

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université 8 Mai 1945 – Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : Analyse

Par :

Mlle CHELGHOU Fayrouz et Mlle HAMIDI Adila



Intitulé

**Existence globale de solutions d'un système
d'équations de Réaction-Diffusion**

Dirigé par : Dr. HITTA Amara

Devant le jury

PRESIDENT
EXAMINATEUR 1
EXAMINATEUR 2

K. BENARIOUA
S. BADI
K. BOUKRIOUA

Université -Guelma
Université -Guelma
Université -Guelma

Session Juin 2011

Remerciements

Nous tenons tout particulièrement remercier mon encadreur de mémoire Hitta Amara qui m'a proposé ce sujet qui nous avons grand plaisir à travailler.

Nous apprécions énormément son approche des athématiques, toujours clair et rigoureux, et nous lui somme infiniment reconnaissant.

Nous exprimons aussi nos remerciements à tous les enseignants du Département des sciences exactes qui ont contribué à notre formation pour avoir le diplôme de Master.

Nous exprimons également nos remerciements les plus chaleureux à tous nos collègues pour leurs aide durant tout ce travail leurs encouragements.

Enfin nous remercions tous ceux qui de loin ou de prés ont contribué à l'élaboration et à l'aboutissement de ce travail.

Tables des matières

• Remerciements.	1
• Introduction Générale.	5
• Plan du mémoire.	9
1. Modélisation des phénomènes naturels.	
1.1. Introduction sur la modélisation.	10
1.3. Quelques exemples de modélisation.	11
Equations de Fisher, équations FitzHugh-Nagumo, Concentration de morphogènes, Réactions chimiques (équations KPP), Dynamiques des populations, modélisation de la Combustion, Réaction nucléaire.	
2. Résultats préliminaires sur les systèmes RD.	
2.1. Espaces de Sobolev et inégalités.	15
2.2. Semi-groupes continus et équation d'évolution.	18
Semi-groupes d'opérateurs compacts et Théorème de Hille-Yoshida	

3. Sur les systèmes des EDP de type RD.	
3.1. Introductions et définitions.	24
3.3. Positivité et régions invariantes.	25
3.3. Technique de Lyapunov.	29
4. Existence Globale de solution d'un système RD.	
4.1. Existence locale de solutions d'un système RD.	33
4.2. Existence globale de la solution.	34
4.3. Discussion et résultats.	39
5. Appendices.	
5.1. Opérateurs linéaire compacts.	41
5.2. Inégalités fondamentales.	45
5.3. Formules de Green.	47
5.4. Formes bilinéaires et quadratiques.	48
• Références.	51

Introduction Générale

Durant les dernières années, plusieurs auteurs se sont attaqués aux questions relatives à l'existence globale et le comportement asymptotique de solutions des systèmes d'ordre n des équations aux dérivées partielles de type parabolique. Ces problèmes sont d'un intérêt particulier pour les équations provenant de modèles mathématiques en physique, biologie, chimie; etc..

Notation : Dans la suite, $\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k^2}$ représente le Laplacien sur \mathbb{R}^n ,

Ω est un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^n dont la frontière $\partial\Omega$ est régulière, $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ désigne la dérivée normale de u extérieure à $\partial\Omega$, on montre que $\frac{\partial u}{\partial \eta} =$

$\nabla \cdot \vec{n}$ où \vec{n} est le vecteur unitaire de la normale extérieure à $\partial\Omega$ et $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ désigne le Gradient.

On s'intéresse aux divers aspects d'un système de réaction-diffusion à deux

composantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = g(u, v) & \text{dans }]0, +\infty[\times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = f(u, v) & \text{dans }]0, +\infty[\times \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{dans }]0, +\infty[\times \partial\Omega \\ u(0, x) = u_0 \quad \text{et} \quad v(0, x) = v_0 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (\mathbf{S}_2)$$

Nous supposons, en outre, que les données initiales sont continues, non négatives et sont dans une région définie par

$$\mathbf{E} = \left\{ (u_0, v_0) \in \mathbb{R}_+^2 : \nabla u_0 \text{ et } \nabla v_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega) \right\}.$$

Deux des suppositions fondamentales, développées dans le chapitre 3, associées au système (\mathbf{S}_2) sont :

1. La préservation de la positivité
2. La conservation de la masse totale.

Ainsi, nous supposons que la condition de la balance est satisfaite ce qui signifie pour notre système : $f(u, v) + g(u, v) = 0$. Le terme de la réaction f sera une fonction sur \mathbb{R}_+^2 non négative, non linéaire et continûment différentiable et vérifie en plus :

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(0, s) = 0 & \forall s \geq 0 \\ \lim_{s \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(1 + f(r, s))}{s} \right] < \alpha^* & \forall r \geq 0 \end{array} \right.$$

où

$$\alpha^* = \frac{8d_1 d_2}{n \|u_0\|_\infty (d_1 - d_2)^2}.$$

Les systèmes de réaction-diffusion apparaissent comme modèles pour plusieurs phénomènes variés d'applications, allant des systèmes écologiques, la formation d'échantillons biologiques jusqu'aux réactions chimiques.

Malgré les efforts consentis ces dernières années, il est surprenant que des questions concernant l'existence globale des solutions du système (\mathbf{S}_2) demeurent ouvertes jusqu'à une date récente. Ainsi,

- Si $d_1 = d_2$: Les solutions non négatives de (\mathbf{S}_2) existent globalement en temps. En effet, si nous ajoutons les deux équations du système (\mathbf{S}_2) on obtient l'équation de la chaleur : $\frac{\partial w}{\partial t} - d_1 \Delta w = 0$ avec $w = u + v$ et $w_0 = u_0 + v_0$. En appliquant la condition de la balance avec le principe du maximum, il s'ensuit une \mathbf{L}^∞ -estimation de u et v puisque $\|w(t)\|_{\infty, \Omega} \leq \|w_0\|_{\infty, \Omega}$. Ainsi, l'existence globale est assurée.

D'autre part, l'existence d'une fonctionnelle convexe de Lyapunov L assure l'existence globale d'une solution (Voir chapitre 3).

- Si $d_1 \neq d_2$: La situation devient un peu plus délicate :

Alikakos : Avec des conditions de bords homogènes de Neumann, Alikakos N. D. (Voir *cf.* [1]) avait établi l'existence globale et la \mathbf{L}^∞ -bornitude des solutions pour des données initiales positives en

utilisant les injections de Sobolev lorsque

$$f(u, v) = -uv^\beta \text{ et } 1 < \beta < \frac{n+2}{n}.$$

Masuda : Masuda K. (Voir cf. [11]) a montré que la solution globale de (S_2) existe pour $\beta > 1$ et converge vers **une constante** lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Harraux et Youkana : Un résultat Analogue a été établi par Harraux A. et Youkana A. (Voir cf. [7]) lorsque $f(u, v) = u\varphi(v)$ sous la condition $\alpha^* = 0$, où φ est une fonction continûment différentiable non négative et non polynomialement bornée mais elle est supposée croître exponentiellement. Pierre et Smith ont montré, dans un exemple célèbre, que lorsque la réaction f est polynomialement bornée, la condition de la balance et celle de la préservation de la masse totale ne sont pas suffisantes pour assurer l'existence globale de la solution.

Plan du mémoire

Ce mémoire est subdivisé en 4 chapitres répartis comme suit :

Dans le chapitre 1 :

On traite quelques exemples de modélisation dans divers domaines d'applications mathématiques pour montrer toute la fécondité et l'apport conséquent d'un domaine aussi riche que celui des équations aux dérivées partielles de type parabolique.

Dans le chapitre 2 :

On aborde les définitions indispensables pour résoudre les systèmes de réaction-diffusion.

Dans le chapitre 3 :

Les résultats préliminaires sur les systèmes de réaction-diffusion, seront abordés, décortiqués et analysés.

Dans le chapitre 4 :

On démontre un résultat sur les existences locale et globale d'une solution du système de réaction-diffusion considérée.

Dans les appendices :

On résume les outils de bases indispensables pour le contenu de ce mémoire.

Chapitre 1

Modélisation des phénomènes naturels et systèmes de réaction-diffusion

1.1. Introduction sur la modélisation

La modélisation et l'analyse mathématique des systèmes biologiques sont d'un grand intérêt pour mieux comprendre notre environnement ainsi que son évolution dans le temps. De nombreuses analogies entre les réacteurs chimiques et certains systèmes biologiques ont conduit les chercheurs à introduire des modèles de type "réaction-diffusion" dans la description de ceux-ci.

Les équations de réaction-diffusion ont été proposées par A. Turing (1952) pour la modélisation de phénomènes de morphogènes c'est-à-dire le développement des formes/structures.

Un modèle d'interaction d'espèces ou de substances chimiques est donné

par le système d'équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \operatorname{div}(d_i \nabla u_i) + Q_i, \quad 1 \leq i \leq m,$$

où $u_i(x, t)$ représente la densité, resp. la concentration de la substance i :

- **La matrice** $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_m)$ est dite de **diffusion**. Les termes de **réaction** Q_i modélisent l'interaction des substances (inhibition, catalyse). Ils peuvent dépendre de (x, t) et des concentrations u_i de façon non linéaire.
- Les termes $\operatorname{div}(d_i \nabla u_i)$, $i = 1, \dots, m$, représentent **la diffusion** de la substance à travers le système.

En fonction du choix de d_i et Q_i , les concentrations u_i peuvent donner lieu à des motifs locaux :

On modélise ainsi la pigmentation des coquillages, le pelage des animaux (zèbre, guépard, ...) et des réactions chimiques cycliques.

1.2. Quelques exemples de modélisation

Dans les modèles, en biologie ou en dynamique des populations, on s'intéresse à la concentration d'une substance chimique ou à la densité d'une population (particules, cellules) et son évolution au cours du temps. L'inconnue u est fonction de $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$.

1. Equations de Fisher (1937) :

Pour $u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$, cette équation est un modèle de dispersion, en

une dimension spatiale, d'un morphogène favorable dans une population. Elle s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u + ru \left(1 - \frac{u}{C}\right).$$

Le terme de *croissance logistique* dépend de la constante de reproduction linéaire r , de la capacité de l'environnement C et du coefficient de dispersion de la population, k .

2. Equations FitzHugh-Nagumo :

Elles prennent la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) - v \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \delta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \alpha u - \beta v, \end{cases} \quad \delta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+.$$

Ces équations sont utilisées pour modéliser la transmission d'impulsions nerveuses le long d'axones ou des réactions chimiques cycliques de Belousov-Zhabotinsky.

3. Concentration de morphogènes :

Posons $C = u(x, y, t)$ la concentration de morphogènes au point (x, y) en un temps t . L'équation de réaction-diffusion décrivant cette concentration est

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u - bu + R, \quad (x, y, t) \in [0, 1]^2 \times \mathbb{R}^+$$

où a est le taux de diffusion, b le taux de dissipation et ΔC le Laplacien dans \mathbb{R}^2 . La fonction R est la fonction de réaction de la concentration C .

Ainsi, notre modèle intègre, trois processus (les trois termes à droite) :

- La **diffusion** décrit le transfert des morphogènes des points de forte concentration vers des points de faible concentration.
- La **dissipation** concerne la décomposition des morphogènes causant des concentrations, en l'absence d'autres influences, qui s'effritent exponentiellement vers 0.
- La **réaction** décrit le taux de production des morphogènes.

En pratique : Posons h le pas d'une discrétisation uniforme du carré $[0, 1]^2$. Notons par $C_{i,j}$ la valeur de la concentration au point (i, j) . Le Laplacien de $C_{i,j}$ s'écrit

$$\Delta_{i,j} = \Delta C_{i,j} \simeq \frac{C_{i+1,j} + C_{i-1,j} + C_{i,j+1} + C_{i,j-1} - 4C_{i,j}}{h^2}.$$

En fait $\Delta_{i,j}$ est décrit comme la convolution des valeurs de la concentration sur les sommets du carré discrétisé de côté h par la matrice

$$L = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

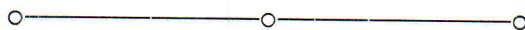
En multipliant le Laplacien par a^2 et en tenant compte du terme $-bC_{i,j}$, on obtient la matrice symétrique

$$M = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 0 & a^2 & 0 \\ a^2 & -4 - h^2 b & a^2 \\ 0 & a^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a la forme matricielle de l'équation décrivant la concentration :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = M * C + R,$$

où * dénote la convolution discrète.



Chapitre 2

Résultats préliminaires Sur Les Systèmes de Réaction-Diffusion

2.1. Espaces de Sobolev et inégalités

Soit p un entier naturel tel que $1 < p < \infty$ et Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n . L'ensemble $\mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ désigne l'espace de Banach des fonctions mesurables (au sens de Lebesgue) sur Ω à valeurs dans \mathbb{R}^n , muni de la norme :

$$\|f\|_{p,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |f_i(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad \forall 1 \leq p < \infty.$$

Pour $p = \infty$, on pose $\mathbf{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ l'espace de Banach des fonctions mesurables $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ telles que

$$\|f\|_{\infty,\Omega} = \sum_{i=1}^n \inf \left\{ k : |f_i(x)| \leq k, \text{ pour presque tout } x \in \Omega \right\} < \infty.$$

Toutes les dérivées considérées seront au sens des distributions.

Posons

$$D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n}$$

où $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

Pour $p \geq 1$ et $k > 0$, posons

$$\begin{aligned} W^k(\Omega) &= \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : D^\alpha f \text{ existe pour tout } \alpha, \text{ tel que } |\alpha| < k\} \\ W_p^k(\Omega) &= \{f \in W^k(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega) \text{ pour tout } \alpha, \text{ tel que } |\alpha| < k\}. \end{aligned}$$

L'espace $W_p^k(\Omega)$ sera muni de la norme

$$\|f\|_{p,\Omega}^{(k)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha f|^p dx \right)^{1/p}.$$

Pour $p = 2$, On note

$$H^k(\Omega) = W_2^k(\Omega), \quad k = 0, 1, \dots.$$

C'est un espace de Hilbert. Notons que, l'on a

$$H^0(\Omega) = L^2(\Omega).$$

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in W_p^k(\Omega)$ converge vers $u \in W_p^k(\Omega)$, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{W_p^k(\Omega)} = 0.$$

On écrit, dans ce cas, $u_n \rightarrow u \in W_p^k(\Omega)$.

Théorème 2.1.1 (La Trace dans $W^{1,p}(\Omega)$). Il existe $T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbf{L}^p(\partial\Omega)$ telle que :

$$Tu = u|_{\partial\Omega} \quad \text{pour } u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$$

$$\|Tu\|_{p,\Omega} \leq K \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$, où la constante K dépend seulement de p et Ω . On dit que Tu est la trace de u .

Théorème 2.1.2 (La 0-Trace dans $W^{1,p}(\Omega)$). Supposons que $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Alors

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ si et seulement si } Tu = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

◆ **Exemple 2.1.1.** Soit $\mathbb{B}(0,1)$, la boule unité ouverte de \mathbb{R}^n , et

$$u(x) = |x|^{-\alpha}, \quad x \in \Omega, \quad x \neq 0.$$

L'on se demande alors, si $u \in W_p^1(\Omega)$? Pour cela, notons que u est différentiable en dehors de 0, et que

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \frac{-\alpha x_i}{|x|^{\alpha+2}} \quad \text{et} \quad |Du(x)| = \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}}, \quad \text{avec } x \neq 0.$$

Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Fixons $\varepsilon > 0$. Alors, d'après la formule de Green,

$$\int_{\Omega \setminus \mathbb{B}(0,\varepsilon)} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega \setminus \mathbb{B}(0,\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx + \int_{\partial \mathbb{B}(0,\varepsilon)} u \varphi v^i dS,$$

où $v = (v^1, \dots, v^n)$ est le vecteur normal intérieure sur $\partial \mathbb{B}(0,\varepsilon)$. Si $\alpha+1 <$

n , $|Du(x)| \in L^1(\Omega)$. Dans ce cas

$$\left| \int_{\partial\mathbb{B}(0,\varepsilon)} u\varphi v^i dS \right| \leq \|\varphi\|_\infty \int_{\partial\mathbb{B}(0,\varepsilon)} \varepsilon^{-\alpha} dS \leq C\varepsilon^{n-1-\alpha} \rightarrow 0.$$

Ainsi,

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, si $0 \leq \alpha < n - 1$. De plus $|Du(x)| = \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}} \in L^p(\Omega)$ si et seulement si $(\alpha + 1)p > n$. Par conséquent, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ si et seulement si $\alpha < \frac{n-p}{p}$. En particulier, $u \notin W^{1,p}(\Omega)$ pour tout $p \geq n$. ■

On note par $W_{p,0}^k(\Omega)$ la fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W_p^k(\Omega)$. Suivant le théorème de la 0-trace, on interprète l'espace $W_{p,0}^k(\Omega)$ comme étant l'ensemble des fonctions $u \in W_p^k(\Omega)$ vérifiant :

$$D^\alpha u = 0 \quad \text{pour tout } |\alpha| \leq k - 1.$$

2.2. Semi-groupes continus

Soit X un espace de Banach réel ou complexe muni de la norme $x \rightarrow \|x\|_X$. On désigne par $\mathbf{L}(X)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de X dans lui-même; $\mathbf{L}(X)$ est un espace de Banach pour la norme $T \rightarrow \|T\|$ définie par

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_X = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_X}{\|x\|_X}.$$

Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ une famille à un paramètre d'opérateurs linéaires bornés de X dans lui-même.

Définition 2.2.1. (Semi-groupes continus). *La famille $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est dite semi-groupe sur X si :*

- $T(ts) = T(t) + T(s)$ pour tous $t, s \in \mathbb{R}^+$
- $T(0) = Id_E$.

On dit que le semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est **fortement continu** ou **semi-groupe de classe C^0** si et seulement si

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)f - f\|_X = 0, \forall f \in X.$$

Proposition 2.2.1. *Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe de classe C^0 sur X , alors*

- a) $t \rightarrow \|T(t)\|$ est bornée sur tout intervalle compact $[0, \alpha]$.
- b) Pour tout $x \in X$, la fonction $t \rightarrow T(t)x$ est continue sur \mathbb{R}^+ .
- c) Il existe des constantes réelles ω et M telles que

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

On dit que le semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est de **contraction** si : $\|T(t)\| \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

On appelle **générateur** d'un semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, l'application linéaire $A : D(A) \rightarrow X$ tel que pour tout $f \in X$, la fonction $t \rightarrow T(t)f$ soit

dérivable pour tout $t \geq 0$:

$$D(A) = \left\{ f \in X : Af = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)f - f}{h} \text{ existe dans } X \right\}$$

L'ensemble $D(A)$ vérifie les propriétés suivantes, $t \in \mathbb{R}^+$:

- $D(A)$ est un s-espace vectoriel de X . Si $f \in D(A)$, $T(t)f \in D(A)$.
- $AT(t)f = T(t)Af$.
- $D(A)$ est dense dans X .
- $\frac{d}{dt}[T(t)f] = AT(t)f$.
- L'opérateur A est fermé.

Soit $\lambda \in \rho(A)$, la résolvante de l'opérateur A (Voir appendice). On définit un opérateur $R_\lambda : X \rightarrow X$ par

$$R_\lambda f := (\lambda \text{Id}_X - A)^{-1} f.$$

Suivant le théorème du graphe fermé $R_\lambda : X \rightarrow D(A) \subseteq X$ est un opérateur linéaire borné qui commute avec A :

$$AR_\lambda f = R_\lambda Af \quad \text{si } f \in D(A).$$

De plus, on montre que si $\lambda > 0$ alors $\lambda \in \rho(A)$ et pour tout $f \in X$,

$$R_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) f dt, \quad \text{et} \quad \|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Ainsi, l'opérateur R_λ est la transformée de Laplace du $\{T(t)\}_{t \geq 0}$.

♦ **Exemple 2.2.1.** La solution de l'équation

$$-\Delta u + su = f, \quad s > 0, \quad \text{dans } \Omega$$

est la résolvante $R_f(v)$ où v est la solution de l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, \infty[\\ v = f & \text{dans } \Omega \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Théorème 2.2.1 (Hille-Yosida). *Soit A un opérateur linéaire fermé sur X (pas nécessairement borné). Alors, A est un générateur d'un semi-groupe de contraction si et seulement si : $]0, \infty[\subset \rho(A)$ et $\|R_\lambda\| < \frac{1}{\lambda}$ pour $\lambda > 0$.*

Le choix de l'espace X dépend du type des résultats cherchés, ou des propriétés de régularité des données initiales. Ainsi, si la réaction et les données initiales sont continues le choix naturel de X sera $X = C(\overline{\Omega})$. Si la réaction est dans $\mathbf{L}^p([0, \infty[, \Omega)$ et les données initiales sont dans $\mathbf{L}^p(\Omega)$, le choix sera porté sur $X = \mathbf{L}^p(\Omega)$.

◆ **Exemple 2.2.3. [Semi-groupe de la chaleur].** Posons $X = \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, et définissons un opérateur sur X par la formule de Gauss-Weierstrass

$$(T(t)f)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy = \mu_t * f(x), \quad \text{où } x \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

et

$$\mu_t = (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/4t} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \mu_t(x) dx = 1.$$

On pose $(T(0))f(x) = 0$. La famille $(T(t))_{t \geq 0}$ est un C^0 -semi-groupe sur X . En effet, puisque $\mu_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^{[1]}$, l'intégrale existe pour $f \in X$. De

[1] L'espace de Schwartz des fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $|x|^\alpha |D^\beta f(x)|$

plus, d'après l'inégalité de Young, on a

$$\|T(t)f\|_p \leq \|\mu_t\|_1 \cdot \|f\|_p = \|f\|_p.$$

Donc

$$T(f) \in X \quad \text{et} \quad \|T\|_p \leq 1 \quad \text{pour tout } t > 0.$$

Remarquons que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est invariant sous $T(t)$ et qu'il est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ car il contient $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ [2]. D'autre part, on a

$$\mathcal{F}(\mu_t * f) = 2\pi^{n/2} \mathcal{F}(\mu_t) \cdot \mathcal{F}(f)$$

où $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. En d'autres termes, la Transformée de Fourier applique $(T(t)|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)})_{t \geq 0}$ dans un semi-groupe multiplicatif sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ qui est continu pour la topologie usuelle de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Le générateur (dérivée à droite en 0) de ce semi-groupe est l'opérateur de multiplication

$$S\mathcal{F}(f)(x) = -|x|^2 \mathcal{F}(f)(x), \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

En appliquant \mathcal{F}^{-1} et en observant que la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est plus fine que celle induite par $L^p(\mathbb{R}^n)$, on peut déduire alors que $(T(t))_{t \geq 0}$ est un C^0 -semi-groupe sur X dont le générateur coïncide avec le Laplacien Δ . Comme μ_t et toutes ses dérivées sont dans $C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, il s'en suit que le fonction $u(t, x) = (T(t)f)(x)$ est dans $C^\infty(]0, \infty[\times \mathbb{R}^n)$,

tend vers 0 lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$ pour tous multi-indices α, β .

[2] L'espace des fonctions indéfiniment différentiables à supports compact $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

puisque l'on peut dériver sous le signe intégrale. Comme $\frac{\partial \mu_t}{\partial t} = \Delta \mu_t$, ce semi-groupe résout l'équation de la chaleur sur $]0, \infty[\times \mathbb{R}^n$, à savoir

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \Delta u(x, t) \\ u(x, 0) = f_0(x). \end{cases} \quad \blacksquare$$

Chapitre 3

Sur les systèmes des équations aux dérivées partielles de type Réaction-Diffusion

3.1. Introduction et définitions

On appelle **système de réaction-diffusion** une équation aux dérivées partielles parabolique semi-linéaire de la forme

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, t) = D\Delta \mathbf{u}(x, t) + \mathbf{f}(\mathbf{u}(x, t)), & x \in \Omega, \quad t \geq 0 \\ \frac{\partial u_k}{\partial \eta} = 0, \quad k = 1, \dots, m & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u_k(0, \cdot) = u_{0_k} & t = 0, \end{array} \right. \quad (\mathbf{S}_m)$$

où $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_m)$ est la **matrice de diffusion**, diagonale et définie positive. La solution, si elle existe, est une fonction

$$\mathbf{u}(x, t) = (u_1(x, t), \dots, u_m(x, t)) : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Le terme de réaction $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application **localement lipschitzienne**.

Le système (\mathbf{S}_m) est posé sur un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, auquel on adjoint des conditions aux bords, les conditions homogènes de Neumann : $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} = 0$ sur $\partial\Omega$. La donnée initiale $\mathbf{u}_0 = (u_{0_k})_{k=1}^m$ est continue et non négative sur $\bar{\Omega}$. Ces conditions assurent le résultat, très connu (Voir cf. [12] et [29]), suivant :

Théorème 3.1.1 *Il exist $T_{\max} \in]0, +\infty]$ tel que le système (\mathbf{S}_m) admet une solution globale sur $[0, T_{\max}[\times \bar{\Omega}$. En plus, si $T_{\max} < +\infty$, alors*

$$\lim_{t \in T_{\max}^-} \|\mathbf{u}(t, \cdot)\|_{\infty, \Omega} = \infty.$$

Dans ce cas, la solution n'est pas globale et on dit que la solution explose en temps fini T_{\max} ou bien qu'elle cesse d'exister.

3.2. Positivité et Région invariante

Définition 3.2.1. (Positivité). *Une fonction $\mathbf{f} = (f_k)_{k=1}^m : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ est dite quasi-positif si et seulement si, pour tout $k = 1, \dots, m$, on a*

$$f_k(v) \geq 0 \quad \text{si } v_k = 0 \text{ pour tout } v = (v_1, \dots, v_k, \dots, v_m) \in \mathbb{R}_+^m .$$

Proposition 3.2.1. *Lorsque \mathbf{f} est quasi-positif, les solutions du système (\mathbf{S}_m) sont non négatives terme à terme.*

Preuve. Désignons par $(\mathbf{S}_m)^+$ le système (\mathbf{S}_m) où on a remplacé $f(u)$ par $f(u^+)$ avec $u^+ = \max(u, 0)$ et $u^- = \min(u, 0)$. Comme f est localement lipschitzienne, le terme $f(u^+)$ l'est aussi. Le théorème 3.1.1 assure l'existence et l'unicité de la solution du système $(\mathbf{S}_m)^+$. Multiplions la

$k^{\text{ème}}$ équation de ce système par u_k^- et intégrons sur $]0, t[\times \Omega$, on obtient

$$\int_0^t \int_{\Omega} u_k^- \frac{\partial u_k}{\partial t} dx dt = \int_0^t \int_{\Omega} d_k u_k^- \Delta u_k dx dt + \int_0^t \int_{\Omega} u_k^- f_k(u_k^+) dx dt.$$

Notons que

$$(u_k)_t = -(u_k^-)_t \quad \text{et} \quad \Delta u_k = -\Delta u_k^- \quad \text{si} \quad u_k^- > 0.$$

En remplaçant et en intégrant par parties, on trouve que

$$-\frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_k^-)^2 dx = d_k \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u_k^-|^2 dx dt + \int_0^t \int_{\Omega} u_k^- f_k(u^+) dx dt.$$

Puisque f_k est quasi-positive, on a

$$u_k^- f_k(u^+) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \geq 0 \\ \geq 0 & \text{si } u \leq 0 \end{cases}$$

Ce qui donne

$$-\frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_k^-)^2 dx \geq d_k \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u_k^-|^2 dx dt.$$

Il vient que $u_k^- = 0$. D'où $u = u_k^+$ qui est une solution de (\mathbf{S}_m) . Il s'en suit, par unicité de la solution, que toutes ses composantes sont non négatives. ■

Définition 3.2.2. (Masse totale). *La masse totale des composants du système (\mathbf{S}_m) , à l'instant t , est la quantité*

$$m_T[(\mathbf{S}_m)] = \sum_{k=1}^m \int_{\Omega} u_k(t, x) dx.$$

Pour que la masse totale de (S_m) ne croît pas, à tout instant t , on doit supposer que

$$\int_{\Omega} \sum_{k=1}^m u_k(t, x) dx \leq \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m u_k(0, x) dx, \quad \forall t \geq 0. \quad (*)$$

En fait, on doit chercher une condition nécessaire pour que (*) soit réalisée. Pour cela, on intègre la composante u_k sur $]0, t[\times \Omega$ pour obtenir

$$\int_{\Omega} u_k(t, x) dx - \int_{\Omega} u_k(0, x) dx = \int_0^t \int_{\Omega} d_k \Delta u_k(s, x) dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} f_k(s, x) dx ds.$$

Par une intégration par parties et en tenant compte des conditions aux bords, on a

$$\int_0^t \int_{\Omega} d_k \Delta u_k(s, x) dx ds = 0.$$

En remplaçant et en prenant la somme pour $k = 1, \dots, m$, on obtient

$$\int_{\Omega} \sum_{k=1}^m u_k(t, x) dx = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m u_k(0, x) dx + \int_0^t \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m f_k(u(s, x)) dx ds.$$

Par conséquent, en posant $v = u(s, k)$ la condition cherchée sera

$$\sum_{k=1}^m f_k(v) \leq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}_+^n.$$

Ce qui justifie la définition suivante :

Définition 3.2.3. (Loi de la balance). On dit qu'une fonction $f = (f_k)_{k=1}^m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifie la loi de la balance lorsqu'il existe des con-

stantes $c_k > 0$ telles que

$$\sum_{k=1}^m c_k f_k(v) \leq 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}_+^m.$$

On obtient le résultat suivant :

Proposition 3.2.2. *Lorsque les coefficients de diffusion $(d_i)_{i=1}^m$ sont tous égaux à d et que la fonction f est quasi-positive et vérifie la loi de la balance, alors la solution du système (\mathbf{S}_m) existe globalement.*

Preuve. Remarquons, tout d'abord, que les composantes de \mathbf{u} sont non négatives puisque f est quasi-positive. Posons $\mathbf{w} = \sum_{k=1}^m c_k u_k$. En utilisant la loi de la balance et les équations de (\mathbf{S}_m) , on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \leq d \Delta \mathbf{w}, & 0 < t < T_{\max} \\ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial \Omega, t > 0, \\ \mathbf{w} = \mathbf{w}_0 & x \in \bar{\Omega}, t = 0, \end{cases}$$

où $\mathbf{w}_0 = \sum_{k=1}^m c_k u_{0_k}$ et $d = d_k$ pour tout $k = 1, \dots, m$. Ceci nous permet d'appliquer le principe du maximum, pour obtenir $\|\mathbf{w}(t, \cdot)\|_{\infty, \Omega} \leq \|\mathbf{w}_0\|_{\infty}$ pour tout $0 < t < T_{\max}$. Par conséquent, $u(t, x)$ est uniformément bornée et d'après le théorème 3.1.1 on a $T_{\max} = \infty$. ■

Une dernière supposition dérivant de certains modèles physiques est de

supposer que :

$|f(v)|$ soit bornée polynomialement.

Dans le cas où les coefficients de diffusion sont différents, l'exemple donné par Hollis, Pierre et Smith montre que cette supposition en plus de la loi de la balance et la positivité ne garantissent pas, pour autant, l'existence globale de la solution du système (S_m) .

3.3. Technique de Lyapunov

La notion de quasi-positivité a été introduite pour garantir que les solutions, dont les valeurs initiales sont dans \mathbb{R}_+^n , restent dans \mathbb{R}_+^n . Ceci justifie l'idée plus concise de la notion de **région invariante**. En fait, on cherche un sous-ensemble I de \mathbb{R}_+^n telle que toutes les solutions restent dans I .

Définition 3.3.1. (). Une partie $I \subset \mathbb{R}_+^n$ est dite *région invariante* pour le système (S_m) si et seulement si $u(t, x) \in I$ pour tout $t \in [0, T_{\max}[$ et $x \in \Omega$ lorsque $u_0 \in C([0, T_{\max}[\times \bar{\Omega}, I)$.

Définition 3.3.2. (Fonctionnelle de Lyapounov). Soit I une région invariante pour le système (S_m) . Une fonction $L : I \rightarrow [0, \infty[$ est une *fonction de Lyapunov* si

- 1) L est une fonction convexe qui admet une racine unique.

2) L peut s'écrire sous la forme

$$L(u) = \sum_i l_i(u), \quad l_i \in C^2(\mathbf{I}) \text{ et } \nabla_u L(u) \cdot f(u) \leq 0 \quad \forall u \in \mathbf{I}.$$

Proposition 3.3.2. Lorsque les coefficients de diffusion sont tous égaux et que le système (S_m) admet une région invariante \mathbf{I} et une fonctionnelle de Lyapunov L , alors la solution du système (S_m) existe globalement.

Preuve. Soient L une fonction de Lyapunov et x_0 une racine de L . Notons que $\ell_i''(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbf{I}$ et $\nabla L(x) \neq 0$ si $x \neq x_0$. Supposons que les coefficients de diffusion sont tous égaux à $\mathbf{d} > 0$, i.e $D = \mathbf{d} \cdot I_m$, alors

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f(u) = \mathbf{d} \cdot \Delta u + f(u).$$

De plus, on a

$$\frac{dL(u)}{dt} = \nabla_u L(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

et

$$\Delta_x L(u) = \nabla_x \cdot \nabla_u L(u) \nabla_x u = \Delta_u L(u) |\nabla_x u|^2 + \nabla_u L(u) \cdot \Delta_x u.$$

Il vient que

$$\frac{dL(u)}{dt} - \mathbf{d} \cdot \Delta_x L(u) = \nabla_u L(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} - \mathbf{d} \cdot \nabla_u L(u) \cdot \Delta_x u - \mathbf{d} \cdot \Delta_u L(u) \cdot |\Delta_x u|^2 \leq \nabla L(u) \cdot f(u). \blacksquare$$

Donc

$$\frac{dL(u)}{dt} \leq \mathbf{d} \cdot \Delta_x L(u) + \nabla_u L(u) \cdot f(u).$$

Ainsi $\nabla_u \mathbf{L}(u) \cdot f(u) \leq 0$, et alors

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{L}(u)}{dt} \leq \mathbf{d} \cdot \Delta_x \mathbf{L}(u) \\ \frac{\partial \mathbf{L}(u)}{\partial \eta} = \nabla \mathbf{L}(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0. \end{cases}$$

Ce qui donne, d'après le principe du maximum, que $\mathbf{L}(u)$ est bornée. ■

Chapitre 4

Existence Globale de solutions d'un Système de Réaction-Diffusion

Considérons, maintenant, le système de réaction-diffusion à deux composantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = g(u, v) & \text{dans }]0, +\infty[\times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = f(u, v) & \text{dans }]0, +\infty[\times \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{dans }]0, +\infty[\times \partial\Omega \\ u(0, x) = u_0 \quad \text{et} \quad v(0, x) = v_0 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (\text{S}_2)$$

Les données initiales sont continues et se trouvent dans la région invariante

$$\mathbf{E} = \left\{ (u_0, v_0) \in \mathbb{R}_+^2 : \nabla u_0 \text{ et } \nabla v_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega) \right\}.$$

La réaction f est une fonction sur \mathbb{R}_+^2 non négative, non linéaire et con-

tinûment differentiable qui vérifie

$$\begin{cases} f(0, s) = 0 & \forall s \geq 0 \\ \lim_{s \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(1 + f(r, s))}{s} \right] < \alpha^* & \forall r \geq 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

où

$$\alpha^* = \frac{8d_1 d_2}{n \|u_0\|_\infty (d_1 - d_2)^2}. \quad (4.2)$$

4.1. Existence Locale des solutions

L'espace $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ est un espace de Banach muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|$.

La norme définie par

$$\|(u, v)\|_{\mathfrak{X}} = \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$$

fait de $\mathfrak{X} = \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ un espace produit de Banach. Posons $\mathbf{w}(t) = (u(t), v(t))$. On peut convertir le système (S_2) en un système abstrait de premier degré, sur \mathfrak{X} , de la forme

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} [\mathbf{w}(t)] = H\mathbf{w}(t) + F[\mathbf{w}(t)], & t > 0 \\ \mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0 = (u_0, v_0) \in \mathfrak{X} \end{cases} \quad (**)$$

avec

$$F[\mathbf{w}(t)] = (-f(u, v), f(u, v))$$

i.e F est une fonction localement lipschitzienne sur \mathfrak{X} . L'opérateur

$$H : \mathcal{D}(\Delta) \times \mathcal{D}(\Delta) \rightarrow \mathfrak{X}$$

est définie par la matrice

$$\begin{pmatrix} d_1 \Delta & 0 \\ 0 & d_2 \Delta \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right)$$

où

$$\mathcal{D}(\Delta) = \left\{ u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) : \Delta u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \right\}.$$

Si $d > 0$, l'opérateur $d\Delta$ engendre un semi-groupe analytique d'opérateurs compacts sur l'espace $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$. Si $S_1(t)$ et $S_2(t)$ sont les semi-groupes analytiques engendrés, respectivement, par $d_1\Delta$ et $d_2\Delta$, sur l'espace $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$, alors l'opérateur H engendre un semi-groupe analytique d'opérateurs compacts sur l'espace \mathfrak{X} donné par

$$S(t) = \begin{pmatrix} S_1(t) & 0 \\ 0 & S_2(t) \end{pmatrix}.$$

L'existence d'une solution locale du système abstrait (***) dans un intervalle maximal $[0, T_{\max}[$ avec des conditions initiales est une conséquence de certains arguments standards (Voir cf. Pazy A. [13]).

4.2. Existence globale de la solution en temps

Reppelons que la bornitude de la première composante u de la solution est garantie par le principe du maximum dont l'une des versions est :

Théorème 4.2.1 (Principe du maximum). *Si la première composante*

u vérifie

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u \leq 0 & \text{dans }]0, T_{\max}[\times \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \leq 0 & \text{dans }]0, T_{\max}[\times \partial\Omega \end{cases}$$

alors

$$u(x, t) \leq \max_{x \in \Omega} u_0(x) = \|u_0\|_{\infty}.$$

La méthode utilisée, dans ce mémoire, est basée sur une technique faisant appel à la fonctionnelle de Lyapunov dont la définition générale est :

Définition 4.2.1. (Fonctionnelle de Lyapunov). Une fonctionnelle de Lyapunov L pour le système de réaction-diffusion (S_m) , est une fonction continûment différentiable non négative $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $L(t) = L(u(t, *))$ telle que

$$\frac{\partial L}{\partial t}(u) = \frac{\partial L[u_1(t, *), \dots, u_m(t, *)]}{\partial t} \leq 0$$

pour toute solution $u(t, *) = [u_1(t, *), \dots, u_m(t, *)]$ du système (S_m) .

Le résultat principal, de ce chapitre, est :

Théorème 4.2.2 Supposons que $(u(t, *), v(t, *))$ est une solution du système (S_2) , alors

$$t \rightarrow L(t) = \int_{\Omega} [M - u(t, x)]^{-\gamma} e^{\beta \cdot v(t, x)} dx$$

est une fonctionnelle décroissante sur l'intervalle $[0, T^*[$ si les constantes

$\beta, \gamma \geq 0$ sont choisies telles que

$$\beta M < \gamma < \frac{4d_1 \cdot d_2}{(d_1 - d_2)^2} \quad \text{où } M \text{ est tel que } \|u_0\|_\infty < M. \quad (4.3)$$

Preuve. En dérivant la fonctionnelle L par rapport à t et en utilisant les équations du système (S_2) , on obtient

$$\frac{dL}{dt} = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left([M - u(t, x)]^{-\gamma} e^{\beta \cdot v(t, x)} \right) dx = I + J,$$

où

$$I = \int_{\Omega} [\gamma d_1 (M - u)^{-\gamma-1} e^{\beta v} \Delta u + \beta d_2 (M - u)^{-\gamma} e^{\beta v} \Delta v] dx$$

$$J = \int_{\Omega} [\beta (M - u)^{-\gamma} - \gamma (M - u)^{-\gamma-1}] \cdot f \cdot e^{\beta v} dx.$$

Pour calculer I , on utilise la formule de Green pour obtenir

$$I = - \int_{\Omega} Q(\nabla u, \nabla v) (M - u)^{-\gamma-2} e^{\beta v} dx$$

où

$$Q(\nabla u, \nabla v) = \gamma d_1 (\gamma + 1) |\nabla u|^2 + \beta \gamma (d_1 + d_2) (M - u) \nabla u \nabla v + \beta^2 d_2 (M - u)^2 |\nabla v|^2.$$

On déduit que Q est une forme quadratique en ∇u and ∇v de la forme

$$Q(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

avec

$$a_{11} = \gamma d_1 (\gamma + 1), \quad a_{12} = \frac{\beta \gamma (d_1 + d_2) (M - u)}{2} \quad \text{et} \quad a_{22} = \beta^2 d_2 (M - u)^2.$$

Pour que I soit négative il suffit que Q soit une forme quadratique non négative c'est-à-dire que tous les déterminants principaux de la matrice

symétrique

$$A_Q = \begin{pmatrix} d_1\gamma(\gamma + 1) & \frac{\beta\gamma(d_1 + d_2)(M - u)}{2} \\ \frac{\beta\gamma(d_1 + d_2)(M - u)}{2} & \beta^2 d_2 (M - u)^2 \end{pmatrix}$$

associée à Q doivent être non négatifs.

Le premier déterminant d'ordre 1 de cette matrice est $d_1\gamma(\gamma + 1)$ qui est positif.

Le second est

$$|A_Q| = \frac{\beta^2\gamma(M - u)^2}{4} [4d_1d_2 - \gamma(d_1 - d_2)^2]$$

qui est non négatif si

$$\gamma \leq \frac{4d_1d_2}{(d_1 - d_2)^2}.$$

Pour que $J \leq 0$ il suffit que $\beta(M - u) - \gamma \leq 0$. D'après le principe du maximum, la première composante u de la solution vérifie $0 < u < M$. Donc on a $\beta(M - u) - \gamma \leq 0$ si, à fortiori, $\beta M \leq \gamma$. Ainsi, on a établi que $I \leq 0$ et $J \leq 0$ i.e $\frac{dL}{dt} \leq 0$ si (4.3) est satisfaite.

En fait, on peut trouver un résultat plus précis, en utilisant, pour a et $b \in \mathbb{R}_*$, l'inégalité :

$$ax^2 + bxy + cy^2 \leq -\frac{(b^2 - 4ac)}{2} \left[\frac{x^2}{4c} + \frac{y^2}{4a} \right], \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}.$$

Ceci dit, observons que

$$I = \int_{\Omega} [a|\nabla u|^2 + b\nabla u \cdot \nabla v + c|\nabla v|^2] (M - u)^{-\gamma-2} e^{\beta v} dx$$

où l'on a posé

$$a = -d_1\gamma(\gamma + 1), \quad b = -\beta\gamma(d_1 + d_2)(M - u) \quad \text{et} \quad c = -\beta^2 d_2 (M - u)^2.$$

Pour ces valeurs, l'inégalité précédente s'écrit

$$T(\nabla u, \nabla v) = a|\nabla u|^2 + b\nabla u \cdot \nabla v + c|\nabla v|^2 \leq -\frac{(b^2 - 4ac)}{2} \left[\frac{|\nabla v|^2}{4a} + \frac{|\nabla u|^2}{4c} \right].$$

Puisque $\gamma > \gamma/4$, l'inégalité (4.3) est vérifiée, à fortiori, si $d_1 d_2 - \gamma(d_1 - d_2)^2 > 0$. Ainsi

$$\frac{(b^2 - 4ac)}{8a} > \frac{d_1 d_2 - \gamma(d_1 - d_2)^2}{2d_1(\gamma + 1)} = m_2 > 0.$$

Dans le même ordre d'idées, et puisque $0 < u < M$ pour tout u d'après le principe du maximum, on obtient :

$$\frac{(b^2 - 4ac)}{8c} > \frac{\gamma(d_1 d_2 - \gamma(d_1 - d_2)^2)}{2d_2\beta^2 M^2} = m_1 > 0.$$

Ce qui donne

$$I \leq - \int_{\Omega} [m_1|\nabla u|^2 + m_2|\nabla v|^2] (M - u)^{-\gamma-2} e^{\beta v} dx < 0.$$

Utilisons l'inégalité $\gamma > \beta M$ et le fait que principe $M - u \leq M$, pour obtenir

$$J \leq -(\gamma - \beta M) \cdot M^{-(\gamma+1)} \int_{\Omega} f(u, v) \cdot e^{\beta v} dx.$$

Posons $C = (\gamma - \beta M) \cdot M^{-(\gamma+1)}$ qui est une constante non négative. Finalement, on a

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} \leq - \int_{\Omega} [m_1 |\nabla u|^2 + m_2 |\nabla v|^2] (M - u)^{-\gamma-1} e^{\beta v} dx - C \int_{\Omega} f(u, v) \cdot e^{\beta v} dx \leq 0.$$

Ce qui termine la preuve. ■

4.3. Discussion et résultats

En fait, nous avons établi que $\mathbf{L}(t) \leq k$ pour une certaine constante k . Par conséquent

$$(M - u)^{-\gamma} e^{\beta v} \in \mathbf{L}^{\infty}([0, T^*[, \mathbf{L}^1(\Omega)).$$

Comme $(M - u)^{-\gamma} \geq M^{-\gamma}$ Il vient que

$$e^{\beta v} \in \mathbf{L}^{\infty}([0, T^*[, \mathbf{L}^1(\Omega)). \quad (4.4)$$

D'après (cf. Smoller [16]), Il est évident que la région \mathbf{E} est invariante pour le système (\mathbf{S}_2) . Ceci assure la stabilité pour que la solution reste non négative quelque soit le temps. Comme la réaction f est continue sur \mathbb{R}_+^2 et par le principe du maximum, i.e $0 < u < M$, Il s'en suit que pour tout $r \in [0, M]$ on peut choisir $\alpha \in \mathbb{R}^+$ pour obtenir, d'après (4.1),

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \left[\frac{\log(1 + f(r, s))}{s} \right] < \alpha < \alpha^*.$$

Alors, il existe $\gamma \in \mathbb{R}^+$ telle que $f(r, s) \leq \gamma e^{\alpha s}$ pour tout $s \geq 0$ et $r \in [0, M]$. D'après l'inégalité $\alpha < \alpha^*$, on obtient

$$\frac{n}{2} \alpha < \frac{4d_1 d_2}{\|u_0\|_{\infty} (d_1 - d_2)^2}.$$

Choisissons $p \in \mathbb{N}_*^+$ tel que $p > \frac{n}{2}$ soit suffisamment proche de $\frac{n}{2}$ tel que

$$p\alpha < \frac{4d_1d_2}{\|u_0\|_\infty (d_1 - d_2)^2}.$$

Posons $\beta = p\alpha$ pour obtenir

$$\beta \|u_0\|_\infty < \frac{4d_1d_2}{(d_1 - d_2)^2}.$$

D'après (4.2) et comme $\beta = p\alpha$ et $f(u, v) \leq \gamma e^{\alpha v}$, nous déduisons que :

La p -norme $\|f(u, v)\|_p$ est uniformément estimée sur $[0, T^*[$ pour $p > \frac{n}{2}$.

D'après Henry D. (Voir cf. [6]), on vient de démontrer le résultat suivant :

Théorème 4.3.1 Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ est une fonction continûment différentiable non négative telle que $f(0, s) = 0$ pour tout $s \geq 0$ qui satisfait à la condition (4.1) alors toutes les solutions de (S_2) avec les conditions initiales dans la région \mathbf{E} , sont globales en temps et uniformément bornées dans $[0, +\infty[\times \Omega$.

Appendices

5.1. Apendice 1 : Opérateurs Linéaires compacts

Soient E et F deux espaces de Banach de dimension quelconque. Un opérateur $T : E \rightarrow F$, i.e $T \in \mathbf{L}(E, F)$, est dit **linéaire** si

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ et } u, v \in E.$$

Un opérateur $T : E \rightarrow F$ dit **borné** si $\|T\| := \sup\{\|Tu\|_F : \|u\|_E \leq 1\} < \infty$. Il est facile de démontrer qu'un opérateur borné est continu. L'opérateur T est dit **fermé** si $(u_k)_k$ qui converge vers u dans E et $(T(u_k))$ converge vers v alors $T(u) = v$.

Théorème 5.1.1 (Graphe fermé). *Si $T : E \rightarrow F$ est un opérateur linéaire fermé alors T est borné.*

Proposition 5.1.1. *Tout sous-espace vectoriel de dimension finie X de E est un fermé de $(E, \|\cdot\|_E)$.*

Preuve. Comme X est de dimension finie, ses fermés bornés sont compacts. Si $(x_n)_n$ est une suite de X qui converge dans E , $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell_E \in E$, elle est bornée dans $(E, \|\cdot\|_E)$ et donc dans $(E, \|\cdot\|_E)$. On peut donc ex-

traire une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge dans X , $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \ell_X \in X$ et ce pour toute suite de X ayant une limite ℓ_E dans E . Donc X est fermé. ■

- Un opérateur $T : E \rightarrow F$ est dit **compact** si et seulement si $T(B_E(0, 1))$ est relativement compact où $B_E(0, 1) = \{x \in E : \|x\|_E \leq 1\}$, la boule fermée de centre 0 et de rayon 1. Ce qui veut dire : Pour toute suite bornée $(u_k)_{k=1}^\infty \in E$, la suite $(T(u_k))_{k=1}^\infty$ est précompacte dans F i.e il existe une sous-suite $(u_{k_j})_{j=1}^\infty$ telle que la suite $(T(u_{k_j}))_{j=1}^\infty$ converge dans F .

Notons par $\mathcal{K}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F . Le résultat suivant dit que :

la boule unité fermée d'un espace vectoriel normé n'est jamais compact en dimension infinie.

Théorème 5.1.2 (RIEZ). Soit E un espace vectoriel normé. La boule unité $B_E(0, 1)$ est compact si et seulement si E est de dimension finie.

Preuve. La proposition précédente nous donne que **1) \implies 2)**. Dans l'autre sens, posons $B = B_E(0, 1)$. La famille $(B(x, 1/2))$ donne un recouvrement fini d'ouverts de B . Comme B est compact, il existe $x_1, \dots, x_n \in B$ tels que $B \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, 1/2)$. On pose X l'espace vectoriel engendré par les vecteurs x_i . Il est de dimension finie donc c'est un fermé de E . De plus

$$B \subset X + \frac{1}{2}B \subset h + \frac{1}{2} \left(h + \frac{1}{2}B \right) = X + \frac{1}{2^2}B$$

et par récurrence $B \subset X + \frac{1}{2^n}B$ pour $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit si $x \in B$ on peut trouver $x_n \in X$ tel que $d(x, x_n) = \|x - x_n\| \leq \frac{1}{2^n}$. On a donc $d(x, X) = 0$ ce qui entraîne $x \in \overline{X}$ et, puisque X est fermé, $x \in X$. Dans ce cas E tout entier est inclus dans X qui est de dimension finie. ■

Un opérateur linéaire $T : E \rightarrow \mathbb{R}$ est dit **forme linéaire**. L'espace E^* des formes linéaires sur E est dit **espace dual de E** . Pour $u \in E$ et $u^* \in E^*$, on pose $\langle u^*, u \rangle = u^*(u) \in \mathbb{R}$. Le symbole $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est dit crochet de dualité entre E et E^* . L'espace E^* sera muni de la norme

$$\|u^*\| := \sup\{\langle u^*, u \rangle : \|u\| \leq 1\}. \quad \blacksquare$$

Théorème 5.1.3 (Alternative de Fredholm). Soient $T \in \mathcal{K}(E)$, alors

- 1) $\text{Ker}(\text{Id}_E - T)$ est de dimension finie.
- 2) $\text{Im}(\text{Id}_E - T)$ est fermé et $\text{Im}(\text{Id}_E - T) = \text{Ker}(\text{Id}_E - T^*)^\perp$.
- 3) $\text{Ker}(\text{Id}_E - T) = \{0\} \iff \text{Im}(\text{Id}_E - T) = E$.
- 4) $\text{Ker}(\text{Id}_E - T) = \text{Ker}(\text{Id}_E - T^*)$.

Comme interprétation à cette alternative on obtient, pour la solution de l'équation $u - Tu = f$, ou bien :

1. Pour tout f on a une solution unique c'est l'alternative 3).
2. L'équation homogène $u - Tu = 0$ admet n solutions indépendantes et on peut résoudre l'équations qu'avec n conditions d'orthogonalité sur f i.e $f \in \text{ker}(\text{Id}_E - T^*)^\perp$.

Soit T un opérateur de l'espace vectoriel normé E i.e $T \in \mathbf{L}(E)$:

- La résolvante de T est l'ensemble

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid (T - \lambda \text{Id}_E) \text{ est bijection de } E \text{ dans } E\}.$$

- Le spectre de T , noté, $\sigma(T)$ est défini par

$$\sigma(T) = \mathbb{R} \setminus \rho(T).$$

- On dit que λ est **valeur propre** de T si et seulement si $\ker(T - \lambda \text{Id}_E) \neq 0$. On note que l'ensemble des valeurs propre de T est, le plus souvent, inclu strictement dans $\sigma(T)$ sauf pour les opérateurs compacts privé de 0.

Théorème 5.1.4 (Schauder, point fixe). *Si A est un fermé, borné et convexe d'un espace vectoriel normé E et $T : E \rightarrow E$ est un opérateur compact continu tel que $T(A) \subseteq A$, alors il existe un point $x \in A$ tel que $T(x) = x$.*

Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire (\cdot, \cdot) . L'espace H^* peut-être identifié canoniquement avec H . Plus précisément :

Théorème 5.1.5 (Représentation de Riez). *Pour tout u^* il existe un unique $u \in H$ tel que $\langle u^*, v \rangle = \langle u, v \rangle$ pour tout $v \in H$. L'application $u^* \rightarrow u$ est un isomorphisme linéaire de H^* dans H .*

L'opérateur **adjoint** T^* de l'opérateur linéaire borné $T : H \rightarrow H$ est

défini par

$$(Tu, v) = (u, T^*v), \quad \forall u, v \in H.$$

L'opérateur T est **symétrique** si $T = T^*$ i.e $(Tu, v) = (u, Tv)$, $\forall u, v \in H$.

5.2. Appendice 2 : Inégalités fondamentales

Dans le corps du texte nous faisons appel aux inégalités fondamentales de : Young, Holder, Poincaré. Nous donnerons ci-joint des rappels succincts de ces notions ainsi que de brèves démonstrations.

Lemme 5.2.1. (Inégalité de Cauchy). Soient a et $b \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, alors

$$ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 \quad \text{et} \quad ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon}b^2.$$

Preuve. La première est vérifiée puisque $\frac{1}{2}(a-b)^2 = \frac{1}{2}a^2 - ab + \frac{1}{2}b^2 \geq 0$,

la seconde résulte de $\frac{1}{2} \left(a\sqrt{2\varepsilon} - \frac{b}{\sqrt{2\varepsilon}} \right)^2 = \varepsilon a^2 - ab + \frac{1}{4\varepsilon}b^2 \geq 0$. ■

Lemme 5.2.2. (Inégalité de Young) Pour $1 < p, q < \infty$ tels que

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $a, b > 0$, on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Preuve. La fonction $f(x) = \exp(x)$ est convexe i.e $f(ax + by) = af(x) +$

$bf(y)$ pour $a, b \in \mathbb{R}$. Ainsi, l'on a

$$\begin{aligned} ab &= \exp(\ln a + \ln b) = \exp\left(\frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q\right) \\ &= \frac{1}{p} \exp(\ln a^p) + \frac{1}{q} \exp(\ln b^q) \\ &= \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lemme 5.2.3. (Inégalité de Holder) Supposons que $1 < p, q < \infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient f et g deux fonctions mesurables sur \mathbb{R}^n telles

que $\|f\|_p = \left(\int_U |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$ et $\|g\|_q = \left(\int_U |g(x)|^q dx\right)^{1/q}$, alors

$$\int_U |fg(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Preuve. Par homogénéité, supposons que $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. En utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$\int_U |fg(x)| dx \leq \int_U \left(\frac{1}{p} |f(x)|^p + \frac{1}{q} |g(x)|^q\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \|f\|_p \|g\|_q. \quad \blacksquare$$

Lemme 5.2.4. (Inégalité de Minkowski) Supposons que $1 < p < \infty$ et $f, g \in L^p(U)$, alors

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

§5.3. Appendice 3 : Formules de Green

Preuve. En effet,

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int_{\Omega} |f + g|^p dx \leq \int_{\Omega} |f + g|^{p-1} (|f| + |g|) dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f + g|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left[\left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega} |g|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\ &= \|f + g\|_p^{p-1} (\|f\|_p + \|g\|_p). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

5.3. Appendice 3 : Formules de Green

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , $k \in \{1, 2, \dots\}$.

On dit que la frontière $\partial\Omega$ est C^k si pour tout $x_0 \in \partial\Omega$ il existe $r > 0$ et une fonction de classe C^k : $\Psi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, tels que

$$\Omega \cap B(x_0, r) = \{x \in B(x_0, r) : x_n > \Psi(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

Supposons que $\partial\Omega$ est C^1 et soit $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ le vecteur unitaire normal extérieure à $\partial\Omega$. Soit $u \in C^1(\bar{\Omega})$, on définit la **dérivée normale** de u par

$$\frac{\partial u}{\partial \mu} := \mu \cdot \nabla u$$

Formule de Green-Gauss : Soit $u \in C^1(\bar{\Omega})$, alors

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \int_{\partial\Omega} u \mu_i dS, \quad i = 1, \dots, n$$

Formules de Green : Soient $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$, alors

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mu} dS \quad (\text{i})$$

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, dx = - \int_{\Omega} u \Delta v + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \mu} u dS \quad (\text{ii})$$

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) \, dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \mu} - v \frac{\partial u}{\partial \mu} dS. \quad (\text{iii})$$

5.4. Appendice 4 : Formes bilinéaires et quadratiques

Soient E un espace vectoriel et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

On appelle **forme bilinéaire** sur E toute application $B : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ qui vérifie

- Pour tout $y \in E$, l'application $B_y : x \rightarrow B(x, y)$ est une forme linéaire sur E ;
- Pour tout $x \in E$, l'application $B_x : y \rightarrow B(x, y)$ est une forme linéaire sur E .

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E . Considérons $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ deux vecteurs de E , alors

$$B(x, y) = B \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) = \sum_{i,j=1}^n B(e_i, e_j) x_i y_j.$$

De sorte que la forme bilinéaire B est déterminée de façon unique par la

matrice

$$M_{\mathcal{B}} = (B(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$$

En considérant x et y comme des colonnes X et Y , alors

$$B(x, y) = {}^t X M_{\mathcal{B}} Y.$$

La forme bilinéaire B sur E est dite **symétrique** si, pour tous éléments $x, y \in E$, on a $B(x, y) = B(y, x)$. On montre qu'une bilinéaire est symétrique si et seulement si sa matrice associée est symétrique.

Soit \mathbb{H} un espace vectoriel normé pour la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$, on note \mathbb{H}^* son dual topologique et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le crochet de dualité entre \mathbb{H} et \mathbb{H}^* .

On dit que la forme bilinéaire $B : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{K}$ est bornée s'il existe une constante $k > 0$ telle que

$$|B(u, v)| \leq k \|u\|_{\mathbb{H}} \|v\|_{\mathbb{H}}, \quad u, v \in \mathbb{H}.$$

On appelle **forme quadratique** sur E toute application $Q : E \rightarrow \mathbb{K}$ telle qu'il existe une forme bilinéaire B vérifiant $Q(x) = B(x, x)$ pour tout x dans E . Ainsi, avec les notations précédentes, on a

$$Q(x) = \sum_{i, j=1}^n B(e_i, e_j) x_i x_j.$$

Les formes quadratique sont donc les fonctions polynomiales homogènes de degré 2 : Elles vérifient, pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, l'égalité $Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)$.

Théorème 5.4.1 *Si Q est une forme quadratique, il existe une unique forme bilinéaire symétrique B vérifiant $B(x, x) = Q(x)$. Elle est donnée par la formule de polarisation*

$$B(x, y) = \frac{1}{2} [Q(x + y) - Q(x) - Q(y)].$$

On l'appelle forme bilinéaire symétrique associée à Q .

Références

1. Alikakos N. D., 1979. L^p -bounds for solutions of reaction diffusion equations. *Comm. Partial Differential Equations*, **4**: 827-868.
2. Amann H., 1984. *Existence and regularity for semilinear parabolic evolution equations*. *Annali Scuola Normale Superiore-Pisa*, **9**: 593-676.
3. Badraoui S., 2002. *Existence of global solutions for systems of reaction-diffusion equations on unbounded domains*. *Elect. J. of Diff. Eq.*, **74**: 1-10.
4. Conway E., Hoff D., Smoller J., 1978. *Large time behavior of non-linear reaction diffusion equations*. *SIAM J. Appl. Math.*, no. 1, **35**: 1-16.
5. Fisher R. A., 1937. *The advance of advantageous genes*. *Ann. of Eugenics*, 355-369.
6. Henry D., 1981. *Geometry theory of semilinear parabolic equations*. *Lect. Notes in Math.*. Springer-Verlag, New York, 840.
7. Haraux A., and Youkana A., 1988. *On a result of K. Masuda concerning Reaction-Diffusion Equations*. *Tôhoku Math. J.*, **40**: 159-163.
8. Hollis S., Martin R. H., and Pierre M., 1987. *Global existence and boundedness in reaction-diffusion systems*. *SIAM J. Math. Anal.* **18**: 744-761.
9. Kirane M., and Haraux A., 1983. *Estimation C^1 pour des problèmes paraboliques semi-linéaires*. *Annal. Fac. des Sc. Toulouse*, **5**: 265-280.

10. Kouachi S., and Youkana A., 2001. *Global existence for a class of reaction-diffusion systems*. Bull. of Polish Academy of Sciences, no 3, 49: 303-308.
11. Masuda K., 1983. *On Global existence and Asymptotic behavior of solutions of reaction-diffusion equations*. Hokkaido Math. J., 12: 360-370.
12. Rothe F., 1984. *Global Solutions of Reaction-Diffusion Systems*. Lect. Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin, 1072.
13. Pazy A., 1983. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York.
14. Plecháč P., and Švarák V., 2001. *On self-similar singular solutions of the complex Ginzburg-Landau equation*. Comm. Pure Appl. Math, no. 10, 54: 1215-1242.
15. Saoudi K., 2002. Mémoire de Magistère : *Existence globale et comportement asymptotique des solutions d'un système de réaction-diffusion*. Centre Universitaire de Tébessa.
16. Smoller J., 1983. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. Springer-Verlag, Berlin.
17. Yahi M., and Saoudi K, 2007. *Asymptotic Behavior for Solution of Reaction-Diffusion Systems*. Journal of Mathematics and Statics, no. 3 : 88-92.