

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique



## Thèse de Doctorat

Présentée à l'Université 08 mai 1945 de Guelma  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie civil et hydraulique

*Spécialité :*  
*Génie civil*

*Présentée par :* **Mr HIMEUR Mohammed**

---

**Contribution à la formulation de quelques éléments de coques  
basés sur la formulation en déformation**

---

Sous la direction : du Professeur **Mohamed GUENFOUD**

Devant le jury :

Président	:	<b>M.S. NOUAOURIA</b>	Prof.	Université de Guelma
Rapporteur	:	<b>M. GUENFOUD</b>	Prof.	Université de Guelma
Examineur	:	<b>R. LASSOUED</b>	Prof.	Université Constantine 1
Examineur	:	<b>N. DJEBBAR</b>	Prof.	Université Constantine 1
Examineur	:	<b>A. BENMARECE</b>	Prof.	Université de Guelma
Examineur	:	<b>H. BOUZERED</b>	M.C.A.	Université de Skikda

2014

## Dédicace

*Je dédie ce travail*

- à la mémoire de mes chers parents *Ahmed* et *Zineb*,
- à la mémoire de mes frères *Abderrahmane* et *Bouzit*, qui ont été toujours fiers de mon parcours d'études de post-graduation, avant leur disparition,
- à mon épouse *leila* et mes fils jumeaux *Amine* et *Amel*,
- à mes frères *Messaoud*, *Hamit* et *Mustapha*,
- à toute la famille,
- à tous les proches et amis,
- et à toute personne ayant contribué de près ou de loin à ce travail.

## **Remerciements**

*Ce travail a été réalisé à l'université 08 mai 1945 de Guelma – Faculté des sciences et de la technologie – département de génie civil et hydraulique sous la direction du Professeur Mohamed GUENFOUD, je tiens à lui témoigner de ma plus profonde reconnaissance pour la confiance dont il m'a honoré pour avoir accepté à diriger ce travail. Je le remercie également pour les nombreux conseils et encouragements prodigués, pour sa disponibilité, pour sa gentillesse et pour sa modestie. Ces qualités m'ont été d'un grand apport dans l'accomplissement de ce travail. Je lui dis encore une fois « merci ».*

*Je ne peux pas oublier également de parler des conditions de travail irréprochables dont j'ai pu bénéficier au niveau du département de génie civil et de l'excellente ambiance de travail créée par son personnel, je veux remercier toute femme et homme gentils formant ce personnel et à leur tête, le chef du département.*

*Je voudrais remercier mon épouse pour ses encouragements et surtout pour les sacrifices qu'elle a faits pour me permettre l'accomplissement de ce travail.*

*Je ne peux pas non plus oublier de remercier mes poussins, mes fils jumeaux Amine et Amel pour les encouragements qu'ils n'ont cessé de me prodiguer avec leur innocence,*

*Je voudrais enfin remercier toute personne ayant contribué de près ou de loin à ce travail.*

## خلاصة

الهدف من هذا البحث هو تطوير عناصر محدودة قشرية قادرة على الأخذ بالحسيان كل الوضعيات التي نلاقيها في حساب المشاريع (الهياكل). إن استعمال العناصر المصفحة (عناصر ثلاثية الشكل) لتقريب الهياكل القشرية , هو المنهج الذي اتبعناه. في هذا الإتجاه فإن هندسة القشريات ستقرب بواسطة عناصر مستوية بتركيب عنصر غشائي مع عنصر إنحناء. بالطبع هذا يفترض بأن الظاهرتين (الغشائية و الإنحنائية) غير متقارنتين. إن استعمال هذه المقاربة تسمح في غالب الأحيان بتحليل هذه القشريات بدقة مرضية. بينما, وجود العناصر الغشائية (من صنف  $C^0$ ) في مواجهة العناصر المنحنية (من صنف  $C^1$ ) تنتج بعض المشاكل المعبر عنها ب:

- الفقر في الإنتقال عند دراسة الإنحناء
- مشاكل الإستمرار و المطابقة عند استعمال العناصر الغشائية بجانب العناصر المنحنية (صفيحة) و عند المرور للعناصر القشرية.

و بالتالي فإن هدفنا هو بناء عناصر قشرية مصفحة بتركيب عنصر غشائي مع عنصر صفيحي بإستعمال مقاربة التشوه و بإستعمال تقنيات تسمح بحل هذه المشاكل.

العنصرين الأوليين خاصين بتقريب الهياكل السميكة التي لها سلوك قص مهيمن لكنها تصلح كذلك لحساب الهياكل الرقيقة. نقصد العنصر القشري المعمد (C.ep43) و العنصر القشري المعمد (C.ep42).

العنصران الآخران خاصين بتقريب الهياكل الرقيقة اللذان لهما سلوك إنحناء مهيمن و هما العنصر القشري المسمى (C.mi43) و العنصر القشري المسمى (C.mi42).

إن صياغة هذه العناصر تركز على نموذج التشوه و على التقنيات و المفاهيم التي تستهدف :

- إثراء حقل لإنتقال (إثراء P) و بالتالي نحصل على دقة كبيرة في تقريب الحل
- سلوك صحيح النسبة للإلتواء الهندسي للتشبيك
- تجنب مشكل قفل القص الخاص بالصفائح الرقيقة
- إجابة للمشاكل العددية الناجمة عن غياب صلابة الدوران في حالة العناصر المتحدة المستوى

هذه المفاهيم و التقنيات هي نتيجة تبني المقاربة عن طريق التشوه, إضافة عقدة رابعة داخلية للعنصر ثلاثي العقد أين درجات الحرية لهذه العقدة ستصفي بتقنية التكتيف الستاتيكي على مستوى مصفوفة الصلابة العنصرية, إستعمال التكامل التحليلي لتقييم مصفوفة الصلابة, إستعمال مبدأ خفض الطاقة الخاصة بالدوران حول العمود في حساب مصفوفة الصلابة الخاصة بالدوران حول المحور (Oz). هذا السعي يسمح لنا بإنشاء عناصر تناسقية قوية و رفيعة بالرغم من أنها مازالت شابة و تتطلب المزيد من النضج .

### الكلمات الدالة (المفتاحية)

عنصر محدود قشري - الدوران حول العمود - صياغة بالتشوه - التكامل التحليلي - التكتيف الستاتيكي - مصفوفة الدوران

## Résumé

L'objet de ce travail est la mise au point d'une série d'éléments finis de coque permettant de prendre en compte l'essentiel des situations rencontrées dans le calcul des ouvrages.

L'utilisation d'éléments plats (éléments triangulaires), pour discrétiser les structures coques est l'approche qu'on a considéré. En ce sens, la géométrie des coques peut être approchée en utilisant les éléments plans par superposition d'un *élément de membrane* et d'un *élément de flexion*. Ceci suppose, bien sûr que les phénomènes de membrane et de flexion soient découplés. L'utilisation de cette approche permet souvent l'analyse des structures coque avec une précision satisfaisante. Cependant la présence des éléments finis membranaires (de classe  $C^0$ ) face aux éléments flexionnels (de classe  $C^1$ ) pose des problématiques exprimées :

\* en termes de pauvreté en déplacement pour le traitement des aspects de flexion,

\* et en terme de problèmes de continuité et de conformité lorsqu'ils sont utilisés en jonction avec des éléments de plaques et lors du passage aux éléments de coques.

De ce fait, notre objectif est la construction d'éléments de coques à facettes planes par superposition d'un *élément de membrane* et d'un *élément de flexion*, en adoptant une approche (celle en déformation) et en utilisant des techniques permettant d'apporter des solutions à ces problèmes.

Les deux premiers éléments de coque développés sont destinés pour discrétiser les structures épaisses ayant des comportements membranaires dominants mais qui sont également bien adaptés au calcul des structures minces. Il s'agit de l'élément de coque baptisé « *C.ep43* » et de l'élément de coque baptisé « *C.ep42* »,

Les deux autres éléments de coque sont destinés pour discrétiser les structures minces ayant des comportements flexionnels dominants. Il s'agit de l'élément de coque baptisé « *C.mi43* » et l'élément de coque baptisé « *C.mi42* ».

La formulation de ces éléments est basée sur le modèle en déformation et utilise des concepts et des techniques visant :

- l'enrichissement des champs de déplacements (raffinement  $p$ ), par conséquent une plus grande précision dans l'approximation de la solution,
- des comportements plus robustes vis-à-vis de la distorsion géométrique du maillage,
- le contournement du fameux problème de « *shear locking* » spécifique aux plaques minces,
- des réponses aux problèmes numériques induits par l'absence de rigidité de rotation dans le cas des éléments coplanaires.

Ces concepts et ces techniques sont l'adoption de « *l'approche en déformation* », l'introduction d'un « *quatrième nœud interne* » à l'élément triangulaire dont les degrés de liberté correspondant sont par la suite éliminés au niveau de la matrice de rigidité élémentaire par la technique de « *condensation statique* », l'utilisation de « *l'intégration analytique* » pour l'évaluation de la matrice de rigidité, l'utilisation du « *principe de minimisation de l'énergie associée à la rotation autour de la normale* » dans la détermination de la matrice de rigidité de rotation  $\theta_z$ .

Cette démarche a permis d'aboutir à des éléments finis concurrentiels, robustes et performants, quoi que ceux-ci restent jeunes et demandent une plus grande maturation.

**Mots clefs** : *Élément fini de coque, rotation autour de la normale, formulation en déformation, Intégration analytique, Condensation statique, matrice de rotation.*

## Abstract

The purpose of this work is the development of a series of shell finite elements to take into account most of the situations encountered in the structural calculus.

The approach used in this work, was flat elements (triangular elements) to discretize the shell structures. In this sense, the geometry of the shells can be approximated by using planar elements by superposing membrane element and bending element. This, of course, assumes that the phenomena of membrane and bending are uncoupled. The use of this approach often allows the analysis of shell structures with satisfactory accuracy. However, the presence of membrane finite elements (of class  $C^0$ ) against the flexural elements (class  $C1$ ) raises issues:

\* In terms of lack of displacement for the treatment of bending aspects,

\* And in terms of continuity and conformity problems when used together with plates elements and in the transition to the shell elements.

So, our goal is the construction of shell elements for planar facets using the superposition of a membrane element and a flexural element, by adopting an approach (the deformation one) and using techniques which will bring solutions to these problems.

The first two shell elements are used to discretize thick structures with a dominant membrane behavior but well suited to the calculation of thin structures. These shell elements are called "*C.ep43*" and "*C.ep42*".

The other two shell elements are used to discretize thin structures with flexural dominant behavior. These shell elements are called "*C.mi43*" and "*C.mi42*".

The formulation of these elements is based on the strain model and uses concepts and techniques for:

- Enriching the displacement field (p refinement), therefore greater accuracy in the approximation of the solution can be obtained,
- Robust behavior regarding the geometrical distortion of the mesh,
- Circumvention of the famous problem of "shear locking" specific to thin plates
- Bring answers to numerical problems caused by the absence of rotational stiffness in the case of coplanar elements.

These concepts and techniques are the adoption of:

- The "strain approach,"
- The introduction of a "fourth internal node" in the triangular element whose corresponding degrees of freedom are then eliminated in the elementary stiffness matrix by using "*static condensation technique*",
- The use of the "*analytical integration*" in order to evaluate the stiffness matrix,
- The use of the "*energy minimizing principle associated with the rotation about the normal axis*" in determining the stiffness matrix rotation  $\theta_z$ .

This approach has led to competitive, robust and powerful finite elements whatever they are young and requires greater maturity.

**Keywords:** *shell finite element, rotation around the normal, formulation deformation, analytical Integration, static condensation, matrix rotation.*

# SOMMAIRE

## Chapitre 01

### **Introduction générale**

---

1.1	- Cadre de la recherche :.....	03
1.2	- Position du problème et objectifs :.....	03
1.3	- Plan de la thèse :.....	06

## Chapitre 02

### **Etude bibliographique**

---

#### **A - Notions théoriques de base**

1.1	- Introduction :.....	11
2.2	- Etude de la mécanique des milieux continus et de la méthode des éléments finis : .....	11
2.2.1	- Cinématique des milieux continus : .....	11
2.2.2	- Les conditions de compatibilité cinématique :.....	13
2.2.3	- Contraintes, équations d'équilibre et déformations :.....	14
2.2.4	- Loi de comportement :.....	16
2.2.5	- Principes des travaux virtuels :.....	17
2.3	- Modélisation par éléments finis ; les approches :.....	18
2.3.1	- En déplacement :.....	18
2.3.2	- En équilibre :.....	20
2.3.3	- Modèle hybride :.....	22
2.3.4	- Modèle mixte :.....	22
2.3.5	- Modèle en déformation :.....	23
2.4	- Conclusion :.....	21

#### **B – Les techniques de formulation**

2.5	- Introduction :.....	23
2.6	- formulation des éléments finis de coque existants :.....	24
2.7	- L'approche « en déformation » :.....	25
2.7.1	- Pourquoi l'approche en déformation ? :.....	25
2.7.2	- Hypothèse et démarche :.....	25
2.7.3	- Principes de formulation :.....	26
2.7.4	- Procédure de formulation :.....	26
2.7.5	- Ses avantages :.....	28
2.8	- Concepts mathématiques utilisés :.....	29

2.8.1	- Evaluation de la matrice de rotation	29
2.8.2	- Condensation statique	31
2.8.3	- Intégration analytique	32
2.9	- Conclusion	34

## Chapitre 03

### Développement d'éléments de coque à base triangulaire

---

3.1	- Introduction	39
3.2	- Formulation des éléments nouveaux de flexion	39
3.2.1	- Élément de plaque mince ( <i>HIMEUR</i> )	39
3.2.2	- Élément de plaque épaisse ( <i>Pep43</i> )	46
3.3	- Formulation des éléments nouveaux de membrane	51
3.3.1	- Élément membranaire $T42_{K\theta}$	51
3.3.2	- Élément membranaire $T_{43}$	55
3.4	- Formulation des éléments nouveaux de coque	58
3.5	- Conclusion	61

## Chapitre 04

### Validation

---

#### A – Les comportements membranaires

4.1	- Introduction	65
4.2	- Test de comportement à la flexion avec cisaillement : (Poutre Cantilever)	65
4.3	- Test de comportement à la flexion pure	68
4.4	- Conclusion	69

#### B – Les comportements flexionnels

4.5	- Introduction	69
4.6	- flexion sans effet de cisaillement transversal	69
4.6.1	- Patch-test	69
4.6.2	- Poutre console soumise à une charge ponctuelle à son extrémité	72
4.6.3	- Plaque carrée isotrope	74
4.6.4	- Plaque biaise isotrope	78
4.6.5	- Tests de ROBINSON	80
4.7	- flexion avec effet de cisaillement transversal	83

4.7.1	- Patch-tests .....	83
4.7.2	- Poutre console .....	84
4.7.3	- Torsion d'une plaque carrée .....	86
4.7.4	- plaque carrée isotrope .....	87
4.7.5	- plaque isotrope circulaire .....	90
4.8	- Conclusion .....	92

### **C- Les éléments de coque**

4.9	- Introduction .....	92
4.10	- Cylindre pincé à bords libres .....	92
4.11	- Cylindre pincé avec diaphragme .....	96
4.12	- Conclusion .....	100

## Chapitre 05

### **Conclusions et recommandations**

---

5	- Conclusions et recommandations .....	103
---	--	-----

### **Références bibliographiques**

---

## **Annexes**

---

### **ANNEXE I**

#### **Matrices des coordonnées nodales [A]**

I-a / Élément fini de membrane « *T42* »

I-b / Élément fini de membrane « *T43* »

I-c / Élément fini de plaque mince « *HIMEUR* »

I-d / Élément fini de plaque épaisse « *Pep43* »

### **ANNEXE II**

#### **Matrices [Ko]**

II-a / Élément fini de membrane « *T42* »

II-b / Élément fini de membrane « *T43* »

II-c / Élément fini de plaque mince « *HIMEUR* »

II-d / Élément fini de plaque épaisse « *Pep43* »

### **ANNEXE III**

**Structure type de la matrice de rigidité de l'élément coque [Ke] au niveau élémentaire construite dans le système d'axes des coordonnées locales**

# LISTE DES FIGURES

## Chapitre 02

		<i>Page</i>
Figure 1.	<i>Cinématique des milieux continus</i>	12
Figure 2.	<i>Corps en équilibre</i>	14
Figure 3.	<i>Triangle avec trois nœuds et trois degrés de liberté par nœud (Deux translations <math>U</math> et <math>V</math> et la rotation autour de la normale <math>\theta_z</math>)</i>	29
Figure 4.	<i>Intégration analytique - Exemple d'un élément fini triangulaire</i>	33

## Chapitre 03

		<i>Page</i>
Figure 5.	<i>Élément triangulaire de plaque avec trois degrés de liberté par nœud</i>	40
Figure 6.	<i>Déformation d'une plaque en flexion (Théorie de Kirchoff)</i>	41
Figure 7.	<i>Élément triangulaire de plaque avec trois degrés de liberté par nœud</i>	46
Figure 8.	<i>Élément <math>T_{42\_K\theta}</math>; Triangle avec quatre nœuds et deux degrés de liberté par nœud (deux translations <math>U</math> et <math>V</math>) adjoint de la rigidité liée à la rotation autour de la normale</i>	52
Figure 9.	<i>Élément <math>T_{42}</math>; Triangle avec quatre nœuds et deux degrés de liberté par nœud (deux translations (<math>U</math> et <math>V</math>))</i>	53
Figure 10.	<i>Élément <math>T_{43}</math>; Triangle avec quatre nœuds et trois degrés de liberté par nœud (deux translations <math>U</math> et <math>V</math> et la rotation <math>\theta_z</math>)</i>	56
Figure 11.	<i>Modes de construction des éléments nouveaux de coque</i>	59
Figure 12.	<i>L'élément de plaque par rapport aux deux repères (global et local)</i>	60
Figure 13.	<i>Structure type de la matrice de rigidité de l'élément coque <math>[K_e]</math> au niveau élémentaire construite dans le système d'axes des coordonnées locales</i>	60

## Chapitre 04

		<i>Page</i>
Figure 14.	<i>Poutre Console de J.L.Batoz et G.Dhatt [BAT90]</i>	65
Figure 15.	<i>Type de maillage</i>	65
Figure 16.	<i>Test convergence pour un maillage régulier – Déplacement <math>V</math> de l'extrémité libre</i>	66

Figure 17.	Comparaison des éléments développés avec d'autres éléments existants dans la littérature, pour des maillages réguliers	67
Figure 18.	Test convergence pour un maillage distordu – Déplacement $V$ de l'extrémité libre	67
Figure 19.	Comparaison des éléments développés avec d'autres éléments existants dans la littérature, pour des maillages distordus	68
Figure 20.	Flexion Pure	68
Figure 21.	Sollicitations sur le contour reflétant l'état des contraintes constantes	70
Figure 22.	Charges nodales équivalentes	70
Figure 23.	Torsion d'une plaque carrée	71
Figure 24.	Poutre – Console soumise à une charge ponctuelle	72
Figure 25.	Déplacement normalisé du point A en flexion simple	73
Figure 26.	Plaque carrée isotrope soumise à une charge ponctuelle appliquée en son centre	74
Figure 27.	Erreur relative (%) du déplacement du point C pour une plaque carrée isotrope, simplement appuyée sur ses quatre côtés, avec charge concentrée au point C –	75
Figure 28.	Erreur relative (%) du déplacement du point C pour une plaque carrée isotrope, encastree sur ses quatre côtés, avec charge concentrée au point C –	76
Figure 29.	Plaque carrée isotrope soumise à une charge uniformément répartie	76
Figure 30.	Erreur relative (%) du déplacement du point C pour une plaque carrée isotrope simplement appuyée sur ses quatre côtés, avec une charge uniformément répartie	77
Figure 31.	Erreur relative (%) du déplacement du point C pour une plaque carrée isotrope encastree sur ses quatre côtés, avec une charge uniformément répartie –	78
Figure 32.	Plaque isotrope biaise ( $60^\circ$ ) avec bords libres	78
Figure 33.	Déplacement normalisé " $W_c/W_{ref.}$ " du point central - plaque biaise isotrope avec bords libres	79
Figure 34.	Poutre – Console soumise aux tests de ROBINSON	80
Figure 35.	Test "A" - Flexion Gênée – déplacement "W" du point "A"	81
Figure 36.	Test "B" - Torsion Gênée – déplacement "W" du point "A"	82
Figure 37.	Sollicitations sur le contour reflétant l'état des contraintes constantes	83
Figure 38.	Charges nodales équivalentes	84
Figure 39.	Poutre – Console soumise à une charge ponctuelle	84
Figure 40.	Erreur relative sur le déplacement observé du point A suivant l'axe "Oz" de la poutre console par rapport la solution théorique donnée pour plusieurs élancement	85
Figure 41.	Torsion d'une plaque carrée	86

Figure 42.	Plaque carrée isotrope	87
Figure 43.	Déplacement normé du point C au centre de la plaque simplement appuyée	88
Figure 44.	Déplacement normé du point C au centre de la plaque encastrée sur ses quatre côtés	88
Figure 45.	Déplacement normé du point C au centre de la plaque simplement appuyée	89
Figure 46.	Déplacement normé du point C au centre de la plaque encastrée sur ses quatre côtés	90
Figure 47.	Plaque circulaire avec les maillages considérés	91
Figure 48.	Déplacement normé du point C au centre de la plaque circulaire	91
Figure 49.	Cylindre pincé à bords libres – Géométrie et maillage	93
Figure 50.	Cylindre mince - Déplacement du point "C" selon la densité du maillage	95
Figure 51.	Cylindre épais - Déplacement du point "C" selon la densité du maillage	95
Figure 52.	Cylindre épais – déplacement du point C ( $w_C$ ) selon le rapport "L/R" (pour un maillage de 360 ddl)	96
Figure 53.	Cylindre pincé avec diaphragme rigide – Géométrie et maillage	97
Figure 54.	Cylindre pincé avec diaphragme – déplacement du point C ( $w_C$ ) selon la densité du maillage	98
Figure 55.	Cylindre pincé avec diaphragme – déplacement ( $W$ ) le long du bord AC (pour une densité du maillage de 294 DDL)	99

## LISTE DES TABLEAUX

	<i>Page</i>
Tableau 1. Valeurs des coefficients $C(k)$ en fonction de $\beta$	34
Tableau 2. Résultats des tests à la flexion pure	69
Tableau 3. Résultats des patch-tests mécaniques pour l'élément de plaque de type « Kirchhoff »	71
Tableau 4. Résultats de la simulation de la torsion d'une plaque carrée	72
Tableau 5. Données géométriques, mécaniques et de chargement pour la poutre console en flexion simple	72
Tableau 6. Déplacement du point A suivant l'axe "Oz" de la poutre console en flexion simple	73
Tableau 7. Données géométriques, mécaniques et de chargement pour la plaque carrée isotrope	74
Tableau 8. Déplacement normalisé " $W_c/W_1$ " du point C pour une plaque carrée isotrope, simplement appuyée sur ses quatre côtés, avec charge concentrée au point C –	75
Tableau 9. Données géométriques, mécaniques pour la plaque biaisée ( $60^\circ$ ) isotrope	79
Tableau 10. Données géométriques, mécaniques du matériau pour la poutre-console soumise aux tests de ROBINSON	80
Tableau 11. Test "A" - Flexion Génée – déplacement "W" du point "A"	81
Tableau 12. Test "B" - Torsion Génée – déplacement "W" du point "A"	82
Tableau 13. Résultats des patch-tests mécaniques pour l'élément de plaque de type « Reissner Mindlin »	84
Tableau 14. Déplacement observé du point A suivant l'axe "Oz" de la poutre console	85
Tableau 15. Résultats de la simulation de la torsion d'une plaque carrée.	86
Tableau 16. Flèche au centre (point C) de la plaque simplement appuyée - Réf. = $100WD/qa^4$ avec $D = \frac{E.h^3}{12(1-\nu^2)}$	87
Tableau 17. Flèche au centre (point C) de la plaque encadrée - Réf. = $100WD/qa^4$ avec $D = \frac{E.h^3}{12(1-\nu^2)}$	87
Tableau 18. Flèche au centre (point C) de la plaque simplement appuyée - Réf. = $100WD/Pa^2$ avec $D = \frac{E.h^3}{12(1-\nu^2)}$	89
Tableau 19. Flèche au centre (point C) de la plaque encadrée - Réf. = $100WD/Pa^2$ avec $D = \frac{E.h^3}{12(1-\nu^2)}$	90
Tableau 20. Cylindre mince – déplacement du point C ( $w_C$ ) selon la densité du maillage	94
Tableau 21. Cylindre épais – déplacement du point C ( $w_C$ ) selon la densité du maillage	94
Tableau 22. Cylindre épais – déplacement du point C ( $w_C$ ) selon le rapport "L/R"	94

	<i>(pour un maillage de 360 ddl)</i>	
<i>Tableau 23.</i>	<i>Cylindre pincé avec diaphragme – déplacement du point C (<math>W_C</math>) selon la densité du maillage</i>	<i>98</i>
<i>Tableau 24.</i>	<i>Cylindre pincé avec diaphragme – déplacement (<math>W</math>) le long du bord AC (pour une densité du maillage de 294 DDL)</i>	<i>99</i>

**Introduction générale**

---

**1.1 - Cadre de la recherche**

**1.2 - Problématique et objectifs**

**1.3 - Plan de la thèse**



## Chapitre 01

### Introduction générale

#### 1.1 - Cadre de la recherche

Ce travail constitue une recherche scientifique élaborée dans le cadre des études en Post-Graduation en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat en génie civil.

Le champ de recherche choisi concerne le développement d'éléments finis permettant la construction d'éléments finis de coque nouveaux : développement d'éléments membranaires, développement d'éléments de flexion, construction des éléments de coques à facettes planes.

Les premiers travaux de magister ont concerné le premier axe de recherche : développement d'éléments membranaires nouveaux

Le présent travail qui est l'objet de la thèse de doctorat concerne les deux autres axes de recherches : développement d'éléments de flexion, construction des éléments de coques à facettes planes.

Notre sujet de recherche intitulé « **CONTRIBUTION A LA FORMULATION DE QUELQUES ELEMENTS DE COQUES BASES SUR LA FORMULATION EN DEFORMATION** » répond à une problématique posée en terme d'atténuation des risques d'erreurs dans le domaine de calcul des structures, liés aux codes utilisés, particulièrement au niveau des hypothèses de base régissant les méthodes de calculs numériques utilisés et au niveau du degré de fiabilité et de robustesse des éléments finis intégrés à ces codes.

Ce travail est mené sous la direction du Professeur Mohamed GUENFOUD directeur du Laboratoire de Génie Civil et Hydraulique - Université 08 mai 1945 de Guelma.

#### 1.2 - Problématique et objectifs

Dans le domaine du génie civil on a souvent besoin de calculer des structures de type "coque" qui peuvent être relativement complexes (ponts à caisson, dalles, barrages, voûtes . . .). Pour de tels ouvrages il est très rare que l'on puisse obtenir une solution analytique du problème en utilisant les théories classiques des plaques et des coques. De ce fait, on est la plupart du temps obligé d'avoir recours à des méthodes numériques comme la méthode des éléments finis.

Les éléments de poutre permettent souvent d'avoir une première approximation du comportement de nombreux ouvrages simples. Néanmoins, ils se révèlent insuffisants pour l'étude d'ouvrages plus complexes. Dans ces derniers cas, il faut donc utiliser des éléments plus performants comme les éléments finis de coque ou les éléments finis tridimensionnels.

L'objet de ce travail est la mise au point d'une série d'éléments finis de coque permettant de prendre en compte l'essentiel des situations rencontrées dans le calcul des ouvrages.

L'utilisation d'éléments plats triangulaires, pour discrétiser les structures coques est l'approche que on a considéré. En ce sens, l'élément « coque » est construit par

superposition d'un *élément de membrane* et d'un *élément de flexion*. L'avantage essentiel des éléments appartenant à cette catégorie est leur simplicité relative. En effet leur formulation repose sur les théories classiques des plaques (minces ou épaisses). De ce fait on évite toutes les complexités dues à la prise en compte des courbures dans les théories des coques.

Notons que le couplage flexion-membrane existant dans une structure coque courbe n'est pas pris en compte au niveau de chaque élément. Il n'est pris en compte que par l'assemblage de plusieurs éléments non coplanaires.

Ce modèle d'élément fini de coque permet souvent d'approcher les solutions (déplacements, contraintes, etc.) avec une précision satisfaisante. Seulement, lorsque les éléments finis membranaires de classe  $C^0$  sont associés à des éléments flexionnels de classe  $C^1$ , des problèmes surgissent, qu'il y a lieu de résoudre. Ces problèmes sont souvent de deux natures :

- pauvreté en déplacement pour le traitement des aspects de flexion, ce qui oblige d'opter pour des réseaux denses afin d'approcher correctement la géométrie curviligne des coques.
- discontinuité et incompatibilité des champs des déplacements et des contraintes au niveau des jonctions entre les éléments membranaires et les éléments flexionnels au moment du passage aux éléments de coques.

Le traitement de ces problèmes constitue un autre objectif de notre contribution. En effet, la construction des quelques éléments de coque développés dans le présent travail s'appuie sur l'approche en déformation et utilise des concepts et des techniques permettant de contourner les problèmes cités auparavant. Il s'agit de :

- l'introduction d'un quatrième noeud fictif à l'élément triangulaire considéré lors de l'élaboration des fonctions de forme d'interpolation des champs de déformations, de déplacements et des contraintes,
- l'utilisation de l'intégration analytique au moment de l'évaluation de la matrice de rigidité de l'élément fini,
- la réduction de cette matrice au niveau élémentaire (avant assemblage) par la technique de condensation statique qui permet d'exprimer les variables concernant les degrés de liberté (DDL) du noeud fictif en fonction des variables concernant les trois noeuds du triangle,
- la prise en compte au niveau de la cinématique de l'élément membranaire de l'inconnue nodale de rotation ; ceci de deux manières : drilling rotation ou minimisation de l'énergie de la rotation autour de la normale selon démarche de [PRO00].

En réponse à ces problématiques, notre travail a abouti à la formulation d'éléments de coques nouveaux à facettes planes construits en superposant des éléments membranaires et des éléments flexionnels nouveaux.

En premier lieu, on a considéré dans ce travail deux éléments membranaires :

- *Le premier élément*, baptisé « **T43** » est un élément fini membranaire triangulaire à noeud central perturbé avec « drilling rotation ». Celui-ci a fait l'objet d'analyse détaillée dans les premiers travaux de magister.

- *Le second élément*, nommé « **T42\_K<sub>teta</sub>** », n'est autre que l'élément fini membranaire baptisé « **T42** » avec ses quatre nœuds et ses deux degrés de liberté par nœud (les deux translations U et V) [HIME08] auquel on a ajouté la rigidité associée à la rotation autour de la normale (matrice de rotation  $K_\theta$ ).

La méthode d'adjonction de cette rotation en plan est basée sur le principe de minimisation de l'énergie potentielle associée à la rotation.

En second lieu, on développe dans ce travail deux éléments flexionnels :

- *Le premier élément*, baptisé « **HIMEUR** » est un élément fini de plaque triangulaire d'élasticité plane basé sur les hypothèses de la théorie des plaques minces (Théorie de Kirchhoff). Sa formulation utilise des concepts relatifs à l'approche en déformation, au quatrième nœud fictif, à la condensation statique, à l'intégration analytique.

- *Le second élément*, baptisé « **Pep43** » est un élément fini de plaque triangulaire d'élasticité plane basé sur les hypothèses de la théorie des plaques épaisses (Théorie de Reissner mindlin). Sa formulation utilise des concepts relatifs à l'approche en déformation, au quatrième nœud fictif, à la condensation statique, à l'intégration analytique.

L'évaluation de la matrice de rigidité élémentaire pour tous ces éléments est établie par l'utilisation de la méthode d'intégration analytique.

La suite logique de notre travail est la construction d'éléments de coques à facettes planes par superposition d'un *élément de membrane* et d'un *élément de flexion*.

Les deux premiers éléments sont destinés pour discrétiser les structures épaisses ayant des comportements membranaires dominants. Comme ils sont également bien adaptés au calcul des structures minces. Il s'agit de :

- l'élément de coque baptisé « **C.ep43** », dont la matrice de rigidité est structurée autour de celles des éléments de plaque « **Pep43** » et de membrane « **T43** ». Il est à noter que la difficulté liée à la rigidité suivant  $\theta_z$  est levée à ce niveau dans la formulation de l'élément membranaire en introduisant la rotation autour de la normale « drilling rotation » dans la construction de la matrice de rigidité élémentaire correspondante.

- l'élément de coque baptisé « **C.ep42** », dont la matrice de rigidité est structurée autour de celles des éléments plaque épaisse « **Pep43** » et de membrane « **T42\_K<sub>teta</sub>** ». Pour cet élément la difficulté liée à la rigidité suivant  $\theta_z$  est levée dans la formulation de l'élément membranaire en minimisant l'énergie potentielle associée à la rotation.

Les deux autres éléments sont destinés pour discrétiser les structures minces ayant des comportements flexionnels dominants. Il s'agit de :

- l'élément de coque baptisé « **C.mi43** », dont la matrice de rigidité est structurée autour de celles des éléments de plaque mince « **HIMEUR** » et de membrane « **T43** ».

- l'élément de coque baptisé « **C.mi42** », dont la matrice de rigidité est structurée autour de celles des éléments de plaque mince « **HIMEUR** » et de membrane « **T42\_K<sub>teta</sub>** ».

Les difficultés liées à la rigidité suivant  $\theta_z$  pour ces deux derniers éléments sont levées de la même manière que pour les éléments de coques épaisses : Principe de

« drilling rotation » pour ce qui est de l'élément « *C.mi43* » et minimisation de l'énergie potentielle associée à la rotation pour ce qui est de l'élément « *C.mi42* ».

Pour évaluer la performance de ces éléments, on a utilisé les exemples et les applications existantes dans la littérature permettant d'étudier le comportement de ces éléments dans le traitement des structures minces et épaisses avec des comportements différenciés : flexion pure, flexion avec cisaillement transversal, flexion dominante, effet de membrane dominant.

### 1.3 - Plan de la thèse

Cette thèse est composée :

- de la présente introduction,
  - de trois chapitres,
  - des conclusions et recommandations
  - et d'un bloc d'annexes.
- Au niveau de cette introduction, on a positionné le problème sujet de notre recherche, en précisant la problématique de modélisation des structures complexes et de coques, les objectifs visant d'apporter des réponses et les axes de travail et de développement adoptés pour la concrétisation de ces objectifs.
- Dans le chapitre 02, on donne d'abord sommairement une présentation des notions de la mécanique des milieux continus.
- on enchaîne ensuite sur la manière dont il est possible d'en déduire les principaux modèles d'éléments finis existants, particulièrement les formulations « en déplacement », « en équilibre », « mixtes », « hybrides » et « en déformation ».
- Ce chapitre synthétise également les éléments utiles et déterminants de la conduite de notre démarche méthodologique.
- Ainsi, il y est fait état d'une synthèse de quelques éléments finis triangulaires de coques existants dans la littérature en précisant leurs spécificités et leur type de formulation. Puis on explique l'approche « en déformation » en présentant ses objectifs, ses principes, ses exigences, sa formulation et ses avantages comparativement aux autres approches existantes.
- on rappelle, ensuite, les définitions et les démarches de certaines techniques utilisées dans notre développement, telles : les notions de « drilling rotation », le principe de minimisation de l'énergie potentielle associée à la rotation autour de la normale « drilling rotation » (évaluation de la matrice rigidité associée à la rotation), l'intégration analytique et la condensation statique.
- Le chapitre 03 est, quant à lui, réservé à la formulation et au développement d'éléments de plaques et de coques nouveaux basés sur la formulation en déformation. On y expose en premier lieu, la formulation de l'élément membranaire nouveau d'élasticité plane, qu'on a baptisé, « *T42\_K $\theta$*  ». on présente ensuite, les principales caractéristiques de l'élément « *T43* » [HIM08]. On détaille par la suite la démarche de formulation des deux éléments de plaque qu'on a baptisé « *HIMEUR* »

pour la plaque mince et « *Pep43* » pour la plaque épaisse. Comme on finit par la définition de quatre éléments de coque nouveaux :

- deux éléments de coque épaisse baptisés « *C.ep43* » et « *C.ep42* »,
- deux éléments de coque minces « *C.mi43* » et « *C.mi42* ».

- Le chapitre 04 présente uniquement les tests effectués sur des exemples tirés de la littérature. Il y est mis en relief le comportement de nos éléments dans le traitement des structures minces et épaisses avec des situations diverses : effet de membrane dominant, effet de flexion dominante sans et avec cisaillement transversal, comportement mixte.

Comme il est fait état d'une analyse comparative des performances de nos éléments par rapport à celles de certains éléments développés par d'autres auteurs.

- On termine, enfin, par quelques conclusions et recommandations.



## **Etude bibliographique :**

### **A - Notions théoriques de base**

---

#### **2.1 - Introduction**

#### **2.2 – Etude de la Mécanique des milieux continus et de la méthode des éléments finis**

*2.2.1. Cinématique des milieux continus*

*2.2.2. Les conditions de compatibilité cinématique*

*2.2.3. Contraintes, équations d'équilibre et déformations*

*2.2.4. Loi de comportement*

*2.2.5. Principe des travaux virtuels*

*2.2.6. Principe des travaux virtuels complémentaires*

#### **2.3 – Modélisation par éléments fini : Les approches**

*2.3.1 – en déplacement*

*2.3.2 – en équilibre*

*2.3.3 – Modèle hybride*

*2.3.4 – Modèle mixte*

*2.3.5 – Modèle en déformation*

#### **2.4 – Conclusion**

### **B - Les techniques de formulation**

---

#### **2.5 – Introduction**

#### **2.6 – formulation des éléments finis de coque existants**

#### **2.7 – L'approche « en déformation »**

*2.7.1 – Pourquoi l'approche en déformation ?*

*2.7.2 – Hypothèses et démarche*

*2.7.3 – Principes de formulation*

*2.7.4 – Procédure de formulation*

*2.7.5 – Ses avantages*

#### **2.8 – Concepts mathématiques utilisés**

*2.8.1 – Evaluation de la matrice de rotation*

*2.8.2 – Condensation statique*

*2.8.3 – Intégration analytique*

#### **2.9 – Conclusion**



## Chapitre 02

# Etude bibliographique :

## A - Notions théoriques de base

### 2.1 - Introduction

Dans les années 1960, grâce au développement de l'informatique, de nombreux secteurs industriels et en particulier celui de l'aéronautique, ont vu apparaître un nouvel outil de production devenu, aujourd'hui, incontournable : la Conception Assistée par Ordinateur (CAO).

Cette étape dans la production, d'une pièce consiste à placer virtuellement celle-ci dans l'environnement où elle est censée évoluer pour analyser son comportement sans avoir recours à l'expérimentation.

Pour ce faire, il est nécessaire, en premier lieu de créer une maquette informatique virtuelle (modélisation) de l'objet à analyser et dans un second lieu de résoudre les équations physiques qui régissent les interactions de cet objet avec les sollicitations extérieures auxquelles il est sollicité.

La solution exacte de tels problèmes est généralement impossible à calculer ; c'est pourquoi on a souvent recours à des méthodes de résolutions numériques qui conduisent seulement à des solutions approchées du problème.

Parmi celles-ci, la méthode des éléments finis est celle qui s'est imposée par sa robustesse et sa flexibilité. Elle est, actuellement utilisée pour résoudre des problèmes divers et variés tels que ceux de la mécanique des fluides, de la thermique, de l'électromagnétisme, etc. Mais celui qui nous intéresse, dans ce travail, est celui de la mécanique des milieux continus.

### 2.2 – Etude de la Mécanique des milieux continus et de la méthode des éléments finis

#### 2.2.1. Cinématique des milieux continus

Soit un corps solide quelconque ayant une configuration initiale  $\Omega_0$ . Ce corps, soumis à différentes sollicitations, se transforme au cours du temps. A un instant  $t$  quelconque, il prend une nouvelle configuration appelée  $\Omega_t$  (voir Figure 1).

Donc dans un repère cartésien global  $O(x,y,z)$ , un point matériel quelconque  $Mo$  appartenant à un domaine  $\Omega_0$  est repéré par le vecteur des coordonnées  $\vec{X}_0(x_0, y_0, z_0)$ . A l'instant  $t$ , le point  $Mo$  devient un nouveau point  $M_t$  appartenant au domaine  $\Omega_t$  qui est maintenant repéré par le vecteur des coordonnées  $\vec{X}_t(x_t, y_t, z_t)$ .

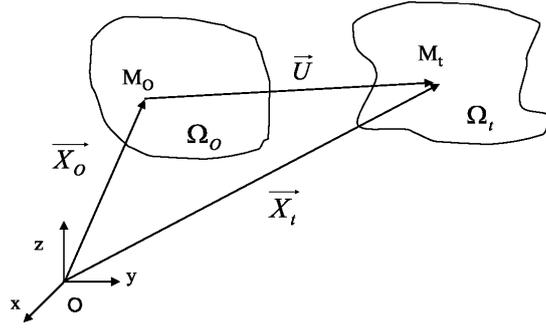


Figure 1. Cinématique des milieux continus

Dans le cadre d'une description lagrangienne, on a :

$$\vec{X}_t = \vec{X}_0 + \vec{M}_0 M_t = \vec{X}_0 + \vec{U} \quad (2.1)$$

où le vecteur  $\vec{U}$  est appelé le déplacement du point  $M_0$ .

En écrivant :

$$\vec{X}_t^T = \{\vec{X}_t\}^T = \langle \vec{X}_t \rangle = \langle x_t \ y_t \ z_t \rangle; \quad \vec{X}_0^T = \{\vec{X}_0\}^T = \langle \vec{X}_0 \rangle = \langle x_0 \ y_0 \ z_0 \rangle; \quad \vec{U}^T = \{\vec{U}\}^T = \langle \vec{U} \rangle = \langle u \ v \ w \rangle \quad (2.2)$$

Le tenseur gradient décrivant la transformation est la matrice :

$$\nabla \vec{X}_t = \nabla \vec{X}_0 + \nabla \vec{U} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_t}{\partial x_0} & \frac{\partial x_t}{\partial y_0} & \frac{\partial x_t}{\partial z_0} \\ \frac{\partial y_t}{\partial x_0} & \frac{\partial y_t}{\partial y_0} & \frac{\partial y_t}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z_t}{\partial x_0} & \frac{\partial z_t}{\partial y_0} & \frac{\partial z_t}{\partial z_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial x_0} & \frac{\partial x_0}{\partial y_0} & \frac{\partial x_0}{\partial z_0} \\ \frac{\partial y_0}{\partial x_0} & \frac{\partial y_0}{\partial y_0} & \frac{\partial y_0}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z_0}{\partial x_0} & \frac{\partial z_0}{\partial y_0} & \frac{\partial z_0}{\partial z_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_0} & \frac{\partial u}{\partial y_0} & \frac{\partial u}{\partial z_0} \\ \frac{\partial v}{\partial x_0} & \frac{\partial v}{\partial y_0} & \frac{\partial v}{\partial z_0} \\ \frac{\partial w}{\partial x_0} & \frac{\partial w}{\partial y_0} & \frac{\partial w}{\partial z_0} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Ou encore

$$\nabla \vec{X}_t = \nabla \vec{X}_0 + \nabla \vec{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_0} & \frac{\partial u}{\partial y_0} & \frac{\partial u}{\partial z_0} \\ \frac{\partial v}{\partial x_0} & \frac{\partial v}{\partial y_0} & \frac{\partial v}{\partial z_0} \\ \frac{\partial w}{\partial x_0} & \frac{\partial w}{\partial y_0} & \frac{\partial w}{\partial z_0} \end{bmatrix} = [I] + [L_0] \quad (2.4)$$

Si on peut écrire que  $[L_0] = \frac{1}{2}([L_0] + [L_0]^T) + \frac{1}{2}([L_0] - [L_0]^T) = [D_0] + [W_0]$ , alors après calcul on a :

$$[D_0] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_0} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y_0} + \frac{\partial v}{\partial x_0} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial x_0} \right) \\ & \frac{\partial v}{\partial y_0} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial y_0} \right) \\ Sym. & & \frac{\partial w}{\partial z_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ Sym. & & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$[W_o] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y_o} - \frac{\partial v}{\partial x_o} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z_o} - \frac{\partial w}{\partial x_o} \right) \\ \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial u}{\partial y_o} + \frac{\partial v}{\partial x_o} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z_o} - \frac{\partial w}{\partial y_o} \right) \\ \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial u}{\partial z_o} + \frac{\partial w}{\partial x_o} \right) & \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial v}{\partial z_o} + \frac{\partial w}{\partial y_o} \right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Ainsi on remarque que la matrice  $D_o$  représente le tenseur des déformations linéarisées ou petites déformations et  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$  représentent les rotations infinitésimales autour des axes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  qui ne produisent aucune déformation.

### 2.2.2. Les conditions de compatibilité cinématique

Ces conditions [FRAF98] ont été établies par Saint Venant (1854). Physiquement, elles expriment la continuité de la matière avant et après transformation d'un corps solide, d'où l'appellation de *conditions de compatibilité cinématique*.

Mathématiquement, elles expriment des restrictions sur la forme des fonctions des déformations pour permettre l'intégration des équations aux dérivées partielles. De ce fait, elles sont, également appelées *conditions d'intégralité*. Leur satisfaction est obligatoire pour garantir l'unicité des déplacements.

En état tridimensionnel, les six équations de compatibilité sont sous forme développée comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x} &= 0 \\ -\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right) &= 0 \\ -\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) &= 0 \\ -\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

En élasticité plane et en état plan de déformations, cinq équations sont automatiquement vérifiées. La sixième condition qui doit être vérifiée est:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.8)$$

Pour le cas de l'état plan de contraintes, trois autres équations doivent être en plus vérifiées :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.9)$$

### 2.2.3. Contraintes, équations d'équilibre et déformations

#### a. Etat de contraintes,

Soit un corps ( $C$ ) en équilibre sous l'action de forces extérieures. En tout point  $M$  de ce corps naissent des forces intérieures de cohésion et de frottement.

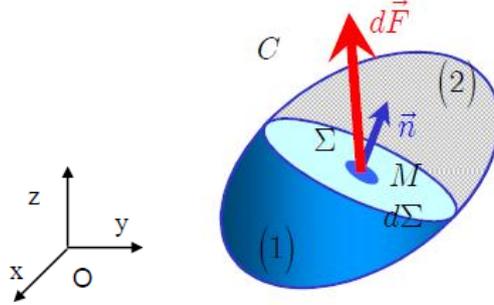


Figure 2. Corps en équilibre

Si  $d\vec{F}$  est la résultante des forces qui s'exercent sur l'élément de surface  $d\Sigma$  de normale  $\vec{n}$  au point  $M$  (voir figure 2), le vecteur des contraintes est défini par le postulat de Cauchy :

$$\vec{\sigma}(M, \vec{n}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left\{ \frac{d\vec{F}}{d\Sigma} \right\} \quad (2.10)$$

Ainsi en fonction de l'orientation de  $\vec{n}$ , il existe une infinité de vecteur de contraintes au point  $M$ . Si on considère un repère cartésien  $O(x, y, z)$ , les vecteurs contraintes agissant sur les facettes de normales,  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  du repère sont notés respectivement  $\vec{\sigma}(\vec{i})$ ,  $\vec{\sigma}(\vec{j})$  et  $\vec{\sigma}(\vec{k})$ . Leurs composantes sont définies en coordonnées cartésiennes comme suit :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(\vec{i}) &= \sigma_{xx}\vec{i} + \sigma_{yx}\vec{j} + \sigma_{zx}\vec{k} \\ \vec{\sigma}(\vec{j}) &= \sigma_{xy}\vec{i} + \sigma_{yy}\vec{j} + \sigma_{zy}\vec{k} \\ \vec{\sigma}(\vec{k}) &= \sigma_{xz}\vec{i} + \sigma_{yz}\vec{j} + \sigma_{zz}\vec{k} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy au point  $M$  est ainsi défini comme suit :

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

En l'absence de couples répartis à l'intérieur et à la surface du solide, l'équilibre des moments autour des axes passant par  $M$ , conduit à :

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} \\ \sigma_{xz} &= \sigma_{zx} \\ \sigma_{yz} &= \sigma_{zy} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ce qui permet de conclure que le tenseur des contraintes de Cauchy est symétrique. Ainsi le vecteur axial des contraintes se résume à six composantes :  $\sigma_{xx}$  ;  $\sigma_{yy}$  ;  $\sigma_{zz}$  ;  $\sigma_{xy}$  ;  $\sigma_{xz}$  ;  $\sigma_{yz}$ .

Pour un état bidimensionnel, plusieurs hypothèses peuvent être envisagées. on cite entre autres l'état plan de contraintes et l'état plan de déformations.

\* *En état plan de contraintes*, l'hypothèse considérée suppose que les contraintes hors plan sont nulles. C'est-à-dire, par rapport à un plan de référence  $(O,x,y)$ , les composantes des contraintes  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$  sont nulles sur les deux faces de coordonnées  $\pm t/2$ . Sur les autres plans intérieurs parallèles au plan  $(x,y)$ , la valeur de ces composantes est tellement faible qu'on peut affirmer qu'elles sont nulles. On en déduit, ainsi que :

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0 \text{ et } \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (2.14)$$

L'hypothèse des contraintes planes est généralement admise pour le calcul des structures minces (poutres, plaques et coques) où l'axe «  $O,z$  » représente la direction de l'épaisseur  $t$ .

\* *En état plan de déformations*, l'hypothèse considérée suppose que les déformations hors plan sont nulles. C'est-à-dire  $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$  ce qui entraîne :

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \text{ et } \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (2.15)$$

Cette hypothèse peut être utilisée pour l'analyse des sections des cylindres longs dans la direction  $z$ . Comme, elle s'adapte bien pour l'étude du profil d'un barrage.

### b. Equations d'équilibre,

Si le solide est soumis dans la configuration actuelle  $\Sigma_t$  à des sollicitations comme des forces surfaciques  $\vec{f}_s$  appliquées sur une partie de la frontière  $\partial_1\Sigma_t$ , des déplacements imposés  $\vec{u}_d$  appliqués sur une partie de la frontière  $\partial_2\Sigma_t$  et des forces volumiques  $\vec{f}_v$ , l'équilibre du système s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \vec{\text{div}}(\vec{\sigma}) + \vec{f}_v = \vec{0} \\ \vec{\sigma}(M) \cdot \vec{n} = \vec{f}_s \\ \vec{u}(M) = \vec{u}_d \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\forall M \in \Sigma_t ; \quad \forall M \in \partial_2\Sigma_t ; \quad \forall M \in \partial_1\Sigma_t ;$$

Avec la somme des parties de frontière  $\partial_1\Sigma_t$  et  $\partial_2\Sigma_t$  représente la frontière totale fermée  $\partial\Sigma_t$  de  $\Sigma_t$ .

### c. Tenseur des déformations,

Nos travaux, objet de cette recherche, concernent les éléments de coques, c'est-à-dire des structures subissant des transformations élastiques caractérisées par de grands déplacements et de petites déformations pour lesquelles on utilise la mesure des déformations de Green-Lagrange linéarisées :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ Sym. & & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ & & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Ou encore :

$$[\varepsilon] = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

#### 2.2.4. Loi de comportement

Le comportement d'un matériau donné est défini par sa loi constitutive (ou de comportement) qui met en relation les contraintes avec les déformations et ses variables mécaniques intrinsèques internes. Pour un matériau dit élastique linéaire, les contraintes sont des fonctions linéaires des déformations. Ces relations sont données sous la forme générale suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (2.19)$$

Où :

- $\boldsymbol{\sigma}_0$  est le tenseur des contraintes à l'état initial qu'on suppose nul ( $\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{0}$ ) pour simplifier l'écriture du problème
- $\mathbf{C}$  est un tenseur de comportement d'ordre 4 dont les composantes font intervenir les caractéristiques physiques intrinsèques du matériau.

Etant donné que les tenseurs  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sont symétriques, on a alors  $C_{ijkl} = C_{jikl}$  et  $C_{ijkl} = C_{ijlk}$

Ceci permet de réécrire la loi de comportement, en notation de Voigt, comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.20)$$

Où  $\mathbf{C}$  est la matrice de comportement de taille 6x6, c'est-à-dire ayant 36 composantes. Les tenseurs  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sont ceux donnés dans les formules (2.12) et (2.18).

En élasticité tridimensionnelle, la matrice de comportement d'un matériau élastique, linéaire et isotrope prend la forme suivante :

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & \\ & \text{Sym.} & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Où  $E$  et  $\nu$  sont respectivement, le module de Young et coefficient de poisson du matériau considéré.

Pour un état bidimensionnel, la matrice de comportement  $\mathbf{C}$  se réduit à une taille de 3x3 pour fournir les composantes suivantes :

\* à l'état plan de contraintes,

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

\* à l'état plan de déformations,

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

### 2.2.5. Principe des travaux virtuels

Le principe consiste à satisfaire l'équation d'équilibre locale sous forme intégrale (On dit aussi sous forme *faible*). Ainsi, « pour tout champs de déplacements virtuels cinématiquement compatibles, le travail virtuel des forces extérieures est égal au travail virtuel intérieur  $\delta W_{ext} = \delta W_{int}$  ». Cet équilibre s'exprime par la relation :

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot dV = \int_V \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{f}_V \cdot dV + \int_S \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{f}_S \cdot dS \quad (2.24)$$

$\delta W_{int} = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot dV$  : représente la variation de l'énergie de déformation,

$\delta W_{ext} = \int_V \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{f}_V \cdot dV + \int_S \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{f}_S \cdot dS$  : représente la variation de l'énergie des forces extérieures, dans laquelle  $\mathbf{f}_V$  est le vecteur des forces de volume et  $\mathbf{f}_S$  est le vecteur des forces de surface.

### 2.2.6. Principe des travaux virtuels complémentaires

Ce principe s'annonce comme suit : pour tout accroissement virtuel statiquement admissible des contraintes et des forces, « le travail virtuel complémentaire des forces

extérieures est égal au travail virtuel complémentaire intérieur ». Cet équilibre s'exprime par la relation :

$$\int_V \delta \sigma^T \cdot \varepsilon \cdot dV = \int_V \delta f_V^T \cdot u \cdot dV + \int_S \delta f_S^T \cdot u \cdot dS \quad (2.25)$$

$\delta W_{int}^c = \int_V \delta \sigma^T \cdot \varepsilon \cdot dV$  : représente la variation de l'énergie complémentaire de déformation,

$\delta W_{ext}^c = \int_V \delta f_V^T \cdot u \cdot dV + \int_S \delta f_S^T \cdot u \cdot dS$  : représente la variation de l'énergie complémentaire des forces extérieures, dans laquelle  $f_V$  est le vecteur des forces de volume et  $f_S$  est le vecteur des forces de surface.

## 2.3 – Modélisation par éléments fini : Les approches

### 2.3.1 – en déplacement

Dans cette approche, l'approximation est faite sur le champ de déplacement en considérant l'élément cinématiquement admissible ; c'est-à-dire l'intégrabilité du champ de déformation à l'intérieur de l'élément.

La démarche à ce niveau repose sur trois principales actions :

- la définition d'une forme paramétrique simple du champ de déplacement (discrétisation fonctionnelle) à l'intérieur des éléments finis de la structure.
- l'application à chacun des éléments le principe des travaux virtuels à travers la satisfaction des conditions de stationnarité de la fonctionnelle pour chacun des éléments. Ces conditions sont une forme faible des équations d'équilibre. Elles permettent de relier, par l'intermédiaire de la raideur de l'élément, les paramètres de la discrétisation aux grandeurs équivalentes des forces qui s'appliquent sur l'élément.
- l'assemblage des matrices de rigidité ainsi obtenues au niveau élémentaire conduit à un système d'équations qui traduit les conditions de stationnarité de la fonctionnelle de la structure dans sa globalité.

Les principes et les étapes de cette approche se présentent comme suit :

#### \* Discrétisation du champ de déplacement

Soit un élément  $\Omega_e$ , la discrétisation fonctionnelle du champ de déplacement  $u$  à l'intérieur de l'élément est donnée sous forme matricielle par la relation :

$$\{u\} = [N] \{q^e\} \quad (2.26)$$

Où  $\{q^e\}$  représente le vecteur des déplacements nodaux et  $[N]$  la matrice des fonctions de forme de l'élément.

Dans le cas général en tridimensionnel et pour un élément possédant  $n$  nœuds, la matrice des fonctions de forme s'écrit sous forme développée comme suit :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_k & 0 & 0 & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_k & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_k & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Avec  $N_k$  la fonction de forme du nœud  $k$ .

Et le vecteur des déplacements nodaux s'écrit :

$$\{q^e\}^T = \langle u_{x1}, u_{y1}, u_{z1}, \dots, u_{xk}, u_{yk}, u_{zk}, \dots, u_{xn}, u_{yn}, u_{zn} \rangle \quad (2.28)$$

\* *Application du principe des travaux virtuels (ou principe des déplacements virtuels),*

Cette méthode demande l'application du principe des déplacements virtuels (ou des travaux virtuels) exprimé par la relation  $\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}}$  dont le développement est donné par la relation (2.24).

Sachant que :

$$\begin{aligned} \{\delta u\} &= [N] \{\delta q^e\} \\ \{\varepsilon\} &= [B] \{q^e\} \\ [\sigma] &= [D] \{\varepsilon\} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Avec [B] la matrice de déformation

La relation (2.24) devient :

$$\int_{V^e} [B]^T \{\delta q^e\}^T [D][B] \{q^e\} dV^e = \int_{V^e} [N]^T \{\delta q^e\}^T \{f_v\} dV^e + \int_{S^e} [N]^T \{\delta q^e\}^T \{f_s\} dS^e \quad (2.30)$$

Ou encore

$$\{\delta q^e\}^T \left( \int_{V^e} [B]^T [D][B] dV^e \right) \{q^e\} = \{\delta q^e\}^T \left( \int_{V^e} [N]^T \{f_v\} dV^e + \int_{S^e} [N]^T \{f_s\} dS^e \right) \quad (2.31)$$

La relation (2.31) s'écrit simplement  $[K^e] \{q^e\} = \{F^e\}$

Avec  $[K^e] = \int_{V^e} [B]^T [D][B] dV^e$  et  $\{F^e\} = \int_{V^e} [N]^T \{f_v\} dV^e + \int_{S^e} [N]^T \{f_s\} dS^e$  qui représentent, respectivement la matrice de rigidité élémentaire et le vecteur des charges aux nœuds équivalents aux forces extérieures.

\* *Assemblage des éléments*

Les matrices élémentaires  $[K^e]$  sont ensuite assemblées, de manière à obtenir la matrice de rigidité globale  $[K]$  de la structure. La résolution du système global  $[K]\{q\} = \{F\}$  fournit les valeurs des déplacements  $\{q\}$  des différents nœuds qui déterminent le maillage de la structure. Finalement par l'intermédiaire des déformations, on obtient l'expression des contraintes aux nœuds

$$\{\sigma\} = [D][B]\{q\} \quad (2.32)$$

### 2.3.2 – en équilibre

L'approche en équilibre a été introduite par Fraeijs et Veubeke [FbV65]. De la même manière que l'approche en déplacement, le modèle en équilibre est constitué de deux principales étapes : l'étape de discrétisation suivie de l'étape d'application du principe varitionnel.

Ceci consiste à choisir, en premier lieu, une forme paramétrique simple du champ des contraintes à l'intérieur des éléments finis de la structure. Il est, ensuite, appliqué à chacun des éléments le principe des travaux virtuels complémentaires (ou principe des forces virtuelles).

Les principes et les étapes de cette approche se présentent comme suit :

\* *Discrétisation du champ de contraintes et des tractions de surfaces*

Soit un élément  $\Omega_e$ , ce modèle considère deux types de discrétisations :

- La première discrétisation porte sur le champ de contraintes  $\sigma$  à l'intérieur de l'élément. La formulation établie est donnée sous forme matricielle par la relation :

$$\{\sigma\} = [S]\{s\} + \{\sigma_0\} \quad (2.33)$$

Où  $\{s\}$  représente le vecteur des contraintes généralisées (paramètres inconnus du problème) et  $[S]$  la matrice des fonctions de forme (d'approximation des contraintes) de l'élément.

$\{\sigma_0\}$  est une solution particulière des équations d'équilibre (2.16) qui décrivent la statique. Elle est égale à zéro si on considère des forces de volume nulles

- La deuxième discrétisation porte sur le champ de tractions de surface  $\{t\}$  à l'intérieur de l'élément. Cette forme est donnée sous forme matricielle par la relation :

$$\{t\} = [W]\{g^e\} \quad (2.34)$$

Où  $\{g^e\}$  représente le vecteur des tractions de surface généralisées statiquement admissibles et  $[W]$  la matrice des fonctions de forme (d'approximation des tractions de surface) de l'élément.

Il est à noter que si on choisit des polynômes complets de degré  $p$  pour discrétiser les contraintes, les fonctions de forme des tractions de surface doivent également être des polynômes complets et de degré  $p$ .

Ces deux formes de discrétisation sont reliées par les conditions d'équilibre de surface :

$$[C]^T \{\sigma\} = \{t\} \quad (2.35)$$

Où  $[C]$  représente la matrice des cosinus directeurs.

En remplaçant dans la relation (2.35) les paramètres  $[\sigma]$  et  $\{t\}$  par leurs valeurs données, respectivement, par les relations (2.33) et (2.34), on obtient les équations qui lient les contraintes aux tractions de surface généralisées statiquement admissibles.

$$[Con]\{s\} = \{g^e\} \quad (2.36)$$

Avec  $[Con] = [C][S][W]^T$  appelée matrice de connexion statique de l'élément.

\* *Application du principe des travaux virtuels complémentaires (ou principe des forces virtuelles)*

On considère pour cette approche que  $W_{\text{int}} = W_{\text{ext}}$ , mais le principe variationnel à appliquer est le principe des travaux virtuels complémentaires (ou principe des forces virtuels).

Le travail des forces de surface s'écrit :

$$W_{\text{ext}}^e = \int_{S^e} \{t\}^T \{u\} ds^e = \{g^e\}^T \int_{V^e} [W]^T \{u\} dV^e \quad (2.37)$$

L'expression  $\int_{V^e} [W]^T \{u\} dV^e = \{q\}$  représente le vecteur des déplacements généralisés statiquement admissibles conjugués aux connecteurs  $\{g^e\}$

Le travail interne est donné par la relation :

$$W_{\text{int}}^e = \int_{V^e} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV^e \quad (2.38)$$

Sachant que :

$$\{\varepsilon\}^T = [\sigma]^T [D^{-1}]^T \quad \text{et} \quad \{\sigma\} = [S] \{s\}$$

La relation (2.38) prend la forme suivante :

$$W_{\text{int}}^e = \int_{V^e} [S]^T \{s\}^T [D^{-1}]^T [S] \{s\} dV^e = s^T \left[ \int_{V^e} [S]^T [D^{-1}]^T [S] dV^e \right] \{s\} \quad (2.39)$$

L'expression  $\left[ \int_{V^e} [S]^T [D^{-1}]^T [S] dV^e \right] = [F]$  représente la matrice de flexibilité de l'élément.

Sachant que  $[Con] \{s\} = \{g^e\}$ , l'application du principe des travaux virtuels complémentaires conduit aux conditions de stationnarité de l'énergie potentielle complémentaire et donne la relation suivante :

$$\{s\} = [F]^{-1} [Con]^T \{q\} \quad (2.40)$$

En introduisant la valeur de  $\{s\}$  donnée par la relation (2.40) dans la relation (2.36), on obtient le système d'équations classique en éléments finis de type :

$$[K^e] \{q^e\} = \{F^e\} \quad (2.41)$$

Avec,

-  $\{F^e\} = \{g^e\}$  qui représente le vecteur des tractions de surface généralisées statiquement admissibles,

-  $[K^e] = [Con][F]^{-1}[Con]^T$  qui représente la matrice de raideur de l'élément.

La résolution du système d'équation (2.41) fournit la valeur des déplacements généralisés.

Tenant compte des équations d'équilibre (2.33), la valeur des contraintes est donnée comme suit:

$$\{\sigma\} = [S] \{s\} = [S][F]^{-1} [Con]^T \{q\} \quad (2.42)$$

\* *Assemblage des éléments*

Vu que la structure des systèmes d'équations résultant de l'approche en équilibre est semblable à celle de l'approche en déplacement, les techniques d'assemblage et de

résolution des systèmes éléments finis formulés en modèle de « déplacement » peuvent donc s'appliquer aux modèles « équilibre ».

### 2.3.3 – *Modèle hybride*

La terminologie utilisée [PIA83] consiste à désigner par « *hybrides* » les approches éléments finis pour lesquels plusieurs champs sont discrétisés indépendamment à l'intérieur de l'élément et sur sa frontière.

Les éléments finis hybrides peuvent être développés selon deux approches conventionnelles : éléments finis hybrides en déplacement et en contraintes qui sont basés respectivement sur le principe des déplacements virtuels et celui des forces virtuelles.

La première, qui porte le nom *d'approche hybride primale*, introduite par Jones [JON64], consiste à choisir des éléments vérifiant, à priori, les conditions de compatibilité en volume. Les conditions de continuité des déplacements entre les éléments aux frontières sont ensuite rajoutées à la fonctionnelle par l'intermédiaire des multiplicateurs de Lagrange. Ces multiplicateurs qui représentent physiquement les tractions de surface sur les frontières, sont discrétisés de manière indépendante sur chaque face de la frontière de l'élément. Cette approche conduit, généralement à une continuité faible des déplacements aux travers des frontières des éléments.

La seconde, appelée « *approche hybride duale* », a été présentée pour la première fois par Pian [PIA64]. Cette approche nécessite une discrétisation des champs de contraintes vérifiant à priori les conditions d'équilibre de volume à l'intérieur des éléments. Les conditions de continuité des champs de traction de surface sont injectées, à posteriori dans la fonctionnelle par l'intermédiaire des multiplicateurs de Lagrange. Ces multiplicateurs représentent physiquement les champs de déplacement aux frontières des éléments. Donc, dans cette approche, des discrétisations secondaires définissent le champ des déplacements des bords de l'élément.

### 2.3.4 – *Modèle mixte*

Dans cette approche, l'approximation est faite, indépendamment, sur divers champs d'inconnues (déplacements, déformation, contraintes).

Il est, ensuite, appliqué à chacun des éléments le principe des travaux virtuels complémentaires (ou principe des forces virtuelles) du système, à travers la satisfaction des conditions de stationnarité de la fonctionnelle pour chacun des éléments.

Cette approche permet d'obtenir des éléments d'excellente qualité. Elle est souvent utilisée pour corriger les défauts du modèle en déplacement.

Seulement la diversité des fonctions d'approximation des divers champs et leur indépendance rendent la mise en œuvre de ce modèle longue, complexe et très coûteuse.

### 2.3.5 – *Modèle en déformation*

L'approche en déformation [BEL00] a été développée, à l'origine, à l'université de Cardiff par Sabir et Azhwell [1971]. De la même manière que l'approche en déplacement, le modèle en déformation est constitué de deux principales étapes : l'étape de discrétisation suivie de l'étape d'application du principe variationnel.

La démarche à ce niveau consiste à choisir, en premier lieu, une forme paramétrique simple du champ de déformations (discrétisation fonctionnelle) à l'intérieur des éléments finis de la structure. Il est, ensuite, appliqué à chacun des éléments le principe des travaux virtuels à travers la satisfaction des conditions de stationnarité de la fonctionnelle pour chacun des éléments.

Le champ des déplacements, continu et différentiable, est déduit par intégration du champ des déformations.

Les travaux de recherches, portant sur l'utilisation de ce modèle pour l'approximation des arcs circulaires, ont donné des résultats meilleurs que ceux du modèle en déplacement : c'est ce qui constitue « *la force de ce modèle* ».

### 2.4 – Conclusion

Les objectifs recherchés dans cette section visent à mettre en relief les principes et les méthodes théoriques de base à notre développement. Ainsi, les aspects traités ont concerné le domaine de la mécanique des milieux continus qui nous intéresse dans ce travail et la méthode des éléments finis en sa qualité d'outil de résolution numérique.

Parmi les approches développées, celle dite « en déformation » est la plus récente ; mais présente au niveau de la recherche un intérêt particulier, en raison de sa simplicité et de la performance des éléments finis formulés en déformation.

Nos éléments sont d'élasticité plane ; ce qui nous a orienté à prospecter au niveau de cette partie les aspects liés aux hypothèses de linéarité géométrique, aux équations cinématiques, aux équations de la statique, aux lois constitutives et aux conditions de compatibilité cinématique.

## B - Les techniques de formulation

### 2.5 – Introduction

La présente section traite d'un aspect spécifique de l'étude bibliographique. Elle est réservée à la synthèse des concepts utilisés dans le développement des éléments finis objet de notre contribution.

Dans un premier lieu, il est fait état d'un inventaire des familles d'éléments finis de coque existantes dans la littérature, en décrivant leurs spécificités, leurs principes de formulation et les performances affichées par ces éléments.

Ensuite, on détaille l'approche « en déformation ». En ce sens, on explique ses objectifs, ses principes, ses exigences, sa formulation et ses avantages comparativement aux autres approches existantes.

On rappelle, enfin, les définitions et les démarches de certaines techniques utilisées dans notre développement, telles : les notions concernant l'intégration analytique, la

condensation statique, la démarche d'évaluation de la matrice de rotation à travers le principe de minimisation de l'énergie de déformation liée à la rotation et l'évaluation de la matrice de rigidité élémentaire.

## 2.6 – formulation des éléments finis de coque existants

Il existe deux familles d'éléments de coque : une famille basée sur une approche bidimensionnelle qu'on applique à des corps minces et une famille basée sur l'assemblage d'une plaque et d'une membrane.

Selon l'approximation en  $e/R$  ( $e$  étant l'épaisseur de l'élément et  $R$  son rayon de courbure) on distingue plusieurs théories de coque. Si ce rapport n'est pas petit, les résultats peuvent converger vers des valeurs différentes.

Il existe de très nombreux éléments de coques, iso-paramétriques ou non, plans ou courbes, triangulaires ou quadrangulaires, conformes ou non, cinématiques ou hybrides, déformables ou non à l'effort tranchant, etc...

Pour situer notre travail par rapport aux recherches déjà effectuées dans ce domaine, on se contente ici d'esquisser les quatre approches les plus fréquemment utilisées.

Une première approche consiste à discrétiser la structure considérée à l'aide d'éléments dérivés des théories bidimensionnelles classiques des coques à double courbure. Si ces éléments ont des performances souvent très satisfaisantes, ils sont néanmoins assez rarement utilisés dans la pratique industrielle. Ceci est certainement dû à leur formulation et à leur mise en œuvre relativement complexe.

L'analyse des coques par l'intermédiaire d'éléments dérivés des éléments iso paramétriques tridimensionnels constitue la deuxième approche qu'on peut citer. Dérivés des hypothèses cinématiques de Mindlin ces éléments permettent la prise en compte de l'énergie de déformation due au cisaillement transversal. De ce fait, ces éléments sont souvent appelés éléments de coque épaisse. Basés sur le concept d'éléments iso paramétriques, ils peuvent être courbes et donc bien représenter la géométrie réelle de la structure considérée tout en évitant les théories des coques.

La troisième approche qu'on peut distinguer est l'utilisation d'éléments iso paramétriques tridimensionnels classiques pour modéliser les structures coques étudiées. Cette approche entraîne malheureusement des coûts de calcul qui restent encore souvent dissuasifs.

L'utilisation d'éléments plats (éléments triangulaires et quadrilatères), pour discrétiser les structures coques est la dernière des approches qu'on peut considérer. L'avantage essentiel des éléments appartenant à cette catégorie est leur simplicité relative. En effet leur formulation repose sur les théories classiques des plaques (minces et épaisses). De ce fait on évite toutes les complexités dues à la prise en compte des courbures dans les théories des coques.

Notons que le couplage flexion-membrane existant dans une structure coque courbe n'est pas pris en compte au niveau de chaque élément. Il n'est pris en compte que par l'assemblage de plusieurs éléments non coplanaires.

Les éléments de ce type sont très utilisés dans les programmes industriels de calculs de structure car leur emploi est relativement simple et leur coût de calcul reste

raisonnable (largeur de bande peu élevée par rapport à des maillages constitués d'éléments iso paramétriques tridimensionnels).

On peut distinguer de nombreux types d'éléments appartenant à cette catégorie. A l'heure actuelle un certain consensus semble cependant se dessiner dans la littérature pour reconnaître que les éléments de plaque en flexion (triangle à 3 nœuds (DKT) et quadrilatère à 4 nœuds (DKQ)) basés sur les hypothèses de Love-Kirchhoff sous forme discrète sont à ce jour parmi les plus performants.

### **2.7 – L'approche « en déformation »**

#### *2.7.1 – Pourquoi l'approche en déformation ?*

Le problème de convergence d'éléments simples formulés à travers l'approche en déplacement pour l'analyse des structures courbes ont montré la nécessité d'intervention au niveau de la discrétisation physique pour améliorer au mieux la solution. Cette intervention consiste en la diminution de la taille des éléments (raffinement  $h$ ) pour obtenir des résultats satisfaisants ; l'objectif étant de minimiser l'écart entre la solution exacte et la solution approchée et tendre asymptotiquement vers zéro l'erreur qui en résulte.

Ceci rend le niveau de précision de la solution tributaire du nombre d'éléments à utiliser dans la discrétisation physique. Ce qui pose à ce niveau une problématique en terme économique dans sa mise en œuvre : Quel rapport entre « la précision de la solution » et « le coût pour son obtention » ?

Pour répondre à ce questionnement, d'autres études ont été entreprises par Ashwell et al [ASH71b], utilisant cette fois-ci le modèle en déformation à la place du modèle en déplacement. Cette approche a abouti à des résultats plus performants sans avoir recours à un grand nombre d'éléments dans la discrétisation physique.

Ces résultats ont encouragé beaucoup de chercheurs pour développer des éléments d'ordre supérieurs, des éléments nécessitant uniquement les degrés de liberté essentiels. Ainsi beaucoup d'éléments finis d'élasticité plane et des éléments de coques ont vu le jour. On cite entre autres [ASH72], [SAB75], [SAB78], [SAB85a], [SAB85b], [SAB86], [BEL98A], [BEL99], [HIM08].

#### *2.7.2 – Hypothèses et démarche*

- Calcul exact des termes représentant les modes de corps rigides,
- Choix des termes du champ des déformations de sorte que les conditions de compatibilité cinématique soient vérifiées,
- Dédution des composantes du champ des déplacements par intégration des fonctions du champ de déformations, ce qui rend plus riche les polynômes (ordre supérieur) décrivant les champs des déplacements,
- Application du principe des travaux virtuels (PTV),
- Recherche de satisfaction du critère de complétude au niveau du champ de déformations.

### 2.7.3 – Principes de formulation

Dans cette approche, l'approximation est faite sur le champ des déformations en considérant l'élément cinématiquement admissible; c'est-à-dire la continuité et l'intégrabilité du champ de déformation à l'intérieur de l'élément.

La démarche à ce niveau consiste à :

- choisir, en premier lieu, une forme paramétrique simple du champ de déformations (discrétisation fonctionnelle) à l'intérieur des éléments finis de la structure.
- le champ des déplacements est déduit, en second lieu, par intégration du champ des déformations.
- Il est, enfin, appliqué à chacun des éléments le principe des travaux virtuels.

En considérant la continuité du champ de déplacement dans toute la structure, l'assemblage des fonctionnelles, ainsi obtenues au niveau élémentaire, conduit à un système d'équations qui traduit les conditions de stationnarité de la fonctionnelle dans la structure dans sa globalité.

### 2.7.4 – Procédure de formulation

Pour illustrer la procédure de développement des éléments finis à modèle en déformation, on prend un exemple simple d'un élément triangulaire de membrane d'élasticité plane développé par [HIM08] et qui est utilisé dans le présent travail dans la construction de certains éléments de coque à facettes planes.

Cet élément de membrane, baptisé  $T_{43}$ , est constitué de quatre nœuds (les trois sommets du triangle et le quatrième au niveau du barycentre). Chacun des nœuds possède trois degrés de liberté : les deux translations U et V et la rotation autour de la normale (« *drilling rotation* »)  $\theta_z$ .

Pour un élément membranaire similaire, les relations entre les déformations et les déplacements sont établies comme suit :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \quad (2.43)$$

La rotation autour de la normale est donnée par la relation :

$$\theta_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (2.44)$$

Le choix des fonctions d'interpolation est établi en deux étapes :

- La première, permettant de représenter les modes de corps rigides (MCR),
- La seconde, permettant de représenter les modes supérieurs, particulièrement ceux donnant des états de déformations homogènes.

Pour les modes de corps rigides, les fonctions d'interpolation des déplacements doivent permettre à l'élément de subir un mouvement sans déformation interne.

Ce critère est essentiel, puisque :

- d'une part, il permet de représenter la réalité du comportement des structures,
- et d'autre part, il évite la lenteur dans la convergence vers la solution exacte qui se produit s'il n'est pas respecté

Ainsi, pour les mouvements de corps rigide (MCR), les déformations sont nulles :

$$\varepsilon_x = 0 \quad \varepsilon_y = 0 \quad \gamma_{xy} = 0 \quad (2.45)$$

L'intégration des équations (2.45) nous donne les champs des déplacements représentant les mouvements de corps rigide qui se présentent comme suit :

$$U_R = a_1 - a_3 \cdot y \quad V_R = a_2 + a_3 \cdot x \quad \theta_{zR} = a_3 \quad (2.46)$$

Avec  $a_1$  et  $a_2$ , des paramètres représentant les translations  $U$  et  $V$  du corps rigide respectivement le long des axes  $X$  et  $Y$  et  $a_3$  représentant la rotation du corps rigide autour de la normale (*drilling rotation*)  $\theta_z$ .

Notre élément est constitué de quatre Nœuds. Chacun de ses nœuds possède trois degrés de liberté. Donc les champs de déplacement, formulés par l'utilisation du modèle en déformation, possèdent 12 constantes indépendantes ( $a_1, \dots, a_{12}$ ).

Les trois premières ( $a_1, a_2, a_3$ ) sont utilisées dans les équations (2.46) pour représenter les mouvements de corps rigide.

Les neuf autres ( $a_4, \dots, a_{12}$ ) sont utilisés dans le modèle de déformation de l'élément. Ils sont répartis dans les fonctions d'interpolation des déformations de manière à :

- satisfaire l'équation générale de compatibilité des déformations pour l'élasticité plane,
- et éviter la singularité de la matrice des coordonnées nodales de l'élément.

Ainsi les champs des déformations sont établis comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = a_4 + a_6 \cdot y + a_{10} y^2 + 2a_{11} \cdot x \cdot y^3 \\ \varepsilon_y = a_7 + a_8 \cdot x - a_{10} x^2 - 2a_{11} \cdot y \cdot x^3 \\ \gamma_{xy} = 2a_5 + a_6 \cdot x + a_8 \cdot y + 2a_9 \cdot y + 2a_{12} x \end{cases} \quad (2.47)$$

Ce champ se caractérise par :

- l'existence d'états de déformations constantes qui assurent la convergence lorsqu'on raffine le maillage, représentés par les constantes  $a_4, a_7, a_5$ .
- l'existence d'états de déformation linéaires au niveau des dilatations ( $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ ), représentés par les paramètres  $a_6$  et  $a_8$ .
- Un état de déformation bilinéaire des distorsions ( $\gamma_{xy}$ ), représenté par les paramètres  $a_9, a_{12}$  et aussi par les paramètres  $a_6$  et  $a_8$  qui mettent en dépendance les distorsions avec les dilatations.
- Des états de déformations non linéaires (en  $y$  pour  $\varepsilon_x$ , et en  $x$  pour  $\varepsilon_y$ ) permettant la satisfaction du critère de complétude des champs des déplacements et le changement de courbure des déformées. Ces états sont représentés par les paramètres  $a_{10}$  et  $a_{11}$ .

- La satisfaction de l'équation générale de compatibilité des déformations :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.48)$$

L'intégration des équations (2.47) nous donne les champs des déplacements suivants:

$$\begin{cases} U_s = a_4 \cdot x + a_5 \cdot y + a_6 \cdot x \cdot y + a_9 \cdot y^2 + a_{10} \cdot x \cdot y^2 + a_{11} \cdot x^2 \cdot y^3 \\ V_s = a_5 \cdot x + a_7 \cdot y + a_8 \cdot x \cdot y - a_{10} \cdot y \cdot x^2 - a_{11} \cdot y^2 \cdot x^3 + a_{12} \cdot x^2 \\ \theta_{zs} = -a_6 \cdot \frac{x}{2} + a_8 \cdot \frac{y}{2} - a_9 \cdot y - 2a_{10} \cdot x \cdot y - 3a_{11} \cdot x^2 \cdot y^2 + a_{12} \cdot x \end{cases} \quad (2.49)$$

Le champ de déplacement final est obtenu en additionnant les relations (2.46) et (2.49)

$$\begin{cases} U = a_1 - a_3 \cdot y + a_4 \cdot x + a_5 \cdot y + a_6 \cdot x \cdot y + a_9 \cdot y^2 + a_{10} \cdot x \cdot y^2 + a_{11} \cdot x^2 \cdot y^3 \\ V = a_2 + a_3 \cdot x + a_5 \cdot x + a_7 \cdot y + a_8 \cdot x \cdot y - a_{10} \cdot y \cdot x^2 - a_{11} \cdot y^2 \cdot x^3 + a_{12} \cdot x^2 \\ \theta_z = a_3 - a_6 \cdot \frac{x}{2} + a_8 \cdot \frac{y}{2} - a_9 \cdot y - 2a_{10} \cdot x \cdot y - 3a_{11} \cdot x^2 \cdot y^2 + a_{12} \cdot x \end{cases} \quad (2.50)$$

Une fois le champ des déplacements défini, le reste des étapes de formulation pour la construction de la matrice de rigidité élémentaire, d'assemblage et de résolution sont similaires que ceux de l'approche en déplacement.

### 2.7.5 – Ses avantages

- Facilité de la mise en œuvre, au même titre que le modèle en déplacement,
- Satisfaction absolue des critères de convergence liés aux déformations : mode de corps rigide et mode de déformation constante,
- Pour un même élément fini, obtention de champ de déplacement plus riche et avec des polynômes ayant des termes d'ordre élevé, comparativement à ceux résultant du modèle en déplacement,
- Meilleure précision dans l'approximation des déformations et des contraintes que celle du modèle en déplacement où ces variables sont obtenues par dérivation du champ de déplacement provoquant ainsi une dégradation de leur approximation,

## 2.8 – Concepts mathématiques utilisés

### 2.8.1 – Evaluation de la matrice de rotation

L'évaluation de la matrice de rotation est basée sur le principe de minimisation de l'énergie déformation associée à la rotation. Cette matrice est associée à la rotation autour de la normale « drilling rotation » connue dans la mécanique des milieux continus sous la formulation :

$$\theta_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (2.51)$$

Pour un élément triangulaire avec prise en compte du degré de liberté relatif à la drilling rotation (voir figure 3), la rotation moyenne  $\theta_{moy}$  est donnée comme suit :

$$\theta_{moy} = \frac{1}{A} \iint_A \theta(x, y) \cdot dA \quad (2.52)$$

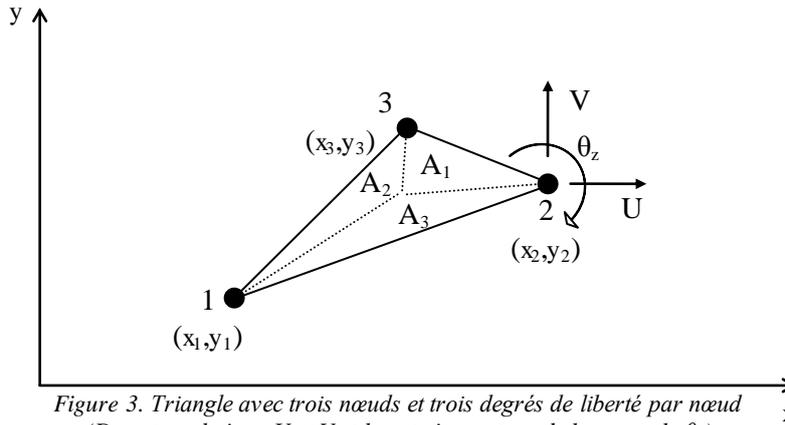


Figure 3. Triangle avec trois nœuds et trois degrés de liberté par nœud (Deux translations U et V et la rotation autour de la normale  $\theta_z$ )

Pour ce type d'élément fini, les fonctions de formes sont :

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= \frac{1}{A} (x_{32} \cdot y - y_{32} \cdot x + x_2 \cdot y_3 - y_2 \cdot x_3) \\ N_2(x, y) &= \frac{1}{A} (-x_{31} \cdot y + y_{31} \cdot x - x_1 \cdot y_3 + y_1 \cdot x_3) \\ N_3(x, y) &= \frac{1}{A} (x_{21} \cdot y - y_{21} \cdot x + x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2) \end{aligned} \quad (2.53)$$

Avec

$$\begin{aligned} 2A &= x_{21} \cdot y_{31} - y_{21} \cdot x_{31} \\ x_{ij} &= x_i - x_j \\ y_{ij} &= y_i - y_j \end{aligned}$$

- La rotation moyenne :

Le champ d'approximation des déplacements est donné comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= N_1(x, y)u_1 + N_2(x, y)u_2 + N_3(x, y)u_3 \\ v(x, y) &= N_1(x, y)v_1 + N_2(x, y)v_2 + N_3(x, y)v_3 \\ \theta(x, y) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.54)$$

En remplaçant dans la relation (2.52)  $\theta_{moy}$  par sa valeur donnée dans la formule (2.54), l'expression de la rotation moyenne devient :

$$\theta_{moy} = \frac{1}{A} \iint_A \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dA \quad (2.55)$$

L'intégration de l'expression (2.55) par rapport aux coordonnées nodales nous donne :

$$\theta_{moy} = \frac{1}{4A} (x_{23} \cdot u_1 + y_{23} \cdot v_1 + x_{31} \cdot u_2 + y_{31} \cdot v_2 + x_{12} \cdot u_3 + y_{12} \cdot v_3) \quad (2.56)$$

- La rotation pondérée  $\theta$  :

La rotation  $\theta$  constitue une moyenne pondérée par rapport aux coordonnées surfaciques ( $A_i$ ) des nœuds de l'élément (voir figure 3.1).

$$\theta = \frac{1}{A} (A_1 \cdot \theta_1 + A_2 \cdot \theta_2 + A_3 \cdot \theta_3) \quad (2.57)$$

- Minimisation de l'énergie de déformation associée à la rotation :

Selon [PRO00], l'énergie de déformation associée à la rotation autour de la normale (drilling rotation) est définie par :

$$V_\theta = \beta \cdot \gamma \iint_A (\theta_{moy} - \theta)^2 dA \quad (2.58)$$

Avec :

$$\beta = \frac{t}{(1-\nu)} G \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} ;$$

$E$  : Module de Young ;  $\nu$  : Coefficient de Poisson ;  $t$  : Epaisseur de l'élément

$\gamma$  est un paramètre choisi arbitrairement positif et très petit pour que l'énergie de déformation associée à la rotation passe par le minimum. La valeur de  $\gamma = 10^{-8}$  peut convenir et permet d'éviter la singularité de la matrice de rigidité d'une part et de minimiser l'énergie de déformation associée à la rotation d'autre part.

Après développement de l'expression (2.58), l'énergie de déformation associée à la rotation autour de la normale prend, sous forme matricielle, l'expression suivante:

$$V_\theta = \{q\}^T \cdot [K_\theta^c] \{q\} \quad (2.59)$$

Avec  $\{q\}^T = \{u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2, u_3, v_3, \theta_3\}^T$

$[K_\theta^c]$  représente la matrice de rigidité associée à la rotation et est donnée comme suit :

$$[K_0^e] = A \cdot \frac{t.E}{2(1-\nu^2)} \cdot 10^{-8} \cdot \begin{bmatrix} \left(\frac{x_{23}}{4A}\right)^2 & \frac{x_{23} \cdot y_{23}}{(4A)^2} & -\frac{x_{23}}{12A} & \frac{x_{23} \cdot x_{31}}{(4A)^2} & \frac{x_{23} \cdot y_{31}}{(4A)^2} & -\frac{x_{23}}{12A} & \frac{x_{23} \cdot x_{12}}{(4A)^2} & \frac{x_{23} \cdot y_{12}}{(4A)^2} & -\frac{x_{23}}{12A} \\ \left(\frac{y_{23}}{4A}\right)^2 & -\frac{y_{23}}{12A} & \frac{y_{23} \cdot x_{31}}{(4A)^2} & \frac{y_{23} \cdot y_{31}}{(4A)^2} & -\frac{y_{23}}{12A} & \frac{y_{23} \cdot x_{12}}{(4A)^2} & \frac{y_{23} \cdot y_{12}}{(4A)^2} & -\frac{y_{23}}{12A} \\ \frac{1}{6} & -\frac{x_{31}}{12A} & -\frac{y_{31}}{12A} & \frac{1}{12} & -\frac{x_{12}}{12A} & -\frac{y_{12}}{12A} & \frac{1}{12} \\ \left(\frac{x_{31}}{4A}\right)^2 & \frac{x_{31} \cdot y_{31}}{(4A)^2} & -\frac{x_{31}}{12A} & \frac{x_{31} \cdot x_{12}}{(4A)^2} & \frac{x_{31} \cdot y_{12}}{(4A)^2} & -\frac{x_{31}}{12A} \\ \left(\frac{y_{31}}{4A}\right)^2 & -\frac{y_{31}}{12A} & \frac{y_{31} \cdot x_{12}}{(4A)^2} & \frac{y_{31} \cdot y_{12}}{(4A)^2} & -\frac{y_{31}}{12A} \\ \text{SYM} & \frac{1}{6} & -\frac{x_{12}}{12A} & -\frac{y_{12}}{12A} & \frac{1}{12} \\ \left(\frac{x_{12}}{4A}\right)^2 & \frac{x_{12} \cdot y_{12}}{(4A)^2} & -\frac{x_{12}}{12A} \\ \left(\frac{y_{12}}{4A}\right)^2 & -\frac{y_{12}}{12A} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Avec  $x_{ij} = x_j - x_i$  et  $y_{ij} = y_j - y_i$ .

### 2.8.2 – Condensation statique

La condensation statique est une technique qui permet de libérer des degrés de liberté d'un élément en agissant sur le système d'équation qui régit l'équilibre de l'élément (JEA91), par la réduction de ses composantes (matrice de rigidité, vecteurs de charges).

Le principe de base est d'exprimer les variables inconnues relatives aux degrés de liberté à éliminer du système d'équations en fonction des variables inconnues à maintenir, d'où la réduction du nombre d'équations à celui des inconnues restantes, l'avantage étant la réduction du temps de calcul pour la résolution du système et aussi une utilisation limitée de la capacité mémoire. Cette technique présente la spécificité d'être considérée une méthode de calcul qui agit au niveau élémentaire (avant assemblage).

Dans le cas de la méthode des éléments finis, l'équilibre statique de l'élément est régit par un système d'équation de type :

$$[K]\{U\} = \{F\} \tag{2.60}$$

Avec  $[K]$  : la matrice de rigidité de l'élément,

$\{U\}$  : les déplacements nodaux,

$\{F\}$  : le vecteur des charges équivalentes extérieures.

Désignons par l'indice  $e$  les équations à éliminer et par l'indice  $c$  les équations à conserver. Ainsi le système d'équation (2.60) prendrait la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} [K_c] & [K_{ce}] \\ [K_{ec}] & [K_{ee}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_c \\ U_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_c \\ F_e \end{Bmatrix} \tag{2.61}$$

De la relation (2.61) on peut déduire les vecteurs des déplacements à éliminer et à conserver :

$$\{U_e\} = -[K_{ee}][K_{ee}]^{-1} \cdot \{U_c\} + [K_{ee}]^{-1} \cdot \{F_e\} \quad (2.62)$$

$$\{U_c\} = -[K_{ce}][K_c]^{-1} \cdot \{U_e\} + [K_c]^{-1} \cdot \{F_c\} \quad (2.63)$$

En considérant que pour un nœud interne (dont les ddl sont à éliminer) la composante du vecteur des charges extérieures  $\{F_e\} = 0$  et en remplaçant dans l'équation (2.63)  $\{U_e\}$  par sa valeur donnée par l'équation (2.61) on obtient :

$$\{U_c\} = [K_{ce}][K_c]^{-1} \cdot [K_{ce}][K_{ee}]^{-1} \cdot \{U_c\} + [K_c]^{-1} \cdot \{F_c\} \quad (2.64)$$

La relation (2.64) se simplifie pour donner une forme similaire aux équations de l'équilibre statique dans la méthode des éléments finis :

$$\left[ [K_c] - [K_{ce}][K_{ee}]^{-1}[K_{ce}] \right] \{U_c\} = \{F_c\} \quad (2.65)$$

La matrice  $[\bar{K}] = [K_c] - [K_{ce}][K_{ee}]^{-1}[K_{ce}]$  constitue la matrice de rigidité condensée et le système d'équation (2.60) est ainsi réduit au système suivant :

$$[\bar{K}]\{U_c\} = \{F_c\} \quad (2.66)$$

### 2.8.3 – Intégration analytique

L'utilisation de l'intégration numérique dans l'évaluation de la matrice de rigidité (éléments iso paramétriques) peut engendrer deux types de problèmes :

- perte de précision pour les distorsions géométriques, surtout lorsque les champs d'approximation sont constitués de polynômes de degré élevé.
- blocage de cisaillement « *shear locking* » spécifique aux plaques minces

Alors que l'intégration analytique permet de les éviter. Mathématiquement, cette formulation est donnée comme suit :

$$[K_o] = \int_S [Q(x, y)]^T [D] [Q(x, y)] dS \quad (2.67)$$

D.J. Hamadi et M.T Belarbi [HAM06] ont mis en œuvre une démarche permettant l'évaluation automatique de la matrice  $[K_o]$  ; ceci quel que soit le degré du polynôme résultant de l'expression  $[Q_o] = [Q(x, y)]^T [D] [Q(x, y)]$  et quel que soit la distorsion de l'élément.

Cette démarche se présente comme suit :

Soit un élément fini (triangulaire par exemple) (figure 4).

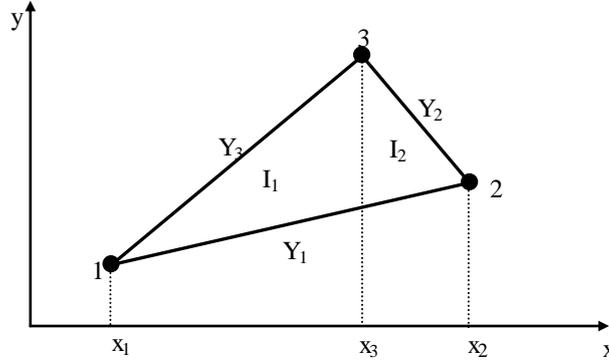


Figure 4. Intégration analytique - Exemple d'un élément fini triangulaire

Les composantes de la matrice résultant du produit  $[Q_0] = [Q(x, y)]^T [D] [Q(x, y)]$  sont sous la forme  $C.x^\alpha .y^\beta$ . Donc l'intégration de l'expression  $\int_S [Q(x, y)]^T [D] [Q(x, y)] dS$  revient à intégrer chacun des termes de la matrice  $[Q_0]$

$$\Rightarrow I = \iint_{x y} C.x^\alpha .y^\beta .dx.dy \quad (2.68)$$

Avec  $I = I_1 + I_2$  et  $C$  : une constante.

-  $I_1$  représente l'intégrale entre les droites  $Y_1$  et  $Y_3$  dans le sens des  $y$  et entre  $x_1$  et  $x_3$  dans le sens des  $x$ .

-  $I_2$  représente l'intégrale entre les droites  $Y_1$  et  $Y_2$  dans le sens des  $y$  et entre  $x_3$  et  $x_2$  dans le sens des  $x$ .

Les valeurs de  $I_1$  et  $I_2$  sont données comme suit :

$$I_1 = \int_{x_1}^{x_3} \int_{Y_1}^{Y_3} C.x^\alpha .y^\beta dx.dy \quad I_2 = \int_{x_3}^{x_2} \int_{Y_1}^{Y_2} C.x^\alpha .y^\beta dx.dy \quad (2.69)$$

$y$  : représente l'ordonnée de la droite d'équation  $y = a.x + b$ .

donc pour  $\beta = 2$ , on aura  $y^2 = (a.x + b)^2 = 1.a^2.x^2 + 2.a.b.x + 1.b^2$ ,

pour  $\beta = 3$ , on aura  $y^3 = (a.x + b)^3 = 1.a^3.x^3 + 3.a^2.b.x^2 + 3.a.b^2.x + 1.b^3$ ,

Ainsi, selon la valeur de  $\beta$ , on aboutit à la forme générale suivante :

$$y^\beta = (a.x + b)^\beta = \sum_{k=1}^{k=\beta+1} C(k).a^{\beta+1-k} .b^{k-1} .x^{\beta+1-k} = \sum_{k=1}^{k=\beta+1} C(k).a^{k-1} .b^{\beta+1-k} .x^{k-1} \quad (2.70)$$

Les valeurs des coefficients  $C(k)$  sont données en fonction de la valeur de  $\beta$  et de  $k$  dans le tableau 1. suivant :

	$C(k), k=1,6$					
	$C(1)$	$C(2)$	$C(3)$	$C(4)$	$C(5)$	$C(6)$
$\beta=1$	1	-	-	-	-	-
$\beta=2$	1	1	-	-	-	-
$\beta=3$	1	2	1	-	-	-
$\beta=4$	1	3	3	1	-	-
$\beta=5$	1	4	6	4	1	-
$\beta=6$	1	5	10	10	5	1

Tableau 1. - Valeurs des coefficients  $C(k)$  en fonction de  $\beta$

L'intégrale  $\int y^\beta dy$  devient :

$$\int y^\beta dy = \frac{1}{\beta+1} y^{\beta+1} = \frac{1}{\beta+1} (a.x+b)^{\beta+1} = \frac{1}{\beta+1} \sum_{k=1}^{k=\beta+2} C(k).a^{k-1}.b^{\beta+2-k}.x^{k-1} \quad (2.71)$$

Pour des bornes constituées de droites d'équation  $Y_i = a_i.x + b_i$  et  $Y_j = a_j.x + b_j$ , l'équation (2.70) devient :

$$\int_{Y_i}^{Y_j} y^\beta dy = \frac{1}{\beta+1} \sum_{k=1}^{k=\beta+2} C(k).(a_j^{k-1}.b_j^{\beta+2-k} - a_i^{k-1}.b_i^{\beta+2-k}).x^{k-1} \quad (2.72)$$

L'intégration de l'équation (2.71) par rapport aux bornes  $x_m$  et  $x_n$  nous donne :

$$\int_{x_m}^{x_n} x^\alpha \left( \int_{Y_i}^{Y_j} y^\beta dy \right) dx = \int_{x_m}^{x_n} \frac{1}{\beta+1} \sum_{k=1}^{k=\beta+2} C(k).(a_j^{k-1}.b_j^{\beta+2-k} - a_i^{k-1}.b_i^{\beta+2-k}).x^{k+\alpha-1} dx \quad (2.73)$$

L'expression finale de l'intégrale est enfin :

$$I_p = C. \frac{1}{\beta+1} \sum_{k=1}^{k=\beta+2} \frac{1}{k+\alpha} C(k).(a_j^{k-1}.b_j^{\beta+2-k} - a_i^{k-1}.b_i^{\beta+2-k}).(x_n^{k+\alpha} - x_m^{k+\alpha}) \quad (2.74)$$

$$I = \sum_{p=1}^2 I_p$$

Pour le cas d'un triangle

## 2.9 – Conclusion

Les techniques et les concepts synthétisés dans le présent chapitre devront permettre l'amélioration de la qualité de nos éléments nouveaux.

La revue bibliographique des méthodes de formulation des éléments finis de coque existants nous oriente sur les aspects de formulation à améliorer. Comme elle nous donne une référence d'appréciation de la qualité des nouveaux éléments développés.

En ce sens l'adoption de l'approche en déformation qui se distingue, au même titre que l'approche en déplacement, par sa simplicité, présente un double avantage :

- plus facile dans sa mise en œuvre que les modèles existants,

- permet un raffinement  $p$  (avoir des fonctions polynomiales d'approximation avec des degrés plus élevés) sans avoir besoin de recourir à l'augmentation du nombre de nœuds.

L'introduction dans la formulation de l'élément, d'un nœud interne est une autre action permettant de mieux raffiner les fonctions polynomiales d'approximation. Cette action présente l'inconvénient d'augmenter la taille de la matrice de rigidité de la structure.

Mais, cet inconvénient est contourné par l'utilisation de la technique de condensation statique qui permet de réduire la matrice de rigidité au niveau élémentaire en éliminant les ddl concernant le nœud interne introduit en exprimant les variables correspondants en fonction de celles des trois autres nœuds de l'élément triangulaire.

L'utilisation de l'intégration analytique permet d'éviter la perte de convergence avec la distorsion ; phénomène observé pour les éléments utilisant l'intégration numérique (éléments iso paramétriques) dont la convergence est conditionnée par un maillage régulier (non distordu)



## Développement d'éléments de coque à base triangulaire

---

### 3.1 – Introduction

### 3.2 - Formulation des éléments nouveaux de flexion

3.2.1 – *Élément de plaque mince (HIMEUR)*

3.2.2 – *Élément de plaque épaisse (Pep43)*

### 3.3 - Formulation des éléments nouveaux de membrane

3.3.1 – *Élément membranaire T42\_K $\theta$*

3.3.2 – *Élément membranaire T\_43*

### 3.4 - Formulation des éléments nouveaux de coque

### 3.5 - Conclusion



## Chapitre 03

### Développement d'éléments de coques à base triangulaire,

#### 3.1 – Introduction

L'objet de ce travail est la mise au point d'une série d'éléments finis de coque permettant de prendre en compte l'essentiel des situations rencontrées dans le calcul des ouvrages

L'utilisation d'éléments plats triangulaires pour discrétiser les structures coques est l'approche qu'on a considéré. L'avantage essentiel des éléments appartenant à cette catégorie est leur simplicité relative. En effet leur formulation repose sur les théories classiques des plaques (minces et épaisses). De ce fait on évite toutes les complexités dues à la prise en compte des courbures dans les théories des coques.

En ce sens, la géométrie des coques peut être approchée en utilisant les éléments plans par superposition d'un *élément de membrane* et d'un *élément de flexion*. Ceci suppose, bien sûr que les phénomènes de membrane et de flexion soient découplés.

L'utilisation de cette approche permet souvent l'analyse des structures coque avec une précision satisfaisante. Cependant la présence des éléments finis membranaires (de classe  $C^0$ ) face aux éléments flexionnels (de classe  $C^1$ ) pose des problématiques exprimées :

\* en termes de pauvreté en déplacement pour le traitement des aspects de flexion, ce qui oblige d'opter pour des réseaux denses afin d'approcher correctement la géométrie curviligne des coques et décrire les variations de contrainte.

\* et en terme de problèmes de continuité et de conformité lorsqu'ils sont utilisés en jonction avec des éléments de plaques et lors du passage aux éléments de coques.

La recherche de solutions à ces problèmes constitue l'objectif de notre contribution par le développement d'éléments de coques à facette planes basés sur la formulation en déformation et construits par superposition des éléments membranaires aux éléments flexionnels nouveaux. Ces éléments sont nuancés selon leurs caractéristiques fonctionnelles et selon la formulation adoptée pour chaque d'eux.

#### 3.2 - Formulation des éléments nouveaux de flexion

##### 3.2.1 – *Élément de plaque mince (HIMEUR)*

###### 3.2.1.1 - *Caractéristiques*

C'est un élément fini de plaque mince triangulaire d'élasticité plane auquel on a rajouté un quatrième nœud fictif positionné à l'extérieur et loin du triangle (voir

figure 5.). Cette position, à l'extérieur, est choisie pour éviter l'assouplissement de la matrice de rigidité qui entraînerait une surestimation des déplacements nodaux.

Chaque nœud possède trois degrés de liberté : les flèches  $w_i$  et les rotations  $\theta_{xi}$  et  $\theta_{yi}$ .

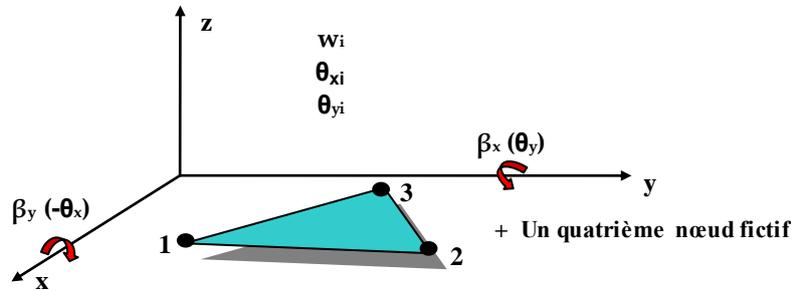


Figure 5. Élément triangulaire de plaque avec trois degrés de liberté par nœud

Les degrés de liberté correspondant à ce quatrième nœud sont par la suite éliminés par condensation statique de la matrice de rigidité au niveau élémentaire. Donc l'intérêt majeur de ce nœud fictif réside en l'enrichissement des champs de déplacements (raffinement  $p$ ), et vise, par conséquent, une plus grande précision dans l'approximation de la solution. Sa formulation se base sur l'approche en déformation.

Les fonctions d'interpolation des champs de déformation, par conséquent des déplacements et des contraintes sont développées en utilisant le triangle de Pascal.

Le critère variationnel correspondant est celui de l'énergie potentielle totale.

L'intégration analytique dans l'évaluation de la matrice de rigidité, est fortement intéressante pour éviter la perte de convergence; phénomène observé chez les éléments iso paramétriques (utilisant l'intégration numérique) qui sont très sensibles (leur convergence est conditionnée par un maillage régulier - non distordu).

Les hypothèses de cette formulation sont celles de la théorie des plaques minces (théorie de Kirchoff) en négligeant le cisaillement transversal.

### 3.2.1.2 – Cinématique

Dans la figure 6, les rotations autour des deux axes  $x$  et  $y$  sont notées  $\theta_x$  et  $\theta_y$  et les pentes dans les deux directions sont définies par les variables  $\beta_x$  et  $\beta_y$ , avec :

$$\beta_x = \theta_y \quad \beta_y = -\theta_x \quad (3.1)$$

L'hypothèse de la section droite implique une variation linéaire du déplacement sur l'épaisseur de la plaque. Ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= z\beta_x(x, y) = z\theta_y(x, y), \\ v(x, y, z) &= z\beta_y(x, y) = -z\theta_x(x, y), \\ w(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Les expressions (3.2) permettent de découpler les champs des déplacements  $(u, v)$  de celui de la flèche  $(w)$  qui constitue, en référence aux hypothèses de Kirchoff, l'unique champ permettant de définir le comportement de la plaque.

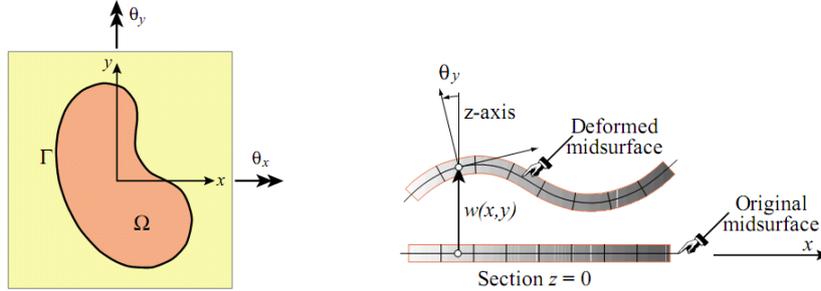


Figure 6. Déformation d'une plaque en flexion (Théorie de Kirchoff)

Ainsi, les déplacements sont donnés par :

$$w(x, y, z) = w(x, y) \quad u(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad v(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.3)$$

Et les rotations sont données par :

$$-\theta_x = \beta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad \theta_y = \beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.4)$$

Le tenseur de Green est alors :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = z \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Les courbures liées aux moments sont données par :

$$K_x = \frac{\partial \beta_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad K_y = \frac{\partial \beta_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad K_{xy} = \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.6)$$

### 3.2.1.3 – Conditions de compatibilité cinématique

Ces conditions [FRAF98] ont été établies par Saint Venant (1854). Leur satisfaction est obligatoire pour garantir l'unicité des déplacements. Les équations de compatibilité sont sous forme développée comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 K_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 K_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 K_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial K_{xy}}{\partial x} &= 2 \frac{\partial K_x}{\partial y} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial K_{xy}}{\partial y} = 2 \frac{\partial K_y}{\partial x} \quad (3.7)$$

### 3.2.1.4 – Loi de comportement

En état plan de contraintes et pour des matériaux isotropes, hypothèse généralement admise pour le calcul des structures minces (poutres, plaques et coques), la loi de comportement s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

Ce qui se traduit en termes de relations "Moments - Courbures" par le système d'équations suivant :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

### 3.2.1.5 – Equation d'équilibre

L'équilibre d'un élément géométrique de dimensions  $dx \times dy$  est obtenu par le bilan des forces extérieures et des actions internes et externes.

$$q dx dy + (Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x}) dy + (Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y}) dx - Q_x dy - Q_y dx = 0 \quad (3.10)$$

Où  $Q_x$  et  $Q_y$  sont respectivement les efforts tranchants dans les sections perpendiculaires aux axes  $x$  et  $y$ . L'expression (3.10) est simplifiée pour donner :

$$q + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0 \quad (3.11)$$

L'équilibre des moments autour des axes  $x$  et  $y$  donne :

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (3.12)$$

En remplaçant les valeurs des équations (3.11) et (3.12) dans la relation établie par les équations (3.9), la condition d'équilibre se traduirait en fonction du déplacement "w" par l'expression suivante :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{q}{D} = 0 \quad (3.13)$$

Avec  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

3.2.1.6 – Fonctions d'interpolation

Pour les mouvements de corps rigide (MCR), les courbures liées aux moments sont nulles :

$$K_x = 0 \quad K_y = 0 \quad K_{xy} = 0 \quad (3.14)$$

En remplaçant dans les équations (3.6) les courbures par leurs valeurs données par les équations (3.14) et après intégration, on obtient les champs des déplacements représentant les mouvements de corps rigide qui se présentent comme suit :

$$W = a_1 - a_2 \cdot x - a_3 \cdot y \quad \beta_x = a_2 \quad \beta_y = a_3 \quad (3.15)$$

Avec  $a_2$  et  $a_3$ , des paramètres représentant les rotations  $\theta_y$  et  $\theta_x$  du corps rigide respectivement autour des axes "y" et "x" et  $a_3$  représentant la translation (flèche) du corps rigide le long de la normale (axe "z").

Notre élément possède quatre nœuds (les trois sommets du triangle auquel on a rajouté un quatrième nœud fictif). Chacun de ses nœuds possède trois degrés de liberté. Donc les champs des déplacements, formulés par l'utilisation du modèle en déformation, possèdent 12 constantes indépendantes ( $a_1, \dots, a_{12}$ ). Les trois premières ( $a_1, a_2, a_3$ ) sont utilisées dans les équations (3.15) pour représenter les mouvements de corps rigide.

Les neuf autres ( $a_4, \dots, a_{12}$ ) sont utilisés dans le modèle de déformation de l'élément. Ils sont répartis dans les fonctions d'interpolation des déformations de manière à satisfaire les équations (3.7) de compatibilité cinématique pour l'élasticité plane. Ainsi, les champs de déformation pour les modes supérieurs sont établis à partir du triangle de Pascal comme suit :

$$\begin{aligned} K_x &= a_4 + a_5 \cdot x + a_6 \cdot y + a_7 \cdot x \cdot y \\ K_y &= a_8 + a_9 \cdot x + a_{10} \cdot y + a_{11} \cdot x \cdot y \\ K_{xy} &= a_{12} + 2 \cdot a_6 \cdot x + a_7 \cdot x^2 + 2 \cdot a_9 \cdot y + a_{11} \cdot y^2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

En remplaçant dans les équations (3.6) les courbures par leurs valeurs données par les équations (3.16) et après intégration, on obtient les champs des déplacements suivants :

$$\begin{aligned} W &= -a_4 \cdot \frac{x^2}{2} - a_5 \cdot \frac{x^3}{6} - a_6 \cdot \frac{x^2 \cdot y}{2} - a_7 \cdot \frac{x^3 \cdot y}{6} - a_8 \cdot \frac{y^2}{2} - a_9 \cdot \frac{x \cdot y^2}{2} - a_{10} \cdot \frac{y^3}{6} - a_{11} \cdot \frac{x \cdot y^3}{6} - a_{12} \cdot \frac{x \cdot y}{2} \\ \beta_x &= a_4 \cdot x + a_5 \cdot \frac{x^2}{2} + a_6 \cdot x \cdot y + a_7 \cdot \frac{x^2 \cdot y}{2} + a_9 \cdot \frac{y^2}{2} + a_{11} \cdot \frac{y^3}{6} + a_{12} \cdot \frac{y}{2} \\ \beta_y &= a_6 \cdot \frac{x^2}{2} + a_7 \cdot \frac{x^3}{6} + a_8 \cdot y + a_9 \cdot x \cdot y + a_{10} \cdot \frac{y^2}{2} + a_{11} \cdot \frac{x \cdot y^2}{2} + a_{12} \cdot \frac{x}{2} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Le champ final des déplacements est obtenu en additionnant les relations (3.15) et (3.17):

$$\begin{aligned}
W &= a_1 - a_2 \cdot x - a_3 \cdot y - a_4 \cdot \frac{x^2}{2} - a_5 \cdot \frac{x^3}{6} - a_6 \cdot \frac{x^2 \cdot y}{2} - a_7 \cdot \frac{x^3 \cdot y}{6} - a_8 \cdot \frac{y^2}{2} - a_9 \cdot \frac{x \cdot y^2}{2} - a_{10} \cdot \frac{y^3}{6} - a_{11} \cdot \frac{x \cdot y^3}{6} - a_{12} \cdot \frac{x \cdot y}{2} \\
\beta_x &= a_2 + a_4 \cdot x + a_5 \cdot \frac{x^2}{2} + a_6 \cdot x \cdot y + a_7 \cdot \frac{x^2 \cdot y}{2} + a_9 \cdot \frac{y^2}{2} + a_{11} \cdot \frac{y^3}{6} + a_{12} \cdot \frac{y}{2} \\
\beta_y &= a_3 + a_6 \cdot \frac{x^2}{2} + a_7 \cdot \frac{x^3}{6} + a_8 \cdot y + a_9 \cdot x \cdot y + a_{10} \cdot \frac{y^2}{2} + a_{11} \cdot \frac{x \cdot y^2}{2} + a_{12} \cdot \frac{x}{2}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Sous forme matricielle le champ des déplacements donné par les équations (3.18) s'écrit comme suit :

$$\begin{Bmatrix} W(x, y) \\ \beta_x(x, y) \\ \beta_y(x, y) \end{Bmatrix} = [f(x, y)] \{a_i\} \tag{3.19}$$

Avec,  $\{a_i\}^T = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12} \rangle$

$$[f(x, y)] = \begin{bmatrix} 1 & -x & -y & -\frac{x^2}{2} & -\frac{x^3}{6} & -\frac{x^2 \cdot y}{2} & -\frac{x^3 \cdot y}{6} & -\frac{y^2}{2} & -\frac{x \cdot y^2}{2} & -\frac{y^3}{6} & -\frac{x \cdot y^3}{6} & -\frac{x \cdot y}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x & \frac{x^2}{2} & x \cdot y & \frac{x^2 \cdot y}{2} & 0 & \frac{y^2}{2} & 0 & \frac{y^3}{6} & \frac{y}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{6} & y & x \cdot y & \frac{y^2}{2} & \frac{x \cdot y^2}{2} & \frac{x}{2} \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

Connaissant les coordonnées nodales  $(x_i, y_i)$  correspondant aux nœuds  $j$  ( $j=1, \dots, 4$ ) et en application de la relation (3.19) le vecteur des déplacements nodaux, au niveau élémentaire, est donné comme suit :

$$\{q^e\} = \begin{Bmatrix} [f(x_1, y_1)] \\ [f(x_2, y_2)] \\ [f(x_3, y_3)] \\ [f(x_4, y_4)] \end{Bmatrix} \{a_i\} \tag{3.21}$$

Avec,  $\{q^e\}^T = \langle w_1, \beta_{x1}, \beta_{y1}, w_2, \beta_{x2}, \beta_{y2}, w_3, \beta_{x3}, \beta_{y3}, w_4, \beta_{x4}, \beta_{y4} \rangle$

$\{a_i\}^T = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12} \rangle$

$$[A] = \begin{bmatrix} [f(x_1, y_1)] \\ [f(x_2, y_2)] \\ [f(x_3, y_3)] \\ [f(x_4, y_4)] \end{bmatrix} : \text{matrice des coordonnées nodales.}$$

La forme matricielle développée de la matrice des coordonnées nodales  $[A]$  est donnée en annexe.

De l'équation (3.21), on en déduit la valeur des paramètres " $a_i$ " qui sont données par le système d'équations suivant :

$$\{a_i\} = [A]^{-1} \{q^e\} \tag{3.22}$$

En remplaçant les valeurs des paramètres  $a_i$  données par la relation (3.22) dans le système d'équation (3.19), on obtient la relation :

$$\begin{Bmatrix} W(x, y) \\ \beta_x(x, y) \\ \beta_y(x, y) \end{Bmatrix} = [f(x, y)][A]^{-1} \cdot \{q^e\} \quad (3.23)$$

dans laquelle,  $[N] = [f(x, y)][A]^{-1}$  représente la matrice des fonctions d'interpolation  $N_i$

En remplaçant dans les équations (3.6),  $w(x, y)$  par ses valeurs de l'équation (3.19), Les courbures liées aux moments prendront la forme développée suivante :

$$\{K\} = \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x.y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x.y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.x & x^2 & 0 & 2.y & 0 & y^2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \{a_i\} \quad (3.24)$$

Avec  $\{a_i\}^T = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12} \rangle$

Ainsi, la matrice de déformation est donnée comme suit :

$$[Q(x, y)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x.y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x.y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.x & x^2 & 0 & 2.y & 0 & y^2 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

### 3.2.1.7 – Matrice de rigidité élémentaire

Le travail virtuel intérieur, élémentaire discrétisé est donné par l'expression :

$$(\delta W_{int})^e = \int_{V^e} \delta \{\varepsilon\}^T \cdot [\sigma] \cdot dV^e \quad (3.26)$$

Sachant que :  $\{\varepsilon\} = [N] \cdot \{q^e\} = [Q(x, y)][A]^{-1} \cdot \{q^e\}$  (3.27)

Et que :  $\{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\}$  (3.28)

Et en remplaçant dans l'expression (3.26)  $\{\varepsilon\}$  et  $\{\sigma\}$  par leurs valeurs données, respectivement dans les équations (3.27) et (3.28), on obtient :

$$(\delta W_{int})^e = \delta \{q^e\}^T \int_{V^e} [Q(x, y)]^T \cdot [A^{-1}]^T \cdot [D] \cdot [Q(x, y)][A]^{-1} \cdot \{q^e\} \cdot dV^e \quad (3.29)$$

Ainsi, la matrice de rigidité élémentaire tirée de l'expression (3.29) est la suivante :

$$[K^e] = \int_{V^e} [Q(x, y)]^T \cdot [A^{-1}]^T \cdot [D] \cdot [Q(x, y)][A]^{-1} \cdot dV^e \quad (3.30)$$

L'expression (3.30) peut, s'écrire :

$$[K^e] = [A^{-1}]^T \int_{V^e} [Q(x, y)]^T [D] [Q(x, y)] \cdot dV^e \cdot [A]^{-1} = [A^{-1}]^T [K_o] \cdot [A]^{-1} \quad (3.31)$$

L'évaluation de l'expression  $[K_o]$  est établie par intégration analytique des différentes composantes résultant du produit matriciel  $[Q(x, y)]^T [D] [Q(x, y)]$  dont les expressions prennent la forme " $H_{\alpha\beta} = C \cdot x^\alpha \cdot y^\beta$ ". La matrice  $[K_o]$  relative à l'élément "HIMEUR" est donnée en annexe.

Enfin la matrice de rigidité élémentaire à prendre en considération au niveau de l'assemblage et de la construction de la matrice de rigidité globale de la structure, est

celle obtenue après condensation de la matrice  $[K^e]$ . Cette condensation statique concerne les degrés de liberté relatifs au quatrième nœud fictif.

### 3.2.2 – Élément de plaque épaisse (Pep43)

#### 3.2.2.1 - Caractéristiques

C'est un élément fini de plaque épaisse triangulaire d'élasticité plane auquel on a rajouté un quatrième nœud fictif positionné à l'extérieur et loin du triangle (voir figure 7). Cette position, à l'extérieur, est choisie pour éviter l'assouplissement de la matrice de rigidité qui entraînerait une surestimation des déplacements nodaux. Chaque nœud possède trois degrés de liberté : les flèches  $w_i$  et les rotations  $\theta_{xi}$  et  $\theta_{yi}$ .

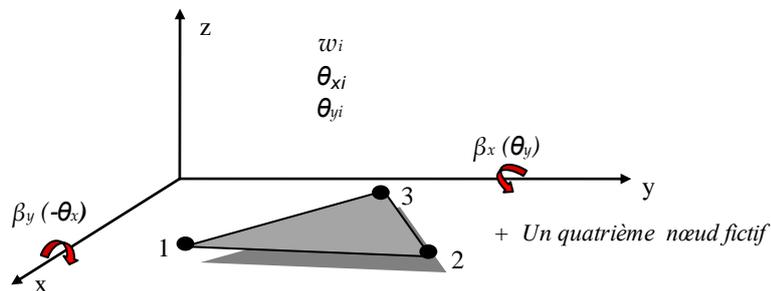


Figure 7. Élément triangulaire de plaque avec trois degrés de liberté par nœud

Les degrés de liberté correspondant à ce quatrième nœud sont par la suite éliminés par condensation statique de la matrice de rigidité au niveau élémentaire. Donc l'intérêt majeur de ce nœud fictif réside en l'enrichissement des champs de déplacements (raffinement  $p$ ), et vise, par conséquent, une plus grande précision dans l'approximation de la solution. Sa formulation se base sur l'approche en déformation.

Les fonctions d'interpolation des champs de déformation, par conséquent des déplacements et des contraintes sont développées en utilisant le triangle de Pascal.

Le critère variationnel correspondant est celui de l'énergie potentielle totale.

L'intégration analytique dans l'évaluation de la matrice de rigidité, est fortement intéressante pour éviter la perte de convergence; phénomène observé chez les éléments iso paramétriques (utilisant l'intégration numérique) qui sont très sensibles (leur convergence est conditionnée par un maillage régulier - non distordu).

Les hypothèses de cette formulation sont celles de la théorie des plaques épaisses (théorie de Reissner-Mindlin).

#### 3.2.2.2 - Cinématique

En considérant les hypothèses de la théorie de Reissner-Mindlin pour les plaques, les déplacements en un point du domaine dans un système d'axes cartésien sont établis comme suit :

$$u(x, y, z) = z\beta_x(x, y) = z\theta_y(x, y)$$

$$v(x, y, z) = z\beta_y(x, y) = -z\theta_x(x, y)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y) \quad (3.32)$$

Il est à noter que l'hypothèse de la section droite implique une variation linéaire du déplacement sur l'épaisseur de la plaque.

Et les rotations sont données par :

$$-\theta_x = \beta_y \quad \theta_y = \beta_x \quad (3.33)$$

Le tenseur de déformation infinitésimal est alors :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = z \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xz} &= \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Les courbures liées aux moments sont données par :

$$K_x = \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \quad K_y = \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \quad K_{xy} = \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \quad (3.35)$$

### 3.2.2.3 – Conditions de compatibilité cinématique

Ces conditions [FRAF98] ont été établies par Saint Venant (1854). Leur satisfaction est obligatoire pour garantir l'unicité des déplacements. Les équations de compatibilité sont sous forme développée comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 K_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 K_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 K_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial K_{xy}}{\partial x} &= 2 \frac{\partial K_x}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial K_{xy}}{\partial y} &= 2 \frac{\partial K_y}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.36)$$

### 3.2.2.4 – Loi de comportement

En état plan de contraintes et pour des matériaux isotropes, la relation "contraintes - déformations" selon la théorie de Reissner-Mindlin est donnée par le système d'équations suivant :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6k}{h^2}(1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6k}{h^2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

Avec :

- $E$  : le module d'Young,
- $h$  : l'épaisseur de la plaque,
- $\nu$  : le coefficient de poisson
- $k$  : le coefficient de réduction de la section pris généralement égal à 5/6.
- $M_x, M_y, M_{xy}, T_x, T_y$  représentent respectivement les moments de flexion, le moment de torsion et les efforts tranchants par unité de longueur.

### 3.2.2.5 – Equation d'équilibre

L'équilibre d'un élément géométrique de dimensions  $dx \times dy$  est obtenu par le bilan des forces extérieures et des actions internes et externes.

$$q dx dy + (Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx) dy + (Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy) dx - Q_x dy - Q_y dx = 0 \quad (3.38)$$

Où  $Q_x$  et  $Q_y$  sont respectivement les efforts tranchants dans les sections perpendiculaires aux axes  $x$  et  $y$ . L'expression (3.38) est simplifiée pour donner :

$$q + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0 \quad (3.39)$$

L'équilibre des moments autour des axes  $x$  et  $y$  donne :

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (3.40)$$

En remplaçant les valeurs des équations (3.39) et (3.40) dans la relation établie par les équations (3.37), la condition d'équilibre se traduirait en fonction du déplacement "w" par l'expression suivante :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{q}{D} = 0 \quad (3.41)$$

Avec  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

3.2.2.6 – Fonctions d'interpolation

Pour les mouvements de corps rigide (MCR), les courbures liées aux moments sont nulles :

$$K_x = 0 \quad K_y = 0 \quad K_{xy} = 0 \quad \gamma_{xz} = 0 \quad \gamma_{yz} = 0 \quad (3.42)$$

En remplaçant dans les équations (3.34) et (3.35) les courbures et les déformations par leurs valeurs données par les équations (3.42) et après intégration, on obtient les champs des déplacements représentant les mouvements de corps rigide qui se présentent comme suit :

$$W = a_1 - a_2 \cdot x - a_3 \cdot y \quad \beta_x = a_2 \quad \beta_y = a_3 \quad (3.43)$$

Avec  $a_2$  et  $a_3$ , des paramètres représentant les rotations  $\theta_y$  et  $\theta_x$  du corps rigide respectivement autour des axes "y" et "x" et  $a_3$  représentant la translation (flèche) du corps rigide le long de la normale (axe "z").

Notre élément possède quatre nœuds (les trois sommets du triangle auquel on a rajouté un quatrième nœud fictif). Chacun de ses nœuds possède trois degrés de liberté. Donc les champs de déplacement, formulés par l'utilisation du modèle en déformation, possèdent 12 constantes indépendantes ( $a_1, \dots, a_{12}$ ). Les trois premières ( $a_1, a_2, a_3$ ) sont utilisées dans les équations (3.43) pour représenter les mouvements de corps rigide.

Les neuf autres ( $a_4, \dots, a_{12}$ ) sont utilisés dans le modèle de déformation de l'élément. Ils sont répartis dans les fonctions d'interpolation des déformations de manière à satisfaire les équations (3.36) de compatibilité cinématique pour l'élasticité plane. Ainsi, les champs de déformation pour les modes supérieurs sont établis à partir du triangle de Pascal comme suit :

$$\begin{aligned} K_x &= a_4 + a_5 y + a_9 \frac{y}{2} \\ K_y &= a_6 + a_7 x + a_{10} \frac{x}{2} \\ K_{xy} &= a_8 + a_9 x + a_{10} y \\ \gamma_{xz} &= a_{11} - a_7 y^2 \\ \gamma_{yz} &= a_{12} - a_5 x^2 \end{aligned} \quad (3.44)$$

Après intégration des équations (3.44) et leur addition aux déplacements donnés dans [3.43], le champ final des déplacements obtenu est comme suit:

$$\begin{aligned} W &= a_1 - a_2 x - a_3 y - a_4 \frac{x^2}{2} - a_5 \frac{x^2 y}{2} - a_6 \frac{y^2}{2} - a_7 \frac{xy^2}{2} - a_8 \frac{xy}{2} - a_9 \frac{x^2 y}{4} - a_{10} \frac{xy^2}{4} - a_{11} \frac{x}{2} - a_{12} \frac{y}{2} \\ \beta_x &= a_2 + a_4 x + a_5 xy - a_7 \frac{y^2}{2} + a_8 \frac{y}{2} + a_9 \frac{xy}{2} + a_{10} \frac{y^2}{4} + \frac{a_{11}}{2} \\ \beta_y &= a_3 - a_5 \frac{x^2}{2} + a_6 y + a_7 xy + a_8 \frac{x}{2} + a_9 \frac{x^2}{4} + a_{10} \frac{xy}{2} + \frac{a_{12}}{2} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Sous forme matricielle le champ des déplacements donné par les équations (3.45) s'écrit comme suit :

$$\begin{Bmatrix} W(x, y) \\ \beta_x(x, y) \\ \beta_y(x, y) \end{Bmatrix} = [f(x, y)] \{a_i\} \quad (3.46)$$

Avec,  $\{a_i\}^T = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12} \rangle$

Connaissant les coordonnées nodales  $(x_j, y_j)$  correspondant aux nœuds  $j$  ( $j=1, \dots, 4$ ) et en application de la relation (3.46), le vecteur des déplacements nodaux, au niveau élémentaire, est donné comme suit :

$$\{q^e\} = \begin{Bmatrix} [f(x_1, y_1)] \\ [f(x_2, y_2)] \\ [f(x_3, y_3)] \\ [f(x_4, y_4)] \end{Bmatrix} \{a_i\} \quad (3.47)$$

Avec,  $\{q^e\}^T = \langle w_1, \beta_{x1}, \beta_{y1}, w_2, \beta_{x2}, \beta_{y2}, w_3, \beta_{x3}, \beta_{y3}, w_4, \beta_{x4}, \beta_{y4} \rangle$

$\{a_i\}^T = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12} \rangle$

$$[A] = \begin{Bmatrix} [f(x_1, y_1)] \\ [f(x_2, y_2)] \\ [f(x_3, y_3)] \\ [f(x_4, y_4)] \end{Bmatrix} : \text{matrice des coordonnées nodales.}$$

La forme matricielle développée de la matrice des coordonnées nodales  $[A]$  est donnée en annexe.

De l'équation (3.47), on en déduit la valeur des paramètres " $a_i$ " qui sont données par le système d'équations suivant :

$$\{a_i\} = [A]^{-1} \{q^e\} \quad (3.48)$$

En remplaçant les valeurs des paramètres  $a_i$  données par la relation (3.48) dans le système d'équation (3.46), on obtient la relation :

$$\begin{Bmatrix} W(x, y) \\ \beta_x(x, y) \\ \beta_y(x, y) \end{Bmatrix} = [f(x, y)] [A]^{-1} \{q^e\} \quad (3.49)$$

dans laquelle,  $[N] = [f(x, y)] [A]^{-1}$  représente la matrice des fonctions d'interpolation  $N_i$

En remplaçant dans les équations (3.34),  $w(x, y)$  par ses valeurs de l'équation (3.49), Les courbures liées aux moments prendront la forme développée suivante :

$$\begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 & \frac{y}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & \frac{x}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{a_i\} = [Q(x, y)] \{a_i\} \quad (3.50)$$

Avec  $\{a_i\}^T = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12} \rangle$

Ainsi, la matrice de déformation est donnée comme suit :

$$[Q(x, y)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & \frac{y}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & \frac{x}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

### 3.2.2.7 – Matrice de rigidité élémentaire

Le travail virtuel intérieur, élémentaire discrétisé est donné par l'expression :

$$(\delta W_{int})^e = \int_{V^e} \delta \{\varepsilon\}^T \cdot [\sigma] dV^e \quad (3.52)$$

Sachant que :  $\{\varepsilon\} = [N] \{q^e\} = [Q(x,y)] [A]^{-1} \{q^e\}$  (3.53)

Et que :  $\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$  (3.54)

Et en remplaçant dans l'expression (3.52)  $\{\varepsilon\}$  et  $\{\sigma\}$  par leurs valeurs données, respectivement dans les équations (3.53) et (3.54), on obtient :

$$(\delta W_{int})^e = \delta \{q^e\}^T \int_{V^e} [Q(x,y)]^T \cdot [A^{-1}]^T \cdot [D] \cdot [Q(x,y)] [A]^{-1} \{q^e\} dV^e \quad (3.55)$$

Ainsi, la matrice de rigidité élémentaire tirée de l'expression (3.55) est la suivante :

$$[K^e] = \int_{V^e} [Q(x,y)]^T \cdot [A^{-1}]^T \cdot [D] \cdot [Q(x,y)] [A]^{-1} dV^e \quad (3.56)$$

L'expression (3.56) peut, s'écrire :

$$[K^e] = [A^{-1}]^T \int_{V^e} [Q(x,y)]^T [D] [Q(x,y)] dV^e \cdot [A]^{-1} = [A^{-1}]^T [K_o] [A]^{-1} \quad (3.57)$$

L'évaluation de l'expression  $[K_o]$  est établie par intégration analytique des différents composants résultant du produit matriciel  $[Q(x,y)]^T [D] [Q(x,y)]$  dont les expressions prennent la forme " $H_{\alpha\beta} = C \cdot x^\alpha \cdot y^\beta$ ". La matrice  $[K_o]$  relative à l'élément "Pep43" est donnée en annexe.

Enfin la matrice de rigidité élémentaire à prendre en considération au niveau de l'assemblage et de la construction de la matrice de rigidité globale de la structure, est celle obtenue après condensation de la matrice  $[K^e]$ . Cette condensation statique concerne les degrés de liberté relatifs au quatrième nœud fictif.

## 3.3 - Formulation des éléments nouveaux de membrane

### 3.3.1 – Élément membranaire T42\_K $\theta$

#### 3.3.1.1 - Caractéristiques

Cet élément de membrane, baptisé T42\_K $\theta$  n'est autre que l'élément de membrane triangulaire T\_42 [HIM08] avec ses quatre nœuds et ses deux degrés de liberté par

nœud (les deux translations U et V), formulé sur la base de l'approche en déformation auquel on a rajouté dans le présent travail la rigidité associée à la rotation autour de la normale.

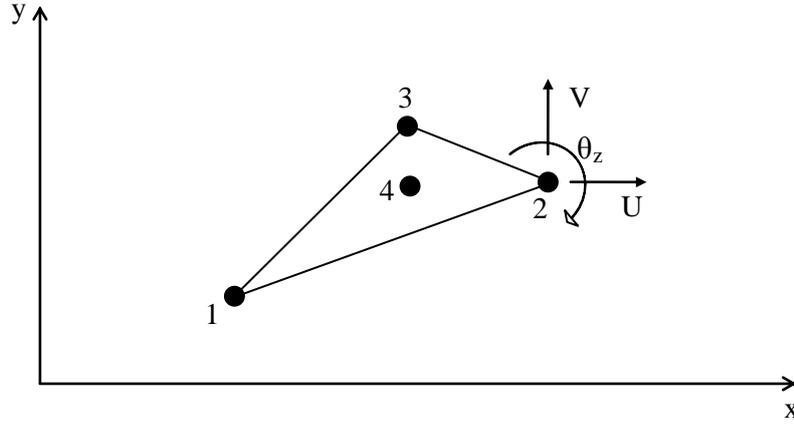


Figure 8. Élément  $T42\_K_\theta$ ; Triangle avec quatre nœuds et deux degrés de liberté par nœud (deux translations U et V) adjoint de la rigidité liée à la rotation autour de la normale

De ce fait, la matrice de rigidité  $[K^e]$  de cet élément est de taille « 9x9 », obtenue par superposition de deux matrices : la matrice de rigidité  $[K^{e42}]$  [HIM08] de l'élément  $T\_42$  formulée sur la base de l'approche en déformation et la matrice  $[K_\theta^e]$  associant la rigidité liée à la rotation autour de la normale.

La combinaison de ces rigidités qui est schématisée comme suit, donne la matrice de rigidité élémentaire  $[K^e]$  de l'élément  $T42\_K_\theta$ .

$$[K^{e42}] = \begin{bmatrix} k_{m11} & k_{m12} & 0 & k_{m13} & k_{m14} & 0 & k_{m15} & k_{m16} & 0 \\ & k_{m22} & 0 & k_{m23} & k_{m24} & 0 & k_{m25} & k_{m26} & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & k_{m33} & k_{m34} & 0 & k_{m35} & k_{m36} & 0 \\ & & & & k_{m44} & 0 & k_{m45} & k_{m46} & 0 \\ & \text{SYM} & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & k_{m55} & k_{m56} & 0 \\ & & & & & & & k_{m66} & 0 \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

$$[K_\theta^e] = \begin{bmatrix} k_{\theta11} & k_{\theta12} & k_{\theta13} & k_{\theta14} & k_{\theta15} & k_{\theta16} & k_{\theta17} & k_{\theta18} & k_{\theta19} \\ & k_{\theta22} & k_{\theta23} & k_{\theta24} & k_{\theta25} & k_{\theta26} & k_{\theta27} & k_{\theta28} & k_{\theta29} \\ & & k_{\theta33} & k_{\theta34} & k_{\theta35} & k_{\theta36} & k_{\theta37} & k_{\theta38} & k_{\theta39} \\ & & & k_{\theta44} & k_{\theta45} & k_{\theta46} & k_{\theta47} & k_{\theta48} & k_{\theta49} \\ & & & & k_{\theta55} & k_{\theta56} & k_{\theta57} & k_{\theta58} & k_{\theta59} \\ & \text{SYM} & & & & k_{\theta66} & k_{\theta67} & k_{\theta68} & k_{\theta69} \\ & & & & & & k_{\theta77} & k_{\theta78} & k_{\theta79} \\ & & & & & & & k_{\theta88} & k_{\theta89} \\ & & & & & & & & k_{\theta99} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

La matrice de rigidité élémentaire  $[K^e]$  de notre élément est obtenue par addition des matrices (3.58) et (3.59) ; ce qui donne :

$$[K^e] = \begin{bmatrix} (k_{m11} + k_{011}) & (k_{m12} + k_{012}) & k_{013} & (k_{m13} + k_{014}) & (k_{m14} + k_{015}) & k_{016} & (k_{m15} + k_{017}) & (k_{m16} + k_{018}) & k_{019} \\ & (k_{m22} + k_{022}) & k_{023} & (k_{m23} + k_{024}) & (k_{m24} + k_{025}) & k_{026} & (k_{m25} + k_{027}) & (k_{m26} + k_{028}) & k_{029} \\ & & k_{033} & k_{034} & k_{035} & k_{036} & k_{037} & k_{038} & k_{039} \\ & & & (k_{m33} + k_{044}) & (k_{m34} + k_{045}) & k_{046} & (k_{m35} + k_{047}) & (k_{m36} + k_{048}) & k_{049} \\ & & & & (k_{m44} + k_{055}) & k_{056} & (k_{m45} + k_{057}) & (k_{m46} + k_{058}) & k_{059} \\ & & \text{SYM} & & & k_{066} & k_{067} & k_{068} & k_{069} \\ & & & & & & (k_{m55} + k_{077}) & (k_{m56} + k_{078}) & k_{079} \\ & & & & & & & (k_{m66} + k_{088}) & k_{089} \\ & & & & & & & & k_{099} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

### 3.3.1.2 – Construction de la matrice $[K^{e42}]$

\* Selon [HIM08], l'élément de membrane,  $T_{42}$ , est formulé en utilisant le modèle en déformation. Il est constitué (voir figure 9) de quatre nœuds : les trois sommets du triangle et le quatrième au niveau du barycentre. Ce dernier est par la suite éliminé au niveau de la matrice de rigidité de l'élément par l'utilisation de la technique de condensation statique.

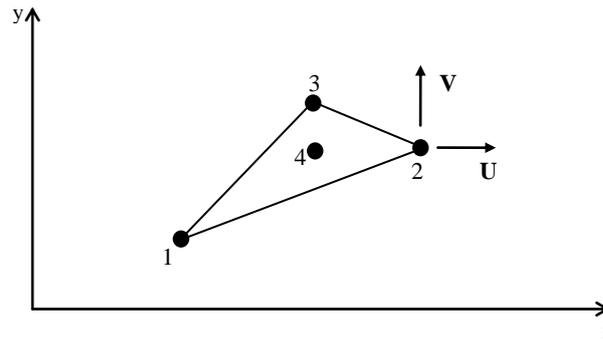


Figure 9. Elément  $T_{42}$  ; Triangle avec quatre nœuds et deux degrés de liberté par nœud (deux translations (U et V))

\* Les relations entre les déformations et les déplacements Pour cet élément sont établies comme suit :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \quad (3.61)$$

\* Les champs de déplacement, formulés par l'utilisation du modèle en déformation, se présentent, sous forme matricielle, comme suit :

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = [f(x,y)] \{a_i\} \quad (3.62)$$

Avec,  $\{a_i\}^T = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 \rangle$

$$[f(x,y)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & x.y & 0 & -\frac{y^2}{2} & \frac{y}{2} \\ 0 & 1 & x & 0 & -\frac{x^2}{2} & y & x.y & \frac{x}{2} \end{bmatrix}$$

\* Donc la matrice des coordonnées nodales, détaillée sous forme matricielle en annexe, est la suivante :

$$[A] = \begin{bmatrix} [f(x_1, y_1)] \\ [f(x_2, y_2)] \\ [f(x_3, y_3)] \\ [f(x_4, y_4)] \end{bmatrix}$$

\* La matrice des fonctions d'interpolation de cet élément est donnée par l'expression :

$$[N] = [f(x, y)][A]^{-1} \quad (3.63)$$

\* La matrice de déformation est donnée comme suit :

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

\* L'application du principe des travaux virtuels au niveau élémentaire et discrétisé aboutit pour cet élément à la forme suivante de la matrice de rigidité élémentaire:

$$[K^e] = t \int_S [Q(x, y)]^T [A^{-1}]^T [D] [Q(x, y)] [A]^{-1} dS \quad (3.65)$$

Expression pouvant s'écrire :

$$[K^e] = t [A^{-1}]^T \int_S [Q(x, y)]^T [D] [Q(x, y)] dS [A]^{-1} = t [A^{-1}]^T [K_o] [A]^{-1} \quad (3.66)$$

L'évaluation de l'expression  $[K_o] = \int_S [Q(x, y)]^T [D] [Q(x, y)] dS$  a été établie par intégration analytique des différents éléments du produit matriciel  $[Q(x, y)]^T [D] [Q(x, y)]$ .

Le développement de la matrice  $[K_o]$  est donné en annexe.

Enfin la matrice de rigidité élémentaire  $[K^{ed2}]$  à prendre en considération au niveau de l'assemblage et de la construction de la matrice de rigidité globale de la structure, est celle obtenue après condensation de la matrice  $[K^e]$ . Cette condensation statique concerne les degrés de liberté relatifs au nœud central.

### 3.3.1.3 – Construction de la matrice $[K_\theta^e]$

L'approche permettant la construction de la matrice  $[K_\theta^e]$  est détaillée dans le paragraphe 2.8.1 précédent. Celle-ci repose sur :

\* La définition de la rotation moyenne obtenue par l'expression :

$$\theta_m = \frac{1}{A} \iint_A \theta \cdot dA \quad \text{avec} \quad \theta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (3.67)$$

Il est à noter que cette intégration à travers l'élément, est établie par rapport aux coordonnées surfaciques.

\* L'évaluation de l'énergie de déformation associée à cette rotation, qui selon [PRO00] est établie comme suit :

$$V_0 = \beta \cdot \gamma \iint_A (\theta_m - \theta)^2 \cdot dA \quad (3.68)$$

Avec  $\beta = \frac{t}{(1-\nu)}G$        $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

E : Module de Young

$\gamma$  un paramètre choisi arbitrairement positif et très petit pour que l'énergie de déformation associée à la rotation passe par le minimum.

Selon [PRO00] la valeur de  $\gamma = 10^{-8}$  peut convenir et permet d'éviter la singularité de la matrice de rigidité d'une part et de minimiser l'énergie de déformation associée à la rotation d'autre part.

\* Cette approche, permet d'aboutir à la matrice de rotation  $[K_0^e]$  qui prend la forme suivante:

$$[K_0^e] = A \cdot \frac{t \cdot E}{2(1-\nu^2)} \cdot 10^{-8} \cdot \begin{bmatrix} \left(\frac{x_{23}}{4A}\right)^2 & \frac{x_{23} \cdot y_{23}}{(4A)^2} & -\frac{x_{23}}{12A} & \frac{x_{23} \cdot x_{31}}{(4A)^2} & \frac{x_{23} \cdot y_{31}}{(4A)^2} & -\frac{x_{23}}{12A} & \frac{x_{23} \cdot x_{12}}{(4A)^2} & \frac{x_{23} \cdot y_{12}}{(4A)^2} & -\frac{x_{23}}{12A} \\ \left(\frac{y_{23}}{4A}\right)^2 & -\frac{y_{23}}{12A} & \frac{y_{23} \cdot x_{31}}{(4A)^2} & \frac{y_{23} \cdot y_{31}}{(4A)^2} & -\frac{y_{23}}{12A} & \frac{y_{23} \cdot x_{12}}{(4A)^2} & \frac{y_{23} \cdot y_{12}}{(4A)^2} & -\frac{y_{23}}{12A} \\ \frac{1}{6} & -\frac{x_{31}}{12A} & -\frac{y_{31}}{12A} & \frac{1}{12} & -\frac{x_{12}}{12A} & -\frac{y_{12}}{12A} & \frac{1}{12} \\ \left(\frac{x_{31}}{4A}\right)^2 & \frac{x_{31} \cdot y_{31}}{(4A)^2} & -\frac{x_{31}}{12A} & \frac{x_{31} \cdot x_{12}}{(4A)^2} & \frac{x_{31} \cdot y_{12}}{(4A)^2} & -\frac{x_{31}}{12A} \\ \left(\frac{y_{31}}{4A}\right)^2 & -\frac{y_{31}}{12A} & \frac{y_{31} \cdot x_{12}}{(4A)^2} & \frac{y_{31} \cdot y_{12}}{(4A)^2} & -\frac{y_{31}}{12A} \\ \text{SYM} & & \frac{1}{6} & -\frac{x_{12}}{12A} & -\frac{y_{12}}{12A} & \frac{1}{12} \\ \left(\frac{x_{12}}{4A}\right)^2 & \frac{x_{12} \cdot y_{12}}{(4A)^2} & -\frac{x_{12}}{12A} \\ \left(\frac{y_{12}}{4A}\right)^2 & -\frac{y_{12}}{12A} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Avec

$x_i$  et  $y_i$  : coordonnées cartésiennes des nœuds  $i$  ;     $x_{ij} = x_j - x_i$  ;     $y_{ij} = y_j - y_i$

A : aire de l'élément

t : Epaisseur de l'élément

E : Module de Young

$\nu$  : coefficient de poisson

### 3.3.2 – Elément membranaire $T_{43}$

#### 3.3.2.1 - Caractéristiques

Cet élément de membrane, baptisé  $T_{43}$  n'est autre que l'élément de membrane triangulaire développé par [HIM08] avec ses quatre nœuds et ses trois degrés de

liberté par nœud (les deux translations U et V et la rotation autour de la normale (« drilling rotation »)  $\theta_z$ ), formulé sur la base de l'approche en déformation.

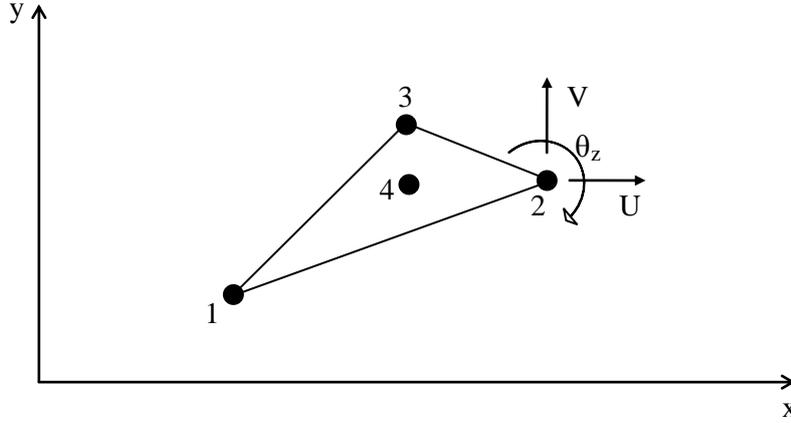


Figure 10. Élément T<sub>43</sub> ; Triangle avec quatre nœuds et trois degrés de liberté par nœud (deux translations U et V et la rotation  $\theta_z$ )

Cet élément a été développé sur la base des éléments suivants :

\* Cinématique de base :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \quad (3.70)$$

$$\theta_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (3.71)$$

\* Champs des déplacements :

$$\begin{cases} U = a_1 - a_3 \cdot y + a_4 \cdot x + a_5 \cdot y + a_6 \cdot x \cdot y + a_9 \cdot y^2 + a_{10} \cdot x \cdot y^2 + a_{11} \cdot x^2 \cdot y^3 \\ V = a_2 + a_3 \cdot x + a_5 \cdot x + a_7 \cdot y + a_8 \cdot x \cdot y - a_{10} \cdot y \cdot x^2 - a_{11} \cdot y^2 \cdot x^3 + a_{12} \cdot x^2 \\ \theta_z = a_3 - a_6 \cdot \frac{x}{2} + a_8 \cdot \frac{y}{2} - a_9 \cdot y - 2a_{10} \cdot x \cdot y - 3a_{11} \cdot x^2 \cdot y^2 + a_{12} \cdot x \end{cases} \quad (3.72)$$

\* Matrice des coordonnées nodales :

$$[f(x, y)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & y & x \cdot y & 0 & 0 & y^2 & x \cdot y^2 & x^2 \cdot y^3 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 & x & 0 & y & x \cdot y & 0 & -y \cdot x^2 & -y^2 \cdot x^3 & x^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{x}{2} & 0 & \frac{y}{2} & -y & -2x \cdot y & -3x^2 \cdot y^2 & x \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

$$\{q^e\} = \begin{bmatrix} [f(x_1, y_1)] \\ [f(x_2, y_2)] \\ [f(x_3, y_3)] \\ [f(x_4, y_4)] \end{bmatrix} \{a_i\} \quad (3.74)$$

Avec,  $\{q^e\}^T = \langle u_1, v_1, \theta_{z1}, u_2, v_2, \theta_{z2}, u_3, v_3, \theta_{z3}, u_4, v_4, \theta_{z4} \rangle$

$\{a_i\}^T = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12} \rangle$

$$[A] = \begin{bmatrix} [f(x_1, y_1)] \\ [f(x_2, y_2)] \\ [f(x_3, y_3)] \\ [f(x_4, y_4)] \end{bmatrix} : \text{matrice des coordonnées nodales.}$$

Le développement de la matrice des coordonnées nodales pour l'élément fini « T\_43 » est détaillé en annexe.

\* *Matrice des coordonnées nodales :*

$$\{a_i\} = [A]^{-1} \{q^e\} \quad (3.75)$$

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ \theta_z(x, y) \end{Bmatrix} = [f(x, y)][A]^{-1} \{q^e\} \quad (3.76)$$

dans laquelle,  $[N] = [f(x, y)][A]^{-1}$  représente la matrice des fonctions d'interpolation  $N_i$

\* *Matrice des déformations :*

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \quad (3.77)$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & y^2 & 2.x.y^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & -x^2 & -2.y.x^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & x & 0 & y & 2.y & 0 & 0 & 2.x \end{bmatrix} \{a_i\} \quad (3.78)$$

Avec,  $\{a_i\}^T = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12} \rangle$

Ainsi, la matrice de déformation est donnée comme suit :

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & y^2 & 2.x.y^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & -x^2 & -2.y.x^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & x & 0 & y & 2.y & 0 & 0 & 2.x \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

\* *Matrice de rigidité :*

Le travail virtuel intérieur, élémentaire discrétisé est donné par l'expression :

$$(\delta W_{int})^e = \int_{V^e} \delta \{\epsilon\}^T \cdot [\sigma] dV^e \quad (3.80)$$

Sachant que :  $\{\varepsilon\} = [N] \{q^e\} = [Q(x, y)] [A]^{-1} \{q^e\}$  (3.81)

Et que :  $\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$  (3.82)

Et en remplaçant dans l'expression (3.80)  $\{\varepsilon\}$  et  $\{\sigma\}$  par leurs valeurs données, respectivement dans les équations (3.81) et (3.82), on obtient :

$$(\delta W_{int})^e = \delta \{q^e\}^T \int_{V^e} [Q(x, y)]^T \cdot [A^{-1}]^T \cdot [D] \cdot [Q(x, y)] [A]^{-1} \{q^e\} dV^e \quad (3.83)$$

Ainsi, pour un élément d'épaisseur  $t$  constante, la matrice de rigidité élémentaire tirée de l'expression (3.83) est la suivante :

$$[K^e] = t \cdot \int_S [Q(x, y)]^T [A^{-1}]^T \cdot [D] \cdot [Q(x, y)] [A]^{-1} dS \quad (3.84)$$

L'expression (3.84) peut, s'écrire :

$$[K^e] = t \cdot [A^{-1}]^T \int_S [Q(x, y)]^T [D] \cdot [Q(x, y)] dS \cdot [A]^{-1} = t \cdot [A^{-1}]^T [K_o] \cdot [A]^{-1} \quad (3.85)$$

L'évaluation de l'expression  $[K_o] = \int_S [Q(x, y)]^T [D] \cdot [Q(x, y)] dS$  est établie par intégration analytique des différents éléments du produit matriciel  $[Q(x, y)]^T [D] \cdot [Q(x, y)]$  dont les composantes se présentent généralement sous la forme  $H_{\alpha\beta} = C \cdot x^\alpha \cdot y^\beta$ .

Le développement de la matrice  $[K_o]$  est donné en annexe.

Enfin la matrice de rigidité élémentaire à prendre en considération au niveau de l'assemblage et de la construction de la matrice de rigidité globale de la structure, est celle obtenue après condensation de la matrice  $[K^e]$ . Cette condensation statique concerne les degrés de liberté relatifs au nœud central.

### 3.4 - Formulation des éléments nouveaux de coque

Dans ce paragraphe on va développer la formulation des éléments de coque dont les matrices de rigidité élémentaires sont obtenues en superposant la matrice prenant en compte les effets de flexion à une matrice prenant en compte les effets de membrane.

Les éléments considérés sont ceux développés précédemment :

- Utilisation des éléments *T42\_ K<sub>1eta</sub>* ou *T43*, pour ce qui est des rigidités prenant en compte les effets de membrane,
- Utilisation de l'élément *Himeur*, pour ce qui de la rigidité prenant en compte les effets de flexion sans cisaillement transversal (pour la construction des éléments de coque mince),
- Utilisation de l'élément *Pep43*, pour ce qui de la rigidité prenant en compte les effets de flexion avec cisaillement transversal (pour la construction des éléments de coque épaisse),

La combinaison de tous ces éléments permet de définir quatre éléments de coque :

## Chapitre 03 : Développement d'éléments de coques à base triangulaire

\* Deux éléments destinés pour discrétiser les structures épaisses ayant des comportements membranaires dominants mais qui sont également bien adaptés au calcul des structures minces. Il s'agit de :

- l'élément de coque baptisé « **C.ep43** », dont la matrice de rigidité est structurée autour de celles des éléments de plaque « *Pep43* » et de membrane « *T43* ».
- l'élément de coque baptisé « **C.ep42** », dont la matrice de rigidité est structurée autour de celles des éléments plaque épaisse « *Pep43* » et de membrane « *T42\_K<sub>teta</sub>* ».

\* Deux éléments destinés pour discrétiser les structures minces ayant des comportements flexionnels dominants. Il s'agit de :

- l'élément de coque baptisé « **C.mi43** », dont la matrice de rigidité est structurée autour de celles des éléments de plaque mince « *HIMEUR* » et de membrane « *T43* ».
- l'élément de coque baptisé « **C.mi42** », dont la matrice de rigidité est structurée autour de celles des éléments de plaque mince « *HIMEUR* » et de membrane « *T42\_K<sub>teta</sub>* ».

Les principes de la démarche adoptée se présentent comme suit :

\* Approximation de la géométrie réelle par des facettes planes, donc les courbures sont négligées sur l'élément. Ceci permet d'éviter le blocage de membrane.

\* Utilisation d'un élément de plaque en membrane et un élément de plaque en flexion : les éléments nouveaux de coque développés sont construits comme suit :

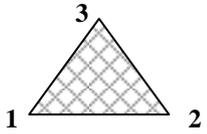
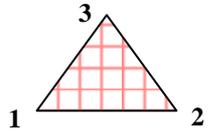
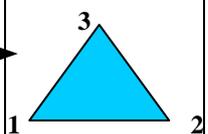
	+		⇒	
Élément de membrane		Élément de flexion		Élément de coque
<b>9 DDL</b>		<b>9 DDL</b>		<b>18 DDL</b>
$\{u_1 \ v_1 \ \theta_{z1} \ u_2 \ v_2 \ \theta_{z2} \ u_3 \ v_3 \ \theta_{z3}\}^T$		$\{w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ w_3 \ \theta_{x3} \ \theta_{y3}\}^T$		
<i>T43</i>		<i>Pep43</i>		<b>C.ep43</b>
<i>T42_K<sub>teta</sub></i>		<i>Pep43</i>		<b>C.ep42</b>
<i>T43</i>		<i>HIMEUR</i>		<b>C.mi43</b>
<i>T42_K<sub>teta</sub></i>		<i>HIMEUR</i>		<b>C.mi42</b>

Figure 11. Modes de construction des éléments nouveaux de coque

L'élément de coque peut avoir une orientation quelconque dans le repère global XYZ. Par contre l'élément de plaque est défini dans un repère local xyz

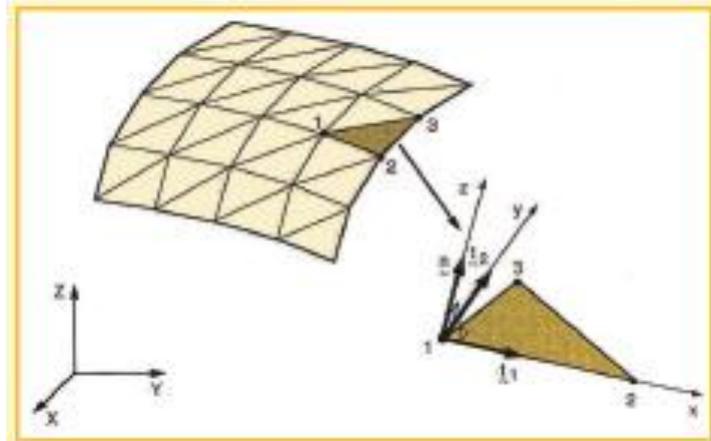


Figure 12. L'élément de plaque par rapport aux deux repères (global et local)

\* Le passage du repère local au repère global est établi par le biais de la matrice de rotation [Ro] comme suit :

$$\{\delta u\}^T [K_e] \{u\} = \{\delta U\}^T [R_o]^T [K_e] [R_o] \{U\} \quad (3.86)$$

\* L'éclatement des termes de rigidité à l'intérieur de la matrice de rigidité de l'élément de coque (18x18) au niveau élémentaire avant assemblage est schématisé dans la figure 13.

		nœud 1						nœud 2						nœud 3						
		U <sub>1</sub>	V <sub>1</sub>	W <sub>1</sub>	θ <sub>x1</sub>	θ <sub>y1</sub>	θ <sub>z1</sub>	U <sub>2</sub>	V <sub>2</sub>	W <sub>2</sub>	θ <sub>x2</sub>	θ <sub>y2</sub>	θ <sub>z2</sub>	U <sub>3</sub>	V <sub>3</sub>	W <sub>3</sub>	θ <sub>x3</sub>	θ <sub>y3</sub>	θ <sub>z3</sub>	
nœud 1	U <sub>1</sub>	■						■						■						
	V <sub>1</sub>		■						■						■					
	W <sub>1</sub>			■	■	■				■	■	■				■	■	■		
	θ <sub>x1</sub>				■	■					■	■					■	■		
	θ <sub>y1</sub>					■						■	■					■	■	
	θ <sub>z1</sub>						■						■						■	
nœud 2	U <sub>2</sub>							■												
	V <sub>2</sub>								■											
	W <sub>2</sub>									■	■	■					■	■	■	
	θ <sub>x2</sub>										■	■						■	■	
	θ <sub>y2</sub>											■	■						■	■
	θ <sub>z2</sub>												■							■
		S Y M E T R I E																		
nœud 3	U <sub>3</sub>													■						
	V <sub>3</sub>														■					
	W <sub>3</sub>															■	■	■		
	θ <sub>x3</sub>																■	■		
	θ <sub>y3</sub>																	■	■	
	θ <sub>z3</sub>																		■	

Avec :

- Terme de la rigidité membranaire
- Terme de la rigidité flexionnelle

Figure 13. Structure type de la matrice de rigidité de l'élément coque [Ke] au niveau élémentaire construite dans le système d'axes des coordonnées locales

Pour ce qui est des éléments de coque « *C.ep43* » et « *C.mi43* », la difficulté liée à la rigidité suivant  $\theta_z$  est levée dans la formulation de l'élément membranaire en introduisant la rotation autour de la normale « drilling rotation » dans la construction de la matrice de rigidité élémentaire correspondante.

Pour ce qui est des éléments de coque « *C.ep42* » et « *C.mi42* », la difficulté liée à la rigidité suivant  $\theta_z$  est levée dans la formulation de l'élément membranaire en minimisant l'énergie potentielle associée à la rotation.

### 3.5 - Conclusion

Toutes les approches et techniques adoptées et utilisées devront permettre d'apporter des réponses aux problématiques posées dans la modélisation des structures complexes et des coques, notamment en ce qui concerne :

- l'enrichissement de l'interpolation des champs, par conséquent l'amélioration de la solution,
- la résolution des problèmes d'incompatibilité lorsqu'il y a adjonction entre éléments membranaires et éléments flexionnels,
- la résolution du problème du « sixième DDL » rencontré en pratique dans l'analyse des structures combinant des éléments membranaires et des éléments flexionnels.

Il est à noter que tout ce travail de développement a été suivi par un autre de programmation en vue d'intégrer ces éléments nouveaux au code de calcul « Eléments finis » disponible au niveau du Laboratoire de Génie Civil et d'Hydraulique de l'université de Guelma.

Cette programmation, réalisée en langage « Fortran », a consisté à mettre en place un programme de calcul pour ces nouveaux éléments qui prend en charge les différentes approches et les différentes techniques utilisées dans notre développement.



## Validation numérique :

### A – Les éléments membranaires

---

#### 4.1 – Introduction

#### 4.2 – Test de comportement à la flexion avec cisaillement : (*Poutre Cantilever*)

#### 4.3 – Test de comportement à la flexion pure

#### 4.4 – Conclusion :

### B - Les éléments flexionnels

---

#### 4.5 – Introduction

#### 4.6 – flexion sans effet de cisaillement transversal

##### *4.6.1 – Patch-test*

##### *4.6.2 – Poutre console soumise à une charge ponctuelle à son extrémité*

##### *4.6.3 – Plaque carrée isotrope*

##### *4.6.4 – Plaque biaise isotrope*

##### *4.6.5 – Tests de ROBINSON*

#### 4.7 – flexion avec effet de cisaillement transversal

##### *4.7.1 Patch-tests*

##### *4.7.2 - Poutre console*

##### *4.7.3 – Torsion d'une plaque carrée*

##### *4.7.4 – plaque carrée isotrope*

#### 4.8 – Conclusion

### C - Les éléments de coques

---

#### 4.9 – Introduction

#### 4.10 – Cylindre pincé à bords libres

#### 4.11 – Cylindre pincé avec diaphragmes

#### 4.12 – Conclusion



Chapitre 04

**Validation :**

**A – Les comportements membranaires**

**4.1 – Introduction**

Pour valider nos éléments vis-à-vis des comportements membranaires, on a utilisé deux types de test.

- la poutre Cantilever de J.L.Batoz et G.Dhatt [BAT90] pour analyser le comportement de nos éléments vis-à-vis du rythme de convergence vers la solution théorique en utilisant différents types de maillages (réguliers et distordus). Ce test traite des aspects de flexion avec cisaillement transversal.
- l'exemple traité par Ibrahimégovic, Frey et Rebora [IBR93] pour jauger les performances de nos éléments dans le cas des flexions pures.

Il est à noter que l'analyse numérique et les résultats du comportement membranaire pour l'élément *T43* a fait l'objet des travaux de magister (HIM 08). On présente à ce niveau un résumé de ces résultats.

**4.2 – Test de comportement à la flexion avec cisaillement : (Poutre Cantilever)**

Soit une poutre (voir Figure 14) d'élanement  $L/B=100$ , utilisée par J.L.Batoz et G.Dhatt [BAT90] pour étudier l'influence du type de maillage et de la distorsion géométrique des éléments sur les déplacements pour le cas des contraintes planes.

Les autres données du problème sont :  $E = 10^7$  ;  $\nu = 0,30$  ;  $p = 10^4$ .

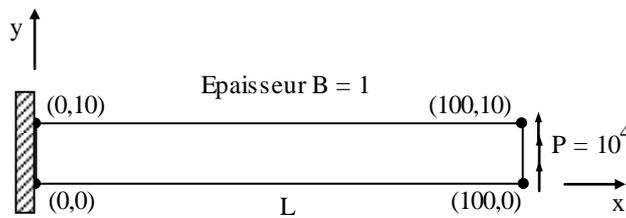


Figure 14. Poutre Console de J.L.Batoz et G.Dhatt [BAT90]

Les types de maillages utilisés sont illustrés dans la figure 15.

Maillage régulier			Maillage distordu	
M1	M2	M3	M4	M5

Figure 15. Type de maillage

Le déplacement  $V$  à l'extrémité (au point de coordonnée  $x=100$  ;  $y=0$ ) est, selon la théorie des poutres (avec prise en charge du cisaillement transversal) :

$$V = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{6PL}{5GA} = 4 + 0.03 = 4.03 \quad (4.01)$$

Pour les aspects de flexion avec prise en charge du cisaillement transversal, le déplacement à l'extrémité libre de la poutre console (point de coordonnées  $x=100$  ;  $y=0$ ) selon les différents cas de maillage sont illustrés par les courbes des figures 16, 17, 18, et 19.

Les résultats obtenus montrent la robustesse et l'excellente performance de ces éléments, ceci tant pour les maillages réguliers que pour les maillages distordus.

Ces deux éléments sont en fait concurrentiels aux éléments performants existants dans la littérature, tant au niveau de leur comportement en membrane qu'au niveau de leur vitesse de convergence.

Pour le cas des deux types de maillage, on observe pour ces éléments, une convergence rapide, monotone par le bas pour le cas de  $T43$  et monotone par le haut pour le cas de  $T42\_K\theta$ .

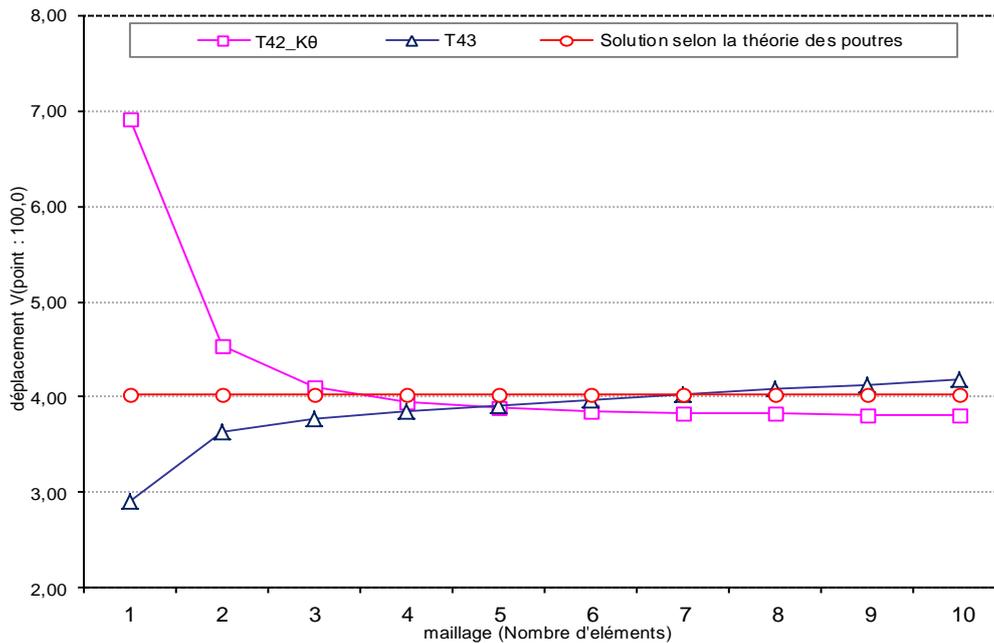


Figure 16. - Test convergence pour un maillage régulier – Déplacement  $V$  de l'extrémité libre

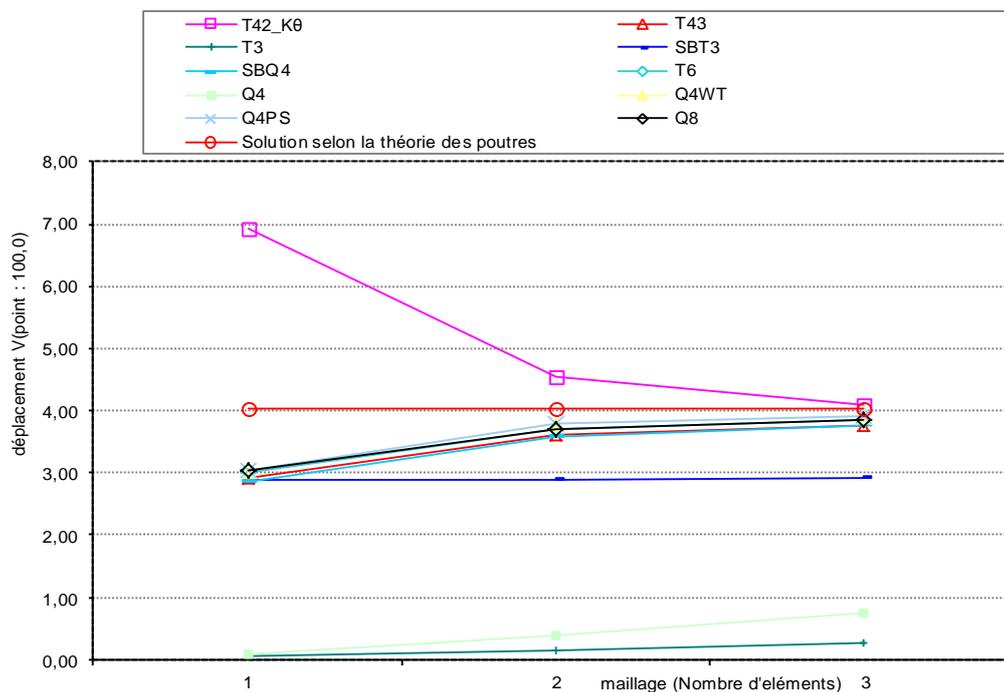


Figure 17. - Comparaison des éléments développés avec d'autres éléments existants dans la littérature, pour des maillages réguliers

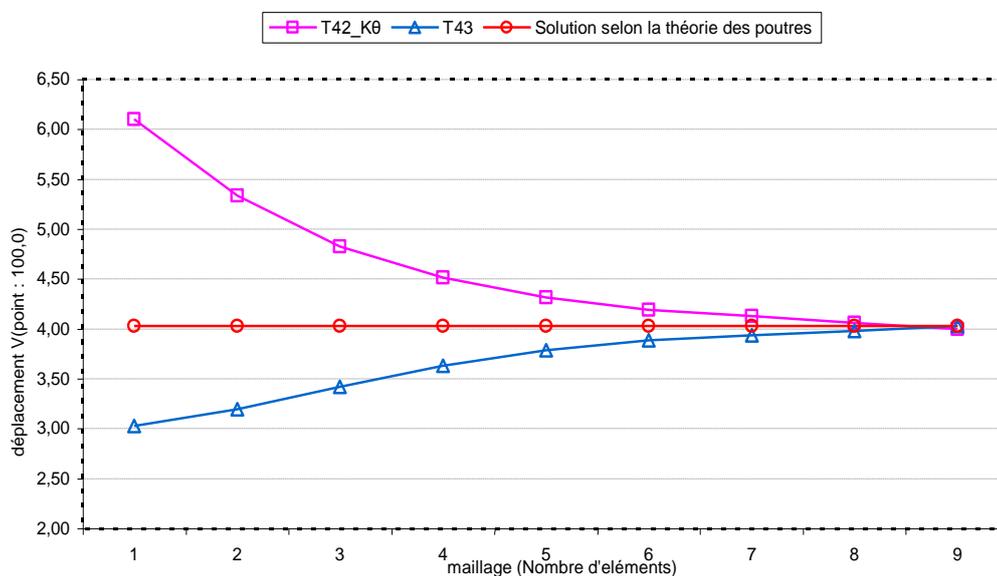


Figure 18. - Test convergence pour un maillage distordu – Déplacement V de l'extrémité libre

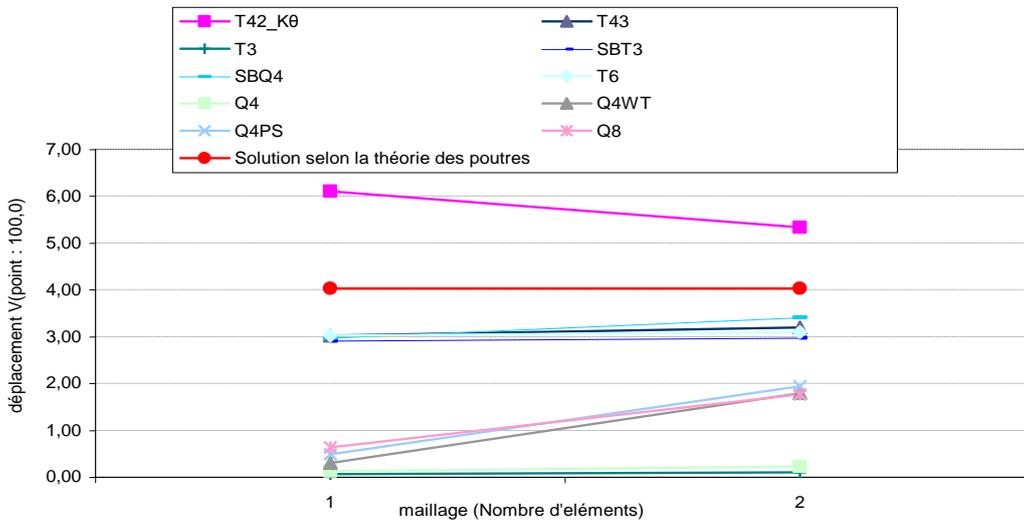


Figure 19. - Comparaison des éléments développés avec d'autres éléments existants dans la littérature, pour des maillages distordus

### 4.3 – Test de comportement à la flexion pure

L'exemple utilisé (Figure 20) est celui traité par Ibrahimégovic, Frey et Reborà dans leur article de synthèse [IBR93] pour montrer la performance des éléments finis à formulation traditionnelle.

Ce test est utilisé pour valider les performances de notre élément pour le cas des sollicitations en flexion pure.

Les caractéristiques mécaniques adoptées sont :

- $E = 1500 \text{ Mpa}$  ;  $\nu = 0,00$ .
- $L = 10\text{m}$  ;  $H = 2\text{m}$  ; épaisseur =  $1\text{m}$ .
- deux cas de chargement :
  - CC1 désigne le cas de chargement 1, lorsque la poutre est sollicitée par le couple de force  $F=10 \text{ KN}$ .
  - CC2 désigne le cas de chargement, lorsque la poutre est sollicitée par le moment  $M=10 \text{ N.m}$ .

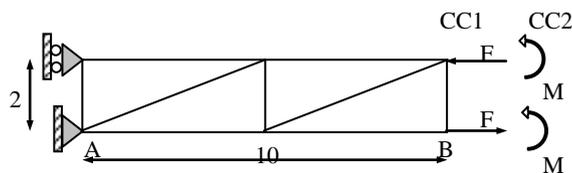


Figure 20. - Flexion Pure

La solution de référence est donnée par Ibrahimégovic, Frey et Reborà dans leur article de synthèse [IBR93].

Les résultats donnés par nos éléments sont illustrés dans le tableau 5.1. On remarque que pour la flexion pure, nos éléments montrent également un comportement performant.

Déplacements	Cas de Charge	Réf,	T42_K0	T43	IBR	SAB	SBT2	SBT2V	SBT3	SBT3V	SBQ4
VB	1	1,0000	1,0000	1,0073	1,0000	1,0003	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	1,0030
	2	1,0000	1,0072	1,0176	1,0100	1,0070	1,0088	1,0098	1,0100	1,0075	1,0070
$\theta_z$	1	0,2000	0,2000	0,2012	0,2000	0,2000	0,2000	0,2000	0,2000	0,2000	0,2000
	2	0,2000	0,2020	0,2084	0,2000	0,2025	0,2033	0,2043	0,2037	0,2020	0,2025

Tableau 2. - Résultats des tests à la flexion pure

#### 4.4 – Conclusion

Les premières conclusions, à tirer de ces tests, dénotent le comportement très performant de nos éléments et leur robustesse pour le traitement des aspects de flexion avec cisaillement transversal et les aspects de flexion pure.

## B – Les comportements flexionnels

#### 4.5 – Introduction

Pour valider nos éléments vis-à-vis des comportements flexionnels, on les a soumis à un ensemble de cas tests. Pour chaque cas test, le résultat obtenu est comparé, d'une part, à la solution de référence correspondante, et d'autre part, à la solution donnée par certains éléments de plaque se trouvant dans la littérature.

D'une manière générale, la démarche adoptée dans notre développement a permis d'aboutir à des éléments finis de plaque concurrentiels, robustes et performants. Ceci apparaît, d'une part, à travers leur stabilité face aux patch-tests et d'autre part à travers leur excellent rythme de convergence vers la solution de référence. Comme ils présentent des comportements performants comparativement à d'autres éléments de plaque triangulaires existants dans la littérature.

#### 4.6 – flexion sans effet de cisaillement transversal

##### 4.6.1 – Patch-test

##### 4.6.1.1 – Modes rigides

Ce test est effectué sur un seul élément isolé. L'objectif recherché est de mesurer la capacité de notre élément à représenter l'état de modes rigides c'est-à-dire de vérifier si un champ de déplacements non nuls produit des déformations nulles.

Pour ce faire on a défini trois vecteurs de déplacements correspondants chacun à chacun des modes rigides :

$$- \{U_{ti}\} = \{1 \ 0 \ 0; \ 1 \ 0 \ 0; \ 1 \ 0 \ 0\} \quad \text{pour le mode de translation rigide,}$$

- $\{U_x z i\} = \{-x_1 \ 1 \ 0; \ -x_2 \ 1 \ 0; \ -x_3 \ 1 \ 0\}$  pour le mode de rotation rigide dans « xz »,
- $\{U_y z i\} = \{-y_1 \ 0 \ 1; \ -y_2 \ 0 \ 1; \ -y_3 \ 0 \ 1\}$  pour le mode de rotation rigide dans « yz ».

Puis on vérifie pour chacun des vecteurs ci-dessus définis l'équation suivante :

$$[K]\{U_i\}=\{0\} \quad (4.02)$$

Les résultats de calcul obtenus montrent que notre élément satisfait bien cette condition quel que soit la distorsion de sa forme géométrique, donc très performant dans la représentation de modes rigides.

#### 4.6.1.2 - Patch-test mécanique

On considère dans ce test un assemblage de quatre éléments triangulaires. Sur un domaine rectangulaire de côtés  $2a= 40$  unités et  $2b = 20$  unités. On impose des sollicitations traduisant l'état des moments (ou de contraintes) constants.

Dans un premier test les sollicitations sur le contour sont en accord avec le champ défini par  $\bar{M}_n = 1$  (voir figure 21a) pour avoir  $\bar{M}_x = \bar{M}_y = 1$  partout (voir figure 22a).

Dans un second test les sollicitations sur le contour sont en accord avec le champ défini par  $\bar{M}_{ns} = 1$  (voir figure 21b) pour avoir  $\bar{M}_{xy} = 1$  partout (voir figure 22b). Comme ces tests ont été effectués pour des épaisseurs variant de 0.01 à 4.0 unités

Les autres données du problème sont définies comme suit :

$$E=1000; \quad \nu=0.3; \quad h=0.01 - 0.04 - 1.0 - 4.0; \quad W1=W2=W3=0$$

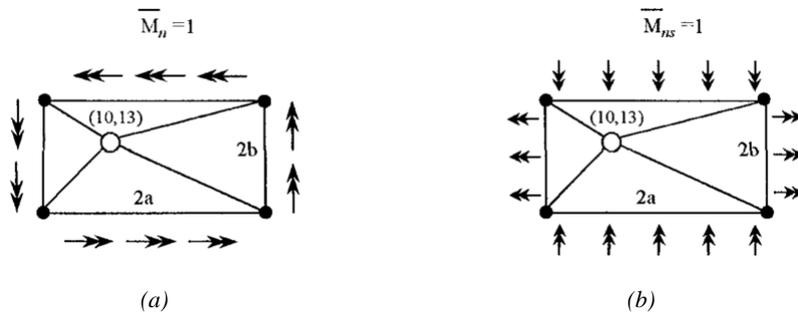


Figure 21. – Sollicitations sur le contour reflétant l'état des contraintes constantes

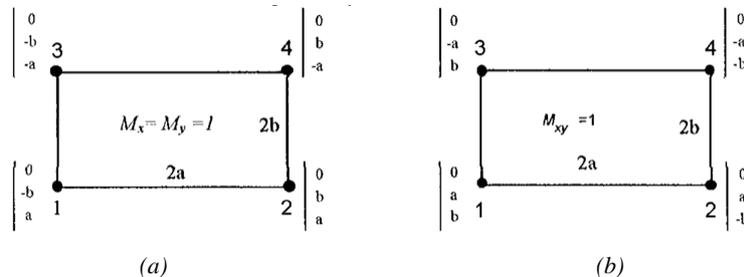


Figure 22. – Charges nodales équivalentes

Après calcul des matrices élémentaires de rigidité, assemblage, assignation des conditions aux limites et résolution on obtient les résultats donnés dans le tableau 3 qui suit. Ces résultats montrent que notre élément est performant face à ces patch-tests.

Epaisseur		h=0.01	h=0.04	h=1.0	h=4.0
$\overline{M}_x = \overline{M}_y = 1$	$M_{x(node\ 05)}$	-0.98	-0.98	-0.98	-0.98
	$M_{y(node\ 05)}$	1	1	1	1
$\overline{M}_{xy} = 1$	$M_{xy(node\ 05)}$	-0.97	-0.97	-0.97	-0.97

Tableau 3. – Résultats des patch-tests mécaniques pour l'élément de plaque de type « Kirchhoff »

4.6.1.3 – torsion d'une plaque carrée

La plaque dans la figure 23 est simplement appuyée ( $W=0$ ) aux coins B, C et D. Une force transversale P est appliquée au coin A.

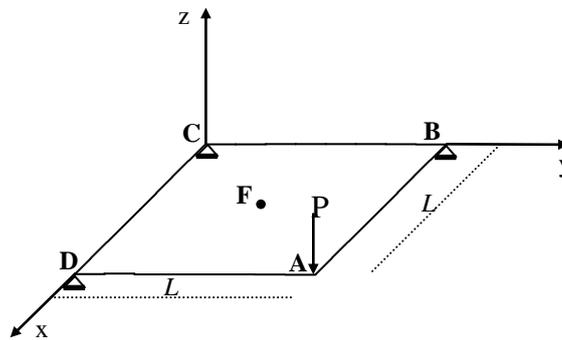


Figure 23. – Torsion d'une plaque carrée

Les caractéristiques géométriques et mécaniques du matériau sont données comme suit :

Longueur du côté	L = 8.0
Epaisseur	h = 1.0
Module d'Young	E = 10000
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$
Chargement	P = 5

Ce problème traité par [YUA88], [CLO65] et [BAT80] pour l'analyse d'autres éléments finis, dans l'évaluation de la capacité de notre élément à représenter l'état des torsions constantes. La solution exacte donnée par la théorie des plaques minces se présente comme suit :

$W_A$ (coin A)	0.2496
$W_F$ (centre F de la plaque)	0.0624
$M_X$ (Partout dans la plaque)	0.0
$M_Y$ (Partout dans la plaque)	0.0
$M_{XY}$ (centre F de la plaque)	2.5

Les résultats des déplacements et des moments obtenus par l'élément *Himeur*, sont comparés à ceux d'autres éléments dans le tableau 4.

Type d'élément	Déplacement "W"		Moments dans la plaque	
	Point A	Point F	$M_x$ et $M_y$	$M_{xy}$
Himeur (2x2)	<b>0.24960</b>	<b>0.06240</b>	<b>0.0</b>	<b>2.5</b>
SBRP (2x2)	0.24960	0.06240	0.0	2.5
Réf. [YUA 88] (2x2)	0.24960	0.06240	0.0	2.5
ACM [YUA 88] (8x8)	0.24972	0.06244	0.0	2.5
HCT [CLO 65] (8x8)	0.25002	0.06254	0.0	2.5
DKT [BAT 80]	0.24960	0.06240	0.0	2.5
HSM [BAT 80]	0.24960	0.06240	0.0	2.5
Solution exacte (Thin theory)	<b>0.24960</b>	<b>0.06240</b>	<b>0.0</b>	<b>2.5</b>

Tableau 4. – Résultats de la simulation de la torsion d'une plaque carrée.

Ces résultats montrent que notre élément est performant vis-à-vis de ce test.

#### 4.6.2 – Poutre console soumise à une charge ponctuelle à son extrémité

Ce test permet de vérifier le comportement de notre élément en flexion simple en fonction de l'élanement (rapport  $L/h$ ). En effet dans ce cas test la flexion est dominante devant le cisaillement pour des rapports  $L/h$  élevés. A l'extrémité libre, la poutre est soumise selon la direction "Oz", à une charge ponctuelle d'intensité  $P=0.1$ . On simule un encastrement parfait à l'autre extrémité (voir Figure 24).

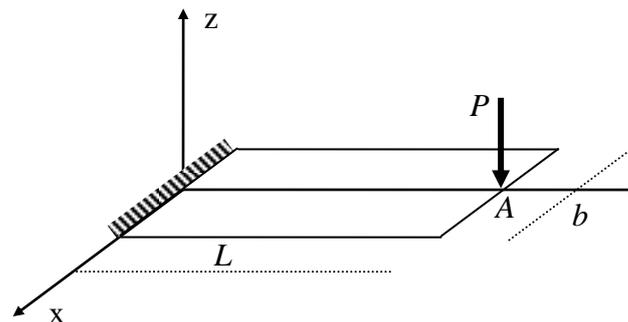


Figure 24. – Poutre –Console soumise à une charge ponctuelle

Les données géométriques, mécaniques et de chargement sont données dans le tableau 5.

Longueur	$L=10,0$
Largeur	$b=1,0$
Epaisseur	$h=(L/100 \approx L)$
Module d'Young	$E=1,2 \times 10^6$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0,0$
Chargement	$P=0,1$

Tableau 5. – Données géométriques, mécaniques et de chargement pour la poutre console en flexion simple

Pour voir l'influence du cisaillement transversal sur le comportement de notre élément, on simule, dans ce cas test, le déplacement "w" du point "A" selon la direction "Oz" pour plusieurs valeurs du rapport "L/h". On compare ensuite les résultats, d'une part à la solution théorique donnée par la formule (4.03) de la théorie des poutres et d'autre part, au comportement d'autres éléments triangulaires traités par

Guenfoud [GUE93] (DSTM, ANST6, DKTM). La solution théorique du déplacement "w" du point "A" selon la direction "Oz" est donnée comme suit :

$$w_i = \frac{4PL^3}{Ebh^3} \left[ 1 + \frac{1}{2k} \left( \frac{h}{l} \right)^2 \right] \quad \text{avec } k=5/6 \quad (4.03)$$

Les résultats de simulation du point "A" suivant la direction "Oz" sont donnés dans le graphe de la figure 25 et le tableau 6. Le graphe de la figure 25 représente le déplacement normalisé du point "A" en flexion simple en fonction du rapport "L/h" et la comparaison du comportement de l'élément HIMEUR par rapport à la solution théorique de référence. On remarque que notre élément est très performant pour des élancements importants (rapport L/h > 10). Il est à noter que sa convergence vers la solution est obtenue avec un maillage composé de dix (10) éléments.

Le tableau 6 récapitule aussi les résultats donnés par d'autres éléments triangulaires existants. On remarque là également que notre élément est robuste devant les éléments DSTM, DKTM, [GUE93] surtout pour des rapports L/h > 3, puisque son comportement est plus proche de la solution théorique de référence. Comme il est très concurrentiel face à l'élément ANST6 [GUE93].

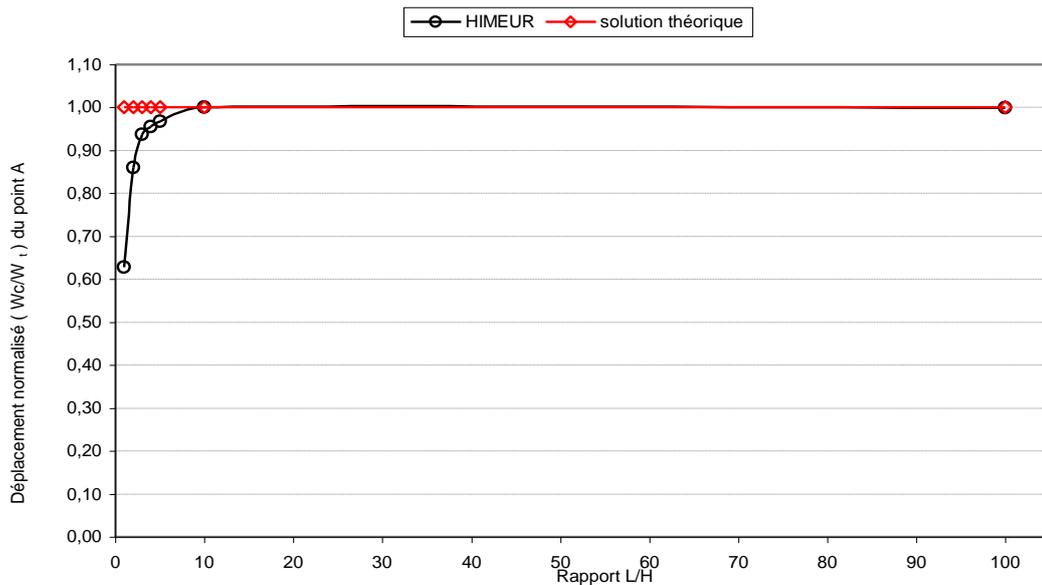


Figure 25. – Déplacement normalisé du point A en flexion simple

L/h	DSTM	ANST6	DKTM	HIMEUR	Solution théorique
1	5,1x10 <sup>-7</sup>	5,3x10 <sup>-7</sup>	3,1x10 <sup>-7</sup>	3,3x10 <sup>-7</sup>	5,3x10 <sup>-7</sup>
2	2,9x10 <sup>-6</sup>	3,0x10 <sup>-6</sup>	2,5x10 <sup>-6</sup>	2,7x10 <sup>-6</sup>	3,1x10 <sup>-6</sup>
3	9,0x10 <sup>-6</sup>	9,6x10 <sup>-6</sup>	8,4x10 <sup>-6</sup>	9,0x10 <sup>-6</sup>	9,6x10 <sup>-6</sup>
4	2,0x10 <sup>-5</sup>	2,2x10 <sup>-5</sup>	2,0x10 <sup>-5</sup>	2,1x10 <sup>-5</sup>	2,2x10 <sup>-5</sup>
5	4,0x10 <sup>-5</sup>	4,2x10 <sup>-5</sup>	3,9x10 <sup>-5</sup>	4,1x10 <sup>-5</sup>	4,3x10 <sup>-5</sup>
10	-	-	-	3,3x10 <sup>-4</sup>	3,3x10 <sup>-4</sup>
100	0,31329	-	0,31327	0,33303	0,3333

Tableau 6. – Déplacement du point A suivant l'axe "Oz" de la poutre console en flexion simple

#### 4.6.3 – Plaque carrée isotrope

Cet exemple a été repris par de nombreux auteurs dans la littérature notamment [BAT90]. Il s'agit d'une plaque carrée isotrope de côté  $a$  et d'épaisseur  $h$ . On simule dans ce travail plusieurs cas de figure en fonction des conditions aux limites de la plaque et du type de chargement. Il s'agit dans ce cas test d'étudier le comportement de l'élément *HIMEUR* en considérant différents maillages et plusieurs rapports " $a/h$ ".

Les résultats concernent le déplacement " $w$ " du point central (C) de la plaque, qui est comparé aux solutions analytiques données pour les plaques minces relatives à chaque cas de figure. Comme on procèdera à des comparaisons avec des éléments triangulaires existants dans la littérature, notamment les éléments SRI [SAB00], C<sup>0</sup>[BEL84], TRUMP (Argyris), DKT [BAT90].

##### 4.6.3.1 – Plaque carrée isotrope sollicitée par une charge ponctuelle appliquée en son extrémité

###### 4.6.3.1.1 – Plaque carrée isotrope simplement appuyée sur ses quatre côtés

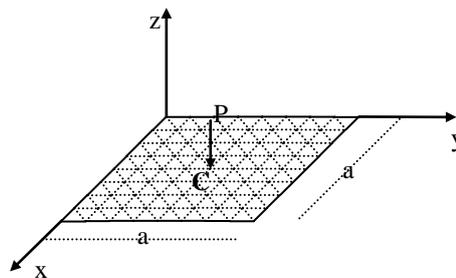


Figure 26. – Plaque carrée isotrope soumise à une charge ponctuelle appliquée en son centre

Les données géométriques et mécaniques sont données dans le tableau 7.

Longueur du côté	$a = 2,0\text{m}$
Épaisseur	$h = 0,03\text{m}$
Module d'Young	$E = 210 \times 10^9 \text{N/m}^2$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0,3$
Chargement	$P = 800 \text{ N}$

Tableau 7. – Données géométriques, mécaniques et de chargement pour la plaque carrée isotrope

La solution théorique du déplacement " $w$ " du point "C" le long de la direction " $Oz$ " est donnée par [BAT90] comme suit :

$$w_t = 0.0116 \frac{Pa^2}{D} \quad (4.04)$$

avec 
$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Les résultats du déplacement du point "C" suivant la direction " $Oz$ " et selon l'intensité du maillage sont donnés dans le graphe de la figure 27 et le tableau 8.

La figure 27 représente l'erreur relative en pourcentage du déplacement du point "C" selon différents maillages. On remarque la bonne performance de notre élément, puisque il converge rapidement vers la solution analytique de référence.

Le tableau 8 regroupe les valeurs du déplacement normalisé " $W_c/W_t$ " du point C de quelques éléments triangulaires de plaque mince, pour différents maillages et plusieurs rapports " $a/h$ ". Celui-ci met en exergue la qualité des résultats obtenus par l'élément *HIMEUR* devant ces éléments. Là aussi notre élément est le plus robuste comparativement aux éléments SRI [SAB00],  $C^0$  [BEL84], TRUMP (Argyris), ceci quel que soit le maillage ou le rapport « $a/h$ ». Comme il est très concurrentiel face à l'élément DKT [BAT90].

Maillage	4 x 4			6 x 6			8 x 8		
	a/h	100	1000	10000	100	1000	10000	100	1000
SRI	0,070	0,9E-3	0,9E-5	0,134	0,0018	1,9E-5	0,207	0,0031	3,1E-5
$C^0$	0,898	0,382	0,008	0,960	0,781	0,083	0,978	0,916	0,309
TRUMP	1,017	1,016	1,016	1,009	1,007	1,007	1,006	1,004	1,004
DKT	1,003	1,003	1,003	1,002	1,002	1,002	1,001	1,001	1,001
HIMEUR	0,984	0,984	0,984	0,997	0,997	0,997	1,000	1,000	1,000

Tableau 8. – Déplacement normalisé " $W_c/W_t$ " du point C pour une plaque carrée isotrope, simplement appuyée sur ses quatre côtés, avec charge concentrée au point C –

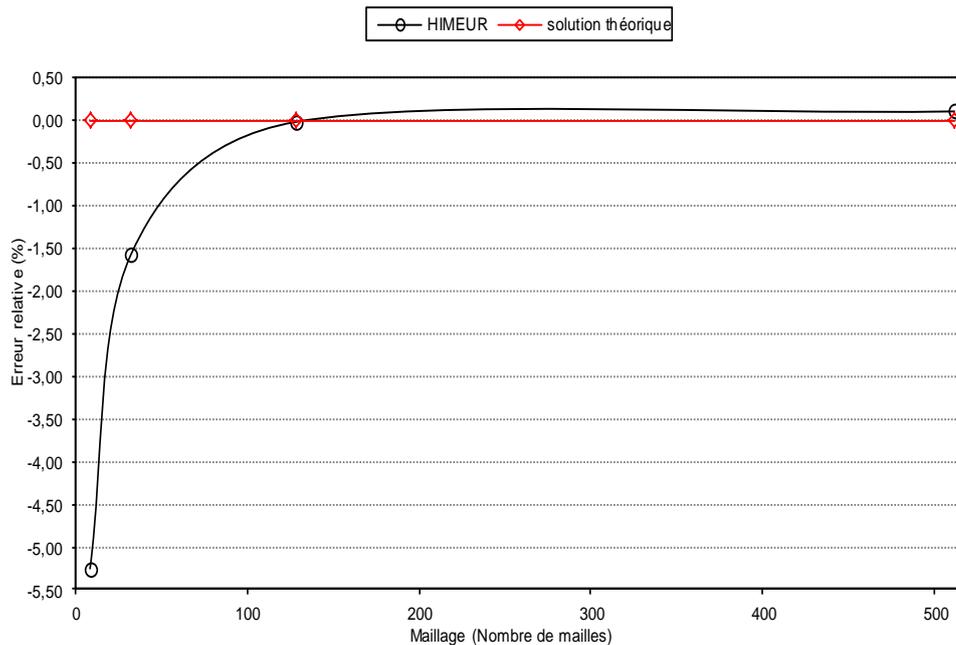


Figure 27. – Erreur relative (%) du déplacement du point C pour une plaque carrée isotrope, simplement appuyée sur ses quatre côtés, avec charge concentrée au point C –

#### 4.6.3.1.2 – Plaque carrée isotrope encastree sur ses quatre côtés

On reprend pour ce cas test l'exemple de la figure 26 avec les mêmes données géométriques et mécaniques du matériau, mais en simulant un encastrement parfait de la plaque sur ses quatre côtés. La solution théorique du déplacement " $w$ " du point "C" le long de la direction " $Oz$ " est donnée par [BAT90] comme suit :

$$w_t = 0.0056 \frac{Pa^2}{D} \quad (4.05)$$

avec 
$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Les résultats du déplacement du point "C" suivant la direction "Oz" selon différents maillages sont donnés dans le graphe de la figure 28.

Cette figure représente, sous forme graphique, le déplacement du point "C" selon différents maillages. Au même titre que les cas tests précédents, notre élément présente, là également de bonnes performances, puisque il converge rapidement vers la solution analytique de référence.

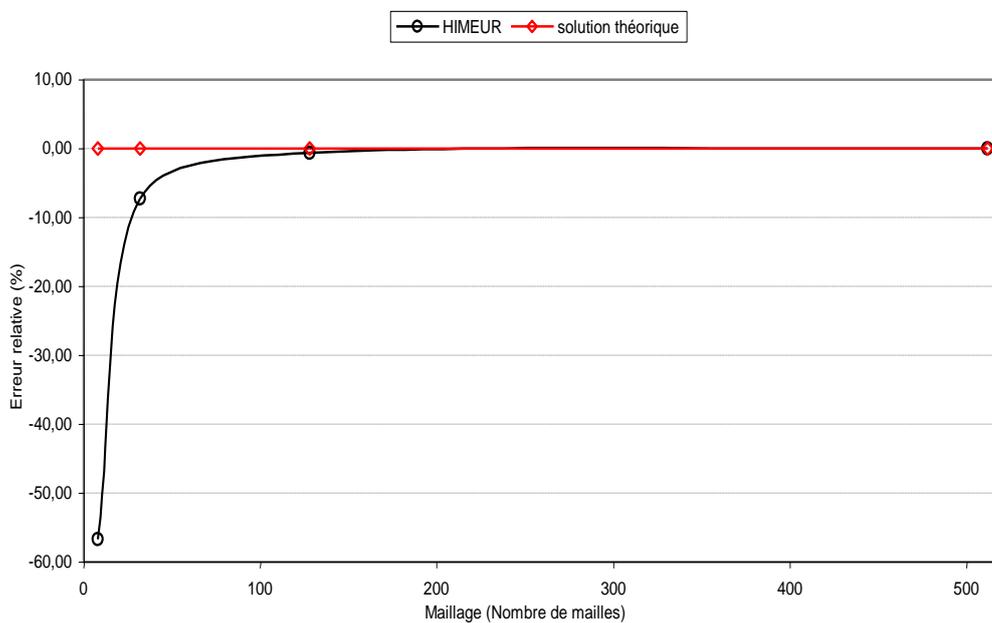


Figure 28. – Erreur relative (%) du déplacement du point C pour une plaque carrée isotrope, encastée sur ses quatre côtés, avec charge concentrée au point C –

#### 4.6.3.2 – Plaque carrée isotrope sollicitée par une charge uniformément répartie

On reprend pour ce cas test l'exemple de plaque de la figure 26 qu'on sollicite par une charge uniformément répartie d'intensité  $q = 60 \text{ T/m}^2$ .

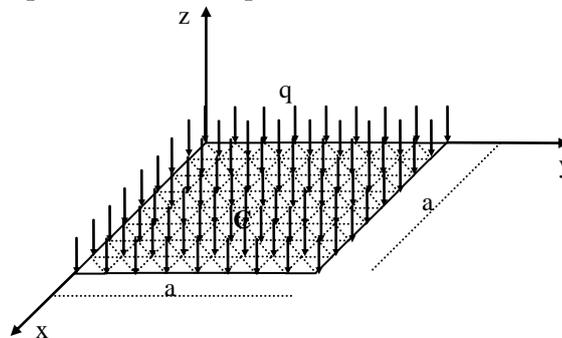


Figure 29. – Plaque carrée isotrope soumise à une charge uniformément répartie

La solution théorique du déplacement "w" du point "C" le long de la direction "Oz" est donnée pour le cas d'une plaque simplement appuyée par la formule (4.06) et pour le cas de la plaque encastree par la formule (4.07) :

$$w_i = 0.004062 \frac{qa^4}{D} \quad (4.06)$$

$$w_i = 0.00126 \frac{qa^4}{D} \quad (4.07)$$

avec 
$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Les résultats de simulation du déplacement du point "C" suivant la direction "Oz" selon différents maillages sont donnés dans les graphes des figures 30 et 31.

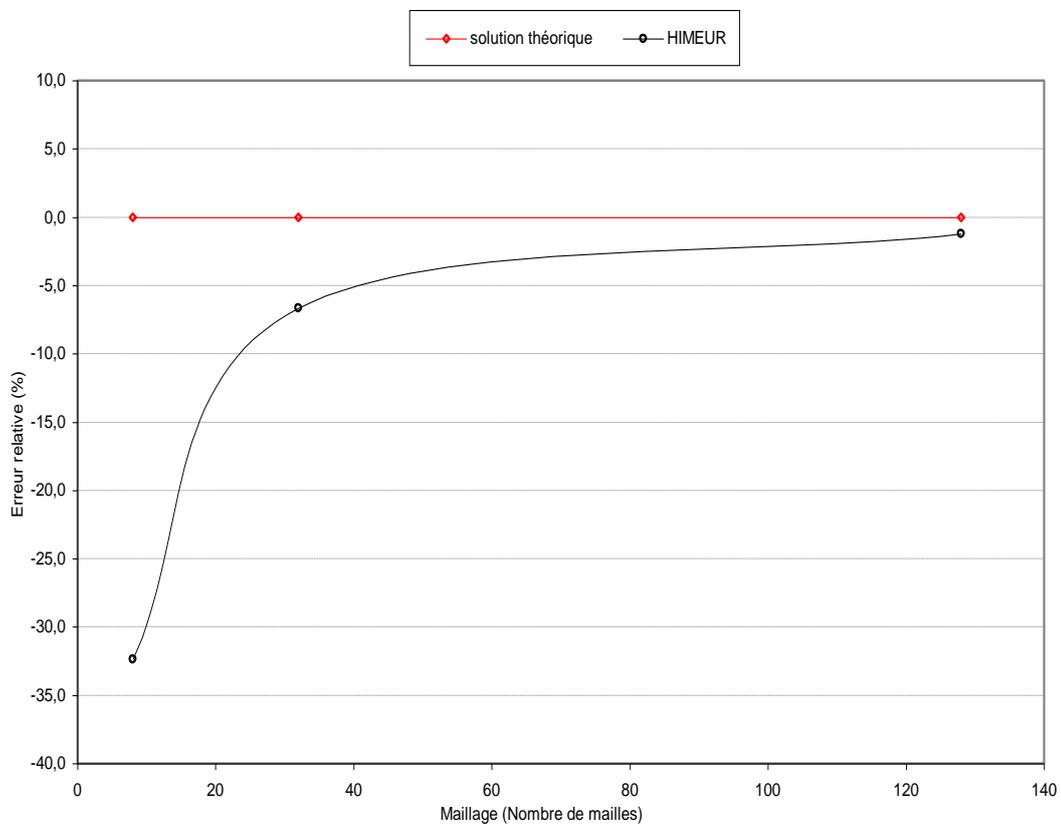


Figure 30. – Erreur relative (%) du déplacement du point C pour une plaque carrée isotrope simplement appuyée sur ses quatre côtés, avec une charge uniformément répartie –

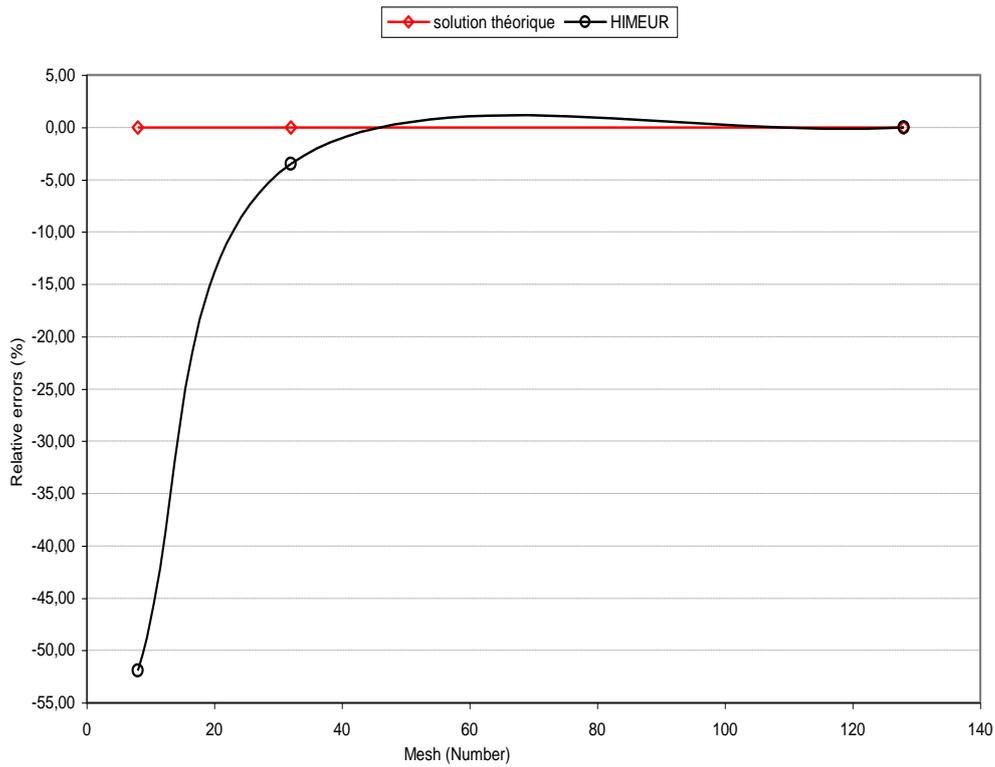


Figure 31. – Erreur relative (%) du déplacement du point C pour une plaque carrée isotrope encastré sur ses quatre côtés, avec une charge uniformément répartie –

Le graphe de la figure 30 regroupe les résultats pour le cas d'une plaque simplement appuyée et le graphe de la figure 31 ceux relatifs à la plaque encastrée sur ses quatre côtés. On remarque que pour les deux cas tests, notre élément se comporte bien, puisque il se caractérise par la rapidité de convergence vers la solution analytique.

#### 4.6.4 – Plaque biaise isotrope

Il s'agit, pour ce test, d'une plaque isotrope biaise (angle  $60^\circ$ ) (figure 32) soumise à une charge uniforme  $p$  ayant deux appuis simples ( $W=0$ ) et deux bords libres.

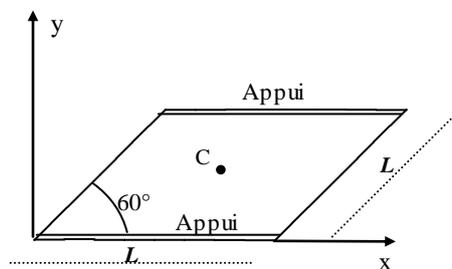


Figure 32. – Plaque isotrope biaise ( $60^\circ$ ) avec bords libres

Les données géométriques et mécaniques sont données dans le tableau 9.

Longueur du côté	L = 100,0
Epaisseur	h = 0,1
Module d'Young	E = 1000
Coefficient de Poisson	$\nu = 0,31$

Tableau 9. – Données géométriques, mécaniques pour la plaque biaise (60°) isotrope

Ce problème, traité par [BAT90] pour l'analyse des éléments quadrilatéraux DSQ et Q4 $\gamma$  est utilisé pour évaluer la convergence de notre élément. Pour ce faire on a considéré des maillages de 2x2, 4x2, 8x2, 16x2 éléments par côté. La solution de référence, obtenue par un schéma de différences finies [RAZ73], est donnée par la formule 4.08.

$$w_{\text{Réf.}} = 0.07945 \frac{P.L^2}{D} \quad (4.08)$$

avec 
$$D = \frac{E.h^3}{12(1-\nu^2)}$$

Les résultats des déplacements obtenus par l'élément *HIMEUR* sont illustrés par le graphe de la figure 33. On y a également, porté pour des fins de comparaison, les résultats donnés par les éléments quadrilatéraux DSQ et Q4 $\gamma$  [BAT90]. On remarque une convergence monotone pour les trois éléments avec une convergence par le haut de l'élément "*HIMEUR*".

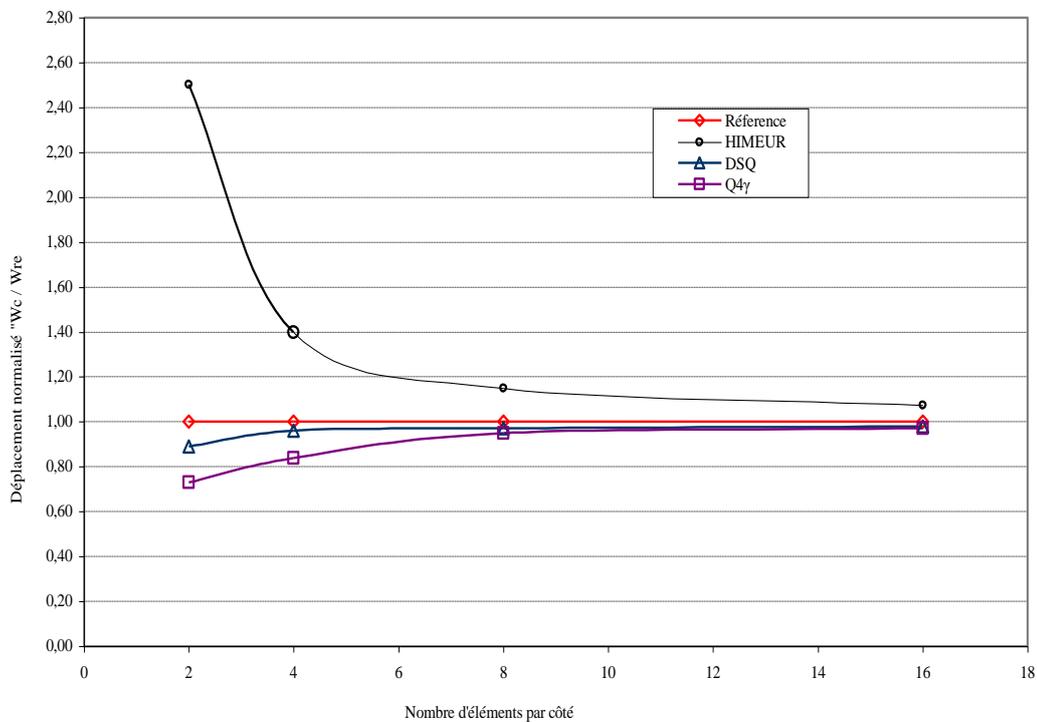


Figure 33. – Déplacement normalisé " $W_c/W_{\text{réf.}}$ " du point central - plaque biaise isotrope avec bords libres

#### 4.6.5 – Tests de ROBINSON

Il s'agit de deux tests proposés par ROBINSON [ROB78] pour étudier le comportement d'un élément triangulaire sollicité en flexion et en torsion gênées. On étudie l'influence du rapport " $L/h$ " (la longueur varie de  $1 \times h$  à  $10000 \times h$ ) sur le déplacement " $W$ " du point "A" pour deux types de sollicitations.

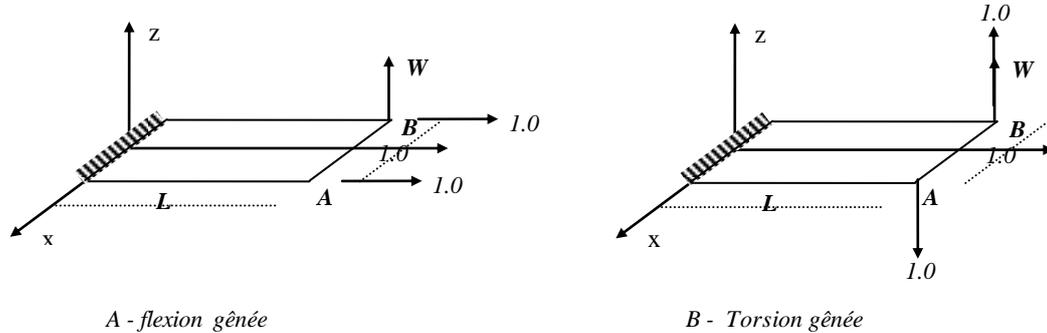


Figure 34. – Poutre – Console soumise aux tests de ROBINSON

Les caractéristiques géométriques et mécaniques du matériau sont données dans le tableau 10.

Longueur du côté	$L = \text{Variable}$
Largeur	$B=1,0$
Épaisseur	$h= 0,05$
Module d'Young	$E=1,0 \times 10^7$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0,25$

Tableau 10. – Données géométriques, mécaniques du matériau pour la poutre-console soumise aux tests de ROBINSON

Le test "A" concerne le comportement de la poutre-console sous l'action de deux couples  $M_y=1.0$  appliquées aux nœuds de son extrémité libre. C'est la flexion gênée.

Le test "B" concerne l'action de deux charges concentrées  $P_z=1.0$  et  $P_z=-1.0$  appliquées respectivement aux mêmes nœuds. C'est la torsion gênée.

La solution de référence (BENCHMARK) relative aux éléments triangulaires est extraite de [GUE90].

Les tableaux 11 et 12 et les graphes des figures 35 et 36 représentent le déplacement " $W$ " du point "A" en fonction du rapport " $L/h$ " et la comparaison du comportement de l'élément HIMEUR par rapport à la solution de référence (BENCHMARK) et aux résultats donnés par d'autres éléments triangulaires existants ANST3 [GUE90], ANST6 [GUE90], HCT, DKT [BAT90].

L'étude détaillée des résultats obtenus met en exergue la bonne performance de l'élément HIMEUR. En effet les résultats enregistrés sont très proches de la solution de référence tant pour la flexion gênée que pour la torsion gênée et ceci quel que soit la longueur " $L$ ".

Il est à noter, que ce résultat n'est obtenu qu'avec un maillage modéré, composé seulement de quatre éléments triangulaires.

Par ailleurs, l'élément *HIMEUR* apparaît plus robuste que tous les éléments pris comme base de comparaison, bien que l'élément *DKT* pour la situation de flexion gênée et à un degré moindre l'élément *ANST3* pour la situation de la torsion gênée, lui sont concurrentiels.

L	ANST3	ANST6	HCT	DKT	HIMEUR	BENCH-MARK
0,05	0,00000174	0,0000064	-	-	0,00000802	-
0,5	0,00087300	0,0011800	-	-	0,00092053	-
1	0,00356000	0,0038100	0,0010520	0,002105	0,00235240	0,0028
2	0,00935000	0,0100000	0,0015790	0,006580	0,00614230	0,0056
3	0,01480000	0,0162000	0,0010520	0,009870	0,00938960	0,0084
4	0,02020000	0,0222000	0	0,013160	0,01215900	0,0112
5	0,02550000	0,0280000	-0,0052600	0,016450	0,01477200	0,0140
6	0,03070000	0,0339000	-0,0018420	0,019740	0,01735700	0,0168
7	0,03600000	0,0397000	-	0,023030	0,01995100	0,0196
8	0,04120000	0,0455000	-0,0028940	0,026320	0,02256200	0,0224
9	0,04600000	0,0513000	-	0,029620	0,02518800	0,0252
10	0,05170000	0,0571000	-0,0044730	0,032900	0,02782800	0,0280
11	-	-	-	0,036190	0,03047800	0,0308
12	-	-	-0,0057890	0,039480	0,03313700	0,0336
25	0,12970000	0,1433000	-	-	0,06805900	-
50	0,25970000	0,2869000	-	-	0,13567000	-
500	2,59850000	2,6540000	-	-	1,35530000	-

Tableau 11. – Test "A" - Flexion Gênée – déplacement "W" du point "A"

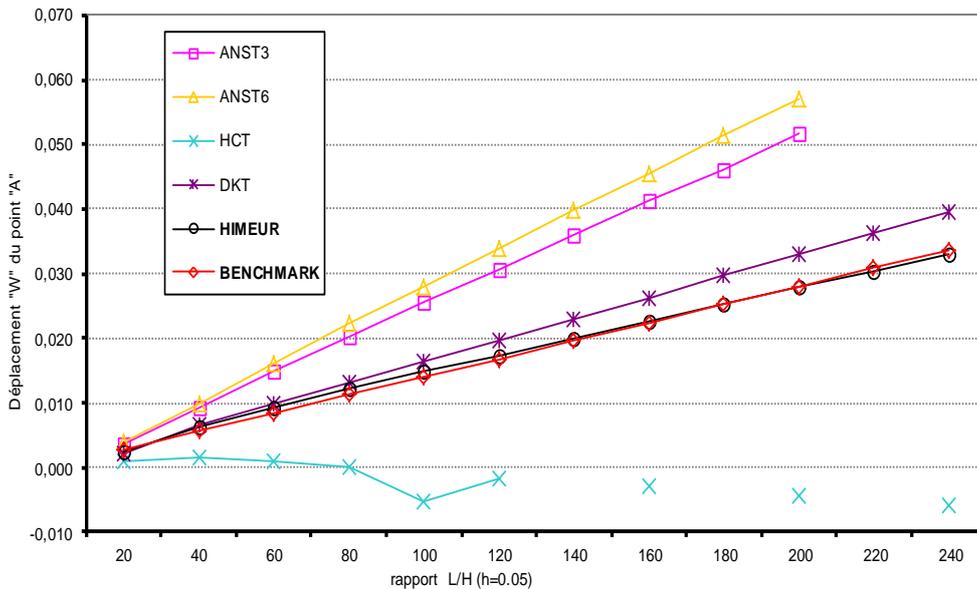


Figure 35. – Test "A" - Flexion Gênée – déplacement "W" du point "A"

L	ANST3	ANST6	HCT	DKT	HIMEUR	BENCH-MARK
0,05	0,00000116	0,00000383	-	-	0,00000100	-
0,5	0,00043800	0,00088300	-	-	0,00045531	-
1	0,00178000	0,00252000	0,0010660	0,001866	0,00186770	0,002666
2	0,00467000	0,00555000	0,0024000	0,004400	0,00550220	0,005333
3	0,00743000	0,00847000	0,0030660	0,006800	0,00840630	0,007999
4	0,01010000	0,01130000	0,0034660	0,009200	0,01095800	0,010666
5	0,01270000	0,01420000	0,0037330	0,011733	0,01344500	0,013333
6	0,01540000	0,01710000	0,0042666	0,014000	0,01593200	0,015999
7	0,01800000	0,02000000	-	0,016400	0,01842900	0,018666
8	0,02060000	0,02290000	0,0050660	0,018933	0,02093700	0,021333
9	0,02320000	0,02570000	-	0,021333	0,02345500	0,023999
10	0,02580000	0,02860000	0,0061330	0,023600	0,02598100	0,026666
11	-	-	-	0,025866	0,02851200	0,029333
12	-	-	0,0070660	0,028266	0,03104700	0,031999
25	0,06489000	0,07170000	-	-	0,06419500	-
50	0,12986000	0,14350000	-	-	0,12817000	-
500	1,29930000	1,43270000	-	-	1,28090000	-

Tableau 12. – Test "B" - Torsion Gênee – déplacement "W" du point "A"

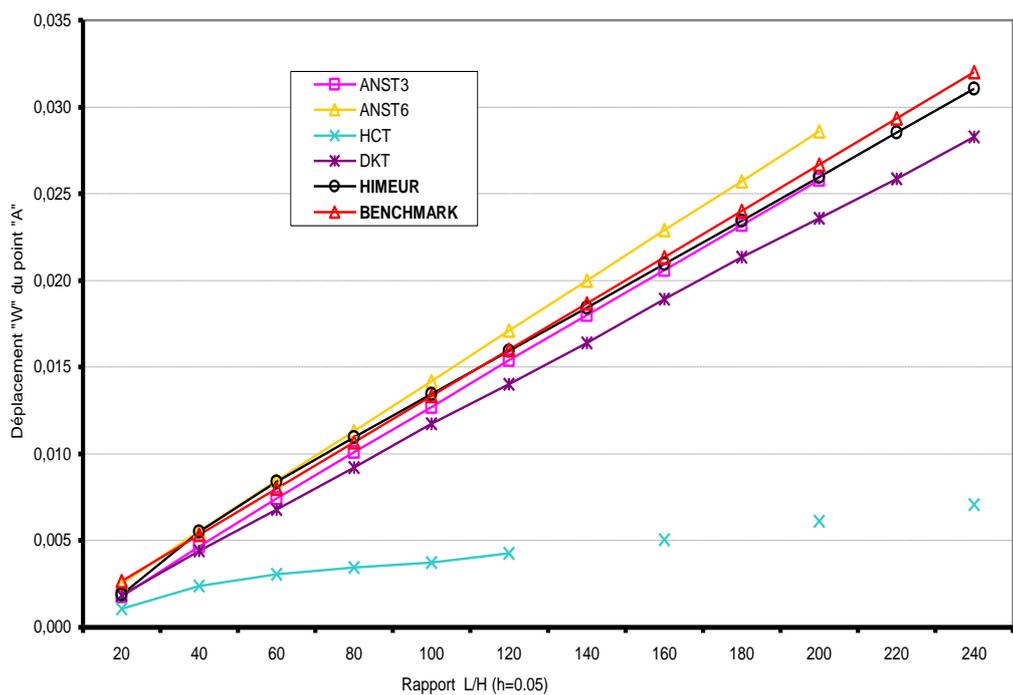


Figure 36. – Test "B" - Torsion Gênee – déplacement "W" du point "A"

4.7 – flexion avec effet de cisaillement transversal

4.7.1 Patch-tests

4.7.1.1 - Modes rigides

Ce test est effectué sur un seul élément isolé. L'objectif recherché est la capacité de notre élément à représenter l'état de modes rigides c'est-à-dire de vérifier si un champ de déplacements non nuls produit des déformations nulles.

Pour ce faire on a défini trois vecteurs de déplacements correspondants chacun à chacun des modes rigides :

- $\{U_{ti}\} = \{1\ 0\ 0; 1\ 0\ 0; 1\ 0\ 0\}$  pour le mode de translation rigide,
- $\{U_{xzi}\} = \{-x_1\ 1\ 0; -x_2\ 1\ 0; -x_3\ 1\ 0\}$  pour le mode de rotation rigide dans « xz »,
- $\{U_{yzi}\} = \{-y_1\ 0\ 1; -y_2\ 0\ 1; -y_3\ 0\ 1\}$  pour le mode de rotation rigide dans « yz ».

Puis on vérifie pour chacun des vecteurs ci-dessus définis l'équation suivante :

$$[K]\{U_i\}=\{0\} \tag{4.09}$$

Les résultats de calcul obtenus montrent que notre élément satisfait bien cette condition quel que soit la distorsion de sa forme géométrique, donc très performant dans la représentation de modes rigides.

4.7.1.2 - Patch-test mécanique

On considère dans ce test un assemblage de quatre éléments triangulaires. Sur un domaine rectangulaire de côtés  $2a= 40$  unités et  $2b = 20$  unités. On impose des sollicitations traduisant l'état des moments (ou de contraintes) constants.

Dans un premier test les sollicitations sur le contour sont en accord avec le champ défini par  $\bar{M}_n = 1$  (voir figure 37a) pour avoir  $\bar{M}_x = \bar{M}_y = 1$  partout (voir figure 38a). Dans un second test les sollicitations sur le contour sont en accord avec le champ défini par  $\bar{M}_{ns} = 1$  (voir figure 37b) pour avoir  $\bar{M}_{xy} = 1$  partout (voir figure 38b). Comme ces tests ont été effectués pour des épaisseurs variant de 0.01 à 4.0 unités. Les autres données du problème sont définies comme suit :

$$E=1000; \quad \nu=0.3; \quad h=0.01 - 0.04 - 1.0 - 4.0; \quad W1=W2=W3=0$$

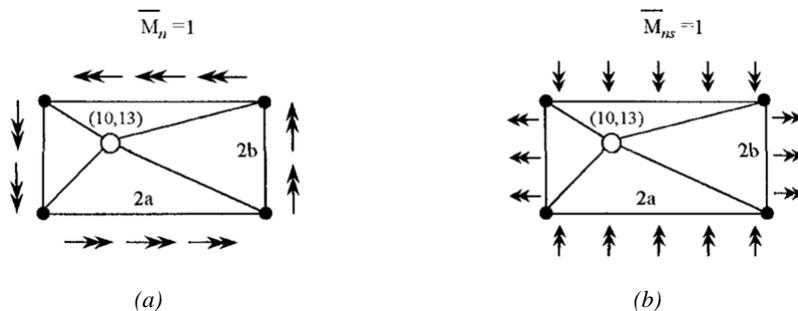


Figure 37. – Sollicitations sur le contour reflétant l'état des contraintes constantes

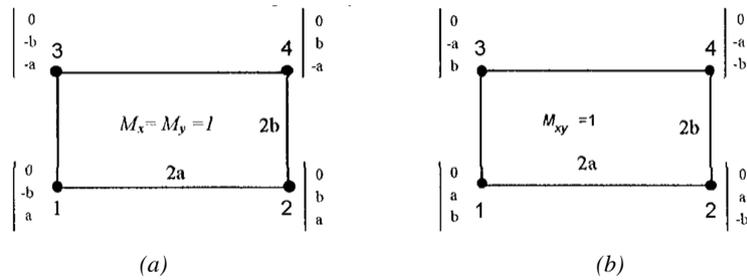


Figure 38. – Charges nodales équivalentes

Après calcul des matrices de rigidité élémentaires, assemblage, assignation des conditions aux limites et résolution on obtient les résultats donnés dans le tableau 13 qui suit. On constate, à travers ces résultats, que notre élément est performant face à ces patch-tests.

Epaisseur		h=0.01	h=0.04	h=1.0	h=4.0
$\overline{M}_x = \overline{M}_y = 1$	$M_{x(node\ 05)}$	-1	-1	-1	-1
	$M_{y(node\ 05)}$	1	1	1	1
$\overline{M}_{xy} = 1$	$M_{xy(node\ 05)}$	-1	-1	-1	-1

Tableau 13. – Résultats des patch-tests mécaniques pour l'élément de plaque de type « Reissner Mindlin »

#### 4.7.2 - Poutre console

Ce test permet de vérifier le comportement de notre élément en flexion simple en fonction de l'élanement (rapport  $L/h$ ). A l'extrémité libre, la poutre est soumise selon la direction "Oz", à une charge ponctuelle d'intensité  $P=0.1$ . On simule un encastrement parfait à l'autre extrémité (voir Figure 39).

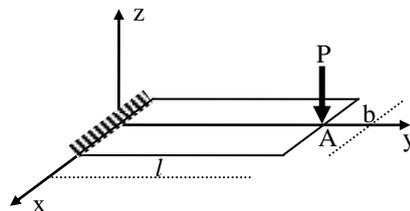


Figure 39. - Poutre –Console soumise à une charge ponctuelle

Les données géométriques, mécaniques et de chargement sont données comme suit :

Longueur	$L=10$ m
Largeur	$b=1$ m
Epaisseur	$h$ =varie de 0,1 à 10m
Module d'Young	$E=1,2 \times 10^6$ N/m <sup>2</sup>
Coefficient de Poisson	$\nu = 0$
Chargement	$P=0,1$ N

Pour voir l'influence du cisaillement transversal sur le comportement de notre élément, on simule, dans ce cas test, le déplacement "w" du point "A" selon la direction "Oz" pour plusieurs valeurs du rapport "L/h". La solution théorique du

déplacement "w" du point "A" selon la direction "Oz" est donnée comme suit, avec  $k=5/6$  :

$$w_i = \frac{4Pl^3}{Ebh^3} \left[ 1 + \frac{1}{2k} \left( \frac{h}{l} \right)^2 \right] \quad (4.10)$$

Les résultats obtenus (voir tableau 14 et figure 40) montre une absence totale du phénomène de blocage de cisaillement transversal, puisque les déplacements obtenus se situent au niveau de la solution théorique quelque soit l'élancement (rapport l/h). Comme on remarque une robustesse de notre élément comparativement à certains éléments existants. Il est à noter que sa convergence vers la solution est obtenue avec un maillage composé de vingt (20) éléments.

L/h	DSTM	ANST6	DKTM	Pep43	Solution théorique
1	$5,1 \times 10^{-7}$	$5,3 \times 10^{-7}$	$3,1 \times 10^{-7}$	$5,3 \times 10^{-7}$	$5,3 \times 10^{-7}$
2	$2,9 \times 10^{-6}$	$3,0 \times 10^{-6}$	$2,5 \times 10^{-6}$	$3,05 \times 10^{-6}$	$3,1 \times 10^{-6}$
3	$9,0 \times 10^{-6}$	$9,6 \times 10^{-6}$	$8,4 \times 10^{-6}$	$9,53 \times 10^{-6}$	$9,6 \times 10^{-6}$
4	$2,0 \times 10^{-5}$	$2,2 \times 10^{-5}$	$2,0 \times 10^{-5}$	$2,19 \times 10^{-5}$	$2,2 \times 10^{-5}$
5	$4,0 \times 10^{-5}$	$4,2 \times 10^{-5}$	$3,9 \times 10^{-5}$	$4,23 \times 10^{-5}$	$4,3 \times 10^{-5}$
10	-	-	-	$3,3 \times 10^{-4}$	$3,3 \times 10^{-4}$
100	0,31329	-	0,31327	0,3300	0,3333

Tableau 14. - Déplacement observé du point A suivant l'axe "Oz" de la poutre console

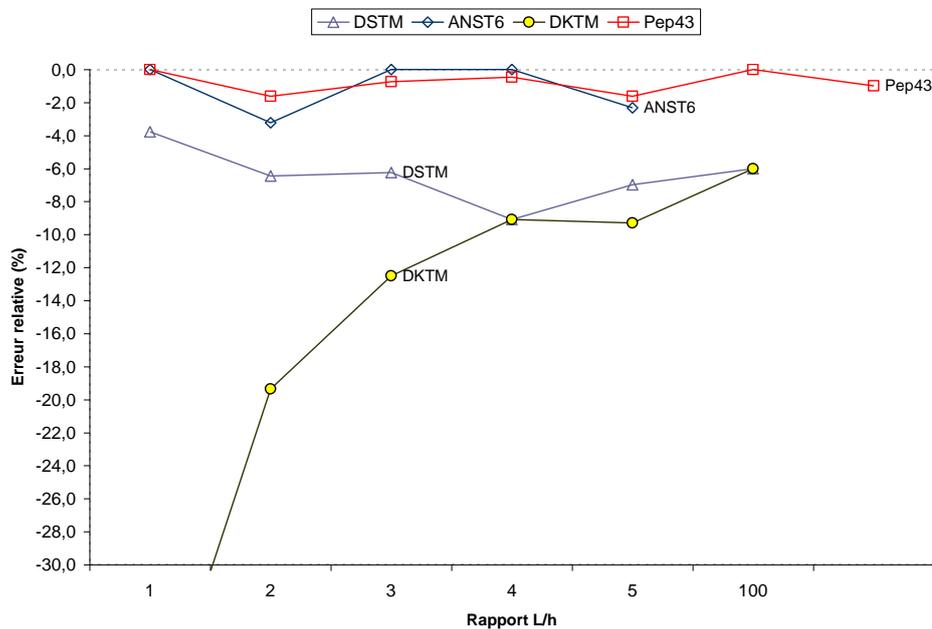


Figure 40. - Erreur relative sur le déplacement observé du point A suivant l'axe "Oz" de la poutre console par rapport la solution théorique donnée pour plusieurs élancement

### 4.7.3 – Torsion d'une plaque carrée

La plaque dans la figure 41 est simplement appuyée ( $W=0$ ) aux coins B, C et D. Une force transversale P est appliquée au coin A.

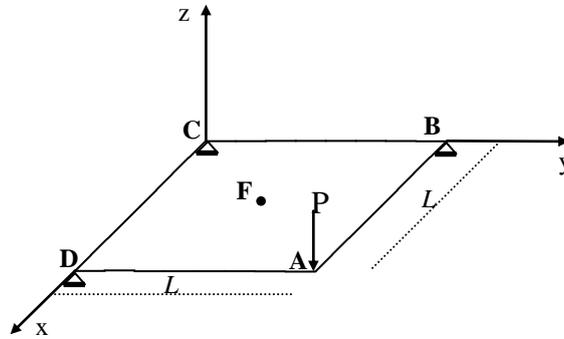


Figure 41. – Torsion d'une plaque carrée

Les autres données sont établies comme suit :

Longueur du côté	$L = 8.0$
Epaisseur	$h = 1.0$
Module d'Young	$E = 10000$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$
Chargement	$P = 5$

Ce problème traité par [YUA 88], [CLO 65] et [BAT 80] pour l'analyse d'autres éléments finis, dans l'évaluation de la capacité de notre élément à représenter l'état des torsions constantes. La solution exacte donnée par la théorie des plaques (thin theory) se présente comme suit :

$W_A$ (coin A)	0.2496
$W_F$ (centre F de la plaque)	0.0624
$M_X$ (Partout dans la plaque)	0.0
$M_Y$ (Partout dans la plaque)	0.0
$M_{XY}$ (centre F de la plaque)	2.5

Les résultats des déplacements et des moments obtenus par l'élément Pep43, sont comparés à ceux d'autres éléments dans le tableau 15.

Type d'élément	Déplacement "W"		Moments dans la plaque	
	Point A	Point F	$M_X$ et $M_Y$	$M_{XY}$
Pep43 (2x2)	<b>0.24960</b>	<b>0.06240</b>	<b>0.0</b>	<b>2.5</b>
SBRP (2x2)	0.24960	0.06240	0.0	2.5
Réf. [YUA 88] (2x2)	0.24960	0.06240	0.0	2.5
ACM [YUA 88] (8x8)	0.24972	0.06244	0.0	2.5
HCT [CLO 65] (8x8)	0.25002	0.06254	0.0	2.5
DKT [BAT 80]	0.24960	0.06240	0.0	2.5
HSM [BAT 80]	0.24960	0.06240	0.0	2.5
Solution exacte (Thin theory)	<b>0.24960</b>	<b>0.06240</b>	<b>0.0</b>	<b>2.5</b>

Tableau 15. – Résultats de la simulation de la torsion d'une plaque carrée.

Ces résultats, obtenus avec  $k=10^5$ , montrent que notre élément est performant vis-à-vis de ce test.

4.7.4 – plaque carrée isotrope

Cet exemple a été repris par de nombreux auteurs dans la littérature. Il s'agit d'une plaque carrée isotrope de côté « a » et d'épaisseur « h ».

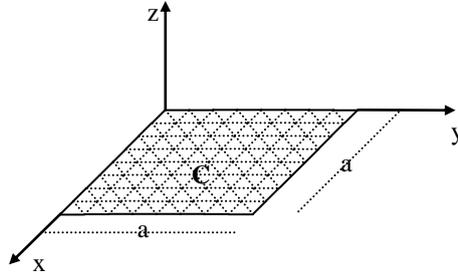


Figure 42. - Plaque carrée isotrope

On simule dans ce travail plusieurs cas de figure en fonction des conditions aux limites de la plaque et du type de chargement. Il s'agit dans ce cas test d'étudier le comportement de l'élément *Pep43* en considérant différents maillages et plusieurs rapports "a/h". Les déplacements obtenus au centre de la plaque (point C) sont comparés aux solutions de références et à ceux d'autres éléments dans les tableaux et les graphes des figures qui suivent.

4.7.4.1 - Plaque soumise à une charge uniformément répartie

	a/h=10				a/h=100			
	R4	SBRP	SBH8	Pep43	R4	SBRP	SBH8	Pep43
2x2	0.23169	0.35869	0.35935	0.03583	0.00446	0.06733	0.08817	0.0004
4x4	0.36519	0.43106	0.43161	0.25869	0.01727	0.31151	0.31235	0.0505
6x6	0.41146	0.44631	0.44686	-	0.03689	0.38017	0.38061	-
8x8	0.43142	0.45245	0.45299	0.40000	0.06128	0.39616	0.39628	0.2369
10x10	0.44163	0.45555	0.45609	-	0.08819	0.40153	0.40157	-
16x16	-	-	-	0.43752	-	-	-	0.3928
32x32	-	-	-	0.46137	-	-	-	0.4054
Réf.	0.46169				0.4062			

Tableau 16. - Flèche au centre (point C) de la plaque simplement appuyée - Réf.=100WD/qa<sup>4</sup> avec

$$D = \frac{E.h^3}{12(1-\nu^2)}$$

	a/h=10				a/h=100			
	R4	SBRP	SBH8	Pep43	R4	SBRP	SBH8	Pep43
2x2	0.06989	0.09032	0.09089	0.02377	0.00101	0.00270	0.00273	0.0002
4x4	0.11518	0.13836	0.13871	0.08323	0.00367	0.05584	0.056235	0.0031
6x6	0.13218	0.14528	0.14561	-	0.00784	0.10354	0.10374	-
8x8	0.13954	0.14757	0.14789	0.13700	0.01322	0.11789	0.11797	0.0483
10x10	0.14096	0.14862	0.14894	-	0.01946	0.12250	0.12253	-
16x16	-	-	-	0.14758	-	-	-	0.1186
32x32	-	-	-	0.15030	-	-	-	0.1254
Réf.	0.15046				0.126			

Tableau 17. - Flèche au centre (point C) de la plaque encastree - Réf.=100WD/qa<sup>4</sup> avec  $D = \frac{E.h^3}{12(1-\nu^2)}$

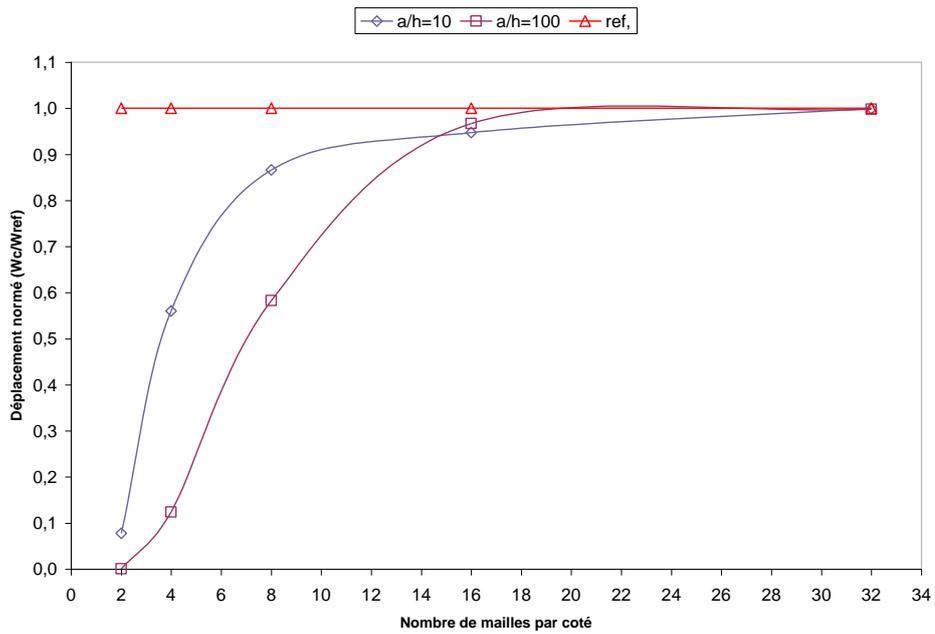


Figure 43. – Déplacement normé du point C au centre de la plaque simplement appuyée -

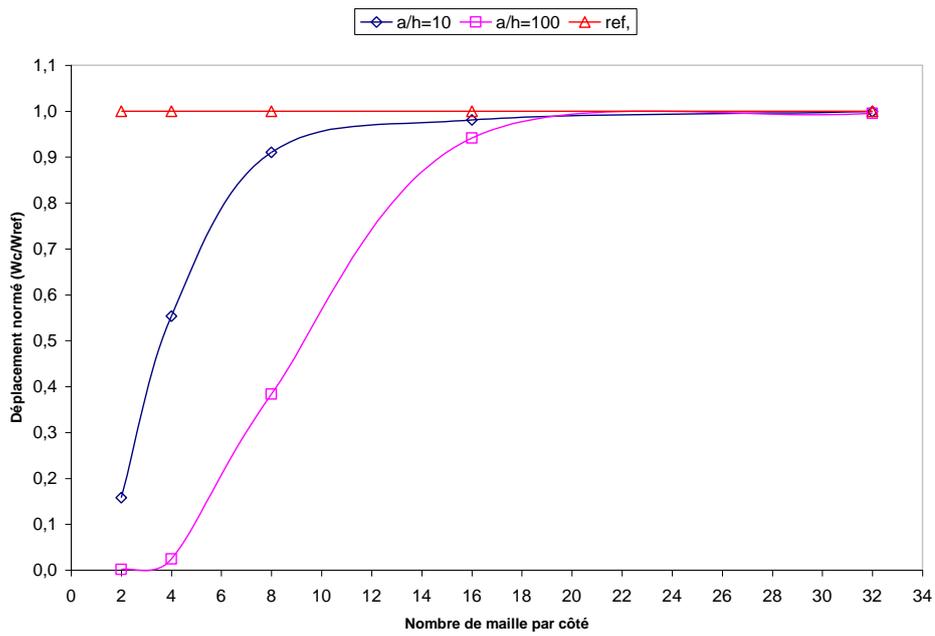


Figure 44. - Déplacement normé du point C au centre de la plaque encastrée sur ses quatre côtés

4.7.4.2 - Plaque soumise à une charge Concentrée appliquée au milieu

	a/h=10				a/h=100			
	R4	SBRP	SBH8	Pep43	R4	SBRP	SBH8	Pep43
2x2	0.73584	1.06060	1.06336	0.143308	0.01342	0.18284	0.25566	0.001504
4x4	1.12951	1.29855	1.30142	0.803125	0.04846	0.84496	0.85630	0.193668
6x6	1.27713	1.36561	1.36872	-	0.10212	1.05964	1.06046	-
8x8	1.34606	1.39877	1.40198	1.213846	0.16901	1.11641	1.11674	0.716010
10x10	1.38474	1.41914	1.42254	-	0.24314	1.13740	1.13756	-
16x16	-	-	-	1.312500	-	-	-	1.085048
32x32	-	-	-	1.414375	-	-	-	1.111154
Réf.	1.44267							
[YUA 88]								
Kirchhoff solution					1.16			

Tableau 18. - Flèche au centre (point C) de la plaque simplement appuyée - Réf.=100WD/Pa<sup>2</sup> avec

$$D = \frac{E.h^3}{12(1-\nu^2)}$$

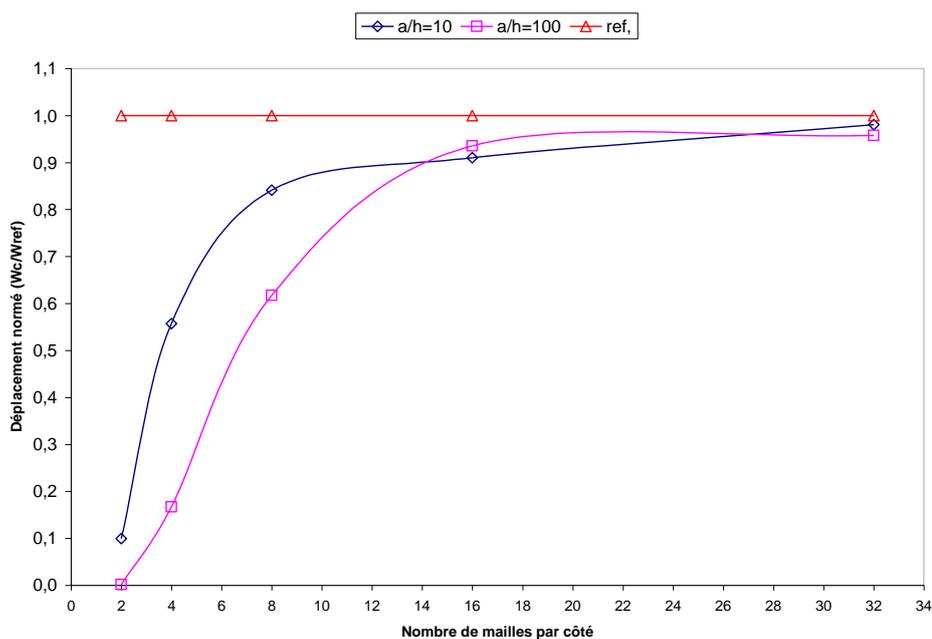


Figure 45. – Déplacement normalisé du point C au centre de la plaque simplement appuyée

	a/h=10				a/h=100				
	R4	SBRP	SBH8	Pep43	R4	SBRP	SBH8	Pep43	
2x2	0.32949	0.39200	0.39486	0.095096	0.00458	0.01064	0.01078	0.000951	
4x4	0.57104	0.65236	0.65482	0.360851	0.01690	0.24039	0.24204	0.013793	
6x6	0.66796	0.71320	0.71586	-	0.03596	0.44707	0.44794	-	
8x8	0.71499	0.74211	0.74492	0.630240	0.06043	0.51183	0.51216	0.229216	
10x10	0.74234	0.76000	0.76294	-	0.08867	0.53513	0.53531	-	
16x16	-	-	-	0.719231	-	-	-	0.504663	
32x32	-	-	-	0.806587	-	-	-	0.525096	
Kirchhoff solution								0.56	
Réf. [YUA 88]	0.77775								

Tableau 19. - Flèche au centre (point C) de la plaque encastree - Réf.=100WD/Pa<sup>2</sup> avec  $D = \frac{E.h^3}{12(1-\nu^2)}$

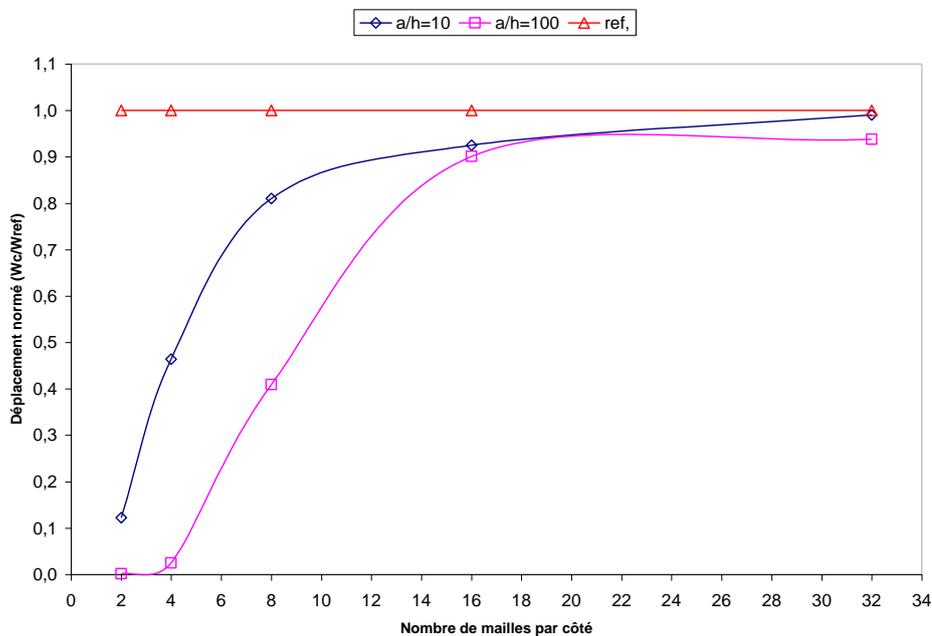


Figure 46. - Déplacement normé du point C au centre de la plaque encastree sur ses quatre côtés

#### 4.7.5 – plaque isotrope circulaire

Cet exemple a été repris par de nombreux auteurs dans la littérature et repris par [BAT90]. Il s'agit de l'analyse d'une plaque circulaire épaisse (R/h=5) simplement appuyée sur son contour et soumise une charge uniformément répartie  $f$ .

La figure 46 montre trois type de maillage avec 4, 16 et 58 éléments triangulaires. Les données géométriques et mécaniques sont: Rayon R=5.0; épaisseur h=1.0; coefficient de Poisson  $\nu=0.36$ .

Les résultats concernant le déplacement  $w$  au centre de la plaque sont comparés aux solutions de référence données par [BAT90] qui se présentent comme suit:

- Pour une plaque simplement appuyée:

$$w_{ref} = \frac{f \cdot r^4}{64D} \left( \frac{5 + \nu}{1 + \nu} + \phi \right) \quad (4.11)$$

- Pour une plaque encastree:

$$w_{ref} = \frac{f \cdot r^4}{64D} (1 + \phi) \quad (4.12)$$

Avec  $\phi = \frac{16}{5} \left( \frac{h}{r} \right)^2 \frac{1}{1 - \nu}$  et  $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$

Le critère de comparaison utilisé est le déplacement normé ( $w_c/w_{ref}$ ).

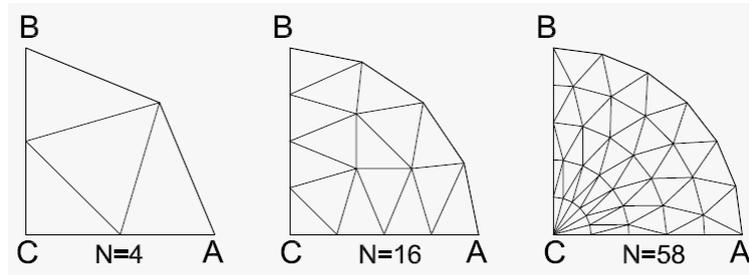


Figure 47. – Plaque circulaire avec les maillages considérés

Le résultat observé, illustré par le graphe de la figure 48 montre une convergence rapide du modèle vers les valeurs analytiques.

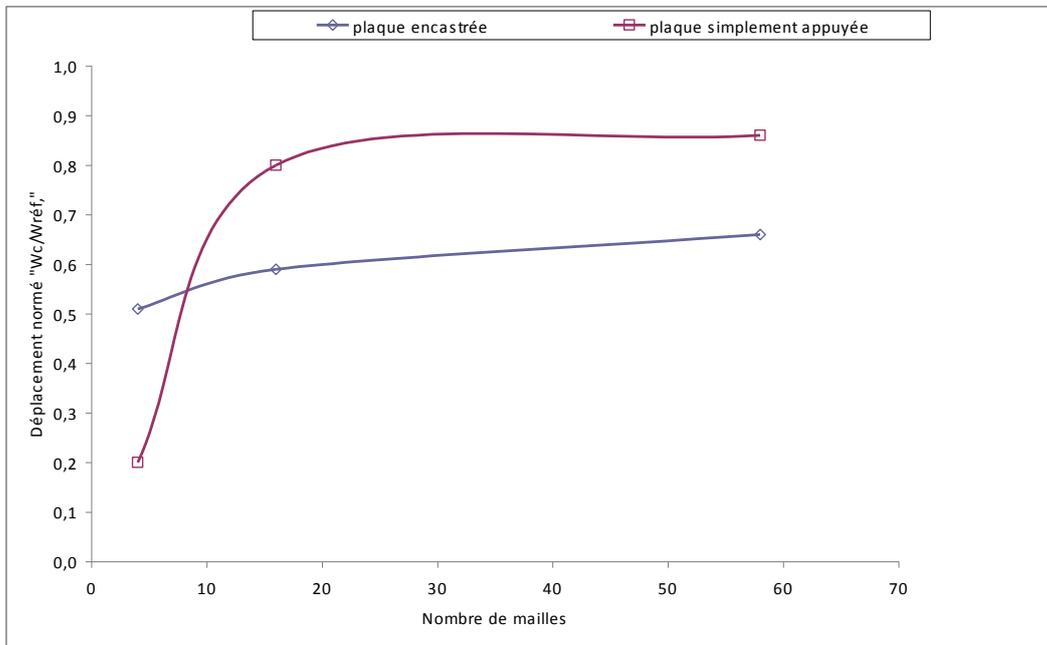


Figure 48. - Déplacement normé du point C au centre de la plaque circulaire

## 4.8 – Conclusion

On a validé dans ce chapitre les éléments finis flexionnel (plaque mince et plaque épaisse) en perspective de l'analyse linéaire statique et dynamique et pour l'analyse non linéaire géométrique de structures courbes (arcs et coques).

L'approche adoptée, les concepts et les techniques de développement utilisés ont permis d'aboutir à des éléments finis concurrentiels, robustes et performants pour le traitement des plaques.

Ce sont des éléments qui présentent des avantages certains qui plaident pour leur utilisation. La présence du nœud fictif et l'adoption de l'approche « en déformation » ont donné la possibilité d'enrichissement des champs de déplacements, par conséquent une plus grande précision dans l'approximation de la solution, en évitant la complexité des théories classiques.

La réduction des matrices de rigidité élémentaires par la technique de « condensation statique », action concernant les degrés de liberté relatifs au nœud fictif, permet d'éviter des systèmes d'équations, à résoudre, énormes, donc des économies de temps machine non négligeables.

L'utilisation de l'intégration analytique dans l'évaluation de la matrice de rigidité, a donné à ces éléments des comportements performants. Ce résultat a été remarquable dans les tests de convergence effectués où on observe une tendance rapide vers la solution contrairement aux éléments iso paramétriques (utilisant l'intégration numérique).

# C – Les éléments de coques

## 4.9 – Introduction

Pour valider nos éléments, on a utilisé deux types de test qui ont servi aux chercheurs pour évaluer la performance des éléments finis de coque :

- Le premier concerne l'analyse du cylindre pincé isotrope court à bords libres pour évaluer la performance de nos éléments finis de coque du point de vue vitesse de convergence et représentation du mouvement de corps rigide.
- le second se rapporte au cylindre pincé isotrope court à bords muni à ces deux extrémités de diaphragmes rigides. Ce test permet de simuler les états de membrane complexes associés à une part importante de flexion.

### 4.10 – Cylindre pincé à bords libres

Ce test concerne l'analyse du cylindre pincé isotrope court à bords libres présenté dans la figure 49. Il s'agit d'un exemple des plus répandus dans la littérature.

En effet, il a toujours servi aux chercheurs pour évaluer la performance des éléments finis de coque du point de vue vitesse de convergence et représentation du mouvement de corps rigide.

Les données géométriques et mécaniques de la structure se présentent comme suit:

Longueur du cylindre ( $L$ )	10.35	
Rayon du cylindre ( $R$ )	4.953	
Module d'Young ( $E$ )	$10.50 \times 10^6$	
Coefficient de Poisson ( $\nu$ )	0.3125	
Cylindre épais	Epaisseur ( $h$ )	0.0994
	Charge concentrée $P$	100.0
Cylindre mince	Epaisseur ( $h$ )	0.01548
	Charge concentrée $P$	0.10

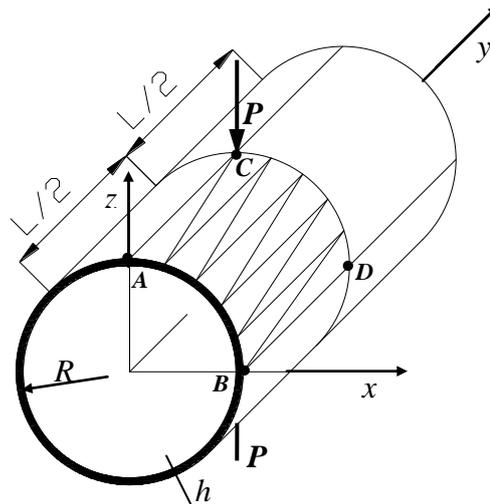


Figure 49. – Cylindre pincé à bords libres – Géométrie et maillage

Le chargement concerne la section médiane du cylindre par l'application de deux forces  $P$  et  $-P$  diamétralement opposées. Par raison de double symétrie, seul un huitième du cylindre est modélisé en imposant les conditions de symétrie le long des arêtes "AC", "BD" et "CD". Les conditions aux limites considérées sont données comme suit:

$W = \theta_x = \theta_y = 0$	Le long de BD
$V = \theta_x = \theta_z = 0$	Le long de CD
$U = \theta_y = \theta_z = 0$	Le long de AC

Le maillage considéré est composé d'un seul élément dans le sens longitudinal, puisque la coque se déforme sensiblement de la même manière dans chacune des sections transversales. Et plusieurs découpages sont pris en compte dans le sens circonférentiel.

Le critère considéré pour l'évaluation de la performance des éléments de coques est le déplacement le long de l'axe  $z$  du point  $C$  (déplacement  $w_C$ ).

Les solutions de références sont établies selon le type de cylindre (épais ou mince), puisque la convergence des modèles numériques diffère selon la théorie des coques retenues : surbaissées ou profondes.

Ainsi, les valeurs de références se présentent comme suit:

Cylindre épais:

- théorie des coques surbaissées (VLASSOV-DONNELL):  $w_C = -0.066$
- théorie de coques profondes (KOITER-TIMOSHENKO):  $w_C = -0.1130$

Cylindre mince:

- théorie des coques surbaissées:  $w_C = -$
- théorie de coques profondes:  $w_C = -0.0244$

Les résultats donnés par nos éléments sont illustrés dans les tableaux 20, 21 et 22 et illustrés dans les graphes des figures 51, 51 et 52. Les résultats obtenus nous permettent de tirer les conclusions suivantes:

- Une convergence rapide de tous nos éléments, traduisant une représentation correcte de l'état des mouvements de corps rigides,
- Les éléments *C.mi.42* et *C.mi.43* convergent vers la solution donnée par la théorie des coques profondes: vers  $w_C = -0.1130$  pour le cylindre épais et  $w_C = -0.0244$  pour le cylindre mince
- Les éléments *C.ep.42* et *C.ep.43* convergent bien vers la solution donnée par la théorie des coques profondes pour ce qui est du cylindre épais ( $w_C = -0.1130$ ) et vers la solution donnée par la théorie des coques surbaissées pour ce qui est du cylindre mince. Ceci peut s'expliquer par l'effet du cisaillement transversal pris en considération dans la formulation de ces deux éléments.
- Aucun phénomène de "rigidification" n'est observé dans la modélisation du cylindre mince ce qui dénote un traitement efficace du problème de blocage du cisaillement transversal.
- Dans la discrétisation des coques épaisses les éléments prenant en considération le cisaillement transversal (*C.ep.42* et *C.ep.43*) donnent des résultats meilleurs que ceux où le cisaillement transversal est négligé (*C.mi.42* et *C.mi.43*).
- Avec le maillage choisi on observe une convergence monotone vers le haut de tous nos éléments.

Maillage	C.ep.42	C.ep.43	C.mi.42	C.mi.43
48 ddl	2,8038E-04	3,35450E-06	1,2062E-05	1,2062E-05
96 ddl	4,3764E-04	6,13230E-05	3,7996E-05	3,7996E-05
120 ddl	5,9511E-04	1,70770E-04	1,0766E-02	1,0766E-02
360 ddl	6,8838E-04	4,04530E-04	2,3144E-02	2,3144E-02
Référence	2,4390E-02			

Tableau 20. – Cylindre mince – déplacement du point C ( $w_C$ ) selon la densité du maillage

Maillage	C.ep.42	C.ep.43	C.mi.42	C.mi.43
48 ddl	4,6279E-02	4,4186E-03	5,3869E-05	5,3869E-05
96 ddl	7,2071E-02	6,0304E-03	1,6970E-04	1,7222E-04
120 ddl	9,3988E-02	4,4295E-02	4,8082E-02	4,8082E-02
360 ddl	1,1324E-01	1,1352E-01	1,0337E-01	1,0337E-01
Référence	1,1390E-01			

Tableau 21. – Cylindre épais – déplacement du point C ( $w_C$ ) selon la densité du maillage

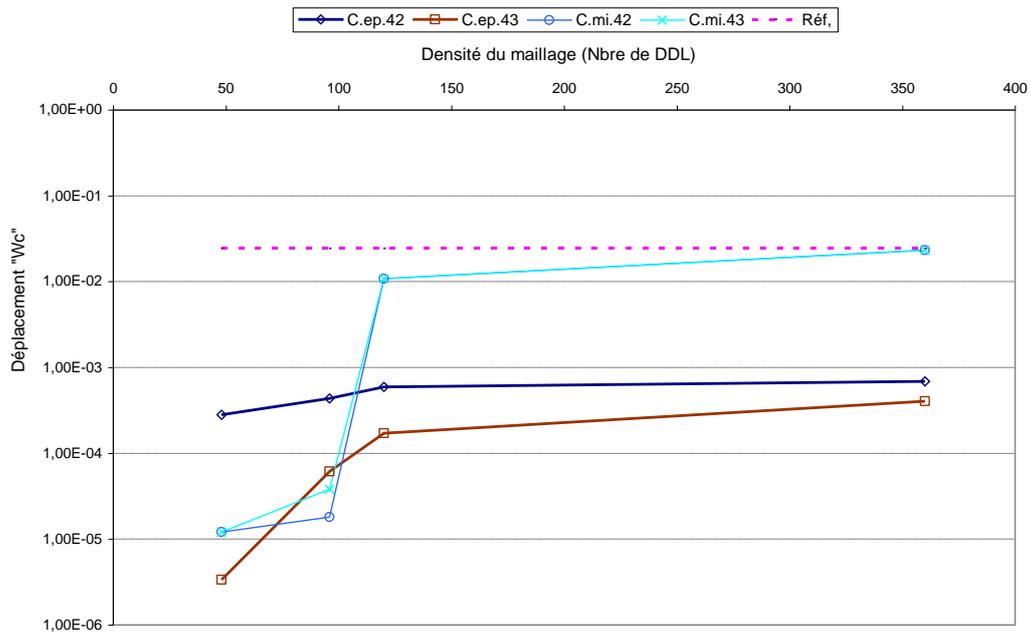


Figure 50. - Cylindre mince - Déplacement du point "C" selon la densité du maillage

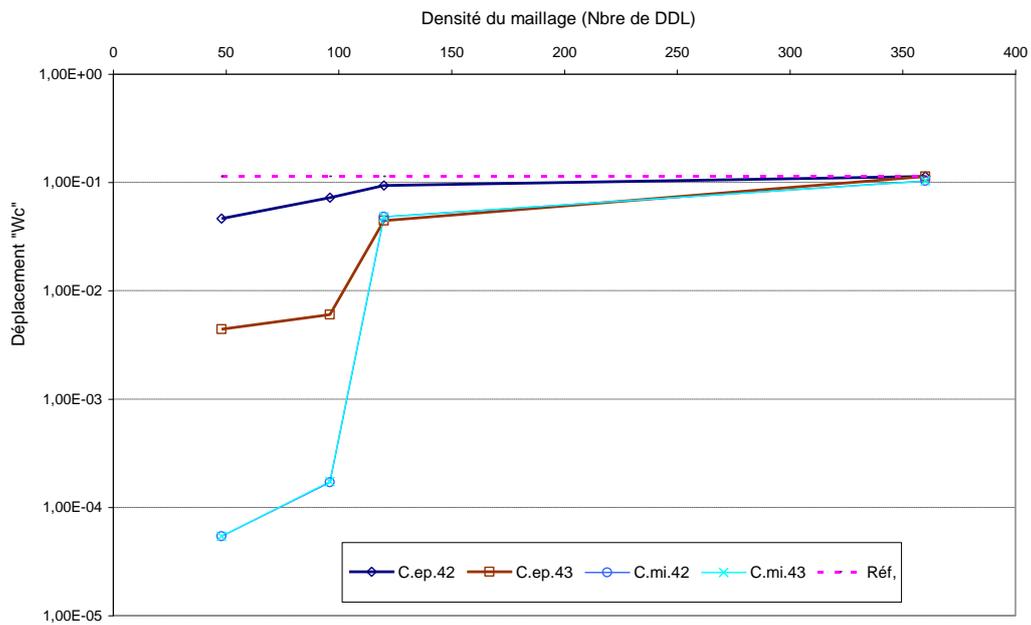


Figure 51. - Cylindre épais - Déplacement du point "C" selon la densité du maillage

Rapport (h/R)	C.ep.42	C.ep.43	C.mi.42	C.mi.43	DST
0,5	3,3430E-03	3,2903E-03	1,3982E-26	1,4551E-27	8,0760E-06
0,2	1,0204E-02	1,0327E-02	8,8321E-05	8,8321E-05	9,6345E-05
0,1	2,1158E-02	2,1355E-02	7,0653E-04	7,0657E-04	7,3982E-04
0,02	1,0745E-01	1,0772E-01	8,8321E-02	8,8321E-02	9,3398E-02
0,01	2,1508E-01	2,1499E-01	7,0657E-01	7,0657E-01	7,4074E-01

Tableau 22. – Cylindre épais – déplacement du point C ( $w_C$ ) selon le rapport "L/R" (pour un maillage de 360 ddl)

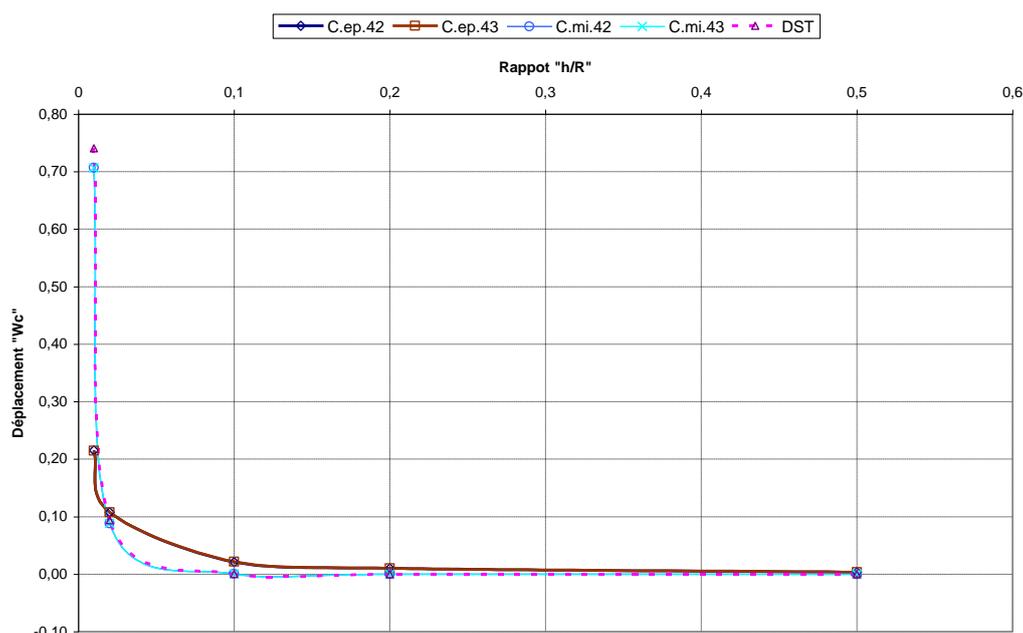


Figure 52. – Cylindre épais – déplacement du point C ( $w_C$ ) selon le rapport "L/R" (pour un maillage de 360 ddl)

#### 4.11 – Cylindre pincé avec diaphragme

Ce test concerne l'analyse du cylindre pincé isotrope court à bords muni à ces deux extrémités de diaphragmes rigides pour empêcher la distorsion de la section. Celui-ci est présenté dans la figure 53. Il s'agit d'un exemple des plus répandus dans la littérature. En effet, il a toujours servi aux chercheurs pour simuler les états de membrane complexes associés à une part importante de flexion, notamment au niveau des zones sollicitées par le chargement.

Les données géométriques et mécaniques de la structure se présentent comme suit :

Longueur du cylindre ( $L$ )	6.00 m
Rayon du cylindre ( $R$ )	3.00 m
Module d'Young ( $E$ )	$3.0 \times 10^{10}$ Pa
Coefficient de Poisson ( $\nu$ )	0.3
Epaisseur ( $h$ )	0.03 m
Charge concentrée $P$	1.0 N

Le chargement concerne la section médiane du cylindre par l'application de deux forces  $P$  et  $-P$  diamétralement opposées. Par raison de double symétrie, seul un huitième du cylindre est modélisé en imposant les conditions de symétrie le long des arêtes "AC", "BD" et "CD". Ces conditions sont données comme suit:

$W = \theta_x = \theta_y = 0$	Le long de BD
$V = \theta_x = \theta_z = 0$	Le long de CD
$U = \theta_y = \theta_z = 0$	Le long de AC

L'arête reposant sur le diaphragme rigide est concernée par les conditions aux limites suivantes:

$U=W = \theta_y = 0$	Le long de AB
----------------------	---------------

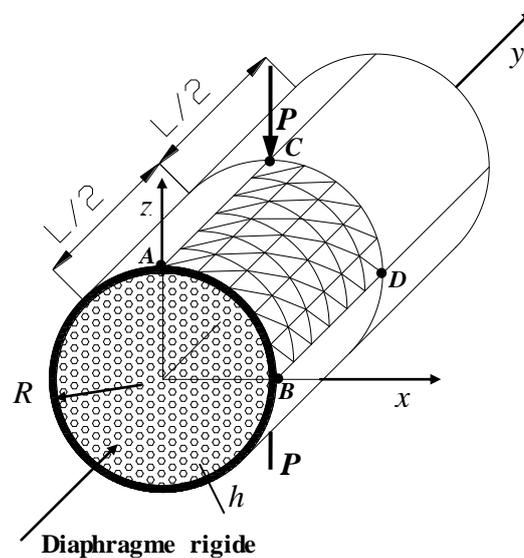


Figure 53. – Cylindre pincé avec diaphragme rigide – Géométrie et maillage

Le maillage considéré est régulier avec une discrétisation établie le long des deux sens: longitudinal et circonférentiel.

Le critère considéré pour l'évaluation de la performance des éléments de coques est le déplacement le long de l'axe  $z$  du point  $C$  (déplacement  $W_C$ ).

La solution de référence est donnée par Flugge [FLU60] et Lindberg [LIND60]; elle se présente comme suit:

$$Réf. = W_{Créf.} \frac{Eh}{P} = 164.24 \quad (4.13)$$

Les résultats donnés par nos éléments sont illustrés dans les tableaux 23 et 24 et illustrés dans les graphes des figures 54 et 55. Les résultats obtenus nous permettent de tirer les conclusions suivantes:

- Une convergence rapide de tous nos éléments, traduisant toujours, une représentation correcte de l'état des mouvements de corps rigides,

- Tous les éléments convergent vers la solution exacte donnée par Flugge [FLU60] et Lindberg [LIND60],
- Aucun phénomène de "rigidification" n'est observé dans la modélisation du cylindre mince ce qui dénote un traitement efficace du problème de blocage du cisaillement transversal.
- Avec le maillage choisi on observe une convergence monotone vers le haut de tous nos éléments l'exception de "C.mi.43" dont la convergence se fait par le haut.
- Le comportement de nos éléments montre bien la dominance de l'état de flexion au voisinage du point C et reflète convenablement la déformée du cylindre le long de l'arrête "AC" telle que montré par le graphe de la figure 55.

Déplacement " $W_C$ " du point C				
Valeurs calculées				
Maillage	C.ep42	C.ep43	C.mi.42	C.mi.43
2x(3x3)	4,89E-08	1,97E-08	1,52E-08	1,12E-06
2x(4x4)	9,71E-08	9,98E-08	9,71E-08	4,87E-07
2x(5x5)	1,34E-07	1,02E-07	1,23E-07	4,39E-07
2x(6x6)	1,82E-07	1,82E-07	1,54E-07	1,83E-07
Valeurs normées = $W_C \cdot Eh/P$				
2x(3x3)	43,978	17,767	13,678	1005,750
2x(4x4)	87,368	89,780	87,414	437,967
2x(5x5)	120,960	92,223	110,655	395,073
2x(6x6)	<b>164,052</b>	<b>163,917</b>	<b>138,375</b>	<b>164,394</b>
Référence	<b>164,240</b>			

Tableau 23. – Cylindre pincé avec diaphragme – déplacement du point C ( $W_C$ ) selon la densité du maillage

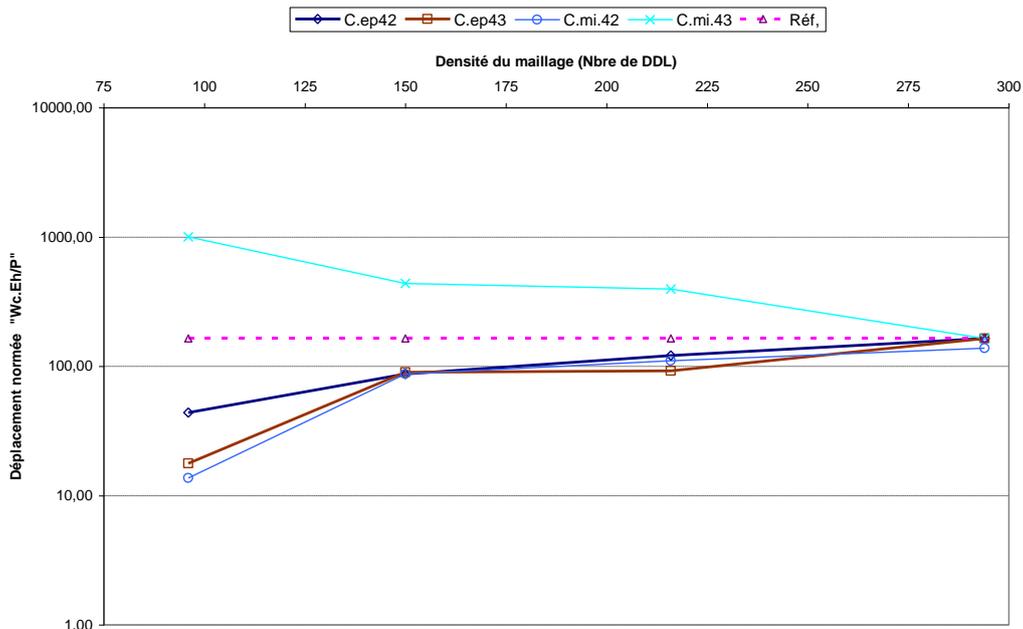


Figure 54. – Cylindre pincé avec diaphragme – déplacement du point C ( $W_C$ ) selon la densité du maillage

Déplacement " W " le long du bord A_C				
Valeurs calculées				
distance	C.ep42	C.ep43	C.mi.42	C.mi.43
0,00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
0,50	7,2434E-09	1,6235E-08	1,3766E-14	7,4703E-09
1,00	2,0669E-08	3,4017E-08	2,2359E-13	1,5748E-08
1,50	3,6325E-08	5,3785E-08	1,1400E-13	2,3668E-08
2,00	6,1563E-08	8,1858E-08	1,4120E-11	3,7472E-08
2,50	9,9143E-08	1,2144E-07	1,3316E-09	4,3393E-08
3,00	1,8228E-07	1,8213E-07	1,5376E-07	1,8266E-07
Valeurs normées = WEh/P				
0,00	0,000	0,000	0,000	0,000
0,50	6,519	14,612	0,000	6,723
1,00	18,602	30,615	0,000	14,173
1,50	32,693	48,407	0,000	21,301
2,00	55,407	73,672	0,013	33,725
2,50	89,229	109,296	1,198	39,054
3,00	<b>164,052</b>	<b>163,917</b>	<b>138,384</b>	<b>164,394</b>

Tableau 24. – Cylindre pincé avec diaphragme – déplacement ( $W$ ) le long du bord AC (pour une densité du maillage de 294 DDL)

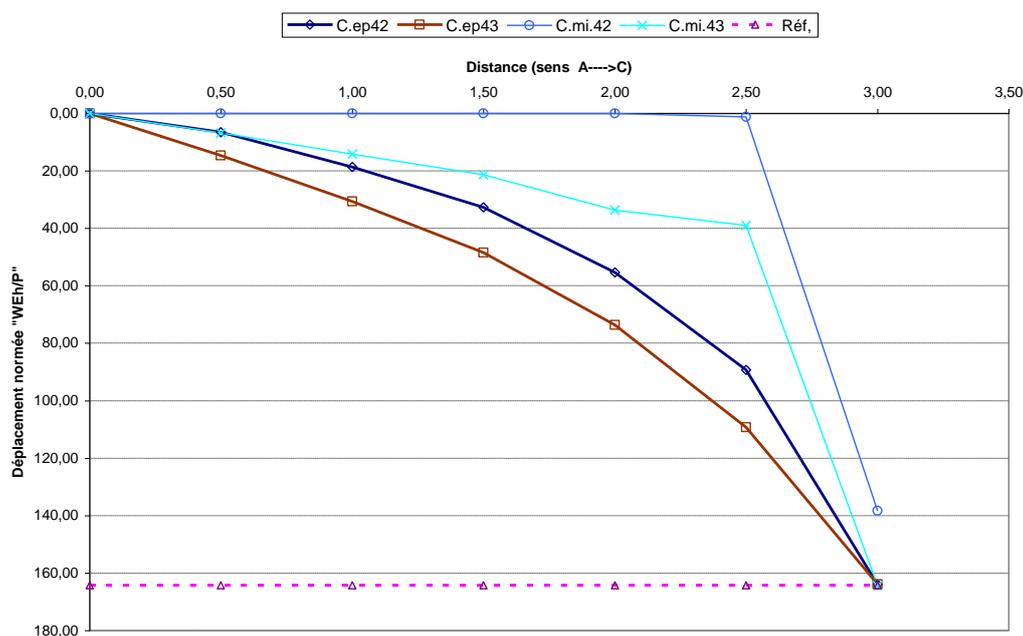


Figure 55. – Cylindre pincé avec diaphragme – déplacement ( $W$ ) le long du bord AC (pour une densité du maillage de 294 DDL)

#### **4.12 – Conclusion :**

Les premières conclusions, à tirer de ces tests, dénotent le comportement très performant de nos éléments et leur robustesse du point de vue vitesse de convergence et représentation du mouvement de corps rigide.

Comme, il montre bien la dominance de l'état de flexion au voisinage des points de chargement et reflète convenablement la déformée de la structure. Par ailleurs il n'est observé aucun phénomène de "rigidification" dans la modélisation des structures minces ; ce qui dénote un traitement efficace du problème de blocage du cisaillement transversal.

**Conclusions et recommandations**

---



## Chapitre 05

### Conclusions et recommandations

On a présenté dans cette contribution une série d'éléments finis de coque à base triangulaire. L'approche adoptée, les concepts et les techniques de développement utilisés ont permis d'aboutir à des éléments finis concurrentiels pour certains, robustes et performants pour d'autres.

La présence du nœud central à l'intérieur de l'élément triangulaire et l'adoption de l'approche « *en déformation* » pour leur discrétisation fonctionnelle a donné la possibilité d'enrichissement des champs de déplacements, par conséquent une plus grande précision dans l'approximation de la solution. Ce résultat a été remarquable dans les tests de convergence effectués où on observe une tendance rapide vers la solution contrairement aux éléments isoparamétriques (utilisant l'intégration numérique).

Pour éviter d'avoir des systèmes d'équations, à résoudre, relativement énormes (nécessitant plus de temps machine), on a procédé, au niveau de notre démarche, à la réduction des matrices de rigidité élémentaires par la technique de « *condensation statique* ». Cette action a concerné les degrés de liberté relatifs au nœud interne.

Les éléments de coque « *C.ep43* » et « *C.mi43* » se caractérisent par la présence d'inconnues nodales de rotation  $\theta_z$  définies par dérivation des champs de déplacements (drilling rotation). Le premier développé pour la discrétisation de tout type de structures (épaisses et minces), puisque il prend en compte l'effet du cisaillement transversal, alors que le second n'est performant que pour les structures minces.

Concernant les autres éléments de coque « *C.ep42* » et « *C.mi42* », la difficulté liée à la rigidité suivant  $\theta_z$  est levée dans la formulation de l'élément membranaire en minimisant l'énergie potentielle associée à la rotation.

L'utilisation de l'intégration analytique dans l'évaluation de la matrice de rigidité, a donné à nos éléments des comportements robustes vis-à-vis de la distorsion géométrique du maillage.

Ce résultat a été remarquable dans les tests de convergence effectués où on observe l'absence de perte de convergence avec la distorsion du maillage. Alors que pour ces mêmes tests les éléments isoparamétriques (utilisant l'intégration numérique) sont très sensibles (leur convergence est conditionnée par un maillage régulier, non distordu).

Sur la base des tests que on a effectués, les premières observations dénotent :

- une stabilité de tous nos éléments vis-à-vis des patch-tests effectués, particulièrement dans leur comportement vis-à-vis des modes rigides et les modes traduisant les moments constants.
- un comportement marqué par l'absence du blocage de cisaillement transversal.

- La robustesse des éléments « *C.ep43* » et « *C.ep42* » et leur performance pour le traitement aussi bien des structures épaisses que minces.
- Les autres éléments « *C.mi43* » et « *C.mi42* » sont plutôt performants pour les structures minces.

Ainsi, on présente des éléments qui présentent des avantages certains plaidant pour leur utilisation.

En perspectives, leur maturation reste nécessaire. Il est intéressant d'étudier leur comportement en contraintes, en dynamique, en flambement et de conforter les performances observées par plus de tests de validation supplémentaires.

## Références bibliographiques

- [ARG77] Argyris J. H., Dune P. C., Malejannakis G.A., Schelkle E., "A simple triangular facet shell element with applications to linear and non linear equilibrium and elastic stability problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 10, n° 3, March 1977, p. 371-403.
- [ALL84] Allman D. J., *A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity*, C.S., Vol 19, pp 1-8, 1984.
- [ASH71A] Ashwell D.G. and Sabir A.B., *Limitations of certain curved finite elements when applied to arches*, IJMS Vol. 13, pp. 133-139, 1971.
- [ASH71B] Ashwell D.G, Sabir A.B., Roberts T.M., *Further studies in the application of curved finite elements to circumar arches*, IJMS Vol. 13, pp. 507-517, 1971.
- [ASH72] Ashwell D.G. and Sabir A.B., *Anew cylindrical shell finite element based on simple independent strain functions*, IJMS Vol. 14, pp. 171-183, 1972.
- [AYA93] Ayad R., *Eléments finis de plaque et coque en formulation mixte avec projection en cisaillement*, Thèse de Doctorat, U.T.C.n 1993, 217 pages.
- [BAR02] Barik M., Mukhopadhyay M., "A new stiffened plate element for the analysis of arbitrary plates", *Thin-Walled Structures*, vol. 40, n° 7-8, 2002, p. 625-639.
- [BEL98A] Belarbi M. T. et Charif A., *Nouvel élément secteur basé sur le modèle de déformation avec rotation dans le plan*, revue européenne des éléments finis, Vol 7, n°4, pp 439-458, 1998.
- [BAT90] Batoz J. L., Dhatt G., *Modélisation des structures par éléments finis*, vol.1, *Solides Elastiques*, vol 2, *Poutres et plaques*, Hermès, Paris, 1990.
- [BEL99] Belarbi M. T. et Charif A., *Nouvel élément hexaédrique simple basé sur le modèle de déformation pour l'étude des plaques minces et épaisses*, apparu dans la revue européenne des éléments finis, Vol 8, n°2, 1999.
- [BEL00] Belarbi M. T., *Développement de nouveaux éléments à modèle en déformation: Application linéaire et non linéaire*, Thèse de Doctorat, Univ. Constantine (Algérie), 2000.
- [BEL05] Belouar L., Guenfoud M., A new rectangular finite element based on the strain approach for plate bending, *Thin-Walled struct.*, 43-2005, pp 47-63.
- [BEL84] Belytschko T. Ong J.S.J. Liu, WK., Kennedy J.M., "Hourglass control in linear and nonlinear problems", *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 43, 1984, p. 251-276.
- [BER85] Bergan P. G. & Felippa C. A., *A triangular membrane element with rotational degrees of freedom*, CMAME, Vol 50, pp 25-69, 1985.
- [BGU05] Belouar L., Guenfoud M., *A new rectangular finite element based on the strain approach for plate bending*, *Thin-Walled struct.*, 43-2005, pp 47-63.
- [BKA09] Kim, D.N. and Bathe, K.J. (2009), "A triangular six-node shell element", *Comput. Struct.*, **87**(23-24), 1451-1460.
- [BOU10] Boutagouga,D., Gouasmia,A.and Djeghaba,K.(2010), "Geometrically non-linear analysis of thin shell by a quadrilateral finite elementwith in-lane rotational degrees of freedom", *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*, **19** (8), 707-724.

- [BRA08] Brasile, S. (2008), "An isostatic assumed stress triangular element for the Reissner-Mindlin plate bending problem", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **74**, 971-995.
- [CHI05] Chinosi C., "PSRI elements for the Reissner-Mindlin free plate", *Computers & Structures*, vol. 83, n° 31-32, December 2005, p. 559-2572.
- [CLOU65] Clough R.W., Tocher J.L., "Finite element stiffness matrixes for analysis of plate bending, Proceeding of first conference Matrix methods in structural mechanics", *Wright-Pattersonm Qir force basem Ohiom*, 1965, p. 515-812.
- [DJO90] Djoudi M. S., *Strain based sinite elements for linear and geometrically non linear analysis structures*, Thesis of doctor of philosophy, University of Wales College of Carsiff School of Engineering, 1990.
- [DNK09] Do-Nyun Kim, Klaus-Jürgen Bathe, "A triangular six-node shell element", *Computers & tructures*, vol. 87, n° 23-24, December 2009, p. 1451-1460.
- [FLU60] W. Flugge: *Stresses in shells* Springer verla, 1960.
- [FRE98] François Frey, *Traité de génie civil de l'école polytechnique fédérale de Lausanne – Volume 3 – Analyse des structures et milieux continus – mécanique des solides*, Presses polytechniques et universitaires romandes CH-1015, 1998.
- [FRV65] B. Fraeijs de Veubeke : *Displacements and equilibrium models in the finite elements method. In O. C. Zienkiewicz et G. S. Holister*, editeurs : *Stress analysis*, chapitre 9. John Wiley & Sons, London, 1965.
- [GUE90] Guenfoud M., Deux éléments triangulaires nouveaux pour l'analyse linéaire et non linéaire géométrique des coques, Thèse de doctorat, Institut national des sciences appliquées de Lyon (France), Novembre 1990.
- [GUE93] Guenfoud M., Présentation de l'élément DSTM pour le calcul linéaire des coques d'épaisseur quelconque, Ann. l'ITBTP, 1993, 515, p. 25-52.
- [HAM06] Hamadi D. J. and Belarbi M. T., *Integration solution routine to evaluate the element stiffness matrix for distorted shape*, Asian journal of civil engineering (Bulding housing), Vol 7, n° 5, pp 525-549, 2006.
- [HAN08] Han,S.C., Ham,H.D.and Nuklchaic,W.K. (2008),"Geometrically non-linear analysis of arbitrary elastic supported plates and shells using an element-based Lagrangian shell element", *Int.J.Nonlin.Mech.*,**43**, 53-64.
- [HIG08] Himeur M., Guenfoud M., « Élément fini triangulaire nouveau à nœud central perturbé en formulation déformation avec drilling rotation », *CIFMA'03*, 21-23 Avril 2008, Alep, Syrie.
- [HIM08] Himeur M., Développement d'éléments membranaires nouveaux d'élasticité plane basés sur la formulation en déformation, Thèse de magistère, Université de Guelma (Algérie), Département de Génie Civil, Novembre 2008.
- [IBR93] Ibrahimbegovic A., et Frey et Reborra B., *Une approche unifiée de la modélisation des structures complexes : les éléments finis avec degré de liberté de rotation*, LSC, Rapport Interne 93/10, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (Suisse), Juin 1993.
- [JEA91] Jean-Luc SARF, *La condensation statique dans félina (nouvelle édition)*, Rapport Interne LSC 91/22, 1991.
- [JON64] R. E. Jones : *A generalization of the direct-stiffness method of structural analysis*.*AIAA Journal*, 2:821.826, 1964.

- [KHE04] Khelassi A., *La condensation statique et son introduction dans le code*, Mémoire de Magister, Université de Batna (Algérie), 2.
- [LIND69] Lindberg G. M., Olson M. D. and Cowper G. R. (1969), "New development in the finite element analysis of shells", *Q. Bull Div. Meth. Eng. And Nat. Aeronautical Establishment*, National Research Council of Canada, 5.
- [MAA07] Maalem T., *Contribution au modèle en déformation dans l'analyse des structures*, Thèse de Doctorat, Université de Batna (Algérie), 2007.
- [MAN13] Man, H., Song, C., Xiang, T., Gao, W. and Tin-Loi, F. (2013), "High-order plate bending based on the boundary finite element method", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 95, 331-360.
- [MES04] Messaoudi H., *Approche unifiée pour la modélisation d'une buse enterrée*, Mémoire de Magister, Université de Batna (Algérie), 2004.
- [PIA64] T. H. H. Pian: *Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions*. *AIAA Journal*, 2:1333.1336, 1964.
- [PIA83] T. H. H. Pian : *Reactions and remarks on hybrid and mixed finite element methods*. In S. N. Atluri, R. H. Gallagher et O. C. Zienkiewicz, Éditeurs : *Hybrid and mixed finite element methods*, chapitre 29. John Wiley & Sons, Ltd, 1983.
- [PRO00] Providas E. and Kattis M. A., *An assessment of two fundamental flat triangular shell elements with drilling rotation*, *Computers and structures* 77, pp 129-139, 2000.
- [RAZ73] Razake A., "Program of triangular bending elements with derivative smoothing", *IJNME*, vol. 6, 1973, p. 333-343.
- [ROB78] Robinson J., "Element evaluation. A set of assessment points and standards tests Proc.", *Element method in the commercial environment*, vol. 1, Oct. 1978, p. 217-248.
- [SAB75] Sabir A.B., *Stiffness matrices for the general deformation (out of plane and inplane) of curved beam elements based on independent strain functions*, *The mathematics of finite elements and application II*, Editor J.R. Whiteman. Chapter 34, 411-421, Academic Press, 1975.
- [SA85A] Sabir A.B., *A rectangular and triangular plane elasticity element with drilling degrees freedom*, chapter 9 in proceeding of the 2<sup>nd</sup> International conference on variational methods in engineering, Southampton University, Springer verlag, Berlin, 1985, pp 17-25.
- [SA85B] Sabir A.B. and Ramadhani F., *A shallow shell finite element for general shell analysis*, *Variational methods in engineering Proceeding of the 2<sup>nd</sup> international conference of Southampton England*, 1985
- [SAB78] Sabir A.B. and Ashwell D.G., *Diffusion of concentrated loads into thin cylindrical shells*, *The mathematics of finite elements and application III*, Editor J.R. Whiteman, Academic Press, 1978.
- [SAB83] Sabir A.B., *A new class of finite elements for plane elasticity problems*, *CAFEM 7<sup>th</sup>*, Int. conf. Struct. Mech. In reactor Tecnology, Chicago, 1983.
- [SAB86] Sabir A.B. and Salhi H. Y., *A strain based finite element for general plane elasticity in polar coordinates*, *Res. Mathematica* 19, pp 1-16, 1986.
- [SAB95] Sabir A.B., A Sfindji, *Triangular and Rectangular Plane Elasticity Finite*

*Elements, Thin-Walled struct.*, 21-1995, pp 225-232.

- [SAS00] Sabourin F.m Salle F., *Calcul des structures par éléments finis, Barres – Poutres Elasticité plane Axisymétrique Plaques – coques non linéarité*, Chapitre IV, INSA Lyon, 2000.
- [SAR91] ARF J. L., La condensation statique dans felina (nouvelle édition), Rapport Interne LSC 91/22, 1991.
- [TEO82] Teodorecu Paul, *Grands éléments finis "GEF" pour l'élasticité plane*, Thèse n° 462 de doctorat présentée au département de génie civil, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne Suisse, 1982.
- [YUA88] Yuan F., Miller RE., "A rectangular finite element for moderately thick flat plate", *Computer Struct.* 1988, 30, p. 1375-87.
- [ZWE52] K. Zweiling, Grundlagen einer, *Théorie der biharmonischen Polynome*, Verlag Technik Berlin, 1952

### **ANNEXE I – Matrices des coordonnées nodales [A]**

**I-a / Élément fini de membrane « T42 »**

**I-b / Élément fini de membrane « T43 »**

**I-c / Élément fini de plaque mince « HIMEUR »**

**I-d / Élément fini de plaque épaisse « Pep43 »**

### **ANNEXE II – Matrices [Ko]**

**II-a / Élément fini de membrane « T42 »**

**II-b / Élément fini de membrane « T43 »**

**II-c / Élément fini de plaque mince « HIMEUR »**

**II-d / Élément fini de plaque épaisse « Pep43 »**

### **ANNEXE III - Structure type de la matrice de rigidité de l'élément coque [Ke] au niveau élémentaire construite dans le système d'axes des coordonnées locales**



## Annexes

### ANNEXE I – Matrices des coordonnées nodales [A]

*I-a / Élément fini de membrane « T42 »*

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_1 & x_1 & x_1 \cdot y_1 & 0 & -\frac{y_1^2}{2} & \frac{y_1}{2} \\ 0 & 1 & x_1 & 0 & -\frac{x_1^2}{2} & y_1 & x_1 \cdot y_1 & \frac{x_1}{2} \\ 1 & 0 & y_2 & x_2 & x_2 \cdot y_2 & 0 & -\frac{y_2^2}{2} & \frac{y_2}{2} \\ 0 & 1 & x_2 & 0 & -\frac{x_2^2}{2} & y_2 & x_2 \cdot y_2 & \frac{x_2}{2} \\ 1 & 0 & y_3 & x_3 & x_3 \cdot y_3 & 0 & -\frac{y_3^2}{2} & \frac{y_3}{2} \\ 0 & 1 & x_3 & 0 & -\frac{x_3^2}{2} & y_3 & x_3 \cdot y_3 & \frac{x_3}{2} \\ 1 & 0 & y_4 & x_4 & x_4 \cdot y_4 & 0 & -\frac{y_4^2}{2} & \frac{y_4}{2} \\ 0 & 1 & x_4 & 0 & -\frac{x_4^2}{2} & y_4 & x_4 \cdot y_4 & \frac{x_4}{2} \end{bmatrix}$$

*I-b / Élément fini de membrane « T43 »*

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_1 & x_1 & y_1 & x_1 \cdot y_1 & 0 & 0 & y_1^2 & x_1 \cdot y_1^2 & x_1^2 \cdot y_1^3 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & 0 & x_1 & 0 & y_1 & x_1 \cdot y_1 & 0 & -y_1 \cdot x_1^2 & -y_1^2 \cdot x_1^3 & x_1^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{x_1}{2} & 0 & \frac{y_1}{2} & -y_1 & -2x_1 \cdot y_1 & -3x_1^2 \cdot y_1^2 & x_1 \\ 1 & 0 & -y_2 & x_2 & y_2 & x_2 \cdot y_2 & 0 & 0 & y_2^2 & x_2 \cdot y_2^2 & x_2^2 \cdot y_2^3 & 0 \\ 0 & 1 & x_2 & 0 & x_2 & 0 & y_2 & x_2 \cdot y_2 & 0 & -y_2 \cdot x_2^2 & -y_2^2 \cdot x_2^3 & x_2^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{x_2}{2} & 0 & \frac{y_2}{2} & -y_2 & -2x_2 \cdot y_2 & -3x_2^2 \cdot y_2^2 & x_2 \\ 1 & 0 & -y_3 & x_3 & y_3 & x_3 \cdot y_3 & 0 & 0 & y_3^2 & x_3 \cdot y_3^2 & x_3^2 \cdot y_3^3 & 0 \\ 0 & 1 & x_3 & 0 & x_3 & 0 & y_3 & x_3 \cdot y_3 & 0 & -y_3 \cdot x_3^2 & -y_3^2 \cdot x_3^3 & x_3^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{x_3}{2} & 0 & \frac{y_3}{2} & -y_3 & -2x_3 \cdot y_3 & -3x_3^2 \cdot y_3^2 & x_3 \\ 1 & 0 & -y_4 & x_4 & y_4 & x_4 \cdot y_4 & 0 & 0 & y_4^2 & x_4 \cdot y_4^2 & x_4^2 \cdot y_4^3 & 0 \\ 0 & 1 & x_4 & 0 & x_4 & 0 & y_4 & x_4 \cdot y_4 & 0 & -y_4 \cdot x_4^2 & -y_4^2 \cdot x_4^3 & x_4^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{x_4}{2} & 0 & \frac{y_4}{2} & -y_4 & -2x_4 \cdot y_4 & -3x_4^2 \cdot y_4^2 & x_4 \end{bmatrix}$$

I-c / Élément fini de plaque mince « HIMEUR »

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -x_1 & -y_1 & -\frac{x_1^2}{2} & -\frac{x_1^3}{6} & -\frac{x_1^2 y_1}{2} & -\frac{x_1^3 y_1}{6} & -\frac{y_1^2}{2} & -\frac{x_1 y_1^2}{2} & -\frac{y_1^3}{6} & -\frac{x_1 y_1^3}{6} & -\frac{x_1 y_1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x_1 & \frac{x_1^2}{2} & x_1 y_1 & \frac{x_1^2 y_1}{2} & 0 & \frac{y_1^2}{2} & 0 & \frac{y_1^3}{6} & \frac{y_1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{x_1^2}{2} & \frac{x_1^3}{6} & y_1 & x_1 y_1 & \frac{y_1^2}{2} & \frac{x_1 y_1^2}{2} & \frac{x_1}{2} \\ 1 & -x_2 & -y_2 & -\frac{x_2^2}{2} & -\frac{x_2^3}{6} & -\frac{x_2^2 y_2}{2} & -\frac{x_2^3 y_2}{6} & -\frac{y_2^2}{2} & -\frac{x_2 y_2^2}{2} & -\frac{y_2^3}{6} & -\frac{x_2 y_2^3}{6} & -\frac{x_2 y_2}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x_2 & \frac{x_2^2}{2} & x_2 y_2 & \frac{x_2^2 y_2}{2} & 0 & \frac{y_2^2}{2} & 0 & \frac{y_2^3}{6} & \frac{y_2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{x_2^2}{2} & \frac{x_2^3}{6} & y_2 & x_2 y_2 & \frac{y_2^2}{2} & \frac{x_2 y_2^2}{2} & \frac{x_2}{2} \\ 1 & -x_3 & -y_3 & -\frac{x_3^2}{2} & -\frac{x_3^3}{6} & -\frac{x_3^2 y_3}{2} & -\frac{x_3^3 y_3}{6} & -\frac{y_3^2}{2} & -\frac{x_3 y_3^2}{2} & -\frac{y_3^3}{6} & -\frac{x_3 y_3^3}{6} & -\frac{x_3 y_3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x_3 & \frac{x_3^2}{2} & x_3 y_3 & \frac{x_3^2 y_3}{2} & 0 & \frac{y_3^2}{2} & 0 & \frac{y_3^3}{6} & \frac{y_3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{x_3^2}{2} & \frac{x_3^3}{6} & y_3 & x_3 y_3 & \frac{y_3^2}{2} & \frac{x_3 y_3^2}{2} & \frac{x_3}{2} \\ 1 & -x_4 & -y_4 & -\frac{x_4^2}{2} & -\frac{x_4^3}{6} & -\frac{x_4^2 y_4}{2} & -\frac{x_4^3 y_4}{6} & -\frac{y_4^2}{2} & -\frac{x_4 y_4^2}{2} & -\frac{y_4^3}{6} & -\frac{x_4 y_4^3}{6} & -\frac{x_4 y_4}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x_4 & \frac{x_4^2}{2} & x_4 y_4 & \frac{x_4^2 y_4}{2} & 0 & \frac{y_4^2}{2} & 0 & \frac{y_4^3}{6} & \frac{y_4}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{x_4^2}{2} & \frac{x_4^3}{6} & y_4 & x_4 y_4 & \frac{y_4^2}{2} & \frac{x_4 y_4^2}{2} & \frac{x_4}{2} \end{bmatrix}$$

I-d / Élément fini de plaque épaisse « Pep43 »

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -x_1 & -y_1 & -\frac{x_1^2}{2} & -\frac{x_1^2 y_1}{2} & -\frac{y_1^2}{2} & -\frac{x_1 y_1^2}{2} & -\frac{x_1 y_1}{2} & -\frac{x_1^2 y_1}{4} & -\frac{x_1 y_1^2}{4} & -\frac{x_1}{2} & -\frac{y_1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x_1 & x_1 y_1 & 0 & -\frac{y_1^2}{2} & \frac{y_1}{2} & \frac{x_1 y_1}{2} & \frac{y_1^2}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{x_1^2}{2} & y_1 & x_1 y_1 & \frac{x_1}{2} & \frac{x_1^2}{4} & \frac{x_1 y_1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -x_2 & -y_2 & -\frac{x_2^2}{2} & -\frac{x_2^2 y_2}{2} & -\frac{y_2^2}{2} & -\frac{x_2 y_2^2}{2} & -\frac{x_2 y_2}{2} & -\frac{x_2^2 y_2}{4} & -\frac{x_2 y_2^2}{4} & -\frac{x_2}{2} & -\frac{y_2}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x_2 & x_2 y_2 & 0 & -\frac{y_2^2}{2} & \frac{y_2}{2} & \frac{x_2 y_2}{2} & \frac{y_2^2}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{x_2^2}{2} & y_2 & x_2 y_2 & \frac{x_2}{2} & \frac{x_2^2}{4} & \frac{x_2 y_2}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -x_3 & -y_3 & -\frac{x_3^2}{2} & -\frac{x_3^2 y_3}{2} & -\frac{y_3^2}{2} & -\frac{x_3 y_3^2}{2} & -\frac{x_3 y_3}{2} & -\frac{x_3^2 y_3}{4} & -\frac{x_3 y_3^2}{4} & -\frac{x_3}{2} & -\frac{y_3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x_3 & x_3 y_3 & 0 & -\frac{y_3^2}{2} & \frac{y_3}{2} & \frac{x_3 y_3}{2} & \frac{y_3^2}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{x_3^2}{2} & y_3 & x_3 y_3 & \frac{x_3}{2} & \frac{x_3^2}{4} & \frac{x_3 y_3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -x_4 & -y_4 & -\frac{x_4^2}{2} & -\frac{x_4^2 y_4}{2} & -\frac{y_4^2}{2} & -\frac{x_4 y_4^2}{2} & -\frac{x_4 y_4}{2} & -\frac{x_4^2 y_4}{4} & -\frac{x_4 y_4^2}{4} & -\frac{x_4}{2} & -\frac{y_4}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x_4 & x_4 y_4 & 0 & -\frac{y_4^2}{2} & \frac{y_4}{2} & \frac{x_4 y_4}{2} & \frac{y_4^2}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{x_4^2}{2} & y_4 & x_4 y_4 & \frac{x_4}{2} & \frac{x_4^2}{4} & \frac{x_4 y_4}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

## ANNEXE II – Matrices [Ko]

### II-a / Élément fini de membrane « T42 »

\* *Forme générale*

$$[\mathbf{K}_0] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \left[ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \left[ \begin{array}{ccc} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{array} \right] \cdot \left( \begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array} \right] dx dy$$

\* *Forme développée avant intégration analytique*

$$[\mathbf{K}_0] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \left( \begin{array}{ccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y & \nu & x \cdot \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & y^2 & y \cdot \nu & y \cdot \nu \cdot x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu & y \cdot \nu & 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \cdot \nu & y \cdot \nu \cdot x & x & x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \nu & 0 \end{array} \right)$$

\* *Forme développée après intégration analytique*

$$[\mathbf{K}_0] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \left[ \begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{00} & H_{01} & \nu \cdot H_{00} & \nu \cdot H_{10} \\ 0 & 0 & 0 & H_{01} & H_{02} & \nu \cdot H_{01} & \nu \cdot H_{10} \cdot H_{01} \\ 0 & 0 & 0 & \nu \cdot H_{00} & \nu \cdot H_{01} & H_{00} & H_{10} \\ 0 & 0 & 0 & \nu \cdot H_{10} & \nu \cdot H_{10} \cdot H_{01} & H_{10} & H_{20} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{00} \cdot \frac{(1-\nu)}{2} \end{array} \right]$$

Avec :  $H_{\alpha\beta} = \iint X^\alpha \cdot Y^\beta dx \cdot dy$

II-b / Elément fini de membrane « T43 »

\* *Forme générale*

$$[\mathbf{K}_0] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \int \int \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{pmatrix} dx dy$$

\* *Forme développée avant intégration analytique*

$$[\mathbf{K}_0] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \int \int \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & \nu & x \cdot \nu & y \cdot \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & x^2 & x \cdot y & x \cdot \nu & x^2 \cdot \nu & x \cdot \nu \cdot y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & x \cdot y & y^2 & y \cdot \nu & x \cdot \nu \cdot y & y^2 \cdot \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu & x \cdot \nu & y \cdot \nu & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \cdot \nu & x^2 \cdot \nu & x \cdot \nu \cdot y & x & x^2 & x \cdot y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \cdot \nu & x \cdot \nu \cdot y & y^2 \cdot \nu & y & x \cdot y & y^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & \frac{(1-\nu)}{2} \cdot x & \frac{(1-\nu)}{2} \cdot y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \cdot x & \frac{(1-\nu)}{2} \cdot x^2 & \frac{(1-\nu)}{2} \cdot x \cdot y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \cdot y & \frac{(1-\nu)}{2} \cdot x \cdot y & \frac{(1-\nu)}{2} \cdot y^2 \end{pmatrix} dx dy$$

\* *Forme développée après intégration analytique*

$$[\mathbf{K}_0] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{00} & H_{10} & H_{01} & H_{00} \cdot \nu & H_{10} \cdot \nu & H_{01} \cdot \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{10} & H_{20} & H_{11} & H_{10} \cdot \nu & H_{20} \cdot \nu & \nu \cdot H_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{01} & H_{11} & H_{02} & H_{01} \cdot \nu & \nu \cdot H_{11} & H_{02} \cdot \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{00} \cdot \nu & H_{10} \cdot \nu & H_{01} \cdot \nu & H_{00} & H_{10} & H_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{10} \cdot \nu & H_{20} \cdot \nu & \nu \cdot H_{11} & H_{10} & H_{20} & H_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{01} \cdot \nu & \nu \cdot H_{11} & H_{02} \cdot \nu & H_{01} & H_{11} & H_{02} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{H_{00} \cdot (1-\nu)}{2} & \frac{(1-\nu)}{2} \cdot H_{10} & \frac{(1-\nu)}{2} \cdot H_{01} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \cdot H_{10} & \frac{(1-\nu)}{2} \cdot H_{20} & \frac{(1-\nu)}{2} \cdot H_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \cdot H_{01} & \frac{(1-\nu)}{2} \cdot H_{11} & \frac{(1-\nu)}{2} \cdot H_{02} & 0 \end{bmatrix}$$

Avec :  $H_{\alpha\beta} = \iint X^\alpha \cdot Y^\beta dx \cdot dy$

*II-c / Élément fini de plaque mince « HIMEUR »*

\* *Forme générale*

$$[\mathbf{K}_0] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \int \int \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ y & 0 & 2x \\ xy & 0 & x^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 2y \\ 0 & y & 0 \\ 0 & xy & y^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x & x^2 & 0 & 2y & 0 & y^2 & 1 \end{pmatrix} dx dy$$

**\* Forme développée avant intégration analytique**

$$[K_0] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \times$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & x & y & x.y & \nu & \nu.x & \nu.y & \nu.x.y & & & & 0 \\ & & x^2 & x.y & x^2.y & \nu.x & \nu.x^2 & \nu.x.y & \nu.x^2.y & & & & 0 \\ & & & 4.x^2.d + y^2 & 2.x^3.d + x.y^2 & \nu.y & x.y.(v+4.d) & \nu.y^2 & x.y^2.(v+2.d) & 2.x.d & & & \\ & & & & x^4.d + x^2.y^2 & \nu.x.y & x^2.y.(v+2.d) & \nu.x.y^2 & x^2.y^2.(v+d) & x^2.d & & & \\ & & & & & & 1 & x & y & x.y & 0 & & \\ & & & & & & & x^2 + 4.y^2.d & x.y & x^2.y + 2.y^3.d & 2.y.d & & \\ & & & & & & & & y^2 & x.y^2 & 0 & & \\ & & & & & & & & & x^2.y^2 + y^4.d & y^2.d & & \\ & & & & & & & & & & & & d \end{bmatrix}$$

Avec :  $d = \frac{(1-\nu)}{2}$

**\* Forme développée après intégration analytique**

$$[K_0] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \times$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & H_{00} & H_{10} & H_{01} & H_{11} & \nu.H_{00} & \nu.H_{10} & \nu.H_{01} & \nu.H_{11} & & & & 0 \\ & & H_{20} & H_{11} & H_{21} & \nu.H_{10} & \nu.H_{20} & \nu.H_{11} & \nu.H_{21} & & & & 0 \\ & & & 4.H_{20}.d + H_{02} & 2.H_{30}.d + H_{12} & \nu.H_{01} & H_{11}.(v+4.d) & \nu.H_{02} & H_{12}.(v+2.d) & 2.H_{10}.d & & & \\ & & & & H_{40}.d + H_{22} & \nu.H_{11} & H_{21}.(v+2.d) & \nu.H_{12} & H_{22}.(v+d) & H_{20}.d & & & \\ & & & & & & H_{00} & H_{10} & H_{01} & H_{11} & 0 & & \\ & & & & & & & H_{20} + 4.H_{02}.d & H_{11} & H_{21} + 2.H_{03}.d & 2.H_{01}.d & & \\ & & & & & & & & H_{02} & H_{12} & 0 & & \\ & & & & & & & & & H_{22} + H_{04}.d & H_{02}.d & & \\ & & & & & & & & & & & & H_{00}.d \end{bmatrix}$$

Avec :  $H_{\alpha\beta} = \iint X^\alpha.Y^\beta dx.dy$

II-d / Élément fini de plaque épaisse « Pep43 »

\* **Forme générale**

$$[K_0] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \iint \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 & -x^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & -y^2 & 0 \\ \frac{y}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{2} & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6k}{h^2}(1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6k}{h^2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & \frac{y}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & \frac{x}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} dx dy$$

### ANNEXE III

Structure type de la matrice de rigidité de l'élément coque  $[Ke]$  au niveau élémentaire construite dans le système d'axes des coordonnées locales

		nœud 1						nœud 2						nœud 3					
		U <sub>1</sub>	V <sub>1</sub>	W <sub>1</sub>	$\beta_{x1}$	$\beta_{y1}$	$\theta_{z1}$	U <sub>2</sub>	V <sub>2</sub>	W <sub>2</sub>	Bx <sub>2</sub>	By <sub>2</sub>	$\theta_{z2}$	U <sub>3</sub>	V <sub>3</sub>	W <sub>3</sub>	Bx <sub>3</sub>	By <sub>3</sub>	$\theta_{z3}$
nœud 1	U <sub>1</sub>	M <sub>11</sub>	M <sub>12</sub>	0	0	0	M <sub>13</sub>	M <sub>14</sub>	M <sub>15</sub>	0	0	0	M <sub>16</sub>	M <sub>17</sub>	M <sub>18</sub>	0	0	0	M <sub>19</sub>
	V <sub>1</sub>		M <sub>22</sub>	0	0	0	M <sub>23</sub>	M <sub>24</sub>	M <sub>25</sub>	0	0	0	M <sub>26</sub>	M <sub>27</sub>	M <sub>28</sub>	0	0	0	M <sub>29</sub>
	W <sub>1</sub>			F <sub>11</sub>	F <sub>12</sub>	F <sub>13</sub>	0	0	0	F <sub>14</sub>	F <sub>15</sub>	F <sub>16</sub>	0	0	0	F <sub>17</sub>	F <sub>18</sub>	F <sub>19</sub>	0
	$\beta_{x1}$				F <sub>22</sub>	F <sub>23</sub>	0	0	0	F <sub>24</sub>	F <sub>25</sub>	F <sub>26</sub>	0	0	0	F <sub>27</sub>	F <sub>28</sub>	F <sub>29</sub>	0
	$\beta_{y1}$					F <sub>33</sub>	0	0	0	F <sub>34</sub>	F <sub>35</sub>	F <sub>36</sub>	0	0	0	F <sub>37</sub>	F <sub>38</sub>	F <sub>39</sub>	0
	$\theta_{z1}$						M <sub>33</sub>	M <sub>34</sub>	M <sub>35</sub>	0	0	0	M <sub>36</sub>	M <sub>37</sub>	M <sub>38</sub>	0	0	0	M <sub>39</sub>
nœud 2	U <sub>2</sub>						M <sub>44</sub>	M <sub>45</sub>	0	0	0	M <sub>46</sub>	M <sub>47</sub>	M <sub>48</sub>	0	0	0	M <sub>49</sub>	
	V <sub>2</sub>							M <sub>55</sub>	0	0	0	M <sub>56</sub>	M <sub>57</sub>	M <sub>58</sub>	0	0	0	M <sub>59</sub>	
	W <sub>2</sub>								F <sub>44</sub>	F <sub>45</sub>	F <sub>46</sub>	0	0	0	F <sub>47</sub>	F <sub>48</sub>	F <sub>49</sub>	0	
	$\beta_{x2}$									F <sub>55</sub>	F <sub>56</sub>	0	0	0	F <sub>57</sub>	F <sub>58</sub>	F <sub>59</sub>	0	
	$\beta_{y2}$											F <sub>66</sub>	0	0	0	F <sub>67</sub>	F <sub>68</sub>	F <sub>69</sub>	0
	$\theta_{z2}$												M <sub>66</sub>	M <sub>67</sub>	M <sub>68</sub>	0	0	0	M <sub>69</sub>
nœud 3	U <sub>3</sub>												M <sub>77</sub>	M <sub>78</sub>	0	0	0	M <sub>79</sub>	
	V <sub>3</sub>													M <sub>88</sub>	0	0	0	M <sub>89</sub>	
	W <sub>3</sub>														F <sub>77</sub>	F <sub>78</sub>	F <sub>79</sub>	0	
	$\beta_{x3}$															F <sub>88</sub>	F <sub>89</sub>	0	
	$\beta_{y3}$																	F <sub>99</sub>	0
	$\theta_{z3}$																		M <sub>99</sub>

Avec :

- $M_{ij}$  : Terme de la rigidité membranaire
- $F_{ij}$  : Terme de la rigidité flexionnelle