par [83], [77] :

$$\bar{\bar{S}} = 2 \frac{\partial W}{\partial \bar{\bar{C}}} \quad (3.77)$$

### 3.3.3 Modèles hyperélastiques utilisés pour les renforts tissés

#### 3.3.3.1 Modes de déformation des renforts tissés

Les renforts tissés pour composites, sont caractérisés par un comportement très particulier à cause de leurs constituants (fibres et mèches). Leurs modes de déformation prépondérants sont : la déformation de tension selon les deux directions fortes anisotropies (chaînes et trames). Cette déformation est très faible à cause des grandes rigidités présentées par les réseaux chaîne et trame ; elle correspond par conséquent à des énergies de déformation très grandes. La déformation en cisaillement dans le plan du tissu qui peut être très importante avec des rigidités très faibles à cause du mouvement possible entre les chaînes et les trames jusqu'à l'angle de verrouillage, appelé angle limite. Elle correspond à des énergies de déformation très faibles.

#### 3.3.3.2 Anisotropie des renforts tissés

Les tissus de renfort sont généralement caractérisés par deux réseaux de mèches, tissés selon deux directions appelées chaîne et trame qui peuvent se déplacer les unes par rapport aux autres (figure 3.13).

Les tissus de renfort ne sont pas en fait des structures continues. A l'échelle macroscopique, on peut postuler qu'ils sont des structures continues car le tissage permet de réduire considérablement le glissement entre les mèches. Ainsi, on peut considérer que deux points voisins avant la déformation restent voisins après la déformation [4], [69].

On peut modéliser le comportement mécanique des tissus de renfort à l'échelle macroscopique par un milieu équivalent continu possédant des propriétés fortement anisotropes.

Soient  $\bar{L}_1$  et  $\bar{L}_2$  deux vecteurs unitaires de la base de l'orientation initiale par rapport à la configuration de référence ( $C_0$ ) (avant déformation). Cette base est supposée orthogonale dans la configuration non déformée et ses deux vecteurs définissent les directions privilégiées dites de fortes anisotropies (figure 3.13).

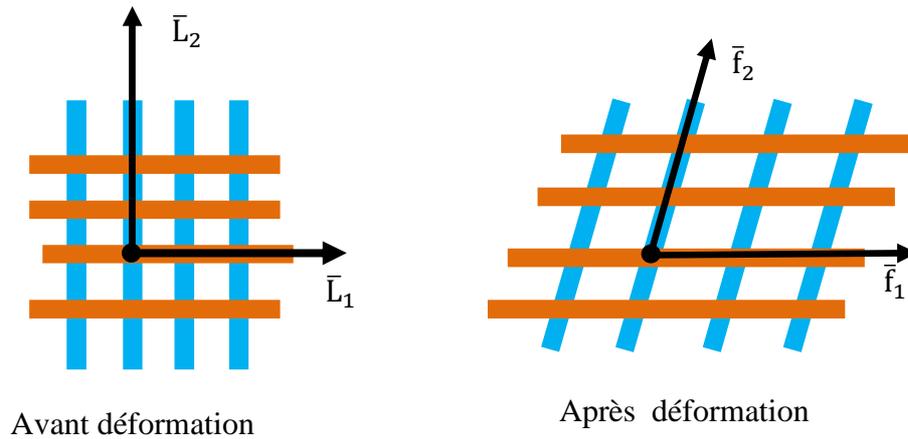


Fig. 3.12 Directions fortes anisotropies dans un milieu anisotrope

### 3.3.3.3 Lois constitutives hyperélastiques pour le cas des renforts tissés

Le potentiel élastique ( $W$ ), considéré dans l'étude des renforts tissés, doit respecter le principe de l'indifférence matérielle qui assure l'objectivité des équations constitutives [4], [74-75], [77] [83]. Son expression est une fonction scalaire écrite en fonction du tenseur de déformation de Cauchy Green :

$$W(\bar{\mathbb{C}}) = W(\bar{\mathbb{Q}} \cdot \bar{\mathbb{F}} \cdot \bar{\mathbb{Q}}^T) \quad (3.78)$$

Pour toute rotation  $\bar{\mathbb{Q}}$  autour des axes de symétrie matérielle, cette condition est satisfaite si le potentiel  $W$  est exprimé par l'une des expressions suivantes [4], [83]:

1. L'énergie de déformation est une fonction scalaire des composantes du tenseur  $\bar{\mathbb{C}}$  dans la base formée par les directions matérielles du tissu de renfort [4], [6], [93-94].
2. L'énergie de déformation est une fonction scalaire du tenseur de déformation et des tenseurs de structure [4], [69]:

### 3.3.4 Modèle hyperélastique retenu

Pour cette étude, nous avons choisi un modèle hyperélastique qui a été développé et utilisé par les auteurs [4], [73] dans l'étude du comportement mécanique des renforts tissés.

#### 3.3.4.1 Formulation d'un potentiel pour la loi de comportement

Deux tenseurs du second ordre sont introduits dans l'expression de l'énergie de déformation  $W$  [95], dans le but de prendre en considération la dépendance directionnelle du comportement des renforts tissés et des directions fortes anisotropies (chaîne et trame).

Ces tenseurs appelés tenseurs de structure, utilisés pour des applications de formage des renforts tissés pour la première fois par [4], [73], ont pour objectif d'introduire dans le modèle hyperélastique le comportement anisotrope dans les directions chaînes et trames.

$$W(\bar{\mathbb{C}}) = W(\bar{\mathbb{C}}, \bar{\mathbb{L}}_{11}, \bar{\mathbb{L}}_{22}) = W(\bar{\mathbb{Q}} \cdot \bar{\mathbb{C}} \cdot \bar{\mathbb{Q}}^T, \bar{\mathbb{Q}} \cdot \bar{\mathbb{L}}_{11} \cdot \bar{\mathbb{Q}}^T, \bar{\mathbb{Q}} \cdot \bar{\mathbb{L}}_{22} \cdot \bar{\mathbb{Q}}^T) \quad (3.79)$$

Avec :

$$\bar{\mathbb{L}}_{ii} = \bar{\mathbb{L}}_i \otimes \bar{\mathbb{L}}_i \quad (3.80)$$

$i=1,2$  sans sommation tel que :

$$\bar{\mathbb{L}}_{11} = \bar{\mathbb{L}}_1 \otimes \bar{\mathbb{L}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbb{L}}_{22} = \bar{\mathbb{L}}_2 \otimes \bar{\mathbb{L}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ils vérifient la propriété suivante :

$$\bar{\mathbb{L}}_{ii} = \delta_{ij} \quad (3.81)$$

$$\bar{\mathbb{L}}_{11} \otimes \bar{\mathbb{L}}_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour compléter le produit tensoriel entre les vecteurs  $\bar{\mathbb{L}}_1$  et  $\bar{\mathbb{L}}_2$ , on définit également :

$$\bar{\mathbb{L}}_{ij} = \bar{\mathbb{L}}_i \otimes \bar{\mathbb{L}}_j \quad (3.82)$$

$i \neq j = 1,2$  sans sommation

La fonction scalaire d'argument scalaire  $\bar{\mathbb{C}}$ ,  $\bar{\mathbb{L}}_{11}$  et  $\bar{\mathbb{L}}_{22}$  est une fonction isotrope, d'après le théorème de représentation des fonctions isotropes [4], [83], [90], on peut l'exprimer en fonction d'un certain nombre d'invariants.

Ceux-ci sont choisis de préférence de telle sorte qu'ils aient un sens physique. Le choix est fondé sur les principaux modes de déformation des renforts tissés, membrane pour notre cas : les tensions dans les mèches et le cisaillement du réseau formé par les chaînes et les trames. Le potentiel s'écrit :

$$W(\bar{\mathbb{C}}) = W(\bar{\mathbb{C}}, \bar{\mathbb{L}}_{11}, \bar{\mathbb{L}}_{22}) = W(I_1, I_2, I_{12}) = W(\lambda_1, \lambda_2, \cos\theta) \quad (3.83)$$

Dans la relation précédente,  $I_1$  et  $I_2$  représentent les invariants de tension et  $I_{12}$  l'invariant de cisaillement.  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  représentent les élongations et  $\cos\theta$  le cosinus de l'angle formé par les mèches. Leurs expressions sont données dans le tableau suivant :

Tableau 3.1 : Expressions des invariants de tension et de cisaillement

Invariants	tension	cisaillement
Type 1	$I_i = \text{Tr}(\bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{L}}_{ii}) \quad (i = 1,2)$	$I_{12} = \frac{1}{I_1 \cdot I_2} \text{Tr}(\bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{L}}_{11} \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{L}}_{22})$
Type 2	$I_i = \bar{L}_i \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{L}_i = C_{ii} = \lambda_i^2 \quad (i = 1,2)$	$I_{12} = \frac{C_{12}^2}{C_{11} \cdot C_{22}} = \cos^2 \theta$

### 3.3.4.2 Formulation de la loi de comportement hyperélastique avec des invariants de type 1

Comme est présenté précédemment, l'expression du potentiel de déformation est  $W(\bar{\bar{C}}, \bar{\bar{L}}_{11}, \bar{\bar{L}}_{22}) = W(I_1, I_2, I_{12})$ , où  $W$  est la fonction objective de l'énergie de déformation.

Elle est, en fait, l'équation de base à partir de laquelle on peut obtenir les tenseurs de contraintes et de déformations. Le choix des arguments de la relation (3.83) doit être judicieux pour obtenir un modèle adéquat qui décrit le comportement des renforts tissés, caractérisé par deux modes de déformation prédominants ; la traction des mèches dans les directions fortes anisotropies ainsi que le cisaillement des réseaux chaînes et trames.

#### 3.3.4.2.1 Les invariants de tension

Les invariants de tension représentent le carré de l'élongation dans la direction d'anisotropie (i).

$$I_i = \bar{L}_i \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{L}_i = C_{ii} = \lambda_i^2 \quad (3.84)$$

$i=1,2$  sans sommation

$\lambda_1$  : élongation associée a la direction matérielle  $\bar{L}_1$

$\lambda_2$  : élongation associée a la direction matérielle  $\bar{L}_2$

Les élongations  $\lambda_i$  sont obtenues par des essais de traction sur les tissus de renfort et sont définies par la relation :

$$\bar{\bar{C}} : \bar{\bar{L}}_{ii} = I_i = \text{Tr}(\bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{L}}_{ii}) \quad (3.85)$$

$i, j = 1,2$  sans sommation

$I_i$  sont les invariants mathématiques obtenues par le théorème de représentation des fonctions isotropes [SID 82].

$$I_1 = \text{Tr}(\bar{\mathbb{C}} \cdot \bar{\mathbb{L}}_{11}) = \text{Tr} \left( \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Tr} \begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ C_{12} & 0 \end{pmatrix} = C_{11}$$

$$I_2 = \text{Tr}(\bar{\mathbb{C}} \cdot \bar{\mathbb{L}}_{22}) = \text{Tr} \left( \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Tr} \begin{pmatrix} 0 & C_{12} \\ 0 & C_{22} \end{pmatrix} = C_{22}$$

### 3.3.4.2.2 Les invariant de cisaillement

L'expression de l'invariant de cisaillement est donné dans le [tableau 3.1](#):

$$I_{12} = \frac{1}{I_1 \cdot I_2} \text{Tr}(\bar{\mathbb{C}} \cdot \bar{\mathbb{L}}_{11} \cdot \bar{\mathbb{C}} \cdot \bar{\mathbb{L}}_{22}) = \frac{\bar{I}_{12}}{I_1 \cdot I_2} \quad (3.86)$$

Cette expression est donnée en fonction des composantes du tenseur de Green Cauchy (annexe B) par :

$$I_{12} = \frac{C_{12}^2}{C_{11} \cdot C_{22}} = \cos^2 \theta \quad (3.87)$$

Avec :

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \gamma \quad (3.88)$$

Dans cette relation ( $\theta$ ) représente l'angle entre les réseaux de mèches et ( $\gamma$ ) l'angle de glissement entre ces réseaux ([figure 3.13](#)).

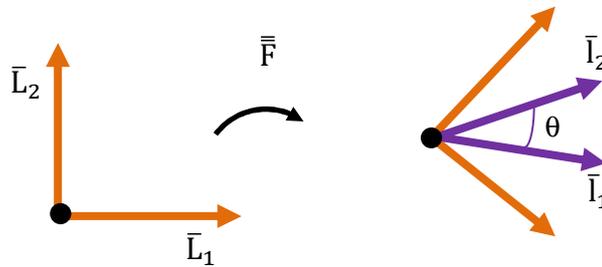


Fig. 3.13 Orientation initiale et après déformation des mèches

### 3.3.4.2.3 Expression de la loi de comportement

Pour le cas des matériaux hyperélastiques, le second tenseur de Piola Kirchhoff  $\bar{\mathbb{S}}$  dérive d'un potentiel élastique ( $W$ ) et a pour expression :

$$\bar{\mathbb{S}} = 2 \frac{\partial W}{\partial \bar{\mathbb{C}}}$$

La combinaison des relations (3.77) et (3.83) donne :

$$\bar{\mathbb{S}} = 2 \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \bar{\mathbb{C}}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \bar{\mathbb{C}}} + \frac{\partial W}{\partial I_{12}} \frac{\partial I_{12}}{\partial \bar{\mathbb{C}}} \right] \quad (3.89)$$

### 3.3.4.2.4 Dérivées des invariants de tension

Les dérivées des invariants de tension sont données par la relation suivante :

$$\frac{\partial I_i}{\partial \bar{C}} = \frac{\partial \text{Tr}(\bar{C} \cdot \bar{L}_{ii})}{\partial \bar{C}} = \frac{\partial(\bar{C} : \bar{L}_{ii})}{\partial \bar{C}} = \bar{L}_{ii} \quad (i = 1,2) \quad (3.90)$$

### 3.3.4.2.5 Dérivées de l'invariant de cisaillement

La dérivée de l'invariant de cisaillement par rapport au tenseur  $\bar{C}$  est donnée par la relation suivante :

$$\frac{\partial I_{12}}{\partial \bar{C}} = \frac{\partial I_{12}}{\partial I_1} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial \bar{C}} + \frac{\partial I_{12}}{\partial I_2} \cdot \frac{\partial I_2}{\partial \bar{C}} + \frac{\partial I_{12}}{\partial \bar{I}_{12}} \cdot \frac{\partial \bar{I}_{12}}{\partial \bar{C}} \quad (3.91)$$

D'après la relation (3.86), nous avons :

$$I_{12} = \frac{\bar{I}_{12}}{I_1 \cdot I_2}$$

Et :

$$\bar{I}_{12} = \text{Tr}(\bar{C} \cdot \bar{L}_{11} \cdot \bar{C} \cdot \bar{L}_{22})$$

Alors :

$$\frac{\partial I_{12}}{\partial I_1} = -\frac{\bar{I}_{12} \cdot I_2}{(I_1 \cdot I_2)^2}$$

$$\frac{\partial I_{12}}{\partial I_2} = -\frac{\bar{I}_{12} \cdot I_1}{(I_1 \cdot I_2)^2}$$

$$\frac{\partial I_{12}}{\partial \bar{I}_{12}} = \frac{1}{I_1 \cdot I_2}$$

La combinaison de (3.90) avec (3.91) permet d'écrire :

$$\frac{\partial I_{12}}{\partial \bar{C}} = -\frac{\bar{I}_{12} \cdot I_2}{(I_1 \cdot I_2)^2} \cdot \bar{L}_{11} - \frac{\bar{I}_{12} \cdot I_1}{(I_1 \cdot I_2)^2} \cdot \bar{L}_{22} + \frac{1}{I_1 \cdot I_2} \cdot \frac{\partial \bar{I}_{12}}{\partial \bar{C}} \quad (3.92)$$

L'expression du terme  $\frac{\partial \bar{I}_{12}}{\partial \bar{C}}$  est donnée par la relation (annexe C) :

$$\frac{\partial \bar{I}_{12}}{\partial \bar{C}} = \bar{I}_{12}^{\frac{1}{2}} \cdot (\bar{L}_{12} + \bar{L}_{21}) \quad (3.93)$$

Si on combine les relations (3.92) et (3.93) on obtient :

$$\frac{\partial I_{12}}{\partial \bar{C}} = -\frac{\bar{I}_{12} \cdot I_2}{(I_1 \cdot I_2)^2} \cdot \bar{L}_{11} - \frac{\bar{I}_{12} \cdot I_1}{(I_1 \cdot I_2)^2} \cdot \bar{L}_{22} + \frac{\bar{I}_{12}^{1/2}}{I_1 \cdot I_2} \cdot (\bar{L}_{12} + \bar{L}_{21}) \quad (3.94)$$

Sachant que d'après la relation (3.86):

$$I_{12} = \frac{\bar{I}_{12}}{I_1 \cdot I_2}$$

Alors :

$$\frac{\partial I_{12}}{\partial \bar{C}} = -\frac{I_{12}}{I_1} \bar{L}_{11} - \frac{I_{12}}{I_2} \bar{L}_{22} + \sqrt{\frac{I_{12}}{I_1 \cdot I_2}} (\bar{L}_{12} + \bar{L}_{21}) \quad (3.95)$$

### 3.3.4.2.6 Tenseur de contraintes de Piola Kirchhoff 2

Par combinaison des relations (3.89) et (3.95), on arrive à l'expression du second tenseur de Piola Kirchhoff :

$$\bar{\bar{S}} = 2 \cdot \frac{\partial W}{\partial I_1} \cdot \bar{L}_{11} + 2 \cdot \frac{\partial W}{\partial I_2} \cdot \bar{L}_{22} + 2 \cdot \left[ -\frac{I_{12}}{I_1} \cdot \bar{L}_{11} - \frac{I_{12}}{I_2} \cdot \bar{L}_{22} + \sqrt{\frac{I_{12}}{I_1 \cdot I_2}} \cdot (\bar{L}_{12} + \bar{L}_{21}) \right] \cdot \frac{\partial W}{\partial I_{12}} \quad (3.96)$$

Après réarrangement des termes de cette relation on obtient l'expression finale du second tenseur de Piola Kirchhoff 2.

$$\bar{\bar{S}} = 2 \cdot \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} - \frac{I_{12}}{I_1} \cdot \frac{\partial W}{\partial I_{12}} \right] \cdot \bar{L}_{11} + 2 \cdot \left[ \frac{\partial W}{\partial I_2} - \frac{I_{12}}{I_2} \cdot \frac{\partial W}{\partial I_{12}} \right] \cdot \bar{L}_{22} + 2 \cdot \left[ \sqrt{\frac{I_{12}}{I_1 \cdot I_2}} \cdot \frac{\partial W}{\partial I_{12}} \right] (\bar{L}_{12} + \bar{L}_{21}) \quad (3.97)$$

Les composantes du second tenseur de Piola Kirchhoff  $\bar{\bar{S}}$  dans le repère initial des mèches sont données par la relation :

$$\bar{\bar{S}} = S_{ij} \cdot \bar{L}_i \otimes \bar{L}_j \quad (i, j = 1, 2) \quad (3.98)$$

Alors :

$$S_{11} = 2 \cdot \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} - \frac{I_{12}}{I_1} \cdot \frac{\partial W}{\partial I_{12}} \right) \quad (3.99)$$

$$S_{22} = 2 \cdot \left( \frac{\partial W}{\partial I_2} - \frac{I_{12}}{I_2} \cdot \frac{\partial W}{\partial I_{12}} \right) \quad (3.100)$$

Et :

$$S_{12} = 2 \cdot \sqrt{\frac{I_{12}}{I_1 \cdot I_2}} \cdot \frac{\partial W}{\partial I_{12}} \quad (3.101)$$

Le tenseur de contrainte de Cauchy  $\bar{\bar{\sigma}}$  est donné par la relation :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \frac{1}{J} \cdot \bar{F} \cdot \bar{\bar{S}} \cdot \bar{F}^T \quad (3.102)$$

Si on remplace (3.102) dans (3.98), on obtient le tenseur de Cauchy dans la base déformée non orthogonale.

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{J} \cdot S^{ij} \cdot \bar{I}_i \otimes \bar{I}_j \quad (3.103)$$

Avec :

$$\bar{I}_i = \bar{F} \cdot \bar{L}_i \quad (i = 1,2) \quad (3.104)$$

### 3.3.4.3 Formulation de la loi de comportement hyperélastique avec les invariants de type 2

Dans cette approche, l'expression du potentiel (W) est une fonction scalaire d'arguments, les élongations dans les deux directions matérielles du tissu ainsi que le cosinus de l'angle formé entre les deux directions fortes anisotropies.

$$W = W(\lambda_1, \lambda_2, \cos\theta) \quad (3.105)$$

#### 3.3.4.3.1 Expression de la loi de comportement

L'expression du second tenseur de Piola Kirchhoff  $\bar{S}$  qui dérive du potentiel (W), est donnée en fonction des invariants du second type par la relation :

$$\bar{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \bar{C}} = 2 \cdot \left[ \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \bar{C}} + \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \bar{C}} + \frac{\partial W}{\partial \cos\theta} \frac{\partial \cos\theta}{\partial \bar{C}} \right] \quad (3.106)$$

#### 3.3.4.3.2 Dérivées des élongations ( $\lambda_i$ )

D'après la relation (3.84), nous avons :

$$\frac{\partial I_i}{\partial \bar{C}} = \frac{\partial \lambda_i^2}{\partial \bar{C}} = 2 \cdot \lambda_i \cdot \frac{\partial \lambda_i}{\partial \bar{C}} = \bar{L}_{ii}$$

Alors, la dérivée des élongations  $\lambda_i$  par rapport au tenseur  $\bar{C}$  est :

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \bar{C}} = \frac{1}{2 \cdot \lambda_i} \bar{L}_{ii} \quad (i = 1,2) \quad (3.107)$$

#### 3.3.4.3.3 Dérivées des cosinus de $\theta$

D'après la relation (3.84) :

$$I_i = \bar{L}_i \cdot \bar{C} \cdot \bar{L}_i = C_{ii} = \lambda_i^2$$

$$I_1 = \lambda_1^2$$

$$I_2 = \lambda_2^2$$

Et la relation (3.87):

$$I_{12} = \frac{C_{12}^2}{C_{11} \cdot C_{22}} = \cos^2\theta$$

Si on substitue les relations (3.84), (3.87) dans (3.95) on obtient :

$$\frac{\partial \cos^2\theta}{\partial \bar{C}} = -\frac{\cos^2\theta}{\lambda_1^2} \cdot \bar{L}_{11} - \frac{\cos^2\theta}{\lambda_2^2} \cdot \bar{L}_{22} + \frac{\cos\theta}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \cdot (\bar{L}_{12} + \bar{L}_{21}) \quad (3.108)$$

D'un autre coté, la dérivée de cette expression par rapport au tenseur  $\bar{C}$  est :

$$\frac{\partial \cos^2\theta}{\partial \bar{C}} = 2\cos\theta \frac{\partial \cos\theta}{\partial \bar{C}} \quad (3.109)$$

Alors :

$$2\cos\theta \frac{\partial \cos\theta}{\partial \bar{C}} = -\frac{\cos^2\theta}{\lambda_1^2} \cdot \bar{L}_{11} - \frac{\cos^2\theta}{\lambda_2^2} \cdot \bar{L}_{22} + \frac{\cos\theta}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \cdot (\bar{L}_{12} + \bar{L}_{21}) \quad (3.110)$$

Soit alors, après simplification :

$$\frac{\partial \cos\theta}{\partial \bar{C}} = -\frac{\cos\theta}{2 \cdot \lambda_1^2} \cdot \bar{L}_{11} - \frac{\cos\theta}{2 \cdot \lambda_2^2} \cdot \bar{L}_{22} + \frac{1}{2 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2} \cdot (\bar{L}_{12} + \bar{L}_{21}) \quad (3.111)$$

#### 3.3.4.3.4 Tenseur de contraintes de Piola Kirchhoff 2

Le second tenseur de Piola Kirchhoff  $\bar{S}$  devient en substituant les relations (3.107) et (3.111) dans (3.106) :

$$\bar{S} = 2 \cdot \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} \frac{1}{2 \cdot \lambda_1} \bar{L}_{11} + 2 \cdot \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} \frac{1}{2 \cdot \lambda_2} \bar{L}_{22} + 2 \cdot \frac{\partial W}{\partial \cos\theta} \left[ \frac{1}{2 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2} \cdot (\bar{L}_{12} + \bar{L}_{21}) - \frac{\cos\theta}{2 \cdot \lambda_1^2} \cdot \bar{L}_{11} - \frac{\cos\theta}{2 \cdot \lambda_2^2} \cdot \bar{L}_{22} \right] \quad (3.112)$$

Soit après réarrangement :

$$\bar{S} = \left[ \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - \frac{\cos\theta}{\lambda_1^2} \cdot \frac{\partial W}{\partial \cos\theta} \right] \cdot \bar{L}_{11} + \left[ \frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} - \frac{\cos\theta}{\lambda_2^2} \cdot \frac{\partial W}{\partial \cos\theta} \right] \cdot \bar{L}_{22} + \frac{1}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \cdot \frac{\partial W}{\partial \cos\theta} \cdot (\bar{L}_{12} + \bar{L}_{21}) \quad (3.113)$$

Les composantes du second tenseur de Piola Kirchhoff  $\bar{S}$  dans la configuration initiale sont données par :

$$S_{11} = \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - \frac{\cos\theta}{\lambda_1^2} \cdot \frac{\partial W}{\partial \cos\theta} \quad (3.114)$$

$$S_{22} = \frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} - \frac{\cos\theta}{\lambda_2^2} \cdot \frac{\partial W}{\partial \cos\theta} \quad (3.115)$$

$$S_{12} = \frac{1}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \cdot \frac{\partial W}{\partial \cos\theta} \quad (3.116)$$

$\bar{\bar{S}}$  est un tenseur lagrangien de la configuration initiale,  $\bar{\bar{\sigma}}$  est le tenseur de contrainte de Cauchy donné par la relation (3.102), sa projection dans la configuration actuelle est donnée par la relation (3.103).

### 3.3.4.4 Expression du potentiel

La réponse élastique est due principalement à la résistance des mèches à la traction dans les deux directions chaîne et trame et à la résistance au cisaillement du tissu aux variations angulaires des réseaux formés par les mèches.

Le potentiel ( $W$ ) est supposé être la somme de deux potentiels de tension dans les sens chaîne et trame et un troisième de cisaillement.

Dans le cadre de cette étude, on considère deux hypothèses simplificatrices qui stipulent que les tensions dans les mèches dans les deux sens sont supposées découplées et que les tensions dans les mèches et le cisaillement dans le plan sont indépendants.

En réalité la première hypothèse n'est pas tout à fait vraie ; des résultats d'essais expérimentaux de type traction bi-axiale ont montré que le tissage a une influence sur les tensions et les déformations dans les deux sens chaîne et trame (figure 1.14).

L'hypothèse de découplage n'est utilisée que pour des raisons simplificatrices. Pour la deuxième hypothèse, des travaux expérimentaux menés par [20] ont bien montré que les tensions dans les mèches ne dépendaient que très peu de l'angle entre ces dernières (figure 3.14).

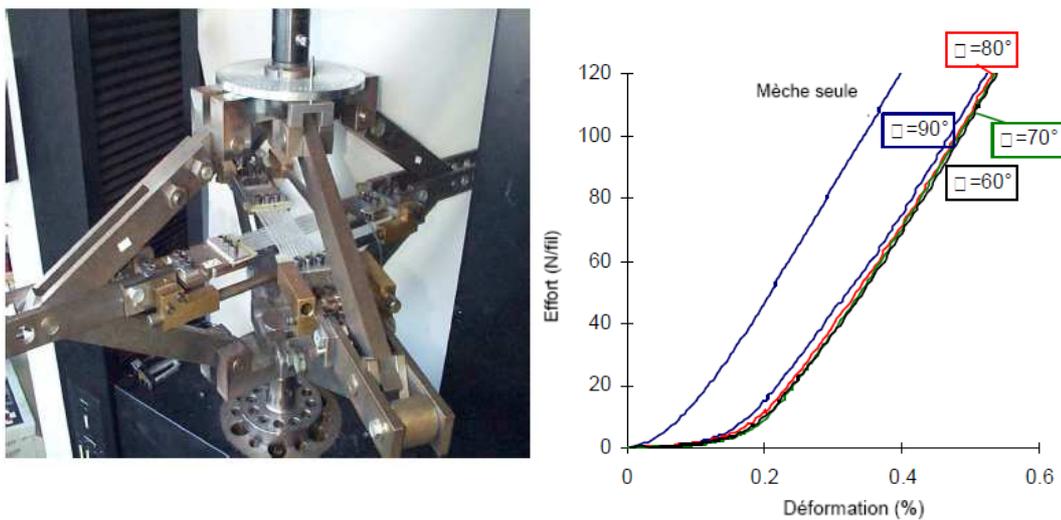


Fig. 3.14 Influence de l'angle de cisaillement sur les tensions dans les mèches

Pour le cas des invariants du premier type, le potentiel ( $W$ ) est défini comme suit :

$$W(\bar{C}) = W_1(I_1) + W_2(I_2) + W_c(I_{12}) \quad (3.117)$$

Pour le cas des invariants du second type son expression est :

$$W(\bar{C}) = W_1(\lambda_1) + W_2(\lambda_2) + W_c(\cos\theta) \quad (3.118)$$

$W_1(I_1)$ ,  $W_2(I_2)$ ,  $W_1(\lambda_1)$  et  $W_2(\lambda_2)$ , représentent les énergies de déformation de tension dans les deux sens chaîne et trame, tandis que  $W_c(I_{12})$  et  $W_c(\cos\theta)$  sont les énergies de déformation de cisaillement plan.

Le potentiel  $W$  est choisi parmi des fonctions qui vérifient les conditions de dérivabilité et continuité par rapport aux invariants. Ce choix doit aussi respecter la condition de la contrainte nulle à l'état naturel. Ce potentiel comporte des constantes à déterminer. Pour cela, il est nécessaire de recourir à des essais expérimentaux [50]. Trois tests sont nécessaires ; deux essais de traction dans les deux directions chaîne et trame et un essai de cisaillement plan [4].

Les constantes du modèle sont déterminées en reliant les valeurs expérimentales à celles fournies par le modèle en minimisant une fonctionnelle qui met en jeu la différence entre ces deux types de valeurs calculées et expérimentales.

### 3.3.4.4.1 Expression du potentiel d'énergie avec des invariants du type 1

L'expression de chaque terme du potentiel ( $W$ ) en fonction des invariants du premier type est choisie parmi une classe de polynômes dont la représentation comme suit :

$$W_1(I_1) = \sum_{i=0}^r \frac{1}{i+1} A_i (I_1^{i+1} - 1) \quad (3.119)$$

$r$  est le degré du polynôme d'interpolation (exemple si  $r=2$ ) :

$$W_1(I_1) = A_0(I_1 - 1) + \frac{1}{2}(I_1^2 - 1) + \frac{1}{3}(I_1^3 - 1)$$

$$W_2(I_2) = \sum_{j=0}^s \frac{1}{j+1} B_j (I_2^{j+1} - 1) \quad (3.120)$$

$s$  est le degré du polynôme d'interpolation

$$W_c(I_{12}) = \sum_{k=1}^t \frac{1}{k} C_k I_{12}^k \quad (3.121)$$

$t$  est le degré du polynôme d'interpolation

La forme générale du potentiel proposé est :

$$\bar{W}(\bar{C}) = \sum_{i=0}^r \frac{1}{i+1} A_i (I_1^{i+1} - 1) + \sum_{j=0}^s \frac{1}{j+1} B_j (I_2^{j+1} - 1) + \sum_{k=1}^t \frac{1}{k} C_k I_{12}^k \quad (3.122)$$

### 3.3.4.4.2 Expression du potentiel d'énergie avec des invariants du type 2

Les polynômes considérés sont, dans ce cas, des fonctions des élongations, pour les deux premiers termes de tension du potentiel ( $W$ ) ; pour le troisième terme de cisaillement, c'est un polynôme en fonction du cosinus de l'angle  $\theta$  entre les mèches.

$$W_1(\lambda_1) = \sum_{i=0}^m \frac{1}{i+2} a_i (\lambda_1^{i+2} - 1) \quad (3.123)$$

$$W_2(\lambda_2) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j+2} b_j (\lambda_2^{j+2} - 1) \quad (3.124)$$

$$W_c(\cos\theta) = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k+1} c_k \cos^{k+1}\theta \quad (3.125)$$

$m, n, k$  sont les degrés du polynôme d'interpolation ; la forme générale du potentiel devient :

$$W = \sum_{i=0}^m \frac{1}{i+2} a_i (\lambda_1^{i+2} - 1) + \sum_{j=0}^n \frac{1}{j+2} b_j (\lambda_2^{j+2} - 1) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k+1} c_k \cos^{k+1}\theta \quad (3.126)$$

Ce potentiel est nul pour une déformation nulle où  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  et  $\cos \theta = 0$ , ce qui vérifie l'hypothèse de la contrainte naturelle nulle.  $a_i$ ,  $b_j$  et  $c_k$  sont des constantes à déterminer en couplant les données expérimentales à celles du modèle.

### 3.3.4.4.3 Tenseur de contrainte de Piola Kirchhoff 2 avec les invariants de type 1

Les dérivées des termes du potentiel ( $W$ ) par rapport aux invariants sont :

$$\frac{\partial W_1}{\partial I_1} = \sum_{i=0}^r A_i \cdot I_1^i \quad (3.127)$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial I_2} = \sum_{j=0}^s B_j \cdot I_2^j \quad (3.128)$$

$$\frac{\partial W_c}{\partial I_{12}} = \sum_{k=1}^t C_k \cdot I_{12}^{k-1} \quad (3.129)$$

Alors si on substitue (3.127), (3.128) et (3.129) dans (3.97) on arrive à :

$$S_{11} = 2 \cdot \left( \sum_{i=0}^r A_i \cdot I_1^i - \frac{I_{12}}{I_1} \cdot \sum_{k=1}^t C_k \cdot I_{12}^{k-1} \right) = 2 \cdot \left( \sum_{i=0}^r A_i \cdot I_1^i - \frac{1}{I_1} \cdot \sum_{k=1}^t C_k \cdot I_{12}^k \right) \quad (3.130)$$

$$S_{22} = 2 \cdot \left( \sum_{j=0}^s B_j \cdot I_2^j - \frac{I_{12}}{I_2} \cdot \sum_{k=1}^t C_k \cdot I_{12}^{k-1} \right) = 2 \cdot \left( \sum_{j=0}^s B_j \cdot I_2^j - \frac{1}{I_2} \cdot \sum_{k=1}^t C_k \cdot I_{12}^k \right) \quad (3.131)$$

$$S_{12} = 2 \cdot \left( \sqrt{\frac{I_{12}}{I_1 \cdot I_2}} \cdot \sum_{k=1}^t C_k \cdot I_{12}^{k-1} \right) = 2 \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{I_1 \cdot I_2}} \cdot \sum_{k=1}^t C_k \cdot I_{12}^{k-\frac{1}{2}} \right) \quad (3.132)$$

### 3.3.4.4 Tenseur de contrainte de Piola Kirchhoff 2 avec des invariants de type 2

Les dérivées des termes du potentiel par rapport aux invariants sont:

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_1} = \sum_{i=0}^m a_i \cdot \lambda_1^{i+1} \quad (3.133)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_2} = \sum_{j=0}^n b_j \cdot \lambda_2^{j+1} \quad (3.134)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \cos \theta} = \sum_{k=0}^p c_k \cos^k \theta \quad (3.135)$$

Si on substitue (3.133), (3.134) et (3.135) dans (3.113), les composantes du second tenseur de Piola Kirchhoff deviennent :

$$S_{11} = \frac{1}{\lambda_1} \cdot \sum_{i=0}^m a_i \cdot \lambda_1^{i+1} - \frac{\cos \theta}{\lambda_1^2} \cdot \sum_{k=0}^p c_k \cos^k \theta = \sum_{i=0}^m a_i \cdot \lambda_1^i - \frac{\cos \theta}{\lambda_1^2} \cdot \sum_{k=1}^p c_k \cdot \cos^k \theta \quad (3.136)$$

$$S_{22} = \frac{1}{\lambda_2} \cdot \sum_{j=0}^n b_j \cdot \lambda_2^{j+1} - \frac{\cos \theta}{\lambda_2^2} \cdot \sum_{k=0}^p c_k \cos^k \theta = \sum_{j=0}^n b_j \cdot \lambda_2^j - \frac{\cos \theta}{\lambda_2^2} \cdot \sum_{k=1}^p c_k \cdot \cos^k \theta \quad (3.137)$$

$$S_{12} = \frac{1}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \cdot \sum_{k=1}^p c_k \cos^k \theta \quad (3.138)$$

A l'état naturel, la condition de contraintes nulles est vérifiée si  $\sum_{i=0}^m a_i = 0$  et  $\sum_{j=0}^n b_j = 0$ .

Cet état correspond à  $I_1 = I_2 = 1$  et  $W_1 = W_2 = 0$  ; de même pour  $\cos 90 = 0$  et  $W_c = 0$

### 3.3.4.5 Identification des paramètres du modèle hyperélastique

Le modèle hyperélastique, écrit en fonction des invariants de type 1 ou bien ceux du type 2, comporte des paramètres dont l'identification est indispensable. Pour cela, on fait recours à des essais élémentaires expérimentaux sur les tissus de renfort.

Pour le modèle hyperélastique adopté, on suppose que le caractère bi-axial de la traction du tissu de renfort soit négligeable ; on ne tient compte que des tensions des mèches dans les deux directions fortes anisotropies et du cisaillement plan.

Ainsi, trois essais élémentaires sont retenus : deux essais de traction dans chacune des deux directions (chaîne et trame) et un essai de cisaillement plan.

On suppose aussi que les tensions et le cisaillement plan sont découplés. Une étude expérimentale qui a été menée par [20] a montré que les tensions dans les réseaux chaînes et

trames ne dépendent que très peu de l'angle de cisaillement. Ce qui conduit à trois termes indépendants dans l'expression du potentiel (W).

Les paramètres de chaque terme seront identifiés d'une façon indépendante aux deux autres. L'identification des constantes du modèle hyperélastique se fait grâce à une procédure de minimisation de l'écart entre les valeurs expérimentales issues de chacun des trois essais et celles du modèle hyperplastique.

Dans ce travail, l'ajustement des données expérimentales avec celles théoriques est effectué par la méthode des moindres carrés. Au cours de chacun des essais d'identification, la force appliquée est reliée à une seule composante du tenseur de Piola Kirchhoff 2 ; l'effort de traction  $F_1$ , appliqué dans le sens chaîne, est relié à  $S_{11}$  ; l'effort  $F_2$ , appliqué dans le sens trame, est relié à  $S_{22}$  et l'effort de cisaillement  $F_{cis}$  à  $S_{12}$  ; ce qui conduit à trois fonctions d'écarts  $E_{c1}$ ,  $E_{c2}$  et  $E_{c3}$ , construites à base des composantes du tenseur  $\bar{S}$  dont chacune fait intervenir les composantes de deux vecteurs de données expérimentales et théoriques :

$$E_{c1} = \sum_{i=1}^n (S_{11i} - \bar{S}_{11i})^2 \quad (3.139)$$

$$E_{c2} = \sum_{i=1}^m (S_{22i} - \bar{S}_{22i})^2 \quad (3.140)$$

$$E_{c3} = \sum_{i=1}^l (S_{12i} - \bar{S}_{12i})^2 \quad (3.141)$$

$E_{c1}$  et  $E_{c2}$  représentent les écarts entre les données expérimentales obtenues à partir des essais de traction réalisés dans les directions chaîne et trame et les valeurs théoriques du modèle,  $E_{c3}$  représente l'écart entre les données expérimentales de l'essai de cisaillement et celles théoriques. Les indices n, m et l indiquent le nombre de valeurs expérimentales des trois essais ;  $S_{11i}$ ,  $S_{22i}$  et  $S_{12i}$  sont les vecteurs de données théoriques et  $\bar{S}_{11i}$ ,  $\bar{S}_{22i}$  et  $\bar{S}_{12i}$  représentent les vecteurs des données expérimentales dont les composantes sont données par les relations suivantes :

$$\bar{S}_{11i} = \frac{\bar{F}_{1i}}{\bar{\lambda}_{1i} \cdot L_0} \quad (3.142)$$

$$\bar{S}_{22i} = \frac{\bar{F}_{2i}}{\bar{\lambda}_{2i} \cdot L_0} \quad (3.143)$$

$$\bar{S}_{12i} = \frac{\bar{F}_{cisi}}{\sqrt{2} \cdot L_0 \cdot \bar{f}_{cisi}} \quad (3.145)$$

La minimisation de ces trois fonctions  $E_{c_1}$ ,  $E_{c_2}$  et  $E_{c_3}$  permet d'ajuster les paramètres du modèle proposé à celles expérimentales et de définir les constantes du modèle en fonction de la nature du renfort considéré.

### 3.3.4.6 Procédure d'identification

Le potentiel ( $W$ ) est un polynôme choisi parmi des fonctions continues et dérivables par rapport aux invariants considérés (type 1 ou type 2) et doit satisfaire la condition de la contrainte nulle à l'état naturel.

Un choix judicieux des constantes des deux expressions du modèle conduit au même potentiel dont les constantes sont déterminées à partir d'essais expérimentaux (deux essais de traction et un essai de cisaillement plan). Dans notre travail, on utilisera les données expérimentales obtenues par [15] et [50]. Les constantes du modèle sont déterminées par corrélation des données expérimentales à celles du modèle hyperélastique.

## 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons commencé par un aperçu sur quelques notions élémentaires de la mécanique des milieux continus en grandes transformations. Ces notions de base sont en fait indispensables, dans la formulation des modèles de comportement utilisés dans la modélisation et l'étude du comportement des renforts tissés.

Deux modèles de comportement ont été retenus et développés dans ce chapitre. Le premier est un modèle hypoélastique basé sur les lois en taux. Le deuxième hyperélastique pour lequel on postule l'existence d'une énergie qui est fonction du tenseur gradient de la transformation. La loi de comportement est ensuite déduite à partir de ce potentiel élastique, dont le choix doit être judicieux.

Une approche expérimentale permet de définir et déterminer les paramètres matériaux du modèle hyperélastique.

# Chapitre 4

Comparaison des deux  
modèles  
hypo et hyperélastique

# Chapitre 4

## Comparaison des deux modèles hypo et hyperélastique

### 4.1 Introduction

L'objectif principal de ce chapitre est la comparaison des deux modèles hypoélastique et hyperélastique développés dans le [chapitre 3](#). Pour cela, des simulations numériques sont réalisées sur un renfort tissé de type taffetas de verre largement utilisé comme renfort pour les matériaux composites. Les tests élémentaires de référence en grandes transformations retenus sont: traction unidirectionnelle, cisaillement simple et un test d'objectivité. Toutes les simulations sont réalisées sur le code de calcul industriel Abaqus/Explicit.

### 4.2 Renfort utilisé dans cette étude

Pour comparer les deux modèles hypo et hyperélastique, nous avons opté pour un tissu de renfort de type taffetas de verre équilibré. Ce dernier, largement utilisé avec les résines thermoplastiques dans la fabrication des pièces composites, a fait l'objet de plusieurs études expérimentales [\[15\]](#), [\[49\]](#), [\[21\]](#), [\[27\]](#), et numériques [\[4\]](#), [\[88\]](#), [\[13\]](#), [\[6\]](#).

Ces études ont toutes contribué à une compréhension approfondie de ces matériaux et à l'élaboration d'une base de données expérimentale qui a fourni les éléments nécessaires au développement de nouvelles méthodes et modèles pour simuler leurs comportements mécaniques.

Le taffetas de verre (Glass Taffetas) appelé aussi toile d'armure (Plain Weave) est l'armure la plus simple et la plus utilisée dans la fabrication des tissus de renfort pour composites. Elle est caractérisée par la disposition inverse de fils de chaînes et de trames comme montré sur la [figure 4.1](#).

Le matériau utilisé dans cette étude est le Twintex qui est un mélange de filaments de verre E et d'une résine thermoplastique (polypropylène noté PP), fabriqué par la firme Saint Gobin Vetrotex et commercialisé sous le nom commercial de Twintex. Il est caractérisé par sa très bonne formabilité. Il est fabriqué par comélagage de torons qui sont composés d'un mélange de filaments de fibres continues de verre E et de polypropylène PP. Cette technique a pour avantage majeur l'assurance d'une meilleure adhésion entre la matrice thermoplastique et les fibres [\[95\]](#), [\[96\]](#).

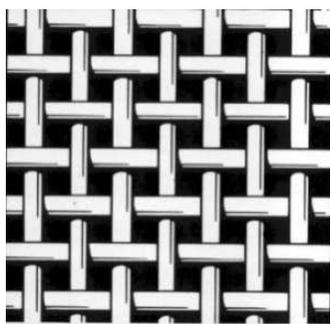


Fig. 4.1 Armure du tissu de renfort utilisé dans l'étude

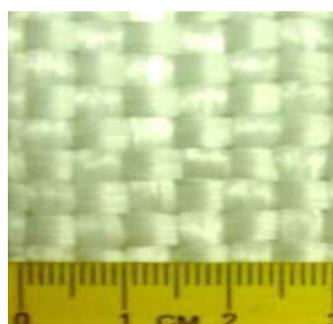


Fig. 4.2 Taffetas de verre équilibré utilisé dans cette étude [27]

Ce tissu a fait l'objet d'un Benchmarking réalisé par un groupe de chercheurs de six universités [27]. Ces propriétés et caractéristiques mécaniques sont présentées dans le [tableau 4.1](#).

Tableau 4.1 Différents caractéristiques du tissu utilisé dans cette étude

Type	Taffetas
Composition	Verre/PP
Tissage	Taffetas
Epaisseur, mm	1.2
Module de Young dans le sens chaîne, MPa	35400
Module de Young dans le sens trame, MPa	35400
Coefficient de Poisson	0
Masse volumique, tonne / mm <sup>3</sup>	0.00254
Module de cisaillement $G_{12}$ , Mpa	déterminé en fonction de l'angle de cisaillement

• **Détermination du module de cisaillement  $G_{12}$**

Le module de cisaillement ou module de rigidité au cisaillement, noté ici  $G_{12}$  est une grandeur caractéristique très importante des matériaux. Sa connaissance est primordiale dans toute étude du comportement au cisaillement des tissus de renfort pour composites. Son expression peut être exprimée comme une fonction de l'angle de cisaillement  $\gamma$  :

$$G_{12} = G_{12}(\gamma) \tag{4.1}$$

Pour déterminer l'expression de  $G_{12}$  de notre tissu, nous avons exploité les résultats expérimentaux du Benchmarking [27], sous forme de courbes donnant la force normalisée  $F_N$  en N/mm en fonction de l'angle de cisaillement  $\gamma$  en radian (figure.4.3). Nous avons ensuite procédé à une interpolation par la méthode des moindres carrés (forme polynomiale) pour

modéliser la courbe de  $F_N(\gamma)$ . Pour cela, nous avons développé une routine de calcul sur Matlab (les détails de la méthode et du programme sont présentés en annexe).

Nous avons obtenu un modèle sous la forme d'un polynôme de degré cinq (4.2) qui permet de tracer les courbes  $F_N(\gamma)$  (figure.4.4) et (figure.4.5). Ensuite la contrainte de cisaillement est obtenue par division directe des différentes valeurs de la force normalisée  $F_N$  par l'épaisseur du tissu notée  $t$  (4.3). On peut ainsi tracer la courbe  $\tau = \tau(\gamma)$  (figure.4.6), reliant les différentes valeurs de l'angle de cisaillement  $\gamma$  en radian à celles des contraintes de cisaillement en MPa. Enfin pour déterminer le module de cisaillement  $G_{12}(\gamma)$ , nous avons procédé à la dérivation de l'équation polynomiale de  $\tau(\gamma)$  par rapport à la variable  $\gamma$  (4.4).

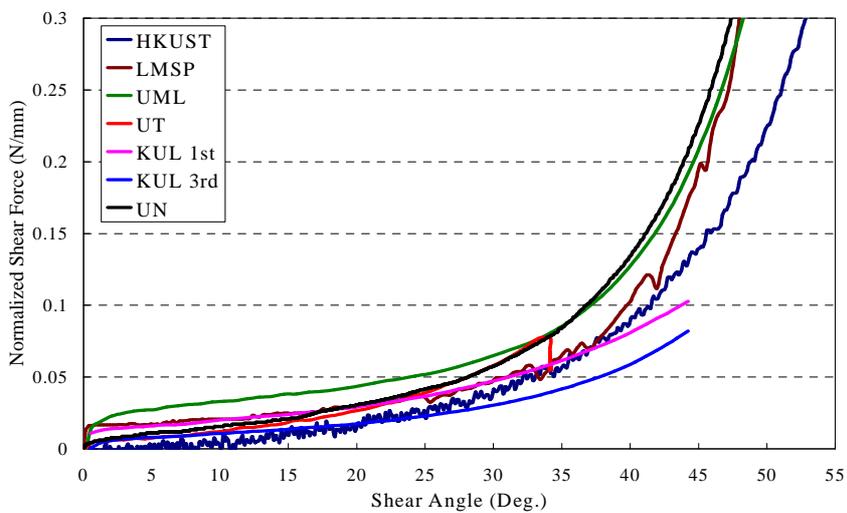


Fig. 4.3 Courbe de référence (ULM) [27]

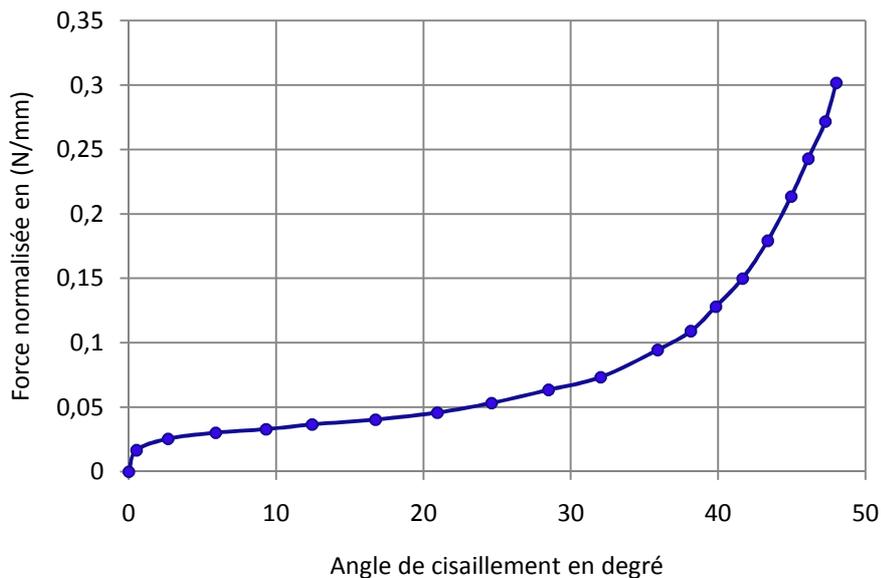


Fig. 4.4 Courbe effort normalisé en fonction de l'angle de cisaillement en degré

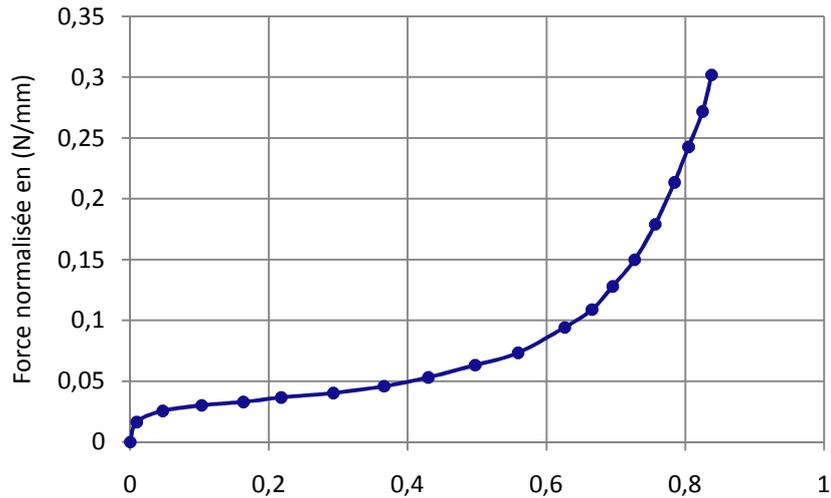


Fig. 4.5 Courbe effort normalisé en fonction de l'angle de cisaillement en radian

Après interpolation de la courbe de la figure 4.5, une expression de la force normalisée  $F_N$  en fonction de l'angle de cisaillement  $\gamma$  est obtenue sous la forme d'un polynôme du cinquième degré :

$$F_N(\gamma) = 7.2276\gamma^5 - 13.1508\gamma^4 + 9.3741\gamma^3 - 3.0146\gamma^2 + 0.4692\gamma + 0.0064 \quad (4.2)$$

Sachant que l'épaisseur du tissu est  $t = 1.2$  mm, l'expression de la contrainte de cisaillement  $\tau(\gamma)$  est obtenue par division des points de la courbe  $F_N(\gamma)$  par l'épaisseur  $t$ . (4.2). Ainsi on obtient l'expression de  $\tau(\gamma)$  sous la forme d'un polynôme de degré cinq suivante :

$$\tau(\gamma) = 6.023\gamma^5 - 10.959\gamma^4 + 7.8118\gamma^3 - 2.5121\gamma^2 + 0.391\gamma + 0.0053 \quad (4.3)$$

La représentation graphique de  $\tau$  en fonction de  $\gamma$  est indiquée sur la figure 4.6. Enfin si on dérive l'expression de la contrainte de cisaillement  $\tau(\gamma)$  par rapport à  $\gamma$  on aboutit à l'expression du module de cisaillement  $G_{12}(\gamma)$  :

$$G_{12}(\gamma) = 30.115\gamma^4 - 43.836\gamma^3 + 23.4354\gamma^2 - 5.0242\gamma + 0.391 \quad (4.4)$$

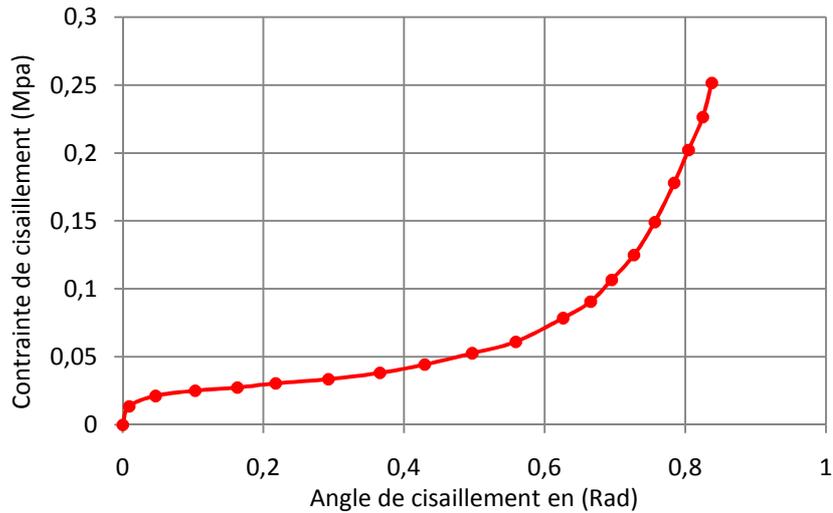


Fig. 4.6 Courbe contrainte de cisaillement en fonction de l'angle de cisaillement en radian

### 4.3 Validation du modèle hypoélastique

#### 4.3.1 Implémentation d'une routine utilisateur sous Abaqus

Le modèle hypoélastique développé dans le [chapitre 3](#), pour étudier le comportement mécanique des tissus de renfort à l'échelle macroscopique, est implémenté par le biais d'une routine utilisateur Vumat (Vectorized User Material) écrite en langage Fortran, sous Abaqus/Explicit [72] ; un code de calcul par éléments finis basé sur un schéma d'intégration explicite des équations d'équilibre dynamique pour répondre aux exigences d'une analyse non linéaire qui est souvent employée lors de l'étude du comportement mécanique des tissus de renfort pour composites. A chaque incrément de temps, le code fournit à l'entrée de la routine les composantes du tenseur gradient de la transformation  $\bar{\mathbf{F}}$  et celles du tenseur d'élongation pure Droit  $\bar{\mathbf{U}}$ .

A partir de ces données cinématiques, la Vumat permet de traiter la loi de comportement dans la base souhaitée et de fournir à la fin et à chaque point d'intégration, les composantes du tenseur de contraintes de Cauchy  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  exprimées dans la base de Green-Naghdi (base de calcul propre au code de calcul Abaqus/Explicit).

#### 4.3.2 Vumat à deux directions de fibres

La Vumat est écrite dans le but de simuler le comportement mécanique d'un tissu de renfort bidirectionnel suivant les deux directions de fibres dans les deux sens chaîne et trame. Pour l'utiliser il est indispensable de définir un certain nombre de valeurs caractéristiques du matériau à étudier dans un fichier de mise en données « .inp » généré par Abaqus.

Dans notre cas et à cause du caractère bidirectionnel du tissu de renfort étudié, on tient compte des modules de Young longitudinaux dans les deux directions de fibres notés respectivement  $E_1$  et  $E_2$  et du module de rigidité au cisaillement  $G_{12}$  exprimé en fonction de l'angle de cisaillement formé par les réseaux chaînes et trames.

On définit aussi un certain nombre de variables internes utilisées par la Vumat et qui permettent de visualiser les valeurs des grandeurs à déterminer, tels que les contraintes, les déformations dans les deux directions des fibres, les composantes cinématiques des tenseurs  $\bar{\bar{F}}$  et  $\bar{\bar{U}}$  ainsi que les angles de cisaillement entre les mèches.

Les variables internes de la Vumat peuvent être visualisées sur l'interface d'Abaqus Viewer grâce aux variables d'état notées (SDV, State Dependent Variables). Par exemple pour notre cas, les SDV5 et SDV65 représentent les valeurs de la composante  $\sigma_{11}$  du tenseur de Cauchy suivant les deux directions des fibres. Les SDV41, SDV42, SDV44 et SDV45 représentent les composantes cinématiques du tenseur  $\bar{\bar{F}}$  respectivement  $F_{11}$ ,  $F_{22}$ ,  $F_{12}$  et  $F_{21}$  tandis que SDV70 et SDV71 sont les angles de cisaillement en radians et en degrés.

#### 4.3.3 Principe de fonctionnement de l'algorithme de la Vumat

L'algorithme de la Vumat s'écrit sous la forme d'une boucle dans laquelle et à chaque incrément de temps, le processeur traite l'équilibre dynamique de l'élément et fournit les tenseurs suivants :  $\bar{\bar{F}}$ ,  $\bar{\bar{U}}$  et l'incrément de déformation  $[d\varepsilon]$ .

A partir de ces données cinématiques et à chaque point d'intégration, on fournit les données nécessaires pour le calcul dynamique de l'incrément suivant dans le cadre d'un schéma explicite sous Abaqus/Explicit. La loi de comportement dans la base voulue est déterminée, puis on fournit à la sortie de la Vumat les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy exprimées dans la base de Green-Naghdi.

• **Algorithme de la subroutine Vumat**

- Déclaration des variables communes de la Vumat
- Déclaration des variables internes à la Vumat
- Lecture des données matériaux ( $E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{21}, G_{12},$ , etc..)

**Calcul dans les points de Gauss**

**do 100 i=1, nblock**

- Sauvegarde du tenseur de déplacement droit  $\bar{\bar{U}}$
- Sauvegarde du tenseur du gradient de déformation  $\bar{\bar{F}}$
- Calcul de  $\bar{\bar{U}}^{-1}$  l'inverse de  $\bar{\bar{U}}$
- Calcul du tenseur de rotation  $\bar{\bar{R}}$  par la décomposition polaire  $\bar{\bar{R}} = \bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{U}}^{-1}$
- Actualisation de la base de Green Naghdi par rapport à sa direction  $\bar{e}_\alpha^0$  avant rotation par  $\bar{\bar{R}}$  (3.50)
- Détermination de la direction de la fibre  $\bar{f}_\alpha$  par rapport à sa direction  $\bar{e}_\alpha^0$  avant transformation par  $\bar{\bar{F}}$  (3.51)
- Construction des matrices de passage  $\bar{\bar{T}}_1$  et  $\bar{\bar{T}}_2$  (3.55) & (3.56)
- Calcul des incréments de déformation cumulés  $[d\varepsilon]_{f_1}, [d\varepsilon]_{f_2}, d\gamma$  (3.57), (3.58) & (3.60)
- Calcul des incréments de contrainte cumulés  $[d\sigma]_{f_1}, [d\sigma]_{f_2}$  (3.60) & (3.61)
- Calcul des contraintes  $[\sigma]_e$  dans le repère Green-Naghdi (3.68)
- Mise à jour des variables d'états (SDV)
- Fin du calcul sur les points de Gauss

**100 continue**

**end**

**4.3.4 Tests de base utilisés dans la validation de l'algorithme du modèle hypoélastique**

La Vumat du modèle hypoélastique est implémentée dans Abaqus/Explicit, puis validée par le biais d'essais numériques. Pour cela nous avons conduit des simulations sur un échantillon de tissu, le taffetas de verre. Les tests retenus pour cette validation sont: un essai de traction simple, un essai de cisaillement simple à 45° et enfin un test d'objectivité constitué par une traction simple suivie d'une rotation rigide.

La validation concerne principalement l'étude du comportement mécanique de ce tissu de renfort, par l'analyse des différentes valeurs des composantes du tenseur de

contraintes de Cauchy dans les deux directions des fibres et cumulées dans la base de calcul d'Abaqus (Green-Naghdi).

L'étude concerne aussi la cinématique de la transformation, en particulier les composantes du tenseur gradient de la transformation  $\bar{\mathbf{F}}$  et enfin l'objectivité de la loi de comportement.

Des éléments membranes, quadrilatères bidimensionnels à quatre nœuds de type M3D4R sont utilisés dans les différentes simulations. L'emploi de ces éléments se justifie par le fait que l'intégration se fait dans un seul point de Gauss, ce qui améliore les temps de calcul des schémas explicites.

Il est important de définir quelques bases qui sont nécessaires par la suite dans l'expression des différents tenseurs. La base locale de l'élément notée  $\bar{\mathbf{E}}_i^0$  est définie en chaque point d'intégration comme montré sur la figure 4.7. La fonction \*Orientation sous Abaqus permet de créer en chaque point d'intégration la base orientée d'un angle  $\theta$  par rapport à la première direction des fibres et perpendiculaire à la deuxième. Cette base est appelée base orientée initiale et notée  $\bar{\mathbf{e}}_i^0$  (figure 4.8).

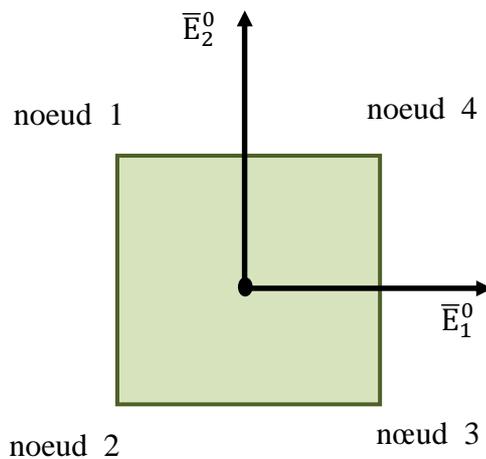


Fig. 4.7 Base locale de l'élément membrane M3D4R

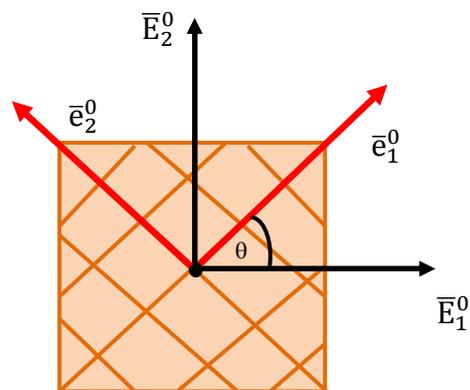


Fig. 4.8 Base locale orientée de l'élément membrane M3D4R

### 4.3.4.1 Test de traction unidirectionnelle

Le but de ce test est de vérifier la loi de comportement et les paramètres cinématiques de la transformation dans le cas d'une sollicitation de traction pure. On utilise pour ce test un élément initialement carré de dimensions (1x1mm<sup>2</sup>) et on lui impose un allongement unitaire selon la direction 1 (figure 4.9). Le paramètre de traction noté  $t_r$  varie de 0 à 1 au cours du test.

Dans sa configuration finale l'élément mesure (2x1 mm<sup>2</sup>) et son élongation est égale à 2 dans la direction de l'étirement (figure 4.9) et (figure 4.10). Les nœuds 1 et 2 sont contraints de tous déplacement ( $U_1=U_2=0$ ). Les nœuds 3 et 4 sont libres de se translater selon la direction 1 ( $U_1 \neq 0$ ). On impose aux nœuds 3 et 4 un déplacement unitaire. L'orientation des fibres est choisie à 0/90°, faisant ainsi coïncider les bases  $\bar{E}_i^0$  et  $\bar{e}_i^0$  (figure 4.9).

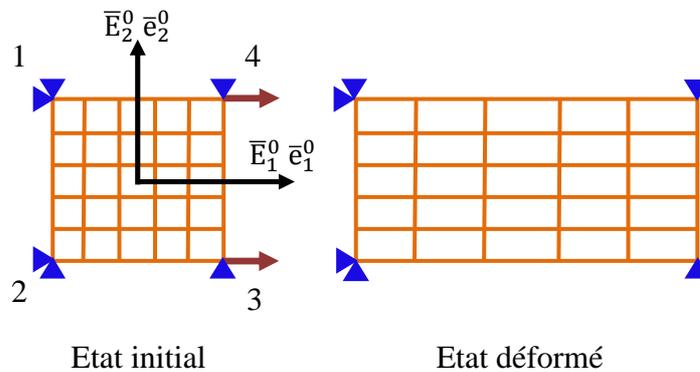


Fig. 4.9 Conditions aux limites test de traction simple

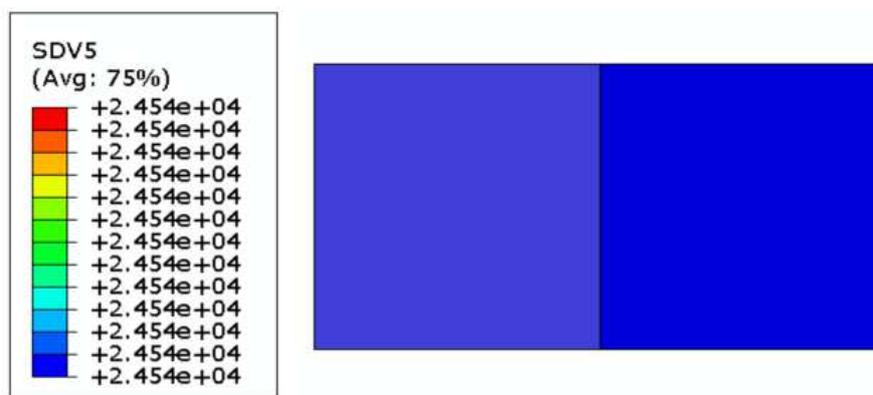


Fig. 4.10 Allongement de l'élément soumis au test de traction simple ( $l=2.l_0$ )

#### 4.3.4.1.1 Résultats analytiques du test de traction simple

Puisque cette étude concerne un tissu de renfort de type 2D. Les composantes analytiques du tenseur gradient de la transformation  $\bar{\bar{F}}$  sont donc simplifiées et leur nombre se réduit à 4. Elles sont déduites à partir des équations de la transformation :

$$\begin{cases} x_1 = X_1(1 + t_r) \\ x_2 = X_2 \end{cases} \quad (4.5)$$

Alors par rapport à la base initiale de l'élément le tenseur gradient de la transformation est donné par :

$$[\bar{\bar{F}}]_{\bar{E}_0} = \begin{bmatrix} 1 + t_r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

A la fin de la transformation  $t_r = 1$  :

$$[\bar{\bar{F}}]_{\bar{E}_0} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Par rapport à la base initiale orientée ses composantes deviennent en utilisant les formules de changement de base :

$$[\bar{\bar{F}}]_{\bar{e}_0} = [T]^T \cdot [\bar{\bar{F}}]_{\bar{E}_0} \cdot [T] \quad (4.7)$$

[T] représente la matrice de passage donnée par la relation :

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Donc les composantes de  $[\bar{\bar{F}}]_{\bar{e}_0}$  deviennent :

$$[\bar{\bar{F}}]_{\bar{e}_0} = \begin{bmatrix} 1 + t \cos^2\theta & -t \sin\theta \cos\theta \\ -t \sin\theta \cos\theta & 1 + t \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Les composantes du tenseur de Cauchy Green Droit dans la base initiale orientée des fibres  $\bar{e}_0$  sont données par la relation (3.16)  $\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{F}}^T \cdot \bar{\bar{F}}$  :

$$[\bar{\bar{C}}]_{\bar{e}_0} = \begin{bmatrix} (1 + t)^2 \cos^2\theta + \sin^2\theta & -(t^2 + 2t) \sin\theta \cos\theta \\ -(t^2 + 2t) \sin\theta \cos\theta & (1 + t)^2 \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Les composantes des déformations logarithmiques sont données par la relation :

$$[\bar{\varepsilon}] = \frac{1}{2} \ln[\bar{C}] \quad (4.11)$$

L'expression analytique des déformations logarithmiques dans les directions des fibres respectivement 1 et 2 sont données par :

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} \ln[(1+t)^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta] \quad (4.12)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2} \ln[(1+t)^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta] \quad (4.13)$$

La composante de la déformation logarithmique de cisaillement  $\varepsilon_{12}$  est donnée par la relation :

$$\varepsilon_{12} = -(t^2 + 2t) \sin \theta \cos \theta \quad (4.14)$$

Alors les contraintes dans les directions de la fibre respectivement 1 et 2 sont calculées à partir des déformations logarithmiques par les relations suivantes:

$$\sigma_{11} = \frac{E_1}{2} \ln[(1+t)^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta] \quad (4.15)$$

$$\sigma_{22} = \frac{E_2}{2} \ln[(1+t)^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta] \quad (4.16)$$

Pour le cas d'une traction pure à 0/90°,  $\theta = 0$  :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E_1}{2} \ln[(1+t)^2] \\ \sigma_{22} &= 0 \\ \sigma_{12} &= 0 \end{aligned}$$

A la fin de la transformation :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{35400}{2} \ln[4] = 24537.41 \text{ MPa} \\ \sigma_{22} &= 0 \\ \sigma_{12} &= 0 \end{aligned}$$

Les composantes analytiques du tenseur de contrainte de Cauchy peuvent être déterminées dans la base de Green-Naghdi en combinant les relations (3.55), (3.58) et (3.68)

$$[T_1]_{(\bar{e}, \bar{f}_1)} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}$$

$$[T_2]_{(\bar{e}, \bar{f}_2)} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$[\sigma]_{\bar{e}} = [T_1]^T \cdot [\sigma]_{f_1} \cdot [T_1] + [T_2]^T \cdot [\sigma]_{f_2} \cdot [T_2]$$

$T_1$  et  $T_2$  représentent les matrices de passage entre les bases liées aux fibres dans les deux directions 1 et 2 et la base de Green-Naghdi.  $\theta_1$  représente l'angle compris entre les vecteurs  $\bar{f}_1$  et  $\bar{e}_1$  et  $\theta_2$  est l'angle compris entre les vecteurs  $\bar{f}_2$  et  $\bar{e}_2$ . Les variables d'état sollicitées à la sortie de la Vumat permettent de donner les valeurs de ses deux angles respectivement SDV 17 et SDV 18.

Ainsi :  $\theta_1 = 0^\circ$  et  $\theta_2 = 0^\circ$ , ce qui conduit à :

$$[T_1]_{(\bar{e}, \bar{f}_1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T_2]_{(\bar{e}, \bar{f}_2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Et :

$$[\sigma]_{f_1} = \begin{bmatrix} 24537.41 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\sigma]_{f_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alors :

$$[\sigma]_{\bar{e}} = \begin{bmatrix} 24537.41 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

#### 4.3.4.1.2 Résultats de la simulation du test de traction simple

- **Analyse des contraintes**

Les composantes du tenseur de contraintes de Cauchy par rapport aux bases liées aux directions des fibres 1,2 issues de la simulation du test de traction simple sont présentées ci-dessous (les variables d'état sollicitées à la sortie de la Vumat permettant de donner les valeurs de ses contraintes  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  sont SDV 5, SDV 6 et SDV 8 dans la première direction et SDV 65, SDV 66 et SDV 68 dans la deuxième direction).

• Fibre 1

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^{f1} \\ \sigma_{22}^{f1} \\ \sigma_{12}^{f1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.454 E^{+4} \\ 0 \\ 6.787 E^{-11} = 0 \end{bmatrix}$$

• Fibre 2

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^{f2} \\ \sigma_{22}^{f2} \\ \sigma_{12}^{f2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.494 E^{-15} = 0 \\ 1.84 E^{-10} = 0 \end{bmatrix}$$

Pour le cas de la traction pure à 0/90°, la base de Green-Naghdi coïncide avec la base orientée initiale. Les composantes numériques du tenseur de contraintes de Cauchy obtenues à partir de la simulation, cumulées et projetées dans cette base sont présentées ci-dessous. Les variables d'état sollicitées à la sortie de la Vumat permettent de donner les valeurs de ses contraintes sont notées respectivement SDV 81, SDV 82 et SDV 84.

• Base de Green Naghdi

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_{\bar{e}} = \begin{bmatrix} 2.454 E^{+4} \\ 1.699 E^{-15} = 0 \\ 2.628 E^{-6} = 0 \end{bmatrix}$$

Au vu des résultats numériques du test, il apparaît que les composantes du tenseur de contraintes de Cauchy fournis par Abaqus sont les mêmes que celles analytiques. Que ce soit dans les directions des fibres ou dans la base de Green-Naghdi. Une représentation graphique permet de visualiser l'évolution des contraintes de Cauchy numériques dans la base de Green-Naghdi pour ce test de traction simple (figure 4.11).

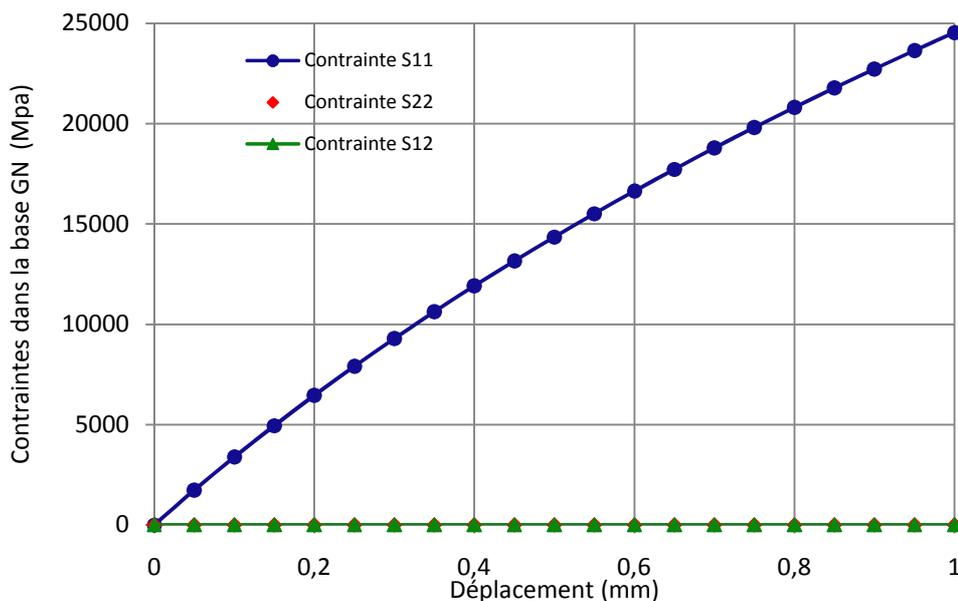


Fig. 4.11 Evolution des contraintes de Cauchy numériques  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  dans la base de Green Naghdi (Test de traction simple)

- **Cinématique de la transformation**

Les composantes analytiques de  $\bar{\bar{F}}$  sont déduites à partir des équations de la transformation données par la relation (4.5) :

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} 1 + t_r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

A la fin de la transformation pour  $t_r = 1$ , les composantes analytiques de  $\bar{\bar{F}}$  seront :

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les composantes numériques de  $\bar{\bar{F}}$  fournies par Abaqus sont :

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 3.213 \cdot E^{-10} = 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'analyse des résultats de ce test montre que les composantes analytiques du tenseur  $\bar{\bar{F}}$  sont en parfaite concordance avec celles fournies par Abaqus.

#### 4.3.4.2 Test de cisaillement simple

On considère un élément de même géométrie que celui utilisé dans le test précédent et on lui impose une cinématique de cisaillement simple (figure 4.12). Les 4 nœuds de l'élément sont bloqués en translation dans les directions 2 et 3 ( $U_2 = U_3 = 0$ ), les nœuds 1 et 3 peuvent translater selon la direction 1 ( $U_1 \neq 0$ ). Les nœuds 2 et 4 sont bloqués selon la direction 1 ( $U_1 = 0$ ) On impose un déplacement unitaire aux nœuds 1 et 3. On associe à ce déplacement le paramètre  $\alpha_c$  variant de 0 à 1. Dans ce cas aussi l'orientation des fibres est choisie à  $0/90^\circ$ , faisant ainsi coïncider les bases  $\bar{E}_i^0$  et  $\bar{e}_i^0$ .

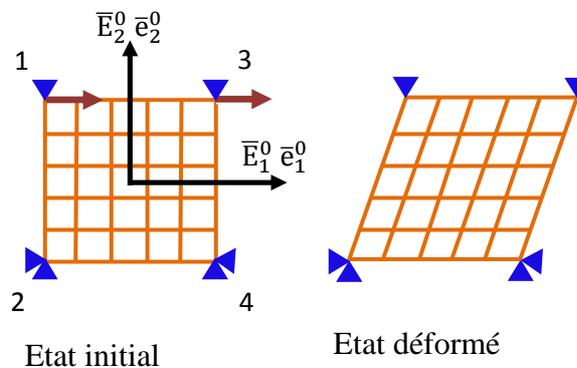


Fig. 4.12 Conditions aux limites du test cisaillement simple

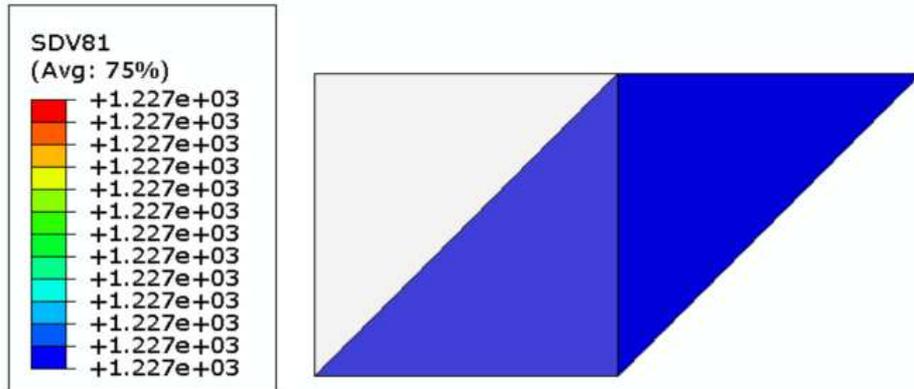


Fig. 4.13 Visualisation du champ de contraintes de l'élément soumis au test de cisaillement simple

#### 4.3.4.2.1 Résultats analytiques du test cisaillement simple

Les composantes du tenseur  $\bar{\bar{F}}$  sont déduites à partir des équations de la transformation suivantes :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \alpha_c \cdot X_2 \\ x_2 = X_2 \end{cases} \quad (4.18)$$

Par rapport à la base initiale de l'élément le tenseur gradient de la transformation est défini comme suit :

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A la fin de la transformation pour  $\alpha_c = 1$ , nous avons :

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dans la base initiale orientée ses composantes deviennent en utilisant les formules de changement de base :

$$[\bar{\bar{F}}_{\bar{e}_0}] = [T]^T \cdot [\bar{\bar{F}}]_{\bar{E}_0} \cdot [T] \quad (4.19)$$

$$[\bar{\bar{F}}_{\bar{e}_0}] = \begin{bmatrix} 1 + \alpha_c \sin\theta \cos\theta & \alpha_c \cos^2\theta \\ -\alpha_c \sin^2\theta & 1 - \alpha_c \sin\theta \cos\theta \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Les composantes du tenseur de Cauchy Green Droit par rapport à la base initiale orientée  $\bar{e}_i^0$  sont données par la relation (3.16)  $\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{F}}^T \cdot \bar{\bar{F}}$  :

$$[\bar{C}_{\bar{e}_0}] = \begin{bmatrix} \sin^2\theta(1 + \alpha_c^2) + \cos^2\theta + 2\alpha_c \sin\theta \cos\theta & \alpha_c(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + \alpha_c^2 \sin\theta \cos\theta \\ \alpha_c(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + \alpha_c^2 \sin\theta \cos\theta & \cos^2\theta(1 + \alpha_c^2) + \sin^2\theta - 2\alpha_c \sin\theta \cos\theta \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Les composantes des déformations logarithmiques sont données par la relation (4.11), ainsi les expressions analytiques des déformations logarithmiques dans les directions des fibres respectivement 1 et 2 sont données par les relations :

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} \ln [\sin^2\theta(1 + \alpha_c^2) + \cos^2\theta + 2\alpha_c \sin\theta \cos\theta] \quad (4.22)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2} \ln [\cos^2\theta(1 + \alpha_c^2) + \sin^2\theta - 2\alpha_c \sin\theta \cos\theta] \quad (4.23)$$

Les contraintes dans les directions des fibres respectivement 1 et 2 sont calculées à partir des déformations logarithmiques par les relations suivantes:

$$\sigma_{11} = \frac{E_1}{2} \ln [\sin^2\theta(1 + \alpha_c^2) + \cos^2\theta + 2\alpha_c \sin\theta \cos\theta] \quad (4.24)$$

$$\sigma_{22} = \frac{E_2}{2} \ln [\cos^2\theta(1 + \alpha_c^2) + \sin^2\theta - 2\alpha_c \sin\theta \cos\theta] \quad (4.25)$$

Pour le cas d'un cisaillement simple, à  $0/90^\circ$   $\theta = 0$  nous aurons à la fin de la transformation pour  $\alpha_c=1$  :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E_1}{2} \ln(1) = 0 \\ \sigma_{22} &= E_1 \ln \sqrt{1 + \alpha_c^2} = 12276.7 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Les composantes analytiques du tenseur de contrainte de Cauchy sont déterminées dans la base de Green-Naghdi grâce aux relations (3.55), (3.58) et (3.68). Les variables d'état sollicitées à la sortie de la Vumat permettant de donner les valeurs de ses deux angles sont respectivement SDV 17 et SDV 18. Ainsi :  $\theta_1 = 26.5623^\circ$  et  $\theta_2 = 18.4377^\circ$ , ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} [T_1]_{(\bar{e}, \bar{f}_1)} &= \begin{bmatrix} 0.8944 & -0.4471 \\ 0.4471 & 0.8944 \end{bmatrix} \\ [T_2]_{(\bar{e}, \bar{f}_2)} &= \begin{bmatrix} 0.9486 & -0.3162 \\ 0.3162 & 0.9486 \end{bmatrix} \\ [\sigma]_{f_1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\sigma]_{f_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12276.7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Alors :

$$[\sigma]_{\bar{e}} = \begin{bmatrix} 1.227 E^{+3} & 3.682 E^{+3} \\ 3.682 E^{+3} & 1.1047 E^{+4} \end{bmatrix}$$

#### 4.3.4.2.2 Résultats de la simulation du test cisaillement simple

- **Analyse des contraintes**

Les composantes du tenseur de contraintes de Cauchy par rapport aux bases liées aux directions des fibres 1,2 obtenues à partir de la simulation sont présentées ci-dessous (les variables d'état sollicitées à la sortie de la Vumat permettant de donner les valeurs de ses contraintes  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$  sont SDV 5, SDV 6 et SDV 8 dans la première direction et SDV 65, SDV 66 et SDV 68 dans la deuxième direction).

- Fibre 1

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^{f1} \\ \sigma_{22}^{f1} \\ \sigma_{12}^{f1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.351 E^{-4} \\ 0 \\ 2.653 E^{-1} \end{bmatrix}$$

- Fibre 2

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^{f2} \\ \sigma_{22}^{f2} \\ \sigma_{12}^{f2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.227 E^{+4} \\ 7.875 E^{-4} \end{bmatrix}$$

Les courbes des contraintes de Cauchy dans les deux directions des fibres sont tracées et représentées sur les figures 4.14 et 4.15:

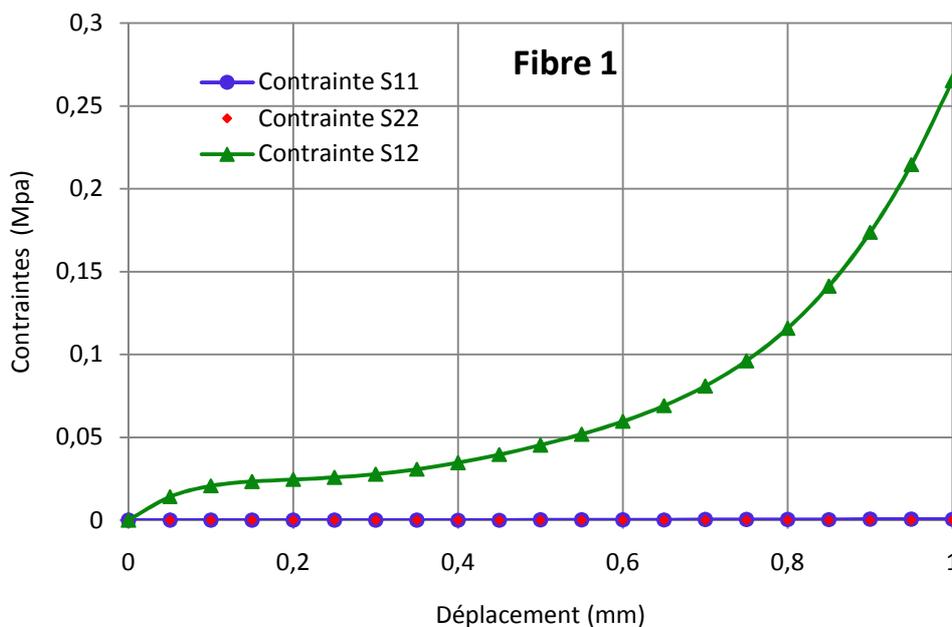


Fig. 4.14 Evolution des composantes numériques des contraintes dans la direction 1 des fibres (Test de cisaillement simple)

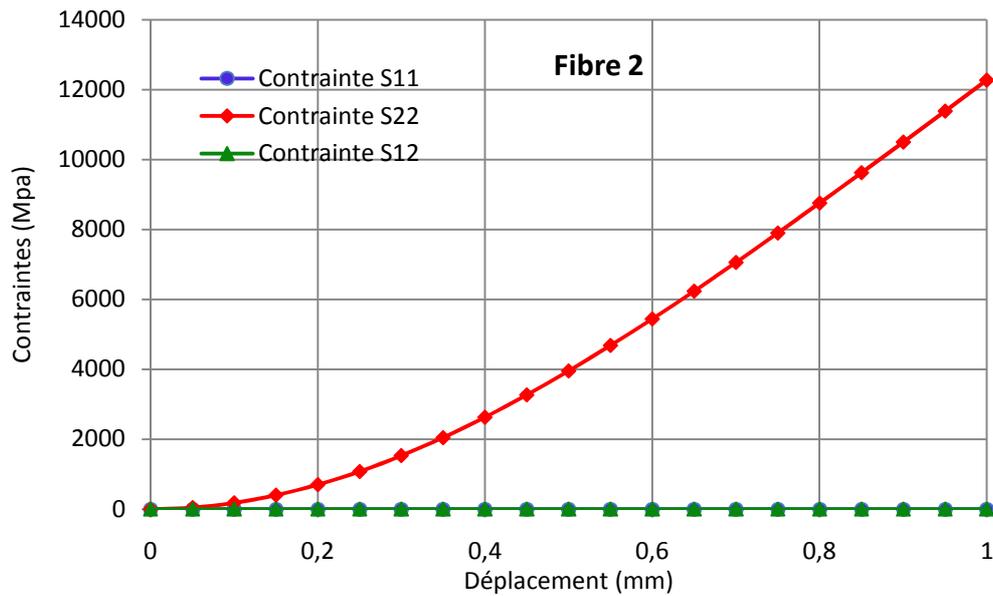


Fig. 4.15 Evolution des composantes numériques des contraintes dans la direction 2 des fibres (Test de cisaillement simple)

Par rapport au système matériel lié aux deux directions des fibres 1 et 2, la déformation existe dans la direction 2 (fibre verticale) et la fibre 1 reste indéformée, ce qui est vérifié pour notre cas. On remarque ici pour la composante  $\sigma_{12}$ , l'existence de contraintes parasites de valeurs très faibles ce ci peut s'expliquer par un phénomène d'interaction entre les fibres. Les composantes du tenseur de Cauchy cumulées dans la base de calcul de Green-Naghdi sont ensuite déterminées et présentées ci-dessous (les variables d'état sollicitées à la sortie de la Vumat permettant de donner les valeurs de ses contraintes sont notées respectivement SDV 81, SDV 82 et SDV 84).

- Base de Green Naghdi

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_{\bar{e}} = \begin{bmatrix} 1.227 \text{ E}^+3 \\ 1.104 \text{ E}^+4 \\ 3.681 \text{ E}^+3 \end{bmatrix}$$

L'évolution des contraintes de Cauchy numériques dans la base de Green-Naghdi pour ce test de cisaillement simple est présentée sur la (figure 4.16).

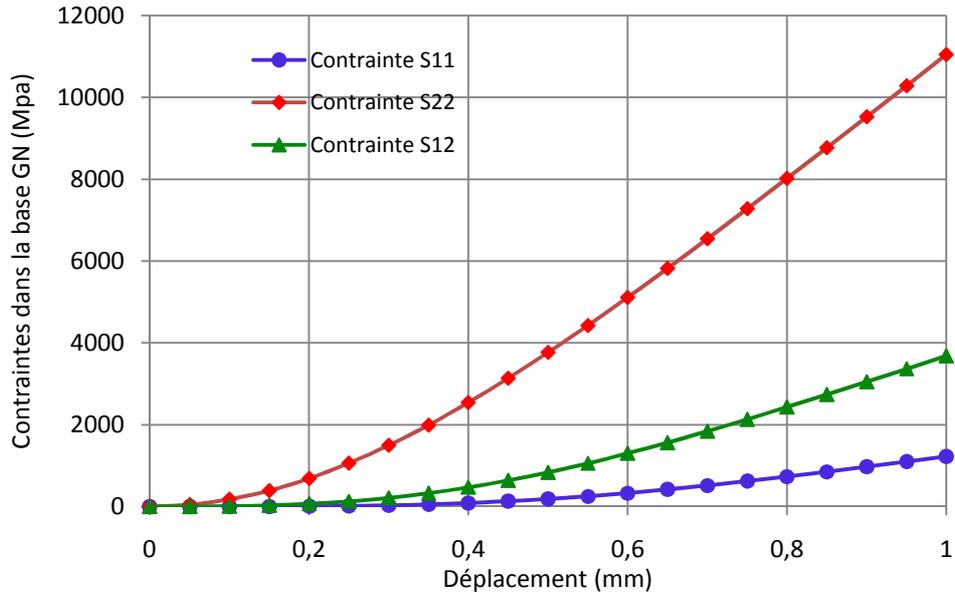


Fig. 4.16 Evolution des composantes numériques des contraintes de Cauchy  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  dans la base de Green-Naghdi (Test de cisaillement simple)

- **Cinématique de la transformation**

Les composantes du tenseur  $\bar{\bar{F}}$  sont déduites à partir des équations (4.18) :

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A la fin de la transformation pour  $\alpha_c=1$  :

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les composantes de  $\bar{\bar{F}}$  fournies par Abaqus sont:

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2.98 \text{ E}^{-8} & 1 \end{bmatrix}$$

L'analyse des résultats obtenus par les simulations montre une parfaite concordance entre les valeurs théoriques des composantes de  $\bar{\bar{F}}$  et celles fournies par Abaqus.

#### 4.3.4.3 Test d'objectivité

L'objectivité de la loi de comportement est vérifiée en utilisant un test de traction simple uni axiale suivi d'une rotation de corps rigide. La loi de comportement est objective si un élément est soumis à un état de contrainte qui ne doit pas être modifié par une rotation rigide. Pour cela on reprend le test de traction uni axiale déjà mené précédemment et on le fait suivre d'une rotation de corps rigide d'un angle  $\alpha$  par rapport à la première direction (figure

4.17). Le test est réalisé en deux pas d'analyse, une traction simple suivie d'une rotation rigide. Dans le premier pas d'analyse et puisqu'il s'agit d'une traction simple les conditions aux limites sont les mêmes que celles du cas du test de la traction simple. Dans le second pas l'élément subit une rotation d'un angle  $\alpha$ .

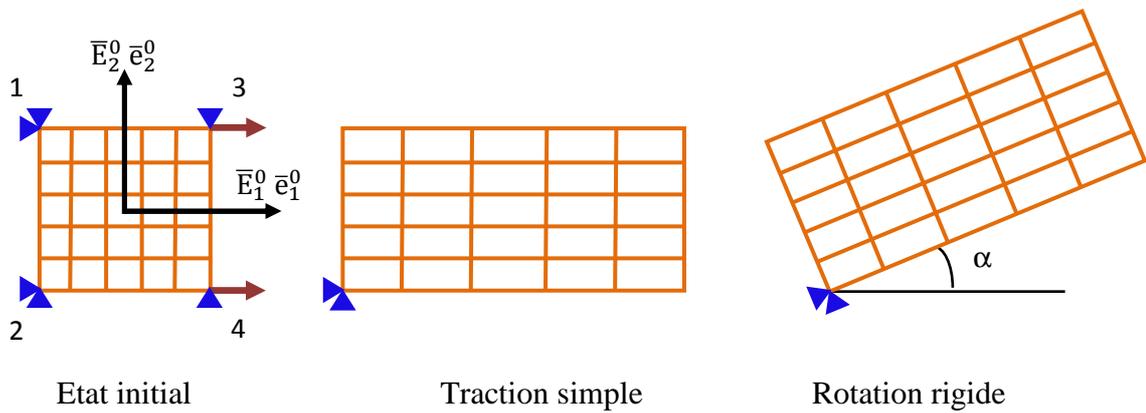


Fig. 4.17 Conditions aux limites du test d'objectivité

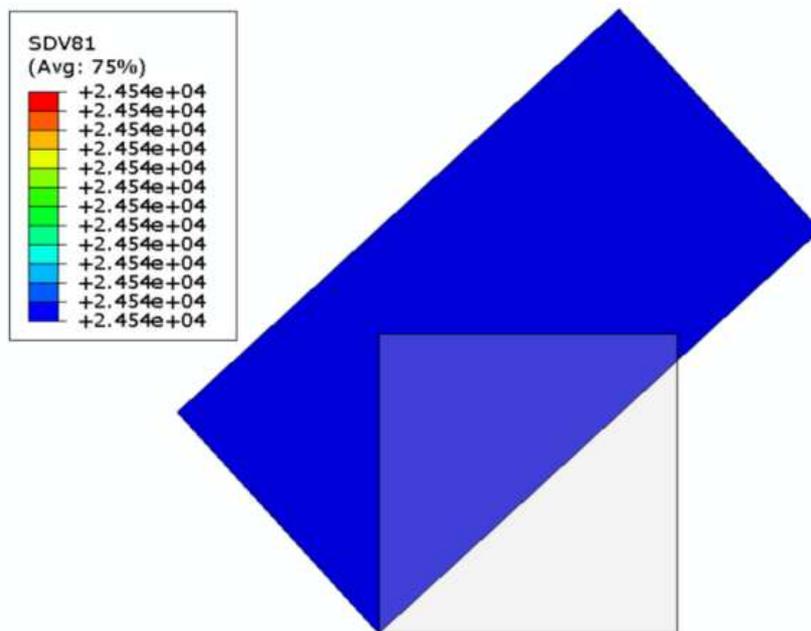


Fig. 4.18 Visualisation du champ de contraintes de l'élément pendant le test d'objectivité

#### 4.3.4.3.1 Résultats analytiques du test d'objectivité

A la fin de la première phase de la traction simple le facteur de tension  $t$  atteint la valeur  $t=1$ . Après la seconde phase qui est une rotation rigide l'expression qui donne le tenseur gradient de la transformation dans la base initiale de l'élément est :

$$[\bar{\mathbb{F}}]_{\bar{\mathbb{E}}_0} = [\bar{\mathbb{R}}][\bar{\mathbb{F}}] \quad (4.26)$$

Si la rotation rigide est d'un angle  $\alpha$  alors :

$$[\bar{\mathbb{R}}] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

L'expression de tenseur  $[\bar{\mathbb{F}}]$  par rapport à la base initiale de l'élément sera :

$$[\bar{\mathbb{F}}]_{\bar{\mathbb{E}}_0} = \begin{bmatrix} (1+t)\cos\alpha & -\sin\alpha \\ (1+t)\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

L'expression de tenseur  $[\bar{\mathbb{F}}]$  par rapport à la base initiale orientée des fibres devient :

$$[\bar{\mathbb{F}}_{\bar{\mathbf{e}}_0}] = \begin{bmatrix} \cos\alpha(1+t\cos^2\theta) + t\sin\alpha\sin\theta\cos\theta & -\sin\alpha(1+t\sin^2\theta) - t\cos\alpha\sin\theta\cos\theta \\ \sin\alpha(1+t\cos^2\theta) - t\cos\alpha\sin\theta\cos\theta & \cos\alpha(1+t\sin^2\theta) + t\sin\alpha\sin\theta\cos\theta \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Les composantes du tenseur de Cauchy Green Droit dans la base initiale orientée des fibres  $\bar{\mathbf{e}}_0$  sont données par :

$$[\bar{\mathbb{C}}_{\bar{\mathbf{e}}_0}] = \begin{bmatrix} (1+t)^2\cos^2\theta + \sin^2\theta & -(t^2+2t)\sin\theta\cos\theta \\ -(t^2+2t)\sin\theta\cos\theta & (1+t)^2\sin^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Ce qui montre l'invariance du tenseur  $\bar{\mathbb{R}}$  par rapport à une rotation rigide et conduit aux composantes de déformations et contraintes logarithmiques suivantes :

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\ln[(1+t)^2\cos^2\theta + \sin^2\theta] \quad (4.30)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2}\ln[(1+t)^2\sin^2\theta + \cos^2\theta] \quad (4.31)$$

$$\varepsilon_{12} = -(t^2+2t)\sin\theta\cos\theta \quad (4.32)$$

$$\sigma_{11} = \frac{E_1}{2}\ln[(1+t)^2\cos^2\theta + \sin^2\theta] \quad (4.33)$$

$$\sigma_{22} = \frac{E_2}{2} \ln[(1+t)^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta] \quad (4.34)$$

$$\sigma_{12} = -(t^2 + 2t) \sin \theta \cos \theta \quad (4.35)$$

Pour le cas d'une orientation initiale des fibres à  $0/90^\circ$   $\theta = 0$  nous aurons à la fin de la transformation :

$$\sigma_{11} = \frac{E_1}{2} \ln[(1+t)^2] = \frac{35400}{2} \ln(4) = 24537.41 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$$

Les composantes analytiques du tenseur de contrainte de Cauchy dans la base de Green-Naghdi sont déterminées à partir des relations (3.55), (3.58) et (3.68). Les variables d'état sollicitées à la sortie de la Vumat permettant de donner les valeurs de ses deux angles sont respectivement SDV 17 et SDV 18.  $\theta_1 = 0^\circ$  et  $\theta_2 = 0^\circ$  alors :

$$[T_1]_{(\bar{e}_1, \bar{f}_1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T_2]_{(\bar{e}_2, \bar{f}_2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\sigma]_{f_1} = \begin{bmatrix} 24537.41 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\sigma]_{f_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\sigma]_{\bar{e}} = \begin{bmatrix} 24537.41 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

#### 4.3.4.3.2 Résultats de la simulation du test d'objectivité

- **Analyse des contraintes**

Comme pour les deux cas précédents, les composantes des tenseurs de contraintes dans les deux directions 1 et 2 des fibres sont présentées ci-dessous (les variables d'état sollicitées à la sortie de la Vumat permettant de donner les valeurs de ses contraintes  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$  sont SDV 5, SDV 6 et SDV 8 dans la première direction et SDV 65, SDV 66 et SDV 68 dans la deuxième direction).

- **Fibre 1**

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^{f1} \\ \sigma_{22}^{f1} \\ \sigma_{12}^{f1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.454 \text{ E}^{+4} \\ 0 \\ 1.596 \text{ E}^{-7} \end{bmatrix}$$

- **Fibre 2**

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^{f2} \\ \sigma_{22}^{f2} \\ \sigma_{12}^{f2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.613 \\ 1.596 \text{ E}^{-7} \end{bmatrix}$$

Les composantes du tenseur de Cauchy cumulées dans la base de calcul de Green-Naghdi sont ensuite déterminées et présentées ci-dessous (les variables d'état sollicitées à la sortie de la Vumat permettant de donner les valeurs de ses contraintes sont notées respectivement SDV 81, SDV 82 et SDV 84).

- Base de Green Naghdi

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_{\bar{e}} = \begin{bmatrix} 2.454 \text{ E}^{+4} \\ -1.613 \\ 1.111 \text{ E}^{-1} \end{bmatrix}$$

L'évolution des différentes contraintes est présentée sur la [figure 4.19](#). On peut constater que les valeurs des contraintes dans les deux directions des fibres et cumulées restent invariantes lorsque la traction suivie de la rotation de corps rigide. On peut dire que cette loi de comportement est objective.

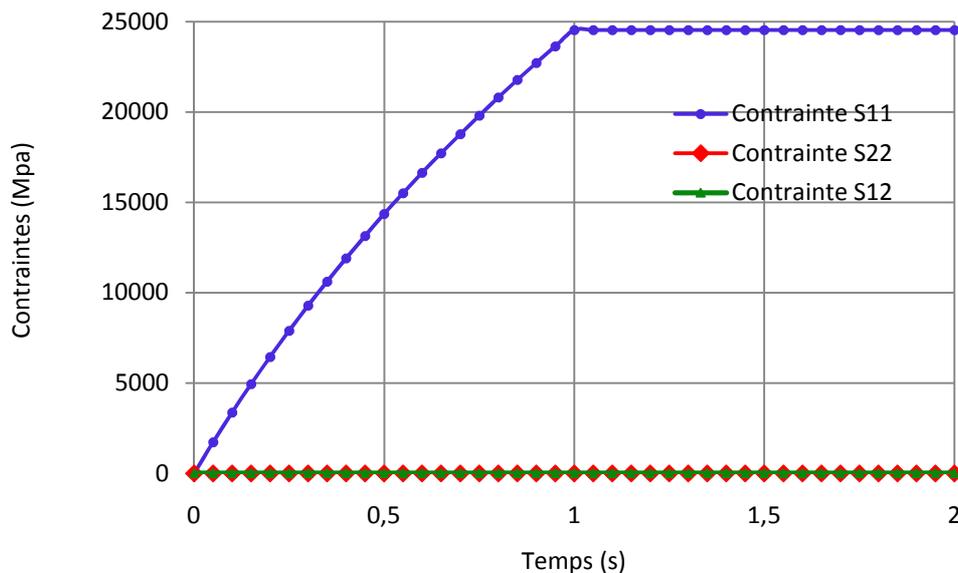


Fig. 4.19 Evolution des composantes numériques des contraintes de Cauchy  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  dans la base de Green-Naghdi (Test d'objectivité)

## 4.4 Validation du modèle hyperélastique

### 4.4.1 Implémentation d'une routine utilisateur sous Abaqus

Le modèle hyperélastique proposé dans le chapitre précédent est implémenté sous Abaqus Explicit par le biais d'une subroutine Vumat programmée en langage Fortran, dans le but de définir à l'échelle macroscopique la loi de comportement spécifique au tissu objet de cette

étude. Cette routine permet de déterminer les composantes du tenseur de contrainte de Cauchy projetées dans la base de Green-Naghdi qui correspond à la base de calcul d'Abaqus.

L'objectif principal est de valider ce modèle par les mêmes tests : traction simple, cisaillement simple et objectivité. Pour pouvoir déterminer les composantes du tenseur de contrainte de Cauchy projetées dans la base de Green-Naghdi qui représente la base de calcul du code Abaqus, il est intéressant de définir quelques bases et d'utiliser quelques formules de changement de bases car les tenseurs mis en jeu sont projetés dans différentes bases.

- $\bar{\mathbf{E}}^0 = (\bar{\mathbf{E}}_1^0, \bar{\mathbf{E}}_2^0)$  , la base orthonormée directe globale d'Abaqus
- $\bar{\mathbf{e}}^0 = (\bar{\mathbf{e}}_1^0, \bar{\mathbf{e}}_2^0)$  , la base orthonormée directe de l'orientation initiale des fibres
- $\bar{\mathbf{E}}^0 \otimes \bar{\mathbf{e}}^0$  , la base de Green-Naghdi

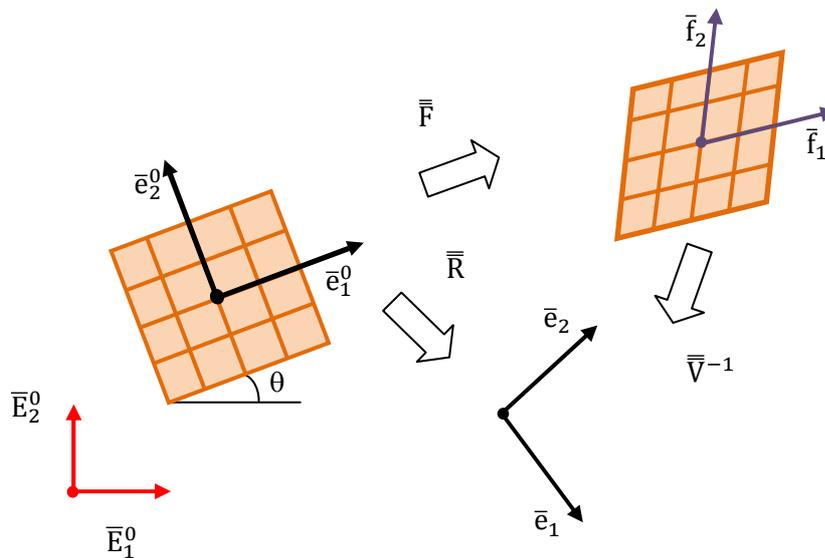


Fig. 4.20 Les différentes bases de projection des tenseurs

#### 4.4.2 Principe de fonctionnement de l'algorithme

L'algorithme de la Vumat s'écrit sous la forme d'une boucle dans laquelle et à chaque incrément de temps, le code de calcul fournit les tenseurs suivants :  $\bar{\mathbf{F}}$  par rapport à la base

$\bar{\mathbf{E}}^0 \otimes \bar{\mathbf{e}}^0$  et  $\bar{\mathbf{U}}$  par rapport à la base de l'orientation initiale des fibres  $\bar{\mathbf{e}}^0$ . Sur les points Gauss le déroulement des calculs est comme suit :

- Calcul du tenseur  $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \bar{\mathbf{F}}$  par rapport à la base  $\bar{\mathbf{e}}^0$
- Calcul des élongations  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  et de l'angle  $\theta$  entre les mèches à partir de  $\bar{\mathbf{C}}$

- Calcul des composantes du tenseur de Piola Kirchhoff 2 dans la base de l'orientation initiale  $\bar{e}^0$
- Calcul du tenseur de contrainte de Cauchy dans la base GN
- **Algorithme de la subroutine Vumat**

- Déclaration des variables communes de la Vumat
- Déclaration des variables internes à la Vumat
- Identification des données expérimentales de cisaillement pur ( $c_k$ )
- Identification des données expérimentales de traction pure ( $a_i$  et  $b_i$ )

**Calcul dans les points de Gauss**  
**do 100 i=1, nblock**

- Sauvegarde du tenseur de déplacement droit  $\bar{U}$
  - Sauvegarde du tenseur du gradient de déformation  $\bar{F}$
  - Calcul du tenseur  $\bar{C} = \bar{F}^T \cdot \bar{F}$
  - Calcul des élongations  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  et de l'angle  $\theta$  entre les mèches à partir de  $\bar{C}$ 
    - Calcul des composantes du tenseur de Piola Kirchhoff 2  $S_{11}$  et  $S_{22}$  à partir de (3.114) & (3.115) et  $S_{12}$  à partir de (3.116)
  - Calcul du tenseur de contrainte de Cauchy dans la base GN
  - Mise à jour des variables d'états (SDV)
  - Fin du calcul dans les points de Gauss
- 100 continue**  
**end**

#### 4.4.3 Identification des paramètres du modèle hyperélastique

Pour cette étude, on considère le même tissu de renfort (taffetas de verre équilibré) utilisé précédemment dans la validation du modèle hypoélastique (figure 4.2). Pour l'identification des paramètres matériaux, les données expérimentales utilisées sont de type contrainte- déformation pour le cas de la traction et contrainte-cosinus de l'angle entre les mèches pour celui du cisaillement. Nous avons choisi de travailler avec l'hypothèse qui ignore l'effet du tissage (paragraphe 3.3.4.4) ce qui permet d'utiliser les résultats expérimentaux d'un essai de traction sur des mèches de verre seules [15].

#### 4.4.3.1 Interpolation de la traction

L'expression du potentiel  $W$  est choisie en fonction des invariants de deuxième type (les élongations  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  dans la direction des mèches et le cosinus l'angle entre les mèches  $\cos\theta$ ). Les essais de traction dans les deux directions chaîne et trame ont fourni  $n_{\text{exp}}$  couples  $(\lambda_{1i}, S_{11i})$  et  $(\lambda_{2i}, S_{22i})$ . Nous allons considérer des approximations polynômiales pour déterminer les paramètres  $a_i$ ,  $b_i$  par minimisation des fonctions écarts  $E_1$  et  $E_2$ . Pour la traction nous avons exploité les courbes expérimentales qui donnent les composantes  $S_{11}$  et  $S_{22}$  en fonction de la déformation et de l'élongation [4], [73].

Le tissu de renfort étant équilibré, les composantes  $S_{11}$  et  $S_{22}$  et les constantes à déterminer  $a_i$  et  $b_i$  sont les mêmes dans les deux directions chaîne et trame.

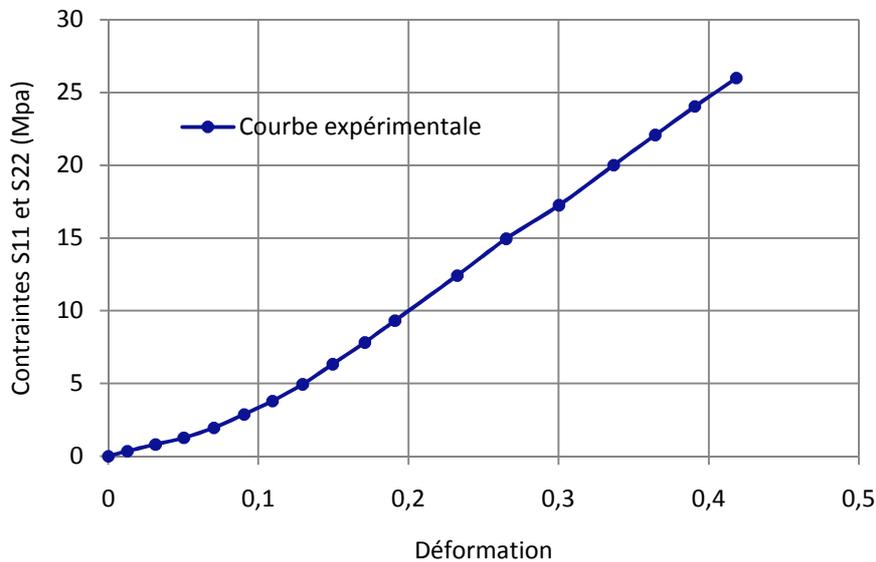


Fig. 4.21 Composantes expérimentales  $S_{11}$  et  $S_{22}$  en fonction de la déformation

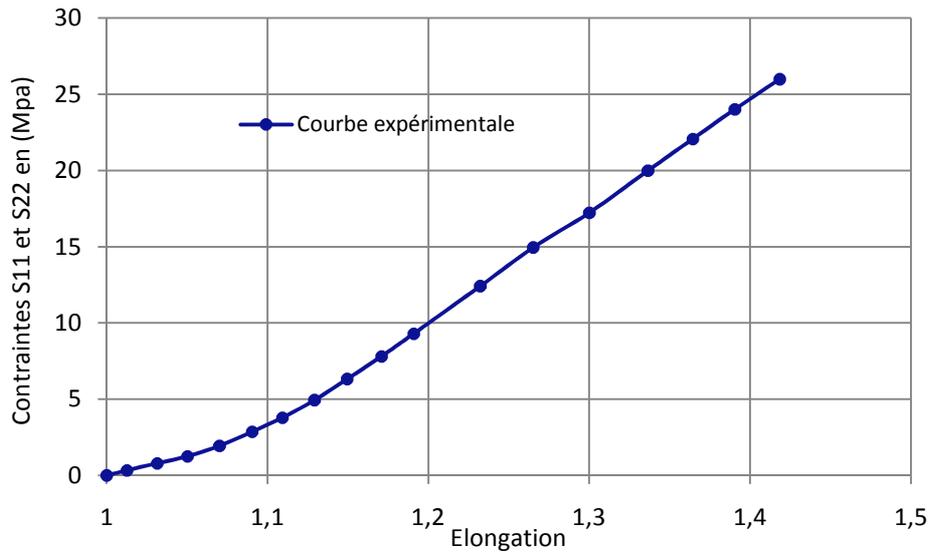


Fig. 4.22 Composantes expérimentales  $S_{11}$  et  $S_{22}$  en fonction de l'élongation

$$S_{11} = \sum_{i=0}^m a_i \cdot \lambda_1^i \quad (4.36)$$

Et

$$S_{22} = \sum_{i=0}^m b_i \cdot \lambda_2^i \quad (4.37)$$

D'une façon générale, pour modéliser les courbes  $S_{11} = S_{11}(\lambda_1)$  et  $S_{22} = S_{22}(\lambda_2)$  on est souvent amené à utiliser des méthodes d'interpolation. Dans notre cas, nous avons opté pour la méthode de moindres carrés, forme polynomiale. Le but principal de cette méthode est d'approcher une fonction donnée sous forme de couples de points  $(x_i, y_i)$

( $i=1,2,\dots, n_{exp}$ ). En effet si l'on a la certitude qu'une certaine forme de fonction passe au voisinage des points donnés la recherche de l'équation de cette fonction est d'autant possible que le nombre de points à interpoler est élevé. Le critère des moindres carrés consiste à imposer à ce que les quantités  $E_{c1}$  et  $E_{c2}$  soient minimales.

$$E_{c1} = \sum_{i=1}^n (S_{11i} - \bar{S}_{11i})^2 \quad (4.38)$$

$$E_{c2} = \sum_{i=1}^n (S_{22i} - \bar{S}_{22i})^2 \quad (4.39)$$

$\bar{S}_{11i}$  : Composantes expérimentales  $S_{11}$

$\bar{S}_{22i}$  : Composantes expérimentales  $S_{22}$

La courbe expérimentale indiquée sur la figure (4.22) peut être interpolée avec un polynôme du 3<sup>ème</sup> degré :

$$\bar{S}_{11i}(\lambda_1) = a_0 + a_1 \cdot \lambda_1 + a_2 \cdot \lambda_1^2 + a_3 \cdot \lambda_1^3 \quad (4.40)$$

$$\bar{S}_{22i}(\lambda_1) = b_0 + b_1 \cdot \lambda_1 + b_2 \cdot \lambda_1^2 + b_3 \cdot \lambda_1^3 \quad (4.41)$$

Alors les équations (4.38) et (4.39) deviennent respectivement:

$$E_{c1} = \sum_{i=1}^n (S_{11i} - (a_0 + a_1 \cdot \lambda_1 + a_2 \cdot \lambda_1^2 + a_3 \cdot \lambda_1^3)^2) \quad (4.42)$$

$$E_{c2} = \sum_{i=1}^n (S_{22i} - (b_0 + b_1 \cdot \lambda_1 + b_2 \cdot \lambda_1^2 + b_3 \cdot \lambda_1^3)^2) \quad (4.43)$$

Pour que les quantités  $E_{c1}$  et  $E_{c2}$  soient extrémales, leurs dérivées respectivement par rapport à  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$  et  $(b_0, b_1, b_2, b_3)$  doivent être nulles.

- **Traction sens chaîne**

Si on minimise la quantité  $E_{c1}$  par rapport aux inconnues  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$  on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{c1}}{\partial a_0} &= -2 \cdot \sum_{i=1}^n (S_{11i} - (a_0 + a_1 \cdot \lambda_1 + a_2 \cdot \lambda_1^2 + a_3 \cdot \lambda_1^3)) \\ \frac{\partial E_{c1}}{\partial a_1} &= -2 \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_1 \cdot (S_{11i} - (a_0 + a_1 \cdot \lambda_1 + a_2 \cdot \lambda_1^2 + a_3 \cdot \lambda_1^3)) \\ \frac{\partial E_{c1}}{\partial a_2} &= -2 \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_1^2 \cdot (S_{11i} - (a_0 + a_1 \cdot \lambda_1 + a_2 \cdot \lambda_1^2 + a_3 \cdot \lambda_1^3)) \\ \frac{\partial E_{c1}}{\partial a_3} &= -2 \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_1^3 \cdot (S_{11i} - (a_0 + a_1 \cdot \lambda_1 + a_2 \cdot \lambda_1^2 + a_3 \cdot \lambda_1^3)) \end{aligned}$$

Ceci conduit à un système linéaire de 4 équations à 4 inconnues qui peut s'écrire sous forme matricielle  $AX = b$  :

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n \lambda_{1i} & \sum_{i=1}^n \lambda_{1i}^2 & \sum_{i=1}^n \lambda_{1i}^3 \\ \sum_{i=1}^n \lambda_{1i} & \sum_{i=1}^n \lambda_{1i}^2 & \sum_{i=1}^n \lambda_{1i}^3 & \sum_{i=1}^n \lambda_{1i}^4 \\ \sum_{i=1}^n \lambda_{1i}^2 & \sum_{i=1}^n \lambda_{1i}^3 & \sum_{i=1}^n \lambda_{1i}^4 & \sum_{i=1}^n \lambda_{1i}^5 \\ \sum_{i=1}^n \lambda_{1i}^3 & \sum_{i=1}^n \lambda_{1i}^4 & \sum_{i=1}^n \lambda_{1i}^5 & \sum_{i=1}^n \lambda_{1i}^6 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n S_{11i} \\ \sum_{i=1}^n \lambda_{1i} \cdot S_{11i} \\ \sum_{i=1}^n \lambda_{1i}^2 \cdot S_{11i} \\ \sum_{i=1}^n \lambda_{1i}^3 \cdot S_{11i} \end{pmatrix}$$

La résolution de ce système conduit aux valeurs recherchées des paramètres  $(a_i)$  qui sont indiquées sur le tableau 4.2 , pour le taffetas de verre dans la direction des mèches :

:

Tableau 4.2 Paramètres de traction du modèle hyperélastique

$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$
490.7	-1271	1056	-275.7

L'expression finale de la composante  $S_{11}$  est :

$$S_{11}(\lambda_1) = 490.7 - 1271\lambda_1 + 1056\lambda_1^2 - 275.7\lambda_1^3$$

La condition de contrainte nulle à l'état naturel est bien vérifiée:

$$\sum_{i=0}^m a_i = 490.7 - 1271 + 1056 - 275.7 = 0$$

Puisque pour cet essai de traction  $a_i = b_j$  alors :

$$S_{22}(\lambda_2) = 490.7 - 1271\lambda_2 + 1056\lambda_2^2 - 275.7\lambda_2^3$$

La concordance entre les deux modèles, expérimental et hyper élastique est montrée sur la figure 4.23.

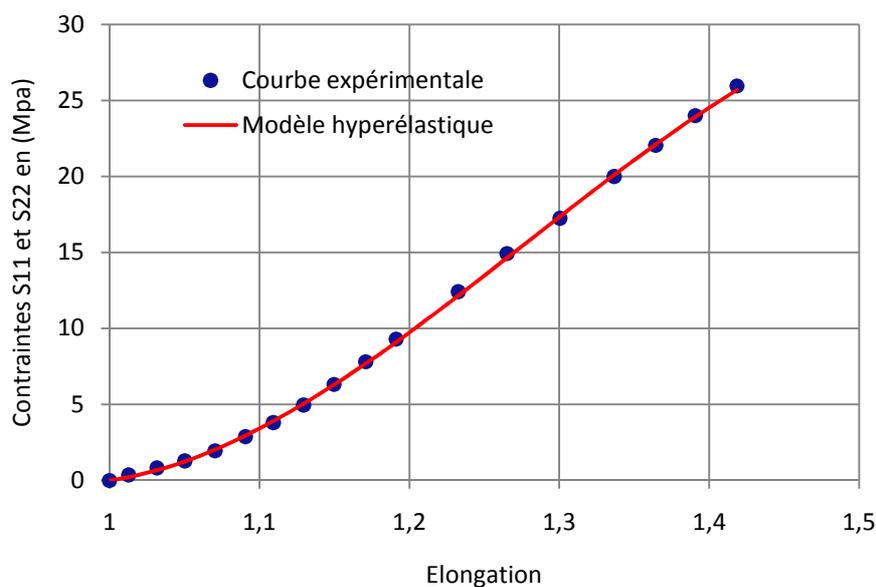


Fig.4.23 Composantes  $S_{11}$  et  $S_{22}$  expérimentales et données par le modèle hyperélastique

#### 4.4.3.2 Interpolation du cisaillement

Dans le cas du cisaillement, nous exploitons les résultats du Benchmarking [27] (figure 4.24). De cette courbe, on extrait la force appliquée sur le cadre employé dans le test de cisaillement (Picture Frame) pour aboutir à  $n_{\text{exp}}$  couples  $(F_i, \gamma_i)$ .

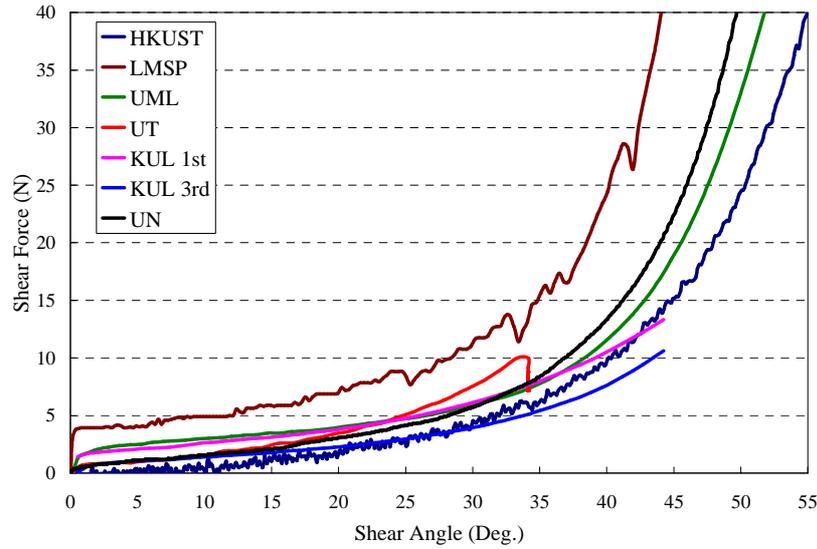


Fig. 4.24 Courbe de référence (ULM) [27]

La force appliquée sur le cadre  $F_c$  s'obtient grâce à la relation (4.44) [4] et permet de déterminer les valeurs correspondantes des composantes  $S_{12}$  du tenseur de Piola Kirchhoff 2

$$F_c = 2 \cos \frac{\theta}{2} L_0 S_{12} \quad (4.44)$$

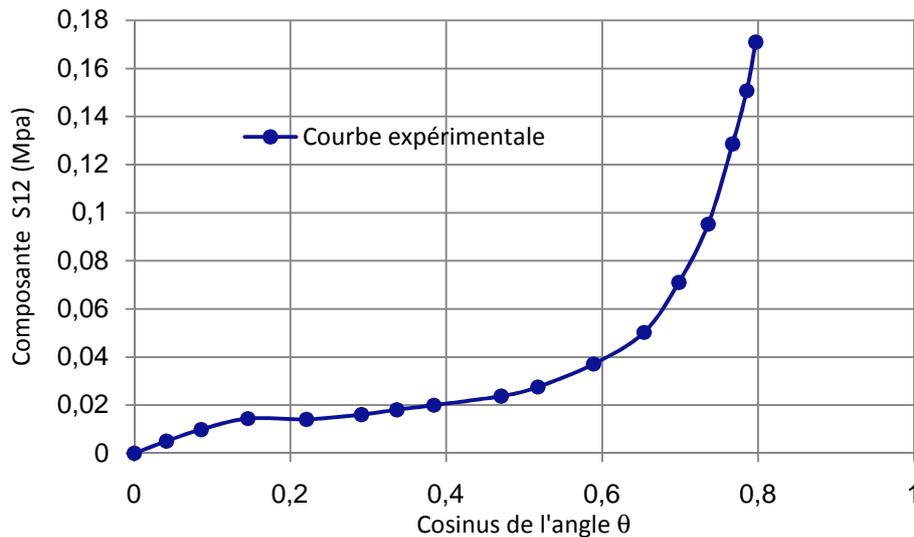


Fig.4.25 Composantes expérimentales  $S_{12}$  en fonction du cosinus de l'angle entre les mèches

Nous avons réalisé des approximations polynômiales pour déterminer les paramètres ( $c_i$ ) par minimisation de la fonction écart  $E_{c3}$ . Pour le cas du cisaillement la composante  $S_{12}$  est donnée par la relation :

$$S_{12} = \sum_{k=1}^p c_k \cdot \cos^k \theta \quad (4.45)$$

Pour modéliser la courbe  $S_{12} = S_{12}(\cos\theta_i)$  nous avons utilisé la méthode des moindres carrés pour minimaliser la fonction écart  $E_{c3}$ .

$$E_{c3} = \sum_{i=1}^n (S_{12i} - \bar{S}_{12i})^2 \quad (4.46)$$

$\bar{S}_{12i}$  : Composantes expérimentales  $S_{11}$

L'allure de la courbe nous impose le choix d'un polynôme de degré élevé pour réussir au mieux l'interpolation, pour ce cas nous avons choisi d'interpoler avec un polynôme du 5<sup>ème</sup> degré :

$$\bar{S}_{12}(\cos\theta) = c_1 \cdot \cos\theta + c_2 \cdot \cos^2\theta + c_3 \cdot \cos^3\theta + c_4 \cdot \cos^4\theta + c_5 \cdot \cos^5\theta \quad (4.47)$$

L'équation (4.46) devient :

$$E_{c3} = \sum_{i=1}^n (S_{12i} - (c_1 \cdot \cos\theta + c_2 \cdot \cos^2\theta + c_3 \cdot \cos^3\theta + c_4 \cdot \cos^4\theta + c_5 \cdot \cos^5\theta))^2 \quad (4.48)$$

On minimise la quantité  $E_{c3}$  par rapport aux inconnues  $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$  pour déterminer les paramètres  $c_i$  indiqués sur le [tableau 4.3](#):

*Tableau 4.3 Paramètres de cisaillement du modèle hyperélastique*

$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$
0.265	-2.004	7.294	-11.86	7.235

L'expression finale de la composante  $S_{12}$  est :

$$\bar{S}_{12}(\cos\theta) = 0.265\cos\theta - 2.004\cos^2\theta + 7.294\cos^3\theta - 11.86\cos^4 + 7.235\cos^5\theta$$

La concordance entre les deux modèles, expérimental et hyper élastique est montrée sur la [figure 4.26](#).

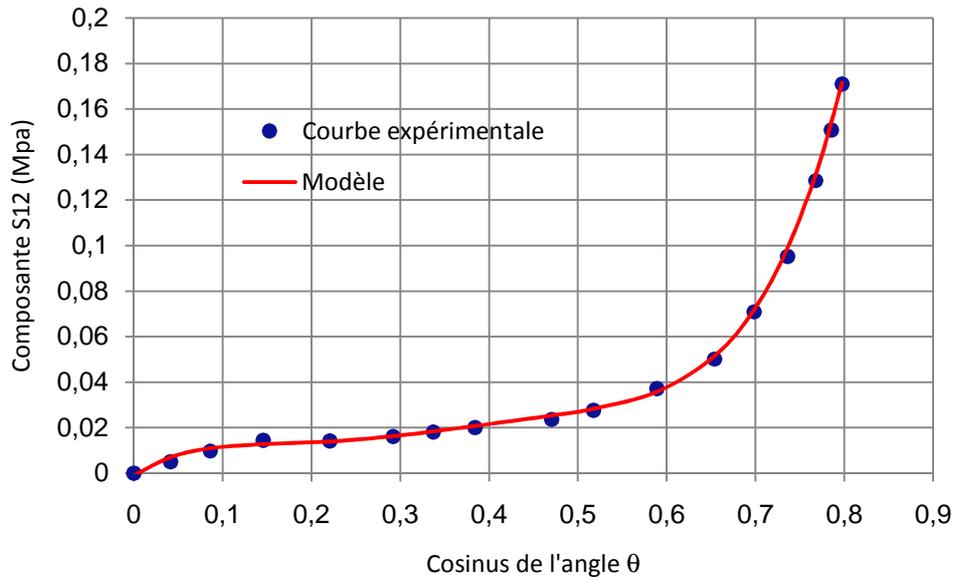


Fig.4.26 Composante  $S_{12}$  expérimentale et donnée par le modèle hyper élastique

#### 4.4.4 Tests de base pour la validation du modèle hyperélastique

A fin de valider le modèle hyperélastique, nous avons réalisé comme pour le cas du modèle hypoélastique, des simulations pour les tests élémentaires de base sur des échantillons du tissu considéré dans cette étude.

Nous avons déterminé les composantes des tenseurs de contraintes de Piola Kirchhoff 2 et celles du tenseur de Cauchy projetées dans la base de calcul (Green-Naghdi). Les variables d'état sollicitées à la sortie de la routine hyperélastique sont présentées dans le tableau suivant:

Tableau 4.4 Les variables d'état sollicitées à la sortie de la routine (modèle hyper élastique)

Variable	Désignation
SDV 7	$S_{11}$ (Mpa)
SDV 8	$S_{22}$ (Mpa)
SDV 9	$S_{12}$ (Mpa)
SDV 51	$\sigma_{11}$ (Mpa)
SDV 52	$\sigma_{22}$ (Mpa)
SDV 54	$\sigma_{12}$ (Mpa)
SDV 61	$U_{11}$ (mm)
SDV 62	$U_{22}$ (mm)
SDV 63	$U_{12}$ (mm)
SDV 44	$U_{21}$ (mm)

#### 4.4.4.1 Test de traction unidirectionnelle

Le but essentiel de ce test est de vérifier le modèle hyperélastique pour un comportement en traction pure. Pour cela on considère un élément de même géométrie que celui utilisé dans la validation du modèle hypo élastique et on le soumet à un allongement unitaire selon la direction 1 (figure 4.9).

Les conditions aux limites pour ce test sont pareilles à celles utilisées dans la validation du modèle hypoélastique (figure 4.9).

- **Résultats de la simulation du test de traction simple**

Les composantes des tenseurs de contraintes de Piola Kirchhoff  $\bar{S}$ , celles du tenseur de Cauchy  $\bar{\sigma}$  ainsi que les composantes des tenseurs  $\bar{U}$  et  $\bar{F}$  à la fin de la transformation sont présentées sur le tableau suivant:

Tableau 4.5 Les variables d'état fournies par Abaqus (test traction simple)

Désignation	Valeur	Variable	Désignation	Valeur
S <sub>11</sub> (Mpa)	1.19 E <sup>+4</sup>	SDV 62	U <sub>22</sub> (mm)	1.00
S <sub>22</sub> (Mpa)	00	SDV 63	U <sub>12</sub> (mm)	1.00 E <sup>-20</sup> =0
S <sub>12</sub> (Mpa)	2.729 E <sup>-</sup>	SDV 64	U <sub>21</sub> (mm)	1.00 E <sup>-20</sup> =0
σ <sub>11</sub> (Mpa)	2.38 E <sup>+4</sup>	SDV 61	F <sub>11</sub>	2.00
σ <sub>22</sub> (Mpa)	00	SDV 62	F <sub>22</sub>	1.00
σ <sub>12</sub> (Mpa)	2.729 E <sup>-</sup>	SDV 63	F <sub>12</sub>	1.002 E <sup>-10</sup> =0
U <sub>11</sub> (mm)	2.00	SDV 64	F <sub>21</sub>	00

- **Analyse des contraintes**

Les composantes de contrainte tenseur de Cauchy sont déterminées à partir de celles du tenseur Piola Kirchhoff  $\bar{S}$  par la relation suivante :

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{J} \cdot \bar{U} \cdot \bar{S} \cdot \bar{U}^T \quad (4.49)$$

Pour notre cas J= 2 donc :

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.19 E + 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.38 E + 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les composantes du tenseur de contraintes projetées dans la base de calcul de Green-Naghdi sont présentées ci-dessous.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_{\bar{e}} = \begin{bmatrix} 2.38 E + 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La seule possibilité de déformation existe dans la direction 1 (pour notre cas la direction de l'application de l'effort de traction). Ce qui est vérifié pour ce test.

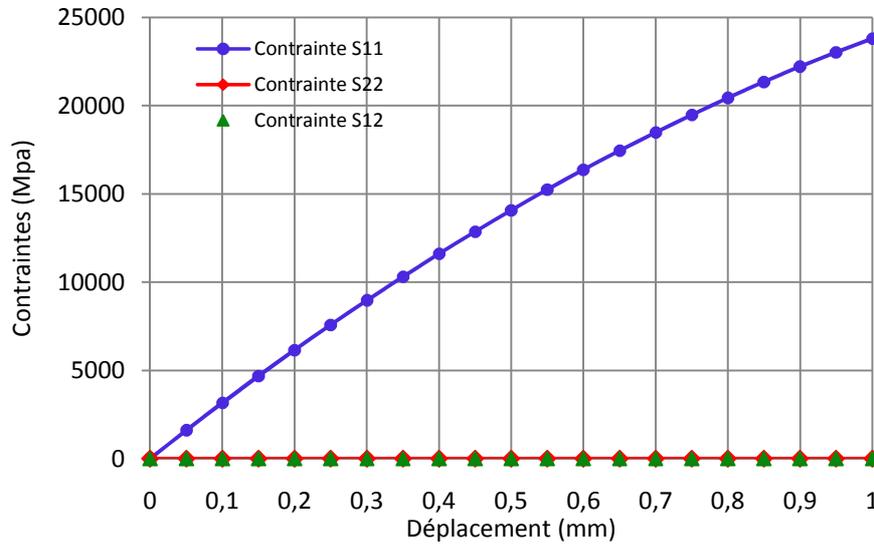


Fig. 4.27 Evolution des contraintes de Cauchy (Test de traction simple)

- **Cinématique de la transformation**

Les composantes analytiques du tenseur  $\bar{\bar{F}}$  à la fin de la transformation sont d'après les équations (4.5):

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les composantes fournies par Abaqus suite à la simulation :

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 1.002 \cdot E^{-10} = 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les composantes du tenseur  $\bar{\bar{F}}$  analytiques et numériques sont les mêmes.

#### 4.4.4.2 Test de cisaillement simple

Ce test permet de valider le modèle hyperélastique pour le comportement au cisaillement.. Les conditions aux limites sont les mêmes que celles utilisés dans le modèle hypoélastique (figure 4.15).

- **Résultats de la simulation du test cisaillement simple**

Les composantes des tenseurs de contraintes de Piola Kirchhoff 2  $\bar{\bar{S}}$ , celles du tenseur de Cauchy  $\bar{\bar{\sigma}}$  ainsi que les composantes des tenseurs  $\bar{\bar{U}}$  et  $\bar{\bar{F}}$  à la fin de la transformation sont présentées sur le tableau suivant:

Tableau 4.6 Les variables d'état fournies par Abaqus (test cisaillement simple)

Désignation	Valeur	Variable	Désignation	Valeur
S <sub>11</sub> (Mpa)	-0.05375	SDV 62	U <sub>22</sub> (mm)	1.342
S <sub>22</sub> (Mpa)	8.463 E <sup>+3</sup>	SDV 63	U <sub>12</sub> (mm)	0.4472
S <sub>12</sub> (Mpa)	0.05375	SDV 64	U <sub>21</sub> (mm)	0.4472
σ <sub>11</sub> (Mpa)	1.693 E <sup>+3</sup>	SDV 41	F <sub>11</sub>	1.00
σ <sub>22</sub> (Mpa)	1.523 E <sup>+4</sup>	SDV 42	F <sub>22</sub>	1.00
σ <sub>12</sub> (Mpa)	5.078 E <sup>+3</sup>	SDV 43	F <sub>12</sub>	1.00
U <sub>11</sub> (mm)	0.8944	SDV 44	F <sub>21</sub>	1.777 E <sup>-7</sup>

• **Analyse des contraintes**

Les composantes de contrainte tenseur de Cauchy sont déterminées à partir de celles du tenseur Piola Kirchhoff 2 par la relation (4.49):

Pour ce cas J=1 donc :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0.8944 & 0.4472 \\ 0.4472 & 1.342 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.005375 & 0.005375 \\ 0.005375 & 8.463 E^{+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8944 & 0.4472 \\ 0.4472 & 1.342 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} 1.693 E^{+3} & 5.078 E^{+3} \\ 5.078 E^{+3} & 1.523 E^{+4} \end{bmatrix}$$

Les composantes du tenseur de Cauchy projetées dans la base de Green-Naghdi sont présentées ci-dessous:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_{\bar{e}} = \begin{bmatrix} 1.693E^{+3} \\ 1.523 E^{+4} \\ 5.078E^{+3} \end{bmatrix}$$

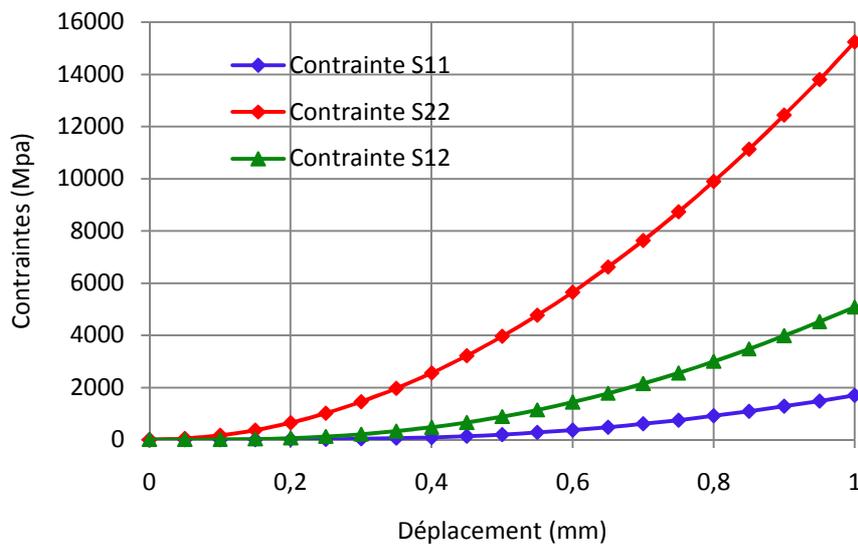


Fig. 4.28 Evolution des contraintes de Cauchy (Test du cisaillement simple)

- **Cinématique de la transformation**

Les composantes analytiques du tenseur  $\bar{\bar{F}}$  à la fin de la transformation sont déterminées grâce à la relation (4.18):

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les composantes fournies par Abaqus sont :

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ces résultats montrent la grande concordance entre les composantes analytiques du tenseur  $\bar{\bar{F}}$  et celles fournies par Abaqus.

#### 4.4.4.3 Test d'objectivité

- **Résultats de la simulation du test d'objectivité**

On considère un élément de même géométrie que celle des tests précédents et on lui impose les mêmes conditions aux limites que celles appliquées pour le cas du modèle hypoélastique (dans le second pas l'élément subit une rotation d'un angle  $\alpha = 42^\circ$ ) (figure 4.13).

Les composantes des tenseurs de contraintes  $\bar{S}$ , celles du tenseur  $\bar{\sigma}$  ainsi que les composantes des tenseurs  $\bar{U}$  et  $\bar{F}$  à la fin de la transformation sont présentées sur le tableau suivant:

Tableau 4.7 Les variables d'état fournies par Abaqus (test d'objectivité)

Désignation	Valeur	Variable	Désignation	Valeur
$S_{11}$ (Mpa)	$1.19 E^{+4}$	SDV 62	$U_{22}$ (mm)	0.9999
$S_{22}$ (Mpa)	-1.735	SDV 63	$U_{12}$ (mm)	$1.00 E^{-20}$
$S_{12}$ (Mpa)	$3.548 E^{-6}$	SDV 64	$U_{21}$ (mm)	$1.00 E^{-20}$
$\sigma_{11}$ (Mpa)	$2.38 E^{+4}$	SDV 41	$F_{11}$	1.478
$\sigma_{22}$ (Mpa)	$-8.676 E^{-1}$	SDV 42	$F_{22}$	0.739
$\sigma_{12}$ (Mpa)	$3.548 E^{-6}$	SDV 43	$F_{12}$	-0.6736
$U_{11}$ (mm)	2.00	SDV 44	$F_{21}$	1.347

- **Analyse des contraintes**

Les composantes de  $\bar{\bar{F}}$  sont données par la relation (4.28) :

$$[\bar{\bar{F}}] = \begin{bmatrix} 1.478 & -0.6735 \\ 1.347 & 0.739 \end{bmatrix}$$

Les composantes de contrainte tenseur de Cauchy sont déterminées à partir des composantes du tenseur Piola Kirchhoff 2 grâce à la relation (4.49) :

J=2 donc :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.19 E^+ & 3.548 E^{-6} \\ 3.548 E^{-6} & -1.735 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.38 E^+ & 0 \\ 0 & -0.8675 \approx 0 \end{bmatrix}$$

Les composantes du tenseur de contraintes projetées dans la base de Green-Naghdi sont présentés ci-dessous.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_{\bar{e}} = \begin{bmatrix} 2.38 E^+ \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

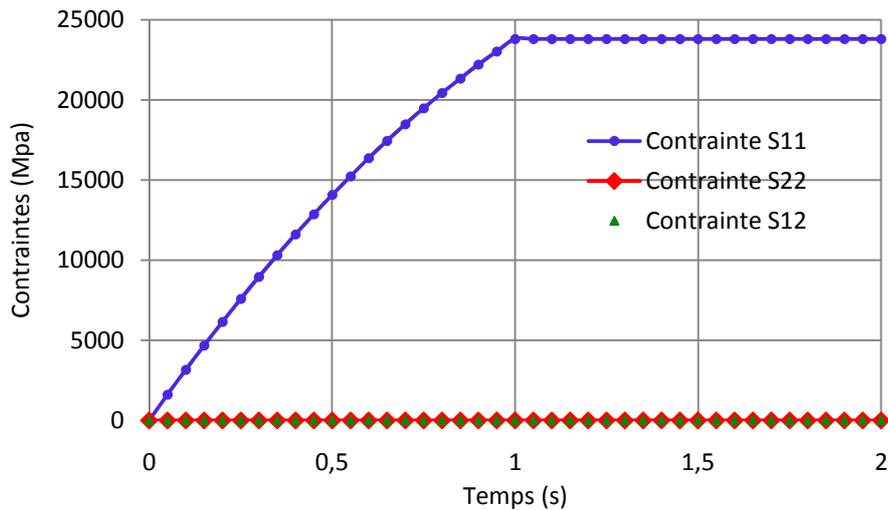


Fig. 4.29 Evolution des contraintes de Cauchy (Test d'objectivité)

L'évolution des différentes contraintes présentées sur la figure 4.29 montre que les valeurs de celles-ci restent invariantes après la traction suivie d'une rotation rigide d'un angle  $\alpha = 42^\circ$ . On peut dire que cette loi de comportement est objective.

- **Cinématique de la transformation**

A la fin de la transformation, les composantes analytiques du tenseur gradient sont :

$$[\bar{\bar{F}}] = \begin{bmatrix} 2 \cos(42.33) & -\sin(42.33) \\ 2 \sin(42.33) & \cos(42.33) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4785 & -0.6733 \\ 1.3467 & 0.7392 \end{bmatrix}$$

Les composantes numériques du tenseur gradient sont :

$$[\bar{F}] = \begin{bmatrix} 1.478 & -0.6736 \\ 1.347 & 0.739 \end{bmatrix}$$

#### 4.5 Comparaison des deux modèles hypo et hyperélastique

Les résultats obtenus par les modèles hyper sont en bonne concordance avec les résultats analytiques de référence, ce qui permet de valider ce modèle dont les résultats sont très satisfaisants. Toute fois il est intéressant de comparer les résultats obtenus par les deux modèles hypo et hyper élastiques pour les tests effectués.

##### 4.5.1 Test de traction simple

On présente ci-dessous (figures 4.30) l'évolution des contraintes de Cauchy  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$  projetées dans la base de Green-Naghdi, fournies par Abaqus pour les deux modèles hypo et hyperélastique. On remarque la parfaite concordance entre les valeurs des composantes des contraintes de Cauchy  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$ . Pour la composante  $\sigma_{11}$  les courbes sont presque superposées sauf à la fin de la simulation. Ceci peut être expliqué par le fait que le modèle hyperélastique est basé sur une approche expérimentale qui peut influencer sur la précision du modèle.

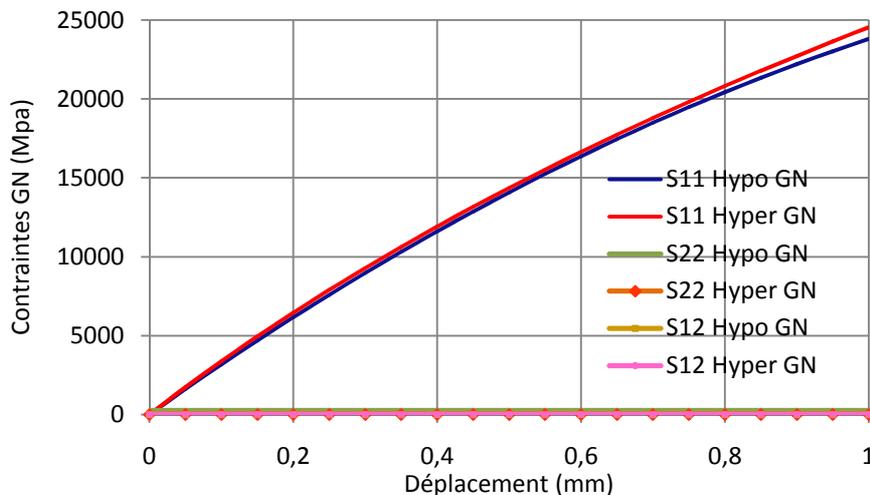


Fig. 4.30 Comparaison des contraintes de Cauchy des deux modèles hypo et hyperélastique obtenues sur le test de traction simple

##### 4.5.2 Test de cisaillement simple

Pour ce test de cisaillement simple, les contraintes de Cauchy  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$  par rapport à la base de Green-Naghdi pour les deux modèles sont présentées graphiquement sur la figure 4.31.

On remarque qu'au début de la simulation les composantes  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$  des deux modèles coïncident. Au fur et mesure que les déplacements augmentent on s'approche de l'angle de verrouillage et les deux modèles commencent à diverger. On peut aussi expliquer

cela comme pour le cas précédent, par la nature du modèle hyperélastique basé sur une approche expérimentale qui peut altérer la précision du modèle.

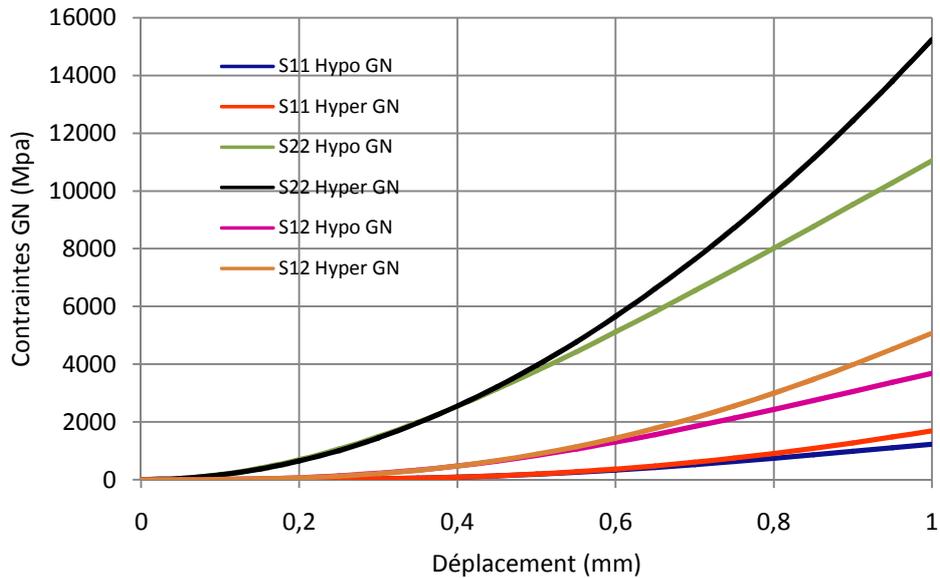


Fig. 4.31 Comparaison des contraintes de Cauchy des deux modèles hypo et hyperélastique obtenues sur le test cisaillement simple

#### 4.5.3 Test d'objectivité

Pour ce test d'objectivité, les contraintes  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$  projetées dans la base de Green-Naghdi pour les deux modèles sont présentées sur la (figure 4.32). La première phase de cet essai correspond parfaitement à celle du test de la traction simple. Dans la seconde phase qui correspond à la rotation de corps rigide, la valeur de la contrainte  $\sigma_{11}$  reste invariante pour les deux modèles.

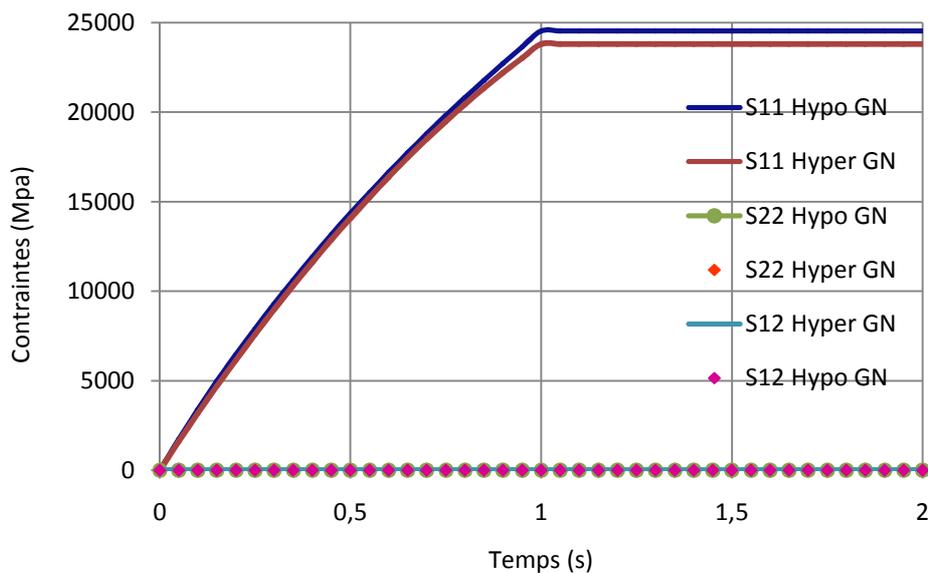


Fig. 4.32 Comparaison des contraintes de Cauchy des deux modèles hypo et hyperélastique obtenues sur le test d'objectivité

## 4.6 Conclusion

Les deux modèles de comportement hypoélastique et hyperélastique sont implémentés dans le code de calcul Abaqus Explicit, par le biais de deux sous-routines écrites et développées en langage Fortran.

Des simulations numériques des tests élémentaires de base (traction unidirectionnelle, cisaillement simple et objectivité) sont conduites sur un tissu de renfort de type taffetas de verre utilisé comme renfort pour les composites.

Les résultats obtenus avec le modèle hypoélastique paraissent très satisfaisants pour tous les tests de base. Une confrontation des résultats numériques avec d'autres analytiques des mêmes tests, a montré une grande concordance entre ces résultats.

Le modèle hyperélastique donne aussi des résultats satisfaisants. Néanmoins pour le cas du cisaillement simple, les résultats montrent quelques divergences. Ceci peut s'expliquer par la nature du modèle hyperélastique basé sur une approche expérimentale qui peut altérer la précision du modèle.

# Chapitre 5

Etudes expérimentale et  
numérique d'un essai de  
cisaillement Bias extension  
test: cas d'un NCF de Carbone

## Chapitre 5

# Etudes expérimentale et numérique d'un essai de cisaillement Bias extension test: cas d'un NCF de Carbone

### 5.1 Introduction

L'objectif principal de ce chapitre est d'analyser expérimentalement et numériquement le comportement en cisaillement d'un tissu de renfort type NCF de carbone (Non-Crimp-Fabrics).

Pour cela un essai de cisaillement Bias extension test a été conduit au laboratoire LaMCoS de l'Insa de Lyon sur des échantillons prélevés d'un tissu de renfort type NCF de Carbone. Les résultats obtenus sont ensuite exploités pour effectuer des simulations numériques de ce même test, dans le but d'analyser le comportement mécanique en cisaillement de ce tissu de renfort.

L'essai Bias extension test, dont le principe a déjà été présenté au § 1.6.5.2, est souvent employé dans la description et l'étude du comportement mécanique en cisaillement des tissus de renfort.

Le modèle hypoélastique proposé au chapitre 3 est implémenté sous Abaqus/Explicit par le biais d'une routine utilisateur et utilisé dans les simulations numériques de ce chapitre.

### 5.2 Les renforts de composite NCF

Les renforts de composite NCF (Non Crimp Fabrics), sont composés d'un assemblage de couches unidirectionnelles composées de fibres qui sont cousues et rassemblées par un fil (figure 5.1). Pour le cas des NCF multiplies, chaque couche est orientée selon une direction différente, ce qui permet de produire des renforts à la carte, adaptés à des applications spécifiques. Ils sont généralement utilisés comme renfort pour les composites de haute performance et spécialement dans le domaine de l'aéronautique (figure 5.2).

Le terme Non-Crimp-Fabrics signifie que les fibres sont parfaitement alignées dans chaque couche du renfort (figure 5.1) ce qui permet d'avoir une régularité dans la distribution des efforts dans la direction de l'application de l'effort.

Ce type de renfort, présente beaucoup d'avantages, il offre la possibilité d'avoir une meilleure rigidité mécanique qu'avec un autre type de tissu de même épaisseur ainsi qu'une grande capacité de supporter les charges.

Il existe une grande diversité de renforts NCF en fonction de la nature de la fibre utilisée, de l'orientation et du nombre de plis ainsi que du type de la couture et du type fil employé.

L'analyse expérimentale du comportement au cisaillement dans le plan des tissus de renfort a fait l'objet de nombreux travaux, car le cisaillement est le mode de déformation principal de ces tissus de renfort [12], [35], [18], [88], [100-102].

Malgré que l'emploi des NCF comme renforts pour composites est relativement nouveau, leur usage dans différents secteurs de l'industrie comme l'industrie éolienne, la construction navale, les transports et les industries automobile et aéronautique connaît un grand essor. On prévoit que leur champ d'application augmente considérablement dans l'avenir [103].

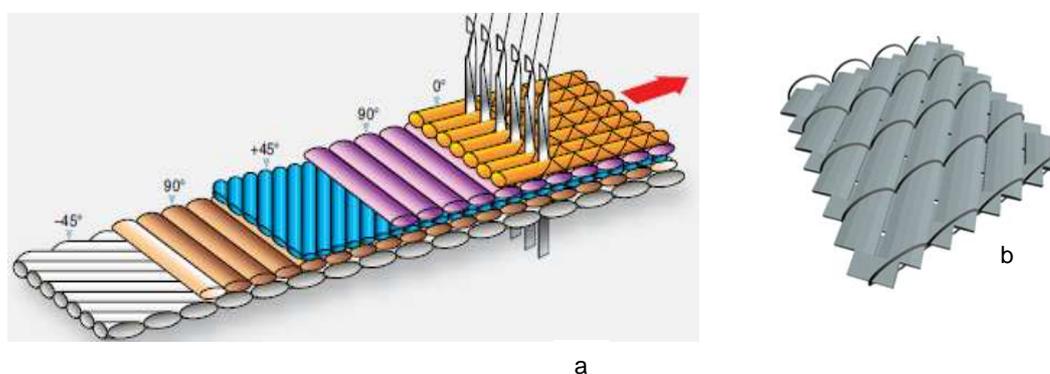


Fig.5.1 Renfort NCF : a) multiplies b) mono-plie

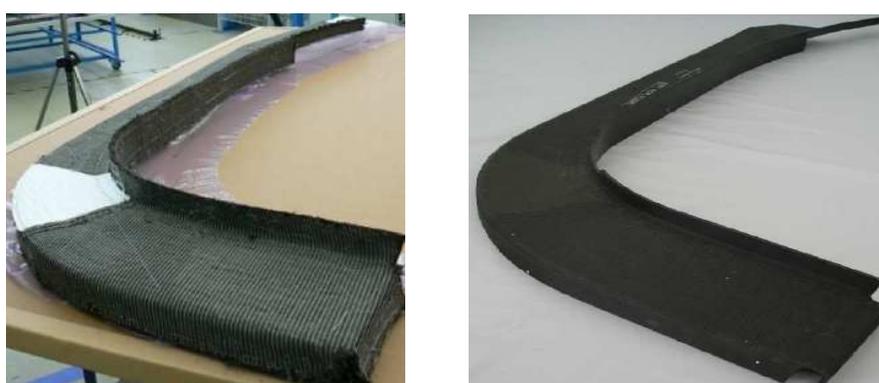


Fig.5.2 Exemple d'utilisation d'un renfort NCF :  
a) Préforme b) pièce finie

Dans ce travail, nous avons réalisé des essais sur deux types différents de renforts NCF secs :  $NCF_{1-1}$  et  $NCF_{2-2}$  éprouvettes ayant tous les stiches dans la même direction,  $NCF_{1-2}$  et  $NCF_{2-1}$  éprouvettes ayant les petits stiches perpendiculaires aux grands stiches (figure 5.3) et (figure 5.4).

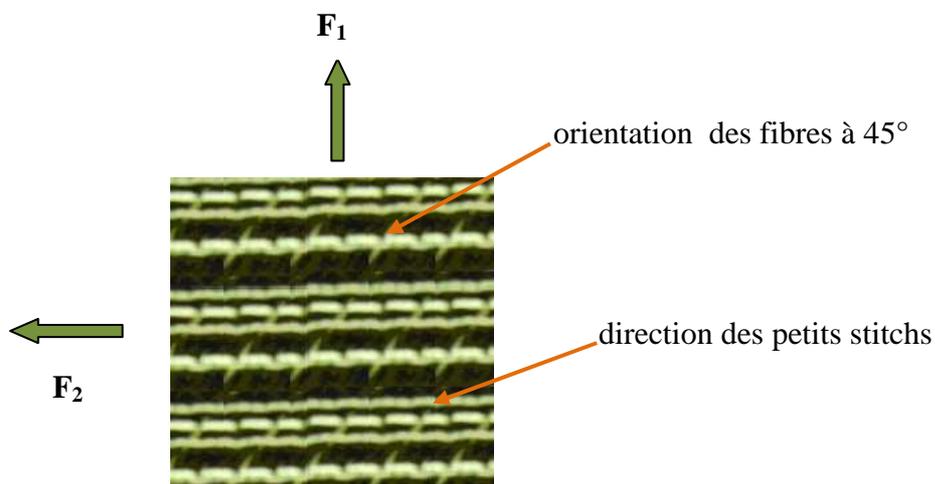


Fig.5.3 Eprouvettes  $NCF_{1-1}$  et  $NCF_{2-2}$  utilisées dans les essais

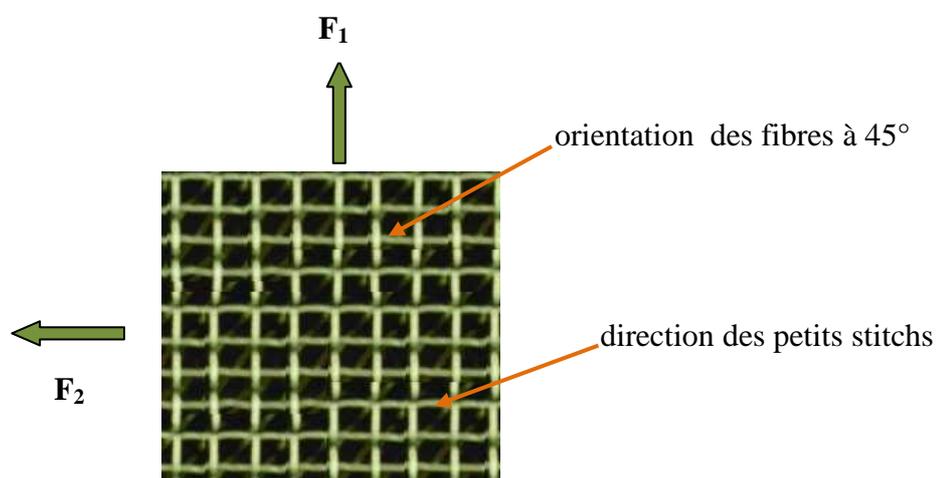


Fig.5.4 Eprouvettes  $NCF_{1-2}$  et  $NCF_{2-1}$  utilisées dans les essais

L'objectif de cette étude est de contribuer à la compréhension du comportement au cisaillement des renforts type NCF de Carbone. Deux différents types d'éprouvettes NCF ont été examinés dans ce travail comme le montre les (figures 5.3 et 5.4). Pendant les essais les paramètres force-déplacement ont été enregistrés dans le but de tracer les courbes (force-déplacement) pour pouvoir déterminer par la suite les angles et les contraintes de cisaillement; les courbes obtenues sont interpolés par des régressions polynomiales qui sont basées sur la méthode des moindres carrés. La dérivée de ces équations permet de déterminer le module de rigidité au cisaillement  $G_{12}$  en fonction de l' angle de cisaillement .

### 5.3 Principe de l'essai Bias extension test

Le Bias extension test est un essai fréquemment utilisé pour caractériser le comportement au cisaillement des tissus de renfort pour composites. Il est distingué par sa simplicité et sa mise en œuvre relativement facile.

Au cours de cet essai réalisé sur une machine de traction (figure 5.5), l'éprouvette de forme rectangulaire est découpée de telle sorte que les mèches qui composent le tissu selon les deux directions chaîne et trame soient orientés à  $45^\circ$  par rapport à la direction de la force de traction [18], [30-31], [104-105].

L'éprouvette est découpée avec un rapport longueur sur largeur supérieur ou égal à deux pour mettre en évidence les trois zones distinctes de déformation [26], [33] (figure. 5.6) et (figure 5.7).

Lors de l'essai, l'éprouvette est tirée d'une longueur initiale  $L$  jusqu'à  $L+d$ . La nature fibreuse de l'échantillon conduit à l'état déformé montré sur la figure 5.6, où on peut distinguer clairement trois zones de déformation : une première zone de cisaillement pur A (en rouge) cisailée d'un angle ( $\gamma$ ), une seconde zone B (en vert), dite « demi cisailée », cisailée d'un angle ( $\frac{\gamma}{2}$ ) et enfin une troisième zone sans cisaillement C (en bleu). Une analyse cinématique simple de l'éprouvette permet de relier l'angle  $\gamma$  dans la zone de cisaillement A au déplacement  $d$  engendré par l'effort d'étirement  $F$  développé par la machine. La zone centrale cisailée (figure 5.6) est supposée être un carré dont la longueur du côté est  $L_c$ .

$$L_c = \frac{\sqrt{2}D}{2} \quad (5.1)$$

$D$  représente la diagonale du carré de la zone A, elle est donnée par la relation.

$$D = L - l \quad (5.2)$$

Elle devient après déformation

$$D_1 = D + d \quad (5.3)$$

L'angle  $\theta$  est calculé d'après la relation :

$$\cos(\theta) = \frac{D_1}{2L_c} = \frac{D + d}{\sqrt{2}D_1} \quad (5.4)$$

L'angle de cisaillement  $\gamma$  dans la zone A peut être relié au déplacement  $d$  de la machine par l'équation :

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - 2\theta = \frac{\pi}{2} - 2\arccos\left(\frac{D + d}{\sqrt{2}D_1}\right) \quad (5.5)$$



Fig.5.5 Machine de traction utilisée pour des tests de Bias extension test à l'INSA de Lyon

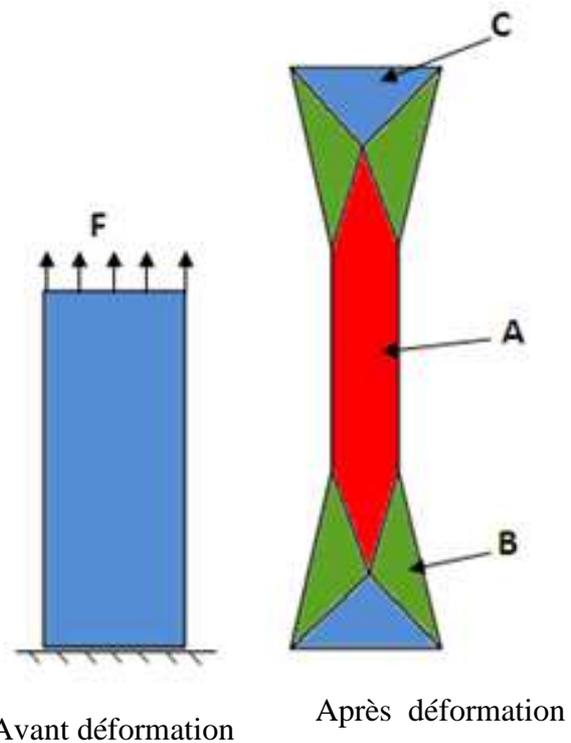
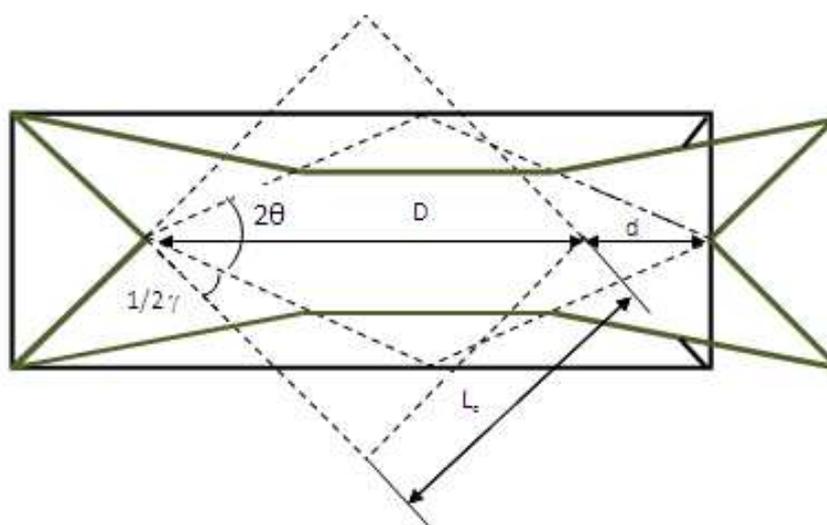


Fig.5.6 Eprouvette du Bias extension test (avant et après déformation)



*Fig.5.7 Schéma cinématique de l'éprouvette utilisée dans le Bias extension test*

## 5.4 Démarche expérimentale

### 5.4.1 Préparation des échantillons

Nous avons choisi de travailler avec des éprouvettes dont les longueurs sont égales à trois fois leurs largeurs, afin de visualiser et mettre en évidence les zones de cisaillement conformément à la théorie de ce test.

Un grand soin a été pris pour s'assurer que les mèches soient orientées à  $\pm 45$  degrés par rapport aux bords de l'éprouvette, ceci afin d'éviter tout désalignement qui pourrait engendrer des forces de traction ou de compression dans les directions des fibres qui par conséquent rendrait les résultats du test erronés.

### 5.4.2 Protocole expérimental

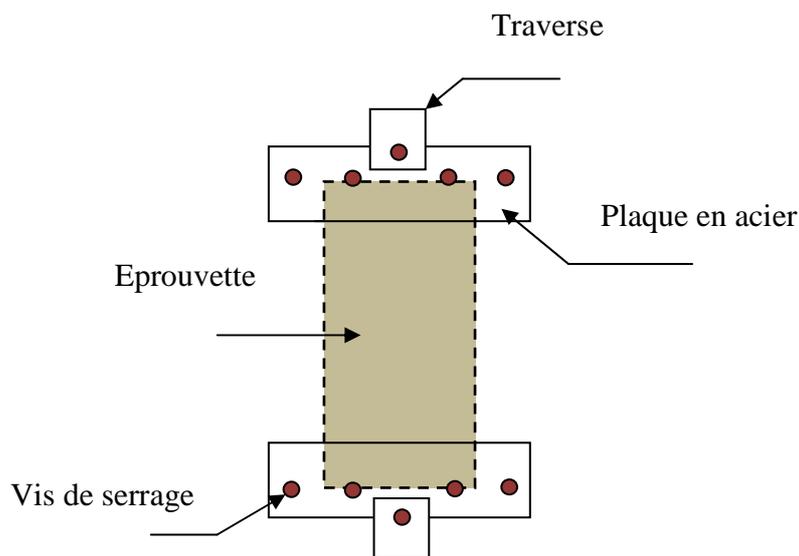
Deux paires de plaques d'acier sont utilisées pour le serrage de l'éprouvette au moyen de vis comme montré sur la [figure 5.8](#). Elles sont reliées aux mâchoires de la machine de traction par le biais de deux traverses, les bords externes des plaques sont en contact avec les rainures des traverses pour empêcher la rotation de l'éprouvette lors de l'étirement.

Nous avons utilisé pour ces essais une machine de traction de marque Schenck se trouvant au laboratoire LaMCoS de l'insa de Lyon. Sa capacité maximale est de 250 kN, elle est équipée de plusieurs capteurs, d'un dispositif informatique qui permet de piloter la machine, de synchroniser les différents capteurs et d'acquérir les différents paramètres enregistrés ([figure 5.5](#)).

Les tests sont pilotés en vitesse et à température ambiante. Ce dispositif permet de réaliser des mesures de type (effort-déplacement). Tous les essais ont été conduits à déplacement imposé avec une vitesse de 10 mm/min, sur deux types différents d'éprouvettes NCF de mêmes dimensions (300 x100) mm<sup>2</sup>.

- NCF<sub>1-1</sub> et NCF<sub>2-2</sub>: les renforts NCF ayant tous les stiches dans le même sens
- NCF<sub>2-1</sub> et NCF<sub>1-2</sub>: les renforts NCF ayant les petits stiches perpendiculaires aux grands stiches

Au cours des premiers essais, l'effort (F) est appliqué dans le sens perpendiculaire aux petits stiches, pour la deuxième série de tests, l'effort (F) est dans le même sens que les petits stiches (figure 5.4).



*Fig.5.8 Dispositif de maintien des éprouvettes NCF utilisées dans les essais*

### 5.4.3 Résultats

La collecte de ces données issues des différents tests, permet de tracer les courbes (déplacement-force) et (angle de cisaillement-force) (figures 5.9 à 5.13).

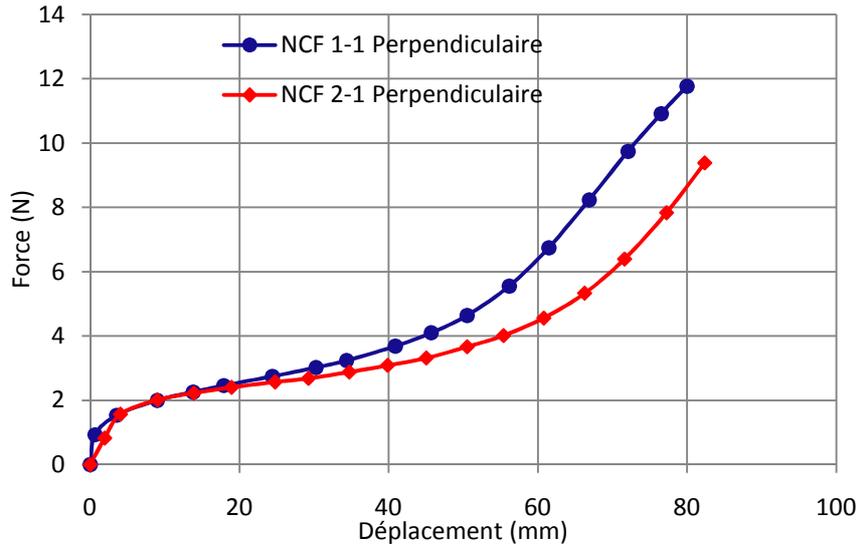


Fig.5.9 Courbes force-déplacement : NCF testés perpendiculairement aux petits stitches

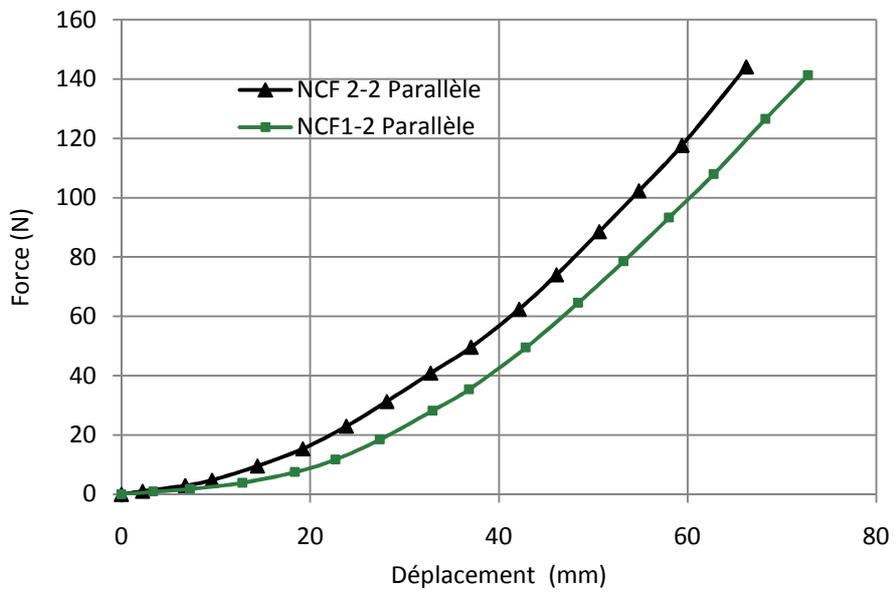


Fig.5.10 Courbes force-déplacement : NCF testés parallèlement aux petits stitches

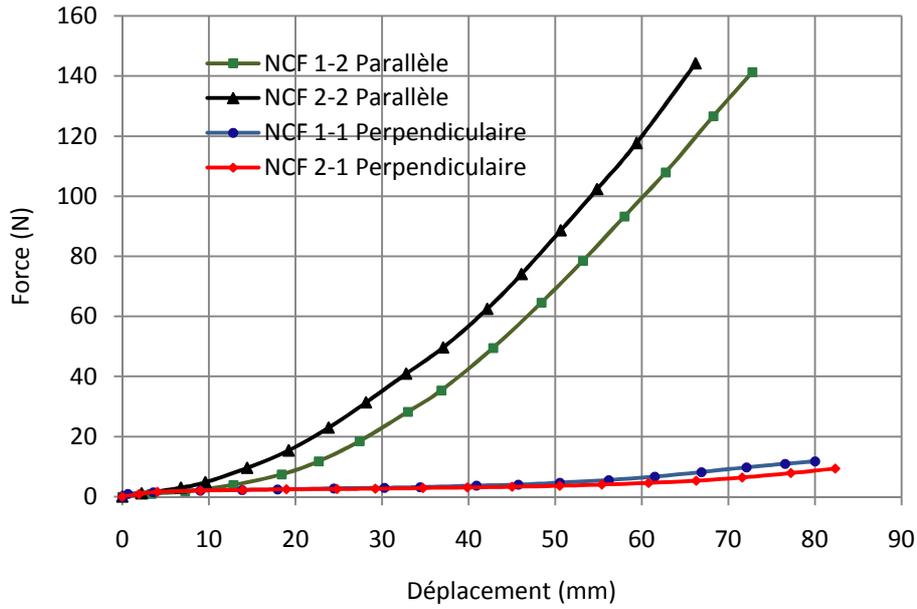


Fig.5.11 Courbes force-déplacement : NCF testés parallèlement et perpendiculairement aux petits stichs

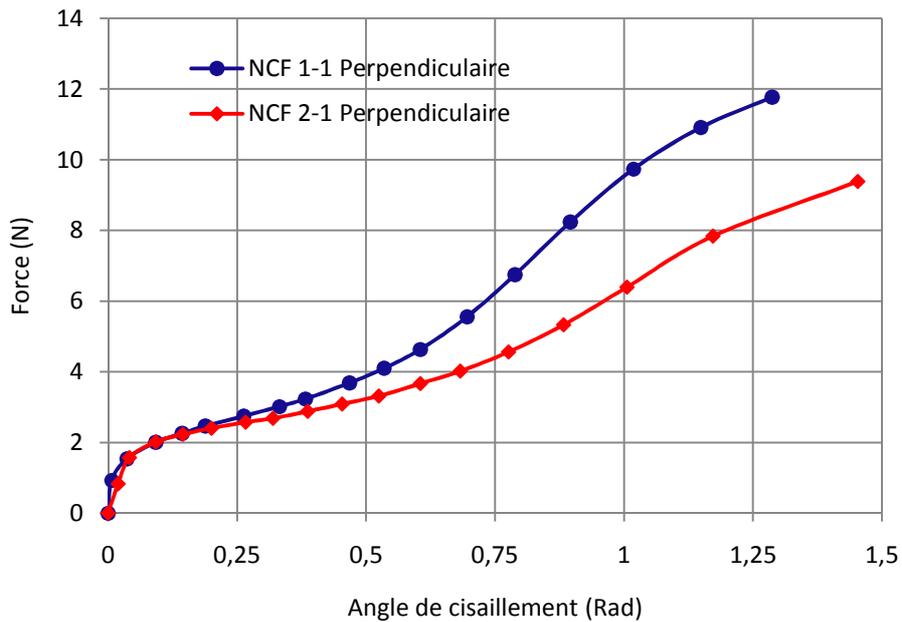


Fig.5.12 Courbes force-angle de cisaillement : NCF testés perpendiculairement aux petits stichs

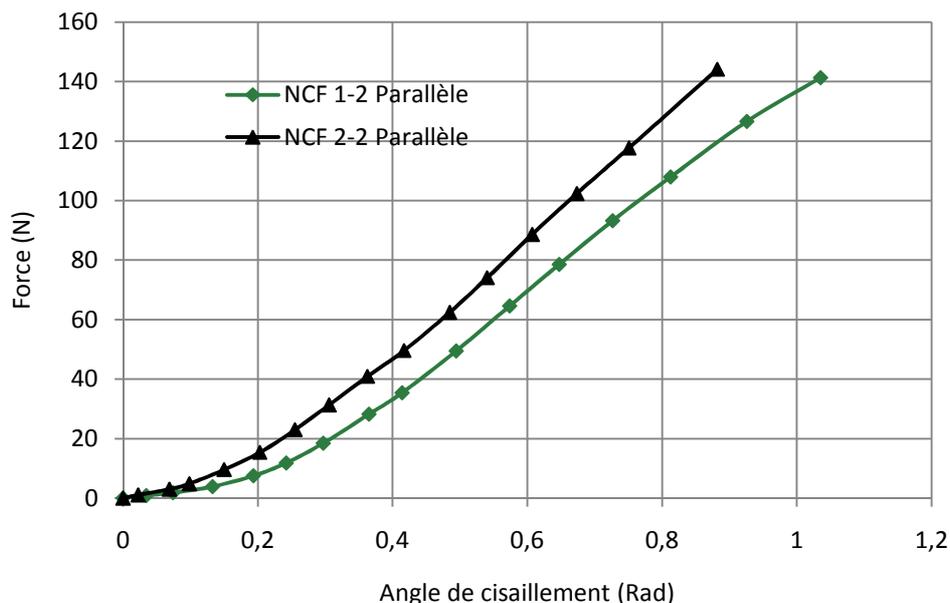


Fig.13 Courbes force-angle de cisaillement : NCF testés parallèlement aux petits stitchs

#### 5.4.4 Interprétation des résultats

##### 5.4.4.1 Influence des petits stitchs sur le comportement en cisaillement des NCF

D'après les courbes (figure 5.9 à 5.13), lorsqu'on applique la force perpendiculairement à la direction des petits stitchs, la force atteint des valeurs d'environ 10 à 12 N, pour des déplacements qui varient entre 80 et 85 mm. Par ailleurs, si on applique la force dans la direction des stitchs on remarque que la force atteint des valeurs d'environ 140-150 N, pour des déplacements de l'ordre de 75 à 80 mm.

Cela peut s'expliquer par la différence des coutures des NCF dans les sens chaîne et trame. Dans le cas où la force est parallèle à la direction de petits stitchs, les points de suture ajoutent une rigidité supplémentaire à celle des mèches ce qui augmente la force de cisaillement. Cependant lorsque la force est appliquée dans une direction perpendiculaire aux petits stitchs, seules les mèches sont soumises à l'étirement ce qui réduit l'effort de cisaillement. Par conséquent, nous pouvons dire que la rigidité des éprouvettes augmente avec une force qui est appliquée parallèlement à la direction des petits stitchs. Cette différence de couture des NCF, lui procurent des mécanismes de déformations spéciaux dans les sens chaîne et trame.

#### 5.4.4.2 Procédure de normalisation de la force de cisaillement et détermination du module de rigidité au cisaillement

La détermination des propriétés des matériaux dans un essai de caractérisation doit être indépendante de la méthode de l'essai ainsi que de la taille de l'échantillon, ainsi la force de cisaillement produite lors de l'essai du Bias extension test doit être indépendante des dimensions de l'éprouvette (rapport longueur/largeur).

Des techniques de normalisation sont souvent employées afin que les résultats expérimentaux soient exploitables. Ainsi les données propres à la force de cisaillement, mesurées et enregistrées lors de l'essai du Bias extension test sont normalisées par rapport à une longueur caractéristique.

Nous présentons ici une méthode numérique qui permet de déterminer la force de cisaillement normalisée (N/mm) à partir de la force de cisaillement  $F$  (N) appliquée par la machine de traction [106]. Ceci permet de calculer par la suite la contrainte de cisaillement  $\tau_{12}$  et le module de cisaillement  $G_{12}$  en fonction de l'angle de cisaillement.

Nous rappelons que  $G_{12}$  est une grandeur très importante dans la caractérisation en cisaillement des tissus de renfort et dans la simulation du Bias extension test. La force de cisaillement normalisée peut être obtenue en tenant compte de quatre hypothèses de base :

1. L'angle de cisaillement est considéré comme uniforme dans chaque zone.
2. L'angle de cisaillement dans la zone A est le double de celui de la zone B
3. Le cisaillement dans la zone C est nul
4. Le tissu a une configuration initiale orthogonale parfaite  $\theta_0 = 45^\circ$

L'effort d'étirement ( $F$ ) est dissipé dans les deux zones A et B. En se basant sur la relation qui lie le couple de cisaillement  $C_c(\gamma)$  à la force normalisée  $F_{\text{nor}}(\gamma)$ :

$$C_c(\gamma) = F_{\text{nor}}(\gamma) \cos(\theta) \quad (5.6)$$

Une relation a été développée dans [27] permettant de calculer la force normalisée.

$$F_{\text{nor}}(\gamma) = \frac{1}{(2H - 3W) \cos(\gamma)} \left[ \left( \frac{H}{W} - 1 \right) F \left( \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) - \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \right) - W F_{\text{nor}} \left( \frac{\gamma}{2} \right) \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \right] \quad (5.7)$$

Dans cette relation  $H$  et  $W$  représentent respectivement la longueur et la largeur de l'éprouvette. Dans notre cas  $H=300$  mm et  $W=100$  mm.

Pour une écriture simplifiée, on pose :

$$A = \frac{1}{(2H - 3W)\cos(\gamma)}$$

$$B = \left(\frac{H}{W} - 1\right)F\left(\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) - \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right)$$

$$C = W \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

Nous avons choisi d'interpoler la force normalisée par un polynôme du cinquième degré :

$$F_{\text{nor}}(\gamma) = a_0 + a_1\gamma + a_2\gamma^2 + a_3\gamma^3 + a_4\gamma^4 + a_5\gamma^5 \quad (5.8)$$

Alors  $F_{\text{nor}}(\gamma)$  devient :

$$F_{\text{nor}}(\gamma) = AB - ACF_{\text{nor}}\left(\frac{\gamma}{2}\right) \quad (5.9)$$

Sachant que  $F_{\text{nor}}(0) = 0$ ,  $a_0 = 0$  et si on remplace (5.8) dans (5.9), on obtient :

$$a_1\gamma\left(1 + \frac{AC}{2}\right) + a_2\gamma^2\left(1 + \frac{AC}{4}\right) + a_3\gamma^3\left(1 + \frac{AC}{8}\right) + a_4\gamma^4\left(1 + \frac{AC}{16}\right) + a_5\gamma^5\left(1 + \frac{AC}{32}\right) = AB \quad (5.10)$$

Pour différentes valeurs de l'angle de cisaillement  $\gamma$ , on forme un système composé de cinq équations du cinquième degré. La résolution de ce système nous permet de déterminer les coefficients du polynôme d'interpolation de la relation (5.8). Ainsi on obtient respectivement pour les quatre éprouvettes  $NCF_{1-1}$ ,  $NCF_{2-1}$ ,  $NCF_{1-2}$  et  $NCF_{2-2}$  les expressions de la force normalisée suivantes.

$$F_{\text{nor}}(\gamma) = 0.1578\gamma^5 - 0.6669\gamma^4 + 0.9509\gamma^3 - 0.5395\gamma^2 + 0.1363\gamma \quad (5.11)$$

$$F_{\text{nor}}(\gamma) = 0.3775\gamma^5 - 1.1447\gamma^4 + 1.3012\gamma^3 - 0.6592\gamma^2 + 0.1493\gamma \quad (5.12)$$

$$F_{\text{nor}}(\gamma) = 2.8790\gamma^5 - 6.6902\gamma^4 + 4.3159\gamma^3 - 0.0591\gamma^2 + 0.1107\gamma \quad (5.13)$$

$$F_{\text{nor}}(\gamma) = -1.6186\gamma^5 + 2.9673\gamma^4 - 2.4656\gamma^3 + 1.4760\gamma^2 + 0.2359\gamma \quad (5.14)$$

Les courbes de la force normalisée en fonction de l'angle de cisaillement ( $\gamma$ ) en radian des 4 tissus NCF considérés sont représentées ci-après:

:

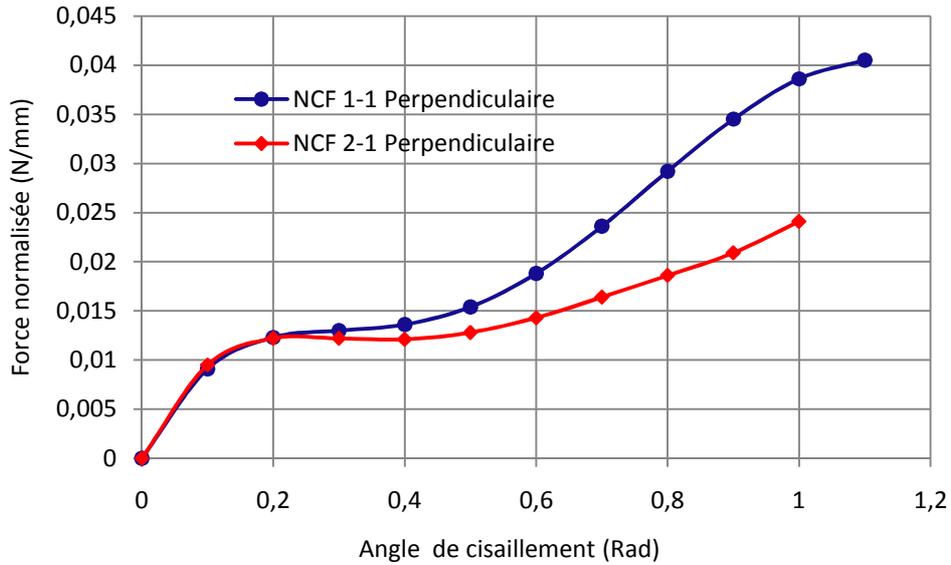


Fig.5.14 Courbes force normalisée -angle de cisaillement NCF testés perpendiculairement aux petits stitches

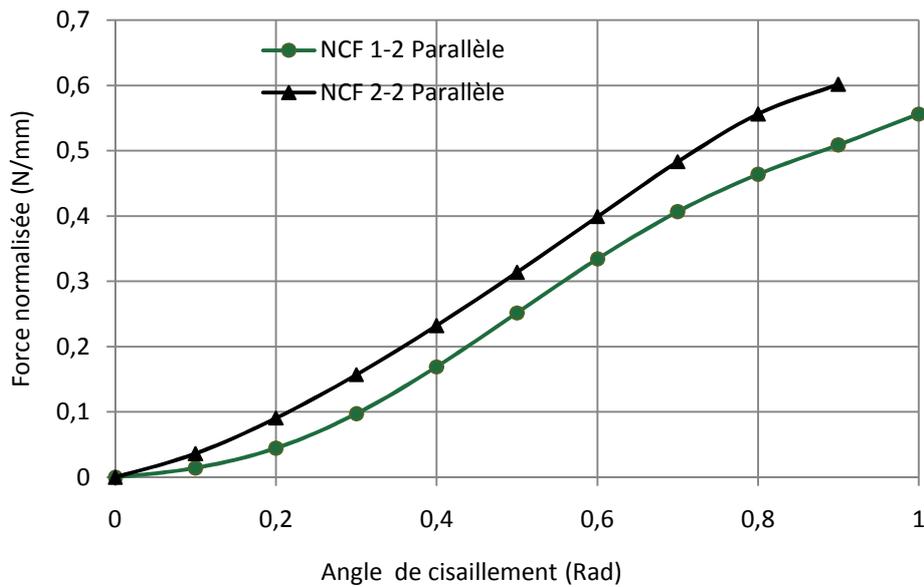


Fig.5.15 Courbes force normalisée -angle de cisaillement NCF testés parallèlement aux petits stitches

Les contraintes de cisaillement sont ensuite obtenues en divisant les forces normalisées par l'épaisseur du tissu ( $t = 1,2 \text{ mm}$ ).

$$\tau(\gamma) = \frac{F_{\text{nor}}}{t} \quad (5.15)$$

Si on considère les éprouvettes  $NCF_{1-1}$ ,  $NCF_{2-1}$ ,  $NCF_{1-2}$  et  $NCF_{2-2}$  les contraintes en fonction de l'angle de cisaillement sont respectivement :

$$\tau(\gamma) = 0.1315\gamma^5 - 0.5557\gamma^4 + 0.7924\gamma^3 - 0.4495\gamma^2 + 0.1135\gamma \quad (5.16)$$

$$\tau(\gamma) = 0.3145\gamma^5 - 0.9539\gamma^4 + 1.0843\gamma^3 - 0.5493\gamma^2 + 0.1244\gamma \quad (5.17)$$

$$\tau(\gamma) = 2.3991\gamma^5 - 5.5751\gamma^4 + 3.5965\gamma^3 - 0.0492\gamma^2 + 0.0922\gamma \quad (5.18)$$

$$\tau(\gamma) = -1.3488\gamma^5 + 2.4727\gamma^4 - 2.0546\gamma^3 + 1.23\gamma^2 + 2.05462\gamma \quad (5.19)$$

Les courbes contraintes-angles de cisaillement sont ensuite tracées et représentées sur les figures qui suivent :

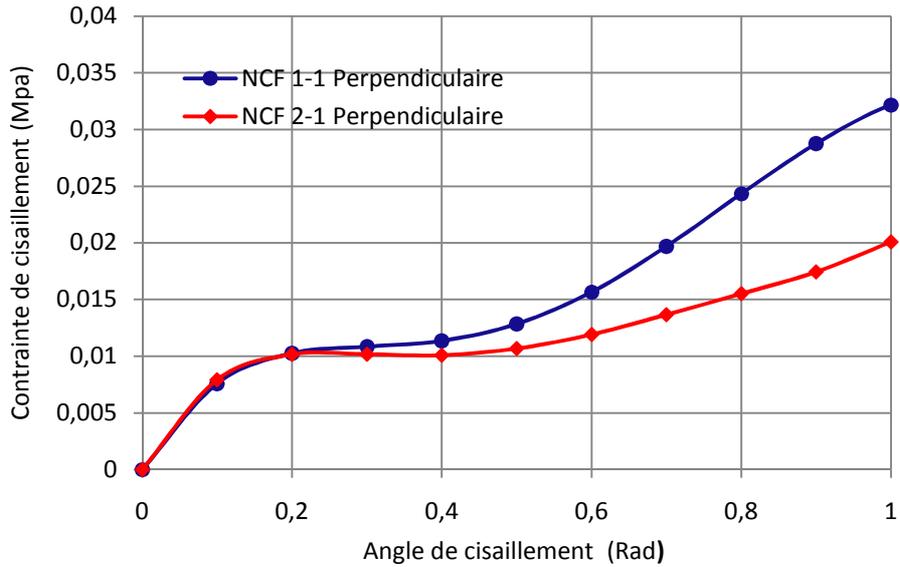


Fig.5.16 Courbes contraintes de cisaillement -angle de cisaillement NCF testés perpendiculairement aux petits stitches

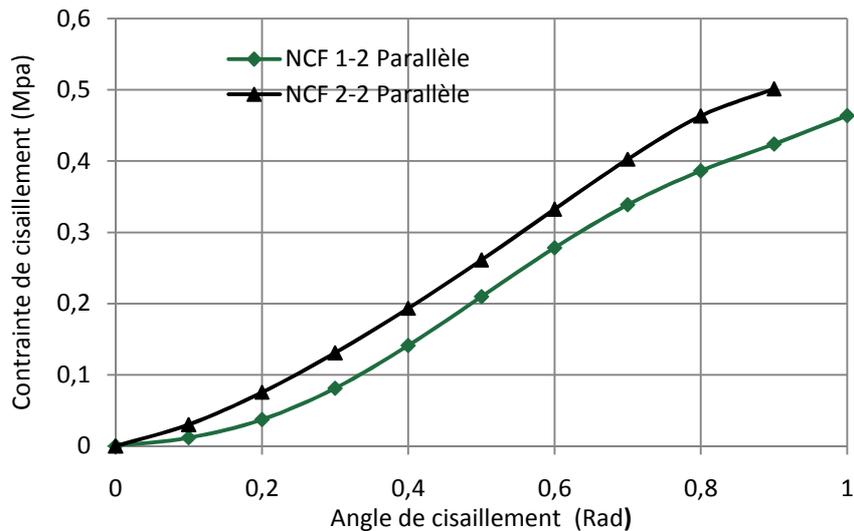


Fig.5.17 Courbes contraintes de cisaillement -angle de cisaillement NCF testés parallèlement aux petits stitches

Enfin les modules de rigidité au cisaillement  $G_{12}$  des éprouvettes  $NCF_{1-1}$ ,  $NCF_{2-1}$ ,  $NCF_{1-2}$  et  $NCF_{2-2}$  sont calculés par dérivation des équations (5.16), (5.17), (5.18) et (5.19).

$$G_{12}(\gamma) = 0.6575\gamma^4 - 2.2228\gamma^3 + 2.3772\gamma^2 - 0.899\gamma + 0.1135 \quad (5.20)$$

$$G_{12}(\gamma) = 1.5725\gamma^4 - 3.8156\gamma^3 + 3.2529\gamma^2 - 1.0986\gamma + 0.1244 \quad (5.21)$$

$$G_{12}(\gamma) = 11.9955\gamma^4 - 22.3004\gamma^3 + 10.7895\gamma^2 - 0.0984\gamma + 0.0922 \quad (5.22)$$

$$G_{12}(\gamma) = -6.744\gamma^4 + 9.8908\gamma^3 - 6.1638\gamma^2 + 2.46\gamma + 0.1965 \quad (5.23)$$

## 5.5 Simulation de l'essai du Bias extension test

Dans ce qui suit, nous nous proposons de modéliser numériquement le Bias extension test, sur des échantillons des éprouvettes  $NCF_{1-1}$ ,  $NCF_{2-1}$ ,  $NCF_{1-2}$  et  $NCF_{2-2}$ . Le modèle hypoélastique est utilisé pour décrire la loi de comportement. Les données d'entrée du modèle nécessaires pour caractériser les tissus de renfort NCF sont:

Module de Young dans la première direction  $E_1 = 37300$  MPa

1. Module de Young dans la deuxième direction  $E_2 = 37300$  MPa
2. Coefficient de Poisson  $\nu = 0$
3. Masse volumique  $0.00138$  tonne /  $\text{mm}^3$
4. Module de cisaillement  $G_{12}$  (déterminé en fonction de l'angle de cisaillement)
5. Epaisseur du tissu  $t = 1.2$  mm

Les éprouvettes utilisées dans ce test sont de forme rectangulaire ( $300 \times 100$  mm<sup>2</sup>) avec un rapport longueur sur largeur de trois, pour faire apparaître les zones de cisaillement [27],[29-30], [34], [107]. Elles sont modélisées par des éléments de membrane 2D, restreintes à zéro déplacement à une extrémité, l'autre extrémité étant pilotée en déplacement (figure 5.18).

Le modèle est maillé avec deux types d'éléments. Pour l'intérieur de l'éprouvette on a opté pour des éléments membranes quadrilatères M3D4R avec intégration réduite, de telle sorte que l'orientation des mèches soit alignée avec les bords de l'élément (figure 5.18). Ce choix peut être justifié par la nécessité d'avoir un maillage dont la forme est un losange, présentant l'avantage de bien décrire la déformation suivant deux directions à 45°. Les travaux de [108], [109] ont montré que si l'orientation des fibres pendant une extension à 45° est en biais par rapport aux bords de l'élément, les résultats peuvent manquer de précision.

Pour les frontières, on a choisi des éléments membranes triangulaires M3D3R. Nous avons réalisé une simulation pour chacune des éprouvettes NCF avec un nombre total de 112 éléments et une densité de maillage présentée sur la figure 5.18.

Le but principal de ce test est d'étudier le comportement en cisaillement du tissu considéré, de mettre en évidence les différentes zones de cisaillement conformément à la théorie de ce test et de tracer par la suite des courbes de chargement en fonction des déplacements dans le but de comparer les réponses expérimentales et numériques.

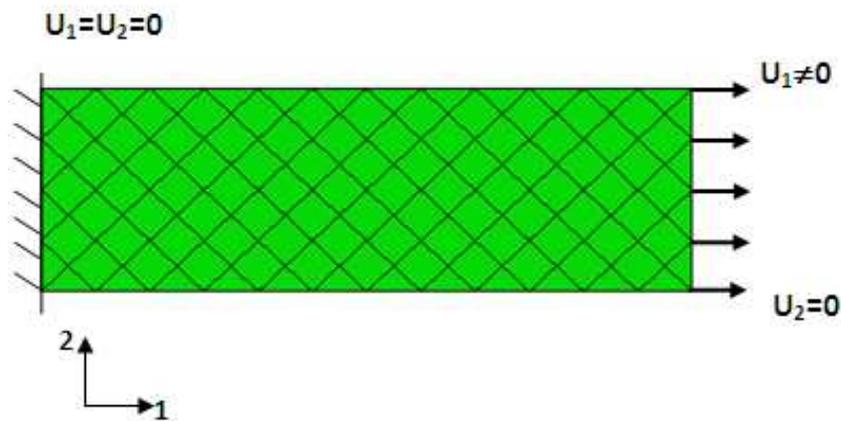


Fig.5.18 Conditions aux limites sur l'éprouvette du Bias extension test

### 5.5.1 Analyse de la variation de l'angle de cisaillement

D'après la relation (5.5), l'angle  $\gamma$  de cisaillement peut être déterminé en fonction du déplacement (d) imposé sur la machine de l'essai et des dimensions de l'éprouvette (figure 5.7). Nous avons tracé les courbes illustrant l'angle de cisaillement  $\gamma$  théorique et numérique issu des simulations réalisées sur les éprouvettes NCF<sub>1-1</sub>, NCF<sub>2-1</sub>, NCF<sub>1-2</sub> et NCF<sub>2-2</sub>, (figures 5.23 à 5.26).

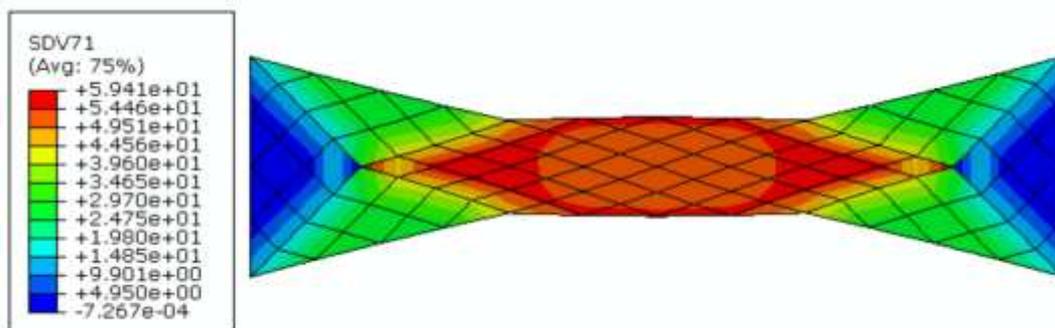


Fig.5.19 Répartition de l'angle de cisaillement dans l'éprouvette NCF<sub>11</sub> (Maillage 112 éléments)

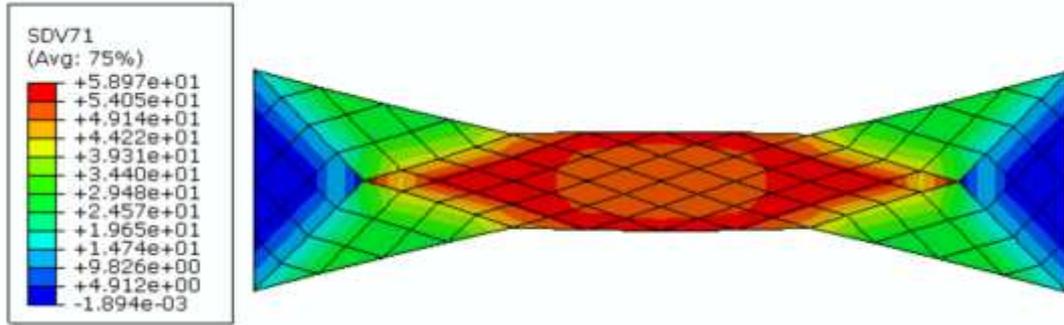


Fig.5.20 Répartition de l'angle de cisaillement dans l'éprouvette NCF<sub>21</sub>  
(Maillage 112 éléments)

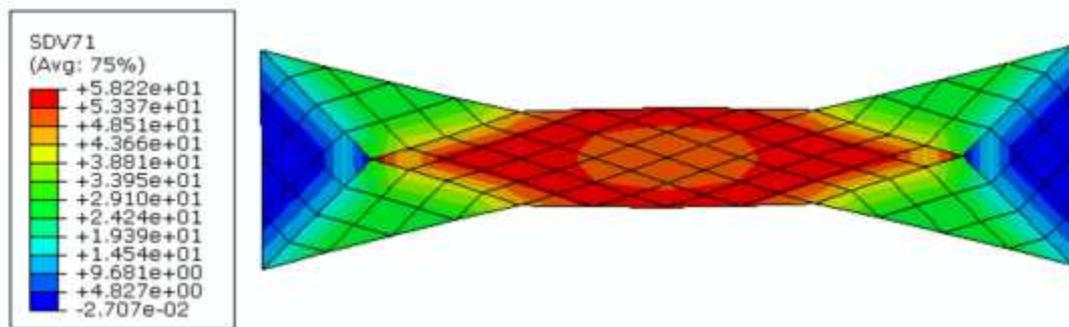


Fig.5.21 Répartition de l'angle de cisaillement dans l'éprouvette NCF<sub>22</sub>  
(Maillage 112 éléments)

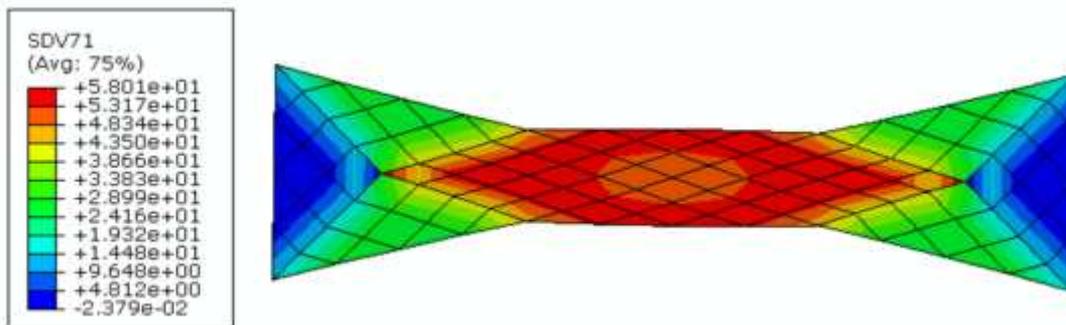


Fig.5.22 Répartition de l'angle de cisaillement dans l'éprouvette NCF<sub>12</sub>  
(Maillage 112 éléments)

La simulation du Bias extension test nous a permis de mettre en évidence les différentes zones de cisaillement indiquées théoriquement. Ainsi, comme montré sur les (figures 5.19 à 5.22), les zones en rouge sont celles du cisaillement pure, les zones vertes représentent les zones de demi cisaillement par rapport à celles en rouge et en fin les zones

en bleu ne subissent aucun cisaillement. De même, la comparaison entre les valeurs analytiques et numériques de l'angle  $\gamma$  de cisaillement entre les mèches est très satisfaisante (figures 5.23 à 5.26).

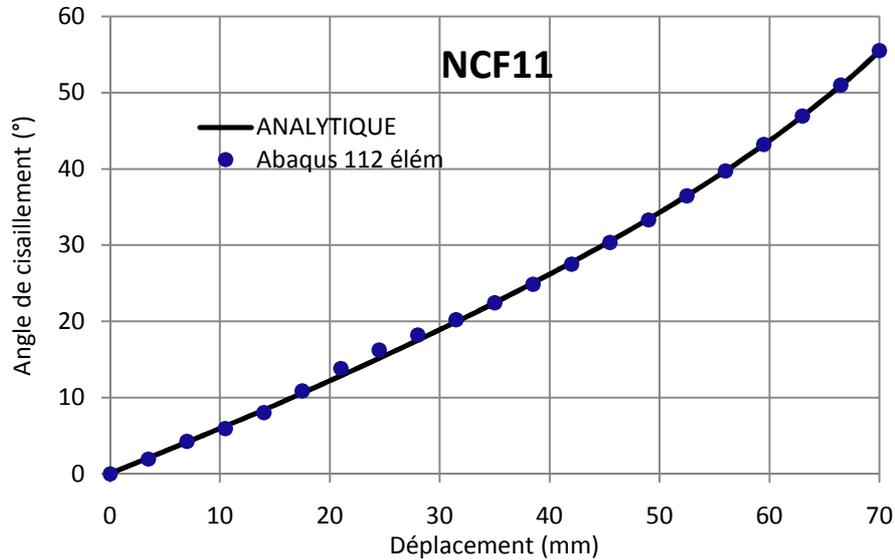


Fig.5.23 Comparaison des angles numériques et théoriques éprouvette NCF<sub>11</sub>

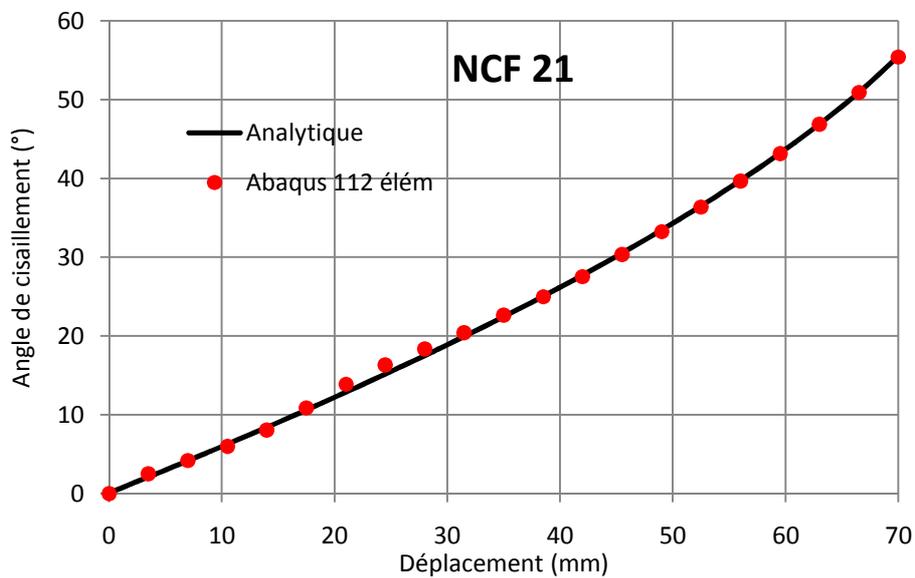


Fig.5.24 Comparaison des angles numériques et théoriques éprouvette NCF<sub>21</sub>

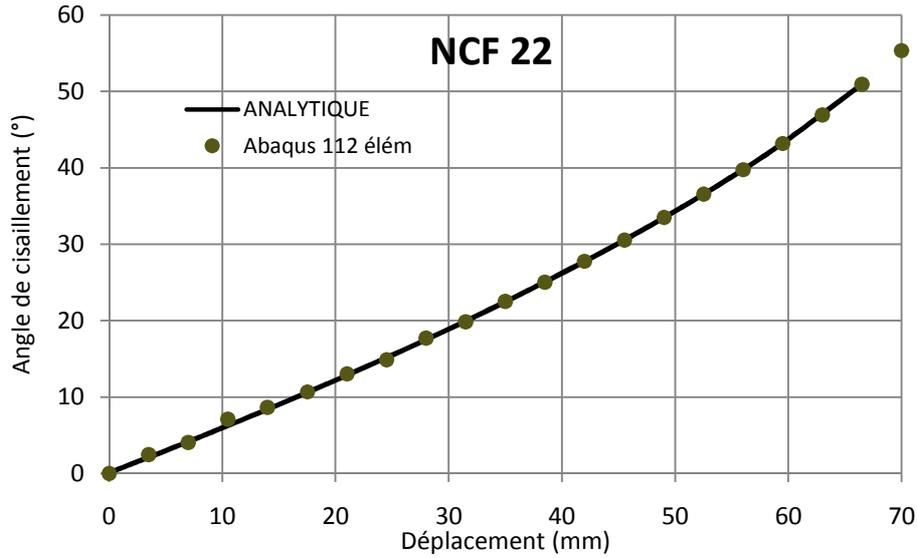


Fig.5.25 Comparaison des angles numériques et théoriques éprouvette NCF<sub>22</sub>

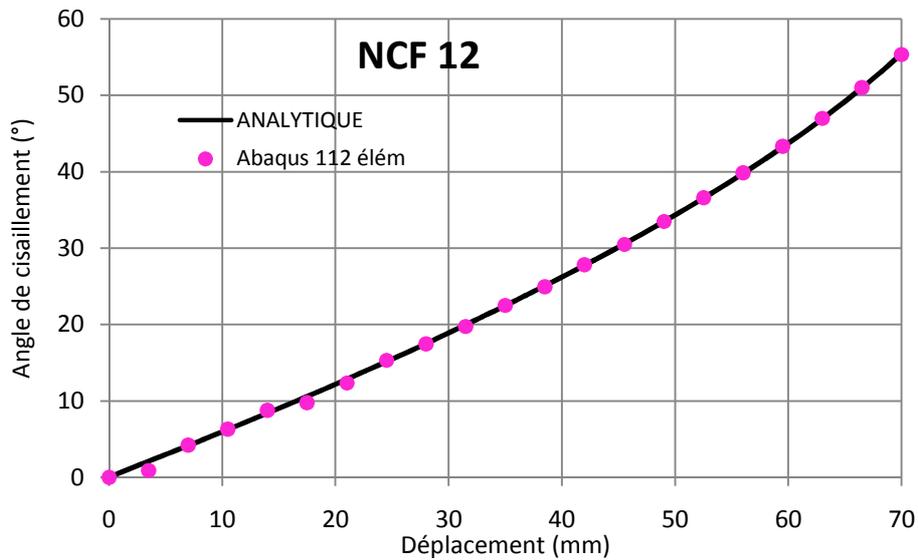


Fig.5.26 Comparaison des angles numériques et théoriques éprouvette NCF<sub>12</sub>

### 5.5.2 Analyse des déplacements

Les figures (5.27 à 5.30) illustrent respectivement les courbes (force-déplacement) expérimentales et numérique obtenues suite aux simulations sur les 4 éprouvettes. Les réponses numériques et expérimentales sont très proches, pour des valeurs faibles de l'angle de cisaillement.

Lorsque celui-ci augmente et se rapproche de l'angle du verrouillage, les réponses numériques et expérimentales commencent à montrer des différences qui peuvent être

importantes et qui s'expliqueraient d'après [13], par le fait que le modèle numérique ne prend pas en considération le contact entre les mèches, qui s'avèrerait non négligeable.

On peut dire que globalement les courbes numériques et expérimentales présentent une bonne concordance.

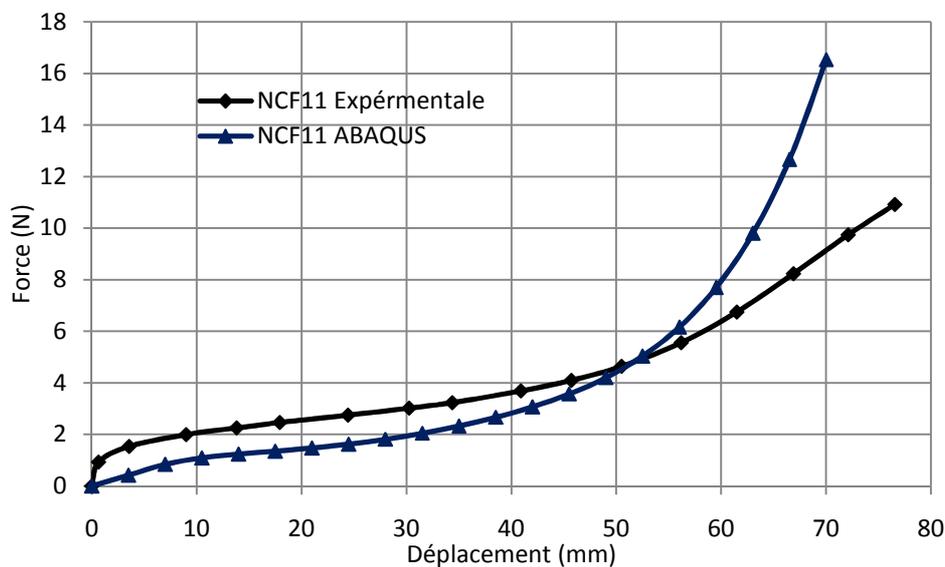


Fig.5.27 Courbes efforts-déplacements numérique et expérimentale : NCF<sub>11</sub>

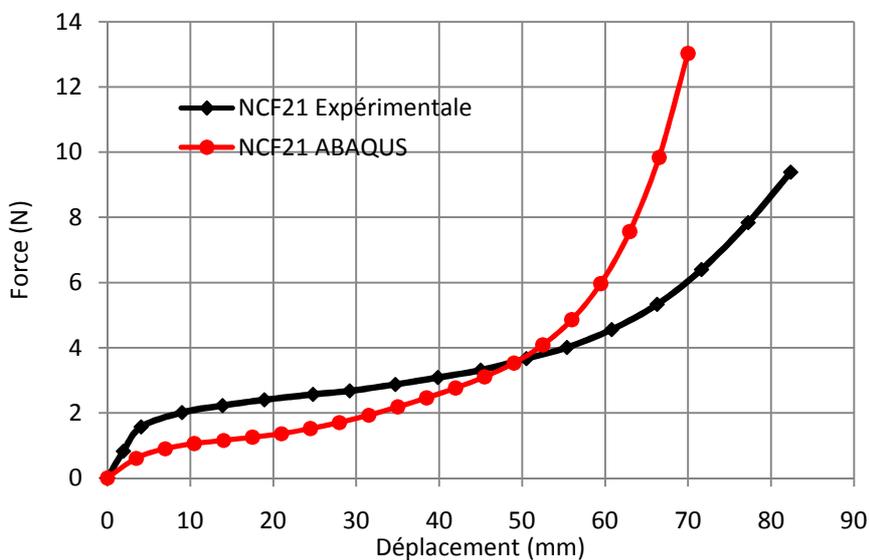


Fig.5.28 Courbes efforts-déplacements numérique et expérimentale : NCF<sub>21</sub>

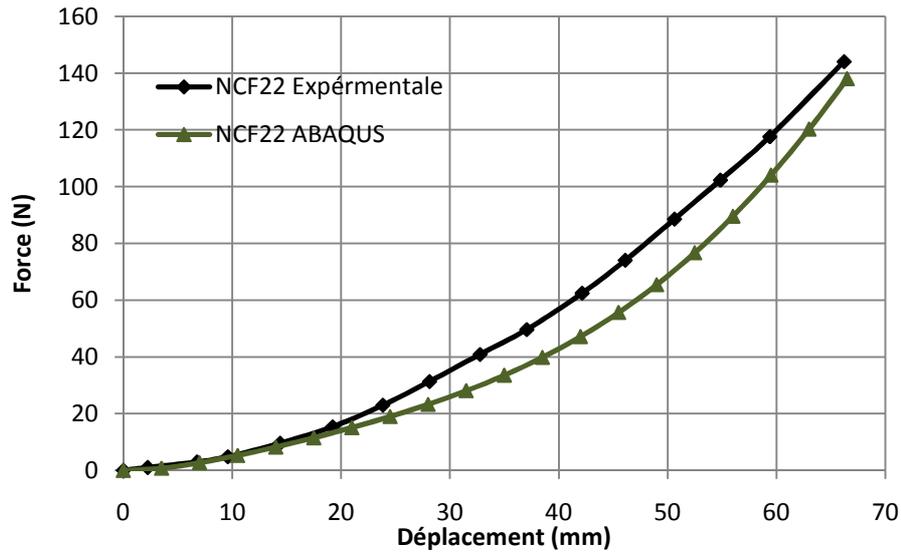


Fig.5.29 Courbes efforts-déplacements numérique et expérimentale : NCF<sub>22</sub>

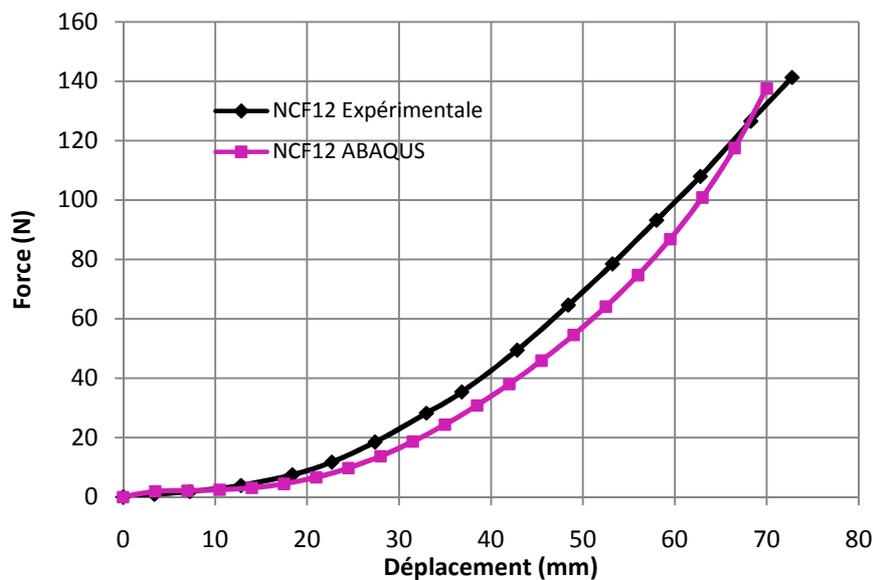
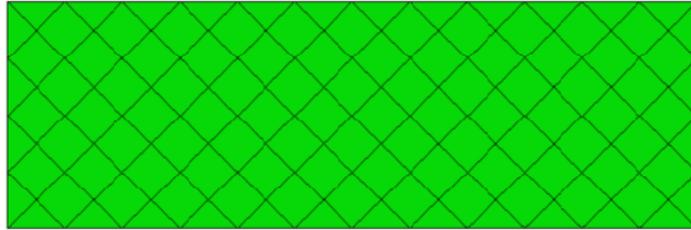


Fig.5.30 Courbes efforts-déplacements numérique et expérimentale : NCF<sub>12</sub>

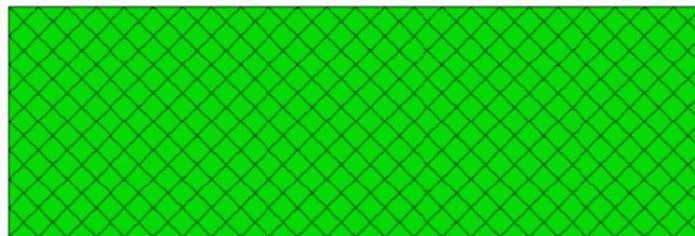
Le choix de la finesse du maillage est une question essentielle dans les simulations par éléments finis. Il est ainsi intéressant de comprendre l'influence de cette finesse sur les écarts entre les courbes numériques et expérimentales. Dans cette perspective, nous étudions quatre maillages différents (figure 5.31). Entre ces maillages notés respectivement M1, M2, M3 et M4, la taille caractéristique des éléments a été divisée par 4 et le nombre d'éléments est donc à peu près multiplié par 4. Le tableau ci-dessous résume les caractéristiques des quatre maillages:

*Tableau 5.1 Différentes densités de maillage*

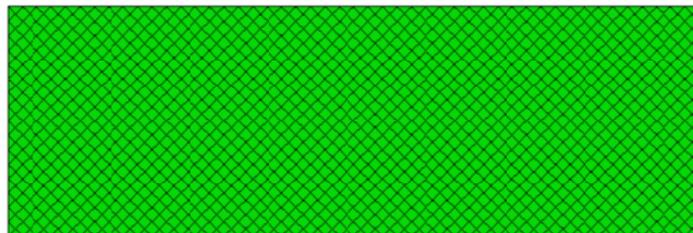
	M1	M2	M3	M4
Nombre d'éléments	112	416	1600	6272



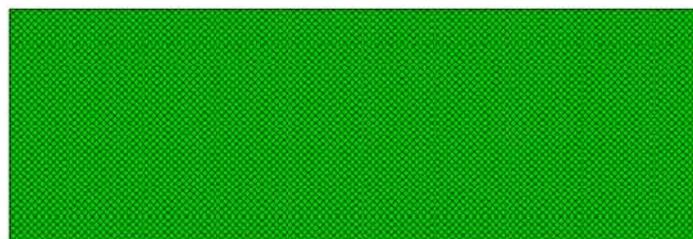
M1 :112 éléments



M2 :416 éléments



M3 :1600 éléments



M4 : 6272 éléments

*Fig.5.31 Les différentes densités de maillages étudiés*

Nous avons réalisé des simulations du Bias extension test avec ces 4 maillages, les courbes (force-déplacement) expérimentales et numériques sont ensuite analysées et comparées pour les quatre renforts testés (figures 5.32 à 5.35).

Pour les renforts  $NCF_{11}$  et  $NCF_{21}$  (éprouvettes testées perpendiculairement aux petits stitches (figures 5.32 à 5.33), les réponses numériques et expérimentales sont très proches, pour des valeurs faibles de l'angle de cisaillement. Lorsque celui-ci augmente et se rapproche de l'angle du verrouillage, les réponses numériques et expérimentales commencent à montrer des différences qui peuvent être importantes qui s'expliquent par le fait que le modèle numérique ne prend pas en considération le contact et les frottements entre les mèches, qui s'avèrent non négligeable après l'angle de verrouillage. Néanmoins globalement les courbes numériques et expérimentales présentent une bonne concordance. On peut constater aussi que pour ce cas, le raffinement du maillage permet de rapprocher les réponses numériques et expérimentales.

Pour les renforts  $NCF_{21}$  et  $NCF_{22}$  (éprouvettes testées parallèlement aux petits stitches (figure 5.34 et figure 5.35), les courbes expérimentales et numériques sont en parfaite concordance avant d'atteindre l'angle de verrouillage puis commencent à diverger au de-là de cet angle comme pour le cas précédant. Pour ce cas et comme les efforts développés par la machine au cours du test sont relativement importants le maillage grossier permet de rapprocher au mieux les réponses numériques et expérimentales.

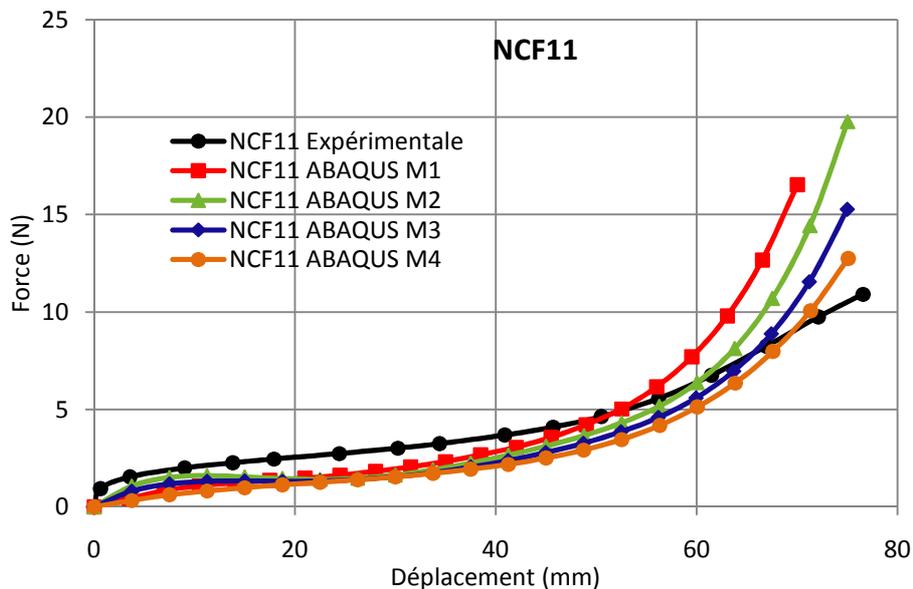


Fig.5.32 Courbes ( $NCF_{11}$ ) : effort-déplacements numériques et expérimentales pour 4 maillages

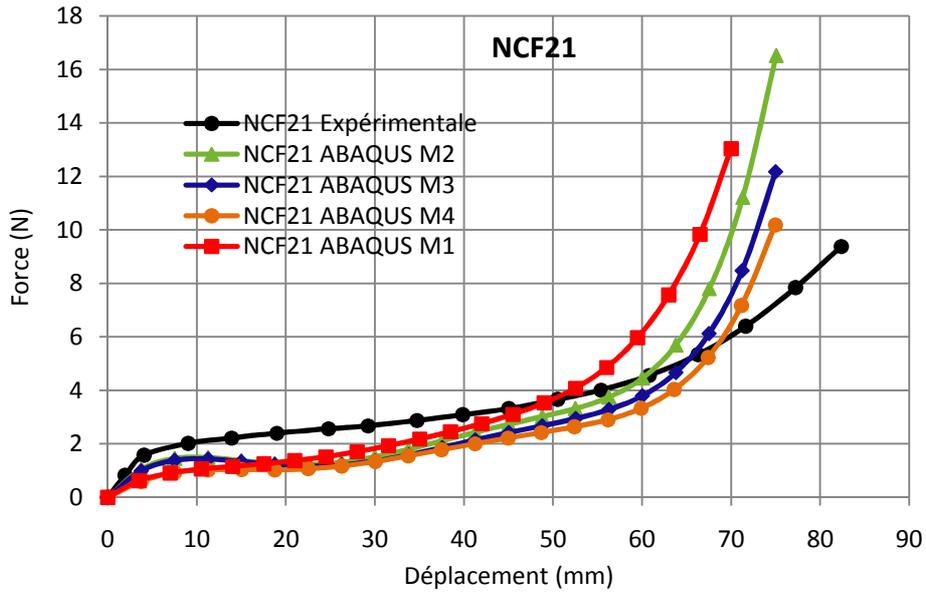


Fig.5.33 Courbes ( $NCF_{21}$ ) : effort-déplacements numériques et expérimentales pour 4 maillages

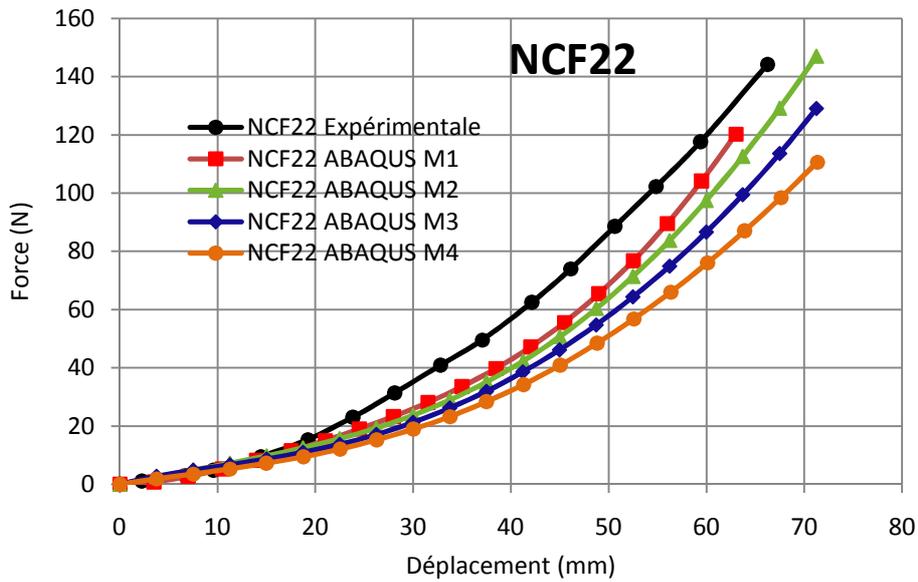


Fig.5.34 Courbes ( $NCF_{22}$ ) : effort-déplacements numériques et expérimentales pour 4 maillages

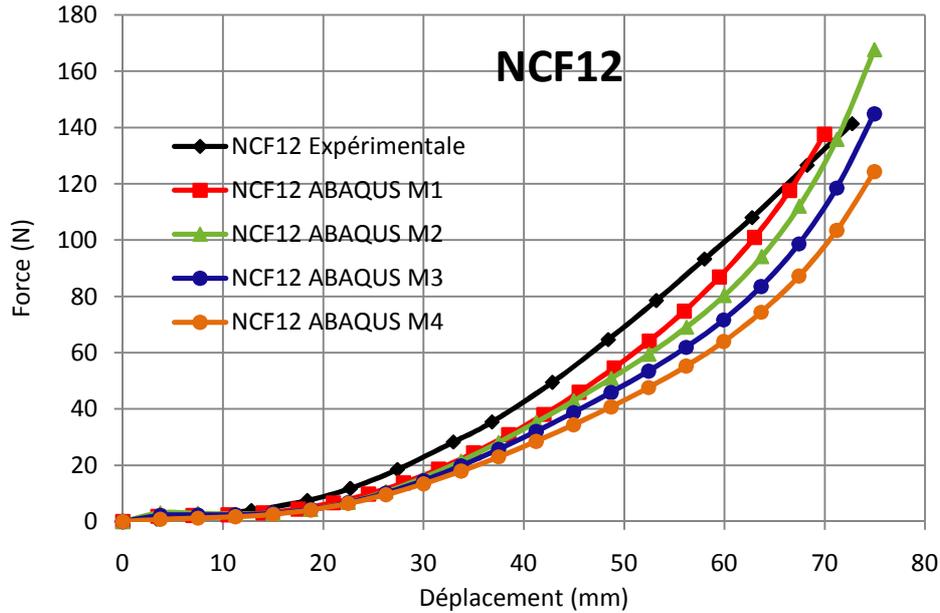


Fig.5.35 Courbes ( $NCF_{12}$ ) : effort-déplacements numériques et expérimentales pour 4 maillages

## 5.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à une analyse expérimentale et numérique d'un essai de cisaillement Bias extension test. Les essais expérimentaux ont été réalisés au laboratoire LaMCoS de l'INSA de Lyon, sur des éprouvettes d'un tissu de renfort type NCF de carbone (Non-Crimp- Fabrics).

L'étude expérimentale a pour objectif l'analyse du comportement en cisaillement de ce tissu de renfort. L'influence des petits stitches sur le comportement des NCF a été examinée. Une méthode de normalisation de la force de cisaillement a été proposée [106] pour déterminer le module de rigidité au cisaillement dont la connaissance est indispensable pour toute étude de caractérisation.

Les résultats de ces essais sont ensuite exploités pour effectuer une analyse numérique par éléments finis dans le code industriel Abaqus/Explicit, dont la loi de comportement retenue a été décrite par un modèle hypoélastique. Les résultats numériques obtenus sont encourageants.

# **Conclusion Générale**

## • Conclusion générale

La nécessité du développement des matériaux composites et de leur mise en œuvre, provient de l'accroissement considérable de leur utilisation, surtout pour des applications de haute performance telle que l'aéronautique. Les procédés de fabrication de ce type de matériaux sont basés sur des opérations de mise en forme du tissu de renfort sec ou pré-imprégné (procédé RTM-Resin Transfert Moulding).

Pour étudier la faisabilité de ces procédés de formage tout en évitant de faire recours à des campagnes d'essais expérimentaux souvent coûteuses ; il est indispensable de mettre au point des simulations par des codes de calcul basés sur la méthode des éléments finis. Celles-ci nécessitent l'emploi et l'introduction de modèles continus de comportement mécanique équivalents aux renforts fibreux hétérogènes.

Plusieurs modèles de comportement, développés par différents auteurs, sont utilisés dans la modélisation du comportement spécifique des renforts tissés. Dans cette étude nous avons retenus deux modèles, le premier est hypoélastique formulé à base des lois en taux tandis que le second est hyperélastique et dérive d'un potentiel élastique. Ces deux modèles sont implémentés dans le code de calcul Abaqus/Explicit par le biais de routines utilisateurs (Vumat), dans le but de les comparer et de tester les performances de chacun d'eux.

Des simulations numériques des tests élémentaires (traction unidirectionnelle, cisaillement simple et objectivité) sont conduites sur un tissu de renfort de type taffetas de verre souvent utilisé comme renfort pour les composites. Les résultats obtenus avec le modèle hypoélastique paraissent très satisfaisants pour tous ces tests. Une confrontation des résultats numériques avec d'autres analytiques de ces mêmes tests a montré une grande concordance.

Le modèle hyperélastique donne aussi des résultats satisfaisants. Néanmoins pour le cas du cisaillement simple, les résultats montrent quelques divergences. Ceci peut s'expliquer par la nature du modèle hyperélastique basé sur une approche expérimentale qui peut altérer la précision du modèle.

Ce travail a été consacré aussi à une analyse expérimentale et numérique d'un essai de cisaillement Bias extension test. Les essais expérimentaux ont été réalisés au laboratoire LaMCoS de l'Insa de Lyon sur des éprouvettes composés d'un tissu de renfort type NCF de carbone (Non-Crimp- Fabrics).

L'étude expérimentale a pour objectif l'analyse du comportement en cisaillement de ce tissu de renfort. L'influence des petits stitches sur le comportement des NCF a été examinée. Ainsi au cours de l'essai, si la force d'étirement est parallèle à la direction des petits stitches, les points de suture ajoutent une rigidité supplémentaire à celle des mèches ce qui augmente la force de cisaillement. Cependant lorsque cette force est appliquée dans une direction perpendiculaire aux petits stitches, seules les mèches sont soumises à l'étirement ce qui réduit l'effort de cisaillement. Par conséquent, nous pouvons dire que la rigidité des éprouvettes augmente avec une force d'étirement appliquée parallèlement à la direction des petits stitches.

Une méthode de normalisation de la force de cisaillement a été proposée pour déterminer le module de rigidité au cisaillement dont la connaissance est indispensable pour toute étude de caractérisation.

Les résultats du Bias extension test sont exploités pour effectuer une analyse numérique de ce test. La confrontation des résultats expérimentaux à celles numériques données par Abaqus/Explicit, pour différents densités de maillage a montré une bonne concordance.

# **Annexes**

## Annexe A : Caractéristiques spécifiques de quelques matériaux usuels

	Matériaux	Masse volumique (kg.m <sup>-3</sup> )	Module E (MPa)	Contrainte à la rupture (Mpa)	Module spécifique (MN m/kg)	Contrainte Spécifique (kN m/kg)
		$\rho$	E	$\sigma_u$	E/ $\rho$	$\sigma_u/\rho$
Forme massive	Acier	7 800	210 000	340-2 100	26.9	13 – 270
	Alliages d'aluminium	2 700	70 000	140-620	25.9	52 – 230
	Bois	390	30 000	-	33.3	-
	Verre	2 500	70 000	700 - 2 100	28	280 – 840
	Tungstène	19 300	350 000	1 100 - 4 100	18.1	57 – 210
	Béryllium	1 830	300 000	700	164	380
Fibres	Verre E	2 540	72 400	3 500	28.5	1 380
	Verre S	2 480	85 500	4 600	34.5	1 850
	Carbone HM	1 900	390 000	1 900	205	1 100
	Carbone HR	1 850	240 000	1 850	130	1 890
	Kevlar (aramide)	1 500	130 000	2 800	87	1 870
	Bore	2 630	385 000	2 800	146	1 100
Matrice	Polyester	1 200	3 000	80	2.5	66.67
	Phénolique	1 200	3 000	60	2.5	50
	Epoxyde	1 500	5 000	100	3.33	66.67
	Polyamide	1 140	2 500	85	2.19	74.56

## Annexe B : Invariants de cisaillement

On démontre dans cette annexe l'expression de l'invariant de cisaillement en fonction de l'angle formé par les mèches du tissu après déformation.

L'expression de l'invariant de cisaillement est donné en fonction des invariants de tension et des deux tenseurs de structure :

$$I_{12} = \frac{1}{I_1 \cdot I_2} \text{Tr}(\bar{\bar{C}} \cdot \bar{L}_{11} \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{L}_{22}) = \frac{\bar{I}_{12}}{I_1 \cdot I_2} \quad (1)$$

Sachant que le tenseur de Green Cauchy est donné par la relation:

$$\bar{\bar{C}} = C_{ij} \cdot \bar{L}_i \otimes \bar{L}_j \quad (2)$$

Et que les tenseurs de structure sont définis par la relation :

$$\bar{\bar{L}}_{ii} = \bar{L}_i \otimes \bar{L}_i \quad (3)$$

L'invariant de cisaillement à pour expression :

$$\bar{I}_{12} = \text{Tr}(\bar{\bar{C}} \cdot \bar{L}_{11} \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{L}_{22}) \quad (4)$$

Alors si on introduit la propriété suivante du calcul tensoriel :

$$\text{Tr}(\bar{\bar{A}} \cdot \bar{\bar{B}}^T) = \bar{\bar{A}} : \bar{\bar{B}} \quad (4)$$

On arrive à :

$$\bar{I}_{12} = \text{Tr}(\bar{\bar{C}} \cdot \bar{L}_{11} \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{L}_{22}) = \bar{\bar{C}} \cdot \bar{L}_{11} : \bar{L}_{22} \cdot \bar{\bar{C}} \quad (5)$$

La combinaison de (3) avec (5) permet d'écrire :

$$\bar{I}_{12} = \text{Tr}(\bar{\bar{C}} \cdot \bar{L}_{11} \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{L}_{22}) = [\bar{\bar{C}} \cdot (\bar{L}_1 \otimes \bar{L}_1) : (\bar{L}_2 \otimes \bar{L}_2) \cdot \bar{\bar{C}}] \quad (6)$$

Si on introduit les propriétés du calcul tensoriel suivantes :

$$\bar{\bar{A}} \cdot (\bar{b} \otimes \bar{c}) = (\bar{\bar{A}} \cdot \bar{b}) \otimes \bar{c} \quad (7)$$

$$(\bar{b} \otimes \bar{c}) \cdot \bar{\bar{A}} = \bar{b} \otimes (\bar{\bar{A}} \cdot \bar{c}) \quad (8)$$

$$(\bar{a} \otimes \bar{b}) : (\bar{c} \otimes \bar{d}) = (\bar{a} \cdot \bar{c}) \cdot (\bar{b} \cdot \bar{d}) \quad (9)$$

L'expression de  $\bar{I}_{12}$  devient :

$$\begin{aligned} \bar{I}_{12} &= \text{Tr}(\bar{\bar{C}} \cdot \bar{L}_{11} \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{L}_{22}) = [(\bar{\bar{C}} \cdot \bar{L}_1) \otimes \bar{L}_1] : [(\bar{L}_2 \otimes (\bar{\bar{C}} \cdot \bar{L}_2))] = [(\bar{\bar{C}} \cdot \bar{L}_1) \cdot \bar{L}_2] \cdot [\bar{L}_1 \cdot (\bar{\bar{C}} \cdot \bar{L}_2)] \\ &= (\bar{L}_2 \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{L}_1) \cdot (\bar{L}_1 \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{L}_2) = (\bar{L}_1 \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{L}_2) \cdot (\bar{L}_2 \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{L}_1) = C_{12} \cdot C_{21} = C_{12}^2 \end{aligned} \quad (10)$$

Démonstration de la relation (10) :

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix}$$

$$\bar{L}_1 \cdot \bar{C} \cdot \bar{L}_2 = (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = C_{12}$$

$$\bar{L}_2 \cdot \bar{C} \cdot \bar{L}_1 = (0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C_{21}$$

$\bar{C}$  est un tenseur symétrique alors :

$$\bar{I}_{12} = C_{12} \cdot C_{21} = C_{12}^2 \quad (11)$$

Enfin l'expression de  $I_{12}$  devient :

$$I_{12} = \frac{C_{12}^2}{C_{11} \cdot C_{22}} = \cos^2\theta \quad (12)$$

## Annexe C : Dérivée de l'invariant de cisaillement

Dans cette annexe nous évaluons l'expression de la dérivée de l'invariant de cisaillement par rapport au tenseur de Green Cauchy.

D'après les relations (1) et (10) de l'annexe B, nous avons :

$$\bar{I}_{12} = \text{Tr}(\bar{\mathbb{C}} \cdot \bar{\mathbb{L}}_{11} \cdot \bar{\mathbb{C}} \cdot \bar{\mathbb{L}}_{22}) = (\bar{\mathbb{L}}_1 \cdot \bar{\mathbb{C}} \cdot \bar{\mathbb{L}}_2) \cdot (\bar{\mathbb{L}}_2 \cdot \bar{\mathbb{C}} \cdot \bar{\mathbb{L}}_1) \quad (1)$$

Si on utilise la propriété du calcul tensoriel suivante :

$$\bar{\mathbb{A}} : \bar{\mathbf{b}} \otimes \bar{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{b}} \cdot \bar{\mathbb{A}} \cdot \bar{\mathbf{c}} \quad (2)$$

Alors :

$$\bar{I}_{12} = (\bar{\mathbb{L}}_1 \cdot \bar{\mathbb{C}} \cdot \bar{\mathbb{L}}_2) \cdot (\bar{\mathbb{L}}_2 \cdot \bar{\mathbb{C}} \cdot \bar{\mathbb{L}}_1) = (\bar{\mathbb{C}} : \bar{\mathbb{L}}_1 \otimes \bar{\mathbb{L}}_2) \cdot (\bar{\mathbb{C}} : \bar{\mathbb{L}}_2 \otimes \bar{\mathbb{L}}_1) = C_{12}^2 \quad (3)$$

D'après la relation (3) de l'annexe B :

$$\bar{\mathbb{L}}_1 \otimes \bar{\mathbb{L}}_2 = \bar{\mathbb{L}}_{12}$$

Et :

$$\bar{\mathbb{L}}_2 \otimes \bar{\mathbb{L}}_1 = \bar{\mathbb{L}}_{21}$$

Alors :

$$\bar{I}_{12} = (\bar{\mathbb{L}}_1 \cdot \bar{\mathbb{C}} \cdot \bar{\mathbb{L}}_2) \cdot (\bar{\mathbb{L}}_2 \cdot \bar{\mathbb{C}} \cdot \bar{\mathbb{L}}_1) = (\bar{\mathbb{C}} : \bar{\mathbb{L}}_{12}) \cdot (\bar{\mathbb{C}} : \bar{\mathbb{L}}_{21}) = \text{Tr}(\bar{\mathbb{C}} \cdot \bar{\mathbb{L}}_{12}) \cdot \text{Tr}(\bar{\mathbb{C}} \cdot \bar{\mathbb{L}}_{21}) \quad (4)$$

Pour notre cas :

$$\bar{\mathbb{C}} \cdot \bar{\mathbb{L}}_{12} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & C_{11} \\ 0 & C_{12} \end{pmatrix}$$

$$\text{Tr}(\bar{\mathbb{C}} \cdot \bar{\mathbb{L}}_{12}) = C_{12}$$

$$\bar{\mathbb{C}} \cdot \bar{\mathbb{L}}_{21} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{12} & 0 \\ C_{22} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tr}(\bar{\mathbb{C}} \cdot \bar{\mathbb{L}}_{21}) = C_{12}$$

Donc :

$$\bar{I}_{12} = C_{12}^2$$

Alors :

$$\frac{\partial \bar{I}_{12}}{\partial \bar{\mathbb{C}}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbb{C}}} \left( \text{Tr}(\bar{\mathbb{C}} \cdot \bar{\mathbb{L}}_{12}) \cdot \text{Tr}(\bar{\mathbb{C}} \cdot \bar{\mathbb{L}}_{21}) \right) \quad (5)$$

Ou bien :

$$\frac{\partial \bar{I}_{12}}{\partial \bar{C}} = \text{Tr}(\bar{C} \cdot \bar{L}_{21}) \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{C}} \text{Tr}(\bar{C} \cdot \bar{L}_{12}) + \text{Tr}(\bar{C} \cdot \bar{L}_{12}) \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{C}} \text{Tr}(\bar{C} \cdot \bar{L}_{21}) \quad (6)$$

Sachant que :

$$\frac{\partial \text{Tr}}{\partial \bar{C}} (\bar{C} \cdot \bar{L}_{ij}) = \bar{L}_{ij} \quad (7)$$

Alors :

$$\frac{\partial \bar{I}_{12}}{\partial \bar{C}} = \text{Tr}(\bar{C} \cdot \bar{L}_{21}) \cdot \bar{L}_{12} + \text{Tr}(\bar{C} \cdot \bar{L}_{12}) \cdot \bar{L}_{21} \quad (8)$$

Puisque  $\bar{C}$  est symétrique :

$$\text{Tr}(\bar{C} \cdot \bar{L}_{21}) = \text{Tr}(\bar{C} \cdot \bar{L}_{12}) \quad (9)$$

On obtient :

$$\frac{\partial \bar{I}_{12}}{\partial \bar{C}} = \text{Tr}(\bar{C} \cdot \bar{L}_{12}) \cdot (\bar{L}_{12} + \bar{L}_{21}) \quad (10)$$

$$\text{Tr}(\bar{C} \cdot \bar{L}_{12}) = \text{Tr} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Tr} \begin{pmatrix} 0 & C_{11} \\ 0 & C_{12} \end{pmatrix} = C_{12}$$

Comme :

$$\bar{I}_{12} = C_{12}^2$$

Alors :

$$\text{Tr}(\bar{C} \cdot \bar{L}_{12}) = \bar{I}_{12}^{1/2} \quad (11)$$

Si on substitue (11) dans (10) on aboutit à :

$$\frac{\partial \bar{I}_{12}}{\partial \bar{C}} = \bar{I}_{12}^{1/2} \cdot (\bar{L}_{12} + \bar{L}_{21}) \quad (12)$$

## Annexe D : Méthode des moindres carrés

Le but principal de cette méthode est d'approcher une fonction donnée sous la forme de couples de points  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . En effet si l'on a la certitude qu'une certaine fonction passe au voisinage des points donnés la recherche de l'équation de cette ci est d'autant possible que le nombre de points cités est élevé. Le critère sur lequel s'appuie cette méthode est dit critère des moindres carrés. Il consiste à imposer à ce que la quantité  $\Phi$  soit minimale.

$$\Phi = \sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - F(x_i))^2 \quad (1)$$

Où :

$y_i$  : représentent les valeurs de la fonction aux points  $x_i$

$F(x_i)$  : représentent les valeurs de la fonction d'interpolation

$n$  : indice indiquant le nombre de couple de points  $(x_i, y_i)$

on se propose de choisir un polynôme du 5<sup>eme</sup> degré :

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 \quad (2)$$

Alors l'équation (1) devient :

$$\phi(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = \sum_{i=1}^n \left( y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + a_3x_i^3 + a_4x_i^4 + a_5x_i^5) \right)^2 \quad (3)$$

Une condition nécessaire pour que la quantité  $\phi(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  soit extrémale localement en  $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  est que les dérivées de  $\phi$  sont nulles par rapport  $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ . Si on minimalise la quantité  $\phi(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  par rapport aux inconnues  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$  et  $a_5$  on obtient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=1}^n \left( y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + a_3x_i^3 + a_4x_i^4 + a_5x_i^5) \right)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^n x_i \left( y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + a_3x_i^3 + a_4x_i^4 + a_5x_i^5) \right)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_2} = -2 \sum_{i=1}^n x_i^2 \left( y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + a_3x_i^3 + a_4x_i^4 + a_5x_i^5) \right)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_3} = -2 \sum_{i=1}^n x_i^3 \left( y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + a_3x_i^3 + a_4x_i^4 + a_5x_i^5) \right)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_4} = -2 \sum_{i=1}^n x_i^4 (y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 + a_4 x_i^4 + a_5 x_i^5))$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_5} = -2 \sum_{i=1}^n x_i^5 (y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 + a_4 x_i^4 + a_5 x_i^5))$$

Soit alors, pour  $\frac{\partial \phi}{\partial a_j} = 0 \quad j = 0, 1, 2, \dots, 5$

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_0} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n y_i - n_0 a_0 - a_1 \sum_{i=1}^n x_i - a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - a_3 \sum_{i=1}^n x_i^3 - a_4 \sum_{i=1}^n x_i^4 - a_5 \sum_{i=1}^n x_i^5$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_1} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i y_i - a_0 \sum_{i=1}^n x_i - a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 - a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 - a_3 \sum_{i=1}^n x_i^4 - a_4 \sum_{i=1}^n x_i^5 - a_5 \sum_{i=1}^n x_i^6$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_2} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i - a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 - a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 - a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 - a_3 \sum_{i=1}^n x_i^5 - a_4 \sum_{i=1}^n x_i^6 - a_5 \sum_{i=1}^n x_i^7$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_3} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i^3 y_i - a_0 \sum_{i=1}^n x_i^3 - a_1 \sum_{i=1}^n x_i^4 - a_2 \sum_{i=1}^n x_i^5 - a_3 \sum_{i=1}^n x_i^6 - a_4 \sum_{i=1}^n x_i^7 - a_5 \sum_{i=1}^n x_i^8$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_4} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i^4 y_i - a_0 \sum_{i=1}^n x_i^4 - a_1 \sum_{i=1}^n x_i^5 - a_2 \sum_{i=1}^n x_i^6 - a_3 \sum_{i=1}^n x_i^7 - a_4 \sum_{i=1}^n x_i^8 - a_5 \sum_{i=1}^n x_i^9$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_5} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i^5 y_i - a_0 \sum_{i=1}^n x_i^5 - a_1 \sum_{i=1}^n x_i^6 - a_2 \sum_{i=1}^n x_i^7 - a_3 \sum_{i=1}^n x_i^8 - a_4 \sum_{i=1}^n x_i^9 - a_5 \sum_{i=1}^n x_i^{10}$$

On obtient un système linéaire de 6 équations à 6 inconnues qui peut s'écrire sous forme matricielle  $AX = b$  :

$$\sum_{i=1}^n y_i = n_0 a_0 - a_1 \sum_{i=1}^n x_i - a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - a_3 \sum_{i=1}^n x_i^3 - a_4 \sum_{i=1}^n x_i^4 - a_5 \sum_{i=1}^n x_i^5$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = a_0 \sum_{i=1}^n x_i - a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 - a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 - a_3 \sum_{i=1}^n x_i^4 - a_4 \sum_{i=1}^n x_i^5 - a_5 \sum_{i=1}^n x_i^6$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 y_i = a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 - a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 - a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 - a_3 \sum_{i=1}^n x_i^5 - a_4 \sum_{i=1}^n x_i^6 - a_5 \sum_{i=1}^n x_i^7$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^3 y_i = a_0 \sum_{i=1}^n x_i^3 - a_1 \sum_{i=1}^n x_i^4 - a_2 \sum_{i=1}^n x_i^5 - a_3 \sum_{i=1}^n x_i^6 - a_4 \sum_{i=1}^n x_i^7 - a_5 \sum_{i=1}^n x_i^8$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^4 y_i = a_0 \sum_{i=1}^n x_i^4 - a_1 \sum_{i=1}^n x_i^5 - a_2 \sum_{i=1}^n x_i^6 - a_3 \sum_{i=1}^n x_i^7 - a_4 \sum_{i=1}^n x_i^8 - a_5 \sum_{i=1}^n x_i^9$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^5 y_i = a_0 \sum_{i=1}^n x_i^5 - a_1 \sum_{i=1}^n x_i^6 - a_2 \sum_{i=1}^n x_i^7 - a_3 \sum_{i=1}^n x_i^8 - a_4 \sum_{i=1}^n x_i^9 - a_5 \sum_{i=1}^n x_i^{10}$$

Donc nous obtenons le système suivant dont la résolution permet de déterminer les coefficients du polynôme d'interpolation  $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  :

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 & \sum_{i=1}^n x_i^5 \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 & \sum_{i=1}^n x_i^5 & \sum_{i=1}^n x_i^6 \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 & \sum_{i=1}^n x_i^5 & \sum_{i=1}^n x_i^6 & \sum_{i=1}^n x_i^7 \\ \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 & \sum_{i=1}^n x_i^5 & \sum_{i=1}^n x_i^6 & \sum_{i=1}^n x_i^7 & \sum_{i=1}^n x_i^8 \\ \sum_{i=1}^n x_i^4 & \sum_{i=1}^n x_i^5 & \sum_{i=1}^n x_i^6 & \sum_{i=1}^n x_i^7 & \sum_{i=1}^n x_i^8 & \sum_{i=1}^n x_i^9 \\ \sum_{i=1}^n x_i^5 & \sum_{i=1}^n x_i^6 & \sum_{i=1}^n x_i^7 & \sum_{i=1}^n x_i^8 & \sum_{i=1}^n x_i^9 & \sum_{i=1}^n x_i^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^3 y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^4 y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^5 y_i \end{Bmatrix}$$

# **Références**

# **Bibliographiques**

## • *Références bibliographiques*

- [1] M.YOUSSEF, « Modélisation et simulation de la mise en forme des CFRTP à géométrie non développables », Thèse de Doctorat, Université d'Orléans, (2005).
- [2] P. BOISSE, « Mise en forme des renforts fibreux de composites », Edition Techniques de l'ingénieur, N° AM 3 734, pp. 1-10 (2004).
- [3] N.HAMILA, « Simulation de la mise en forme des renforts composites mono et multi plis », Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées INSA de Lyon, (2007).
- [4] Y. AIMENE, « Approche hyperélastique pour la simulation des renforts fibreux en grandes transformations », Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées INSA de Lyon, (2007).
- [5] J. BILLOËT, « Introduction aux matériaux composites à hautes performances », Tecknea, Paris, (1993).
- [6] S.DRIDI, « Essais de caractérisation des renforts tissés », Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées INSA de Lyon, (2010).
- [7] H.TAIBI, « Caractérisation modélisation et simulation du comportement d'un tissu textile », Thèse de Doctorat, Université Mohamed V Maroc & Université Bordeaux 1 France, N° d'ordre 2441, (2001).
- [8] B.HAGEGE, « Simulation du comportement mécanique des milieux fibreux en grandes transformations », Thèse de Doctorat, Paris ENSAM, (2004).
- [9] E. DE LUYCKER, « Simulation et expérimentation en mise en forme de renforts composites 3D interlocks », Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées INSA de Lyon, (2009).
- [10] E. DE LUYCKER, F. MORESTIN, P. BOISSE, D. MARSAL, « Simulation of 3D interlock composite performing », Composite Structures, Vol. 88, pp. 615-623, (2009).
- [11] J.KIBLER, « Mechanics of Multidirectional Carbon, In: Buckley JD, Carbon Materials and Composites », Park Ridge, Noyes Publishing, New Jersey, USA, (1993).
- [12] A. GASSER, P. BOISSE, S. HANKLAR, « Mechanical behaviour of dray fabric reinforcements. 3D simulations versus biaxial tests », Computational Material Science, Vol.17, pp.7-20, (2000).
- [13] P. BADEL, E. MAIRE, E. VIDAL SALLE, P. BOISSE, « Computational determination of the mechanical behavior of textile composite reinforcement. Validation with x-ray tomography », International Journal of Material Forming ,Vol. 1, N°1 Supplement, pp 823-826, ( 2008).
- [14] P. BOISSE, J. DANIEL, B. HAGEGE, D. SOULAT, « Approche méso-macro pour la simulation de la mise en forme des composites à renforts tissés », Colloque National Calcul des Structures France, (2005).
- [15] K. BUET, « Analyse et simulation du comportement mécanique des renforts composites tissés », Thèse de Doctorat, Université d'Orléans, (1998).
- [16] J. PORA , « Composite materials in the airbus A380-from history to future », Proceedings of ICCM13, Beijing,(2001).
- [17] J. SINKE, « Manufacturing of glare parts and structures », Appl. Compos. Mater, Vol.10, 4-5, pp.293-305, (2003).
- [18] J.LAUNAY, G. HIVET, A.DUONG, P. BOISSE, « Experimental analysis of the influence of tensions on in plane shear behaviour of woven composite reinforcements », Composites Science and Technology, Vol.68, pp. 506–515, (2008).
- [19] S. BEL, « Analyse et simulation de la mise en forme des renforts de composites NCF », Institut National des Sciences Appliquées INSA de Lyon, (2011).

- [20] K. BUET, P. BOISSE, « Experimental analysis and models for biaxial mechanical behaviour of composite woven reinforcement », *Experimental Mechanics*, Vol.41, N°3, pp. 260-269, (2001).
- [21] J.CAO, H. CHENG, T.YU , B. ZHU, X. TAO , S. LOMOV, T.STOILOVA, I. VERPOEST, P. BOISSE, J. LAUNAY,G. HIVET, L. LIU, J. CHEN, E. DE GRAAF, R. AKKERMAN , « A cooperative benchmark effort on testing of woven composites », In *Proceedings of the 7<sup>th</sup> ESAFORM Conference on Material Forming Trondheim, Norway*, 305-308, (2004).
- [22] S.KAWABATA, M.NIWA, H.KAWAI, « The finite deformation theory of plain weave fabrics », Part I: The Part III: The shear deformation theory, *Journal of the textile institute*, Vol. 64, N° 1, pp.62-85, (1973).
- [23] S.LOMOV , C.TRUONG , I.VERPOEST, « Mathematical modeling of internal geometry and deformability of woven performs », *International journal forming processes*, Vol.6, N°3-4, pp.413-42,(2004).
- [24] S.LOMOV, T. STOILOVA, I.VERPOEST, « Shear of woven fabrics: theoretical model, numerical experiments and full strain measurements », *Proceedings of the 8<sup>th</sup> International conference ESAFORM, Trondheim*, pp. 345-348, (2004).
- [25] S.LOMOV, I.VERPOEST, « Model of shear of woven fabric and parametric description of shear resistance of glass woven reinforcements », *Composites science and technology*, Vol. 66, pp.919-933, (2006).
- [26] J. WANG, « Predictive Modelling and Experimental Measurement of Composite Forming Behaviour », Thesis submitted to The University of Nottingham for the degree of Doctor of Philosophy, (2008).
- [27] J.CAO, R. AKKERMAN , P. BOISSE, J. CHEN, H. CHENG, E. DE GRAAF, J. GOREZYCA, P. HARRISON, G. HIVET, J. LAUNAY, W. LEE, L. LIU, S.LOMOV, A. LONG, E. DE LUYCKER, F.MORESTIN, J. PADVISKIS, X. PENG, J.SHERWOOD, T.STOILOVA, X. TAO, I. VERPOEST, A. WILLEMS, J. WIGGERS J, T.YU, B. ZHU, « Characterization of mechanical behaviour of woven fabrics: Experimental methods and benchmark results », *Composites: Part A* , Vol.39, pp.1037–1053 ,(2008).
- [28] A. CHARMETANT, « Approches hyperélastiques pour la modélisation du comportement mécanique de préformes tissées de composites », Institut National des Sciences Appliquées INSA de Lyon, (2011).
- [29] P. HARRISON, M. CLIFFORD, A. LONG, « Shear characterization of viscous woven textile composites : A comparison between picture frame and bias extension experiments », *Composites Science and Technology*, Vol.64, 1453-1465, (2004).
- [30] G. LEBRUN, N. MARTIN, B. DENAULT, « Evaluation of bias-extension and picture-frame test methods for the measurement of intraply shear properties of PP/glass commingled fabrics », *Composite structure* Vol.61, Issue 4, 341–352, (2003).
- [31] X. PENG, J.CAO, « A continuum mechanics-based non-orthogonal constitutive model for Woven composite fabrics », *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*,Vol.36, Issue 6, 859-874,(2005).
- [32] S.LOMOV, P. BOISSE , E. DE LUYCKER, F. MORESTIN, K. VANCLOOSTER, D. VANDEPITTE, , I. VERPOEST I, A. WILLEMS , « Full field strain measurements in textile .Deformability studies », *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, Vol.39, Issue 8, 1232–1244,(2007).
- [33] K. POTTER , « Bias extension measurements on cross-plyed unidirectional prepreg », *Composites part A*, Vol.33,pp. 63-73,(2002) .
- [34] P. POTLURI, D. PEREZ CIUREZU, R. RAMGULAM, « Measurement of meso-scale Shear deformations for modelling textile composites », *Composites: Part A*,Vol.37,pp.303-314,(2006)

- [35] A. KHAN, « Analyse numérique et expérimentale de la mise en forme des renforts de composites textiles basée sur un comportement hypo élastique », Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées INSA de Lyon, (2009).
- [36] G. HIVET, « Modélisation mésoscopique pour le comportement bi-axial et la mise en forme des renforts de composites tissés ». Thèse de Doctorat, Université d'Orléans, (2003).
- [37] S. GUAUTIER, « Utilisations de modèles de comportement hypoélastiques pour les analyses macroscopiques et mésoscopiques des milieux fibreux », Mémoire de Master, Institut National des Sciences Appliquées INSA de Lyon, (2007).
- [38] C. GUILLAUME, M. ERIC, J. LAMON, N.CARRERE, « Multiscale modelling of the mechanical behaviour of woven composite materials», Comptes Rendus des JNC 16-Toulouse, (2009).
- [39] S. GATOULLAT, E. VIDAL-SALLE, P. BOISSE, « Différentes approches pour la simulation de la mise en forme des renforts fibreux de composites. Les intérêts de l'approche mésoscopique », 19<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique Marseille, 24-28 Août, (2009).
- [40] S. GATOULLAT, « Approche mésoscopique pour la mise en forme des renforts tissés de composites », Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées INSA de Lyon, (2010).
- [41] Q. NGUYEN, « Analyse expérimentale et numérique de la compaction des renforts fibreux. Application pour la perméabilité », Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées INSA de Lyon, (2011).
- [42] K. POTTER, « History of the resin transfer moulding for aerospace applications », Composites: Part A, Vol.30, pp.757–765 (1999).
- [43] C.RUDD, A.LONG, « Liquid moulding technologies: Resin transfer moulding, structural reaction injection moulding and related processing techniques », Woodhead Publishing Limited, ISBN 1–85573–242–4, (1997).
- [44] C. Mack and H. TAYLOR, « The fitting of woven cloth to surfaces », Journal of the Textile Institute, Vol.47, 477–487, (1956).
- [45] R.AGOGUÉ, « Analyse expérimentale et numérique de la fabrication de pièces composites par le procédé RTM », Thèse de Doctorat, Université d'Orléans, (2011).
- [46] F. VAN DER WEEN, « Algorithms for draping fabrics on doubly-curved surfaces », International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.31, N°7, pp.1415-1426, (1991).
- [47] A. LONG and C. RUDD, « A Simulation of Reinforcement Deformation during The Production of Preforms for Liquid Moulding Processes », Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture. Vol.208 N°4, 269-278, (1994).
- [48] H. BOROUCAKI and A. CHEROUAT, « Une nouvelle approche pour le drappage des structures composites », Rev Comp Mat Avanc, 32:407–22, (2002).
- [49] J.WANG, J. PAGE , R. PATON , « Experimental investigation of the draping properties of reinforcement fabrics » , Composites Science and Technology, Vol.58, N°2, pp.229-237, (1998).
- [50] F. DUMONT, « Expérimentations et modèles de comportement de renforts de composite tissés », Thèse de Doctorat, Université Paris VI, (2003).
- [51] A. SPENCER, « Theory of fabric-reinforced viscous fluids », Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, Vol.31, N°12, pp. 1311–1321, (2000).
- [52] L.DONG, C.LEKAKOU, M. BADER, « Processing of composites: Simulations of the draping of fabrics with updated material behaviour law », Journal of Composites Materials, Vol. 35, N°2, pp.138-163, (2001).

- [53] A. PICKETT, G.CREECH,P. DE LUCA, « Simplified and Advanced Simulation Methods for Prediction of Fabric Draping » , *European Journal of Computational Mechanics*, Vol.14, N°6-7, pp. 677-691,(2005).
- [54] S. GATOULLAT, « Approche mésoscopique pour la mise en forme des renforts tissés de composites », Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées INSA de Lyon, (2010).
- [55] D.JAUFFERS, A.JAMES, A. SHERWOOD, D. MORRIS, J. CHEN, «Discrete mesoscopic modeling for the simulation of woven-fabric reinforcement forming », *International Journal of Material Forming* Vol. 3, Issue 2 Supplement, pp 1205-1216,(2010).
- [56] M. DUHOVIC and D. BHATTACHARYYA, « Simulating the Deformation Mechanisms of Knitted Fabric Composites », *Composites Part A*, Vol. 37, N°11, pp. 1897-1915, (2006).
- [57] D. DURVILLE, « Modélisation par éléments finis des propriétés mécaniques des structures textiles », *European Journal of Computational Mechanics*, Vol. 11, N°2-3-4, pp. 463-477, (2002).
- [58] L.CHEVALIER and Y. MARCO, « Procédure de validation multiaxiale des lois de comportement hyper élastiques pour les matériaux élastomères », XVème Congrès Français de Mécanique, Nancy 3-7 Septembre, (2001).
- [59] S. SHARMA and M. SUTCLIFFE, « A simplified finite approach to draping of woven Fabric », *Proceeding of the 6<sup>th</sup> ESAFORM Conference on Material Forming*, Salerno, Italy, pp. 887-890,(2003)
- [60] A. SKORDOS, C. MONROY ACEVES, M. SUTCLIFFE, « A simplified rate dependent model of forming and wrinkling of pre-impregnated woven composites » , *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* ,Vol.38, Issue 5, pp.1318–1330,(2007).
- [61] P. BOISSE, B. ZOUARI, J. GASSER , « A mesoscopic approach for the simulation of woven fibre composite forming », *Composites Science and Technology*, Vol. 64, N°3-4, pp. 429-436, (2005).
- [62] P. BOISSE, J. DANIEL, B. HAGEGE, D. SOULAT, « Approche meso-macro pour la simulation de la mise en forme des composites à renforts tissés », *Colloque National en Calcul des Structures France*, (2005).
- [63] P. BOISSE, « Meso-Macro approach for the composite forming simulation », *Journal of Materials Science* Vol.41, pp. 6591-6598, (2006).
- [64] N.HAMILA, P. BOISSE , « A Meso Macro Three Node Finite Element for Draping of Textile Composite Preforms », *Applied Composite Materials*, Vol.14, Issue 4, pp 235-250,(2007),
- [65] N. HAMILA, P. BOISSE, F. SABOURIN, M. BRUNET, « A semi-discrete shell finite element for textile composite reinforcement forming simulation », *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 79, pp. 1443-1466, (2009).
- [66] P. BOISSE, M. BORR, K. BUET, A. CHEROUAT, « Finite element simulations of textile composite forming including the biaxial fabric behaviour », *Composites Part B: Engineering*, Vol. 28, N°4, pp. 453-464, (1997).
- [67] N. HAMILA, P. BOISSE, « Simulations of textile composite reinforcement draping using a new semi-discrete three node finite element », *Composites: Part B*, Vol. 39, pp. 999–1010, (2008).
- [68] R.TEN, R. AKKERMAN, J.HUETINK, « Large deformation simulation of anisotropic material using an updated Lagrangian finite element method », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.196, N° 33-34, pp.3141-3150, (2007).
- [69] R.TEN, « Finite element simulations of laminated composite forming processes », Thèse de Doctorat Université Twente Pays Bas, (2007).
- [70] P. BOISSE, « Finite element analysis of composite forming », In: Long, A.C. (ed.), *Composite Forming Technologies*, Woodhead Publishing, Cambridg, pp.46-79, (2007).

- [71] T.HUGHES, J.WINGET, « Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large deformation analysis », International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 15, pp. 1862-1867, (1980).
- [72] Abaqus User Manual documentation V.6.11
- [73] Y. AIMENE, E. VIDAL-SALLE, B. HAGEGE, F. SIDORODFF, P. BOISSE, «A Hyperelastic Approach for Composite Reinforcement Large Deformation Analysis», Journal of Composite Materials, Vol. 44, N°1, pp. 5-26, (2010).
- [74] O. PANTALE, « Lois Constitutives en Grandes Déformations », Notes de Cours, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tarbes, (2008).
- [75] M. BRUNET, « Analyse non linéaire des matériaux et des structures », Notes de Cours, Institut National des Sciences Appliquées INSA de Lyon, (2010).
- [76] A. BERTRAM, « Elasticity and Plasticity of Large Deformations », Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2<sup>nd</sup> Edition, (2008).
- [77] Y. BASAR, D. WEICHERTR, « Nonlinear Continuum Mechanics of solide, Fundamental mathematical and physical concepts », Sringer Verlag, (1999).
- [78] R. OGDEN, « Large Deformation Isotropic Elasticity - On the Correlation of Theory and Experiment for Incompressible Rubberlike Solids », Proceeding of the Royal Society, Vol.326, N° 1567, 565-584, (1972).
- [79] O. YEOH, « Some Forms of the Strain Energy Function for Rubber », Rubber Chemistry and Technology, Vol. 66, N° 5, pp.754-771, (1993).
- [80] J. WEISS, B. MAKER, S. GOVINDJEE, « Finite element implementation of incompressible, transversely isotropic hyperelasticity. Computer methods in applied mechanics and engineering, 1996, Vol.135,pp.107-128,(1996).
- [81] R. LALAONLRLNA, « Analyse théorique et numérique des grandes déformations en mécanique des milieux continus », Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, (1986).
- [82] N. MOËS, « Mécanique des milieux continus », Cours de mécanique des milieux continus, Ecole centrale de Nantes, (2012).
- [83] F. SIDORODFF, « Cours sur les grandes transformations et endommagement », Rapport Greco N° 51, Sophia-Antipolis, (1982).
- [84] F. SIDORODFF, « Mécanique des milieux continus », Cours de mécanique des milieux continus, Ecole Centrale de Lyon, (2010).
- [85] E.MORTON, « An Introduction to Continuum Mechanics », Vol.158, In: Mathematics in Science and Engineering, (1981).
- [86] J. BONET, D. RICHARD, Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis , University of Wales Swansea University of Wales, CAMBRIDGE University Press 2<sup>nd</sup> Edition,(2008).
- [87] W. LAI, D. RUBIN, E. KREMPL, « Introduction to Continuum Mechanics », Elsevier Butterworth-Heinemann, (1993).
- [88] BADEL P, VIDAL-SALLE E, BOISSE P, « Computational determination of in plane shear mechanical behaviour of textile composite reinforcements » , Computational Materials Science, Vol. 40, N° 4, pp. 439-448, (2007).
- [89] A. KHAN, T. MABROUKI, E. VIDAL-SALLE, P. BOISSE, « Numerical and experimental analyses of woven composite reinforcement forming using a hypoelastic behaviour. Application to the double dome benchmark », Journal of Materials Processing Technology Vol. 210, pp. 378-388, (2010).
- [90] C. TRUESDELL, W. NOLL, « The non linear field theories of mechanics », Edited by Stuart S. Antman, Third Edition Springer Verlag Berlin, (1992).

- [91] S. LADJAL, « Modélisation des non linéarités de comportement des sols fins sous sollicitations homogènes. Application à la simulation des résultats d'essais triaxiaux classiques », Thèse de Magister, Université de Msila, (2004).
- [92] R. TEN, « Finite element simulations of laminated composite forming processes », Thèse de doctorat Université Twente Pays Bas, (2007).
- [93] A. SPENCER , « A static theory of finite elasticity », IMA Journal of Applied Mathematics, Vol.6 , N° 2, pp.164-200, (1970).
- [94] R. OGDEN, « Non linear elastic deformation », Ellis Horwood, Chichester , (1984).
- [95] J. BOEHLER, « Lois de comportement anisotrope des milieux continus », Journal de Mécanique, Vol. 17, pp.153-170, (1978).
- [96] C. HICHAM, « Modélisation du comportement des composites thermoplastique à renforts continus dans les procédés de mise en forme », Thèse de Doctorat, Université Laval Québec, Canada, (2011).
- [97] P. LUCAS and G. ZANELLA, « Mise en œuvre des composites thermoplastiques - compounds à fibres continues », Edition techniques de l'ingénieur, AM 5 236, (2007).
- [100] T.ISHIKAWA and C. WEI, « Non linear Behavior of Woven Fabric Composites », Journal of Composite Materials, Vol.17, pp. 399-413, (1983).
- [101] E.GLAESSGEN, C. PASTORE, O. GRIFFIN , A. BRIGER, « A Geometrical and finite element modelling of textile Composites », Composites Part B : Engineering, 27 B(1): 43-50, (1996).
- [102] D. BIGAUD, P. HAMELIN, « Mechanical properties prediction of textile-reinforced composite materials using a multiscale energetic approach », *Composite Structures*, Vol.38, N° 1-4, pp. 361-371, (1997).
- [103] F. ABBASSI, I. ELFALEH , S. MISTOU, A. ZGHAL , M. FAZZINI , T. DJILALI , « Experimental and numerical investigations of a thermoplastic composite (carbon/PPS) thermoforming », Structural Control and Health Monitoring, Vol. 18, N°7,pp. 769-780, (2011).
- [104] P. BEKAMPIENĚ and J. DOMSKIENĚ, « Influence of Stitching Pattern on Deformation Behaviour of Woven Fabric during Forming » , Materials Science, Vol. 16, N° 3, pp 1392-1320,(2010).
- [105] W. LEE, J. PADVOISKIS , J. CAO, E. DE LUCKER , P. BOISSE , F. MORESTIN, J. CHEN, J. SHERWOOD, « Bias-extension of woven composite fabrics », International Journal of Material Forming, Vol.1, Issue 1, pp 895-898,(2008).
- [106] S. DAGHBOUDJ and H. SATHA, « Determination of the in-plane shear rigidity modulus of a carbon non-crimp fabric from bias-extension data test », Journal of Composite Material, , Vol.48, N° 22, pp 2729–2736,(2014).
- [107] P. HARRISON, J. WIGGERS, A. LONG , « Normalization of Shear Test Data for Rate-Independent Compressible Fabrics » , Journal of Composite Materials, Vol.42,pp.2315-2344, (2008).
- [108] Y. XIAOBO, Z. LIANGCHI, M. YIU WING, « Modeling and finite element treatment of intra-ply shearing of woven fabric », Journal of Materials Processing Technology, pp47-52, (2003).
- [109] Y.XIAOBO, C.BRUCE, M.DIMIAN, Y.LIN, , W.YIU, « Interplay shear locking in finite element analyses of woven fabric forming processes » , Composites: Part A, Vol 37, pp790-803,( 2006).