

510.001

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 45-Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des
Sciences de la Matière

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
MASTER Académique en Mathématiques

Option : Equations aux Dérivées Partielles

Par :

MAAICHIA Hayat et SILINI Hayet

Intitulé

Opérateurs auto-adjoints à résolvante compacte
et principe de Min-Max

Dirigé par : Mr. BOUSSETILA Nadjib

Devant le jury

Président
Rapporteur
Examineur 1
Examineur 2

A. Berhail
N. Boussetila
A. Benrabah
N. Sellami

Univ. Guelma
Univ. Guelma
Univ. Guelma
Univ. Guelma

Session Juin 2011

Mémoire de MASTER

**Opérateurs auto-adjoints à résolvante compacte
et principe de Min-Max**

Option : Equations aux Dérivées Partielles

Par : MAAICHA Hayat et SILINI Hayet

Dirigé par : Mr. BOUSSETILA Nadjib

Année Universitaire 2011

Table des matières

Table des matières

§ Introduction	2
1 Rappels et notations	1
1.1 Éléments de théorie spectrale	2
1.1.1 Opérateurs linéaires	2
1.1.2 Opérateurs bornés	2
1.1.3 Opérateurs non-bornés	3
1.1.4 Spectre et résolvante d'un opérateur non borné	4
1.2 Théorie de Riesz-Fredholm	5
1.2.1 Convergence faible dans les espaces de Hilbert	6
1.2.2 Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts	6
1.2.3 Décomposition spectrale d'un opérateur auto-adjoint compact	7
2 Caractérisation du spectre d'un opérateur auto-adjoint	8
2.1 Spectre essentiel et spectre discret	10
2.2 Propriétés des opérateurs non borné auto-adjoint à résolvante compacte	10
2.3 Perturbation compacte	13
2.4 Le principe du min-max	17
2.4.1 La formule du Min-Max	19
2.4.2 Comparaison des valeurs propres de deux opérateurs	23
3 Valeurs propres d'un problème elliptique	23
3.1 Rappels	24
3.1.1 Notations et espaces de Sobolev	24
3.1.2 Inégalité de Poincaré	24
3.2 Opérateur elliptique	25
3.2.1 Existence et unicité de la solution variationnelle d'un problème elliptique	25
3.2.2 Problème variationnel abstrait	25
3.3 Valeurs propres de Laplacien	26
3.4 Problèmes aux valeurs propres généralisés	28
3.5 Existence des fonctions propres positives d'un problème de Sturm-Liouville	29
3.6 Existence des valeurs propres principales	31
3.6.1 Conclusion	32
3.7 Comparaison des v.p du problème de Dirichlet et de Neumann	37
	38

TABLE DES MATIÈRES

3

Bibliographie

39

§ Introduction

Le présent travail s'inscrit dans le cadre de l'analyse spectrale des opérateurs elliptiques dans le cadre hilbertien, où les ingrédients mathématiques utilisés sont les espaces de Sobolev et la théorie de Riesz-Fredholm des opérateurs auto-adjoints à résolvante compacte. On commence notre investigation par une présentation sur la théorie spectrale des opérateurs différentiels, en mettant l'accent sur des critères pour qu'un opérateur soit auto-adjoint à résolvante compacte, ensuite on donne une démonstration du principe de Min-Max pour les opérateurs auto-adjoints bornés intérieurement, ce qui nous permet de caractériser les valeurs propres situées en dessous de la borne inférieure du spectre essentiel. Comme application, on étudie les valeurs propres du Laplacien dans le cas de conditions de Dirichlet et de Neumann. On considère aussi une classe de problèmes aux valeurs propres généralisés. Via la théorie de Weinberger et sous des conditions de compacité, on montre des théorèmes de diagonalisation, et on donne des caractérisations qualitatives des valeurs propres de certains problèmes elliptiques.

Mots clés : *Opérateurs auto-adjoints, résolvante compacte, spectre essentiel, théorème de Weyl, principe du Min-Max.*

Chapitre 1



Rappels et notations



L'objectif de ce chapitre est de rappeler quelques notions et résultats qui seront utilisés tout au long de ce travail. Pour plus de détails, des références à la littérature seront systématiquement données.

On se place dans un cadre hilbertien $(H_1 \longrightarrow H_2)$, où H_i est un espace de Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni de la norme $\|\cdot\|_i$ et le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_i$, $(i = 1, 2)$.

1.1 Éléments de théorie spectrale



Références

- H. Brezis ; Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications, Masson (1993).
- R. Dautray, J.-L. Lions ; Analyse mathématique et calcul numérique. Tome 5 (spectre des opérateurs), Edt. Masson, (1988). [§3. page 136-180].
- E.B. Davies ; Linear Operator and their Spectra, Cambridge University Press (2007).
- I. Gohberg, S. Goldberg and M.A. Kaashoek ; Basic Classes of Linear Operators, Birkhäuser (2003).
- D. Huet ; Décomposition Spectrale et Opérateurs, PUF (1976).
- P. Lévy-Bruhl ; Introduction à la Théorie Spectrale : Cours et Exercices Corrigés, Dunod (2003).

1.1.1 Opérateurs linéaires

Un opérateur linéaire est une application $A : D(A) \subseteq H_1 \longrightarrow H_2$ linéaire, où $D(A)$ est le domaine de définition de l'application linéaire A , qui est un sous-espace vectoriel de H_1 , que l'on suppose en général dense dans H_1 . L'opérateur $A : D(A) \subseteq H_1 \longrightarrow H_2$ est dit borné si la quantité

$$\|A\| = \sup \{ \|Au\|_{H_2}, u \in D(A), \|u\|_{H_1} = 1 \}$$

est finie. Dans ce cas A est une application linéaire continue sur $D(A)$, et lorsque $D(A)$ est dense dans H_1 , A s'étend de manière unique à un opérateur borné sur H_1 .

- Tout opérateur A est complètement défini par son graphe $G(A)$ qui est un sous-espace vectoriel de $H_1 \times H_2$ défini par $G(A) = \{(v, Av), v \in D(A)\}$.

Pour tout opérateur linéaire $A : D(A) \subseteq H_1 \longrightarrow H_2$, on note par :

$$N(A) = \{h \in D(A), Ah = 0\} \text{ (noyau de } A),$$

$$R(A) = \{h_2 = Ah_1, h_1 \in D(A)\} \text{ (image de } A).$$

1.1.2 Opérateurs bornés

On note $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ (resp. $\mathcal{L}(H_1)$) l'espace vectoriel des *opérateurs linéaires continus* de H_1 dans H_2 (resp. des *endomorphismes continus* de H_1) muni de la topologie de la convergence uniforme :

$$B \in \mathcal{L}(H_1, H_2), \quad \|B\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)} = \sup_{u \in H_1 \setminus \{0\}} \frac{\|Bu\|_2}{\|u\|_1}.$$

Définition 1.1.1. On dit qu'une application linéaire continue $S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est *inversible* ssi il existe une application $S' \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ telle que

$$S' \circ S = I_{H_1}, \quad S \circ S' = I_{H_2}.$$

L'application S' si elle existe est unique. On notera $S' = S^{-1}$ et

$$\text{Inv}(H_1, H_2) := \{S \in \mathcal{L}(H_1, H_2), S \text{ inversible}\}.$$

Théorème 1.1.1. [Théorème des isomorphismes de Banach]

Toute bijection linéaire continue $S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est inversible.

Définition 1.1.2. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. On appelle *ensemble résolvant* de A , l'ensemble

$$\rho(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C}; A_\lambda = (\lambda I - A) \text{ est inversible } (\iff \text{bijectif}) \right\}.$$

Son complémentaire dans le plan complexe s'appelle le *spectre* de A et sera noté

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

On appelle *rayon spectral* (noté $\text{spr}(A)$) la borne supérieure du spectre en module, i.e.,

$$\text{spr}(A) := \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

► Le spectre d'un opérateur borné est un compact non vide.

Le spectre ponctuel de A (noté $\sigma_p(A)$) est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que A_λ soit non injectif :

$$\lambda \in \sigma_p(A) \iff N(A_\lambda) \neq \{0\}.$$

Un élément $\lambda \in \sigma_p(A)$ est dit valeur propre de A , il lui correspond un $0 \neq h \in H$ tel que $Ah = \lambda h$ que l'on appelle vecteur propre correspondant à λ .

Définition et Proposition 1.1.1. Soit $S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors il existe un unique opérateur $S^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$, appelé adjoint de S , qui vérifie la relation suivante :

$$(Sh_1, h_2)_2 = (h_1, S^*h_2)_1, \quad \forall h_1 \in H_1, \forall h_2 \in H_2.$$

De plus, on a les propriétés suivantes :

$$\|S\| = \|S^*\|, \quad S^{**} = (S^*)^* = S.$$

Si S est bijectif ($\implies$ inversible), alors S^* l'est aussi, et $(S^*)^{-1} = (S^{-1})^*$.

Définition 1.1.3. Soit H un espace de Hilbert. On dit que $A \in \mathcal{L}(H)$ est *auto-adjoint* si $A = A^*$.

$$A = A^* \iff (Ax, y) = (x, Ay), \quad \forall x, y \in H.$$

1.1.3 Opérateurs non-bornés

Définition 1.1.4. On dit qu'un opérateur A est fermée si son graphe $G(A)$ est fermé dans $H_1 \times H_2$, i.e., pour toute suite $(u_n) \subset D(A)$ telle que $u_n \longrightarrow u$ dans H_1 et $Au_n \longrightarrow v$ dans H_2 , alors $u \in D(A)$ et $v = Au$.

► L'opérateur fermé A peut être considéré comme un opérateur borné de son domaine de définition $D(A)$ muni de la norme du graphe $(\|u\|_G := \|u\|_{H_1} + \|Au\|_{H_2})$ dans H_1 .

Théorème 1.1.2. [Théorème du graphe fermé] Si l'opérateur fermé A est défini sur tout l'espace H_1 , alors A est borné

$$(A \text{ fermé et } D(A) = H_1 \implies A \text{ borné}).$$

Définition et Proposition 1.1.2. Soit $A : D(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur non-borné à domaine dense. On peut définir l'opérateur non-borné A^* adjoint de l'opérateur A , comme suit :

$$A^* : D(A^*) \subset H_2 \longrightarrow H_1$$

$$D(A^*) = \{v \in H_2 : \exists c > 0 \text{ tel que } |\langle v, Au \rangle| \leq c \|u\|_{H_1}, \quad \forall u \in D(A)\}.$$

Dans ce cas la fonctionnelle $u \longmapsto g(u) = \langle v, Au \rangle$ elle se prolonge de façon unique en une fonctionnelle linéaire $f : H_1 \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $|f(u)| \leq c \|u\|_{H_1}$, $\forall u \in H_1$. Par suite $f \in H_1' \simeq H_1$. On a par conséquent la relation fondamentale qui lie A et A^*

$$\langle v, Au \rangle_{H_2} = \langle A^*v, u \rangle_{H_1}, \quad \forall u \in D(A), \forall v \in D(A^*).$$

► Si $A : D(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ est un opérateur non-borné à domaine dense, alors A^* est fermé.

Définition 1.1.5. On dit qu'un opérateur $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ est symétrique lorsque

$$\forall u, v \in D(A), \quad (Au, v) = (u, Av)$$

Définition 1.1.6. L'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ est dit auto-adjoint si $A = A^*$, i.e.,

$$D(A) = D(A^*) \text{ et } (v, Au) = (Av, u), \quad \forall u, v \in D(A).$$

Théorème 1.1.3. [Caractérisation des opérateurs à image fermé]

Soit $A : D(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{D(A)} = H_1$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $R(A)$ est fermé, (ii) $R(A^*)$ est fermé, (iii) $R(A) = N(A^*)^\perp$, (iv) $R(A^*) = N(A)^\perp$.

Le résultat qui suit est une caractérisation utile des opérateurs surjectifs.

Théorème 1.1.4. Soit $A : D(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{D(A)} = H_1$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) A est surjectif, i.e., $R(A) = H_2$,
(b) il existe une constante $k > 0$ telle que

$$\|v\| \leq k \|A^*v\|, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A^*),$$

- (c) $N(A^*) = \{0\}$ et $R(A^*)$ est fermé.

Corollaire 1.1.1. Soit $A : D(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{D(A)} = H_2$. L'opérateur A admet un inverse borné A^{-1} sur H_2 si et seulement s'il existe deux constantes m_1 et m_2 telles que

$$\|u\| \leq m_1 \|Au\|, \quad \forall u \in D(A),$$

$$\|v\| \leq m_2 \|A^*v\|, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A^*).$$

1.1.4 Spectre et résolvante d'un opérateur non borné

Soit $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur non borné que l'on suppose fermé^{1 2 3} et à domaine dense.

Définition 1.1.7. On appelle *ensemble résolvant* de A , l'ensemble

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A_\lambda = \lambda I - A \text{ est bijectif}\}.$$

Son complémentaire dans le plan complexe s'appelle le *spectre* de A et sera noté $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

- On note que si $\lambda \in \rho(A)$, l'inverse $R(\lambda; A) = A_\lambda^{-1}$ est défini sur tout l'espace et est fermé. Par le théorème du graphe fermé, il est borné, i.e., $A_\lambda^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Cet opérateur est appelé la *résolvante* de A .

1. L'hypothèse de fermeture est nécessaire pour faire une théorie spectrale raisonnable.
2. Si A n'est pas fermé, alors $\rho(A) = \emptyset$.
3. Si $A = A^*$, alors $\sigma(A) \neq \emptyset$ et $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

• L'ensemble résolvant $\rho(A)$ est un ouvert du plan complexe et l'application $\rho(A) \ni \lambda \mapsto R(\lambda; A)$ est analytique sur chaque composante connexe de $\rho(A)$. La résolvante satisfait à l'équation fonctionnelle suivante dite *identité de la résolvante* :

$$R(\lambda_1; A) - R(\lambda_2; A) = (\lambda_2 - \lambda_1)R(\lambda_1; A)R(\lambda_2; A).$$

• Le spectre de A est donc un fermé de $\mathbb{C}$, et si de plus l'opérateur A est borné, alors $\sigma(A)$ est un compact non vide.

Examinons à présent de plus près la structure du spectre.

• Le premier sous-ensemble important du spectre est le *spectre ponctuel* :

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A_\lambda \text{ n'est pas injectif}\}.$$

Un élément λ de $\sigma_p(A)$ est dit *valeur propre* de A , il lui correspond un $0 \neq \vartheta \in D(A)$ tel que $A_\lambda \vartheta = 0$, que l'on appelle *vecteur propre* (fonction propre quand H est un espace de fonctions) correspondant à λ .

- Si $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_p(A)$ donc A_λ est injectif mais non surjectif. Deux cas se présentent :
 - Si $R(A_\lambda)$ n'est pas dense, on dit alors que $\lambda \in \sigma_r(A)$ le spectre *résiduel* de A .
 - Si $R(A_\lambda)$ est dense, on dit alors que $\lambda \in \sigma_c(A)$ le spectre *continu* de A .

1.2 Théorie de Riesz-Fredholm

1.2.1 Convergence faible dans les espaces de Hilbert

Définition 1.2.1. Soient (x_n) une suite d'éléments d'un espace de Hilbert H et x un élément de H . On dit que la suite (x_n) converge faiblement vers x si

$$\forall h \in H, \lim_{n \rightarrow \infty} \langle h, x_n \rangle = \langle h, x \rangle.$$

On utilise alors la notation $x_n \rightharpoonup x$ ou $x_n \xrightarrow{w} x$.

Dans le cas d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, on dit que la suite $(x_n) \subset E$ converge faiblement vers $x \in E$ si

$$\forall l \in E', l(x_n) = \langle x_n, l \rangle_{E \times E'} \longrightarrow l(x) = \langle x, l \rangle_{E \times E'}.$$

Unicité de la limite faible. Si (x_n) converge faiblement vers deux limites x et $\tilde{x}$, alors $x = \tilde{x}$.

Théorème 1.2.1. Soient (x_n) et (y_n) deux suites d'un espace de Hilbert H et x, y deux éléments de H . On a alors

$$x_n \rightharpoonup x \implies (x_n) \text{ est bornée et } \|x\| \leq \liminf \|x_n\|. \quad (1)$$

$$x_n \rightharpoonup x \implies x_n \rightarrow x. \quad (2)$$

$$(x_n \rightarrow x \text{ et } \|x_n\| \rightarrow \|x\|) \implies x_n \rightarrow x. \quad (3)$$

$$(x_n \rightarrow x \text{ et } y_n \rightarrow y) \implies \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle. \quad (4)$$

Remarque 1.2.1. En dimension finie, la convergence faible est équivalente à la convergence forte. D'après le théorème précédent, la convergence forte entraîne toujours la convergence faible. Réciproquement, supposons que l'espace hilbertien H soit de dimension finie et donnons nous une base orthonormale $(e_1, \dots, e_p)$ de H , et une suite faiblement convergente (x_n) . Soit x sa limite faible. On a

$$\|x_n - x\|^2 = \sum_{j=1}^p |\langle x_n - x, e_j \rangle|^2.$$

Par convergence faible, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n - x, e_j \rangle = 0$ pour tout $j = 1, \dots, p$. Donc, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$.

Proposition 1.2.1. Soit C un ensemble convexe de l'espace de Hilbert H . Alors les deux énoncés suivants sont équivalents :

1. l'ensemble C est fermé;
2. pour toute suite $(x_n) \subset C$ faiblement convergente vers x , la limite faible x est dans C .

Théorème 1.2.2. (de compacité faible). De toute suite bornée d'un espace de Hilbert, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.

On exprime ce résultat en disant que "la boule unité fermée de H est faiblement compacte".

Remarque 1.2.2. Dans un espace de Banach réflexif, toute suite bornée admet des sous-suites faiblement convergentes.

1.2.2 Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts

Définition 1.2.2. On dit qu'un opérateur $K \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est *compact* si $K(B_{H_1}(0, 1))$ est relativement compact pour la topologie forte. On désigne par $\mathcal{K}(H_1, H_2)$ l'ensemble des opérateurs compacts de H_1 dans H_2 et on pose $\mathcal{K}(H_1, H_1) = \mathcal{K}(H_1)$.

► La compacité d'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est caractérisée comme suit :

$$T \in \mathcal{K}(H_1, H_2) \iff \forall (x_n) \subset H_1, x_n \rightharpoonup 0 \text{ (faiblement)} \implies Tx_n \rightarrow 0 \text{ (fortement)}.$$

► Soient E, F et G trois espaces de Banach. Si $S_1 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $S_2 \in \mathcal{K}(F, G)$ (resp. $S_1 \in \mathcal{K}(E, F)$ et $S_2 \in \mathcal{L}(F, G)$), alors $S_2 S_1 \in \mathcal{K}(E, G)$.

► [Théorème de Schauder] Si K est compact, alors K^* est compact. Et réciproquement.

Théorème 1.2.3. [Alternative de Fredholm : V1] Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. On a

1. $N(T) = \overline{R(T^*)}^\perp, \quad N(T^*) = \overline{R(T)}^\perp.$
2. $N(T)^\perp = \overline{R(T^*)}, \quad N(T^*)^\perp = \overline{R(T)}.$

Théorème 1.2.4. [Alternative de Fredholm : V2] Soient $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact et $\lambda \neq 0$. On a

1. $N(T - \lambda I)$ est de dimension finie et $\dim(N(T - \lambda I)) = \dim(N(T^* - \bar{\lambda} I))$.
2. $R(T - \lambda I)$ est sous-espace fermé dans H .
3. $R(T - \lambda I) = \overline{R(T - \lambda I)} = N(T^* - \bar{\lambda} I)^\perp.$
4. $H = R(T - \lambda I) \iff N(T^* - \bar{\lambda} I) = \{0\} \iff N(T - \lambda I) = \{0\} \iff R(T^* - \bar{\lambda} I) = H.$

1.2.3 Décomposition spectrale d'un opérateur auto-adjoint compact

Théorème 1.2.5. Soit $K \in \mathcal{K}(H)$ avec $\dim(H) = \infty$. Alors on a :

- (a) $0 \in \sigma(K)$,
- (b) $\sigma(K) \setminus \{0\} = \sigma_p(K) \setminus \{0\}$,
- (c) l'une des situations suivantes :
 - ou bien $\sigma(K) = \{0\}$,
 - ou bien $\sigma(K) \setminus \{0\}$ est fini,
 - ou bien $\sigma(K) \setminus \{0\}$ est une suite qui tend vers 0.

Théorème 1.2.6. [Théorème spectral et résolution de l'identité] On suppose que H est séparable. Soit $T \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors H admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de T :

$$\forall x \in H, \quad x = x_0 + \sum_{k \geq 1} (x, e_k) e_k, \quad x_0 \in \mathcal{N}(A), \quad Tx = \sum_{k \geq 1} \lambda_k e_k.$$

• Décomposition spectrale d'un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte

Définition 1.2.3. Soient H un espace de Hilbert complexe, et $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur non borné à domaine dense. On dit que A est à résolvante compacte si

1. $\rho(A) \neq \emptyset$;
2. pour tout $\lambda \in \rho(A)$, $R(\lambda; A)$ est compacte.

Remarque 1.2.3. Si $\lambda_0 \in \rho(A)$ tel que $R(\lambda_0; A)$ est compacte, alors $R(\lambda; A)$ est compacte pour tout $\lambda \in \rho(A)$. En effet, d'après l'identité de la résolvante

$$R(\lambda_0; A) - R(\lambda; A) = (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0; A)R(\lambda; A), \quad \forall \lambda_0, \lambda \in \rho(A),$$

on a

$$R(\lambda; A) = R(\lambda_0; A) - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0; A)R(\lambda; A),$$

et comme $R(\lambda_0; A)$ est compacte et $R(\lambda; A)$ est borné, alors $R(\lambda_0; A)R(\lambda; A)$ est compacte. D'où $R(\lambda; A)$ est compact (somme de deux opérateurs compacts).

Théorème 1.2.7. Soient H un espace de Hilbert complexe, et $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur non borné à domaine dense. On suppose que $\rho(A) \neq \emptyset$, alors A est à résolvante compacte ssi l'injection de $H^1 := (D(A), \|\cdot\|_G)$ est compacte dans H .

Preuve. Soit $(u_n) \subset D(A)$ une suite bornée pour la norme du graphe, i.e., $\exists M > 0$ telle que $\|Au_n\| + \|u_n\| \leq M$. Si $\lambda \in \rho(A)$, alors on peut écrire

$$\|(A - \lambda I)u_n\| \leq |\lambda| \|u_n\| + \|Au_n\| \leq \max(M, |\lambda|) = C_\lambda.$$

Il s'en suit que $((A - \lambda I)u_n)$ est bornée dans H . Comme $R(\lambda; A)$ est compacte, alors la suite $(u_n) = (R(\lambda; A)(A - \lambda I)u_n)$ admet une sous-suite convergente dans H , ce qui signifie que H^1 s'injecte dans H de façon compacte.

Inversement, pour tout $\lambda \in \rho(A)$, on peut écrire

$$H \xrightarrow{R(\lambda;A)} D(A) \xrightarrow{j} H, \quad R(\lambda;A) = j \circ R(\lambda;A),$$

où j est l'injection canonique de $D(A)$ dans H . Comme cette injection est compacte (par hypothèse), alors $R(\lambda;A)$ est compacte en tant que composée d'une application compacte et un opérateur borné.

Théorème 1.2.8. Soit $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur auto-adjoint. Alors

- (1) $\sigma_r(A) = \emptyset$,
- (2) $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \subseteq \mathbb{R}$,
- (3) $A \geq \theta \iff \sigma(A) \subset [\theta, \infty[$.

Dans la suite, on suppose que H est un espace de Hilbert séparable.

Théorème 1.2.9. Soit $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur auto-adjoint et positif. On suppose que $0 \in \rho(A)$ et que A^{-1} compact. Alors A est diagonalisable, i.e., il existe une base hilbertienne dans H , $(e_m)_{m \geq 1} \subset D(A)$, et une suite de réels $(\lambda_m)_{m \geq 1}$ telles que

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \longrightarrow +\infty, \quad Ae_m = \lambda_m e_m, \quad m = 1, 2, \dots$$

• Décomposition en valeurs singulières d'un opérateur compact (SVD)

Définition 1.2.4. Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert séparables et $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$. On appelle valeur singulière de l'opérateur T , le réel positif $s = \sqrt{\lambda}$, où λ est une valeur propre de l'opérateur $K = T^*T : H_1 \longrightarrow H_1$.

Théorème 1.2.10. [Décomposition en valeurs singulières (SVD)] Soit $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ et Pr_0 la projection orthogonale sur $\mathbf{N}(T)$. Alors il existe une suite de valeurs singulières (s_n) et deux systèmes orthonormés $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \subset H_1$, $\{\psi_1, \psi_2, \dots\} \subset H_2$ tels que :

1. (s_n) est décroissante, $s_n \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty$.
2. $T\varphi_k = s_k\psi_k, \quad T^*\psi_k = s_k\varphi_k$.
3. $\forall h \in H_1, \quad h = \sum_{k \geq 1} (h, \varphi_k) \varphi_k + \text{Pr}_0 h$.
4. $\forall h \in H_1, \quad Th = \sum_{k \geq 1} s_k (h, \varphi_k) \psi_k$.
5. $\forall \tilde{h} \in H_2, \quad T^* \tilde{h} = \sum_{k \geq 1} s_k (h, \psi_k) \varphi_k$.

Le système $\{(s_k; \varphi_k, \psi_k)\}_{k \geq 1}$ est appelé le système singulier de T . La famille (φ_n) est une base hilbertienne de $\mathbf{N}(T)^\perp$, la famille (ψ_n) est une base hilbertienne de $\overline{\mathbf{R}(T)}$.

Remarque 1.2.4. Le calcul des valeurs singulières et l'étude de leur vitesse de décroissance peut donc fournir des renseignements sur le critère de résolubilité de certains problèmes de la forme $Ku = v$, $K \in \mathcal{K}(H)$.



Caractérisation du spectre d'un opérateur auto-adjoint

2.1 Spectre essentiel et spectre discret

Définition 2.1.1. Soit $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur non borné. Une suite u_n d'éléments de H est dite **singulière** pour A en $\lambda \in \mathbb{R}$ si elle vérifie les propriétés suivantes :

- i) $\|u_n\| = 1$.
- ii) u_n n'a pas de sous-suite convergente.
- iii) $(A - \lambda I)u_n \rightarrow 0$.

On appelle **spectre essentiel** de l'opérateur auto-adjoint A l'ensemble des réels λ tels qu'il existe une suite singulière pour A en λ , on le note $\sigma_{ess}(A)$.

Le résultat suivant connu sous le nom de **critère de Weyl** présente un grand intérêt pratique pour la détermination du spectre d'un opérateur auto-adjoint.

Proposition 2.1.1. Soit A un opérateur auto-adjoint, on définit l'ensemble $\tilde{\sigma}$ comme suit :

$$\tilde{\sigma} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists u_n \in D(A), \|u_n\| = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \|(A - \lambda I)u_n\| = 0\}.$$

Alors le spectre de A est donné par :

$$\sigma = \tilde{\sigma}.$$

Pour démontrer ce résultat, on introduit le lemme suivant.

Lemme 2.1.1. A^{-1} existe et borné $\Leftrightarrow \exists c > 0$ telle que $\|Au\| \geq c\|u\|$, $\forall u \in D(A)$.

Démontrons maintenant la proposition 2.1.1.

Preuve. Montrons l'inclusion $\tilde{\sigma} \subset \sigma$. Si $\lambda \notin \sigma$ alors $(A - \lambda I)^{-1}$ existe et bornée, et d'après le lemme 2.1.1, on a :

$$\|(A - \lambda I)u\| \geq c\|u\|, \forall u \in D(A) \Leftrightarrow \|u\| \leq \frac{1}{c}\|(A - \lambda I)u\|, \forall u \in D(A).$$

Donc il n'existe pas aucune suite u_n telle que $\|u_n\| = 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(A - \lambda I)u_n\| = 0$.

Ce qui prouve que $\lambda \notin \tilde{\sigma}$.

Pour l'inclusion inverse $\sigma \subset \tilde{\sigma}$, soit $\lambda \notin \tilde{\sigma}$ alors il existe $c \geq 0$ telle que :

$$\|u\| \leq c\|(A - \lambda I)u\|. \quad (2.1.1)$$

Si (2.1.1) est vraie, il résulte alors :

1) $A - \lambda I$ est injectif,

2) $\overline{R(A - \lambda I)} = N(\overbrace{A - \lambda I}^*)^\perp = N(A - \lambda I)^\perp = \{0\}^\perp = H$.

Notre but est démontrer que l'opérateur A_λ est bijectif. Comme il est injectif, il nous reste alors qu'à montrer qu'il est surjectif, ce qu'il revient d'après 2) de montrer que $R(A - \lambda I)$ est fermée. Soit $v_n \in R(A - \lambda I)$ alors il existe $u_n \in D(A)$ telle que : $v_n = (A - \lambda I)u_n$, et d'après (2.1.1), on a :

$$\|u_m - u_n\| \leq c\|(A - \lambda I)(u_m - u_n)\| \rightarrow 0 \text{ lorsque } n, m \rightarrow \infty,$$

car $(A - \lambda I)u_n = v_n$ est convergente. D'où (u_n) est une suite de Cauchy dans H (espace complet), donc elle est convergente dans H . Soit alors $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$. Comme $A - \lambda I$ est fermé alors on a : $(A - \lambda I)u_n = v_n \rightarrow v$ ce qui implique que $u \in D(A)$, et $v = (A - \lambda I)u \in R(A - \lambda I)$, d'où le résultat. $\square$

Il est clair par le **critère de Weyl** que le spectre essentiel est contenu dans le spectre. La proposition suivante décrit son complémentaire.

Proposition 2.1.2. Soit A auto-adjoint et $\lambda \in \sigma \setminus \sigma_{ess}$.
 λ est alors isolée dans le spectre et c'est une valeur propre de multiplicité finie.

Preuve.

i) Soit $\lambda \in \sigma$, on suppose que λ est non isolée
i.e : $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n, \lambda_n \in \sigma, \lambda_n$ non stationnaire.

Par application du critère de Weyl, on trouve une suite u_n de vecteurs unitaires ($\|u_n\| = 1$) telle que :

$$\forall n, \|(A - \lambda_n I)u_n\| < \frac{|\lambda - \lambda_n|}{n}. \quad (2.1.2)$$

Supposons que (u_n) ait une sous-suite convergente de limite u alors :

$$\|u\| = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \|(A - \lambda_n I)u_n\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (A - \lambda_n I)u_n = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)u = 0.$$

Il en résulte que $\langle (A - \lambda I)u_n, u \rangle = \langle u_n, (A - \lambda I)u \rangle$, et donc on a :

$$\begin{aligned} \langle u_n, (A - (\lambda + \lambda_n - \lambda_n)I)u \rangle &= 0 \Leftrightarrow \langle u_n, (A - \lambda_n I)u \rangle - \langle u_n, (\lambda - \lambda_n)u \rangle = 0 \Leftrightarrow \\ \langle u_n, (A - \lambda_n I)u \rangle &= (\lambda - \lambda_n) \langle u_n, u \rangle \Leftrightarrow \langle (A - \lambda_n I)u_n, u \rangle = (\lambda - \lambda_n) \langle u_n, u \rangle. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz et (2.1.2), on a :

$$|\langle (A - \lambda_n I)u_n, u \rangle| = |\lambda - \lambda_n| |\langle u_n, u \rangle| \leq \|A - \lambda_n I\| \|u_n\| \|u\| \leq \frac{|\lambda - \lambda_n|}{n}.$$

Enfin, on obtient :

$$|\langle u_n, u \rangle| \leq \frac{1}{n}.$$

Ce qui entraîne que :

$$|\langle u_n, u \rangle| \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Mais évaluée sur la sous-suite de la limite u , la suite du produits scalaires a pour $\lim \|u\|^2 = 1$ d'où une contradiction. Donc il n'existe pas une sous-suite $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ telle que (u_{n_k}) est convergente. Il en résulte donc que $\lambda \in \sigma_{ess}$.

ii) Si $\lambda \in \sigma \setminus \sigma_{ess}$ alors par le critère de Weyl, il existe une suite u_n de vecteurs unitaires telle que $(A - \lambda_n I)u_n \rightarrow 0$, et on peut supposer que cette suite est convergente. Sa limite u est unitaire et vérifie que $(A - \lambda I)u = 0$ (car A est fermé). On a donc prouver que λ est une valeur propre.

iii) Si l'espace propre était de **dimension infinie**, une suite (u_n) orthonormale de cet espace est singulière en λ . En effet, $\|u_n\| = 1$ et $(A - \lambda_n I)u_n = 0$, où les u_n sont les vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_n .

D'après le point (i) il n'existe pas une sous-suite convergente de u_n , donc $\lambda \in \sigma_{ess}$. Il en résulte que, si $\lambda \in \sigma \setminus \sigma_{ess}$ alors la dimension de l'espace propre (multiplicité de λ) est finie.

□

Corollaire 2.1.1. Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur auto-adjoint, alors le spectre essentiel $\sigma_{ess}(A)$ est fermé.

• On appelle spectre *discret* de A et on note $\sigma_{disc}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A de **multiplcité finie et isolées** dans le spectre. D'après ce qui précède on a :

$$\sigma_{ess}(A) \cup \sigma_{disc}(A) = \sigma(A) \quad \text{et} \quad \sigma_{ess}(A) \cap \sigma_{disc}(A) = \emptyset.$$

2.2 Propriétés des opérateurs non borné auto-adjoint à résolvante compacte

Théorème 2.2.1. Soit A un opérateur symétrique tel que $R(I + A) = H$ alors : le domaine de A est dense et A est auto-adjoint.

Preuve. Montrons tous d'abord que $D(A)$ est dense dans H . Cela équivaut à prouver que $D(A)^\perp = \{0\}$. Par hypothèse $R(I + A) = H$, alors il existe $z \in D(A)$ telle que : $Az + z = w$, on a alors :

$$\langle w, u \rangle = \langle Az + z, u \rangle = \langle Az, u \rangle + \langle z, u \rangle = \langle z, Au \rangle + \langle z, u \rangle = \langle z, Au + u \rangle.$$

Soit $w \in D(A)^\perp$:

$$\langle w, u \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle z, Au + u \rangle = 0, \forall u \in D(A).$$

Il en résulte que :

$$z \in \text{Im}(I + A)^\perp = H^\perp = \{0\} \text{ donc } z = w = 0 \Rightarrow D(A)^\perp = \{0\} \Rightarrow \overline{D(A)} = H.$$

Pour que A est auto-adjoint, il suffit de démontrer l'inclusion $D(A^*) \subset D(A)$.

Soit $v \in D(A^*)$, posons $w = A^*v + v \in H$.

L'hypothèse $R(I + A) = H$ implique qu'il existe $z \in D(A)$ tel que : $(A + I)z = Az + z = w$.
Donc $\forall u \in D(A)$, on a :

$$\langle v, Au + u \rangle = \langle v, Au \rangle + \langle v, u \rangle = \langle A^*v, u \rangle + \langle v, u \rangle = \langle Az + z, u \rangle = \langle z, Au + u \rangle,$$

ce qui implique que

$$\langle v, Au + u \rangle - \langle z, Au + u \rangle = \langle v - z, Au + u \rangle = 0, \forall u \in D(A),$$

d'où

$$(v - z) \perp R(I + A) = H \Rightarrow v - z = 0 \Rightarrow v = z \in D(A),$$

Ainsi $D(A^*) \subset D(A)$. □

Définition 2.2.1. Un opérateur auto-adjoint A est dit inférieurement borné (ou minoré) s'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que : $\langle Ax, x \rangle \geq \gamma \|x\|^2, \forall x \in D(A)$.

Définition 2.2.2. Soit A un opérateur auto-adjoint, on définit l'ensemble :

$$\theta(A) := \{ \langle Au, u \rangle, u \in D(A), \|u\| = 1 \} \subset \mathbb{R}.$$

$\theta(A)$ est appelé l'image numérique de l'opérateur A .

En générale $\theta(A)$ est convexe (théorème de Toeplitz), et si A est auto-adjoint alors $\theta(A)$ est un intervalle.

Théorème 2.2.2. Soit A un opérateur auto-adjoint, $\theta(A)$ l'image numérique de A . On a :

$$\sigma(A) \subset \overline{\theta(A)}.$$

Preuve. Soit $\lambda \in \sigma(A)$, par le critère de Weyl, il existe une suite de vecteurs u_n , de norme 1 dans le domaine de A , telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(A - \lambda I)u_n\| = 0.$$

Ce qui entraîne que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle (A - \lambda I)u_n, u_n \rangle = 0, \quad (2.2.1)$$

Car $\langle (A - \lambda I)u_n, u_n \rangle = \langle Au_n, u_n \rangle - \lambda$. Donc

$$|\langle Au_n, u_n \rangle - \lambda| = |\langle (A - \lambda I)u_n, u_n \rangle| \leq \|Au_n - \lambda u_n\| \rightarrow 0,$$

(d'après Cauchy-Schwartz), d'où (2.2.1) $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n \rangle = \lambda$. Ce qui signifie que : $\lambda \in \overline{\theta(A)}$. $\square$

Théorème 2.2.3. Si l'opérateur A est auto-adjoint et $\langle Au, u \rangle \geq \gamma, \|u\| = 1, u \in D(A), \gamma \in \mathbb{R}$, alors $\sigma(A) \subset [\gamma, \infty[$.

Preuve. Comme $\langle Au, u \rangle \geq \gamma$, alors $\theta(A) \subset [\gamma, \infty[$ et par conséquent :

$$\overline{\theta(A)} \subset [\gamma, \infty[.$$

et d'après le théorème 2.2.2 on a :

$$\sigma(A) \subset [\gamma, \infty[.$$

Théorème 2.2.4. Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur auto-adjoint inférieurement borné et à résolvante compacte et $0 \in \rho(A)$. Alors A est diagonalisable, i.e., il existe une base hilbertienne dans H , $(e_n)_{n \geq 1} \subset D(A)$ et une suite réelle $(\lambda_m)_{m \geq 1}$ telles que :

$$\begin{cases} |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| \dots \leq |\lambda_m| \rightarrow \infty. \\ Ae_m = \lambda_m e_m, m = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Preuve. On a

$$\begin{cases} 0 \in \rho(A) \\ A \text{ est à résolvante compacte} \\ A \text{ est auto-adjoint} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^{-1} \text{ existe et borné;} \\ A^{-1} \text{ est compact;} \\ A^{-1} \text{ est auto-adjoint.} \end{cases}$$

D'après le théorème de diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts, il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 1}$ de H constituée de vecteurs propres de $A^{-1} : A^{-1}e_n = \mu_n e_n$.

Si μ_n est une valeur propre de A^{-1} (auto-adjoint compact) alors : $|\mu_{n+1}| \leq |\mu_n|$ et $|\mu_n| \rightarrow 0$. De plus, $A^{-1}e_n = \mu_n e_n$, ou encore $e_n = A\mu_n e_n$, donc $Ae_n = \frac{1}{\mu_n} e_n$ c.à.d : $\frac{1}{\mu_n}$ est une valeur propre de A et on a :

$$\frac{1}{\mu_n} \rightarrow \infty \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Si on note $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n}$ on obtient :

$$|\lambda_{n+1}| \geq |\lambda_n|, |\lambda_n| \rightarrow \infty \text{ et } Ax = \sum_{k \geq 1} \lambda_k x_k e_k.$$

□

Pour la facilité des raisonnements, on introduit la version équivalente de la définition du spectre essentiel.

Définition 2.2.3. Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur auto-adjoint, on appelle spectre essentiel de A et on note $\sigma_{ess}(A)$ le sous ensemble du spectre définit ainsi : $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$ ssi il existe une suite $u_n \in D(A)$ telle que $\|u_n\|_H = 1, \|Au_n - \lambda u_n\|_H \rightarrow 0$ et $u_n \rightarrow 0$ dans H faiblement.

La suite (u_n) est appelée une suite singulière.

Lemme 2.2.1. Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur non borné. Alors si $\lambda \in \rho(A)$:

$$\xi \in \sigma((A - \lambda I)^{-1}) \Leftrightarrow (\lambda + \frac{1}{\xi}) \in \sigma(A).$$

Preuve. En effet, on vérifie aisément que :

$$(A - \lambda I)^{-1} - \xi I = -\xi(A - \lambda I)^{-1}(A - (\lambda + \frac{1}{\xi})I).$$

□

Corollaire 2.2.1. Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur auto-adjoint et soit $\lambda \in \rho(A) \cap \mathbb{R}$, alors :

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\| = \frac{1}{\text{dist}(\lambda, \sigma(A))}.$$

Preuve. L'opérateur $(A - \lambda I)^{-1}$ est borné et auto-adjoint, on a donc :

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\| = \sup\{|\xi|, \xi \in \sigma((A - \lambda I)^{-1})\}. \quad (2.2.2)$$

(car si A est borné et auto-adjoint, alors : $\|A\| = \{\sup |\mu|, \mu \in \sigma(A)\}$).

D'après le lemme 2.2.1 on a :

$$\xi \in \sigma((A - \lambda I)^{-1}) \Leftrightarrow (\lambda + \frac{1}{\xi}) \in \sigma(A), \lambda \in \rho(A).$$

On pose : $\beta = (\lambda + \frac{1}{\xi}) \in \sigma(A)$, on a alors $\frac{1}{\xi} = \beta - \lambda \Rightarrow |\xi| = \frac{1}{|\beta - \lambda|}, \beta \in \sigma(A)$.
donc :

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\| = \sup\left\{\frac{1}{|\beta - \lambda|}, \beta \in \sigma(A)\right\} = \frac{1}{\inf\{|\beta - \lambda|, \beta \in \sigma(A)\}} = \frac{1}{\text{dist}(\lambda, \sigma(A))}.$$

□

Lemme 2.2.2. Soit $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur auto-adjoint, alors :

$$\inf \sigma(A) = \inf \theta(A) = \inf_{u \in H, u \neq 0} \frac{\langle Au, u \rangle_H}{\|u\|_H^2}.$$

$$\sup \sigma(A) = \sup \theta(A) = \sup_{u \in H, u \neq 0} \frac{\langle Au, u \rangle_H}{\|u\|_H^2}.$$

Preuve. D'après le théorème 2.2.2 on a $\sigma(A) \subset [\inf \theta(A), \sup \theta(A)]$. Il est clair que

$$\inf \sigma \geq (A) \inf \theta(A).$$

$$\sup \sigma \leq (A) \sup \theta(A).$$

Posons $\alpha = \inf \sigma(A)$, alors pour tout $\beta \geq 0, (\alpha - \beta) \in \rho(A)$, et d'après le corollaire 2.2.1 :

$$\|(A - (\alpha - \beta)I)^{-1}\| = \frac{1}{\beta}.$$

Par conséquent, pour tout $u \in D(A)$:

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\beta} \|Au - (\alpha - \beta)u\|_H,$$

d'où :

$$\beta^2 \|u\|^2 \leq \|Au\|_H^2 - 2(\alpha - \beta)\langle Au, u \rangle_H + (\alpha - \beta)^2 \|u\|_H^2$$

et par suite on a :

$$\frac{\|Au\|_H^2}{\beta} \geq \frac{2\alpha}{\beta} \langle Au, u \rangle - 2\langle Au, u \rangle - \frac{\alpha^2}{\beta} \|u\|^2 + 2\alpha \|u\|^2.$$

En faisant tendre β vers ∞ , on voit que :

$$\langle Au, u \rangle \geq \alpha \|u\|^2, \quad \forall u \in D(A).$$

d'où la première égalité, on démontre de même la seconde.

□

2.3 Perturbation compacte

Il n'est pas toujours facile de déterminer directement le spectre essentiel d'un opérateur auto-adjoint A . Souvent, on essaie de montrer que A peut s'écrire sous la forme $A = B + K$; où B est un opérateur auto-adjoint dont on sait calculer le spectre essentiel par des techniques simples et K est un opérateur symétrique admettant certaines propriétés de compacité.

On dit que A et B diffèrent d'une perturbation compacte. Généralement, on sait alors montrer que :

$$\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B).$$

Théorème 2.3.1. Soit $B : D(B) \subset H \rightarrow H$ un opérateur auto-adjoint et soit $K : H \rightarrow H$ un opérateur compact auto-adjoint, alors l'opérateur $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ définit par :

$$\begin{cases} D(A) = D(B) \\ \forall u \in D(A) : Au = Bu + Ku \end{cases}$$

est auto-adjoint et $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$.

Preuve.

1) Montrons tout d'abord que A est auto-adjoint. Soit $v \in D(A^*)$, cela signifie que :

$$\exists w \in H, \forall u \in D(A) : \langle Au, v \rangle_H = \langle u, w \rangle_H.$$

Ceci s'écrit aussi :

$$\forall u \in D(A) : \langle Bu + Ku, v \rangle_H = \langle u, w \rangle_H,$$

ou encore :

$$\forall u \in D(B) : \langle Bu, v \rangle_H = \langle u, w - Kv \rangle_H.$$

Il résulte de cette dernière égalité que $v \in D(B)$ et que $Bv = w - Kv$ (car B est auto-adjoint). Autrement dit $\forall v \in D(A), A^*v = Av = w$.

2) Soit $\lambda \in \sigma_{ess}(B)$, il existe donc une suite singulière (u_n) telle que :

$$\begin{cases} u_n \in D(B) & \|u_n\|_H = 1, \\ u_n \rightharpoonup 0 & \text{dans } H, \\ Bu_n - \lambda u_n \rightarrow 0 & \text{dans } H. \end{cases}$$

Comme K est compact, il existe une sous-suite encore notée (u_n) telle que $Ku_n \rightarrow v$ dans H . Mais comme u_n tend faiblement vers 0, on a pour tout $w \in H$:

$$\langle Ku_n, w \rangle_H = \langle u_n, Kw \rangle_H \rightarrow 0,$$

d'où $v = 0$. Il en résulte que $Au_n - \lambda u_n = Bu_n - \lambda u_n + Ku_n \rightarrow 0$, donc u_n est également une suite singulière pour A et $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$. On a ainsi montré que $\sigma_{ess}(B) \subset \sigma_{ess}(A)$.

On montre de même l'inclusion réciproque. □

Théorème 2.3.2. Soit $B : D(B) \subset H \rightarrow H$ un opérateur auto-adjoint borné inférieurement, i.e. ;

$$\exists \gamma > 0 \text{ telle que } \langle Bu, u \rangle_H + \gamma \|u\|_H^2 \geq 0, \quad \forall u \in D(B).$$

Soit K un opérateur symétrique tel que K soit B -compact.

Alors l'opérateur $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ définit par :

$$\begin{cases} D(A) = D(B) \\ \forall u \in D(A) : Au = Bu + Ku \end{cases}$$

est auto-adjoint et $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$.

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin du :

Lemme 2.3.1. Soit $B : D(B) \subset H \rightarrow H$ un opérateur auto-adjoint et $K : D(K) \subset H \rightarrow H$ un opérateur B -compact. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c_\varepsilon > 0$ telle que :

$$\forall u \in D(B) \quad \|Ku\|_H \leq c_\varepsilon \|u\|_H + \varepsilon \|Bu\|_H.$$

Preuve. Soit ε fixé. Supposons par l'absurde qu'il existe une suite $(u_n) \subset D(B)$ telle que :

$$\|ku_n\|_H = 1 \text{ et } n\|u_n\|_H + \|Bu_n\|_H < \|ku_n\|_H = 1.$$

Il en résulte que u_n tend vers 0 dans H . De plus, comme $\|Bu_n\|_H$ est borné, et K est B -compact, la suite ku_n admet une sous-suite convergente que nous noterons encore $Ku_n : Ku_n \rightarrow v$ dans H . Mais pour tout $w \in D(K)$:

$$\langle Ku_n, w \rangle = \langle u_n, Kw \rangle \rightarrow 0,$$

donc $v = 0$.

Par ailleurs $\|v\|_H = \lim \|ku_n\|_H = 1$, d'où la contradiction.

Démontrons maintenant le théorème 2.3.2. □

Preuve.

1) Montrons tout d'abord que A est auto-adjoint.

Soit $\lambda > \gamma$ alors, par hypothèse $B + \lambda I$ est inversible. On a donc :

$$A + \lambda I = (B + \lambda I) + K = (I + K(B + \lambda I)^{-1})(B + \lambda I).$$

Nous allons montrer que $A + \lambda I$ est inversible pour λ assez grand. Pour cela, il suffit de vérifier que, pour λ assez grand, $K(B + \lambda I)^{-1}$ est un opérateur borné de norme strictement inférieure à 1. Or on a, d'après le lemme 2.3.1 :

$$\|K(B + \lambda I)^{-1}u\|_H \leq c_\varepsilon \|(B + \lambda I)^{-1}u\|_H + \varepsilon \|B(B + \lambda I)^{-1}u\|_H \quad \forall u \in H.$$

et, d'après le corollaire 2.2.1 :

$$\|(B + \lambda I)^{-1}u\|_H \leq \frac{1}{\lambda - \gamma} \|u\|_H,$$

$$\|B(B + \lambda I)^{-1}u\|_H \leq \frac{2\lambda - \gamma}{\lambda - \gamma} \|u\|_H.$$

En choisissant $\varepsilon < \frac{1}{2}$ puis λ assez grand, on obtient le résultat cherché.

On conclut en appliquant le théorème 2.2.1.

- 2) Pour montrer que $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$, on suit exactement la même démarche qu'au théorème précédent.

□

2.4 Le principe du min-max

Le principe de Min-Max s'applique aux opérateurs auto-adjoint bornés inférieurement ; il permet de caractériser par diverses formules dites "de Min-max" les valeurs propres situées en dessous de la borne inférieure du spectre essentiel.

Soit A un opérateur auto-adjoint non borné de H et $D(A)$ son domaine. On suppose que A est borné inférieurement, i.e. ;

$$\exists c > 0 \text{ tel que } (Au, u)_H + c\|u\|_H^2 \geq 0, \forall u \in D(A).$$

On rappelle que, d'après les résultats de la section précédente, tout point du spectre de A qui n'appartient pas au spectre essentiel est une valeur propre isolée de multiplicité finie.

On va s'intéresser au spectre de l'opérateur $(A, D(A)) : Au = \lambda u$. On définit le quotient de Rayleigh suivant :

$$\mathcal{R}_A(u) = \frac{(Au, u)_H}{\|u\|_H^2}, \forall u \in D(A), u \neq 0.$$

On pose alors, pour tout entier $m, m \geq 1$:

$$\mu_m(A) = \inf_{V_m \in \mathcal{V}_m(D(A))} \sup_{u \in V_m, u \neq 0} \mathcal{R}_A(u), \quad (2.4.1)$$

où $\mathcal{V}_m(X)$ désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels de X de dimension m .

On pose également pour tout entier $m > 1$:

$$\tilde{\mu}_m(A) = \sup_{v^1, \dots, v^{m-1} \in H} \inf_{[v^1, \dots, v^{m-1}]_{D(A)}^\perp, u \neq 0} \mathcal{R}_A(u), \quad (2.4.2)$$

où on note :

$$[v^1, \dots, v^{m-1}]_{D(A)}^\perp = \{u \in D(A); (u, v^i)_H = 0 \text{ } i = 1, m-1\}.$$

On démontre alors les résultats suivants :

Théorème 2.4.1.

1) L'égalité suivante est satisfaite :

$$\mu_m(A) = \tilde{\mu}_m(A), \text{ pour tout } m > 1.$$

2) **Principe du Min-Max**

Notons $\lambda_e(A)$ la borne inférieure du spectre essentiel de l'opérateur A et $\mathcal{N}(A)$ le nombre de valeurs propres de A strictement inférieure à $\lambda_e(A)$ (comptées avec leurs ordre de multiplicité). Alors :

- $\mu_m(A) < \lambda_e(A)$ si et seulement si $\mathcal{N}(A) \geq m$. Dans ce cas, $\mu_1(A), \mu_2(A) \dots \mu_m(A)$ sont exactement les m premières valeurs propres de l'opérateur A .
- $\mu_m(A) = \lambda_e(A)$ si et seulement si $\mathcal{N}(A) < m$. Dans ce cas, $\mu_n(A) = \lambda_e(A)$ pour tout entier $n \geq m$.

On considère tout d'abord le cas où A est défini positif. Dans le cas contraire, on peut toujours étudier l'opérateur translaté $A_k = A + kI$, où k est choisi de façon que A_k soit défini positif. Pour établir ce théorème, nous allons démontrer deux lemmes préliminaires :

Lemme 2.4.1. Les suites $\mu_m(A)$ et $\tilde{\mu}_m(A)$ sont croissantes, de plus on a :

$$\tilde{\mu}_m(A) \leq \mu_m(A) \quad \forall m > 1. \quad (2.4.3)$$

Preuve. Pour établir (2.4.3), considérons un sous-espace V_m de $D(A)$ de dimension m et $(m-1)$ éléments de H notés $v^1, \dots, v^{m-1}$. Alors il existe un élément $\tilde{v}$ de V_m orthogonal à tous les v^i . En effet, on cherche $\tilde{v}$, avec $\tilde{v} = \sum_{i=1}^m c_i v_i$ et la condition $\tilde{v} \in [v^1, \dots, v^{m-1}]^\perp$ impose $m-1$ conditions linéaires aux coefficients $c_1, c_2, \dots, c_m$. Par conséquent :

$$\sup_{u \in V_m, u \neq 0} \mathcal{R}_A(u) \geq \inf_{u \in [v^1, \dots, v^{m-1}]^\perp_{D(A)}, u \neq 0} \mathcal{R}_A(u).$$

Ceci étant vrai pour tout V_m et pour tous $v^1, \dots, v^m$, l'inégalité (2.4.3) s'en déduit. $\square$

Lemme 2.4.2. On a :

$$\mu_m(A) \leq \lambda_e(A) \quad \forall m \geq 1. \quad (2.4.4)$$

Preuve. Pour établir (2.4.4), on remarque que $\lambda_e(A)$ appartient au spectre essentiel de A . Par conséquent, il existe une suite singulière (u_p) telle que :

$$\begin{cases} u_p \in D(A) \text{ et } \|u_p\|_H = 1, \text{ pour tout } p; \\ u_p \rightharpoonup 0 \text{ faiblement dans } H; \\ Au_p - \lambda_e(A)u_p \rightarrow 0 \text{ fortement dans } H. \end{cases}$$

Le sous-espace de H engendré par cette suite est de dimension infinie.

En effet, si tel n'était pas le cas, il existerait une sous-suite convergeant fortement dans H vers 0.

Or ceci est impossible car $\|u_p\|_H = 1$, pour tout p . On peut donc trouver, pour tout ε strictement positif, m entiers $p_1, p_2, \dots, p_m$ pour lesquels :

- 1) L'espace V_m engendré par $u_{p_1}, u_{p_2}, \dots, u_{p_m}$ est de dimension m .
- 2) $\|Au_{p_i} - \lambda_e(A)u_{p_i}\|_H \leq \varepsilon$ pour $i = 1 \dots m$.
- 3) $|\langle u_{p_i}, u_{p_j} \rangle|_H \leq \varepsilon$ pour $i \neq j$.

Soit $u = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{p_i}$ un élément de V_m . On vérifie que :

$$\begin{cases} \|u\|_H^2 \geq (1 - 2m\varepsilon) \sum_{i=1}^m \alpha_i^2; \\ \langle Au, u \rangle_H \leq (\lambda_e(A) + \varepsilon(1 + 2m + 2m\lambda_e(A))) \sum_{i=1}^m \alpha_i^2. \end{cases}$$

Par conséquent, il existe une constante $K_m(A)$ indépendante de ε telle que, pour tout u élément de V_m :

$$\mathcal{R}_A(u) \leq \lambda_e(A) + K_m(A) \varepsilon.$$

La majoration (2.4.4) s'en déduit . □

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 2.4.1 :

Preuve. $\triangleright$ Le cas $m = 1$.

• Nous démontrons tout d'abord le principe du Min-Max appliqué à $\mu_1(A)$. On a d'après le lemme 2.2.2 :

$$\mu_1 = \inf \sigma(A).$$

d'après (2.4.4), deux cas peuvent se présenter :

i) $\mu_1(A) = \lambda_e(A)$.

ii) $\mu_1(A) < \lambda_e(A)$.

Dans le cas (i), il est clair qu'il n'existe aucune valeur propre de A strictement inférieure à $\lambda_e(A)$ ($\mu_1 = \lambda_e(A) = \inf \sigma(A)$), et on a $\mathcal{N}(A) = 0 < 1$.

Dans le second cas, $\mu_1(A)$ n'appartient pas à $\sigma_{ess}(A)$. C'est donc une valeur propre de l'opérateur A , et on a $\mathcal{N}(A) \geq 1$.

$\triangleright$ Le principe du Min-Max dans le cas $m > 1$.

• Supposons que $\mathcal{N}(A)$ est supérieur ou égal à m .

Soient alors $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ les m premières valeurs propres de l'opérateur A :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m < \lambda_e(A),$$

et $e_1, e_2, \dots, e_m$ des vecteurs propres associés tels que : $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ $i, j = 1, m$.

En choisissant $V_m = [e_1, e_2, \dots, e_m]$, on a :

$$\langle Au, u \rangle = \left\langle A \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^m \alpha_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 \langle Ae_i, e_i \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 \langle \lambda_i e_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 \lambda_i \leq \lambda_m \sum_{i=1}^m \alpha_i^2.$$

Donc on a :

$$\mu_m(A) \leq \lambda_m < \lambda_e(A). \quad (2.4.5)$$

Par ailleurs, posons $F = [e_1, \dots, e_{m-1}]^\perp$ et soit A_F la restriction de l'opérateur A à l'espace F :

$$A_F : D(A_F) = D(A) \cap F \longrightarrow F.$$

On vérifie que A_F est auto-adjoint. Par conséquent, d'après le lemme 2.2.2, on a :

$$\inf_{u \in F \cap D(A), u \neq 0} \mathcal{R}_A(u) = \inf \sigma(A_F) = \lambda_m,$$

où $\sigma(A_F)$ désigne le spectre de l'opérateur A_F . On a par conséquent :

$$\tilde{\mu}_m(A) = \lambda_m, \quad (2.4.6)$$

de (2.4.3), (2.4.5) et (2.4.6), on déduit finalement :

$$\mu_m(A) = \tilde{\mu}_m(A) = \lambda. \quad (2.4.7)$$

• Supposons maintenant que $\mathcal{N}(A)$ est inférieur ou égal à $(m-1)$.

i) Si $\mathcal{N}(A)$ est nul, on a d'après ce qui précède :

$$\mu_1(A) = \tilde{\mu}_1(A) = \lambda_e(A).$$

d'où

$$\mu_p(A) = \tilde{\mu}_p(A) = \lambda_e(A), \forall p > 1.$$

D'après les lemmes 2.4.1 et 2.4.2 .

ii) Supposons donc que $\mathcal{N}(A)$ est non nul et posons : $G = [e_1, e_2, \dots, e_n]^\perp$, où $n = \mathcal{N}(A)$. On a cette fois :

$$\inf_{u \in G \cap D(A), u \neq 0} \mathcal{R}_A(u) = \inf \sigma(A_G) = \lambda_e(A),$$

où A_G désigne la restriction de A à G . Il résulte que :

$$\tilde{\mu}_{n+1}(A) \geq \lambda_e(A). \quad (2.4.8)$$

De (2.4.3), (2.4.4) et (2.4.8), on déduit dans ce cas :

$$\mu_p(A) = \tilde{\mu}_p(A) = \lambda_e(A) \quad \forall p > n.$$

✓ On se donne deux espaces de Hilbert W et H avec :

$$\begin{cases} W \hookrightarrow H & \hookrightarrow \text{étant compact,} \\ W \text{ dense dans } H. \end{cases}$$

Soit $a(u, v)$, $u, v \in W$ une forme sesquilinéaire coercive, hermitienne et continue sur $W \times W$ définie comme suit :

$$\begin{cases} a(u, v) = (Au, v) \forall u \in D(A) & v \in W, \\ D(A) = \{u \in W, v \mapsto a(u, v) \text{ est continue sur } W \text{ pour la topologie de } H\}. \end{cases}$$

2.4.1 La formule du Min-Max

À partir du principe du Min-Max, on a directement les formules suivantes :

$$\begin{cases} \lambda_m = \min_{V_m \in V_m(D(A))} \max_{u \in V_m, u \neq 0} \frac{a(u, u)}{\|u\|^2}, \\ \lambda_m = \max_{v^1, \dots, v^{m-1} \in H} \min_{[v^1, \dots, v^{m-1}]_{D(A)}^\perp, u \neq 0} \frac{a(u, u)}{\|u\|^2}. \end{cases} \quad (2.4.9)$$

2.4.2 Comparaison des valeurs propres de deux opérateurs

Proposition 2.4.1. Soient $a(u, v)$ et $b(u, v)$ deux formes sesquilinéaires, hermitiennes continues sur $V \times V$ et coercives sur V .

On suppose que :

$$a(u, u) \leq b(u, u) \text{ pour tout } u \in V. \quad (2.4.10)$$

Désignons par $\lambda_n(A)$ (resp. $\lambda_n(B)$) la $n^{\text{ième}}$ valeur propre de l'opérateur A (resp. B) associé à $a(u, v)$ (resp. $b(u, v)$), comptée suivant sa multiplicité. Alors

$$\lambda_n(A) \leq \lambda_n(B) \text{ pour tout } n. \quad (2.4.11)$$

Preuve. Cela résulte immédiatement de la formule (2.4.9) et (2.4.10). □

Corollaire 2.4.1. Soit W un sous-espace fermé de V dense dans H , désignons par :

$\{\lambda_k\}$ la suite des valeurs propres de l'opérateur défini par $(V, H, a(u, v))$;

$\{\mu_k\}$ la suite des valeurs propres de l'opérateur défini par $(W, H, a(u, v))$;

On a alors :

$$\lambda_k \leq \mu_k \text{ pour tout } k. \quad (2.4.12)$$

le corollaire étant immédiat.

Chapitre 3



Valeurs propres d'un problème elliptique

3.1 Rappels

Ce chapitre est consacré à l'étude des valeurs propres d'un problème elliptique modèle. On commence par rappeler quelques résultats préliminaires :

3.1.1 Notations et espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On note par $L^2(\Omega)$ l'espace de Hilbert de fonctions à carrée intégrable sur Ω , et par $H^1(\Omega)$ l'espaces de Sobolev définit par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2, i = 1 \dots n \right\}.$$

L'espaces de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit par :

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \int_{\Omega} u v dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx.$$

L'espace H_0^1 est défini comme étant l'adhérence de $\mathcal{C}_c^\infty$ dans H^1 .

Théorème 3.1.1. Soit Ω un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Alors $H_0^1(\Omega)$ est donné par :

$$H_0^1(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}.$$

3.1.2 Inégalité de Poincaré

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, dans une direction d'espace (ou plus). Alors, il existe une constante $c > 0$, $c = c(\Omega)$, telle que :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} |v|^2 dx \leq c \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx. \quad (3.1.1)$$

Théorème 3.1.2 (théorème de Rellich).

- Soit Ω un ouvert borné, l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compact.
- Si Ω un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$, l'injection $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compact.

Théorème 3.1.3 (théorème de Krein-Rutman). Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint tel que : Si $H \ni f \geq 0, f \neq 0$ alors $Af > 0$, et si $\|A\|$ est une valeur propre, cette valeur propre est simple et associée à un vecteur propre strictement positive. Tous les vecteurs propres strictement positives sont colinéaires à celui-ci. Dans ce cas $-\|A\|$ n'est pas valeur propre de A .

Preuve. voir [1]. □

3.2 Opérateur elliptique

Soient a_{ij} , $i, j = 1 \dots N$ des fonctions bornées définies sur Ω , et satisfaisant les hypothèses d'ellipticité :

$$\exists \alpha > 0, \text{ tel que } \forall \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N, \forall x \in \Omega : \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2, |\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_N^2, \quad (3.2.1)$$

$$\forall x \in \Omega, \forall i, j : a_{ij}(x) = a_{ji}(x).$$

3.2.1 Existence et unicité de la solution variationnelle d'un problème elliptique

Soit $a_0(x)$ une fonction bornée définie sur Ω , on introduit l'opérateur linéaire elliptique L , défini sur $H^1(\Omega)$ par :

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + a_0(x)u,$$

(on considère la dérivation aux sens de distribution). On considère le problème suivant :

$$Lu = f \text{ sur } \Omega, f \in L^2(\Omega). \quad (3.2.2)$$

On cherche u solution du problème variationnel associé à 3.2.2 :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V = H_0^1 \text{ et } v \in H_0^1 \text{ tels que :} \\ \langle Lu, v \rangle = \langle f, v \rangle, \end{cases} \quad (3.2.3)$$

on a :

$$a(u, v) = \langle Lu, v \rangle = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} a_0(x) u(x) v(x) dx.$$

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} a_0(x) |u(x)|^2 dx \\ &\geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \beta \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \\ &\geq \frac{\alpha}{c} \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx + \beta \int_{\Omega} |u|^2 dx \rightarrow u(x) \\ &\geq \min\left(\frac{\alpha}{c}, \beta\right) \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx = \gamma \|u\|_{H_0^1}^2. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que a est coercive sur H_0^1 . D'autre part

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq c_1 \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right| dx + c_2 \int_{\Omega} |u(x)| |v(x)| dx \\ &\leq c_1 \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + c_2 \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\ &\leq c_1 \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + c c_2 \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \\ &\leq K \|\nabla u\|_{H_0^1} \|\nabla v\|_{H_0^1}. \end{aligned}$$

D'où la continuité de a .

Comme a est continue et coercive sur $H_0^1(\Omega)$, d'après le théorème de Lax-Milgram, le problème (3.2.3) admet une unique solution.

3.2.2 Problème variationnel abstrait

Soient $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ deux espaces de Hilbert réels tels que :

$$\begin{cases} V \subset H \text{ avec injection compacte,} \\ V \text{ est dense dans } H. \end{cases}$$

Soit $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire symétrique, continue et coercive sur V , on considère le problème suivant (problème spectrale variationnel) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } u \in V \setminus \{0\} \text{ tels que :} \\ a(u, v) = \lambda \langle u, v \rangle_H, \forall v \in V. \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Définition 3.2.1. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in V \setminus \{0\}$ vérifient (3.2.4), on dit que λ est une valeur propre de la formulation variationnelle (3.2.4), et que u est un vecteur propre associé.

Théorème 3.2.1. *Les valeurs propres de (3.2.4) forment une suite croissante $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ de réels positifs qui tend vers l'infini, et il existe une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres $(u_k)_{k \geq 1}$, i.e. ;*

$$u_k \in V \setminus \{0\} \text{ et } a(u_k, v) = \lambda_k \langle u_k, v \rangle_H, \forall v \in V,$$

de plus $(\frac{u_k}{\sqrt{\lambda_k}})_{k \geq 1}$ est une base hilbertienne de V pour le produit scalaire $a(.,.)$.

Preuve. On va construire un opérateur auto-adjoint compact T , associé à la forme bilinéaire $a(.,.)$. Soit $f \in H(=L^2)$, on considère le problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ telle que :} \\ a(u, v) = \langle f, v \rangle_H \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (3.2.5)$$

D'après Lax-Milgram, le problème (3.2.5) admet une solution unique $u \in V$. On définit l'opérateur $\mathcal{A}$ de H dans V par $\mathcal{A}u = f$, autrement dit $\mathcal{A}$ est l'opérateur qui à $f \in H$ associe la solution $u \in V$ de (3.2.5). L'injection i de V dans H est continue, donc $\|v\|_H \leq c\|v\|_V$ pour tout $v \in V$. En prenant $v = \mathcal{A}f$ comme fonction teste dans (3.2.5), on obtient :

$$a(u, v) = a(u, \mathcal{A}f) = \langle f, \mathcal{A}f \rangle_H,$$

donc :

$$a(v, v) = a(\mathcal{A}f, \mathcal{A}f) = \langle f, \mathcal{A}f \rangle_H \leq \|f\|_H \|\mathcal{A}f\|_H \leq c\|f\|_H \|\mathcal{A}f\|_V,$$

et comme $\mathcal{A}$ est coercive on a :

$$m\|\mathcal{A}f\|_V^2 \leq a(\mathcal{A}f, \mathcal{A}f) \leq c\|f\|_H \|\mathcal{A}f\|_V,$$

on en déduit $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(H, V)$. On pose alors $T = i\mathcal{A} \in \mathcal{L}(H)$ et comme l'injection i de V dans H étant compacte, $T \in \mathcal{K}(H)$. Soient $f, g \in H$, en prenant $v = \mathcal{A}g$ comme fonction teste dans (3.2.5), on obtient :

$$\langle f, Tg \rangle_H = \langle f, \mathcal{A}g \rangle_H = a(\mathcal{A}f, \mathcal{A}g)$$

$$= a(\mathcal{A}g, \mathcal{A}f) = \langle g, \mathcal{A}f \rangle_H = \langle g, Tf \rangle_H,$$

donc T est compact, auto-adjoint et définit positif dans H . d'après le théorème de diagonalisation des opérateurs auto-adjoint compact, il existe une suite décroissante $(\mu_k)_{k \geq 1}$ de réels positifs qui tend vers 0 et il existe une base hilbertienne $(u_k)_{k \geq 1}$ de H formée de vecteurs propres de T , i.e. ;

$$Tu_k = \mu_k u_k, \forall k \geq 1.$$

De plus, $u_k \in V$ puisque $u_k = \mu_k^{-1} Tu_k = \mu_k^{-1} \mathcal{A}u_k \in V$. Le problème (3.2.4) s'écrit encore

$$a(u, v) = \lambda \langle u, v \rangle_H = \lambda a(\mathcal{A}u, v), \quad \forall v \in V.$$

Ce qui équivaut à $a(u - \lambda \mathcal{A}u, v) = 0$ pour tout $v \in V$, donc $u = \lambda \mathcal{A}u = \lambda T u$. Ainsi les valeurs propres de 3.2.4 sont les inverses des valeurs propres de T et les vecteurs propres sont les même. Pour $k \geq 0$, on pose

$$\lambda_k = \frac{1}{\mu_k} \text{ et } v_k = \frac{u_k}{\sqrt{\lambda_k}}.$$

Il reste à vérifier que $(v_k)_{k \geq 1}$ est une base hilbertienne de V pour le produit scalaire $a(.,.)$. Pour $k, j \geq 1$, on a

$$a(v_k, v_j) = \frac{a(u_k, u_j)}{\sqrt{\lambda_k \lambda_j}} = \lambda_k \frac{\langle u_k, u_j \rangle}{\sqrt{\lambda_k \lambda_j}} = \delta_{kj},$$

Car $(u_k)_{k \geq 1}$ est une base hilbertienne de H . En fin on a le résultat en remarquant que l'orthogonal de $(v_k)_{k \geq 1}$ dans V est contenu dans l'orthogonal de $(u_k)_{k \geq 1}$ dans H qui est réduit à $\{0\}$. $\square$

3.3 Valeurs propres de Laplacien

L'exemple type d'opérateur elliptique est laplacien :

$$\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

On va appliquer les résultats précédents pour cet opérateur.

La formulation faible du problème : $-\Delta u = \lambda u$ dans Ω , avec $u = 0$ sur $\partial\Omega$ est la suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que :} \\ \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \lambda \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.3.1)$$

On obtient bien le problème du type (3.2.4) avec $H = L^2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$ et $a(.,.)$ est la forme bilinéaire symétrique définie sur $H_0^1(\Omega)$ par $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$. L'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans L^2 est compacte d'après le théorème de Rillich.

De plus, l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ étant dense dans $L^2(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, on est donc bien dans les conditions du théorème 3.2.1, et on en déduit le résultat suivant :

Corollaire 3.3.1. *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$, alors il existe une suite croissante $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ de réels positifs qui tend vers l'infini, et une base hilbertienne $(u_k)_{k \geq 1}$ de L^2 telle que :*

$$\begin{cases} u_k \in H_0^1(\Omega) \\ -\Delta u_k = \lambda_k u_k \text{ p.p dans } \Omega. \end{cases}$$

Théorème 3.3.1 (théorème de régularité). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, Γ_0 une partie ouverte régulière de classe $\mathcal{C}^\infty$ de son bord, $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_0)$ (resp. $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_0)$), $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \cup \Gamma_0)^1$, et $u \in \mathcal{C}^0(\Omega \cup \Gamma_0)$ (resp. $\mathcal{C}_n^1(\Omega \cup \Gamma_0)^2$, solution de

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ dans } D'(\Omega) \\ u = \varphi \text{ (resp. } \frac{\partial u}{\partial n} = \psi) \text{ sur } \Gamma_0, \end{cases}$$

alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \cup \Gamma_0)$.

Preuve. voir [3]. □

3.4 Problèmes aux valeurs propres généralisés

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ($n=1,2$ ou 3) un ouvert borné de frontière Γ régulière, et g une fonction mesurable à valeurs réelles, bornée $g \in L^\infty(\Omega)$, et change de signe [$g^+ \neq 0, g^- \neq 0$].

• Considérons le problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda g(x)u(x) & x \in \Omega, \\ \gamma u(s) = 0 & s \in \Gamma. \end{cases} \quad (3.4.1)$$

où :

$$\begin{cases} \Delta : \text{opérateur de Laplace,} \\ \gamma : \text{opérateur frontière.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma u = u : \text{condition de Dirichlet,} \\ \gamma u = \frac{\partial u}{\partial n} : \text{condition de Neumann.} \end{cases}$$

Question :

Trouver $(\lambda, u), \lambda \in \mathbb{R}, u \neq 0$ et $\{u \in H^2(\Omega), \gamma u = 0\}$ solution du problème (3.4.1) tels que u ne change pas de signe dans Ω .

• Dans cette partie on adopte les notions suivantes :

- $V = H^1(\Omega)$ (ou $H_0^1(\Omega)$), $H = L^2(\Omega)$, Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$),
- $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx, \quad b(u, v) = \int_{\Omega} g u v \, dx,$
- $Lu = -\Delta u, D(L) = \{u \in H^2(\Omega) : \gamma u = 0\},$
- $Q_\lambda(v) = \langle Lv, v \rangle_H - \lambda \int_{\Omega} g v^2 \, dx = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx - \lambda \int_{\Omega} g v^2 \, dx,$

1. $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, et toute ses dérivées se prolongent par continuité à Γ_0 .
2. $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, et $\frac{\partial u}{\partial n}(z)$ existe pour tout $z \in \Gamma_0$.

- $\mathcal{R}(v) = \frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx}{\int_{\Omega} g v^2 dx}$ [quotient de Rayleigh],
- $T_{\lambda}(u) = -\Delta u - \lambda g u, D(T) = D(L)$,
- f.p : fonction propre,
- v.p : valeur propre, v.p.p : valeur propre principale.

Définition 3.4.1. Soit λ une valeur propre d'un problème aux valeurs propres, on dit que λ est une v.p.p si la fonction propre associée ne change pas de signe.

Remarque 3.4.1. Pour le problème de Dirichlet $V = H_0^1(\Omega)$.
Pour le problème de Neumann $V = H^1(\Omega)$.

Théorème 3.4.1 (théorie de Weinberger). Soit H un espace de Hilbert séparable, et W un sous-espace de H , avec $W \hookrightarrow H$ (l'injection étant continue et d'image dense).

Les normes et les produits scalaires sont notés respectivement $\|\cdot\|_H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H, \|\cdot\|_W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W$.
Considérons le problème aux valeurs propres de la forme :

$$Au = \lambda Bu, \quad (3.4.2)$$

où A et B sont des opérateurs auto-adjoints allant de W dans H .

Soit $a(\cdot, \cdot)$ (resp. $b(\cdot, \cdot)$) la forme quadratique associée à l'opérateur A (resp. B). On suppose que $a(\cdot, \cdot)$ est une forme hermitienne continue coercive sur W , et $b(\cdot, \cdot)$ est une forme hermitienne continue sur W .
c.à.d :

$$\begin{cases} \exists \beta > 0 \text{ telle que } |b(u, v)| \leq \beta \|u\|_W \|v\|_W & \forall (u, v) \in W^2, \\ \exists \alpha > 0 \text{ telle que } |a(u, v)| \leq \alpha \|u\|_W \|v\|_W & \forall (u, v) \in W^2, \\ \exists \gamma > 0 \text{ telle que } |a(u, u)| \geq \gamma \|u\|_W^2 & \forall u \in W. \end{cases}$$

Si on suppose que A^{-1} est compact, où l'injection de W dans H est compacte, et B borné alors l'opérateur $T = A^{-1}B$ est auto-adjoint compact.

Dans ce cas, on a :

Proposition 3.4.1. Le problème (3.4.2) admet (au plus) deux suites de valeurs propres réelles ; l'une positive croissante vers $+\infty$:

$$0 < \lambda_1^+ \leq \lambda_2^+ \leq \dots \leq \lambda_j^+ \rightarrow +\infty \text{ quand } j \rightarrow +\infty.$$

et l'autre négative décroissante vers $-\infty$:

$$0 > \lambda_1^- \geq \lambda_2^- \geq \dots \geq \lambda_j^- \rightarrow -\infty \text{ quand } j \rightarrow +\infty.$$

Remarque 3.4.2. Notons que les v.p positives (resp. négatives) sont données par une formule de Min-Max, où intervient pratiquement :

$$W_+ := \{u \in W : b(u, u) > 0\} \text{ resp. } W_- := \{u \in W : b(u, u) < 0\}.$$

$$\lambda_{j+1}^+ = \max_{V_j \in \varepsilon_j^+} \min_{u \perp V_j} \frac{a(u, u)}{b(u, u)}.$$

$$\lambda_{j+1}^- = \min_{V_j \in \varepsilon_j^-} \max_{u \perp V_j} \frac{a(u, u)}{b(u, u)}.$$

où ε_j^+ (resp. ε_j^-) = $\{E \subset_{s,e} W_+ \text{ (resp. } W_-) : \dim(E) = j\}$.

3.5 Existence des fonctions propres positives d'un problème de Sturm-Liouville

Soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et change de signe [$g^+ \neq 0, g^- \neq 0$].
Considérons le problème de Sturm-Liouville suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda g(x)u(x) & x \in]a, b[, \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \quad (3.5.1)$$

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda g(x)u(x), & x \in]a, b[, \\ u'(a) = u'(b) = 0. \end{cases} \quad (3.5.2)$$

Théorème 3.5.1. Pour le problème (3.5.1) il existe deux suites de valeurs propres :
L'une positive croissante vers $+\infty$:

$$0 < \lambda_1^+ \leq \lambda_2^+ \leq \dots \leq \lambda_j^+ \rightarrow +\infty \text{ quand } j \rightarrow +\infty.$$

et l'autre négative décroissante vers $-\infty$:

$$0 > \lambda_1^- \geq \lambda_2^- \geq \dots \geq \lambda_j^- \rightarrow -\infty \text{ quand } j \rightarrow +\infty.$$

De plus la f.p u_j^+ (resp. u_j^-) associée à λ_j^+ (resp. λ_j^-) possède $(j-1)$ zéros dans $]a, b[$. En particulier : λ_j^+ (resp λ_j^-) est simple et principale.

Pour le problème (3.5.2) : Si $\int_a^b g \, dx = 0$ alors 0 est la seule v.p.p.

Si $\int_a^b g \, dx \neq 0$ alors il existe une unique v.p.p $\mu \neq 0$:

$$\begin{cases} \mu > 0 & \text{si } \int_a^b g \, dx < 0 \\ \mu < 0 & \text{si } \int_a^b g \, dx > 0 \end{cases}$$

3.6 Existence des valeurs propres principales

On s'intéresse à l'existence des valeurs propres principales positives, bien évidemment l'existence des valeurs propres principales négatives s'en déduit, en remarquant que : $Lu = \lambda g u$ peut s'écrire aussi $Lu = (-\lambda)(-g)u$.

• Considérons le problème (3.4.1) avec la condition de Dirichlet :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in D(L) = \{v \in H^2(\Omega) : u = 0 \text{ sur } \Gamma\}, u \neq 0 \text{ et } \lambda \in \mathbb{R} \text{ telle que} \\ -\Delta u(x) = \lambda g(x)u(x) \quad x \in \Omega \\ u(s) = 0, s \in \Gamma. \end{cases} \quad (3.6.1)$$

Multiplions 3.6.1 par $v \in V = H_0^1(\Omega)$ et intégrons sur Ω , on obtient :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u, \lambda, u \in D(L), u \neq 0 \text{ tels que} \\ a(u, v) = \lambda b(u, v) \quad \forall v \in V = H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (3.6.2)$$

$$\text{où } a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx, b(u, v) = \int_{\Omega} g u v \, dx.$$

Il est facile de vérifier que $a(.,.)$ est une fonction hermitienne continue coercive sur V et $b(.,.)$ est une fonction hermitienne continue sur V .

L'opérateur L est un opérateur à domaine dense, positive et auto-adjoint, l'injection de V dans $L^2(\Omega)$ est compacte.

Via la théorie de Weinberger, il existe deux suites de v.p :

$$(0 < \lambda_1^+ \leq \lambda_2^+ \leq \dots \leq \lambda_j^+ \rightarrow +\infty \text{ quand } j \rightarrow +\infty).$$

$$(0 > \lambda_1^- \geq \lambda_2^- \geq \dots \geq \lambda_j^- \rightarrow -\infty \text{ quand } j \rightarrow +\infty).$$

Théorème 3.6.1 (Propriétés des valeurs propres principales). Si λ est une v.p.p du problème (3.6.1) alors :

$$Q_{\lambda}(v) \geq 0 \quad \forall v \in D(L).$$

Preuve. On introduit ici l'opérateur T_λ , et on considère le problème :

$$\begin{cases} T_\lambda u = \mu u = (-\Delta - \lambda g)u, \\ D(T_\lambda) = D(L). \end{cases} \quad (3.6.3)$$

Si u est la f.p associée à λ , alors u est une f.p associée à $\mu = 0$ du problème (3.6.4).

• T_λ est auto-adjoint, son spectre est réel et constitué par une suite dénombrable, $(\mu_1 < \mu_2 \leq \dots \mu_j \rightarrow \infty, \text{ quand } j \rightarrow +\infty)$ et μ_1 est simple et principale (théorème de Krein-Rutman) la f.p u_1 associée à μ_1 ne change pas de signe, par conséquent u et u_1 ne sont pas orthogonales, donc u est associée à μ_1 c.à.d que $\mu_1 = 0$. μ_1 est donnée par :

$$\mu_1 = \inf_{v \in D(T)} \frac{\langle T_\lambda v, v \rangle}{\|v\|_H^2}.$$

Ce qui implique que :

$$\langle T_\lambda v, v \rangle \geq \mu_1 \|v\|_H^2 \geq 0.$$

i.e. ;

$$Q_\lambda(v) \geq 0, \forall v \in D(L)$$

• Soit $\lambda_1 = \inf\{\mathcal{R}(v) : v \in D(L) \text{ et } \int_{\Omega} g v^2 dx > 0\}$.

Il est clair que $Q_{\lambda_1}(v) \geq 0, \forall v \in D(L)$.

On sait aussi que $\langle Lu, u \rangle \geq \gamma_1 \|u\|_H^2, \forall u \in D(L)$, où γ_1 est la première v.p de L .

Par conséquent si $\forall v \in D(L)$ et $\int_{\Omega} g v^2 dx > 0$ alors :

$$\mathcal{R}(v) \geq \frac{\gamma_1}{\|g\|_{\infty}} > 0 \text{ d'où } \lambda_1 > 0.$$

□

Théorème 3.6.2. Si $\lambda > \lambda_1$, alors λ n'est pas une v.p.p.

Preuve. D'après le théorème 3.6.1, il suffit de trouver $v \in D(L)$ tel que $Q_\lambda(v) < 0$.

D'après la définition de λ_1 , il existe v_1 telle que : $\lambda_1 = \mathcal{R}(v_1)$.

Ce qui entraîne :

$$\lambda_1 = \mathcal{R}(v_1) = \frac{(Lv_1, v_1)}{\int_{\Omega} g v_1^2} < \lambda,$$

i.e. ; $Q_\lambda(v_1) < 0$, d'où le résultat.

□

Théorème 3.6.3. Si $0 < \lambda < \lambda_1$, alors il existe $a > 0$ (depend de λ) telle que :

$$Q_\lambda(v) \geq a \|v\|_H^2, \forall v \in D(L).$$

Preuve. Pour tout $0 < \lambda < \lambda_1$ on peut écrire $\lambda = (1-s)\lambda_1$, avec $0 < s < 1$.

$$Q_\lambda(v) = \frac{\lambda}{\lambda_1} Q_{\lambda_1}(v) + s \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq s \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq s \gamma_1 \|u\|_H^2,$$

où γ_1 est la première v.p de L . □

Corollaire 3.6.1. Si $\lambda \neq \lambda_1$ et $\lambda > 0$ alors : λ n'est pas une v.p.p.

Théorème 3.6.4. λ_1 est une v.p du problème (3.6.1), de plus elle est simple et principale, et la f.p correspondante u peut être choisie telle que $u(x) > 0$, $\forall x \in \Omega$.

Preuve. Considérons le problème aux v.p suivant :

$$\begin{cases} T_{\lambda_1} u = -\Delta u - \lambda_1 g u = \mu u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.6.4)$$

Il est clair que (λ_1, u) est solution du 3.6.1 ssi $(0, u)$ est solution de (3.6.4).

La première v.p du problème (3.6.4) est donnée par (formule de Min-Max) :

$$\alpha_1 = \inf \frac{Q_{\lambda_1}(v)}{\|v\|_H^2} \geq 0.$$

D'autre part d'après la définition de λ_1 , il existe une suite $(v_n) \subset D(L)$ telle que $\int_{\Omega} g v_n^2 = 1$ et

$$\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}(v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2.$$

Ce qui entraîne $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{\lambda_1}(v_n) = 0$ et $\alpha_1 \leq 0$, donc $\alpha_1 = 0$.

On sait que la première v.p du problème (3.6.4) est simple et principale. □

Considérons maintenant le problème (3.4.1) avec la condition de Neumann.

• On a pas la coercivité de $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$ sur $H^1(\Omega)$, mais dans l'espace $\tilde{V} = \{u \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} g u dx = 0\}$, on a la coercivité dans le cas : $\int_{\Omega} g dx \neq 0$.

Preuve. Il suffit de montrer qu'il existe $c > 0$ telle que $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq c \int_{\Omega} |u|^2 dx$.

On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe (u_n) telle que $\int_{\Omega} |u_n|^2 dx = 1$ et $\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \leq \frac{1}{n}$. (u_n) étant bornée dans $\tilde{V}$, on peut extraire une sous-suite (notée encore u_n) telle que :

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u & \text{dans } \tilde{V}, \\ u_n \rightharpoonup u & \text{dans } L^2. \end{cases}$$

Ce qui implique que :

$$\begin{cases} \nabla u_n \rightarrow \nabla u \text{ dans } D'(\Omega) \\ \nabla u_n \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega), \end{cases}$$

et par suite, on a :

$$\nabla u = 0$$

Ce qui entraîne que $u = \text{Cte}$, et on obtient donc $u = 0$, car les constantes n'appartiennent pas à $\tilde{V}$, $\int_{\Omega} g \, dx \neq 0$,

et $1 = \int_{\Omega} |u_n|^2 \, dx \rightarrow 0$, contradiction. $\square$

Soit le problème (3.6.5) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \lambda \text{ et } u \in D(L_1) = \left\{ v \in H^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0 \right\} \\ u \neq 0 \text{ tel que :} \\ -\Delta u(x) = \lambda g(x)u(x) \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.6.5)$$

• Dans cette partie on procède d'une manière analogue comme avant on obtient les résultats suivants :

- 1) Si λ est une v.p.p, on a $Q_{\lambda}(v) \geq 0$, $\forall v \in D(L_1)$,
- 2) Soit $\lambda_1 = \inf \left\{ R(v), v \in D(L_1) \text{ et } \int_{\Omega} g v^2 \, dx > 0 \right\}$, si $\lambda > \lambda_1$, alors λ n'est pas une v.p.p.

Dans ce qui suit on distingue deux cas : $\begin{cases} \int_{\Omega} g \, dx \geq 0; \\ \int_{\Omega} g \, dx < 0. \end{cases}$

Pour le cas $\int_{\Omega} g \, dx \geq 0$, on a le

Théorème 3.6.5. Si $\int_{\Omega} g \, dx \geq 0$, alors $\lambda_1 = 0$.

Preuve. Il est clair que $Q_{\lambda_1}(v) \geq 0$, $\forall v \in D(L_1)$, donc il suffit de trouver $w \in D(L_1)$ tel que : $Q_{\lambda}(w) < 0$, $\forall \lambda > 0$.

Si $\int_{\Omega} g \, dx > 0$, pour $w \equiv 1$, on a : $Q_{\lambda}(w) = -\lambda \int_{\Omega} g \, dx < 0$.

Si $\int_{\Omega} g \, dx = 0$, on choisit $w \in D(L_1)$ tel que $\int_{\Omega} g w \, dx > 0$.

Soit $s \in \mathbb{R}$, alors

$$Q_\lambda(1 - sw) = s^2 Q_\lambda(w) - 2s \lambda \int_{\Omega} g w \, dx < 0 \text{ pour } s \text{ suffisamment petit et positif.} \quad \square$$

Corollaire 3.6.2. Si $\int_{\Omega} g \, dx \geq 0$ alors $\forall \lambda > 0$, λ n'est pas une v.p.p.

Pour le cas $\int_{\Omega} g \, dx < 0$, la situation est différente, on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 3.6.1. Si $\int_{\Omega} g \, dx < 0$, alors il existe $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ tels que :

$$\forall v \in (L_1) \text{ tel que } \int_{\Omega} g v^2 \, dx > -\eta \int_{\Omega} v^2 \, dx \Rightarrow \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \geq \varepsilon \int_{\Omega} v^2 \, dx.$$

Preuve. On raisonne par l'absurde, supposons qu'il existe une suite $(v_n) \subset D(L_1)$, telle que :

$$\int_{\Omega} v_n^2 \, dx = 1 \text{ et } \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 \, dx \leq \frac{1}{n} \text{ et } \int_{\Omega} g v_n^2 \, dx \geq -\frac{1}{n}, \forall n.$$

v_n est bornée dans $H^1(\Omega)$, on peut extraire une sous suite v_k qui converge vers un élément v dans $L^2(\Omega)$,

Comme $\int_{\Omega} |\nabla v_k|^2 \, dx \leq \frac{1}{k} \, \forall k$, alors v_k est une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$, donc elle converge vers v dans $H^1(\Omega)$, et on a :

$$\int_{\Omega} v^2 \, dx = 1, \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx = 0, \text{ on a nécessairement : } v \equiv c \neq 0, \text{ ceci implique } \int_{\Omega} g v^2 \, dx = c^2 \int_{\Omega} g \, dx < 0, \text{ contradiction.} \quad \square$$

Théorème 3.6.6. Si $\int_{\Omega} g \, dx < 0$, alors $\lambda_1 > 0$.

Preuve. Si $\int_{\Omega} g v^2 \, dx > 0$ alors :

$$\frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx}{\int_{\Omega} g v^2 \, dx} \geq \frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx}{\|g\|_{\infty} \|v\|_H^2} \geq \frac{\varepsilon}{\|g\|_{\infty}}$$

(d'après le lemme 3.6.1), ce qui entraîne

$$\lambda_1 \geq \frac{\varepsilon}{\|g\|_{\infty}} > 0. \quad \square$$

Dans la situation où $\int_{\Omega} g \, dx < 0$ et $0 < \lambda < \lambda_1$, on a le

Théorème 3.6.7. *Il existe a (dépend de λ) telle que :*

$$Q_\lambda(v) \geq a \|v\|_H^2, \forall v \in D(L_1).$$

Preuve. Pour tout $0 < \lambda < \lambda_1$, λ peut s'écrire : $\lambda = (1-s)\lambda_1$, avec $0 < s < 1$.

Si $\int_{\Omega} g v^2 dx > -\eta \int_{\Omega} v^2 dx$, d'après le lemme 3.6.1 on a :

$$Q_\lambda(v) = \frac{\lambda}{\lambda_1} Q_{\lambda_1}(v) + s \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \geq s \varepsilon \|v\|_H^2.$$

Si $\int_{\Omega} g v^2 dx < -\eta \int_{\Omega} v^2 dx$, alors $Q_\lambda(v) = \int_{\Omega} \{|\nabla v|^2 - \lambda g v^2\} dx \geq \eta \lambda \|v\|_H^2$.

$$\text{d'où } a(\lambda) = \begin{cases} \lambda \eta & \text{si } \int_{\Omega} g v^2 dx \leq -\eta \|v_H^2\| \\ \varepsilon s & \text{si } \int_{\Omega} g v^2 dx \geq -\eta \|v_H^2\|. \end{cases}$$

On prend $a(\lambda) = \min(\lambda \eta, \varepsilon s)$. □

Corollaire 3.6.3. *Si $\int_{\Omega} g dx < 0$, $\lambda > 0$ et $\lambda \neq \lambda_1$ alors λ n'est pas une v.p.p.*

Théorème 3.6.8. 1) *Si $\int_{\Omega} g dx \geq 0$ alors 0 est la seule v.p.p.*

2) *Si $\int_{\Omega} g dx < 0$ alors il existe un unique v.p.p $\lambda_1 \neq 0$, donnée par :*

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \mathcal{R}(v) : v \in D(L_1) \text{ et } \int_{\Omega} g v^2 dx > 0 \right\}.$$

De plus λ_1 est simple, et la f.p correspondante w_1 peut être choisie telle que : $w(x) > 0, \forall x \in \bar{\Omega}$.

3.6.1 Conclusion

1) Pour le problème de Dirichlet, il existe deux v.p.p :
 $\lambda_1^+ > 0$ et $\lambda_1^- < 0$ données par :

$$\lambda_1^+ = \inf \left\{ \mathcal{R}(v), v \in D(L) \text{ et } \int_{\Omega} g v^2 dx > 0 \right\},$$

$$\lambda_1^- = \sup \left\{ \mathcal{R}(v), v \in D(L) \text{ et } \int_{\Omega} g v^2 dx < 0 \right\},$$

2) Pour le problème de Neumann :

- Si $\int_{\Omega} g \, dx = 0$, alors 0 est la seule v.p.p,
- Si $\int_{\Omega} g \, dx < 0$, alors il existe deux v.p.p, $\lambda_0 = 0$ et λ_1^+ (unique) donnée par :

$$\lambda_1^+ = \inf \left\{ \mathcal{R}(v), v \in D(L_1) \text{ et } \int_{\Omega} g v^2 \, dx > 0 \right\},$$

- Si $\int_{\Omega} g \, dx > 0$, alors il existe deux v.p.p, $\lambda_0 = 0$ et λ_1^- (unique) donnée par :

$$\lambda_1^- = \sup \left\{ \mathcal{R}(v), v \in D(L_1) \text{ et } \int_{\Omega} g v^2 \, dx < 0 \right\}.$$

3.7 Comparaison des v.p du problème de Dirichlet et de Neumann

Soient $\{\lambda_k\}$ la suite des valeurs propres du problème de Neumann, et $\{\mu_k\}$ la suite des valeurs propres du problème de Dirichlet on a alors :

$$\lambda_k \leq \mu_k \text{ pour tout } k. \quad (3.7.1)$$

Le résultat est immédiat, il suffit d'appliquer le corollaire 2.4.1, avec : $(V, H, a(u, v)) = (H^1(\Omega), L^2, \int_{\Omega} \nabla u \nabla v)$ pour le problème de Neumann, et $(W, H, a(u, v)) = (H_0^1(\Omega), L^2, \int_{\Omega} \nabla u \nabla v)$ pour le problème de Dirichlet.

Bibliographie

- [1] Pierre lévy-Bruhl, Introduction à la théorie spectrale, Edit DUNOD (2007).
- [2] Haïm Brezis, Analyse fonctionnelle : théorie et application, Edit MASSON (2000).
- [3] R. Dautray, T2 : opérateur de Laplace, Edit MASSON (1998).
- [4] R. Dautray, T5 : spectre des opérateurs, Edit MASSON (1998).