

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Mémoire de Magister

Présenté à l'Université de Guelma
Faculté des Sciences et Sciences de l'Ingénierie

Département de : Génie Civil

Option : Matériaux et structures

Présenté par : Guergah Cherif

**Thème : CONTRIBUTION A LA MODELISATION DES
MATERIAUX VISQUEUX**

Sous la direction de : Pr. Guenfoud Mohamed

JURY

Dr : Benmarce Abdelaziz	Université de Guelma	Président
Pr : Guenfoud Mohamed	Université de Guelma	Rapporteur
Dr : Nouaouria Mohamed Salah	Université de Guelma	Examineur
Dr : Nafa Zahr Eddine	Université de Guelma	Examineur
Dr : Meksaouine Mohamed	Université de Annaba	Examineur

Remerciements

Au terme de ce travail, je remercie le BON DIEU tout puissant qui m'a donné la force et la volonté d'achever ce travail et nous lui rendons grâce.

J'adresse mes sincères remerciements à mon enseignant et encadreur de mémoire, Professeur M. GUENFOUD, pour ses nombreux conseils, son aide précieuse et sa compréhension durant l'élaboration de ce mémoire.

Je tiens à remercier Docteur A.A BENMARCE chef de département de Génie Civil, qui m'a fait le grand honneur d'accepter la présidence du jury, qu'il trouve ici l'expression de mon profond respect.

Mes vifs remerciements s'adressent également à Monsieur M.S NOUAOURJA, Maître de conférence à L'Université de Guelma, qui ma fait profiter de ses vastes connaissances scientifiques et d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je tiens également à exprimer toute ma gratitude à Messieurs :

- Docteur Z.E NAFA, Maître de conférence à L'Université de Guelma,
- Docteur M MEKSAOUINE, Maître de conférence à L'Université de Annaba,

Pour avoir bien voulu examiner ce travail et participer à ce jury

Mon plus profond remerciement à Messieurs R. Mansouri, et B. LAFIFI Maîtres de conférences à l'Université de Guelma, qui m'ont apporté leur aide à la réalisation de ce modeste travail.

Enfin, je remercie toutes les personnes, qui de près ou de loin, m'ont aidé à la réalisation de ce travail.

Cherif GUERGAH

ملخص

إن الهدف الرئيس من هذا العمل هو المساهمة في برمجة بعض قوانين السلوك وإدخالها في برامج الحساب الديناميكية مثل PLAXIS عن طريق الروابط الديناميكية. تركز المهمة الأولى في هذا العمل على الفهم والتحكم الجيدين في تقنية البرمجة الديناميكية بواسطة DLL (باستعمال لغة برمجة على أرضية النوافذ « Windows »). حتى نتمكن من استيعاب هذه التقنية، بدأنا بإدخال قوانين خطية بسيطة مرنة من نوع (isotrope و orthotrope). لتوقع سلوك المواد اللزجة، قمنا ببرمجة القانون اللزج لـ: Lemaitre الخاص بالزحف، وتنفيذ القانون اللزج لـ: Koppejan المعدل. هذه القوانين قد أثبتت فاعليتها عن طريق سلسلة من الاختبارات لنماذج محاكاة تمت مقارنتها إما مع النماذج القائمة أو مع الحلول المرجعية التحليلية.

كلمات مفتاحية:

إنشاء DLL، تنفيذ قوانين، قوانين السلوك، قانون isotrope، قانون orthotrope، اللزج لـ: لدنة، الزحف.

Résumé

L'objectif principal de ce travail se veut une contribution à la programmation des lois rhéologiques et de leur implémentation sur des codes de calcul dynamiques tel que PLAXIS par le biais d'une DLL « *Dynamic Link Library* ». La première tâche est consacrée à la compréhension et à la maîtrise de la technique de programmation dynamique à travers les DLL (moyennant un langage de programmation sous une plate forme Windows). Il a été question d'implémenter des lois simples de types élastique linéaire (isotrope et orthotrope), et ce en situation drainée ou non drainée.

Afin de pouvoir prédire le comportement des matériaux visqueux, Il a été procédé à la programmation de la loi viscoplastique de Lemaitre pour le fluage ainsi que l'implémentation de la loi viscoplastique de Koppejan modifiée. Ces lois ont été validées par une série de simulations. Ces dernières ont été soumises, par la suite, à la confrontation d'une part avec les modèles existants et d'autre part avec une solution analytique de référence.

Mots clés

Création des DLL, Implémentation, Lois de comportement, Loi isotrope, loi orthotrope, Viscoplasticité, fluage.

Abstract

The objective of this work is to provide a contribution to the programming of rheological laws and implement them on dynamic design codes standards such as PLAXIS through a DLL "*Dynamic Link Library*". The first task of this work is to understand and master the technique of dynamic programming through DLLs (using a programming language under Windows platform). In order to familiarize with this technique, we started by implementing simple laws such as linear elastic isotropic model and linear elastic orthotropic model, in a drained and undrained situation. In order to predict the behavior of viscous materials, we programmed Lemaitre's viscoplastic law for creep computation, as well as the implementation the viscoplastic relationship of law of Koppejan modified. These laws were validated by modeling a series of simulation tests which were then compared with existing models or with analytical solution reference.

Key words:

Creation DLL, implementation, behavior law, isotropic law, orthotropic law, viscoplasticity, creep.

Sommaire	
Remerciements	I
ملخص	II
Abstract	IV
Liste des figures	3
Notations et définitions	5
CHAPITRE I- INTRODUCTION GENERALE	8
CHAPITRE II- LOIS DE COMPORTEMENT VISQUEUX.....	10
2.2. PRINCIPES GENERAUX DES LOIS DE COMPORTEMENT	11
2.2.1. Principe de déterminisme	11
2.2.2. Principe d'objectivité matérielle	11
2.2.3. Principe d'action locale	11
2.3. CLASSIFICATION DES LOIS DE COMPORTEMENT VISQUEUX	11
2.3.1. Ecriture générale des lois de comportement visqueux	12
2.3.2. Classes de solides visqueux.....	13
2.3.3. Lois explicites en fonction du temps.....	13
2.3.3.1. Lois de fluage primaire	14
2.3.3.2. Lois de fluage secondaire.....	15
2.3.3.2. Lois de fluage tertiaire	15
2.3.4. Modèles analogiques et dérivés.....	15
2.3.4.1. Modèles analogiques de base.....	15
2.4. GENERALITES SUR LA FORMULATION DES LOIS ELASTOPLASTIQUES.....	22
2.4.1. Principe de partition des déformations élastiques et plastiques	23
2.4.2. Définition de la surface de charge.....	23
2.4.3 Principes de la théorie de plasticité.....	24
2.4.3.1. Lois d'écoulement associées	25
2.4.3.2. Lois d'écoulement non associées	25
2.4.4. Paramètres d'écrouissage	26
2.4.4.1. Écrouissage isotrope	26
2.4.4.2. Écrouissage cinématique.....	27
2.4.5. Rappels sur quelques critères de plasticité.....	28
2.4.5.1. Critères ne faisant pas intervenir la contrainte moyenne	28
2.4.5.2. Critères faisant intervenir la contrainte moyenne	30
2.5. DE LA PLASTICITE VERS LA VISCOPLASTICITE.....	34
2.5.1. Partition des déformations élastiques et viscoplastiques.....	34
2.5.2 Théorie de Perzyna et lois viscoplastiques.....	35
2.5.3. Modèle rhéologique de Lemaitre	37
2.6. SYNTHESE	39
CHAPITRE III- PRESENTATION DU LOGICIEL PLAXIS	40
3.1. INTRODUCTION.....	40
3.2. POSSIBILITE D'INTEGRATION DES LOIS DE COMPORTEMENT	41
3.2.1. Initialisation des variables d'état	42
3.2.2. Calcul des contraintes.....	42
3.2.3. Création de la matrice de rigidité effective	43
3.2.4 Définition du nombre de variables d'état	43
3.2.5 Propriétés de la matrice	43
3.2.6 Création de la matrice d'élasticité.....	43

3.3 CREATION DES LIBRAIRIES DYNAMIQUES (DLL).....	44
3.4. SAISIR LES PARAMETRES DU MODELE À IMPLEMENTER.....	45
3.5. Synthèse	45
CHAPITRE IV-IMPLEMENTATION	46
4.1. IMPLEMENTATION D'UNE LOI DE COMPORTEMENT ELASTIQUE LINEAIRE ...	46
4.2. CAS D'UNE LOI ELASTIQUE LINEAIRE ISOTROPE (LOI DE HOOKE).....	46
4.2.1 Développement Tensoriel	47
4.2.2. Implémentation.....	49
4.2.2.1. Initialisation des variables d'états	49
4.2.2.2. Calcul des contraintes	49
4.2.2.3. Création de la matrice de rigidité effective.....	49
4.2.2.4. Définition du nombre de variable d'état	50
4.2.2.5. Propriétés de la matrice	50
4.2.2.6. Résultats	50
4.3.1. Elasticité à isotropie transverse	53
4.3.2. Développement Tensoriel	54
4.3.3. Implémentation.....	55
4.3.4. Initialisation des variables d'états	55
4.3.5. Calcul des contraintes.....	55
4.3.6. Création de la matrice de rigidité effective	55
4.3.7. Détermination du terme de correction de la pression interstitielle.....	56
4.3.8. Création de la matrice d'élasticité.....	58
4.3.9. Propriété de la matrice.....	58
4.3.10. Création de la matrice d'élasticité.....	58
4.3.11. Résultats	58
4.3.12. Synthèse	62
4.4. PROGRAMMATION DE LA LOI VISCOPLASTIQUE DE LEMAITRE	62
4.4.1. Développements tensoriels de la loi viscoplastique de Lemaitre.....	62
4.4.2. Loi de fluage associée à la loi viscoplastique de Lemaitre	64
4.4.3. Organigramme de calcul du fluage pour la loi viscoplastique de Lemaitre.....	65
4.4.4. Simulation d'un essai de fluage	65
4.5. MODELE DE KOPPEJAN	68
4.5.1. Introduction	68
4.5.2. Koppejan 1948	68
4.5.3. Construction par étapes	70
4.5.4. Formulation incrémentale	71
4.5.5. Consolidation	72
4.5.6. Grandes déformations par rapport aux petites déformations	73
4.5.6. Implémentation.....	74
4.5.7. Résultats et discussions	75
4.5.8. Conclusion.....	77
Conclusion et Perspectives.....	79
BIBLIOGRAPHIE	81
ANNEXE V -Rappel sur le calcul des invariants et leurs dérivées.....	112

Liste des figures

Figure 2.1 : Représentation des phases de fluages pour un matériau viscoplastique.....	14
Figure 2.2 : Représentation du modèle analogique de Newton en cisaillement simple.....	16
Figure 2.3 : Représentation analogique du modèle de Maxwell en cisaillement simple.....	17
Figure 2.4 : Représentation du modèle analogique de Kelvin en cisaillement simple.....	18
Figure 2.5 : Représentation du modèle analogique de Burger en compression simple.....	20
Figure 2.6 : Représentation du modèle analogique de Bingham en cisaillement simple.....	20
Figure 2.7 : Comparaison des caractéristiques d'écoulement entre le fluide visqueux et le solide plastique, d'après Norton 1929 [12]	21
Figure 2.8 : Représentation du modèle dérivé CVISC en compression simple	22
Figure 2.9 : Évolution de la surface de charge dans l'espace des contraintes principales.....	24
Figure 2.10 : Surface de charge et potentiel plastique dans le plan des contraintes.....	25
Figure 2.11 : Diagrammes traditionnels de Mohr.....	26
Figure 2.12 : Représentation de l'écrouissage isotrope en projection.....	27
Figure 2.13 : Représentation de l'écrouissage cinématique en projection	27
Figure 2.14 : Représentation du critère de Tresca dans l'espace des contraintes principales.....	28
Figure 2.15 : Représentation du critère de von Mises.....	29
Figure 2.16 : Comparaison des critères de Mohr-Coulomb et Tresca dans l'espace des contraintes principales.....	31
Figure 2.17 : Représentation du critère de Mohr-Coulomb dans le plan de Mohr.....	31
Figure 2.18 : Comparaison des critères de Drucker-Prager et von Mises dans l'espace des contraintes principales.....	32
Figure 2.19 : Comparaison des critères de Mohr-Coulomb et Drucker-Prager dans l'espace des contraintes principales.....	33
Figure 2.20 : Définition du domaine viscoplastique, d'après Perzyna.....	34
Figure 2.21 : Modèle rhéologique représentant la loi viscoplastique de Lemaitre.....	38
Figure 9.1 . : fenêtre permettant le choix de la loi de comportement.....	45
Figure 4.1 . Géométrie du problème.....	51
Figure 4.2 . Comparaison des maillages déformés	51
Figure 4.3 . Comparaison des déformations horizontales	52
Figure 4.4 . Comparaison des contraintes effectives horizontales	52
Figure 4.5 . : Milieu à isotropie transverse.....	53
Figure 4.6 Géométrie du problème	59
Figure 4.7 Comparaison du maillage déformé	59
Figure 4.8 : Comparaison des déplacements horizontaux U_x	60

Figure 4.9 : Comparaison des déplacements verticaux U_y	60
Figure 4.10 : Comparaison des déformations horizontales.....	60
Figure 4.11 : Comparaison des déformations Verticales.....	61
Figure 4.12 : Comparaison des contraintes effectives horizontales.....	61
Figure 4.13 : Comparaison des contraintes effectives verticales.....	61
Figure 4.14 : Modèle FLAC d'un quart d'échantillon soumis à un essai de fluage.....	66
Figure 4.15 : Résultat de la simulation d'un essai de fluage avec la loi viscoplastique.....	67
Figure 4.16 : Résultat de la simulation d'un essai de fluage avec FLAC, comparé à la solution analytique de référence.....	67
Figure 4.17 : Résultat de superposition des figures 4.14 et 4.15 de la simulation d'un essai de fluage.....	68
Figure 4.18 : Géométrie du problème.....	76
Figure 4.19 : Courbe déformation-temps.....	76
Figure 4.20 : Courbe tassement-temps.....	77

Notations et définitions

Nous donnons ci-dessous les principales notations utilisées dans ce mémoire.

δ_{ij}	Symbole de Kronecker qui vaut 1 pour $i = j$ et 0 si $i \neq j$
\mathbf{I}	Tenseur identité
σ_{ij}	Tenseur des contraintes totales (ou le terme général du tenseur)
σ'_{ij}	Tenseur des contraintes effectives
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Contraintes principales (positives en compression) vérifiant : $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$	Contraintes dans les axes du repère cartésien (O, x, y, z)
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement dans les plans (xy), (xz) et (yz)
$p = J_1$	Pression moyenne ou premier invariant du tenseur des contraintes
	$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma_{ij}) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sigma_{ii} = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$
s_{ij}	Partie déviatoire du tenseur des contraintes
	$s_{ij} = \sigma_{ij} - p \delta_{ij}$
$q = J_2$	Déviateur équivalent ou second invariant du tenseur des contraintes
J_3	Troisième invariant du tenseur des contraintes, $J_3 = \text{Det}(\sigma_{ij}) = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3$
σ_n	Contrainte normale sur une facette donnée
τ	Contrainte de cisaillement sur une facette donnée
σ_{axiale}	Contrainte axiale en configuration monoaxiale
σ_s	Seuil de contrainte de déclenchement du comportement différé
ε_{ij}	Tenseur des déformations totales (ou le terme général du tenseur)
$\dot{\varepsilon}_{ij}$	Tenseur des vitesses de déformation totale
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	Déformations principales (positives en contraction) vérifiant : $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$	Déformations dans les axes du repère cartésien (O, x, y, z)
$\gamma_{xx}, \gamma_{yy}, \gamma_{zz}$	Distorsions dans les plans (xy), (xz) et (yz)

γ	Déformation de cisaillement sur une facette donnée
$\dot{\gamma}$	Vitesse de cisaillement sur une facette donnée
$\varepsilon_{\text{axiale}}$	Déformation axiale en configuration monoaxiale
$\dot{\varepsilon}_{\text{axiale}}$	Vitesse de déformation axiale en configuration monoaxiale
ε_{vol}	Déformation volumique : $\varepsilon_{\text{vol}} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \text{tr}(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_{ii}$
ε_{ij}^d	Partie déviatoire du tenseur des déformations $\varepsilon_{ij}^d = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{\text{vol}} \delta_{ij}$
$\dot{\varepsilon}_{ij}^d$	Partie déviatoire du tenseur des vitesses de déformation
ε_{ij}^e	Tenseur des déformations élastiques
$\dot{\varepsilon}_{ij}^e$	Partie élastique du tenseur des vitesses de déformation totale
ε_{ij}^p	Tenseur des déformations plastiques
$\varepsilon_{ij}^{\text{vp}}$	Tenseur des déformations viscoplastiques
ε_{vp}	Déformation visqueuse cumulée (ou de fluage) correspond au second invariant du tenseur des déformations viscoplastiques
	$\varepsilon_{\text{vp}} = \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^{\text{vp}} \cdot \varepsilon_{ij}^{\text{vp}}} = \sqrt{\frac{2}{3} \text{tr}(\varepsilon_{ij}^{\text{vp}})^2}$
$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{vp}}$	Tenseur des vitesses de déformation viscoplastique
$\dot{\varepsilon}_{\text{vp}}$	Vitesse de fluage ou second invariant du tenseur des vitesses de déformation viscoplastique : $\dot{\varepsilon}_{\text{vp}} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{vp}} \cdot \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{vp}}} = \sqrt{\frac{2}{3} \text{tr}(\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{vp}})^2}$
ε_p	Déformation primaire
ε_s	Déformation secondaire
K_0	Coefficient de pression des terres au repos
E	Module d'Young
ν	Coefficient de Poisson
G	Module de cisaillement : $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$
E_{oed}	Module oedométrique
K	Module de compressibilité : $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$
c	Cohésion

φ	Angle de frottement interne
ψ	Angle de dilatance
E	Indice des vides
n	Porosité
γ_h	Poids volumique humide
γ_s	Poids volumique spécifique (des particules solides)
γ_d	Poids volumique sec
γ_w	Poids volumique de l'eau
γ	Paramètre de viscosité
η	Viscosité dynamique
η_M	Viscosité dynamique du modèle de Maxwell
η_K	Viscosité dynamique du modèle de Kelvin
G_M	Module de cisaillement du modèle de Maxwell
G_K	Module de cisaillement du modèle de Kelvin
K_T	Constante du critère de Tresca
K_{VM}	Constante du critère de Von Mises
C_s, C_p	Constantes de compression
U	Coefficient de consolidation
$\sigma'_{v,i}, \sigma'_{v,i}$	Contraintes verticales effectives
c_v	Coefficient de consolidation vertical
$\sigma'_{p.c.p.}$	Pression de préconsolidation
ε_p	Déformation primaire
$\dot{\varepsilon}_p$	Taux de déformation primaire
ε_s	Déformation secondaire
$\dot{\varepsilon}_s$	Taux de déformation secondaire

Chapitre 1

1. INTRODUCTION GENERALE

L'excavation et la construction des ouvrages souterrains profonds « creusement de galeries, de cavités souterraines de stockage et des tunnels dans les milieux rocheux », laissent apparaître une évolution parfois très importante des déformations différées, induisant des préjudices considérables à la stabilité des ouvrages non seulement en cours de creusement, mais aussi lors de leur exploitation. Par conséquent la problématique du comportement différé des massifs rocheux s'impose et doit donc être traitée, et ce afin de faire une prévision à long terme sur l'état des cavités creusées.

La prise en considération de l'effet du temps devient primordiale, et ce pour la conception, l'exploitation et la sécurisation de ces ouvrages. Cet effet du temps est lié à une dégradation des propriétés mécaniques des géomatériaux, et se traduit par les phénomènes de fluage, de relaxation, ainsi que par l'effet de la vitesse de déformation.

La recherche d'une loi de comportement qui s'adapte bien à la prédiction de ces phénomènes et qui peut tenir compte de l'effet du temps, a poussé les rhéologues à se pencher sur le développement de modèles de comportement combinés (entre la viscosité et la plasticité) tels que l'élastoplasticité, la viscoélasticité, et la viscoplasticité. Ces modèles visqueux ont été initialement élaborés à partir des résultats expérimentaux relatif au comportement des métaux avant d'être appliqués en mécanique des sols.

Les dates marquantes dans l'évolution de la modélisation mathématique des lois visqueuses et particulièrement la viscoplasticité sont :

1910, avec la traduction du fluage primaire par la loi d'Andrade ;

1929, avec la loi de Norton reliant la vitesse de fluage secondaire à la contrainte ;

1934, avec les travaux d'Odqvist généralisation la loi de Norton au cas tridimensionnel.

Le premier symposium sur « le fluage dans les structures », organisé par N.J. Hoff, avait lieu en 1960; il a marqué le point de départ d'un grand développement :

- de la viscoplasticité avec les travaux de Hoff,
- les lois à écrouissage isotrope avec Rabotnov, Perzyna, Hult et Lemaitre,
- les lois à écrouissage cinématique avec les travaux de Kratochvil, Chaboche, Malinin et Khadjinsky, Ponter et Leckie. Lemaitre [08].

L'objectif principal de ce travail est axé sur la maîtrise des lois visqueuses et sur l'implantation d'une d'entre elles sur la plate forme PLAXIS. Pour ce faire, et dans un premier l'implantation d'une loi élastique (isotrope et orthotrope) a été réalisée. Dans cette dernière la pression interstitielle a été prise en considération. Dans un deuxième temps l'implantation d'une loi visqueuse à savoir la loi de Koppejan a été entamée. C'est dans cette perspective que s'inscrit la problématique traitée dans le cadre de ce travail. Il s'agit entre autre de :

Le premier chapitre comporte une introduction générale dans laquelle l'évolution des lois visqueuses a été traitée. Il met en perspective le sujet dans le contexte scientifique actuel et justifie les choix méthodologiques adoptés.

Le second chapitre établit un état de connaissance sur les lois de comportement visqueux, nous présentons quelques exemples des lois constitutives, faisant intervenir l'effet de la vitesse de déformation, développées par différents chercheurs. Nous nous limitons aux modèles dits unifiés tenant compte des effets plastiques et visqueux couplés, ne faisant pas la distinction entre la déformation plastique et visqueuses.

Dans le troisième chapitre un aperçu succinct sur le code de calcul par éléments finis PLAXIS est présenté, et la philosophie d'implantation d'une loi de comportement est abordée.

Le quatrième chapitre se focalise sur la procédure d'implémentation. Ainsi, et dans un premier temps, la loi dite élastique linéaire (isotrope et orthotrope) a été implantée, et ce avec et sans la prise en considération de l'effet de la pression interstitielle. Dans un deuxième temps l'implantation de la loi viscoplastique de Koppejan modifiée par Van Baars [22] a été réalisée. En outre un programme permettant la modélisation du fluage par la loi de Lemaitre a été développé. Cette dernière est basée sur la résolution en différences finies par le schéma explicite.

La conclusion reprend les principaux résultats et propose des perspectives de recherche à la fois académique et appliquée.

Chapitre 2

2. LOIS DE COMPORTEMENT VISQUEUX

2.1. Introduction

La loi de comportement d'un matériau est la relation fonctionnelle qui permet d'exprimer les efforts intérieurs en fonction des grandeurs cinématiques qui décrivent la déformation du milieu. C'est une loi spécifique du matériau considéré, contrairement aux équations générales de conservation valables pour tous les matériaux.

De manière générale, une loi de comportement non linéaire associe un critère de plasticité, une loi d'écrouissage et une loi d'écoulement qui permettent de décrire l'évolution des déformations du solide considéré.

Les lois de comportement qui s'attachent à reproduire les phénomènes différés nécessitent une attention toute particulière sur la définition de la loi d'écoulement. Les formulations mathématiques de ces lois doivent obéir aux principes généraux qui sont :

- le principe de causalité, ou de déterminisme,
- le principe d'objectivité matérielle,
- le principe d'action locale.

L'ensemble de ces concepts, résumés par Stutz 1987 [19], est développé dans le paragraphe suivant. Ils sont nécessaires pour valider l'approche théorique des lois de comportement visqueux.

2.2. PRINCIPES GENERAUX DES LOIS DE COMPORTEMENT

2.2.1. Principe de déterminisme

Le principe de causalité, ou de déterminisme, s'énonce de la manière suivante : « l'état de contrainte pour un point matériel P du corps Ω , dans la configuration actuelle, est parfaitement déterminé par l'histoire x_t du mouvement. » Mathématiquement, ce principe est traduit par la relation :

$$\sigma(P, t) = \mathfrak{R}(x_t(M, \tau); P, t) \quad \tau \leq t \quad M \in \Omega \quad (2-1)$$

où \mathfrak{R} est une fonctionnelle, appelée fonctionnelle mémoire. La présence de P et t indique que la forme de la fonctionnelle peut dépendre du point matériel P, dans le cas des corps non homogènes, et de l'instant t, Stutz 1987 [19]. (On peut résumer ce principe en disant que c'est le mouvement passé et présent qui détermine les contraintes actuelles dans le corps).

2.2.2. Principe d'objectivité matérielle

Le principe d'objectivité, ou d'indifférence matérielle, peut s'énoncer comme suit : « les équations de comportement doivent être indépendantes du mouvement de l'observateur, en d'autres termes la loi de comportement doit rester invariante dans tout changement continu de référentiel », Stutz 1987 [19].

2.2.3. Principe d'action locale

Le principe d'action locale pour un matériau suppose que l'histoire des déformations en un point est déterminé par celle des déformations au voisinage de ce point. Ce principe est toujours vérifié pour les lois de comportement classiques, c'est-à-dire celles pour lesquelles, la localisation des déformations avant la rupture n'est pas considérée. Il stipule que la détermination du tenseur des contraintes en un point d'un milieu continu ne nécessite que les déformations locales en ce point.

2.3. CLASSIFICATION DES LOIS DE COMPORTEMENT VISQUEUX

L'objectif de ce paragraphe est de mieux appréhender et de synthétiser l'ensemble des lois de comportement visqueux, qui ont été développées depuis le début du XX^{ème} siècle sous l'impulsion de Bingham 1913 [02] et Norton 1929 [14].

Il convient tout d'abord de définir un critère de classifications de ces lois. Il peut être soit le type d'écriture de la loi elle-même, soit le type de solide que l'on désire modéliser avec cette loi.

2.3.1. Ecriture générale des lois de comportement visqueux

Tatsuoka et al. 1998 [20], résumant les différentes lois existantes à ce jour en se basant sur leur propre formulation, fonction des tenseurs des déformations, des vitesses de déformations, et de contraintes, ainsi que du temps pour les modèles explicites. Il est intéressant de noter que le tenseur des vitesses de contraintes est rarement utilisé et n'intervient pas dans la classification de Tatsuoka qui est la suivante :

La première famille correspond aux lois explicites en fonction du temps qui regroupent :

- *les modèles empiriques* qui sont définis à partir de chemins de sollicitations simples, à fonctions temporelles diverses de type, $\varepsilon_{vp} = \varepsilon_{vp}(t)$ ou $q = q(t)$; ces modèles découlent directement de l'observation du comportement en laboratoire mais ne constituent pas des lois générales de comportement (exemple: loi de fluage logarithmique),
- *les modèles analogiques* qui rendent compte du comportement différé du solide viscoélastique ; ils sont souvent relativement simples bien que tensoriels (modèles de Newton, Maxwell et Kelvin) mais sont peu appliqués en pratique pour les roches,
- *les modèles isochrones* vérifiant $f(q, \varepsilon_{vp}, t) = 0$ et permettant d'élaborer des relations contraintes-déformations à un instant t (restrictions de lois élasto- viscoplastiques).

La seconde famille correspond aux **lois élasto-viscoplastiques**, qui vérifient l'ensemble des principes généraux énoncés au paragraphe précédent. Cette famille se subdivise en trois sous familles qui sont :

- *les modèles à plasticité différée* pour lesquels la composante plastique des déformations se développe de manière différée mais indépendamment du chargement, soit $f(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}) = 0$, Di Prisco et Imposimato 1996 [05]; ce type de modèle ne prédit pas le comportement quand les vitesses de déformations plastiques et le niveau de contrainte évoluent de façon simultanée,
- *les lois incrémentales du premier ordre*, appelées aussi « modèles isotach » ; ils expriment le champ des vitesses de déformation à chaque instant selon la

formulation $f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}) = 0$, ces lois sont les plus couramment transcrites dans les codes de calcul existants,

- les lois incrémentales du second ordre tenant compte également du champ des accélérations de déformation à chaque instant, soit $f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}, \underline{\underline{\ddot{\varepsilon}}}) = 0$; ces lois sont très rarement utilisées.

Les modèles empiriques, analogiques et isochrones ne sont utilisés en pratique que pour décrire analytiquement un comportement détecté par des essais de laboratoire ou des mesures in situ. Quant aux lois incrémentales du premier ordre, elles sont très prisées pour la modélisation numérique car elles permettent de suivre tous les chemins de contraintes possibles.

2.3.2. Classes de solides visqueux

Une autre approche pour la classification de ces lois consiste à identifier le comportement du «solide parfait» que l'on cherche à modéliser et à en donner la formulation mathématique associée. Les classes de solides explicitées par Berest 1987 [01], se présentent ainsi :

- le solide ou le liquide viscoélastique, représenté par des combinaisons de modèles analogiques classiques (ressorts et amortisseurs en série ou en parallèle),
- le solide élasto-viscoplastique, dont le tenseur des déformations totales, variable au cours du temps, peut se décomposer, à chaque instant, en une partie élastoplastique induite par la variation du champ de contrainte et une partie visqueuse propre à la rhéologie du matériau,
- le solide rigide viscoplastique, pour lequel l'écoulement visqueux n'apparaît qu'en cisaillement après franchissement d'un certain seuil de contrainte (principe de Bingham (1913)[02]), développé au paragraphe 2.2.4.1.

2.3.3. Lois explicites en fonction du temps

Les lois de comportement différées les plus courantes, faisant intervenir explicitement le temps, sont les lois de fluage. Elles sont issues de l'observation expérimentale et vont être présentées en fonction de la phase de fluage qu'elles représentent (phase de fluage primaire, secondaire ou tertiaire). La figure 2.1 illustre ces trois phases de fluage.

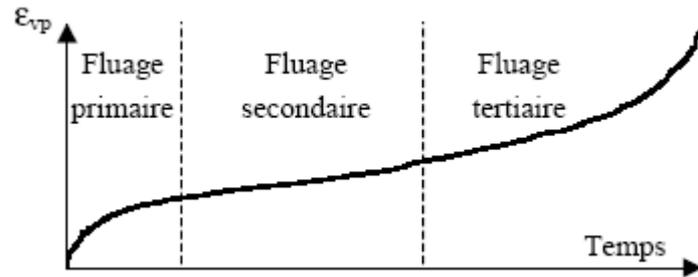


Figure 2.1 : Représentation des phases de fluages pour un matériau viscoplastique

2.3.3.1. Lois de fluage primaire

La phase de fluage primaire est souvent décrite par une expression simple donnant l'évolution des déformations visqueuses en fonction du temps.

a) Lois en puissance

Le fluage de type puissance souvent utilisé pour modéliser le comportement des matériaux métalliques. Il se présente sous la forme suivante :

$$\varepsilon_{vp} = B.t^\alpha \quad (2-2)$$

Où :

- ε_{vp} est la déformation visqueuse,
- t est la variable temps,
- B est un paramètre fonction de la contrainte appliquée et de la température,
- α est une constante strictement positive et inférieure à 1.

b) Lois en logarithme

Les lois en logarithme ont également été développées dans le milieu de la métallurgie. Lemaitre 1996 [11], applique ces lois au cas des métaux soumis à de faibles températures.

Elles traduisent indirectement une faible viscosité du matériau modélisé.

Plus classiquement pour les géomatériaux, le choix d'une loi de fluage logarithmique s'effectue entre les deux types suivants :

$$(I) \quad \varepsilon_{vp}(t \geq t_0) = A.\ln\left(\frac{t}{t_0}\right)$$

$$(II) \quad \varepsilon_{vp}(t \geq 0) = A.\ln(1 + Ct)$$

- ε_{vp} est la déformation visqueuse,

- A et C sont deux paramètres fonction de l'état de contrainte appliqué.

2.3.3.2. Lois de fluage secondaire

La phase de fluage secondaire peut être représentée par la loi dite de Norton 1929 [14] qui est de la

forme : $\dot{\epsilon}_{vp} = \Theta \cdot q^n$

Où :

- $\dot{\epsilon}_{vp}$ est la vitesse de déformation visqueuse,
- Θ et n sont des constantes positives,
- q est le déviateur des contraintes, qui vaut $(\sigma_1 - \sigma_3)$ en conditions triaxiales de révolution.

2.3.3.2. Lois de fluage tertiaire

Pour simuler la phase de fluage tertiaire, il n'existe pas de loi propre. Il est cependant possible de faire varier certains paramètres avec le degré d'endommagement du matériau, comme par exemple le paramètre, n , de la loi de Norton.

Nous allons maintenant étudier les modèles analogiques, qui en configuration uniaxiale, permettent de développer des lois de fluage primaire, qui sont de type exponentiel amorti.

2.3.4. Modèles analogiques et dérivés

Ce paragraphe présente un certain nombre de modèles viscoélastiques analogiques. Ils ont la particularité d'être très intuitifs car la viscosité introduite est physique. Ils donnent également une solution analytique très simple, mais ne répondent pas toujours aux cas pratiques, car ils ne tiennent pas compte des déformations plastiques des roches.

2.3.4.1. Modèles analogiques de base

Pour les différents modèles élémentaires, le comportement différé associé ne sera décrit que par les déviateurs de contrainte et de déformation. En effet, il est souvent admis que pour les corps répondant à ce type de modèles, un chargement hydrostatique ne peut provoquer d'écoulement visqueux.

Les modules considérés pour calculer les déformations élastiques, sont donc des modules de cisaillement. Tous les modèles sont supposés isotropes. Les équations du comportement sont formulées pour une sollicitation en cisaillement simple et en compression simple, puis de manière tensorielle.

a) Modèle de Newton

Le modèle le plus simple intégrant l'effet du temps, est l'amortisseur linéaire pour lequel la viscosité dynamique, η , est considérée comme reliant linéairement la contrainte de cisaillement, τ , à la vitesse de distorsion, $\dot{\gamma}$, en cisaillement simple :

$$\tau = \eta \cdot \dot{\gamma}$$

Il s'agit du modèle de Newton représenté sur la figure 2.2. Il décrit un fluage secondaire, dont la vitesse de déformation différée est fonction de la viscosité dynamique, η , du matériau.

Aucun processus de relaxation n'est possible avec ce modèle. Nous rappelons que la viscosité dynamique s'exprime en Poiseuille [Pl], équivalant au Pa.s.

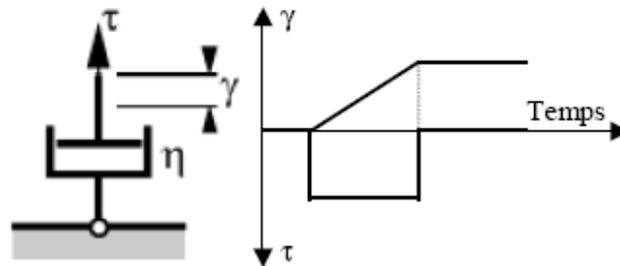


Figure 2.2 : Représentation du modèle analogique de Newton en cisaillement simple

En compression simple, la contrainte axiale, σ_{axiale} , est majeure et vaut donc deux fois la contrainte de cisaillement, τ . De plus, la relation liant la distorsion, γ , à la déformation axiale totale, ε_{axiale} , est la suivante :

$$\gamma = (1 + \nu)\varepsilon_{axiale} \quad (2-3)$$

où ν est le coefficient de Poisson du matériau.

Ces dernières considérations conduisent, en configuration monoaxiale, à l'expression suivante pour le modèle de Newton :

$$\sigma_{axiale} = 2\eta(1 + \nu)\dot{\varepsilon}_{axiale} \quad (2-4)$$

Par analogie avec l'élasticité linéaire d'après Malan 1998 [12], la généralisation tensorielle de l'équation (2-4) donne :

$$s_{ij} = 2\eta \cdot \dot{\varepsilon}_{ij}^d \quad (2-5)$$

où :

- S_{ij} est le terme de la partie déviatoire du tenseur des contraintes,
- $\dot{\varepsilon}_{ij}^d$ est le terme de la partie déviatoire du tenseur des vitesses de déformation,
- η est la viscosité dynamique du matériau.

b) Modèle de Maxwell

Le modèle de Maxwell correspond à la mise en série des modèles analogiques de Newton et de Hooke (ressort élastique). La représentation correspondante est donnée en figure 2.3.

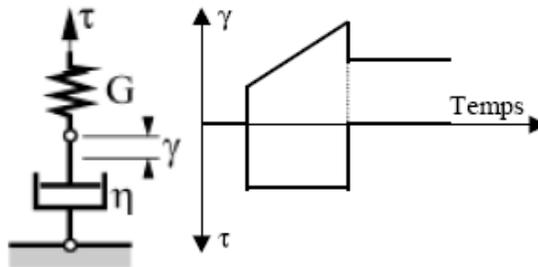


Figure 2.3 : Représentation analogique du modèle de Maxwell en cisaillement simple

Conformément au modèle de Newton et à l'élasticité linéaire, en cisaillement simple, l'équation différentielle permettant de relier la contrainte de cisaillement, τ , à la vitesse de distorsion, $\dot{\gamma}$, vérifie :

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{\tau}}{G} + \frac{\tau}{\eta} \quad (2-6)$$

où G est le module de cisaillement.

En configuration monoaxiale, on aboutit à la relation suivante :

$$\dot{\varepsilon}_{axiale} = \frac{\dot{\sigma}_{axiale}}{E} + \frac{\sigma_{axiale}}{2\eta(1+\nu)} \quad (2-7)$$

où :

- E est le module d'élasticité qui se déduit du module G par : $E = 2(1+\nu)G$,
- ν est le coefficient de Poisson du matériau.

Le modèle de Maxwell permet de décrire à la fois le fluage secondaire ainsi que la relaxation par restauration des déformations élastiques dans le temps.

En fluage : $\sigma_{axiale} = Cte \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{axiale} = \frac{\sigma_{axiale}}{2.\eta(1+\nu)} = Cte$

Cela conduit à la fonction de fluage secondaire suivante :

$$\varepsilon_{axiale}(t) = \frac{\sigma_{axiale}}{E} + \frac{\sigma_{axiale}}{2.\eta(1+\nu)}.t \quad (2-8)$$

En relaxation :

$$\dot{\varepsilon}_{axiale} = 0 \Rightarrow \dot{\sigma}_{axiale} + \frac{E}{2.\eta(1+\nu)}.\sigma_{axiale} = 0 \quad (2-9)$$

Cela conduit à la fonction de relaxation suivante :

$$\sigma_{axiale}^{(t)} = \sigma_{axiale}^{(t=0)} e^{\left(\frac{-E}{2.\eta(1+\nu)}.t\right)} \quad (3-10)$$

Enfin, d'un point de vue tensoriel, l'équation différentielle reliant le terme général de la partie déviatoire du tenseur des vitesses de déformation, $\dot{\varepsilon}_{ij}^d$, à celui de la partie déviatoire du tenseur des contraintes, s_{ij} , s'exprime par :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^d = \frac{\dot{s}_{ij}}{2.G} + \frac{s_{ij}}{2.\eta} \quad (2-11)$$

c) Modèle de Kelvin

Le modèle de Kelvin correspond à la mise en parallèle des modèles analogiques de Newton et de Hooke. La représentation correspondante est donnée en figure 2.4.

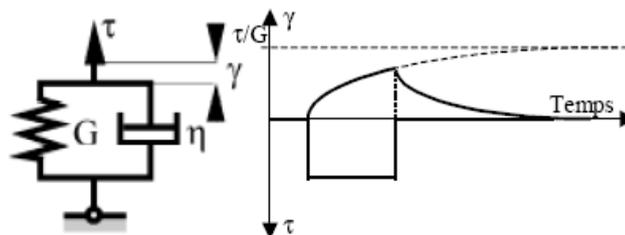


Figure 2.4 : Représentation du modèle analogique de Kelvin en cisaillement simple

En cisaillement simple, l'addition des contraintes dans les unités de Hooke et de Newton conduit à l'équation différentielle régissant le comportement, qui s'écrit :

$$\tau = G.\gamma + \eta.\dot{\gamma} \quad (2-12)$$

L'évolution de la distorsion au cours du temps est de type exponentiel amorti et présente une asymptote à long terme, caractérisant la distorsion élastique maximale du modèle de Hooke.

En configuration monoaxiale, on aboutit à la relation suivante :

$$\sigma_{axiale} = E\varepsilon_{axiale} + 2.\eta(1+\nu).\dot{\varepsilon}_{axiale} \quad (2-13)$$

Contrairement au modèle de Maxwell, le modèle de Kelvin permet de décrire un fluage primaire de type exponentiel asymptotique. La fonction de fluage est la suivante :

$$\varepsilon_{axiale}^{(t)} = \frac{\sigma_{axiale}}{E} \left(1 - e^{\left(\frac{-E}{2.\eta(1+\nu)} t \right)} \right) \quad (2-14)$$

Par contre, le modèle de Kelvin n'est en aucun cas relaxant car le montage en parallèle des modèles de Hooke et de Newton empêche tout rééquilibrage de la contrainte axiale à déformation axiale maintenue constante.

La généralisation tensorielle du modèle de Kelvin s'opère en exprimant la partie déviatoire du tenseur des contraintes comme étant la somme du tenseur élastique et du tenseur équivalent du modèle de Newton. L'équation différentielle résultante est la suivante:

$$s_{ij} = 2G.\varepsilon_{ij}^d + 2.\eta.\dot{\varepsilon}_{ij}^d \quad (2-15)$$

d) Modèle de Burger

Le modèle de Burger correspond à la mise en série des modèles de Kelvin et de Maxwell comme indiqué sur la figure 2.5.

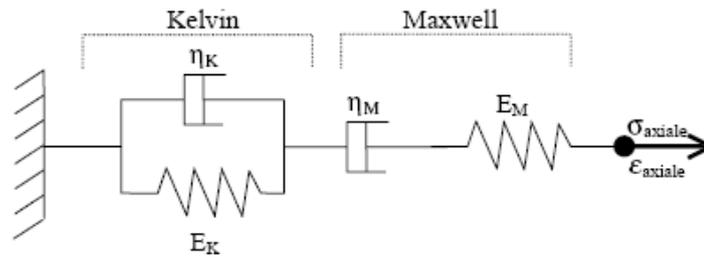


Figure 2.5 : Représentation du modèle analogique de Burger en compression simple
(K est relatif au modèle de Kelvin et M à celui de Maxwell) Boidy 2002 [03]

En configuration de fluage uniaxiale, la déformation viscoélastique totale axiale, $\varepsilon_{\text{axiale}}$, combine celles des modèles de Kelvin et Maxwell et se décompose comme suit :

$$\varepsilon_{\text{axiale}}^{(t)} = \frac{\sigma_{\text{axiale}}}{E_M} + \frac{\sigma_{\text{axiale}}}{2 \cdot \eta_M (1 + \nu)} \cdot t + \frac{\sigma_{\text{axiale}}}{E_K} \left(1 - e^{-\frac{E_K}{2 \cdot \eta_K (1 + \nu)} \cdot t} \right) \quad (2-16)$$

Elle rend compte des phases de fluage primaire et secondaire. La phase de fluage secondaire s'exprime dès lors que les déformations différées qu'elle développe, sont du même ordre de grandeur que celles de la phase de fluage primaire.

Jusqu'à présent, les modèles rhéologiques étudiés considèrent que les phénomènes différés se développent dès l'application d'une charge déviatoire quelconque. Nous allons maintenant introduire la notion de seuil de contrainte de déclenchement avec le modèle de Bingham.

e) *Concept de Bingham* 1913 [02]

Le modèle analogique de Bingham considère un seuil de contrainte de cisaillement, σ_s , au-delà duquel seulement des déformations différées peuvent se développer ; ce modèle peut être représenté par la figure 2.6, qui symbolise le seuil par un patin parfait :

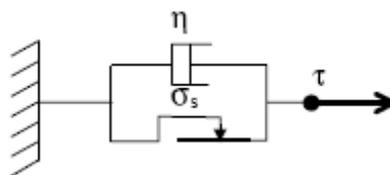


Figure 2.6 : Représentation du modèle analogique de Bingham en cisaillement simple

En configuration de cisaillement simple, la vitesse de distorsion $\dot{\gamma}$ s'écrit alors sous la forme :

$$\dot{\gamma} = \eta(\tau - \sigma_s) \text{ lorsque : } \tau \geq \sigma_s$$

$$\dot{\gamma} = 0 \quad \text{lorsque :} \quad \tau \leq \sigma_s \quad (2-17)$$

Cette loi a été établie, de manière expérimentale, pour des suspensions colloïdales (peintures, coulis d'injections). Elle ne fait intervenir que la valeur critique de la résistance en cisaillement σ_s , jouant un rôle de seuil de déclenchement de l'écoulement viscoplastique.

Norton 1929 [14], considère également ce principe pour qualifier « les solides plastiques », et notamment les argiles saturées. Pour ces corps, la vitesse d'écoulement peut être proportionnelle à l'excès de charge appliquée, au-delà d'un certain seuil de contrainte, correspondant au déclenchement du comportement différé. La figure 2.7 compare le comportement visqueux de ce corps à celui du fluide newtonien.

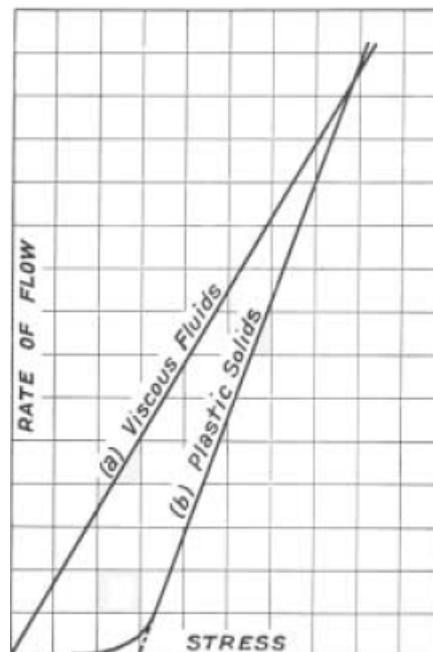


Figure 2.7 : Comparaison des caractéristiques d'écoulement entre le fluide visqueux et le solide plastique, d'après Norton 1929 [14]

f) Modèle CVISC

Les modèles analogiques de base présentés jusqu'à présent sont de type viscoélastique non relaxant (Newton, Kelvin) et de type viscoélastique relaxant (Maxwell, Burger). Le modèle CVISC, analogique dérivé, est de type élastoplastique visqueux. Il découle de celui de Burger et comprend, en plus de ce dernier, un patin plastique de type Mohr-Coulomb. La loi d'écoulement associée permet de calculer les déformations plastiques irréversibles qui se développent instantanément puis au cours du temps. C'est la raison pour laquelle, cette loi est beaucoup plus

appliquée sur des cas d'ingénierie, notamment en travaux souterrains. La figure 2.8 donne la représentation analogique du modèle CVISC.

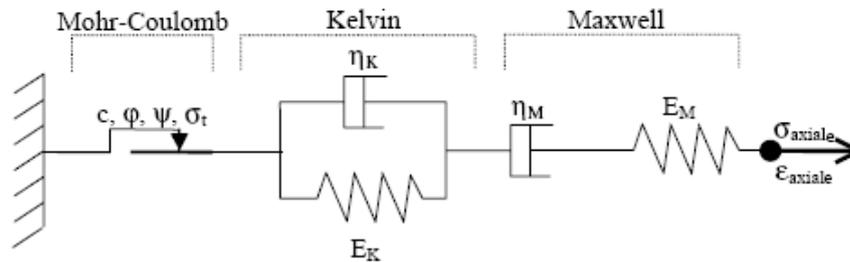


Figure 2.8 : Représentation du modèle dérivé CVISC en compression simple (K est relatif au modèle de Kelvin et M à celui de Maxwell), d'après Boidy 2002 [03]

Les paramètres du modèle CVISC sont les suivants :

- G_M : Module de cisaillement du modèle de Maxwell,
- G_K : Module de cisaillement du modèle de Kelvin,
- η_M : Viscosité dynamique du modèle de Maxwell,
- η_K : Viscosité dynamique du modèle de Kelvin,
- c : Cohésion,
- φ : Angle de frottement,
- ψ : Angle de dilatance,
- σ_t : Résistance en traction.

L'étude de ce type de lois nécessite de rappeler préalablement la théorie de l'élastoplasticité puis de définir le cadre de l'extension de celle-ci à l'ensemble des lois élasto-viscoplastiques. Le paragraphe suivant résume les principales notions de base régissant la théorie de l'élastoplasticité.

2.4. GENERALITES SUR LA FORMULATION DES LOIS ELASTOPLASTIQUES

En 1864, Tresca introduit pour la première fois la notion de plasticité avec le critère de contrainte maximale. Mais cette notion n'a été formulée numériquement que vers 1950 avec le développement de l'informatique.

La non-linéarité du comportement des sols et des roches peut être introduite à partir de modèles élastoplastiques, qui sont basés sur les quatre notions fondamentales suivantes :

- la partition des déformations élastiques et plastiques,
- l'existence d'une surface de charge dans l'espace des contraintes,
- la loi d'écoulement,
- le type d'écrouissage.

2.4.1. Principe de partition des déformations élastiques et plastiques

Les déformations totales peuvent se décomposer en déformations élastiques réversibles et en déformations plastiques irréversibles.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (2-18)$$

Avec :

- ε_{ij} le terme du tenseur de déformations totales,
- ε_{ij}^e le terme du tenseur de déformations élastiques,
- ε_{ij}^p le terme du tenseur de déformations plastiques.

2.4.2. Définition de la surface de charge

Dans l'espace des contraintes principales, $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, il existe une surface de charge à partir de laquelle l'écoulement plastique peut se produire. Pour les états de contrainte contenus à l'intérieur de cette surface, le comportement reste entièrement élastique. Cette surface est convexe et s'exprime à travers l'équation scalaire suivante :

$$F(\sigma_{ij}) = 0 \quad (2-19)$$

où $F(\sigma_{ij})$ est appelée fonction de charge.

Afin de caractériser complètement l'écoulement plastique, il faut encore introduire un critère de charge-décharge. En effet, l'écoulement plastique se produit à partir du moment où deux conditions sont simultanément réunies.

- 1- Le point représentatif de l'état de contrainte est situé sur la surface de charge, ce qui correspond à $F = 0$.
- 2- La théorie de la plasticité impose que le point représentatif de l'état de contrainte ne puisse sortir du volume défini par la surface de charge ($F(\sigma_{ij}) > 0$ est impossible) cela implique que la position de ce point, après chargement, reste sur cette même surface. Pendant l'écoulement, la condition de consistance est ainsi vérifiée, soit :

$$dF(\sigma_{ij}) = 0 \quad (2-20)$$

Il est cependant possible qu'une variation de contrainte peut entraîner le point représentatif de l'état de chargement vers l'intérieur de la surface de charge. Dans ce cas, il s'agit d'une décharge purement élastique qui se matérialise par :

$$dF(\sigma_{ij}) < 0 \quad (2-21)$$

En résumé, trois états de chargement sont possibles :

- $F(\sigma_{ij}) < 0$ correspond à un comportement élastique,
- $F(\sigma_{ij}) = 0$ et $dF(\sigma_{ij}) = 0$ caractérisent un écoulement plastique,
- $F(\sigma_{ij}) = 0$ et $dF(\sigma_{ij}) < 0$ caractérisent une décharge purement élastique.

Lorsque le point représentatif de l'état de contrainte se situe sur la surface de charge, $F = 0$, deux cas sont possibles :

- la surface de charge n'évolue pas, c'est le cas du modèle élastoplastique parfait,
- la surface évolue au cours du chargement, c'est le cas du modèle élastoplastique avec écrouissage ; la figure 2.9 illustre ce second cas.

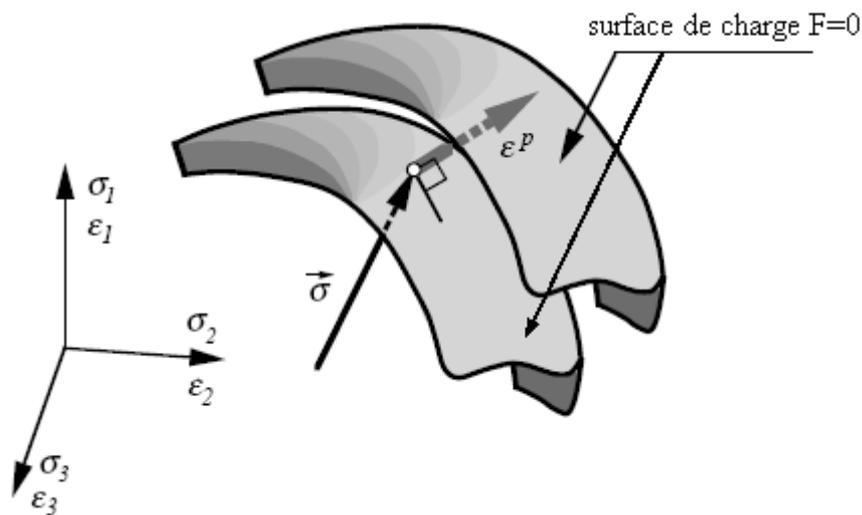


Figure 2.9 : Évolution de la surface de charge dans l'espace des contraintes principales pour un matériau présentant des propriétés d'écrouissage EPFL [07]

2.4.3 Principes de la théorie de plasticité.

- L'incrément de contrainte σ ne fournit aucun travail sur l'incrément de déformation plastique ε^p puisqu'ils sont perpendiculaires = *premier principe* de la théorie de la plasticité.
- La *surface de plastification* $F(\sigma_{ij})$ est toujours convexe = *deuxième principe* de la théorie de la plasticité.
- L'incrément de déformation plastique ε^p est perpendiculaire à la surface de plastification $F(\sigma_{ij})$ et est donc parallèle et proportionnel à $\partial F / \partial \sigma$, ce qui détermine une *loi d'écoulement* de la forme :

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2-22)$$

où λ est le multiplicateur plastique (scalaire positif) défini par l'équation de consistance.

2.4.3.1. Lois d'écoulement associées

La loi d'écoulement est dite associée à la surface de charge quand cette dernière est confondue avec la surface représentative du potentiel plastique, ce qui revient naturellement à considérer l'identité, $F = G_p$.

Les matériaux pour lesquels la loi d'écoulement est dite associée, sont dits standards. C'est le cas des métaux.

2.4.3.2. Lois d'écoulement non associées

Une loi d'écoulement associée peut conduire, dans les modèles numériques, à des difficultés. Pour cette raison, on utilise souvent des lois d'écoulement qui ne sont pas associées à la surface de charge mais à une autre surface que l'on dénomme *potentiel plastique* sur laquelle l'incrément de déformation plastique est perpendiculaire; on dit alors que l'on utilise une *loi d'écoulement non associée* (figure 2.10). Cette astuce permet de ne pas violer la théorie de la plasticité.

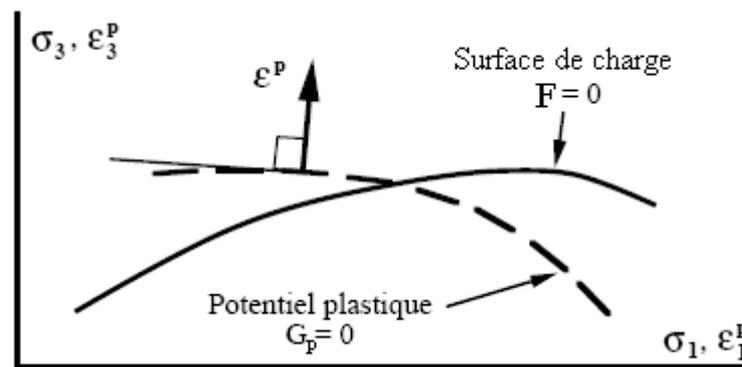


Figure 2.10 : Surface de charge et potentiel plastique dans le plan des contraintes EPFL [07]

En effet, pour les lois élastoplastiques considérant un angle de frottement φ , une loi d'écoulement associée induit un angle de dilatance, $\psi = \varphi$, qui s'avère souvent trop élevé pour les géomatériaux.

On a alors recours à des lois non associées. Dans ce cas, la direction du vecteur déformation plastique est perpendiculaire à la surface représentative du potentiel plastique, $G_p(\sigma_{ij})$, qui est distincte de celle représentative de la fonction de charge plastique, $F(\sigma_{ij})$. Cela permet de considérer des angles de dilatance, ψ , compris entre 0 et φ , comme représenté sur la figure 2.11.

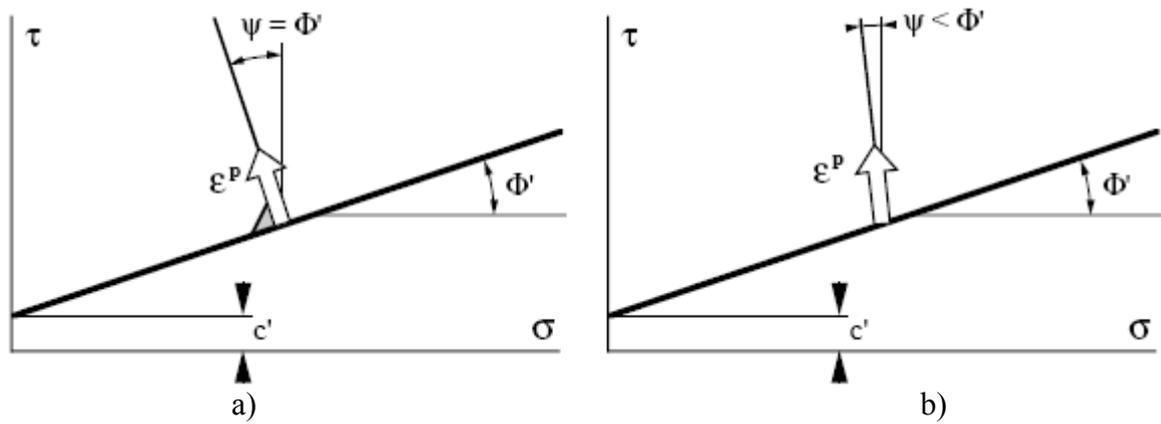


Figure 2.11 : Diagrammes traditionnels de Mohr a) Loi associée $\psi = \varphi'$

b) Loi non associée $\psi < \varphi'$

2.4.4. Paramètres d'écrouissage

Lors de l'écoulement du matériau sous sollicitations mécaniques, la surface de charge définie dans le repère des contraintes principales peut évoluer. Ainsi, le domaine d'élasticité actuel dépend de l'état d'écrouissage, c'est-à-dire de l'histoire du chargement du matériau. On peut observer un accroissement de la limite élastique lors de ce chargement. On parle alors d'écrouissage positif ou de durcissement. A l'opposé, l'écrouissage négatif correspond à une diminution de la limite élastique, ou en d'autres termes, à un radoucissement du matériau. L'écrouissage peut être soit isotrope soit cinématique. Pour le qualifier et le quantifier, il convient d'effectuer des essais de laboratoire de chargement et déchargement.

2.4.4.1. Écrouissage isotrope

L'écrouissage est dit isotrope, quand l'évolution de la surface de charge n'est gouvernée que par un seul paramètre scalaire, par exemple la déformation plastique cumulée. Ainsi, dans le plan $\sigma_{\text{axiale}} - \varepsilon_{\text{axiale}}$ en traction-compression simple, la courbe de traction succédant à celle de compression se déduit de cette dernière par une homothétie de rapport (-1) et de centre, le point de contrainte nulle (point A de la figure 2.12). Dans le plan déviatoire (plan normale à la trisectrice de l'espace des contraintes principales, d'équation $(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3)$), la surface de charge croît de manière homothétique par rapport au point représentatif d'une contrainte déviatoire nulle (point B de la figure 2.12).

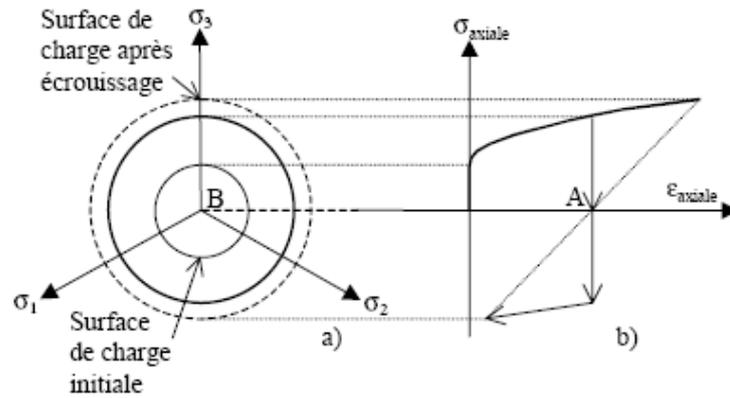


Figure 2.12 : Représentation de l'écrouissage isotrope en projection a) dans le plan déviatoire, b) dans le plan $\sigma_{\text{axiale}} - \varepsilon_{\text{axiale}}$ en traction-compression simple

2.4.4.2. Écrouissage cinématique

L'écrouissage isotrope reste insuffisant pour décrire le comportement des géomatériaux qui diffère notamment suivant que la sollicitation soit en compression ou en traction. Une schématisation possible de l'écrouissage anisotrope est l'écrouissage cinématique linéaire, comme représenté sur la figure 2.13.

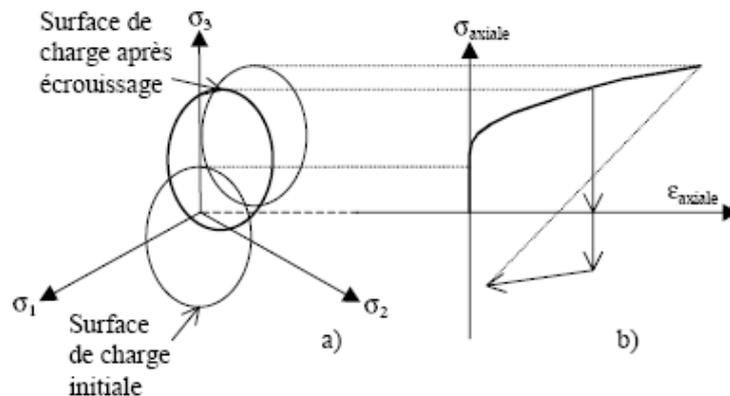


Figure 2.13 : Représentation de l'écrouissage cinématique en projection a) dans le plan déviatoire, b) dans le plan $\sigma_{\text{axiale}} - \varepsilon_{\text{axiale}}$ en traction-compression simple

Le domaine d'élasticité délimité par la surface de charge se déplace par translation dans l'espace des contraintes principales et sans distorsion de la surface de charge initiale. Ainsi, dans le plan $\sigma_{\text{axiale}} - \varepsilon_{\text{axiale}}$ en traction-compression simple, le chemin de contrainte n'est plus homothétique par rapport au point de contrainte nulle.

Nous allons effectuer des rappels utiles sur les critères de plasticité, les plus couramment utilisés.

2.4.5. Rappels sur quelques critères de plasticité

Dans ce paragraphe, on va présentés les principaux critères de plasticité parfaite, en distinguant ceux qui dépendent de la contrainte moyenne, p , de ceux qui n'en dépendent pas, avec :

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(\sigma) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sigma_{ii} = \frac{1}{3} \sigma_{ii} \quad (2-23)$$

Où $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ sont les contraintes principales.

2.4.5.1. Critères ne faisant pas intervenir la contrainte moyenne

a) Critère de Tresca (1864) [03]

Après avoir effectué des essais sur le plomb, Tresca conclut que la plastification se produit quand la contrainte de cisaillement atteint une valeur limite K_T . Dans le repère des contraintes principales, le critère s'exprime par :

$$F(\sigma_{ij}) = \text{Max}(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|) - 2K_T = 0 \quad (2-24)$$

Où K_T est la constante de Tresca, qui dans le cas des sols et des roches, correspond à la cohésion, c . Dans l'espace des contraintes principales, la surface de charge est un prisme parallèle à la trisectrice, δ . Sa section dans le plan déviatoire, π , (normal à la trisectrice de l'espace des contraintes principales) est un hexagone régulier. La figure 2.14 représente cette surface dans l'espace des contraintes principales.

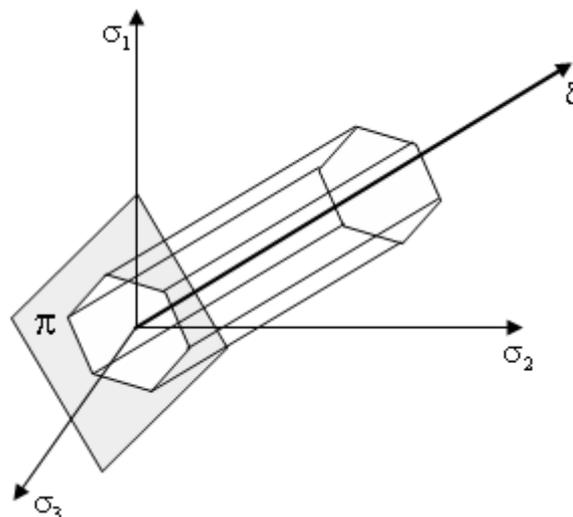


Figure 2.14 : Représentation du critère de Tresca dans l'espace des contraintes principales

b) Critère de von Mises (1913) (Mestat 1993 [13])

Afin de prendre en compte l'influence de la contrainte intermédiaire Von Mises a proposé en 1913, que le critère de rupture dépende du deuxième invariant du tenseur des contraintes déviatoriques J_2 :

$$F(\sigma_{ij}) = J_2(\sigma_{ij}) - K_{VM}^2 = s_{ij} \cdot s_{ij} / 2 - K_{VM}^2 = 0 \quad (2-25)$$

Où : $-s_{ij}$ est le terme de la partie déviatoire du tenseur des contraintes,

- K_{VM} est la constante de von Mises ; représente la résistance maximale du matériau au cisaillement simple (roches) ou à la traction simple (métaux).

Le déviateur équivalent q est défini par :

$$q = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} \cdot s_{ij}} = \sqrt{\frac{3}{2} \text{tr}(s^2)} \quad (2-26)$$

La fonction de charge associée au critère de Von Mises devient :

$$F(\sigma_{ij}) = q - \sqrt{3} K_{VM} = 0 \quad (2-27)$$

Dans l'espace des contraintes principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, la surface de rupture de Von Mises est un cylindre de révolution ayant pour axe la droite d'équation : $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Sa section par le plan déviatoire $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0)$ est un cercle. La figure 2.15 en donne la représentation dans le plan de Mohr et dans l'espace des contraintes principales.

La règle d'écoulement est associée, le potentiel plastique est confondu avec la fonction de charge ($G=F$).

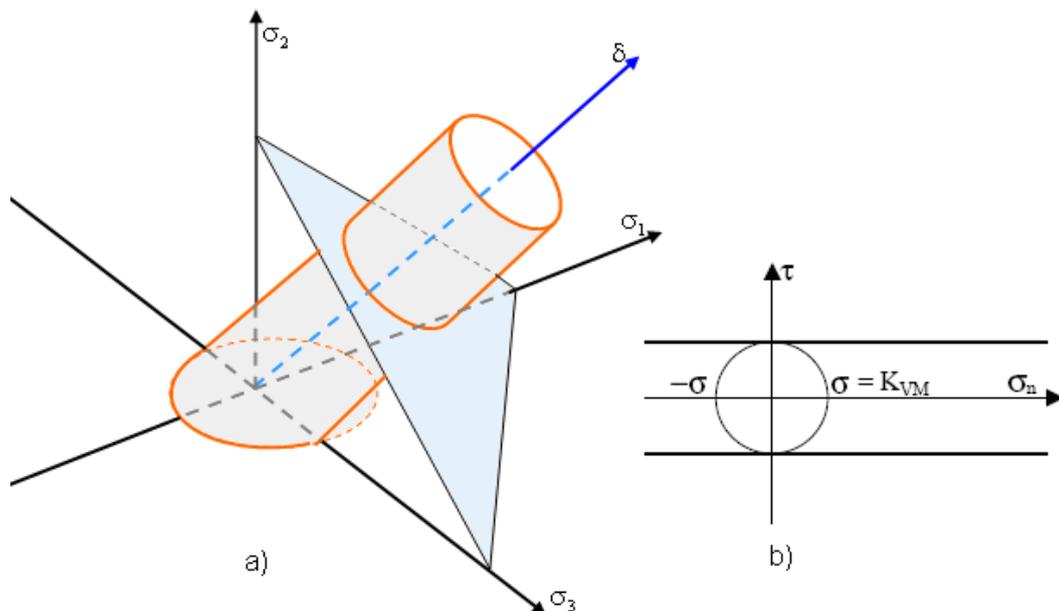


Figure 2.15 : Représentation du critère de von Mises a) dans l'espace des contraintes principales, b) dans le plan de Mohr

Ce critère a été formulé pour étudier le comportement des métaux et il n'est pas bien adapté à la représentation du comportement des sols dans la mesure où il ne fait pas intervenir la contrainte moyenne dans son expression.

Synthèse :

La contrainte moyenne, p , n'intervient ni dans les critères de Tresca, ni dans celui de von Mises. Dans le paragraphe suivant on va présenter quelques critères qui dépendent de la contrainte moyenne.

2.4.5.2. Critères faisant intervenir la contrainte moyenne

Ces critères sont nécessaires pour représenter la déformation plastique des matériaux pulvérulents, des sols ou en présence d'endommagement du matériau. Il exprime le fait qu'une contrainte hydrostatique de compression rend plus difficile la déformation plastique. Une des conséquences de leur formulation est qu'ils introduisent une dissymétrie traction-compression.

a) Critère de Mohr-Coulomb (1900)

Coulomb a proposé le premier critère de plasticité en mécanique des sols. Ce critère est utilisé pour les sols pulvérulents (par exemple les sables) et pour les sols cohérents à long terme (par exemple les argiles). Le critère de Tresca, qui est un cas particulier du Critère de Mohr-Coulomb, est utilisé pour les sols cohérents à court terme.

Le Critère de Mohr-Coulomb demeure le plus simple et le plus utilisé par les ingénieurs pour les études courantes. Dans le plan de Mohr, la forme de la courbe enveloppe de ce critère est une droite, appelée droite de Coulomb (1773) d'équation :

$$\tau = c + \sigma_n \cdot \text{tg}(\varphi) \quad (2-28)$$

où :

- σ_n et τ correspondent respectivement à la contrainte normale et à la contrainte de cisaillement sur une facette donnée,
- c représente la cohésion,
- φ est l'angle de frottement interne du matériau. Lorsque $\varphi = 0$, le critère est appelé critère de Tresca.

La représentation de ce critère dans l'espace des contraintes principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, est une

pyramide de section hexagonale ayant pour axe la droite d'équation : $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, comme illustrée sur la figure 2.16. Cette pyramide dégénère en cylindre lorsque $\varphi = 0$.

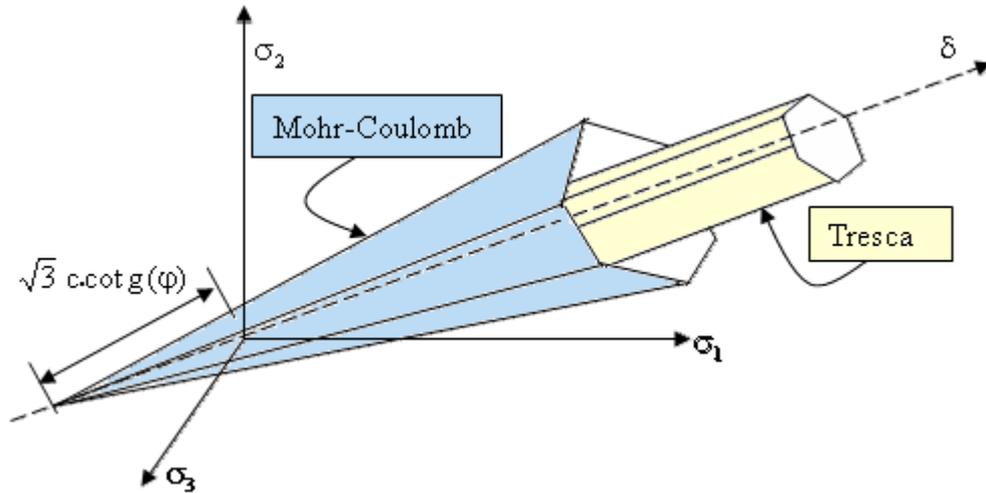


Figure 2.16 : Comparaison des critères de Mohr-Coulomb et Tresca dans l'espace des contraintes principales, d'après Itasca 2000 [08]

L'expression analytique d'un des plans de la pyramide, en fonction des contraintes principales, est donnée par l'équation :

$$F(\sigma_{ij}) = \sigma_1 - \sigma_3 - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi - 2c \cos \varphi = 0$$

Ou, autrement dit :

$$\sigma_1 - \frac{1 + \sin(\varphi)}{1 - \sin(\varphi)} \sigma_3 - \frac{2c \cdot \cos(\varphi)}{1 - \sin(\varphi)} = 0 \quad (2-29)$$

Dans le plan de Mohr, la représentation de ce critère est donnée par la figure 2.17. Il est remarquable que le critère de Mohr-Coulomb ne fait pas intervenir la contrainte intermédiaire σ_2 dans sa formulation.

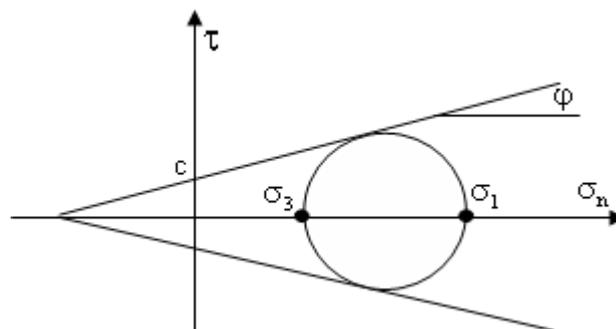


Figure 2.17 : Représentation du critère de Mohr-Coulomb dans le plan de Mohr

Le potentiel plastique s'écrit, en fonction des contraintes extrêmes :

$$G(\sigma_{ij}) = \sigma_1 - \sigma_3 - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \psi + \text{constante} \quad (2-30)$$

Où ψ est l'angle de dilatance.

b) Critère de Drucker-Prager (1952)

Le critère de Drucker-Prager constitue une généralisation du critère de Von Mises aux matériaux pulvérulents, prenant en compte le premier invariant du tenseur des contraintes I_1 et le deuxième invariant du tenseur des contraintes déviatoriques J_2 . Son expression est la suivante :

$$F(\sigma_{ij}) = \sqrt{J_2(\sigma_{ij})} + \alpha I_1(\sigma_{ij}) - K_{DP} = 0 \quad (2-31)$$

Où I_1 représente la trace du tenseur des contraintes ($I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$), α et K_{DP} sont des paramètres de la loi de comportement.

Dans l'espace des contraintes principales ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$), la surface de rupture de Drucker-Prager est un cône ayant pour axe la droite d'équation : $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Sa section est un cercle dans le plan déviatoire, comparable à celui du critère de Von Mises (figure 2.18).

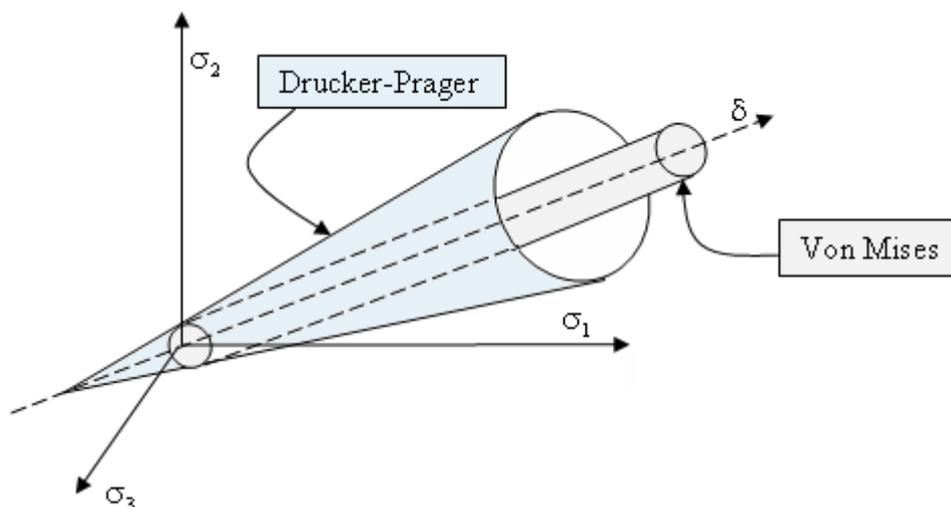


Figure 2.18 : Comparaison des critères de Drucker-Prager et von Mises dans l'espace des contraintes principales d'après Itasca 2000 [08]

Le potentiel plastique s'écrit, en fonction des invariants du tenseur des contraintes:

$$G(\sigma_{ij}) = \sqrt{J_2(\sigma_{ij})} + \beta I_1(\sigma_{ij}) + \text{constante} \quad (2-32)$$

Où β est un paramètre de la loi de comportement.

Si la règle d'écoulement est associée, les paramètres α et β sont égaux. Si les paramètres α et β sont nuls, la loi se réduit à la loi de Von Mises.

Des analogies peuvent être établies entre les critères de Mohr-Coulomb et de Drucker-Prager, qui permettent de relier les paramètres α , β et K_{DP} aux paramètres φ , ψ et c .

En condition triaxiale axisymétrique ($\sigma_2 = \sigma_3$), l'analogie entre les critères conduit aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)} \\ \beta &= \frac{2 \sin \psi}{\sqrt{3}(3 - \sin \psi)} \\ K_{DP} &= \frac{6c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)} \end{aligned} \quad (2-33)$$

En condition de déformations planes ($\varepsilon_2 = 0$), par exemple), l'hypothèse d'une loi d'écoulement associée et l'analogie entre les critères conduit alors aux relations suivantes :

$$\alpha = \frac{\text{tg } \varphi}{\sqrt{9 + 12 \text{tg}^2 \varphi}} \quad \beta = \frac{\text{tg } \varphi}{\sqrt{9 + 12 \text{tg}^2 \varphi}} \quad K_{DP} = \frac{3c}{\sqrt{9 + 12 \text{tg}^2 \varphi}} \quad (2-34)$$

La figure 2.19 donne la représentation du critère de Drucker-Prager comparée à celle du critère inscrit de Mohr-Coulomb dans l'espace des contraintes principales.

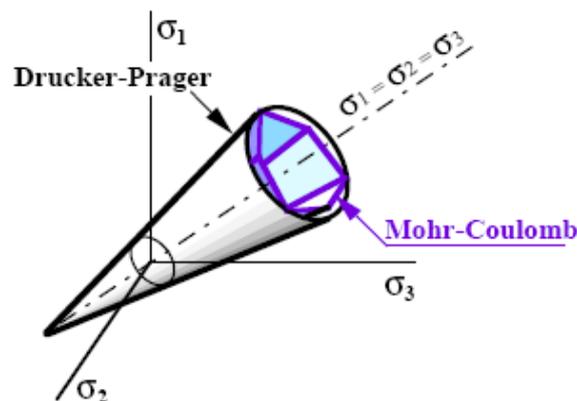


Figure 2.19: Comparaison des critères de Mohr-Coulomb et Drucker-Prager dans l'espace des contraintes principales d'après EPFL [07]

2.5. DE LA PLASTICITE VERS LA VISCOPLASTICITE

La théorie de la plasticité, que nous avons présentée précédemment, postule que la norme de l'écoulement plastique est déterminée par la condition de consistance, $dF = 0$.

Bien que formellement similaire au cas élastoplastique décrit précédemment, dans le cas de la viscoplasticité, les états tels que $F > 0$ sont possibles. C'est-à-dire l'accès au domaine extérieur à la surface de charge est ici autorisé.

Le comportement élastoplastique indépendant du temps doit être considéré comme un cas particulier du schéma plus général de l'élasto-viscoplasticité. Très schématiquement, les surfaces équipotentielles constituent une famille de surfaces, comprises entre la surface de charge plastique correspondant à une vitesse d'écoulement infiniment lente ($F = 0$), et une autre caractéristique d'une vitesse d'écoulement infiniment rapide ($F = \infty$). Entre ces deux surfaces, se situe le domaine de la viscoplasticité, comme présenté sur la figure 2.20 Boidy 2002 [03].

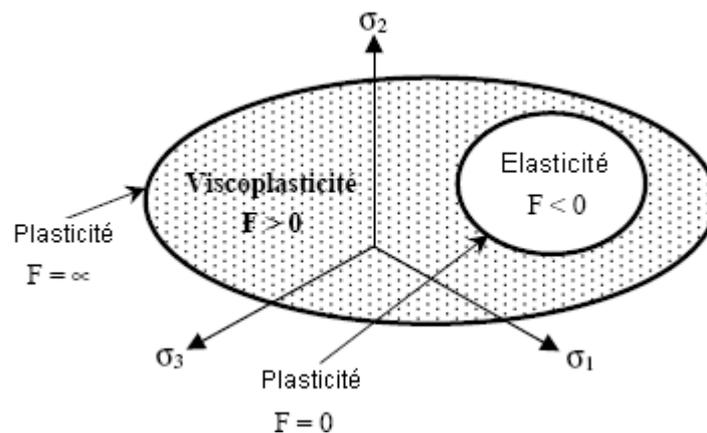


Figure 2.20 : Définition du domaine viscoplastique, d'après Perzyna 1966 [16]

2.5.1. Partition des déformations élastiques et viscoplastiques

Comme en plasticité, les déformations totales se décomposent en déformations élastiques réversibles et en déformations inélastiques dites viscoplastiques (supposées irréversibles). Ce principe de partition se traduit par l'équation suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{vp} \quad (2-35)$$

Avec :

- ε_{ij} le terme du tenseur de déformations totales,
- ε_{ij}^e le terme du tenseur de déformations élastiques,
- ε_{ij}^{vp} le terme du tenseur de déformations viscoplastiques.

2.5.2 Théorie de Perzyna et lois viscoplastiques

La sensibilité des géomatériaux à la vitesse de sollicitation a conduit Perzyna 1966 [16] à proposer une loi prenant la vitesse de déformation viscoplastique comme variable principale. Pour exprimer cette vitesse de déformation viscoplastique, Perzyna utilise le principe de partition du tenseur des vitesses de déformation totale, qui s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} \quad (2-36)$$

Où :

- $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ est le terme de la partie élastique du tenseur des vitesses de déformation,
- $\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}$ est assimilé au terme du tenseur des vitesses de déformation viscoplastique.

On sait que pour un corps homogène et isotrope les relations de comportement doivent être invariantes par changement de repère ; aussi ne peuvent-elles dépendre du tenseur des contraintes que par l'intermédiaire de trois invariants, par exemple :

$$p = \sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr} \sigma$$

$$q = J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} \cdot s_{ij}$$

$$J_3 = \frac{1}{3} s_{ij} \cdot s_{jk} \cdot s_{ki}$$

Aussi Perzyna suggère-t-il pour la frontière viscoplastique la forme :

$$F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{kl}^{vp}) = \frac{f(\sigma_{ij})}{k(\varepsilon_{kl}^{vp})} - 1 \quad (2-37)$$

f ne dépend que de l'état de contrainte et k est une fonction d'écrouissage qui dépend des déformations viscoplastiques.

En faisant l'hypothèse d'une surface de charge, $F = 0$, continue et convexe, Perzyna propose une loi d'écoulement viscoplastique de la forme :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \gamma \langle \phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2-38)$$

Où :

- γ représente la viscosité du matériau, exprimée en (s-1).
- $\phi(F)$ représente la fonction d'écoulement.
- $\langle \rangle$ correspondent aux crochets de Macauly définis par :

$$\langle \phi(F) \rangle = 0 \text{ si } \phi(F) < 0$$

$$\langle \phi(F) \rangle = \phi(F) \text{ si } \phi(F) > 0$$

D'après l'expression de F, on en déduit que :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = k(\varepsilon_{kl}^{vp}) \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2-39)$$

L'hypothèse d'érouissage isotrope implique que la fonction, « f », ne dépend que de l'état de contrainte et elle peut être exprimée dans l'espace des contraintes principales sous la forme :

$$F(\sigma_{ij}) = f(p, q, J_3)$$

Où p, q, J_3 : sont respectivement les premier, second et troisième invariants du tenseur des contraintes.

Le troisième invariant sera toujours négligé afin de simplifier les lois et de faciliter leur implémentation dans des codes de calculs. De plus, si l'on suppose que les déformations viscoplastiques se développent à volume constant, la fonction « f » ne dépend plus que de « q ».

Elle peut donc se mettre sous la forme (critère de Von Mises) :

$$f(\sigma_{ij}) = q$$

Finalement, avec l'hypothèse d'un érouissage positif, la loi d'écoulement définie par Perzyna vérifie :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \gamma \left\langle \phi\left(\frac{q}{k} - 1\right) \right\rangle \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2-40)$$

$$\text{Avec : } \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3 s_{ij}}{2 q}$$

(Annexe V.II)

On obtient :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \frac{3}{2} \gamma \left\langle \phi\left(\frac{q}{k} - 1\right) \right\rangle \frac{s_{ij}}{q} \quad (2-41)$$

Le second invariant du tenseur des vitesses de déformation viscoplastique, qui conditionne entièrement la loi viscoplastique, est donné par l'expression suivante :

$$\dot{\varepsilon}_{vp} = \left(\frac{3}{2} \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} \right)^{1/2} = \gamma \left\langle \phi \left(\frac{q}{k} - 1 \right) \right\rangle$$

Le paramètre, « k », matérialise l'érouissage positif isotrope et peut s'exprimer simplement en fonction du second invariant du tenseur des déformations viscoplastiques cumulées, également connu sous le nom de *déformation viscoplastique équivalente*, défini par :

$$\varepsilon_{vp} = \int_0^t \left(\frac{3}{2} \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} \right)^{1/2} dt \quad (2-42)$$

2.5.3. Modèle rhéologique de Lemaitre

Le modèle de Lemaitre qui représente le comportement du solide élasto-viscoplastique avec érouissage isotrope, s'appuie sur la théorie de Perzyna 1966 [16]. Cette théorie repose sur le postulat de la partition des vitesses de déformations totales en une partie élastique (réversible) et une partie viscoplastique (irréversible) G.Fabre et F.Pellet 2002 [06]. Il utilise le critère de plasticité de Von Mises et une loi d'écoulement de type puissance :

$$\Phi(F) = \left(\frac{F}{F_0} \right)^n \quad (2-43)$$

où :

- n est une constante supérieure à 1,
- $F_0 = 1$ MPa correspond à l'unité de référence.

Mais au lieu d'utiliser le travail viscoplastique comme variable d'érouissage, Lemaitre choisit la déformation viscoplastique ε_{vp} qu'il l'écrit sous la forme :

$$k(\varepsilon_{vp}) = (\varepsilon_{vp})^{-m/n} \quad (2-44)$$

où :

- m est une constante vérifiant : $1 - n < m < 0$,
- ε_{vp} est le second invariant du tenseur des déformations viscoplastique.

La loi de Lemaitre repose sur les hypothèses fondamentales suivantes:

- On se situe dans le domaine des petites déformations, en conditions isothermes.
- La déformation totale peut être décomposée en une partie élastique réversible et une partie viscoplastique irréversible (hypothèse de la partition des déformations) :

$$\varepsilon_{ij}^{\text{tot}} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{\text{vp}} \quad (2-45)$$

- Les déformations viscoplastiques se développent à volume constant.

Lemaitre considère ensuite l'hypothèse supplémentaire que le fluage dépend de l'état de contrainte déviatoire, régnant au sein du matériau, et non de la surcontrainte définie par Perzyna. En d'autres termes, il considère que le matériau n'a pas de domaine élastique à proprement parler et que la surface de charge initiale se réduit à un point. Cela se traduit par une fonction de charge, F , du type :

$$F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{kl}^{\text{vp}}) = \frac{f(\sigma_{ij})}{k(\varepsilon_{kl}^{\text{vp}})} \quad (2-46)$$

A noter qu'un seuil de contrainte σ_s de déclenchement des déformations visqueuses peut être introduit dans la fonction « f », ce qui revient à considérer une formulation basée sur le concept de Bingham (paragraphe 2.2.4.1).

Son étude des comportements des matériaux métalliques conduit Lemaitre à utiliser le critère de plasticité de von Mises ($f = q$), traduisant indirectement que seule la partie déviatoire du tenseur des contraintes est responsable du fluage.

Le modèle rhéologique (figure 2.21) associé à la loi de Lemaitre est constitué d'un ressort représentant l'élasticité du matériau placé en série avec un amortisseur conique qui traduit l'augmentation de la rigidité (écrouissage). La viscosité non linéaire de cet amortisseur conique peut ne s'exprimer qu'au-delà d'un certain seuil, σ_s , représenté par un patin.

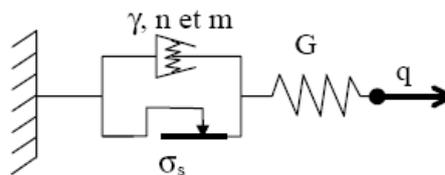


Figure 2.21: Modèle rhéologique représentant la loi viscoplastique de Lemaitre, d'après Boidy 2002 [03].

L'équation de la loi d'écoulement donnée par Perzyna se simplifie donc, et la loi viscoplastique de Lemaitre s'écrit finalement :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_{vp}}{q} s_{ij} \quad (2-47)$$

$$\text{Avec : } \dot{\varepsilon}_{vp} = \gamma \left(\frac{q - \sigma_s}{\varepsilon_{vp}^{-m/n}} \right)^n = \gamma (q - \sigma_s)^n \varepsilon_{vp}^m$$

La vitesse de déformation viscoplastique équivalente, $\dot{\varepsilon}_{vp}$, s'écrit alors :

$$\dot{\varepsilon}_{vp} = A (q - \sigma_s)^n \varepsilon_{vp}^m \quad (2-48)$$

- γ est la viscosité, souvent notée A.

- σ_s est la contrainte seuil au-dessus de laquelle les déformations viscoplastiques se développent.

a) Expression tensorielle de la loi de Lemaitre

L'expression de la loi de fluage associée, issue de l'intégration de l'équation (2-48) d'après Boidy 2002 [03], à déviateur « q », constant (paragraphe 4.9.2.), est la suivante :

$$\varepsilon_{vp} = a. (q - \sigma_s)^\beta . t^\alpha \quad (2-49)$$

Où les constantes α , β et a vérifient les relations suivantes :

$$\alpha = \frac{1}{1-m} \text{ avec : } 0 < \alpha \leq 1, \quad \beta = \frac{n}{1-m} = \alpha.n > 1 \text{ et } a = \left(\frac{A}{\alpha} \right)^\alpha \quad (2-50)$$

2.6. SYNTHÈSE

A ce stade nous avons établi un état de connaissances générales sur les lois de comportement visqueux, avec quelques exemples de lois constitutives, faisant intervenir l'effet de la vitesse de déformation, développées par différents chercheurs.

Nous présentons dans le chapitre suivant un bref aperçu sur le logiciel de calcul par éléments finis PLAXIS, ainsi que la philosophie d'intégrer des lois de comportement et la méthode de programmation qui permettra la création d'une librairie de lien dynamique (.DLL).

Chapitre 3

3. PRESENTATION DU LOGICIEL PLAXIS

3.1. INTRODUCTION

PLAXIS est un logiciel d'éléments finis en deux dimensions spécialement conçu pour réaliser des analyses de déformation et de stabilité pour différents types d'applications géotechniques, qui nécessitent parfois des lois de comportement avancées pour la simulation du comportement non-linéaire des sols et/ou des roches anisotropiques et dépendantes du temps. De plus, des procédures spéciales sont nécessaires pour prendre en compte les pressions interstitielles au sein du sol. Enfin, une grande partie des projets géotechniques impliquent la modélisation des structures et de leurs interactions avec le sol. Le logiciel Plaxis V8 [17] dispose de fonctions lui permettant de traiter tous les aspects des structures géotechniques complexes.

Les situations réelles peuvent être représentées par un modèle plan ou axisymétrique. Le logiciel utilise une interface graphique pratique permettant aux utilisateurs de générer rapidement un modèle géométrique et un maillage d'éléments finis basés sur la coupe verticale de l'ouvrage à étudier. Les utilisateurs sont supposés être capables de travailler dans un environnement Windows. Pour se familiariser rapidement avec l'utilisation de cette interface et avec les caractéristiques principales du programme.

Certains modèles de comportement sont déjà implémentés dans ce logiciel. Pour modéliser le comportement en fluage, des lois de comportement viscoélastiques ont été développées. Certaines ont été implémentées dans le logiciel FLAC pour simuler le comportement des matériaux visqueux, telles que (Roches, sel gemme, potasse, argilites dans lesquelles seront stockés les colis de déchets nucléaires...etc.). Par contre ces modèles ne sont pas encore intégrés dans Plaxis, L'objectif de ce chapitre est l'implémentation d'une loi de comportement viscoplastique dans ce logiciel.

Pour ce faire, une première démarche est de se familiariser avec le logiciel ainsi qu'avec le langage de programmation permettant l'implémentation, à travers une loi élastique linéaire isotrope et orthotrope.

En ce sens, il est important d'appréhender et de comprendre la méthode de programmation qui permettra la création d'une librairie dynamique (DLL) au sein même du logiciel de modélisation.

Puis, après avoir programmer une loi simple et comparer les résultats de celle-ci avec les résultats des lois déjà existantes dans le logiciel, il est alors possible de mettre en place un modèle de comportement viscoplastique et de vérifier son exactitude par des comparaisons avec des résultats existants.

3.2. POSSIBILITE D'INTEGRATION DES LOIS DE COMPORTEMENT

Le logiciel Plaxis dispose depuis la version 8.0 d'une option permettant à l'utilisateur d'implémenter ses propres lois de comportement des matériaux. Cependant la version 8.1 ne permet de définir des modèles que de manières ponctuelles, directement sous l'interface graphique du logiciel. En effet, la saisie des paramètres du modèle se fait dans une fenêtre présentant un tableau à remplir. Mais ce tableau n'est pas enregistrable. Cela s'avère pratique si l'on n'a qu'une seule simulation à effectuer mais c'est rarement le cas. C'est pourquoi il est recommandé d'utiliser la version 8.2 ou plus. En effet avec cette version, l'utilisateur peut implémenter des modèles de façon permanente. Pour cela il doit programmer en FORTRAN ou avec d'autres langages, ses modèles puis compiler son programme en (*.dll) signifie *Dynamic Link Library*, ou en français Bibliothèque de liens dynamiques, qui seront par la suite placées dans le répertoire principal de Plaxis.

Le programme à réaliser dans ce but est en fait une subroutine qui sera utilisée par le programme principal. Or cette subroutine est appelée dans ce dernier : `User_Mod`. Par conséquent, il est obligatoire de le nommer de la même façon.

De plus, les arguments de cette subroutine sont définis de manière précise. Ainsi, on doit avoir un programme commençant forcément par :

Subroutine **User_Mod** (*IDTask, iMod, IsUndr, iStep, iTer, iEl, Int, X, Y, Z, Time0, dTime, Props, Sig0, Swp0, StVar0, dEps, D, Bulk_W, Sig, Swp, StVar, ipl, nStat, NonSym, iStrsDep, iTimeDep, iTang, iPrjDir, iPrjLen, iAbort*)

Les significations des arguments de la subroutine sont données en (annexe I) et sont rappelées au début de chaque programme en commentaire.

Le programme se décompose donc en six parties dont quatre principales :

- 1- L'initialisation des variables d'état,
- 2- Le calcul des contraintes,
- 3- La création de la matrice de déformation,
- 4- La création de la matrice d'élasticité du matériau.

Chaque partie correspond à une valeur de la variable `IDTask`, qui permettra au programme principal de réaliser un calcul ordonné, étant donné que certaines parties du sous programme font appel à des valeurs calculées dans d'autres parties.

3.2.1. Initialisation des variables d'état

Cette phase, effectuée lorsque `IDTask = 1`, consiste à fixer les variables d'état du problème et à les mémoriser. Les variables d'état sont calculées à chaque étape et stockées dans un fichier auxiliaire afin d'être utilisées lors du calcul des contraintes.

En effet, le calcul des contraintes est réalisé grâce aux valeurs des variables d'état obtenues à l'étape précédente de calcul. De plus, en ce qui concerne la première étape de calcul, c'est-à-dire quand les variables d'état sont nulles, les contraintes sont calculées à partir des conditions initiales en contrainte grâce à la procédure Ko.

Il est nécessaire de préciser que pour la première itération, toutes les variables d'état valent « 0 » et il convient donc de les calculées à partir des conditions de contrainte de la première étape.

3.2.2. Calcul des contraintes

Cette phase, effectuée lorsque `IDTask = 2`, il s'agit de la partie la plus importante du programme.

Les contraintes effectives sont calculées et corrigées à chaque itération à partir des contraintes initiales, de la matrice de rigidité et de l'incrément de déformations $dEps$, tout en suivant les équations du modèle utilisé. (Hooke isotrope, orthotrope ou loi viscoplastique).

3.2.3. Création de la matrice de rigidité effective

Cette phase, effectuée lorsque $IDTask = 3$, consiste à établir la matrice de rigidité effective qui traduit la relation contrainte-déformation du modèle utilisé (qu'elle soit élastique ou non).

Par défaut cette matrice est nommée D par Plaxis est initialement mise à zéro grâce à une subroutine déjà présente dans Plaxis nommée $MZeroR$.

Cette matrice est composée des éléments liant les déformations aux contraintes sous la forme: $Sig = D * Eps$. Cette phase de calcul est également l'occasion de préciser, en fin de tâche, si l'on considère un sol drainé ou non, auquel cas il est nécessaire d'ajouter aux termes de la matrice un terme de correction tenant compte de la pression interstitielle nommé $Bulk_W$ défini en fin de tâche ou généré par Plaxis si inconnu de l'utilisateur.

3.2.4 Définition du nombre de variables d'état

Cette tâche, effectuée lorsque $IDTask=4$, permet de fixer le nombre de variables d'état. Dans ce cas, nous avons qu'une seule variable d'état.

On ne fait que retourner ici, le nombre de variables d'état du problème à chaque itération afin d'éviter au programme un calcul de toutes les valeurs du tableau prédéfini pour les variables d'état.

3.2.5 Propriétés de la matrice

Cette tâche, effectuée lorsque $IDTask=5$, on informe ici le logiciel sur les propriétés de la matrice de rigidité, il ya quatre paramètres qui influent sur les calculs à savoir :

- 1- La symétrie de la matrice,
- 2- La dépendance au temps des termes de la matrice,
- 3- La dépendance vis-à-vis de la contrainte des termes de la matrice
- 4- Et enfin si elle est tangente.

3.2.6 Création de la matrice d'élasticité

Cette tâche est effectuée lorsque $IDTask=6$. Dans cette partie du programme, on définit une matrice contenant uniquement les termes élastiques de la relation contrainte-déformation. Elle est appelé

matrice d'élasticité du matériau. Dans le cas d'une loi de comportement élastique, cette matrice sera identique à celle définie à l'étape IDTask=3.

3.3 CREATION DES LIBRAIRIES DYNAMIQUES (DLL)

Après avoir construit le programme fortran dans l'éditeur de programme, la subroutine doit être compilée et les données produites par le programme, exportées.

En effet, la compilation au sein de l'éditeur permet de détecter les erreurs éventuelles de syntaxe et de déclaration de variables. Puis, on exporte les tableaux de valeurs calculés vers une librairie dynamique (dll) grâce à une ligne de commande précisément située après la déclaration des variables :

- - Pour l'utilisation de Lahey Fortran (LF90, LF95, ...):

```
DLL_Export User_Mod
```

- - Pour l'utilisation Digital Visual Fortran :

```
!DEC$ ATTRIBUTES DLLEExport :: User_Mod
```

Ensuite, après avoir transporté le programme ainsi créé dans le répertoire principal de Plaxis, et afin de compiler la subroutine USRMOD.FOR en un fichier dll, il suffit d'exécuter la commande suivante dans la fenêtre d'invite de commande DOS en s'étant situé dans le programme principal de Plaxis.

- - Pour l'utilisation de Lahey Fortran 90:

```
LF90 -win -dll USRMOD.FOR -lib LFUsrLib
```

- - Pour l'utilisation Lahey Fortran 95:

```
LF95 -win -dll USRMOD.FOR -lib LFUsrLib -ml LF90
```

- - Pour l'utilisation Digital Visual Fortran:

```
DF /winapp USRMOD.FOR DFUsrLib.lib /dll
```

Dans tous les cas le fichier **USRMOD.DLL**, doit être créé et placé dans le répertoire principal du PLAXIS. Par la suite, ce fichier est appelé à partir d'un fichier exécutable du programme nommé (PLASW.EXE). Une fois que le modèle est utilisé, PLAXIS exécutera les commandes figurant dans le fichier USRMOD.DLL, [18].

3.4. SAISIR LES PARAMETRES DU MODELE À IMPLEMENTER

Quand le fichier USRMOD.DLL est créé et placé sous Plaxis, les paramètres du modèle prédéfini par l'utilisateur peuvent être saisis, en cliquant sur l'icône « materials set » sous Plaxis, on ouvre une fenêtre dans laquelle figure un tableau de bord avec trois onglets: Général, Paramètres, Interface, (**Figure 9.1**). Le modèle implémenté peut être sélectionné à partir du menu déroulant « material model », la dernière option de ce menu est nommée « User-defined model ». C'est au travers cette dernière qu'on pourra utiliser nos propres lois de comportement.

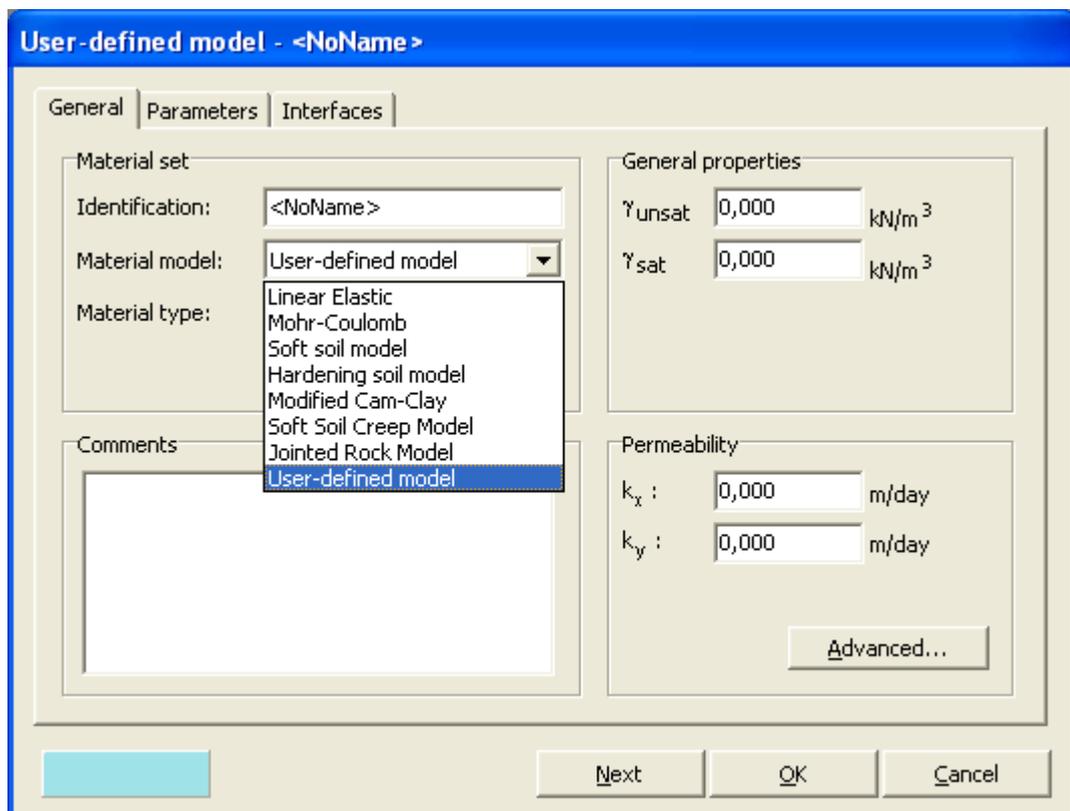


Figure 9.1. : fenêtre permettant le choix de la loi de comportement [18]

3.5. SYNTHÈSE

Après avoir présenté un aperçu sur le code de calcul par éléments finis PLAXIS, ainsi que sur la philosophie d'intégration des lois de comportement à travers la programmation dynamique des DLL. Alors le chapitre suivant sera consacré à l'implémentation des lois de comportement de type simples (linéaires élastiques) et de type viscoplastique, pour prédire le comportement des matériaux visqueux.

Chapitre 4

4. IMPLEMENTATION

4.1. IMPLEMENTATION D'UNE LOI DE COMPORTEMENT ELASTIQUE LINEAIRE

Afin de pouvoir contrôler la méthode de création d'une librairie dynamique (DLL) utilisable par le logiciel Plaxis à partir d'un programme fortran, et de se familiariser avec l'environnement de programmation, il est préférable de commencer la programmation d'une loi élastique linéaire (Loi de Hooke). Cette loi régit les matériaux ayant un comportement élastique linéaire. Il y a deux raisons principales à cela:

- 1- Pour cela, il est judicieux d'implémenter une loi de comportement ne présentant pas de difficulté pour la mise en œuvre du programme et de comparer les résultats de celle-ci avec les résultats obtenus par la même loi déjà présentée dans Plaxis.
- 2- Ainsi, la loi de Hooke est une loi de comportement élastique traduit par une relation biunivoque instantanée entre les déformations et les contraintes.

4.2. CAS D'UNE LOI ELASTIQUE LINEAIRE ISOTROPE (LOI DE HOOKE)

Dans le domaine élastique linéaire, la loi de Hooke relie la déformation à la contrainte exercée par l'intermédiaire du module de Young.

La loi de Hooke traduit la linéarité entre l'allongement d'une structure dans une direction donnée et l'effort appliqué dans cette direction, soit la relation suivante :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (4-1)$$

Où « E » est le module d'Young du matériau, « ε » est la déformation du matériau et « σ », la contrainte exercée sur le matériau.

Pour un état de contrainte tridimensionnelle, cette loi de comportement est généralisée sous forme matricielle de la manière suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}}(x) = \underline{\underline{D}}(x) \underline{\underline{\varepsilon}}(x) \quad (4-2)$$

Où $\sigma(x)$ est le tenseur des contraintes, $D(x)$ est le tenseur de rigidité effective du matériau et $\varepsilon(x)$ est le tenseur des déformations.

Le solide est élastique linéaire homogène si le tenseur de rigidité est égal au tenseur d'élasticité et s'il est indépendant du point considéré.

De plus, le milieu élastique linéaire est dit isotrope si la loi de comportement est la même quelque soit la direction choisie.

Dans l'hypothèse d'isotropie, la matrice $\underline{\underline{D}}$ se réduit à 2 coefficients indépendants et la loi de comportement s'exprime de la manière suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\varepsilon}} = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{\delta}} \quad (4-3)$$

Où λ et μ sont appelés les coefficients de Lamé.

4.2.1 Développement Tensoriel

Cette loi sous forme développée peut être écrite de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{pmatrix} \quad (4-4)$$

Soit, en tenant compte de la relation entre λ , μ , E et ν :

$$\frac{1}{E} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)},$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij} \Rightarrow \gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} \quad \tau_{ij} = G\gamma_{ij} = \frac{E}{2(1 + \nu)}\gamma_{ij} \quad (4-5)$$

On peut réécrire cette matrice sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{pmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \quad (4-6)$$

Puis en posant :

$$A = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad B = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4-7)$$

On peut réécrire cette matrice sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & B & 0 & 0 & 0 \\ B & A & B & 0 & 0 & 0 \\ B & B & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \quad (4-8)$$

On observe que celle-ci est symétrique.

Par ailleurs il peut être utile d'inverser la matrice de rigidité donnant les déformations en fonction des contraintes :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} \quad (4-9)$$

4.2.2. Implémentation

Afin d'implémenter cette loi de comportement, on suit la procédure établie précédemment. Le programme complet est attaché en (annexe I).

4.2.2.1. Initialisation des variables d'états

Dans le cas de la loi de Hooke isotrope, il n'y a qu'une seule variable d'état. De plus, cette partie est l'occasion de définir les paramètres que l'utilisateur pourra prendre soin de compléter dans l'onglet « parameters » de la fenêtre « material set ».

4.2.2.2 Calcul des contraintes

Le calcul des contraintes est réalisé grâce à deux boucles « do » sur les indices « i » et « j » représentant les lignes et colonnes de la matrice. L'objectif de cette partie est de calculer pour chaque incrément de déformation, le vecteur contraint ainsi obtenu par la somme des contraintes initiales et des contraintes issues du produit tensoriel $\underline{D} \underline{\varepsilon}$. Au total : $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_0 + \underline{D} \underline{\varepsilon}$

Où :

D est la matrice de rigidité effective,

σ_0 Contraintes initiales.

4.2.2.3. Création de la matrice de rigidité effective

Cette matrice a été précisée dans la partie théorique précédente.

Cette partie du sous programme consiste à rappeler les paramètres mis en jeu, à définir les variables intermédiaires « Term i », à initialiser les termes de la matrice à zéro, et enfin assigner chaque terme

aux éléments de la matrice. Du fait de la symétrie de la matrice, il est judicieux d'effectuer deux boucles « do » consécutives afin de limiter les lignes de commandes.

Cette partie est également l'occasion de préciser le terme de correction à ajouter aux termes de la matrice dans le cas d'un comportement de sol non-drainé, qui traduirait la pression créée au sein de l'eau présente dans le volume des vides.

Soit le module de déformation volumique :

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (4-10)$$

Soit le module de déformation volumique de l'eau :

$$\frac{K_w}{n} = \frac{3(\nu_u - \nu)}{(1-2\nu_u)(1+\nu)} K \quad (4-11)$$

4.2.2.4. Définition du nombre de variable d'état

Il s'agit d'assigner à la variable nStat le nombre de paramètre d'état du modèle.

4.2.2.5. Propriétés de la matrice

Dans le cas d'une loi de comportement linéaire élastique isotrope, la matrice est symétrique, non-tangente, indépendante du temps et des contraintes. On assigne aux différentes variables la valeur 1 ou 0 selon que la matrice possède ou non une propriété particulière. (Ces variables sont définies comme étant des booléens)

4.2.2.6. Résultats

Afin de valider cette loi et d'observer le bien fondé de l'implémentation nous avons étudiés plusieurs cas, nous présentons ci-dessous un exemple de modélisation d'une fondation circulaire reposant sur la surface d'une couche de sable de 4.0 m de hauteur. En dessous se trouve un substratum rocheux. La fondation peut être rigide (on impose un déplacement uniforme en surface de 0,10 m).

Le problème est axisymétrique. L'extension latérale sera prise à 5 m, soit 5 fois le rayon : on vérifiera que cette limite n'intervient pas sur le champ de déplacement.

L'objectif de cet exemple est de comparer les résultats obtenus entre la loi implémentée par l'utilisateur et la loi déjà présentée dans Plaxis. La géométrie du problème ($x=5m$, $y=4m$) se présente sous la forme suivante :

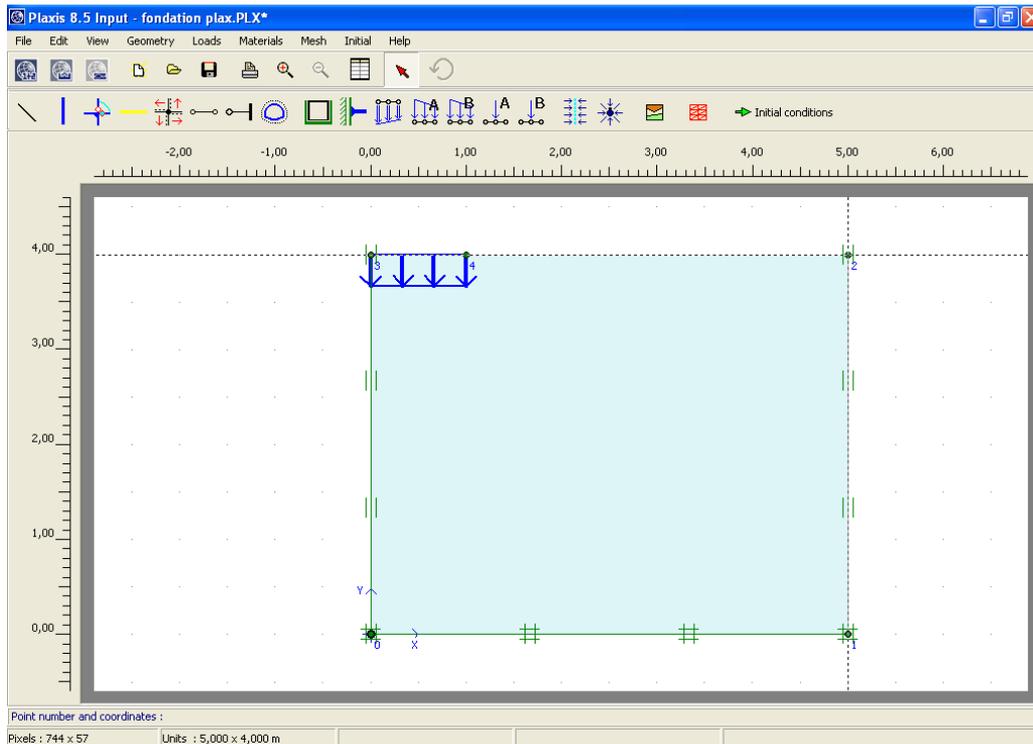


Figure 4.1. Géométrie du problème

Les paramètres du matériau sont $E=13000 \text{ kN/m}^2$ et $\nu=0.3$. Ci-dessous, on présente la comparaison des deux lois à travers le maillage déformé, la déformation et la contrainte effective dans une direction principale (ε_{xx} et σ_{xx}).

Maillage déformé

a) Loi présentée dans Plaxis

b) Loi implémentée

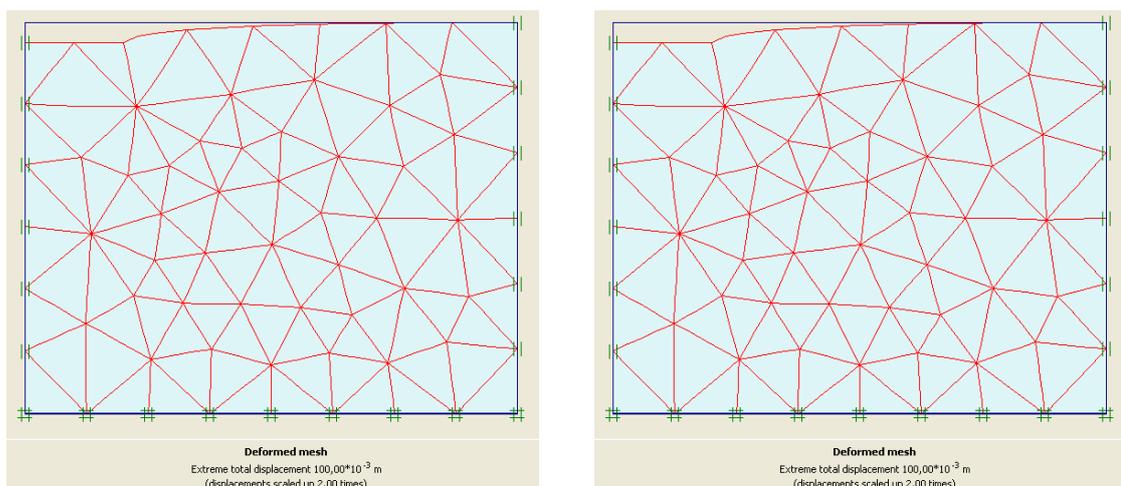
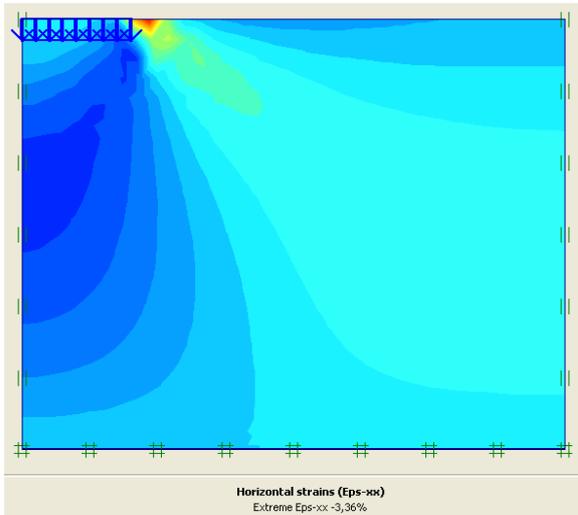


Figure 4.2. Comparaison des maillages déformés

Le maillage déformé est identique, le commentaire note : « extreme total displacement 1m ».

Déformation Horizontale

a) Loi présentée dans Plaxis



b) Loi implémentée

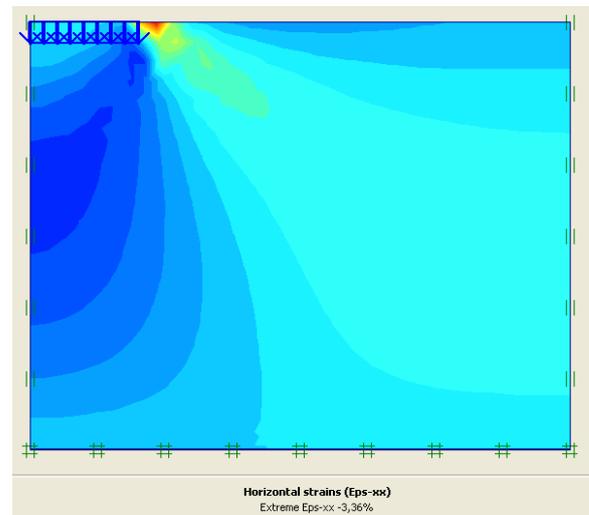
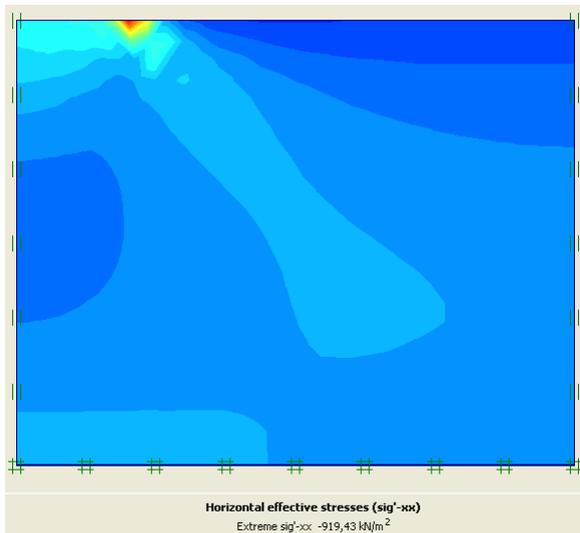


Figure 4.3. Comparaison des déformations horizontales

Dans cette direction, le champ de déformation horizontale rapporté à la légende est identique ($\epsilon_{xx_{\max}} = -3,36\%$) dans les deux cas.

Contrainte Effective Horizontale

a) Loi présentée dans Plaxis



b) Loi implémentée

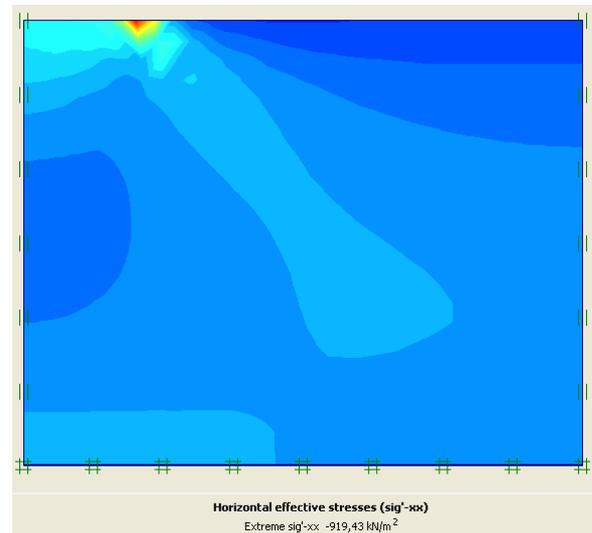


Figure 4.4. Comparaison des contraintes effectives horizontales

Dans cette direction, le champ de contrainte effective horizontale est le même dans les deux cas ($\sigma_{xx_{\max}} = -919,43 \text{ kN/m}^2$).

4.2.3. Synthèse

Enfin les calculs précédents donnent des résultats identiques. En effet les maillages sont les mêmes, ainsi que les déformations et les contraintes dans toutes les directions, donc les résultats auraient beaucoup satisfaisants.

4.3. CAS D'UNE LOI ELASTIQUE LINEAIRE ORTHOTROPE

La nécessité de la présence d'une loi élastique linéaire orthotrope vient du fait que beaucoup de roches ne peuvent être assimilées à un matériau isotrope. La cause en est les conditions de sédimentation pour certaines, les conditions tectoniques pour d'autres, ce qui se traduit par une anisotropie des propriétés mécaniques du matériau.

En réalité, cette anisotropie se réduit dans beaucoup de cas à une orthotropie, c'est à dire qu'il existe une direction de plan dans laquelle le matériau est élastique isotrope. De plus, le type de sollicitation appliquée aux sols a conduit à considérer un comportement orthotrope de révolution (isotrope transverse).

4.3.1. Elasticité à isotropie transverse

Un milieu est élastique à isotropie transverse si ses caractéristiques d'élasticité sont identiques pour tous les couples de directions symétriques par rapport à un axe.

Si l'axe d'isotropie transverse est repéré par \vec{x}_2 le matériau est isotrope dans tous les plans normaux à \vec{x}_2 , figure 4.5.

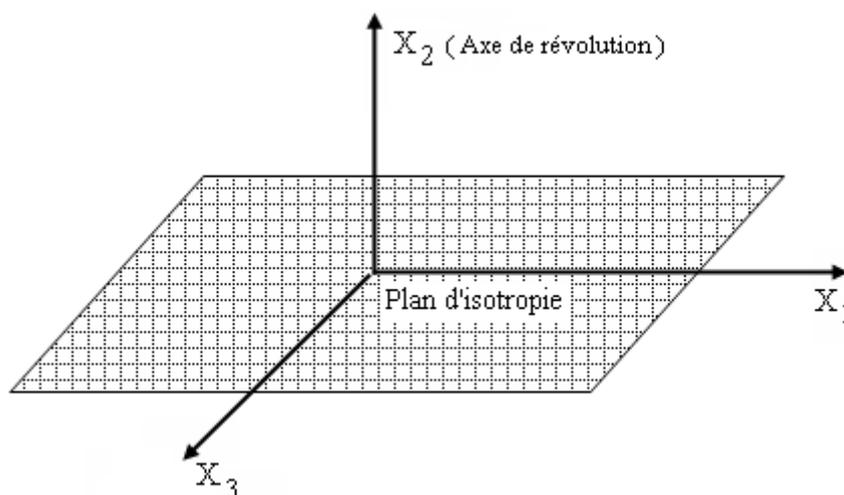


Figure 4.5. : Milieu à isotropie transverse

4.3.2. Développement Tensoriel

De cette manière, les caractéristiques élastiques du matériau sont donc définies par 5 coefficients indépendants : deux modules d'élasticité E_1 et E_2 , deux coefficients de Poissons ν_1 et ν_2 , et un module de cisaillement G_2 .

$E_1 = E_3$ mêmes modules de tension dans les directions 1 et 3

$\frac{\nu_1}{E_1} = \frac{\nu_3}{E_3}$: mêmes contractions suivant 1 et 3 pour une traction appliquée suivant 2.

$G_1 = G_3$: mêmes modules de cisaillement.

$G_1 = \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)}$: module de cisaillement autour de 2.

Les conditions d'isotropie dans les plans normaux à \vec{x}_2 d'après Zienkiewicz [20] impliquent :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_2}{E_2} & \frac{-\nu_1}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_2}{E_2} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_2}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_1}{E_1} & \frac{-\nu_2}{E_2} & \frac{1}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu_1}{E_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix} \quad (4-12)$$

Puis, en inversant la matrice (numériquement) sous une forme appropriée à l'implémentation, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} (E_2 - E_1 \cdot \nu_2^2) & E_2 \cdot \nu_2 (1 + \nu_1) & E_1 \cdot \nu_2^2 + E_2 \cdot \nu_1 & 0 & 0 & 0 \\ E_2 \cdot \nu_2 (1 + \nu_1) & \left(\frac{E_2^2 - E_2^2 \cdot \nu_1}{E_1} \right) & E_2 \cdot \nu_2 (1 + \nu_1) & 0 & 0 & 0 \\ E_1 \cdot \nu_2^2 + E_2 \cdot \nu_1 & E_2 \cdot \nu_2 (1 + \nu_1) & (E_2 - E_1 \cdot \nu_2^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G_2}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G_2}{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{pmatrix} \quad (4-13)$$

$$\text{où } A = \frac{E_1}{(1 + \nu_1)(2E_1 \cdot \nu_2^2 + E_2 \cdot \nu_1 - E_2)}$$

$$\mu_1 = G_1 = \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)} \quad (4-14)$$

4.3.3. Implémentation

De la même manière que dans le cas de la loi isotrope, on suit la procédure définie plus haut. On obtient le programme attaché en (annexe II).

4.3.4. Initialisation des variables d'états

Dans le cas de la loi élastique linéaire orthotrope de révolution, comme pour la loi isotrope, il n'y a qu'une seule variable d'état. Par contre, on a vu précédemment, que les caractéristiques élastiques du matériau dépendent de cinq coefficients indépendants. Cette partie permet donc de définir les paramètres que l'utilisateur pourra prendre soin de compléter dans l'onglet « parameters » de la fenêtre « material set ».

4.3.5. Calcul des contraintes

De la même manière que pour la loi isotrope, le calcul des contraintes est réalisé grâce à deux boucles « do » successives, sur les indices i et j représentant les lignes et colonnes de la matrice. L'objectif de cette partie est de calculer pour chaque incrément de déformation, le vecteur contraint ainsi obtenu par la somme des contraintes initiales et des contraintes issues du produit tensoriel $\underline{D} \underline{\varepsilon}$.

$$\text{Au total : } \underline{\sigma} = \underline{\sigma}_0 + \underline{D}^* \underline{\varepsilon}$$

4.3.6. Création de la matrice de rigidité effective

La matrice de rigidité permettant le calcul des contraintes est composée d'éléments précisés dans la partie théorique précédente.

Cette partie du programme consiste à introduire la forme et le contenu de la matrice au sein même du programme nécessite d'utiliser des variables intermédiaire tel que « Term i , n , A ».

Cette partie est également l'occasion de préciser le terme de correction à ajouter aux termes de la matrice dans le cas d'un comportement de sol non-drainé, qui traduirait la pression créée au sein de l'eau présentée dans le volume des vides. Dans ce cas en plus de la raideur et de la résistance du squelette du sol, PLAXIS ajoute automatiquement un module de compressibilité pour l'eau et distingue les contraintes totales, les contraintes effectives et les surpressions interstitielles.

Contrainte totale : $\sigma_0 = \Delta p = K_u \cdot \Delta \varepsilon_v$

Contrainte effective : $\sigma_0' = \Delta p' = (1 - B)\Delta p = K_u' \cdot \Delta \varepsilon_v$

Surpression interstitielle :

$$\Delta p_w = B\Delta p = \frac{K_w}{n} \Delta \varepsilon_v \quad (4-15)$$

B : Coefficient de Skempton.

Remarquons que les paramètres de modélisation à entrer sont les paramètres effectifs, c'est-à-dire E', ν', c', φ' et non pas $E_u, \nu_u, c_u, \varphi_u$.

« Δp » correspond ici à une augmentation de la contrainte totale moyenne, « $\Delta p'$ » est une augmentation de la contrainte effective moyenne et « Δp_w » est une augmentation de la surpression interstitielle. « B » est le coefficient de Skempton, exprimant la proportion entre l'augmentation de la surpression interstitielle et l'augmentation de la contrainte totale. « K_u » est le module de compressibilité non drainé, « K' » est celui du squelette du sol, « K_w » est celui du fluide interstitiel, « n » est la porosité et « $\Delta \varepsilon_v$ » est l'augmentation de la déformation volumétrique.

PLAXIS n'utilise pas un module de compressibilité de l'eau réaliste pour le comportement non drainé, car cela peut conduire à une matrice de raideur mal conditionnée et à des problèmes numériques. En fait, la raideur totale en compression isotrope du complexe sol-eau est basée, par défaut, sur un module de compression non drainé implicite :

$$K_u = \frac{2G(1 + \nu_u)}{3(1 - 2\nu_u)} \quad \text{où} \quad G = \frac{E'}{2(1 + \nu')} \quad \text{et} \quad \nu_u = 0.495 \quad (4-16)$$

Ceci implique que l'eau interstitielle soit légèrement compressible et donc un coefficient « B » légèrement inférieur à « 1,0 ». Ainsi, en chargement isotrope, un faible pourcentage de la charge sera converti en contraintes effectives, au moins pour les faibles valeurs du coefficient de Poisson. Pour le comportement non drainé, le coefficient de Poisson effectif devrait être inférieur à « 0,35 ». Utiliser des valeurs plus importantes entraînerait que l'eau ne soit pas suffisamment raide par rapport au squelette du sol.

4.3.7. Détermination du terme de correction de la pression interstitielle.

A partir de la matrice (4-12) on exprime les relations suivantes :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_2}{E_2} & \frac{-\nu_1}{E_1} \\ \frac{-\nu_2}{E_2} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_2}{E_2} \\ \frac{-\nu_1}{E_1} & \frac{-\nu_2}{E_2} & \frac{1}{E_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (4-17)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\nu_1}{E_1} \sigma_{33};$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_{11} - \frac{\nu_1}{E_2} \sigma_{33};$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\nu_1}{E_1} \sigma_{11}.$$

La pression d'un liquide (eau) au repos est toujours isotrope ce qui donne:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_0$$

Avec $\varepsilon_v = \text{tr}(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$

On obtient :

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= 2 \frac{\sigma_0}{E_1} (1 - \nu_1) + \frac{\sigma_0}{E_2} (1 - 4\nu_2) \\ &= \sigma_0 \left(\frac{2(1 - \nu_1)}{E_1} + \frac{(1 - 4\nu_2)}{E_2} \right) \end{aligned}$$

$$\varepsilon_v = \sigma_0 \left(\frac{2 E_2 (1 - \nu_1) + E_1 (1 - 4\nu_2)}{E_1 \cdot E_2} \right) \quad (4-18)$$

La surpression interstitielle est donnée par: $\Delta p_w = B \Delta p = \frac{K_w}{n} \Delta \varepsilon_v$ [16]

En remplaçant dans (4-18) on obtient :

$$\sigma_0 = \frac{K_w}{n} \Delta \varepsilon_v$$

$$\Rightarrow \frac{K_w}{n} = \left(\frac{E_1 \cdot E_2}{2 E_2 (1 - \nu_1) + E_1 (1 - 4\nu_2)} \right) \quad (4-19)$$

Le module d'élasticité non drainé est lié au module d'élasticité effectif par la relation :

$$E' = \frac{2(1 + \nu')}{3} E_u \quad (4-20)$$

4.3.8. Création de la matrice d'élasticité

Comme il l'a été précisé précédemment, la matrice de rigidité effective est la matrice d'élasticité dans le cas d'une loi de comportement élastique linéaire.

4.3.9. Propriété de la matrice

Dans le cas d'une loi de comportement linéaire élastique orthotrope, la matrice est symétrique, non tangente, non dépendante du temps, ni des contraintes. On assigne aux différentes variables la valeur 1 ou 0 selon que la matrice possède ou non une propriété particulière. (Ces variables sont définies comme étant des booléens)

4.3.10. Création de la matrice d'élasticité

Comme il l'a été précisé précédemment, la matrice de rigidité effective est la matrice d'élasticité dans le cas d'une loi de comportement élastique linéaire.

4.3.11. Résultats

Pour valider cette loi, nous avons pris l'exemple suivant :

Il s'agit d'une digue supposée orthotrope, de 10 m de largeur et de 4 m de hauteur et comme on est en déformation plane, un mètre (01 m) de longueur. Elle est constituée d'un matériau ayant les caractéristiques suivantes :

- module de Young suivant la direction (xx) $E_1 = 100000$ kPa,
- module de Young suivant la direction (yy) $E_2 = 75000$ kPa,
- Coefficient de Poisson $\nu_1 = 0,4$,
- Coefficient de Poisson $\nu_2 = 0,3$,
- Le module de cisaillement $G_2 = 42000$ kPa,
- Poids volumique 19 kN/m³,
- Angle de frottement interne $\varphi = 40^\circ$,
- Cohésion $c = 0,2$.

Remarque :

La cohésion a la dimension d'une contrainte. PLAXIS peut manipuler des sols sans cohésion ($c = 0$), mais certaines options ne fonctionnent pas bien. Il est conseillé aux utilisateurs, d'attribuer, même à des matériaux purement pulvérulents, une très faible cohésion ($c \geq 0,2$ kPa) pour des questions numériques.

Modélisation

On se place avec un poids volumique de 19 kN/m^3 du matériaux, et on applique une surcharge de compression uniformément répartie de 1000 kPa suivant la direction (yy). Comme conditions limites la digue est supposée encastree à sa base. Le présent exemple est bien illustré sur la figure suivante.

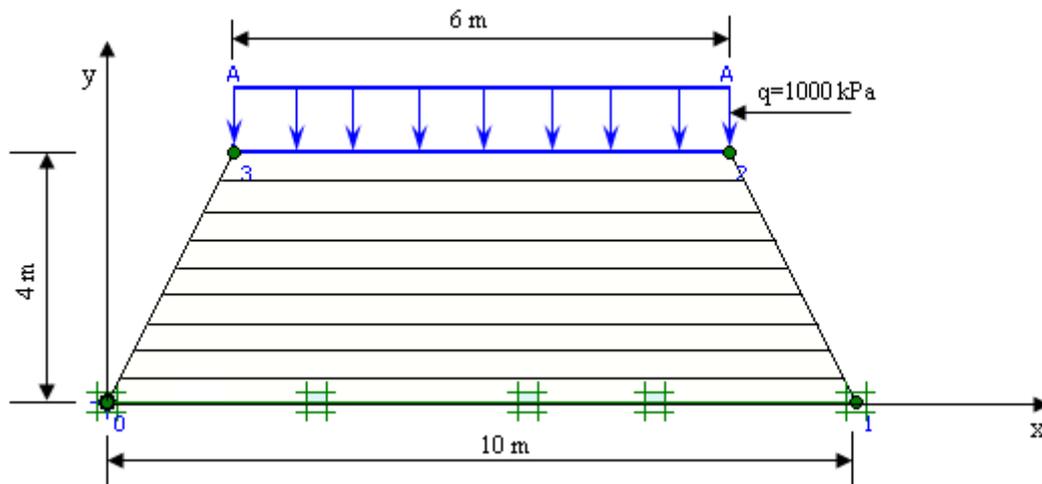


Figure 4.6. Géométrie du problème

Afin de justifier cette loi, nous avons effectué une comparaison avec le modèle existant dans PLAXIS (Jointed Rock Model). Ce dernier est de type elastoplastique, conçu pour la modélisation des matériaux anisotropes tels que les roches. Nous rappelons que notre modèle est parfaitement élastique, donc pour que nous puissions le comparé nous devons appliquer une faible sollicitation, et cela pour rester toujours dans le domaine élastique du modèle (Jointed Rock Model).

Les résultats obtenus à partir de cette modélisation sont présentés ci-dessous :

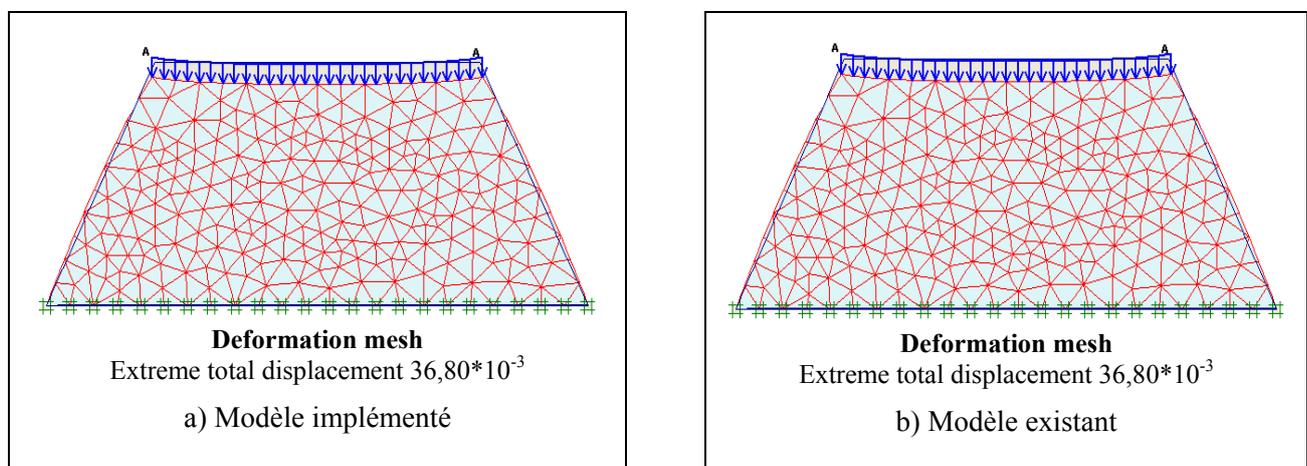


Figure 4.7. Comparaison du maillage déformé

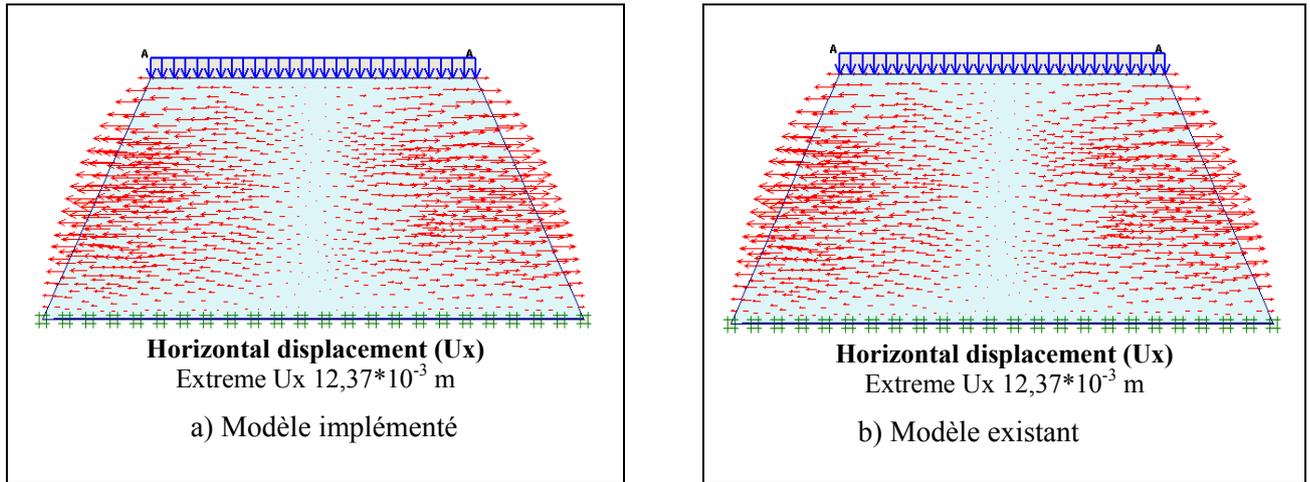


Figure 4.8. : Comparaison des déplacements horizontaux U_x

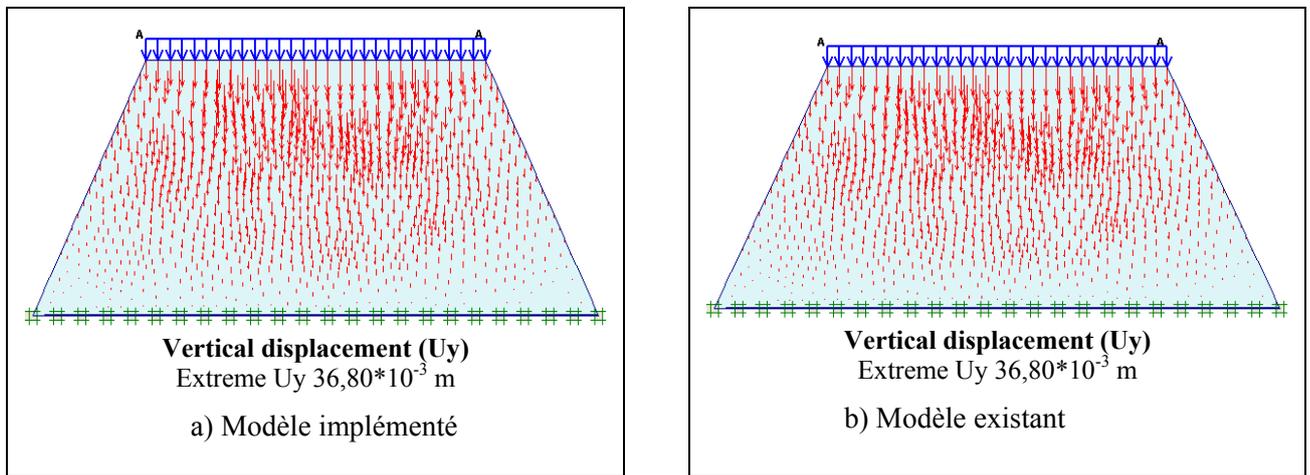


Figure 4.9. : Comparaison des déplacements verticaux U_y

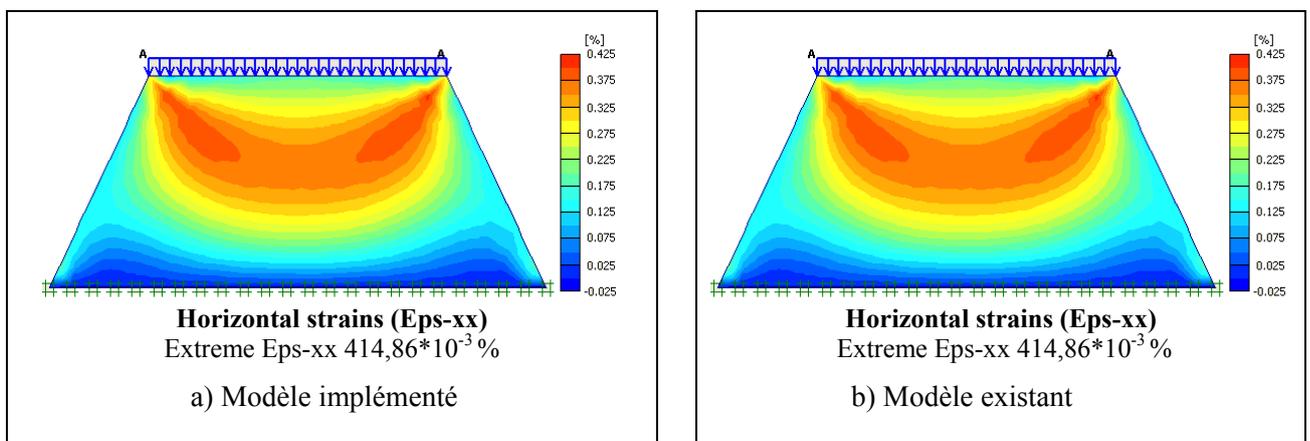


Figure 4.10. : Comparaison des déformations horizontales ϵ_{xx}

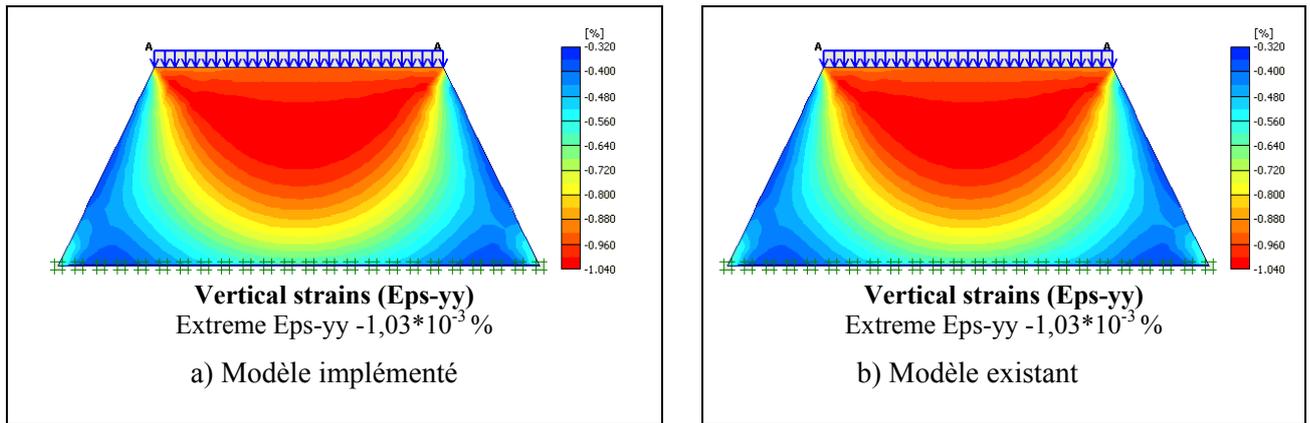


Figure 4.11. : Comparaison des déformations Verticales ϵ_{yy}

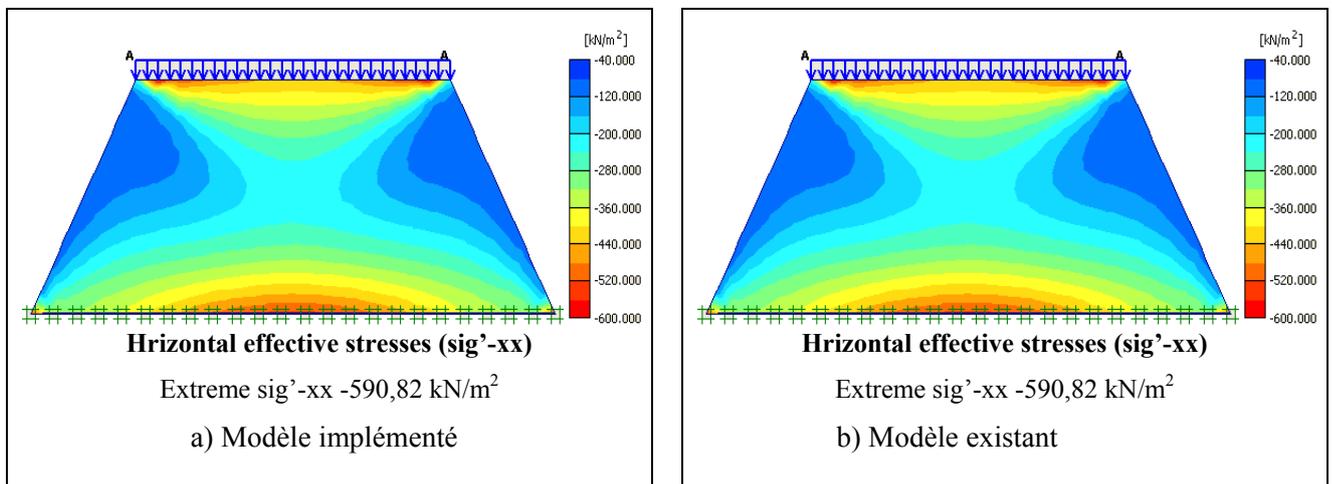


Figure 4.12. : Comparaison des contraintes effectives horizontales σ'_{xx}

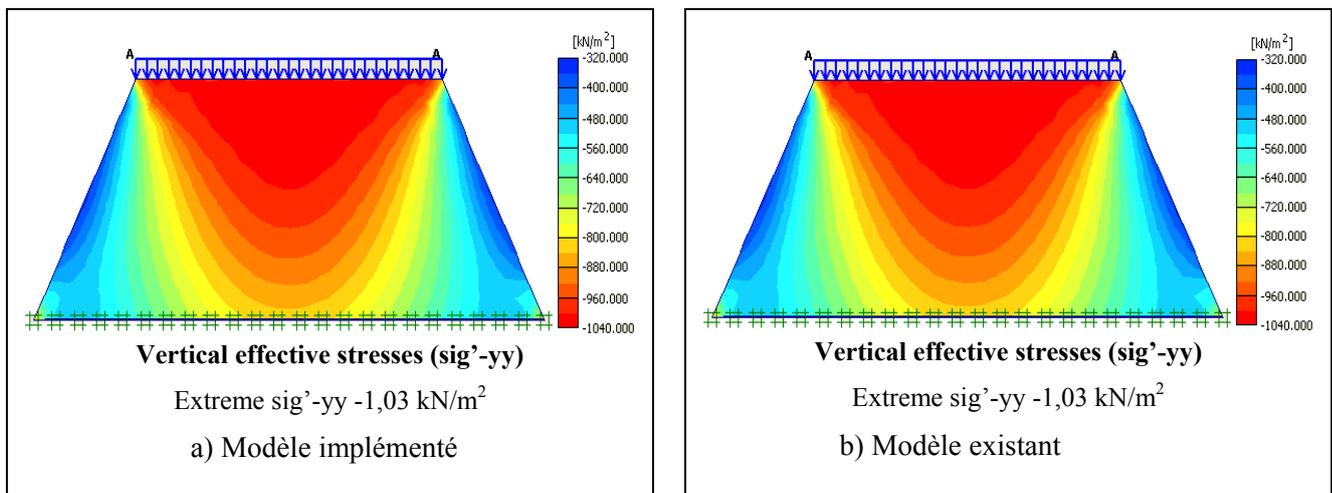


Figure 4.13. : Comparaison des contraintes effectives verticales σ'_{yy}

4.3.12. Synthèse

D'après cette modélisation nous remarquons que les résultats obtenus avec les deux modèles sont pratiquement identiques pour toutes les directions, Que ce soit pour les contraintes, les déformations ou bien pour les déplacements.

Globalement la comparaison est satisfaisante pour les deux modèles implémentés (Isotrope et orthotrope), ce qui nous permet d'aborder la programmation d'une loi viscoplastique tels que la loi de Lemaitre.

4.4. PROGRAMMATION DE LA LOI VISCOPLASTIQUE DE LEMAITRE

Différentes lois viscoplastiques ont été présentées dans le chapitre 2. Parmi celles-ci, le modèle de Lemaitre, qui dérive des modèles analogiques, décrit au paragraphe 2.4.3. Le cadre théorique de ce modèle a été présenté au paragraphe 2.4.3. Nous présentons ici le développement matriciel et algorithmique, ainsi que les modalités de programmation grâce au langage de programmation FORTRAN. Pour l'un des chemins de sollicitation monoaxiale, pour lequel il existe une solution incrémentale de référence. Il s'agit du fluage, c'est le travail qu'a effectué Mr Boidy 2002 [03], lors de son implémentation de la loi de Lemaitre sous FLAC 2D (Logiciel aux différences finis) et qui sera repris pour valider notre programme.

4.4.1. Développements tensoriels de la loi viscoplastique de Lemaitre

Comme nous l'avons vu au chapitre II. Le principe de base du développement des lois élasto-viscoplastiques, repose sur la partition des déformations totales en déformations élastiques (réversibles) et en déformations viscoplastiques (irréversibles).

Ce principe s'exprime par l'équation suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{vp} \quad (4-22)$$

Avec :

- ε_{ij} constitue le terme général du tenseur des déformations totales,
- ε_{ij}^e constitue le terme général du tenseur des déformations élastiques,
- ε_{ij}^{vp} constitue le terme général du tenseur des déformations viscoplastiques donné par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{vp} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^{vp} & \varepsilon_{12}^{vp} & \varepsilon_{13}^{vp} \\ \varepsilon_{21}^{vp} & \varepsilon_{22}^{vp} & \varepsilon_{23}^{vp} \\ \varepsilon_{31}^{vp} & \varepsilon_{32}^{vp} & \varepsilon_{33}^{vp} \end{bmatrix} \quad (4-23)$$

Avec : $tr(\underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}) = \varepsilon_{11}^{vp} + \varepsilon_{22}^{vp} + \varepsilon_{33}^{vp} = 0$ (hypothèse d'incompressibilité)

$$tr\left[(\underline{\underline{\varepsilon}}^{vp})^2\right] = \varepsilon_{ij}^{vp} \varepsilon_{ij}^{vp} = \varepsilon_{11}^{vp 2} + \varepsilon_{22}^{vp 2} + \varepsilon_{33}^{vp 2} + 2\varepsilon_{12}^{vp 2} + 2\varepsilon_{13}^{vp 2} + 2\varepsilon_{23}^{vp 2} = 0$$

La loi de Lemaitre donne le tenseur des vitesses de déformation viscoplastique, dont l'expression du terme général, $\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}$ correspond à la loi d'écoulement suivante :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_{vp}}{q} s_{ij} \quad (4-24)$$

- s_{ij} est le terme général de la partie déviatoire du tenseur des contraintes, défini par

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} tr(\sigma_{ij}) \delta_{ij} \quad (4-25)$$

$$\text{avec } [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$tr(s_{ij}) = s_{11} + s_{22} + s_{33} = 0$$

$$tr(s_{ij}^2) = s_{ij} s_{ij} = s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + 2s_{12}^2 + 2s_{13}^2 + 2s_{23}^2$$

δ_{ij} est le symbole de Kronecker qui vérifie :

$$\delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j ; \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j,$$

- q correspond au second invariant du tenseur des contraintes, également défini par un scalaire:

$$q = \left(\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4-26)$$

- $\dot{\varepsilon}_{vp}$ est la vitesse de déformation viscoplastique équivalente, donnée par :

$$\dot{\varepsilon}_{vp} = A(q - \sigma_s)^n \varepsilon_{vp}^m \quad (4-27)$$

ε_{vp} est le second invariant du tenseur des déformations viscoplastiques, défini par le scalaire :

$$\varepsilon_{vp} = \int_0^t \left(\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} \right)^{\frac{1}{2}} dt \quad (4-28)$$

4.4.2. Loi de fluage associée à la loi viscoplastique de Lemaitre

$$\dot{\varepsilon}_{vp} = A.q^n . (\varepsilon_{vp})^m$$

$$q = f(t)$$

Si (q) est constante, on a : $\frac{d\varepsilon_{vp}}{\varepsilon_{vp}^m} = A . q^n . dt$

$$D'où : \frac{1}{1-m} (\varepsilon_{vp(t)})^{1-m} = A . q^n . t$$

$$\text{avec : } \varepsilon_{vp(t=0)} = 0$$

$$\text{ainsi : } \varepsilon_{vp(t)} = [(1-m)A]^{-\frac{1}{1-m}} . q^{\frac{n}{1-m}} . t^{\frac{1}{1-m}}$$

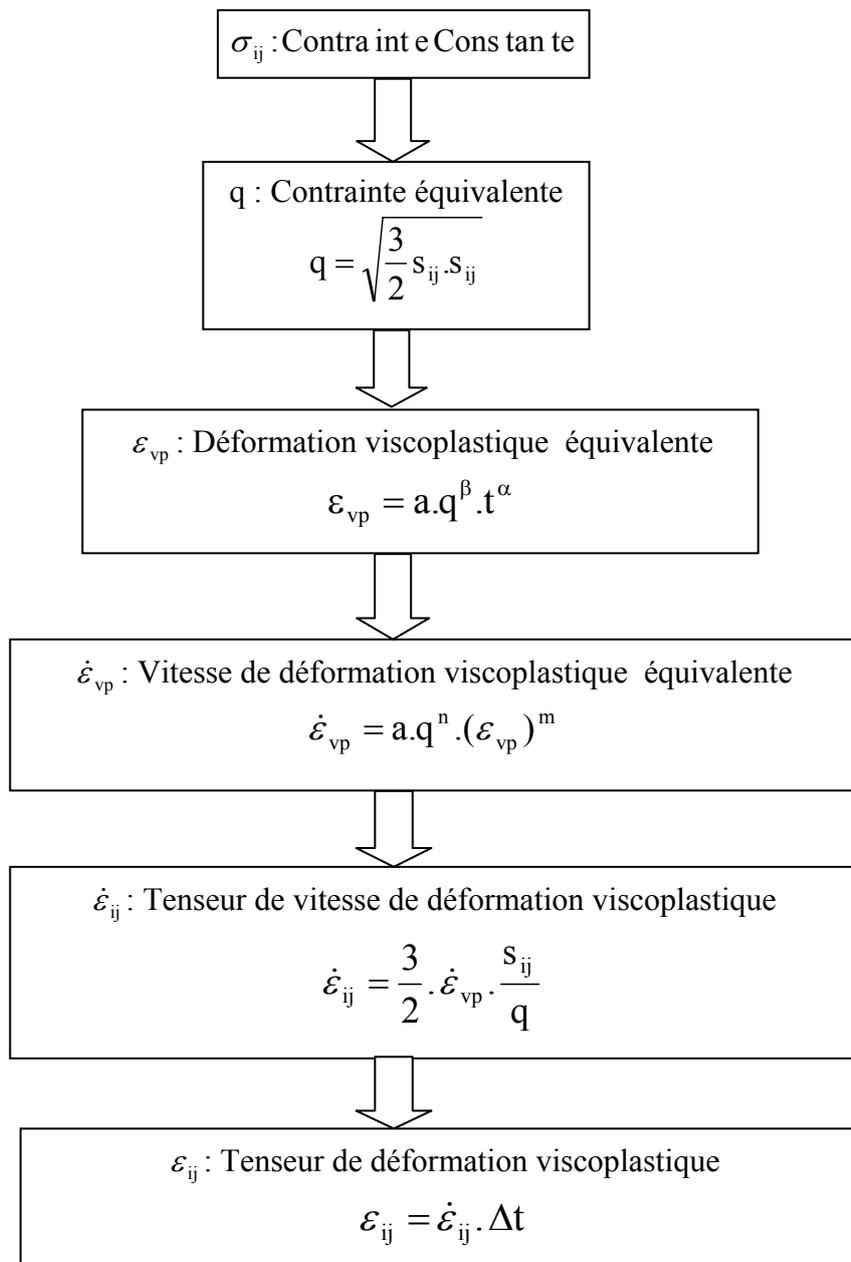
$$\text{soit : } \varepsilon_{vp(t)} = a . q^\beta . t^\alpha \quad (4-29)$$

$$\text{avec : } \alpha = \frac{1}{1-m}$$

$$\beta = \alpha . n = \frac{n}{1-m}$$

$$a = \left(\frac{A}{\alpha} \right)^\alpha$$

4.4.3. Organigramme de calcul du fluage pour la loi viscoplastique de Lemaitre



4.4.4. Simulation d'un essai de fluage

Pour cette simulation nous avons repris l'exemple de Boidy 2002 [03], qui est implémenté sous FLAC 2D, Donc on se place en configuration de fluage monoaxiale, et en tenant compte d'un seuil de contrainte, σ_s , nul. Conformément aux équations (4-22) et (4-29), sous un chargement, σ_{axiale} , constant, la déformation axiale, ε_{axiale} , a pour expression théorique :

$$\varepsilon_{\text{axiale}} = \frac{\sigma_{\text{axiale}}}{E} + a.(\sigma_{\text{axiale}})^{\beta}.t^{\alpha} \quad (4-30)$$

La modélisation a été effectuée en configuration axisymétrique (quart de section transversale de l'échantillon) comme représentée sur la figure 4.14 (Pellet et al.2000 [15]). Les propriétés mécaniques de l'échantillon sont les suivantes :

- $\sigma_{\text{axiale}} = 5,20 \text{ MPa}$ $\text{Ø}/2=27 \text{ mm}$
- caractéristiques élastiques : $E = 6000 \text{ MPa}$, et $\nu = 0,44$
- paramètres de la loi de Lemaitre : $\alpha = 0,1$; $\beta = 1,48$; $a = 1,09.10^{-5} \text{ s}^{-1}$ (avec le temps en seconde)

D'où $n = 14,8$; $m = -9$; $A = 23,67.10^{-52} \text{ s}^{-1}$

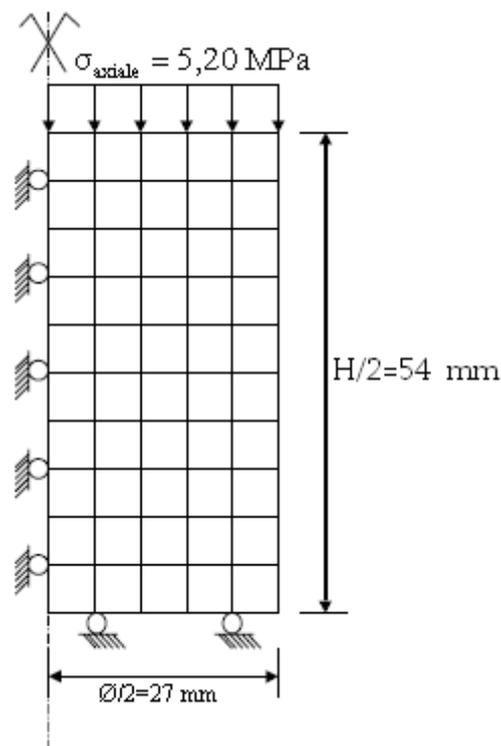


Figure 4.14. : Modèle FLAC d'un quart d'échantillon soumis à un essai de fluage, selon Pellet et al. 2000 [14]

Pour notre programme le pas de temps n'a pas un effet sur la précision du résultat car dans les méthode implicites, la solution est inconditionnellement stable, c'est pour cela on a pris un pas de temps de (1 seconde). Les Figures (4.15 et 4.16) présentent la déformation axiale en fonction du temps pour dix jours de fluage. Comparée à la solution numérique du FLAC obtenue par Pellet et al. 2000 [15].

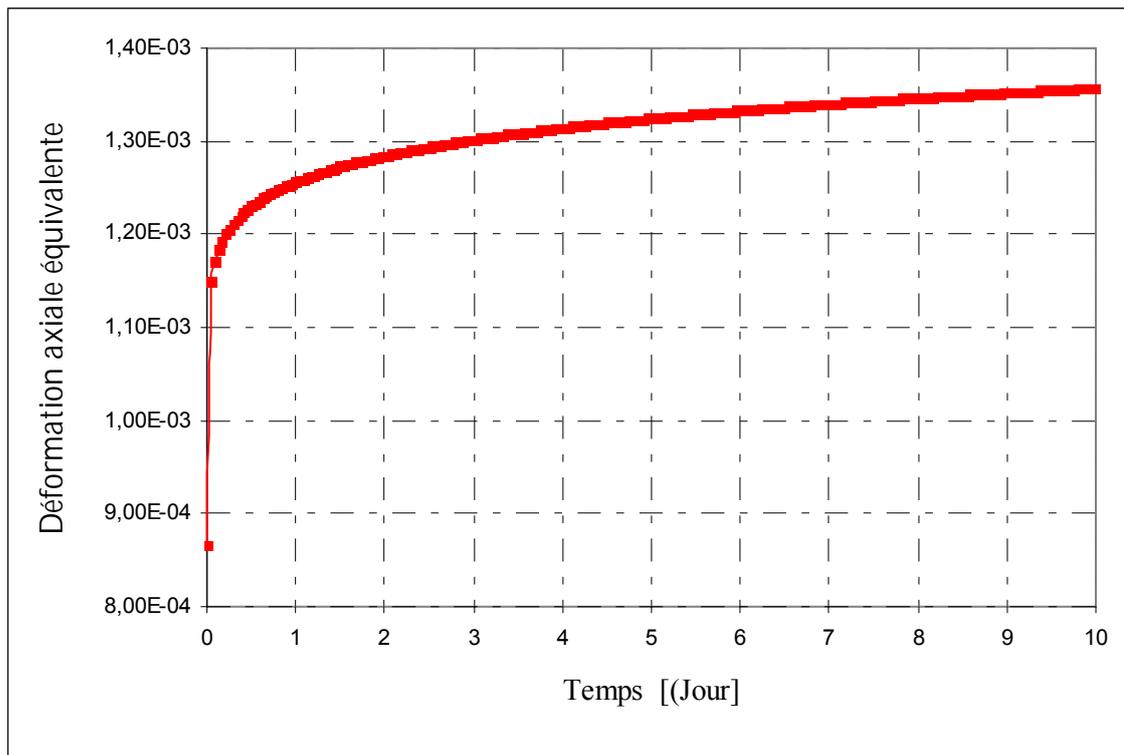


Figure 4.15. : Résultat de la simulation d'un essai de fluage avec la loi viscoplastique de Lemaitre

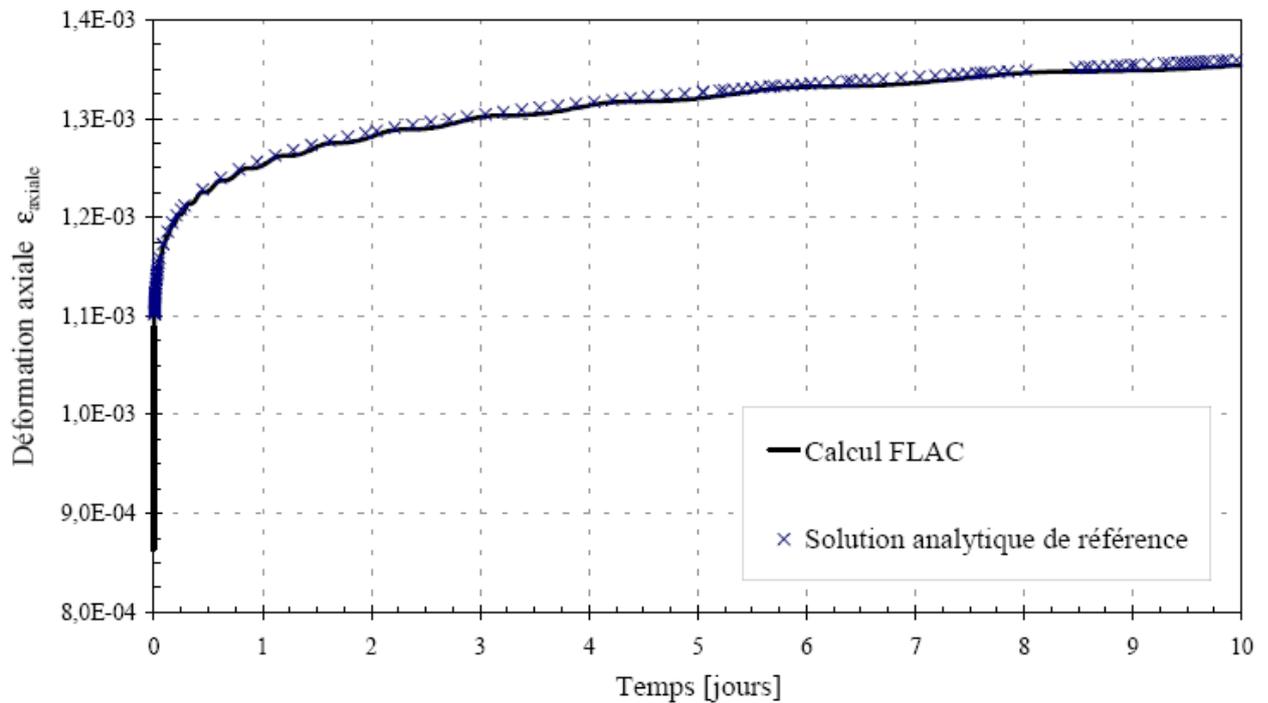


Figure 4.16. : Résultat de la simulation d'un essai de fluage avec FLAC, comparé à la solution analytique de référence, d'après Pellet et al. 2000 [15]

Si nous effectuons la superposition des deux figures (4.15 et 4.16), on observe que la courbe (en rouge qui représente la loi programmée) est pratiquement confondue avec la solution analytique de référence (courbe en croix bleue), figure 4.17.

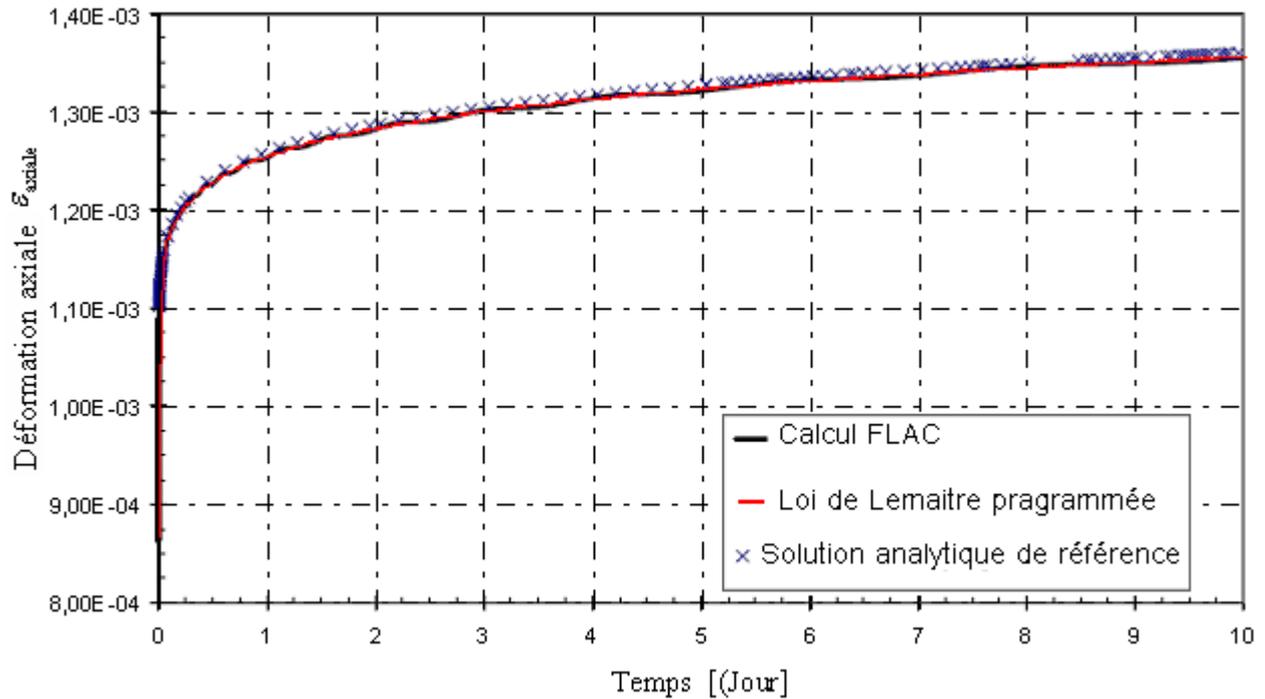


Figure 4.17. : Résultat de superposition des figures 4.15 et 4.16 de la simulation d'un essai de fluage

4.5. MODELE DE KOPPEJAN

4.5.1. Introduction

Une grande partie de la terre est constituée de différentes couches de sols organiques déposées par sédimentation. Et certaines de ces couches présentent, après chargement, des tassements relativement importants (décomposition de la matière organique avec le temps) qui dépendent, du fait des phénomènes de consolidation et de fluage, du temps de chargement. C'est pourquoi, de nombreux chercheurs travaillent sur le comportement de ces sols.

Parmi les modèles dépendant au temps (viscoélastique, viscoplastique) permettant la modélisation de ces phénomènes est celui régi par les équations de Koppejan 1948 [09] et développé par Van Baars 2003 [22].

4.5.2. Koppejan 1948

D'après le Modèle de Koppejan, la déformation d'une couche de sol dépend de la contrainte verticale effective finale (après chargement et consolidation) et peut être prédit par:

$$\varepsilon = \left(\frac{U}{C'_p} + \frac{1}{C'_s} \log(t) \right) \ln \left(\frac{\sigma'_v}{\sigma'_{v,i}} \right) \quad (4-31)$$

- U : degré de consolidation,
- C'_p : constantes de compression primaire,
- C'_s : constantes de compression secondaire,
- $\sigma'_{v,i}$: contrainte verticale effective initiale,
- σ'_v : contrainte verticale effective actuelle.

Cette équation de Koppejan se base sur les trois parties suivantes:

- Premièrement le rapport de consolidation U,
- Deuxièmement la dépendance du temps y compris les constantes de compression C'_p et C'_s ,
- Troisièmement la dépendance de contrainte. Cette dépendance de contrainte logarithmique (avec un logarithme népérien) est déjà introduite par Terzaghi 1925 [21], elle est utilisée ici pour évaluer la déformation primaire et secondaire (fluage).

La deuxième partie est introduite par Keverling Buisman 1936 [10]. Ce dernier a constaté que sous un chargement constant, dans un essai oedométrique, le tassement (après la consolidation) augmente d'une façon logarithmique avec le temps t, c'est pourquoi deux logarithmes différents existent dans cette équation.

La première partie de l'équation décrit le phénomène de consolidation, ce dernier dépendant :

- Du taux de consolidation,
- de la perméabilité k,
- de la distance de drainage h,
- du temps t,
- et de la rigidité du sol E_{oed} .

Dans le cas d'un sol homogène avec une rigidité constante, le degré de consolidation, d'après plusieurs auteurs (par exemple Verruijt 1987 [24]) :

$$U = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2} \exp\left(- (2j-1)^2 \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{c_v \cdot t}{h^2}\right) \quad (4-32)$$

Dans cette équation le coefficient vertical de consolidation c_v est supposé constant. Cela ne dépend pas seulement de la perméabilité du sol et du poids volumique de l'eau, mais aussi de la rigidité du sol:

$$c_v = \frac{k_v}{\gamma_w \cdot m_v} = \frac{k_v \cdot E_{oed}}{\gamma_w} \quad (4-33)$$

Avec γ_w : masse volumique de l'eau

La rigidité (E_{ocd}) et la perméabilité (k) dépendent de la contrainte appliquée. Même ces deux dépendances se compensent partiellement, le coefficient de consolidation est dépend fortement de la contrainte. (La première augmente et la deuxième diminuée avec l'augmentation de la contrainte de consolidation). En conséquence, l'utilisation d'un coefficient vertical constant de consolidation et d'un degré de consolidation ne devrait pas être recommandés.

Un autre problème posé par le modèle de Koppejan, comme par d'autres modèles, est celui de la négligence de l'excès de la pression interstitielle due au fluage. Le fluage est la conséquence d'une perte lente de la rigidité de la structure des grains, en causant une surpression de la pression interstitielle. Ces phénomènes sont négligés dans la solution analytique mentionnée ci-dessus (équations 4-32).

En outre, le processus de consolidation dans un appareil oedométrique se développe plus rapide parce que l'échantillon du sol a une faible hauteur. La contrainte effective finale est souvent atteinte dans 1 ou 2 jours environs. Cependant, pour les couches épaisses de sol la contrainte effective finale est atteinte après longtemps. Par conséquent, la grande distance de drainage ralentit le processus de consolidation et la dissipation de la pression de l'eau. Le comportement du fluage est fortement retardé par cet effet. La méthode de Koppejan, comme beaucoup d'autres modèles, ne prend pas ceci en considération, et en conséquence, il surestime le tassement.

4.5.3. Construction par étapes

Un remblai de couches de sol mou est souvent construit en étapes pour éviter les problèmes de stabilité. Parfois des surcharges provisoires sont employées afin de réduire les tassements résiduels à la fin du processus. Ces différentes étapes de construction cause des déformations séparées, qui doivent être cumulées. Avec le modèle de Koppejan les différentes étapes de charge se superposent de la façon suivante:

$$\varepsilon = \left(\frac{U_1}{C'_p} + \frac{1}{C'_s} \log(t_1) \right) \ln \left(\frac{\sigma'_{v,1^{\text{st}} \text{ step}}}{\sigma'_{v,i}} \right) + \left(\frac{U_2}{C'_p} + \frac{1}{C'_s} \log(t_2) \right) \ln \left(\frac{\sigma'_{v,2^{\text{nd}} \text{ step}}}{\sigma'_{v,1^{\text{st}} \text{ step}}} \right) \quad (4-34)$$

Une autre raison pour superposer les différentes étapes est la différence de la rigidité du sol avant et après la pression de préconsolidation. Dans ces cas, des constantes de compression séparées sont employées avant $C'_{p/s}$ ou après $C'_{p/s}$ la contrainte de préconsolidation $\sigma'_{p.c.p.}$:

$$\varepsilon = \left(\frac{U_1}{C_p} + \frac{1}{C_s} \log(t_1) \right) \ln \left(\frac{\sigma'_{p.c.p.}}{\sigma'_{v,i}} \right) + \left(\frac{U_2}{C'_p} + \frac{1}{C'_s} \log(t_2) \right) \ln \left(\frac{\sigma'_v}{\sigma'_{p.c.p.}} \right) \quad (4-35)$$

Un nouveau problème se pose lors de l'application de cette approche, dès que une nouvelle étape de charge est appliquée alors que l'ancienne étape n'est pas encore entièrement consolidée. C'est toujours le cas de couche épaisse de sols mous. Le temps t dans la fonction de fluage commence à partir du moment où une couche de remblai est réalisée, alors que la contrainte effective employée dans le calcul n'existe pas encore. Par conséquent cette méthode de superposition surestime le tassement.

4.5.4. Formulation incrémentale

Cette méthode de superposition de Koppejan présente les problèmes suivants :

- 1- Le coefficient de la consolidation n'est pas constant dans le temps et donc la solution analytique du degré de consolidation n'est pas correcte
- 2- La surpression d'eau due au fluage est négligée.
- 3- Le comportement de fluage est fortement retardé par le processus de consolidation pour des couches épaisses, causant ainsi une surestimation des tassements.
- 4- La méthode de superposition surestime le tassement.

Ces problèmes peuvent être évités en utilisant une méthode de calcul incrémentale dans laquelle:

- Le tassement et la consolidation sont calculés, par petits incréments, dans le temps et dans l'espace (petites couches),
- L'évaluation de la consolidation ne doit pas être basée sur le coefficient ou le degré de consolidation, mais elle doit être basée sur la perméabilité,
- La contrainte dépendant du tassement doit être indépendante du temps.

La démarche consiste à employer des taux de déformations au lieu de la déformation totale et de séparer le taux de déformation en une partie primaire (déformation instantanée) et une partie secondaire (fluage).

Le taux de déformation primaire est déterminé par différentiation de la déformation primaire

$$\varepsilon_p = \frac{1}{C_p} \ln \left(\frac{\sigma'_v}{\sigma'_{v,i}} \right) \Rightarrow \dot{\varepsilon}_p = \frac{\delta \varepsilon}{\delta t} = \frac{1}{C_p} \frac{\dot{\sigma}'_{v,i}}{\sigma'_v} \frac{\dot{\sigma}'_v}{\sigma'_{v,i}} \Rightarrow \dot{\varepsilon}_p = \frac{1}{C_p} \frac{\dot{\sigma}'_v}{\sigma'_v} \quad (4-36)$$

Le taux de déformation secondaire est déterminé aussi par différentiation de la déformation secondaire:

$$\varepsilon_s = \frac{1}{C_s \ln(10)} \ln(t) \cdot \ln\left(\frac{\sigma'_{v,i}}{\sigma'_{v,i}}\right) \Rightarrow \dot{\varepsilon}_s = \varepsilon_p \frac{C_p}{C_s \ln(10)} \exp\left(-\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_p} \frac{C_s \ln(10)}{C_p}\right) \quad (4-37)$$

On substitué la déformation secondaire afin d'éliminer le temps t et la déformation primaire (équation 4-36) pour éliminer la contrainte.

L'utilisation de la fonction logarithmique du déformation secondaire est seulement valable pour un essai oedométrique a charge constante ($\dot{\sigma}'_v = 0$). Par conséquent on ne sait pas la règle de la dépendance entre la déformation primaire et la vitesse de contrainte $\dot{\sigma}'_v$, d'après l'hypothèse de superposition relative au modèle de Koppejan, qui dit que le fluage dépend seulement de la contrainte verticale effective σ'_v et non pas de la contrainte.

D'près l'équation (4-37)

A $t=0$ (début de chargement);

- La déformation vaut $\varepsilon_s = \varepsilon_p = 0$,

- Le taux de déformation primaire $\dot{\varepsilon}_p > 0$ car $\dot{\sigma}'_v = \frac{\Delta\sigma'_v}{\Delta t} > 0$.

Par contre le taux de déformation secondaire $\dot{\varepsilon}_s = 0$ parce que $\dot{\varepsilon}_s$ ne dépend pas de $\dot{\sigma}'_v$ et $\Delta\sigma'_v = 0$ a $t=0$, car a $t=\Delta t$ avec $\Delta t \rightarrow 0$, nous pouvons affirmer que:

$$\dot{\varepsilon}_p > 0, \varepsilon_p \approx \Delta t \cdot \dot{\varepsilon}_p \text{ et } \varepsilon_s \approx \Delta t \cdot \dot{\varepsilon}_s$$

D'où:

$$\varepsilon_{s, t=0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0}(\dot{\varepsilon}_s) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\Delta t \cdot \dot{\varepsilon}_p \frac{C_p}{C_s \ln(10)} \exp\left(-\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_p} \frac{C_s \ln(10)}{C_p}\right) \right) = 0 \quad (4-38)$$

L'important avantage de cette méthode incrémentale que le temps t est complètement éliminé, (Equ. 8)

4.5.5. Consolidation

D'après l'équation (4-36) le module oedométrique E_{oed} est défini comme suit (seulement pour compression vierge) :

$$\dot{\sigma}'_v = E_{oed} \dot{\varepsilon}_p \text{ et } \dot{\varepsilon}_p = \frac{1}{C_p} \frac{\dot{\sigma}'_v}{\sigma'_v} \Rightarrow E_{oed} = C_p \sigma'_v \quad (4-39)$$

La rigidité dépend linéairement de la contrainte, ainsi que le coefficient de consolidation est constant si la perméabilité k est une fonction linéaire de la valeur inverse de la contrainte.

Par conséquent, cette méthode est résolue de la même manière que dans la plupart des programmes d'éléments finis, ce qui est avec Darcy en calculant la variation de la pression de l'eau Δp sur une petite partie de la hauteur Δz , comme on peut le trouver dans de nombreux ouvrages qui traitent le phénomène de consolidation :

$$q_z = -\frac{k}{\gamma_w} \frac{\Delta p}{\Delta z} \quad (4-40)$$

En outre, l'augmentation de la déformation est proportionnelle au quantité d'eau sortie par le volume de sol (loi de conservation de volume), de sorte que:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_p + \dot{\varepsilon}_s = \frac{\Delta q_z}{\Delta z} \quad (4-41)$$

En tenant en compte de la loi de Darcy nous obtenons:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_p + \dot{\varepsilon}_s = -\frac{k}{\gamma_w} \frac{\delta^2 p}{\delta z^2} \quad (4-42)$$

Avec les équations 4-36 et 4-37, la variation de la pression d'eau en tout point et à tout moment:

$$\dot{p} = \dot{\sigma}_v + \frac{\sigma_v - p}{1/C_p} \left[\frac{k}{\gamma_w} \frac{\delta^2 p}{\delta z^2} + \varepsilon_p \frac{C_p}{C_s \ln(10)} \exp\left(-\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_p} \frac{C_s \ln(10)}{C_p}\right) \right] \quad (4-43)$$

Ainsi, la variation de la contrainte $\dot{\sigma}_v$, de la consolidation et du fluage fait varier la pression de l'eau ce qui entraîne une variation de la contrainte effective, et donc une variation de la déformation. Cette équation (4-43) décrit avec le chargement, la consolidation et le fluage en même temps.

4.5.6. Grandes déformations par rapport aux petites déformations

Dans le cas des grandes déformations, l'utilisation de la déformation linéaire devient imprécise. L'utilisation des déformations vraies devient inévitable, étant donné que la déformation (vraie) ne doit pas être défini comme un changement de l'épaisseur initial de la couche ($\Delta z/z_i$), mais comme un changement de l'épaisseur actuel de cette couche ($\Delta z/z$).

Dans la méthode incrémentale de Koppejan, les déformations linéaire sont données en fonction de l'épaisseur initiale de la couche (théorie de déformation linéaire) et elles sont calculées par:

$$\varepsilon_{t+\Delta t} = \varepsilon_t + \Delta t \cdot \dot{\varepsilon}_t \quad (4-44)$$

Les déformations linéaires données en fonction de l'épaisseur actuel de la couche et sont donc calculées par:

$$\varepsilon_{t+\Delta t} = \varepsilon_t + \Delta t \cdot \dot{\varepsilon}_t (1 - \varepsilon_t) \quad (4-45)$$

4.5.6. Implémentation

De la même manière que dans le cas des lois (isotrope et orthotrope), nous avons suivi la procédure définit plus haut. On obtient le programme attaché en (annexe III).

Notons que les modèles de « Soft-Soil » et « Soft-Soil-Creep » du Plaxis (Vermeer et Neher, 1999 [23]) contient déjà la première partie de Koppejan:

$$\dot{\varepsilon}_p = \lambda^* \frac{\dot{P}'}{P'} \quad \text{quand } P' \geq P'_{p.c.p} \quad \text{avec : } \lambda^* = \frac{1}{C'_p} \quad \text{ou : } \lambda^* = \frac{C_c}{\ln(10)(1+e)} \quad (4-46)$$

P' : Contrainte effective isotrope (contrainte effective moyenne)

$$\dot{\varepsilon}_p = K^* \frac{\dot{P}'}{P'} \quad \text{quand : } P' \geq P'_{p.c.p} \quad \text{avec : } K^* \approx \frac{1 - \nu_{\text{unloading}}}{1 + \nu_{\text{unloading}}} \frac{1 + 2K_0}{C_p} \quad \text{et} \quad \frac{1}{C_p} = \frac{C_r}{\ln(10)(1+e)} \quad (4-47)$$

Ces paramètres de Plaxis correspondent bien aux paramètres internationaux du modèle de Cam-Clay (Brinkgreve et Vermeer, 1998 [04]):

$$\lambda^* = \frac{\lambda}{1+e} \quad \text{avec : } e = \frac{V_{\text{pores}}}{V_{\text{grains}}} \quad \text{alors : } \frac{1}{1+e} = 1 - n \quad (n = \text{porosité}) \quad (4-48)$$

$$K^* = \frac{\kappa}{1+e}$$

En utilisant seulement les équations suivantes de fluage (voir l'équation (4-37)):

$$\dot{\varepsilon}_s = \varepsilon_p \frac{\mu_\lambda^*}{\lambda^*} \exp\left(-\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_p} \frac{\lambda^*}{\mu_\lambda^*}\right) \text{ pour } p' \geq p'_{p.c.p}$$

$$\text{avec } \mu_\lambda^* = \frac{1}{C'_s \ln(10)} \text{ et } \frac{1}{C'_s} = \frac{C_\alpha}{(1+e)} \ln\left(\frac{\sigma'_{nouvelle}}{\sigma'_{ancienne}}\right) \quad (4-49)$$

$$\dot{\varepsilon}_s = \varepsilon_p \frac{\mu_\kappa^*}{\kappa^*} \exp\left(-\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_p} \frac{\kappa^*}{\mu_\kappa^*}\right) \text{ pour } p' < p'_{p.c.p}$$

$$\text{avec } \mu_\kappa^* = \frac{1}{C'_s \ln(10)} \quad (4-50)$$

4.5.7. Résultats et discussions

Afin de voir la capacité, du logiciel Plaxis du point de vue implémentation de modèles rhéologiques n'existant pas dans la bibliothèque du code, nous avons opté pour l'implémentation du modèle de Koppejan. Ce dernier est un modèle non-linéaire transitoire (qui tient en compte de la viscoplasticité).

Le but est de voir qualitativement les résultats obtenus par ce modèle en comparaison avec le modèle « Soft-Soil-Creep » existant dans la bibliothèque de Plaxis. Dans ce contexte, l'exemple de l'essai oedométrique a été traité par les deux modèles rhéologiques, à savoir le « Soft-Soil-Creep » du Plaxis et le modèle de Koppejan que nous avons implanté. Les caractéristiques mécaniques de cet exemple sont présentées dans le tableau suivant :

Paramètres	Symbole	valeur	Unité
- Indice de compression modifié	λ^*	0,105	-
- Indice de gonflement modifié	κ^*	0,02	-
- Indice de compression secondaire	μ^*	0,005	-
- Coefficient de Poisson	ν	0,15	-
- Cohésion	c	1	kN/m ²
- Angle de frottement	φ	30	°
- Angle de dilatance	ψ	0	°
- Coefficient de pression de terre au repos	K_0	0,5	-
- Perméabilité	k_x, k_y	2E-6	m/jour

Tableau 4.1 : Valeurs et paramètres du modèle

Les valeurs des paramètres sont sélectionnées de la bibliothèque, elles caractérisent une argile normalement consolidée. Le poids des terres de préconsolidation est fixé à 50 kPa «Pre-Overburden Pressure POP = 50 kPa ».

L'essai est modélisé en conditions non drainées et en configuration axisymétrique avec une hauteur d'échantillon de 10 mm et une largeur de 25 mm (Figure 4.18), La pression verticale initiale appliquée est de 2,5 kPa, ensuite quatre niveaux de contrainte verticale sont appliqués (5, 12,5 ,25, 50, et 100 kPa) pendant 32 jours.

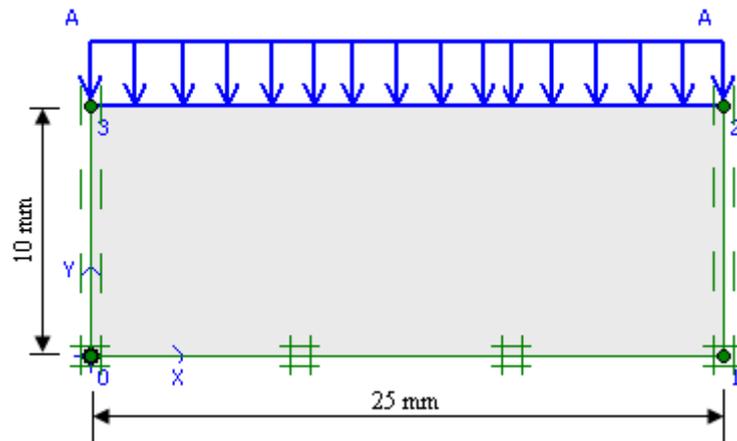


Figure 4.18 : Géométrie du problème

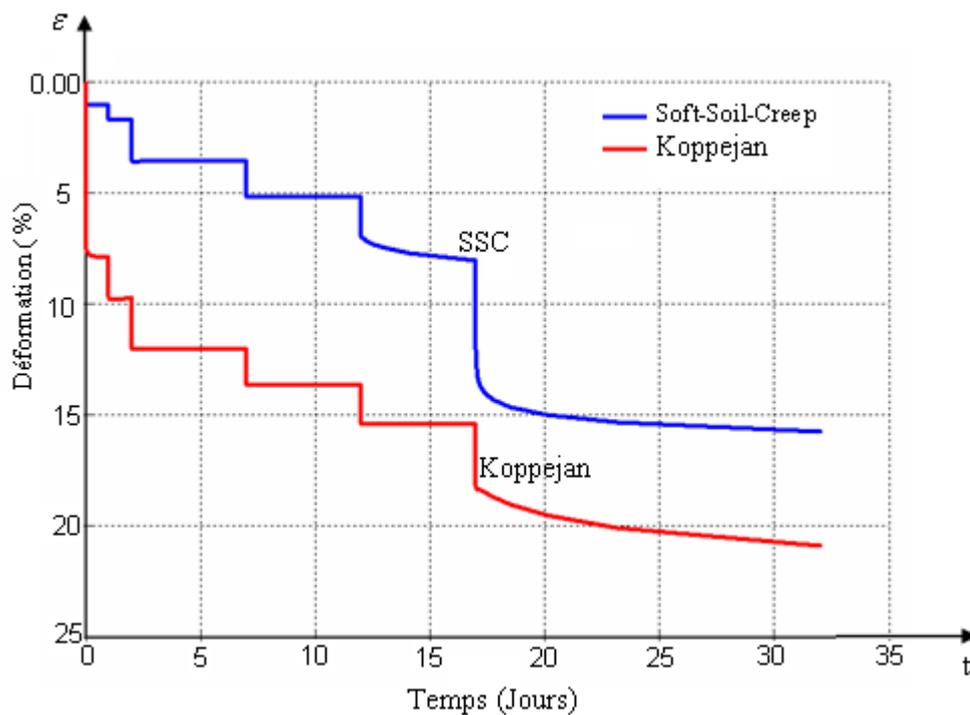


Figure 4.19 : Courbe déformation-temps

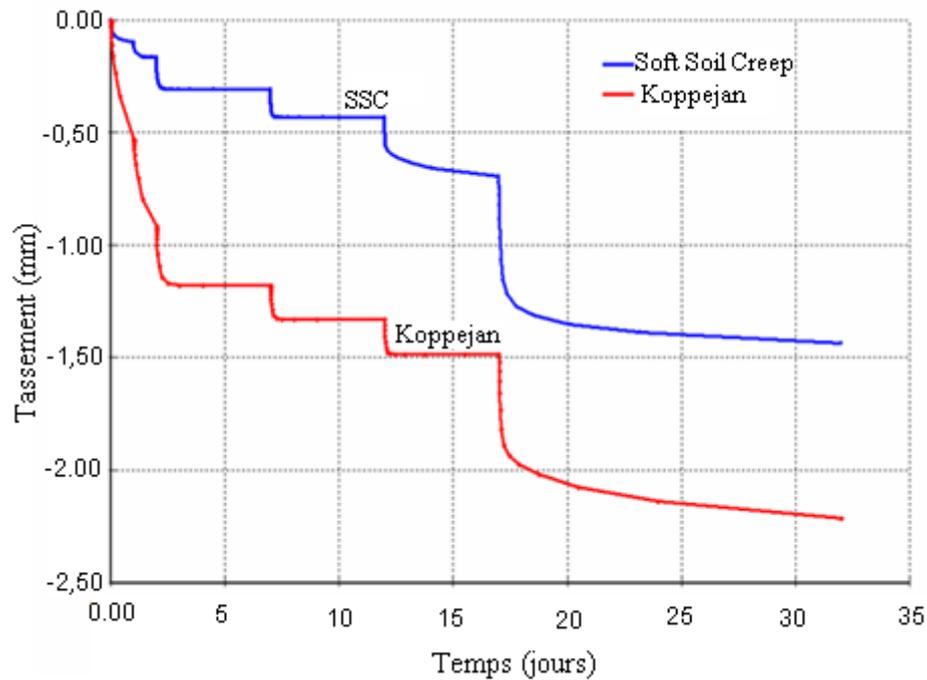


Figure 4.20 : Courbe tassement-temps

La figure 4.19 illustre les courbes de l'évolution de la déformation obtenue par l'application de la lois SSC et la loi de Koppejan. La lecture de ces courbes nous renseigne sur l'effet que les deux lois reproduisent correctement l'allure croissante de la déformation. Cependant on doit enregistrer la présence de deux distinctions importantes. Il s'agit en effet de la différence de déformation observée dès l'application du premier chargement, où l'écart entre les deux lois est de l'ordre de 6.5%. Cet écart se manifeste également après l'application du dernier chargement. Nonobstant ces deux anomalies, on remarque que l'allure des deux courbes est presque identiques entre le premier et le dernier chargement.

La même constatation peut être faite en analysant les courbes de tassements (voir figure 4.20).

4.5.8. Conclusion

L'analyse qualitative de l'exemple traité fait ressortir les points suivants :

- Nous avons pu créer la DLL du modèle de Koppejan malgré les difficultés rencontrées.
- Le modèle de Koppejan (implanté) suit l'allure du modèle Soft-Soil-Creep. Il donne des résultats qualitativement remarquables par rapport au modèle Soft-Soil-Creep.
- Les courbes de la déformation axiale et du tassement (déplacement vertical) en fonction du temps prouvent le point précédent.
- Malgré les difficultés rencontrées afin de faire ressortir les données mécaniques du problème de la littérature, nous avons pu faire passer l'exemple.

Afin de porter un jugement plausible et logique sur l'efficacité de cette loi, des essais expérimentaux sur d'autres types de sols sont nécessaires. La validation de cette loi pourrait être ainsi mieux conduite.

Pour conclusion, nous pouvons dire que nous avons réaliser un grands succès d'avoir su créer une DLL pour un modèle non-linéaire transitoire chose qui n'est pas facile, surtout pour une formulation implicite comme celle du code Plaxis.

Conclusion et Perspectives

Le logiciel Plaxis utilise un code de calcul basé sur la méthode des éléments finis, et comporte des lois préinstallées pour la description des comportements d'un certain nombre de matériaux. Cependant ces lois ne permettent pas la reproduction du comportement rhéologique de la totalité des matériaux. L'implémentation d'autres lois s'avère dans ce cas très utile. C'est dans ce contexte que s'inscrit notre contribution présentée dans le cadre de ce travail, et à travers laquelle nous essayons de faciliter l'implémentation d'une loi rhéologique sur la plate forme du logiciel (PLAXIS) en utilisant la technique de DLL. Cette démarche exige des connaissances de programmation dynamiques approfondies.

Dans un premier temps des lois simples de types élastiques linéaires (isotrope et orthotrope) ont été implémentées dans le code de calcul. Par la suite ces lois ont fait l'objet d'une validation, et ce moyennant une série de simulation. Les résultats obtenus confirment la réussite et succès de la procédure technique de programmation dynamique.

Dans un second temps les lois dites visqueuses ont été traitées, il s'agit en particulier de la loi viscoplastique de Lemaitre. Etant donnée que cette dernière est basée sur la méthode de résolution par différence finis, plus précisément le schéma explicite, il a été nécessaire de développer un algorithme basé sur le schéma implicite, et ce pour pouvoir réaliser l'actualisation des vitesses de déformation, et ainsi pouvoir construire la courbe de fluage. La validation a été entreprise par la comparaison d'une simulation d'un essai de fluage monoaxiale avec la solution analytique.

Enfin une troisième loi a été implémentée, il s'agit, entre autre, de la loi viscoplastique de Koppejan modifiée par Van Baars.

Ce travail a mis en évidence les difficultés qui peuvent être rencontrées lors des tentatives d'implémentation des lois dans ce type de logiciel. Malgré les efforts consentis des insuffisances ont surgies, car la méthode de calcul utilisée par le logiciel demeure ambiguë (difficultés d'affichage des erreurs des programmes implémentés et de la connaissance de la nature et de l'endroit exacte de ces erreurs). Des approfondissements sont donc nécessaires de ce point de vue, afin de mieux cerner les raisons de ce manque de performance. Suite aux résultats obtenus nous allons tenter ci-dessous de proposer quelques éléments de réflexions pour les perspectives de ce travail.

- L'implémentation des lois visqueuses avec la prise en compte du paramètre d'endommagement, qui conditionne l'évolution des déformations viscoplastiques, telle que la variation de volume en fonction du temps.

- Développement des lois visqueuses avec la prise en compte de l'effet de l'anisotropie des matériaux.

BIBLIOGRAPHIE

- [01] BEREST P. Viscoplasticité en mécanique des roches, Manuel de rhéologie des géomatériaux, Presse des Ponts et Chaussées, 1987, p. 235 - 257.
- [02] BINGHAM E.C. The Viscosity of Binary Mixtures, The journal of physical chemistry, American chemical society, Volume 18, 1913, p. 157 - 165.
- [03] BOIDY E. Modélisation numérique du comportement différé des cavités souterraines Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble 1, 2002.
- [04] Brinkgreve, R.B.J. and Vermeer, P.A. (1998). Plaxis Manual. Version 7, Balkema, pp. 5.1-5.18.
- [05] DI PRISCO C., IMPOSIMATO S. . Time-dependent mechanical behaviour sand, Mechanics of Cohesive-Frictional Materials 1, 1996, p. 45 - 73.
- [06] G. Fabre et F. Pellet Identification des caractéristiques visqueuses d'une roche argileuse, Symposium international : Identification et détermination des paramètres des sols et des roches pour les calculs géotechniques Paris, Jean-Pierre Magnan Presses LCPC, 2002 p. 36-40
- [07] EPFL, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse Site Internet : http://lmswww.epfl.ch/commun/pdf_doc_sols/Mod%E9l._contr._d%E9form._GAIE.pdf
- [08] ITASCA. . FLAC 2D Version 5.0, Online Manual, 2000. Site Internet <http://www.itasca.com>
- [09] Koppejan, A.W. (1948). A formula combining the Terzaghi load compression relationship and the Buisman secular time effect. Proc. 2nd Int. Conf. Soil Mech. And Found. Eng., Rotterdam, 3, pp 32-38.
- [10] Keverling Buisman, A.S. (1936). Results of long duration settlement tests, Proc. 1st Int. Conf. Soil Mech. And Found.
- [11] LEMAITRE J, CHABOCHE J-L. Mécanique des matériaux solides, Dunod, 1996, p. 253 - 341.
- [12] MALAN D. F. . An investigation into the identification and modelling of time dependent behaviour of deep level excavations in hard rock, Ph.D. Thesis, University of the Witwatersrand, South Africa, 1998, 263 p.
- [13] MESTAT Ph., Lois de comportement des géomatériaux et modélisation par la méthode des éléments finis, Etudes et recherches des laboratoires des Ponts et Chaussées, Série géotechnique, GT 52, LCPC, 1993.
- [14] NORTON F.H. . Creep of Steel at High Temperatures, McGraw-Hill Book Company, New York, 1929, 90 p.

- [15] PELLET F., SAHLI M., BOIDY E., BOULON M. Modelling of time-dependent behaviour of sandstone for deep underground openings, Proc. Int. Conf. On Engng. And Tech. Science (ICETS 2000), Beijing, China, 2000, 6 p.
- [16] Perzyna P, Fundamental problems in viscoplasticity, Advanced in Applied Mechanics, Vol. 9, Academic press 1966.
- [17] PLAXIS 2D Version 8 Manuel de référence 2003,
Site Internet <http://www.plaxis.com>
- [18] PLAXIS 2D Version 9 Material Models Manual 2003 p.10-10.13,
Site Internet <http://www.plaxis.com>
- [19] Stutz P. Lois de comportement : Principes généraux, Manuel de rhéologie des géomatériaux, Presse des Ponts et Chaussées, 1987, p. 103 - 127.
- [20] TATSUOKA F, SANTUCCI DE MAGISTRIS F., HAYANO K., MOMOYA, Y., KOSEKI J. Some new aspects of time effects on the stress-strain behaviour of stiff geomaterials, Keynote Lecture for the 2nd Int. Conf. On Hard Soils and Soft Rocks, Napoli, 1998, 69 p.
- [21] Terzaghi, K. (1925). Erdbaumechanik, Franz Deuticke, Vienna.
- [22] Van Baars, S. (2003) “Soft Soil Creep modelling of large settlements”, 2nd International Conference on Advances in Soft Soil Engineering and Technology, Kuala Lumpur, Malaysia, 361-371
- [23] Vermeer, P.A. and Neher, H.P. (1999). *A soft soil model that account for creep*. Beyond 2000 in computational geotechnics, Balkema, pp. 249-261.
- [24] Verruijt, A. (1987). Grondmechanica, Delftse Uitgevers Maatschappij, ISBN 90 6562 045 1, pp. 50-63
- [25] Zienkiewicz, O.C. (1977). The Finite Element Method, McGraw-Hill, London 4th Ed

Annexe V : Rappel sur le calcul des invariants et leurs dérivées.

V. Invariants des tenseurs de contraintes et de déformations

V.I. Définitions des invariants usuels

A partir des invariants naturels, il est possible de construire d'autres invariants au sens plus « physique » pour le rhéologue. On considère ainsi les invariants des contraintes déviatoriques s_{ij} , et η_{ij} , si la trace du tenseur de contraintes $\text{tr}(\sigma_{kl})$ est non nulle,

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \text{tr}(\sigma_{kl}) \delta_{ij} / 3 \quad \eta_{ij} = 3 \cdot \sigma_{ij} / \text{tr}(\sigma_{kl}) - \delta_{ij}$$

Le déviateur de contrainte $J_2(\sigma_{ij})$ est défini par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} J_2(\sigma_{ij}) &= s_{ij} s_{ij} / 2 = \text{tr}(s_{kl})^2 / 2 = I_1(\sigma_{ij})^2 / 3 - I_2(\sigma_{ij}) \\ &= [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] / 6 \\ &= [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2] / 6 + \sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2 \end{aligned}$$

Un troisième invariant est défini, après la trace et le déviateur de contraintes, auquel aucun nom particulier n'a été donné. Cet invariant est noté classiquement $J_3(\sigma_{ij})$.

$$J_3(\sigma_{ij}) = s_{ij} s_{im} s_{mi} / 3 = \text{tr}(s_{kl})^3 / 3 = 2I_1(\sigma_{ij})^3 / 27 - I_1(\sigma_{ij})I_2(\sigma_{ij}) / 3 + I_3(\sigma_{ij})$$

Des expressions analogiques peuvent être obtenues pour le tenseur des déformations.

Les **mécaniciens des sols** utilisent également dans la description des lois de comportement les invariants suivants :

$$\begin{aligned} J_2(\sigma_{ij}) &= 3\tau_{\text{oct}}^2 / 2 & J_2(\varepsilon_{ij}) &= 3\gamma_{\text{oct}}^2 / 2 & SD_2 &= \sqrt{2J_2(\sigma_{ij})} \\ p &= -J_1(\sigma_{ij}) / 3 & q &= \sqrt{3J_2(\sigma_{ij})} & \eta &= q / p \\ \varepsilon_v &= -I_1(\varepsilon_{ij}) & \varepsilon_d &= 2\sqrt{J_2(\varepsilon_{ij})} / 3 \end{aligned}$$

Ou d'une manière plus explicite :

$$\begin{aligned} p &= -(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3 = -(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) / 3 \\ q &= (3s_{ij} s_{ij} / 2)^{0,5} = \left[[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] / 2 \right]^{0,5} \\ \varepsilon_v &= -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = -(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) & \varepsilon_d &= (2e_{ij} e_{ij} / 3)^{0,5} \\ \text{Avec } e_{ij} &= \varepsilon_{ij} - \text{tr}(\varepsilon_{kl}) \delta_{ij} / 3 \end{aligned}$$

V.II. Dérivation des invariants par rapport aux contraintes σ_{ij}

Dans la théorie des matériaux élastoplastiques, la fonction de charge est fréquemment exprimée comme une combinaison d'invariants des tenseurs de contraintes et de déformations plastiques. L'écriture de la relation incrémentale de comportement nécessite alors le calcul des dérivées partielles de la fonction de charge et du potentiel plastique par rapport aux composantes du tenseur de contraintes.

Les dérivées partielles des invariants usuels, définis précédemment, s'obtiennent comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} &= \delta_{ik} \delta_{lj} & \frac{\partial s_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} &= \delta_{ik} \delta_{lj} - \delta_{ij} \delta_{kl} / 3 \\ \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} &= -\delta_{ij} / 3 & \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} &= s_{ij} \\ \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} &= \frac{3 s_{ij}}{2 q} & \frac{\partial \eta}{\partial \sigma_{ij}} &= \frac{3 s_{ij}}{2 qp} + \frac{q}{3p^2} \delta_{ij} \end{aligned}$$

Les quantités incrémentales suivantes sont également fréquemment utilisées :

$$d\gamma = (2/3 de_{ij} de_{ij})^{0,5} \quad dq^* = (3/2 ds_{ij} ds_{ij})^{0,5}$$

La dérivation du troisième invariant s'effectue simplement :

$$\frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ik} s_{kj} - 2 J_2 \delta_{ij} / 3$$

Il n'en est pas de même pour la dérivation du déterminant des contraintes car il n'existe pas de formule simple résumant sous forme de composante (ij) l'expression des dérivées partielles. Par contre, sous forme explicite, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_3}{\partial \sigma_{xx}} &= \sigma_{yy} \sigma_{zz} - \sigma_{yz}^2 & \frac{\partial I_3}{\partial \sigma_{xy}} &= \sigma_{yz} \sigma_{zx} - \sigma_{zz} \sigma_{yx} \\ \frac{\partial I_3}{\partial \sigma_{yy}} &= \sigma_{xx} \sigma_{zz} - \sigma_{xz}^2 & \frac{\partial I_3}{\partial \sigma_{yz}} &= \sigma_{yz} \sigma_{zx} - \sigma_{xx} \sigma_{zy} \\ \frac{\partial I_3}{\partial \sigma_{zz}} &= \sigma_{xx} \sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2 & \frac{\partial I_3}{\partial \sigma_{xz}} &= \sigma_{yz} \sigma_{zy} - \sigma_{yy} \sigma_{zx} \end{aligned}$$

Dans le cas des contraintes principales, les expressions ci-dessous se simplifient et on peut écrire :

$$\frac{\partial I_3}{\partial \sigma_k} = \frac{I_3}{\sigma_k}$$