

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université 8Mai 1945 – Guelma
Faculté des sciences et de la Technologie
Département Electronique et Télécommunications



Mémoire

Présenté pour obtenir le diplôme de Magister en Télécommunications

OPTION: Télécommunications

Par:

BOUCHEMEL Ammar

Thème

**Sur l'estimation de la probabilité d'erreur binaire
dans les
Systèmes de communication numérique**

Devant le Jury :

Président

Pr. Boukrouche Abdelhani

U.Guelma

Rapporteur

Dr. Moussaoui Abdelkrim

U.Guelma

Examineurs

Dr. Bouallegue Ahcène

U.Guelma

Dr. Hamdi Rachid

U.Guelma

SESSION 2012

Résumé

Le développement rapide des systèmes de communication numérique et l'émergence des techniques de radiodiffusion nécessitant un grand réseau haut débit, imposent une nécessité d'améliorer les techniques de modulation numérique, les algorithmes de décodage et d'égalisation et ce pour avoir une bonne performance et assurer une bonne qualité de communication. Pour l'évaluation des performances des systèmes de communication, la Méthode de Monte Carlo est la technique la plus utilisée. Dans le présent mémoire, il est utilisé la technique de simulation Monte Carlo comme outil d'estimation du taux d'erreur binaire pour une modulation BPSK dans un système de communication numérique. La technique est testée sur deux modèles différents de canaux (AWGN et Rayleigh) et en considérant deux types d'égaliseurs (ZF et MMSE). Il est montré qu'avec un nombre assez élevé de bits, la simulation avec la méthode de Monte Carlo donne une bonne estimation du BER comparativement aux calculs théoriques. La technique de Monte Carlo est généralisée pour la modulation à plusieurs états (m-aire) et pour la modulation OFDM.

Mots Clés: Communications Numériques, Modulation Numérique, probabilité, performance, Taux d'Erreur Binaire, Egalisation, Estimation, Méthode de Monte Carlo.

Abstract

The rapid development of digital communication systems and the emergence of broadcasting technique requiring a large broadband networks, impose a need for improved digital modulation techniques, algorithms for decoding and equalization in order to have good performance and ensure good quality of communication. For the performance evaluation of communication systems, the Monte Carlo method is the most widely used technique. In the present work, it is used the technique of Monte Carlo simulation as a tool to estimate the bit error rate for BPSK modulation in a digital communication system. The technique is tested on two different channels (AWGN and Rayleigh) and by considering two types of equalizers (ZF and MMSE). It is shown that with a relatively high number of bits, the simulation with the Monte Carlo method gives a good estimate of the BER comparatively to the theoretical calculations. The Monte Carlo technique is generalized for the multi-state modulation (m-ary) and the OFDM modulation.

Keywords: Digital Communications, Digital Modulation, probability, performance, bit error rate, equalization, estimation, Monte Carlo Method.

ملخص

التطور السريع لنظم الاتصالات الرقمية و تقنيات البث يحتاج إلى شبكات التدفق العالي، مما يفرض ضرورة تحسين تقنيات التعديل الرقمية، وخوارزميات لفك التشفير والتسوية (égalisation) والحصول على أداء جيد وضمان نوعية جيدة للاتصالات. لتقييم أداء أنظمة الاتصالات، طريقة "مونت كارلو" هي الأسلوب الأكثر استخداما على نطاق واسع. في هذه المذكرة، يستخدم أسلوب محاكاة مونت كارلو كأداة لتقدير معدل أخطاء البت للتعديل BPSK في نظام الاتصالات الرقمية. يتم اختبار هذه التقنية على قناتين مختلفتين (AWGN و Rayleigh) مع نوعين من خوارزميات التسوية (ZF,MMSE). يتبين أن المحاكاة مع أسلوب مونت كارلو يعطي تقديرا جيدا لل BER بالمقارنة مع الحسابات النظرية وهذا باستخدام عددا كبيرا نسبيا من البت. وفي نفس السياق، عممت هذه التقنية على التعديل (m-aire) والتعديل OFDM.

كلمات البحث: الاتصالات الرقمية، التعديل الرقمي، الاحتمال، الأداء، معدل خطأ البت، التسوية، التقدير، طريقة محاكاة مونت كارلو.

Remerciements

La réalisation de ce travail ne saurait être considérée comme le fruit d'un effort individuel. Tout au contraire, ce travail est la résultante d'un ensemble conjugué d'apports humains et intellectuels. Certes, nous ne pouvons pas citer ici toutes les personnes qui nous ont apporté leur soutien, mais nous tenons tout de même à remercier particulièrement.

Avant tout à Dieu le tout puissant qui m'a donné le courage et la force pour réaliser ce modeste travail, et à qui j'adresse mes remerciements par sa grâce infinie pour moi.

Merci à Dieu le tout Puissant et le tout Miséricordieux.

Je voudrais tout d'abord exprimer mes plus sincères remerciements à mes chers parents, ainsi que mon encadreur Dr MOSSAOUI Abdelkrim, Maître de Conférences à l'Université 8 mai 45 de Guelma, pour son aide considérable et son orientation pendant le déroulement du travail. J'adresse aussi mes remerciements à tout le personnel du Laboratoire de Télécommunications (**LT**).

Mes vifs remerciements vont également aux membres de jury de soutenance de ce mémoire qui ont accepté de juger ce travail, après avoir pour certains d'entre eux, contribué à son élaboration :

- Prof : Boukrouche Abdelhani
- Dr : Bouallegue Ahcène
- Dr : Hamdi Rachid

Je tiens à exprimer mes remerciements à tous les enseignants du département de électronique et Télécommunications à l'université 08 Mai 1945 GUELMA qui ont assuré ma formation post-graduée.

Enfin, et surtout, je voudrais remercier ma famille, amies, et collègues qui on toujours été à mes côtés pour me soutenir m'encourager et me supporter, sans compter le temps passé à m'aider pour achever ce modeste travail.

SOMMAIRE

Introduction générale.....	(1)
CHAPITRE 1	
Chaîne de transmission numérique.....	(4)
1.1 Introduction	(4)
1.2 La chaîne de transmission numérique.....	(5)
1.2.1 La source de message.....	(5)
1.2.2 Le codage de source.....	(6)
1.2.3 Le codage de canal.....	(7)
1.2.4 L'émetteur (modulation).....	(8)
1.2.4.1 Modulation d'amplitude	(8)
1.2.4.2 Modulation de phase	(9)
1.4.2.3 Modulation M-QAM.....	(10)
1.4.2.4 Démodulation cohérente d'une modulation M-QAM.....	(11)
1.4.2.5 Modulation de fréquence	(11)
1.4.2.6 Modulation OFDM.....	(13)
a) Introduction aux modulations multiporteuses.....	(13)
b) Principe des modulations multiporteuses.....	(14)
c) Principe de la modulation OFDM.....	(14)

d) Pourquoi « orthogonal » ?.....	(15)
e) Principe de la démodulation.....	(16)
1.2.5 Le canal de transmission.....	(20)
1.2.5.1 Les canaux stationnaires.....	(21)
1.2.5.2 Les canaux non stationnaires.....	(22)
1.2.5.3 Le milieu de transmission.....	(23)
1.2.5.4 Le bruit.....	(24)
1.2.5.5 Transmission en bande de base et transmission sur onde porteuse.....	(26)
1.2.6 Le récepteur.....	(26)
1.2.6.1 Egalisation.....	(27)
a) Définition d'un égaliseur.....	(27)
b) Principe de l'égalisation.....	(27)
c) Egaliseur transverse linéaire.....	(28)
d) Egaliseur par « zero-forcing ».....	(29)
e) Égalisation à erreur quadratique moyenne minimale	(30)
f) Interférence entre symboles.....	(32)
1.2.7 Mesure de la qualité d'une transmission numérique.....	(33)
1.3 Conclusion.....	(34)

CHAPITRE 2

Méthode d'estimation Monte Carlo.....	(35)
2.1 Introduction.....	(36)
2.2 La méthode de simulation Monte Carlo.....	(36)
2.2.1 Présentation et historique.....	(36)
2.2.2 Estimateur et estimation: position du problème.....	(37)
2.2.3 Qualité de l'estimateur.....	(38)
2.2.3.1 Biais de L'estimateur.....	(39)
2.2.3.2 Variance et dispersion de l'estimateur.....	(39)
2.2.3.3 Efficacité de l'estimateur.....	(40)
2.2.3.4 Estimateur séquentiel consistant.....	(40)
2.2.3.5 Qualité de l'estimateur.....	(41)
2.2.3.6 Intervalle et niveau de confiance.....	(41)
2.3 Probabilité d'erreur théorique	(42)
2.3.1 Définitions.....	(42)
2.3.2 Cas des symboles binaires.....	(44)
2.3.3 Cas des symboles M-aires.....	(48)
2.4 Estimation de la probabilité d'erreur par la	
technique de Monte Carlo.....	(49)

2.4.1 Probabilité d'erreur.....	(49)
2.4.2 Application de MC pour l'évaluation des taux d'erreurs	
Binaires.....	(51)
2.4.2.1 Intervalle de confiance: loi binomiale.....	(53)
2.4.2.2 Intervalle de confiance: approximation par la loi de	
Poisson.....	(54)
2.4.2.3 Intervalle de confiance: approximation par la loi	
Normale.....	(55)
2.4.2.4 Moyenne et variance de l'estimateur de MC.....	(56)
2.5 Conclusion.....	(57)
CHAPITRE 3	
Simulation de Modulation BPSK.....	(58)
3.1 Introduction.....	(59)
3.2 Simulation des systèmes en modulation binaire BPSK.....	(59)
3.2.1 Modulation binaire BPSK.....	(59)
3.2.2 Modèle de canal AWGN.....	(59)
3.2.2.1 Calcul de la probabilité d'erreur.....	(60)

3.2.2.2 Procédure de simulation.....	(62)
3.2.3 Canal de Rayleigh	(63)
3.2.3.1 Modèle de système.....	(64)
3.2.3.2 Hypothèses.....	(64)
3.2.3.3 Taux d'erreur binaire (BER ou TEB).....	(65)
a) Fonction de densité de probabilité de γ	(66)
3.2.4 Utilisation d'égaliseurs pour la compensation des ISI.....	(67)
3.2.4.1 Symboles transmis	(67)
3.2.4.2 Modèle de canal.....	(68)
3.2.4.3 L'égalisation Forçage à Zéro (ZF).....	(69)
3.2.4.4 Egalisation MMSE.....	(72)
3.2.4.5 Procédure de simulation.....	(73)
3.2.5 BER pour BPSK en la modulation OFDM.....	(75)
3.2.5.1 Préfixe cyclique.....	(75)
3.2.5.2 Bande passante	(76)
3.2.5.3 Relation entre E_b/N_0 et E_s/N_0 en OFDM.....	(76)
3.2.5.4 Modèle de simulation avec canal AWGN.....	(77)
3.2.5.5 Modèle de simulation avec canal de Rayleigh multi trajets.....	(78)
3.3 calcul des variances	(79)
3.4 Diagramme de l'œil.....	(83)

3.3.1 Présentation sur le Diagramme de l'œil.....(83)

3.3.2 Résulta de simulation pour le diagramme de l'œil.....(84)

3.4 Conclusion.....(90)

CHAPITRE 4

Application à la Modulation M-aire.....(91)

4.1 Introduction.....(92)

4.2 Taux d'erreur symbole (TER) pour la modulation 4-PAM.....(92)

4.2.1 Contexte.....(92)

4.2.2 Modèle de bruit.....(93)

4.2.3 Calcul du taux d'erreur symbole.....(93)

4.2.4 Procédure de simulation.....(95)

**4.3 Taux d'erreur symbole (SER) pour
la modulation QPSK (4-QAM)(96)**

4.3.1 Contexte.....(96)

4.3.2 Modèle de bruit.....(97)

4.3.3 Calcul de la probabilité d'erreur.....(97)

4.3.4 : Probabilités totale d'erreur symbole(98)

4.3.5 : Procédure de simulation.....(99)

4.4 Modulation 16-PSK.....(100)

4.4.1 Taux d'erreur symbole pour 16-PSK.....(100)

4.4.2 Procédure de simulation.....(103)

Sommaire

4.5 Conclusion.....	(104)
Conclusion générale.....	(105)
Bibliographie.....	(107)
Annexe 1 Variable aléatoire chi carré.....	(110)
Annexe 2 Signaux Aléatoires.....	(113)
Annexe 3 :Organigramme de BER pour la modulation BPSK.....	(114)
Annexe 4 : Modélisation du système de modulation pour la simulation Monte Carlo.....	(115)

Liste des figures.

Figure 1.1 : Principe d'une chaîne de transmission numérique.....	4
Figure 1.2 Modulation 2-ASK (<i>On-Off Keying</i>)	9
Figure 1.3 Modulation de phase (PSK: <i>Phase Shift Keying</i>).....	10
Figure 1.4 Modulation 2-FSK.....	13
Figure 1.5 Schéma de principe d'un modulateur.....	15
Figure 1.6 Spectres des différentes porteuses.....	15
Figure 1.7 Spectre du signal OFDM pour 8 porteuses.....	16
Figure 1.8 Schéma de principe du démodulateur OFDM.....	17
Figure 1.9 La constellation du signal émis.....	18
Figure 1.10 Le signal émis.....	18
Figure 1.11 La constellation du signal reçu.....	19
Figure 1.12 : le signal reçu	19
Figure 1.13 Le canal de transmission.....	20
Figure 1.14 Le canal à bruit additif blanc gaussien AWGN.....	21
Figure 1.15 Classification de canaux de transmission.....	23
Figure 1.16 Principe De Récepteur Pour Transmission Sur Onde Porteuse.....	26
Figure 1. 17 Modèle de canal équivalent avec égaliseur.....	28
Figure 1.18 Egaliseur transversal linéaire.....	29

Figure 1.19 Egaliseur forçage à zéro.....	29
Figure 1.20 Système adaptatif d'égalisation.....	30
Figure 2. 1 Prise de décision dans le cas binaire.....	42
Figure 2. 2 Densités de probabilités conditionnelles pour deux hypothèses.....	44
Figure 2. 3 fonction d'erreur Q	46
Figure 2. 4 Probabilité d'erreur binaire pour le canal gaussien.....	47
Figure 2. 5 Exemple pour $M=6$.....	48
Figure 2. 6 Fonction de densité de probabilité du signal à la réception.....	50
Figure 2.7 Représentations schématique de l'implémentation de la	
procédure d'estimation de MC.....	52
Figure 2.8 Bandes de confiance sur le TEB lorsque la valeur observée 10^{-k}	56
Figure:3.1 Schéma simplifié de BPSK émetteur-récepteur.....	59
Figure 3.2: densité de probabilité conditionnelle avec modulation BPSK.....	60
Figure 3.3 : simulation BER pour modulation BPSK avec canal AWGN	
Pour $N=10^3$ bit d'émission.....	62
Figure 3.4 : simulation BER pour modulation BPSK avec canal AWGN	
Pour $N=10^6$ bit d'émission.....	63
Figure 3.5 : simulation BER pour modulation BPSK avec canal Rayleigh	
Pour $N=10^6$ bit d'émission.....	67
Figure 3.6: Les symboles de transmission.....	68
Figure 3.7: modèle de canal (3 multi trajets du robinet).....	68

Figure 3.8: Réponse en fréquence du canal et de l'égaliseur.....	70
Figure 3.9: simulation BER pour modulation BPSK dans un canal	
de 3 robinet ISI avec l'égaliseur ZF Pour $N=10^6$ bit d'émission.....	71
Figure 3.10: simulation BER pour modulation BPSK dans un canal	
de 3 robinet ISI avec l'égaliseur MMSE Pour $N=10^6$ bit d'émission.....	74
Figure 3.11: simulation BER pour BPSK avec modulation OFDM	
dans un canal de AWGN Pour $N=10^6$ bit d'émission.....	77
Figure 3.12: simulation BER pour BPSK avec modulation OFDM dans un canal de	
Rayleigh de 10 multi trajet pour $N=10^6$ bit d'émission.....	79
Figure 3.13 : Variance de l'estimateur MC pour la Modulation BPSK.....	80
Figure 3.14: Variance de l estimateur MC pour la Modulation BPSK dans le	
canal Rayleigh.....	80
Figure 1.15: Variance de l estimateur MC pour la Modulation BPSK avec	
l'égaliseur ZF.....	81
Figure 3.16: Variance de l estimateur MC pour la Modulation BPSK	
avec l'égaliseur MMSE et ZF.....	81
Figure 3.17: Variance de l estimateur MC pour BPSK avec modulation	
OFDM pour canal AWGN.....	82
Figure 3.18: Variance de l estimateur MC pour BPSK avec modulation OFDM	
pour canal de Rayleigh à 10 coefficient.....	82
Figure 3.19 schéma de visualisation de diagramme de l'œil.....	83
Figure 3.20 diagramme de l'œil.....	84
Figure 4.1: Diagramme de Constellation pour la modulation 4 PAM	92

Figure 4.2 La fonction de distribution de probabilité	
quand l'alphabet +3 est envoyé.....	93
Figure 4.3 La fonction de distribution de probabilité	
quand l'alphabet +1 est envoyé.....	94
Figure 4.4 Taux d'erreur symbole pour une modulation 4-PAM	
pour 10^6 bit d'émission.....	96
Figure 4.5: Diagramme de Constellation pour QPSK (4-QAM) constellation.....	96
Figure 4.6: fonction de densité de probabilité pour le modulation QPSK (4QAM).....	97
Figure 4.7: Taux d'erreur symbole de modulation QPSK (4QAM)	
pour 10^6 bit d'émission.....	99
Figure 4.8: Diagramme de constellation de 16-PSK.....	100
Figure 4.9: Distance entre les points de la constellation.....	102
Figure 4.10 : Taux d'erreur symbole pour une modulation 16-PSK	
pour $2*10^6$ bit d'émission.....	104

Abréviations

BER	Bit Error Rate
TEB	Taux d'Erreur Binaire
ASK	Amplitude Shift Keying
PSK	Phase Shift Keying
BPSK	Binary Phase Shift Keying
QAM	Quadratique Amplitude Modulation
FSK	Frequency Shift Keying
CPFSK	Continuous Phase Frequency Shift Keying
MSK	Minimum Shift Keying
GMSK	Gaussian Minimum Shift Keying
OFDM	Orthogonal Frequency Division Multiplexing
AWGN	Average White Gaussian Noise
AGB	bruit Additif Gaussien Blanc
MC	Monte Carlo
SNR	Signal to Noise Ratio
PAM	Pulse Amplitude Modulation
IES	Interférence Entre Symboles
LTE	Linear Transversal Equalizer
ZF	Zero-Forcing
MMSE	Minimum Mean Square Error
T_{cp}	La durée de la Préfixe cyclique
T_d	la durée de donner symbole,
T_s	la durée Total des Symbole,
n_{DSC}	Nombre de sous porteurs utilisés.
n_{FFT}	Taille de la transformation de Fourier

INTRODUCTION GENERALE

Le développement rapide des systèmes de communication et l'émergence des techniques de radiodiffusion créent au sein des utilisateurs un besoin grandissant de réseaux à haut débit. Face à cette situation, le grand défi qui se présente aux chercheurs en télécommunication est la transmission à haut débit dans des canaux à trajets multiples sélectifs en fréquence [1]. Ces derniers forment une classe importante de milieux de propagation dont font partie les canaux radio mobiles, ionosphériques, acoustiques, micro cellulaires et certains environnements radars. Ayant des réponses impulsionnelles de quelques microsecondes, les canaux à trajets multiples sont considérés « très sévères ». La transmission séquentielle à haut débit via ces canaux n'est possible que par l'utilisation de techniques complexes telles que l'égalisation [2], le codage ou encore l'étalement spectral [3]. De telles techniques sont souvent coûteuses et imposent des limites au débit binaire.

A la fin des années 50, il a été proposé [4] la transmission à porteuses multiples comme solution pour optimiser l'utilisation du spectre de fréquence. Le principe de cette transmission consiste à répartir l'information sur un grand nombre de fréquences porteuses, dont chacune est individuellement modulée à bas débit. Cette technique a alors l'avantage de transformer un canal de grande largeur de bande et sélectif en fréquence en une multitude de sous-canaux de largeur plus étroite. Les sous-canaux à bande étroite peuvent être alors considérés non sélectifs. En effet, la réponse fréquentielle de chaque sous-canal peut être considérée comme constante. Malgré ses avantages et sa bonne efficacité spectrale, la transmission parallèle a été abandonnée en raison de la complexité des équipements d'émission et de réception qui nécessitent un grand nombre de filtres et de modulateurs.

INTRODUCTION GENERALE

Avec le développement des circuits électroniques et du traitement du signal. Ebert et Weinstein [5] démontrèrent, au début des années 70, qu'il est possible de synthétiser un modulateur à porteuses multiples à l'aide de la transformée de Fourier discrète. La complexité de calcul peut ainsi se réduire considérablement en utilisant des algorithmes de transformées de Fourier rapides.

De nos jours, le multiplexage par division de fréquences orthogonales, connu sous le nom OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) est la technique de transmissions multiporteuses la plus utilisée. Elle est aujourd'hui utilisée dans plusieurs applications, surtout pour la transmission à haut débit sur des canaux radioélectriques sélectifs en fréquence pour simplifier l'égalisation. Cette dernière est même inutile quand le système est en modulation différentielle [6].

L'objectif principal de notre travail est l'évaluation des performances des systèmes de communication numérique sous diverses conditions de propagation. De ce fait, on s'intéresse à l'élaboration de procédures d'évaluation des performances en adoptant comme critère de performance, la probabilité du taux d'erreur binaire (BER). Nous proposons ainsi une approche permettant l'utilisation de la technique de simulation de Monte Carlo comme outil d'estimation de ce critère de performance [7].

La Simulation de Monte Carlo, est une méthode de calcul itérative utilisé pour examiner et étudier le comportement des systèmes physiques et mathématiques en utilisant des techniques stochastiques. C'est une méthode très utilisée et un outil efficace dans l'étude statistique. En effet, La méthode de Monte Carlo s'est révélée être une technique d'échantillonnage statistique de calcul très utile dans la réalisation de solutions numériques approchées aux problèmes complexes (non linéaires, à paramètres incertains, etc.) et dont la résolution analytique est trop compliqué voir même impossible. Historiquement, toutefois, en raison de la quantité relativement importante de temps de calcul nécessaire, cette technique a été considéré comme relativement lourde.

Aujourd'hui, en raison du développement considérable des moyens de calcul informatique et la disponibilité de ressources de calcul distribuées, ces techniques sont devenues accessibles [8]. En effet, les techniques de simulation Monte Carlo, ont vu leur domaine d'utilisation s'étendre à la physique nucléaire, aux finances et aux affaires, à l'ingénierie, à l'économie, à l'analyse des risques, à la gestion de projet, aux sciences de l'environnement, à la chimie, aux télécommunications, etc. [8].

Le mémoire est composé de quatre chapitres. Dans le premier chapitre, nous donnons des notions générales sur la communication numérique. Ce passage a pour but de rappeler principalement la terminologie et les définitions associées à la théorie de communication numérique.

Dans le deuxième chapitre nous décrivons la technique de simulation de Monte Carlo et ses propriétés, tout en introduisant des notions générales sur la théorie de l'estimation et la terminologie et les définitions qui lui sont associées.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des procédures d'application de la technique de simulation de Monte Carlo pour la modulation BPSK sur deux modèles différents de canaux (bruit blanc gaussien additif AWGN et canal Rayleigh) et en considérant deux types d'égaliseurs (ZF et MMSE).

Dans le quatrième chapitre, nous présentons les résultats obtenus par l'application de la méthode de simulation Monte Carlo au système de modulation M-aire pour différents types de modulation (QPSK, 4-PAM et 16-PSK). Nous traitons, pour chacune de ces modulations, le cas où le canal est à bruit blanc gaussien additif AWGN.

Enfin nous donnons une conclusion générale et les éventuelles perspectives du présent travail.

CHAPITRE**1**

La chaîne de transmission numérique

La transmission numérique consiste à faire transiter les informations sur le support physique de communication sous forme de signaux numériques. Ainsi, des données analogiques devront préalablement être numérisées avant d'être transmises. Toutefois, les informations numériques ne peuvent pas circuler sous forme de 0 et de 1 directement, il s'agit donc de les coder et de les moduler. Dans ce chapitre nous donnons un aperçu sur les différents éléments constituant la chaîne de transmission de l'information et ce depuis l'émetteur jusqu'au récepteur.

1.1 Introduction :

Les systèmes de transmission numérique véhiculent de l'information entre une source et un destinataire en utilisant un support physique comme le câble, la fibre optique ou encore, la propagation sur un canal radioélectrique. Les signaux transportés peuvent être soit directement d'origine numérique, comme dans les réseaux de données, soit d'origine analogique (parole, image...) mais convertis sous une forme numérique.

La tâche d'un système de transmission est d'acheminer l'information de la source vers le destinataire avec le plus de fiabilité possible. Le schéma synoptique d'un système de transmission numérique est donné à la figure 1.1. On se limite aux fonctions de base :

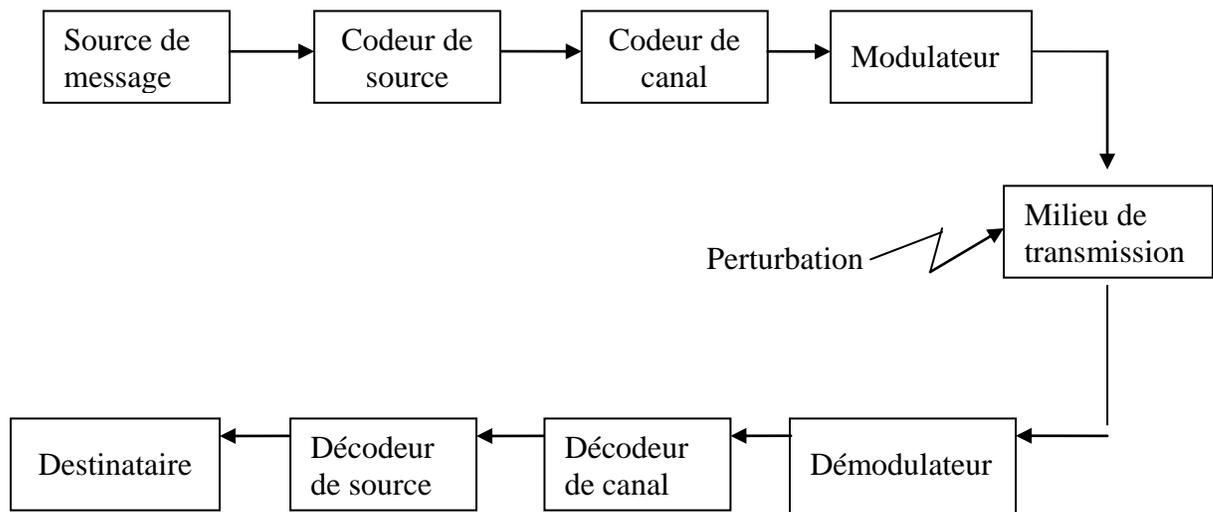


Figure 1.1 : Principe d'une chaîne de transmission numérique

- ◆ La source émet un message numérique sous la forme d'une suite d'éléments binaires.
- ◆ Le codeur de source supprime les éléments binaires non significatifs (Compression de données ou codage de source).
- ◆ Le codeur canal introduit de la redondance dans l'information en vue de la protéger contre le bruit présent sur le canal de transmission. Le codage de canal n'est possible que si le débit de la source est inférieur à la capacité du canal de transmission (la probabilité d'erreur P_e tend vers 0 d'après les travaux de Shannon).

◆ La modulation a pour rôle d'adapter le spectre du signal au canal (milieu physique) sur lequel il sera émis.

◆ Enfin, du côté récepteur, les fonctions de démodulation et de décodage sont les inverses respectifs des fonctions de modulation et de codage de la partie émettrice.

Les trois caractéristiques principales permettant de comparer entre elles les différentes techniques de transmission sont les suivantes :

- La probabilité d'erreur « P_e » par bit transmis permet d'évaluer la qualité d'un système de transmission. Elle est fonction de la technique de transmission utilisée, mais aussi du canal sur lequel le signal est transmis. En pratique, elle est estimée par le Taux d'Erreur par Bit « TEB ».

- L'occupation spectrale du signal émis doit être connue pour utiliser efficacement la bande passante du canal de transmission. On est contraint d'utiliser de plus en plus des Modulations à grande efficacité spectrale.

- La complexité du récepteur est le troisième aspect important d'un système de transmission.

1.2 La chaîne de transmission numérique [9]

Le schéma de principe d'une chaîne de transmission numérique est représenté sur la figure 1.1. On peut distinguer : la source de message, le milieu de transmission et le destinataire qui sont des données du problème, le codage et le décodage de source, le codage et le décodage de canal, l'émetteur et le récepteur représentent les degrés de liberté du concepteur pour réaliser le système de transmission. Nous allons maintenant décrire de façon succincte les différents éléments qui constituent une chaîne de transmission en partant de la source vers le destinataire.

1.2.1 La source de message :

Pour réaliser une transmission numérique, le message à transmettre doit être sous forme numérique. Si la source délivre un message analogique tel que le signal de parole

(sortie d'un microphone) ou le signal d'image (sortie d'une caméra), il faut le numériser en échantillonnant le message analogique puis en quantifiant les échantillons obtenus. Chaque échantillon quantifié est ensuite codé sur m bits.

1.2.2 Le codage de source :

Consiste à supprimer la redondance contenue dans les messages de la source d'information. Il peut être avec ou sans pertes d'information. La compression avec pertes vise les signaux numérisés (image, audio ou vidéo).

Après numérisation et codage, la source de message numérique est caractérisée par son débit binaire D , défini comme le nombre d'éléments binaires émet par unité de temps. Il est donné par l'expression :

$$D = \frac{1}{T} \text{ (bit/s)} \quad (1.1)$$

Où T est la durée d'un bit.

Parmi les exemples de débit binaire en sortie de sources numérisées et codées, on peut citer la numérisation du signal de parole, préalablement limité à la bande 300-3400 Hz en téléphonie, est réalisée en échantillonnant ce signal à la fréquence de 8 kHz, puis en codant les échantillons quantifiés sur $m = 8$ bits, Ainsi après numérisation, le signal de parole est transformé en une source numérique ayant un débit binaire de 64 k bit/s ; ce codage de la parole a pris le nom de « codage MIC » (modulation par impulsion codée). Avec un codage de source plus élaboré, ce débit de 64 k bit/s peut être réduit à 32 kbit/s sans dégradation de la qualité subjective de la parole ; des algorithmes permettant d'atteindre des débits de 16 et 8 kbit/s ont même été adoptés récemment par les organismes internationaux de normalisation. Pour le radiotéléphone cellulaire numérique (GSM), ce débit a été ramené à 13 k bit/s.

Pour un signal vidéo correspondant à une cadence de transmission de 25 images par seconde, la fréquence d'échantillonnage du signal de luminance est de 13.5 MHz et de 6.75 MHz pour les deux signaux de chrominance. Le codage des échantillons quantifiés étant réalisé sur $m = 8$ bits. Le signal vidéo après numérisation est transformé en une

source numérique ayant un débit binaire de 243 Mbit/s dont 27 Mbit/s sont réservés à des fonctions de synchronisation les techniques de codage de source permettent actuellement de réduire ce débit à 8 Mbit/s sans pratiquement altérer la qualité subjective des images. Pour des applications spécifiques, il est possible de réduire encore ce débit binaire. Pour le visiophone par exemple, le signal vidéo est codé avec 64 k bit /s.

1.2.3 Le codage de canal :

Le codage de canal, aussi appelé codage détecteur et / ou correcteur d'erreur, est une fonction spécifique des transmissions numériques, qui n'a pas son équivalent en transmission analogique. Le codage de canal consiste à insérer dans le message des éléments binaires dits de redondance suivant une loi donnée. Cette opération conduit donc à une augmentation du débit binaire de la transmission; Le décodeur de canal, qui connaît la loi de codage utilisée à l'émission, vient vérifier si cette loi est toujours respectée en réception. Si ce n'est pas le cas, il détecte la présence d'erreurs de transmission qu'il peut corriger sous certaines conditions. Pour illustrer la fonction de codage de canal, considérons l'exemple suivant : supposons que l'on insère un élément binaire, dit de parité, tous les p éléments binaires du message, de telle sorte que la somme de ces $(p+1)$ éléments binaires soit paire. En testant la parité de cette somme. Le décodeur pourra détecter toutes les erreurs de transmission en nombre impair parmi ces $(p+1)$ éléments binaires. Ce code, appelé code de parité ne permet pas, à l'évidence, de corriger les erreurs de transmission, mais simplement d'en détecter la présence, ce qui permettrait, par exemple, de demander la retransmission du message. La fonction de codage de canal n'est pas toujours utilisée car elle accroît la complexité des équipements de transmission et donc leur coût.

1.2.4 L'émetteur (modulation) :

Le message numérique, en tant que suite d'éléments binaires, est une grandeur abstraite. Pour transmettre ce message il est donc nécessaire de lui associer une représentation physique, sous forme d'un signal. C'est la première fonction de l'émetteur, appelée généralement opération de modulation. Plus précisément, la modulation consiste à associer à chaque mot de n éléments binaires (n - uplet) issu du message, un signal $S_i(t)$, $i=1, \dots, M$, de durée $T = nT_b$ choisi parmi $M = 2^n$ signaux, en fonction de ce mot. Le message binaire de débit D est donc représenté par un signal, dont on définit alors la rapidité de modulation R (exprimée en Bauds), comme le nombre de signaux émis par le modulateur par unité de temps :

$$R = \frac{1}{T} \text{ (Bauds)}. \quad (1.2)$$

On parle alors de transmission M -aire et dans ce cas, la rapidité de modulation R peut s'exprimer en fonction du débit binaire D par la relation :

$$R = \frac{D}{\log_2 M} \quad (1.3)$$

La transmission sur fréquence porteuse effectue une transmission dans une bande de fréquence centrée autour de la fréquence porteuse non nulle. Dans ce cas, la séquence de symboles à émettre module une porteuse en modifiant l'un ou plusieurs de ses paramètres, d'amplitude, de phase ou de fréquence, éventuellement de polarisation. Dans certains cas, la transmission peut s'effectuer en modulant simultanément plusieurs porteuses.

1.2.4.1 Modulation d'amplitude (ASK: *Amplitude Shift Keying*) [10] [11]

Dans une modulation ASK, à chaque symbole s_i est associée une amplitude A_i . Ainsi le signal modulé ASK s'écrit :

$$u(t) = \sum_k \alpha_k \cos(2\pi f_c t) r(t - kT) \quad (1.4)$$

Où $r(t)$ est une impulsion d'énergie finie. Le cas le plus simple correspond à une impulsion rectangulaire de durée T , et α_k représente l'amplitude A_i émise dans l'intervalle k . On peut écrire :

$$u(t) = z_I(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (1.5)$$

Où $z_I(t)$ est un signal PAM NRZ à M niveaux, ainsi le signal modulé ASK s'obtient par une modulation d'amplitude analogique de la porteuse par un signal NRZ à M niveaux.

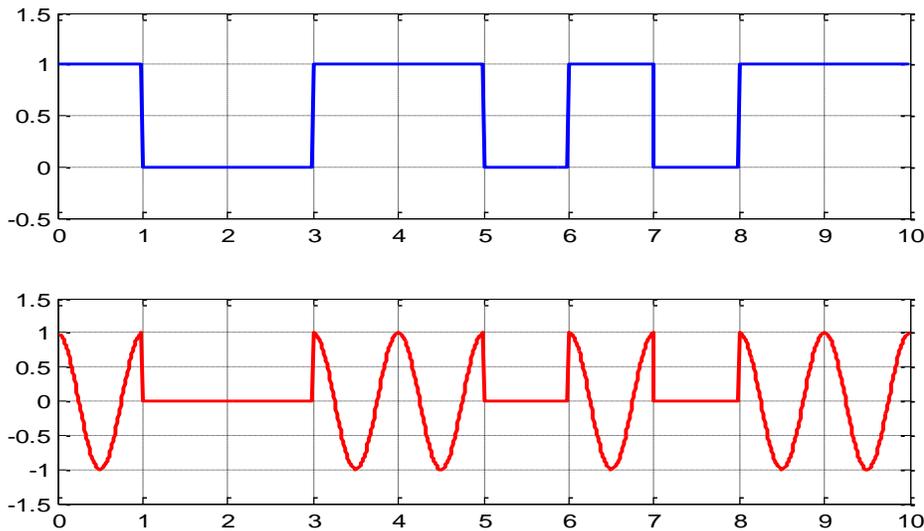


Figure 1.2: Modulation 2-ASK (*On-Off Keying*)

1.2.4.2 Modulation de phase (PSK: *Phase Shift Keying*) [10] [11]

Dans une modulation PSK, à chaque symbole s_i est associée une phase φ_i . Le signal modulé PSK s'écrit :

$$u(t) = \sum_k \cos(2\pi f_c t + \varphi_k) r(t - kT) \quad (1.6)$$

Où φ_k représente la phase émise dans l'intervalle k . Cette expression peut se réécrire sous la forme :

$$u(t) = z_I(t) \cos(2\pi f_c t) - z_Q(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (1.7)$$

Avec :

$$z_I(t) = \sum_k \cos(\varphi_k) r(t - kT) \quad \text{et} \quad z_Q(t) = \sum_k \sin(\varphi_k) r(t - kT)$$

Le signal $u(t)$ modulé PSK est obtenu en combinant linéairement deux modulations d'amplitude en quadrature : le signal $z_I(t)$, modulant la porteuse $\cos(2\pi f_c t)$, et le signal $z_Q(t)$, modulant la porteuse en quadrature (déphasée de $\pi/2$) ; $\sin(2\pi f_c t)$.

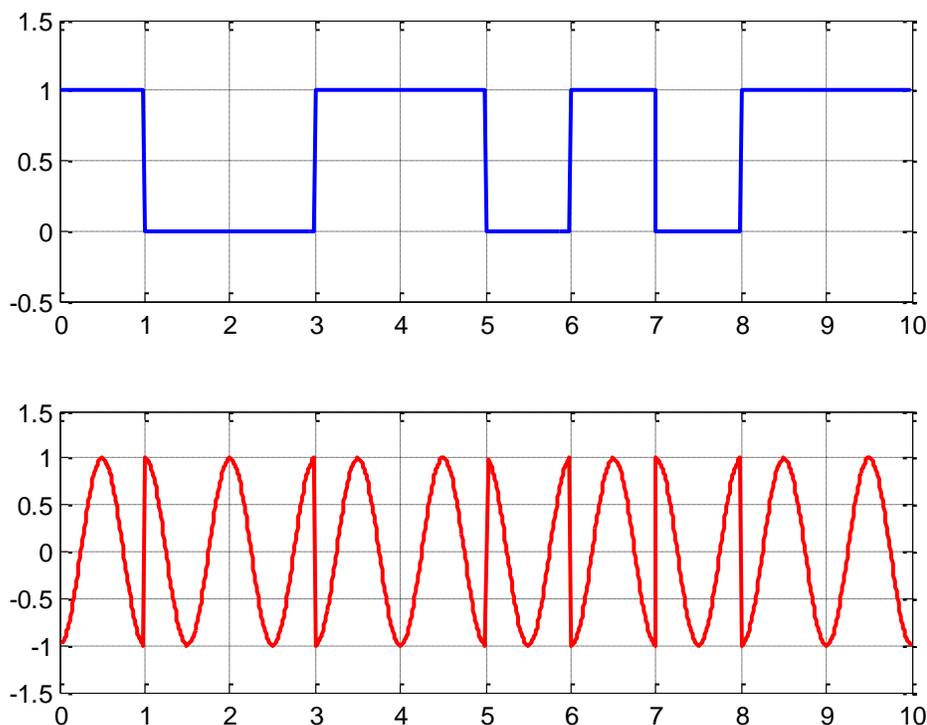


Figure 1.3 Modulation de phase (PSK: *Phase Shift Keying*)

1.4.2.3 Modulation M-QAM [10] [11]

Les deux modulations précédentes sont combinées, et produisent une modulation M-aire de phase et d'amplitude appelée modulation **M-QAM** (*Quadratique Amplitude Modulation à M niveaux*). On associe ici à chaque symbole s_i une amplitude A_i et une phase φ_i . Le signal modulé à M niveaux d'amplitude et de phase, souvent appelé M-QAM s'écrit :

$$u(t) = \sum_k \alpha_k \cos(2\pi f_c t + \varphi_k) r(t - kT) \quad (1.8)$$

$u(t)$ peut se réécrire sous la forme de l'équation (1.7) avec :

$$z_I(t) = \sum_k \alpha_k \cos(\varphi_k) r(t - kT), \quad z_Q(t) = \sum_k \alpha_k \sin(\varphi_k) r(t - kT)$$

Où α_k et φ_k représentent l'amplitude A_i et la phase φ_i émises dans l'intervalle k . Il est à noter que les modulations QAM sont des modulations par saut d'amplitude ou de phase ou d'amplitude et de phase combinées. Quand seule l'amplitude de la porteuse porte l'information, il s'agit d'une ASK. Quand seule la phase de la porteuse porte l'information, il s'agit d'une PSK. Lorsque l'information est transmise par des sauts de phase et d'amplitude combinées, on l'appelle modulation QAM.

1.4.2.4 Démodulation cohérente d'une modulation M-QAM

On appellera démodulation, l'opération consistant à ramener en bande de base le signal reçu, c'est-à-dire récupérer les signaux $Z_I(t)$ et $Z_Q(t)$. On n'inclura pas dans le terme démodulation, la notion de détection, c'est-à-dire la décision sur le symbole reçu.

On appelle démodulation cohérente, une modulation effectuée en utilisant la connaissance parfaite de la porteuse (en amplitude, fréquence et en phase).

Pour démoduler de façon cohérente, on peut opérer de deux manières : soit par translation en fréquence puis filtrage passe-bas, soit par filtrage de Hilbert puis translation en fréquence.

1.4.2.5 Modulation de fréquence (FSK : *Frequency Shift Keying*) [11]

Dans ce cas, c'est la fréquence instantanée du signal modulé qui peut prendre un certain nombre de valeurs associées aux états possibles de l'information à transmettre. Le signal modulé en 2-FSK s'écrira donc sous la forme :

$$u(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t)) \quad (1.9)$$

$\varphi(t)$ est la phase à l'instant t . La fréquence instantanée $f(t)$ est obtenue par dérivation de la phase par rapport au temps et division par 2π , soit :

$$f(t) = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi}{dt} \quad (1.10)$$

Le second terme du second membre de l'équation (1.10) est la déviation de la fréquence par rapport à sa valeur moyenne, égale à f_0 , compte tenu que cette déviation prend les valeurs $\pm \Delta f / 2$ selon l'élément binaire transmis, on pourra encore écrire :

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\Delta f}{2} \sum_k \alpha_k r(t - kT) \quad (1.11)$$

α_k prenant les valeurs ± 1 , introduisant l'indice de modulation m :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pi \cdot \Delta f \sum_k \alpha_k r(t - kT) = \frac{m\pi}{T} \sum_k \alpha_k r(t - kT) \quad (1.12)$$

Puisque la phase est la primitive de la fréquence, elle n'est définie qu'à une constante d'intégration près. Partant de l'équation (1.12), on obtient par intégration :

$$\varphi(t) = \pi \cdot \Delta f \cdot \alpha_k (t - kT) + \theta_k = \frac{m\pi}{T} \alpha_k (t - kT) + \theta_k \quad (1.13)$$

Avec $t \in [kT, (k+1)T[$, l'équation (1.13) montre donc que la phase varie linéairement sur l'intervalle $t \in [kT, (k+1)T[$ et que la variation est de $\pm m\pi$, selon la valeur de l'élément binaire transmis. La constante θ_k est déterminée par les conditions initiales, c'est-à-dire qu'elle est égale à $\varphi(kT)$.

On sera amené à distinguer deux cas importants, *les modulations à phase discontinue* et *les modulations à phase continue*, telles que, la modulation *CPFSK* (*Continuous Phase Frequency Shift Keying*), la modulation *MSK* (*Minimum Shift Keying*) qui est une modulation *CPFSK* d'indice de modulation $m=0.5$. Son nom provient de l'utilisation de l'écart (Δf) minimum permettant d'obtenir des fréquences orthogonales, et la modulation *GMSK* (*Gaussian Minimum Shift Keying*) qui est une modulation *MSK* à laquelle on a ajouté un filtre passe-bas gaussien dans le but de diminuer l'occupation spectrale du signal modulé.

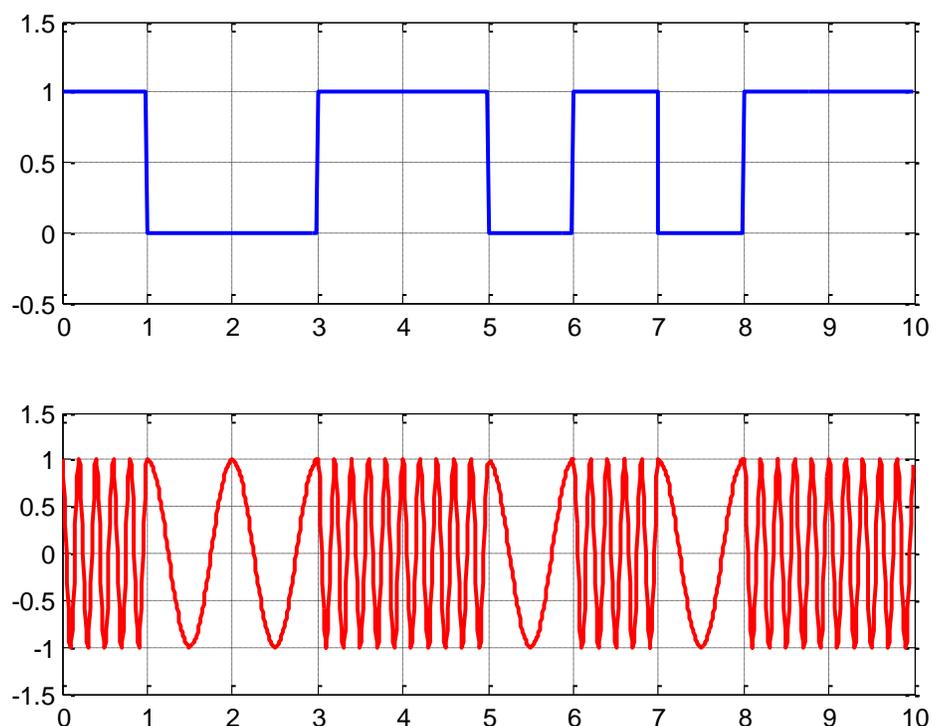


Figure 1.4 Modulation 2-FSK

1.4.2.6 Modulation OFDM [12].

a) Introduction aux modulations multiporteuses.

Les techniques qu'on appelle multiporteuses consistent à transmettre des données numériques en les modulant sur un grand nombre de porteuses en même temps. Ce sont des techniques de multiplexage en fréquence qui existent depuis longtemps.

Le regain d'intérêt actuel réside dans l'amélioration apportée pour augmenter l'efficacité spectrale en orthogonalisant les porteuses ce qui permet d'implémenter la modulation et la démodulation à l'aide de circuits performants de transformée de Fourier rapide.

Le multiplexage en fréquence est bénéfique pour les transmissions dans des canaux sélectifs en fréquence qui comportent des trajets multiples. C'est pourquoi on trouve cette technique dans les normes de diffusion du son numérique dans des mobiles (DAB Digital

Audio Broadcasting) , de télévision numérique terrestre (DVB-T Digital Video Broadcasting terrestrial), de communications numériques hauts débits (ADSL Asynchronous Digital Subscriber Line). Suivant les applications, cette technique se nomme OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing)

b) Principe des modulations multiporteuses.

Le principe est de transmettre des données numériques en parallèle modulées sur un grand nombre de porteuses à bas débit.

Dans un système conventionnel de transmission de données en série, les symboles sont transmis séquentiellement : le spectre de chaque donnée est autorisé à occuper toute la bande passante disponible

c) Principe de la modulation OFDM

Le principe du multiplexage en fréquence est de grouper des données numériques par paquets de N , qu'on appellera symbole OFDM et de moduler par chaque donnée une porteuse différente en même temps.

Considérons une séquence de N données c_0, c_1, \dots, c_{N-1}

Appelons T_s la durée symbole c'est-à-dire le temps qui sépare 2 symboles.

Chaque donnée c_k module un signal à la fréquence f_k .

Le signal individuel s'écrit sous forme complexe : $c_k e^{2j\pi f_k t}$

Le signal $s(t)$ total correspondant à toutes les données d'un symbole OFDM est la

somme des signaux individuels : $s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{2j\pi f_k t}$

Le multiplexage est orthogonal si l'espace entre les fréquences est $1/T_s$.

Alors

$$f_k = f_0 + \frac{k}{T_s} \quad \text{et} \quad s(t) = e^{2j\pi f_0 t} \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{2j\pi \frac{kt}{T_s}} \quad (1.14)$$

Le schéma de principe de la modulation est représenté dans la Figure 1.5.

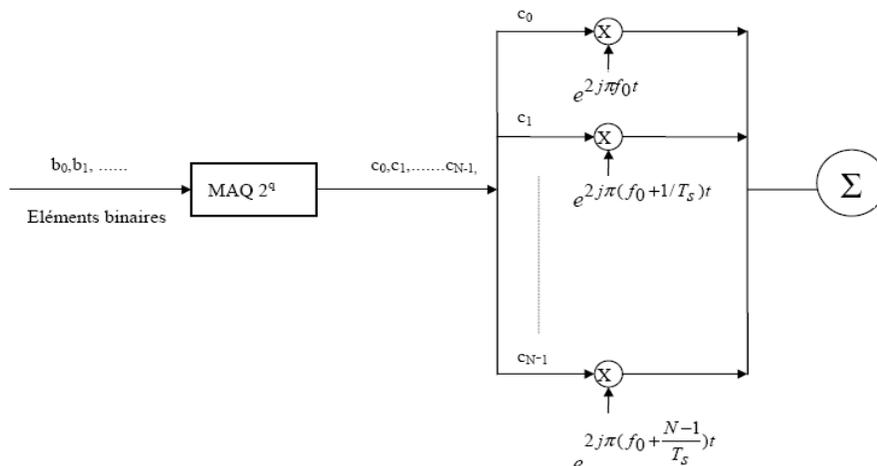


Figure 1.5 : Schéma de principe d'un modulateur

De l'équation (1.14), on peut déduire l'expression réelle du signal :

Si $c_k = a_k + jb_k$

$$s(t) = \text{Re}(s(t)) = \text{Re} \left(\sum_{k=0}^{N-1} (a_k + jb_k) e^{2j\pi \left(f_0 + \frac{k}{T_s} \right) t} \right) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cos \left(2\pi \left(f_0 + \frac{k}{T_s} \right) t \right) - b_k \sin \left(2\pi \left(f_0 + \frac{k}{T_s} \right) t \right) \quad (1.15)$$

d) Pourquoi « orthogonal » ?

Nous allons déterminer le spectre du signal OFDM. Chaque porteuse modulant une donnée pendant une fenêtre de durée T_s , son spectre est la transformée de Fourier de la fenêtre et le spectre total est la somme des spectres individuels.

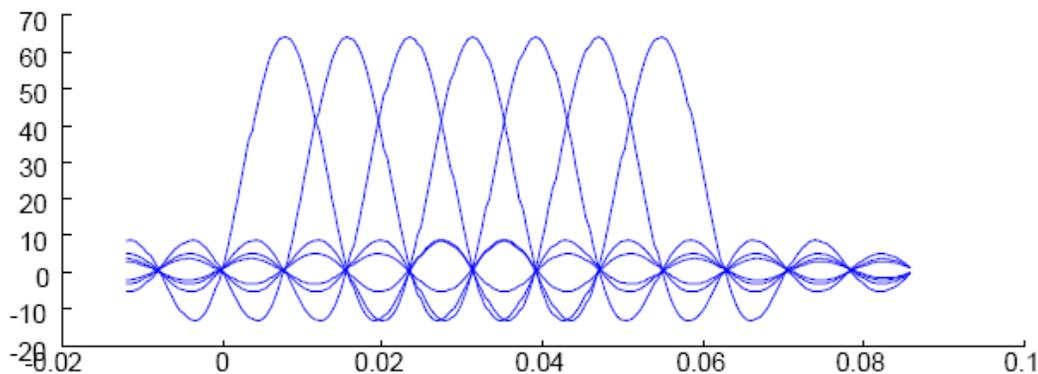


Figure 1.6 : Spectres des différentes portuses

La figure 1.6 montre que l'espace entre chaque sous-porteuse $1/T_s$ permet, lorsque le spectre d'une sous-porteuse est maximal, d'annuler le spectre de toutes les autres : c'est la condition d'orthogonalité. (Orthogonal de OFDM).

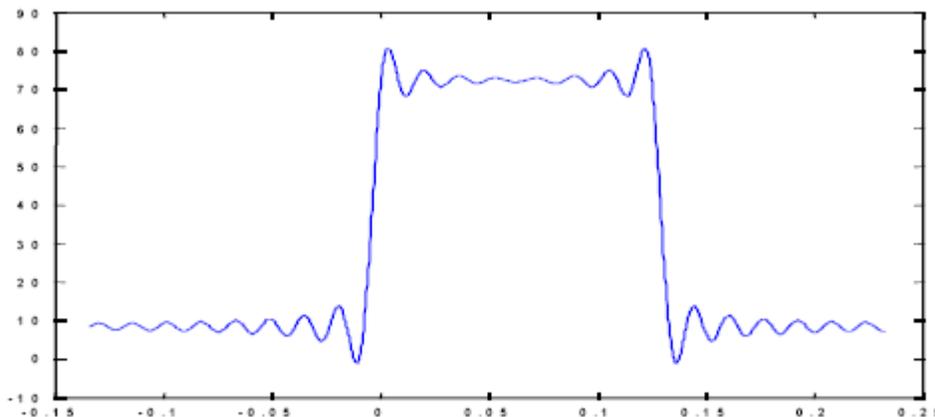


Figure 1.7 : Spectre du signal OFDM pour 8 porteuses

La figure 1.7 montre qu'alors, la bande en fréquence est occupée de façon optimum, puisque le spectre est presque plat dans cette bande. La bande occupée est à peu près $B = N/T_s$ (en excluant les lobes secondaires de part et d'autre de la bande), chaque sous-porteuse occupant à peu près $1/T_s$.

e) Principe de la démodulation

Le signal parvenant au récepteur s'écrit, sur une durée symbole T_s :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k H_k(t) e^{2j\pi \left(f_0 + \frac{k}{T_s} \right) t} \quad (1.16)$$

$H_k(t)$ est la fonction de transfert du canal autour de la fréquence f_k et au temps t . Cette fonction varie lentement et on peut la supposer constante sur la période T_s ($T_s \ll 1/B_d$).

La démodulation classique consisterait à démoduler le signal suivant les N sous-porteuses suivant le schéma classique.

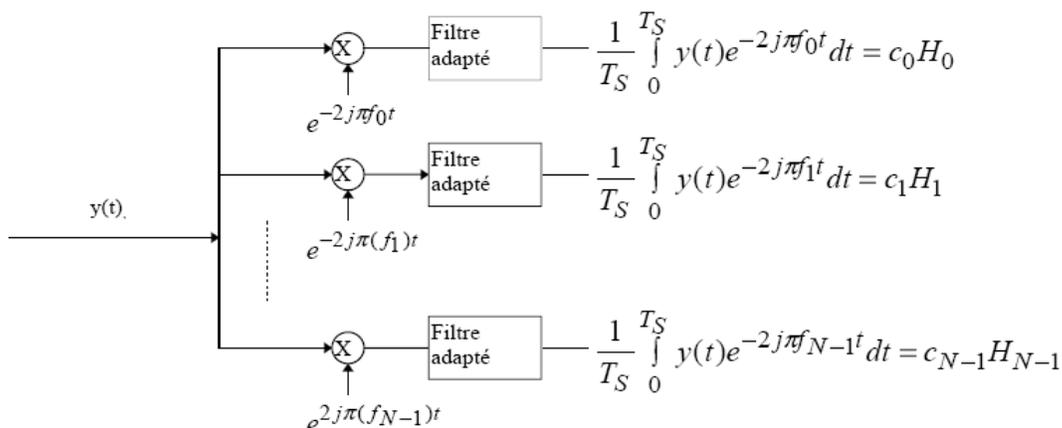


Figure 1.8 : Schéma de principe du Démodulateur OFDM

La condition d'orthogonalité nous montre que :

$$\frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} y(t) e^{-2j\pi f_i t} dt = \frac{1}{T_s} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^{T_s} c_k H_k e^{2j\pi(k-i)\frac{t}{T_s}} dt = c_i H_i \tag{1.17}$$

Parce que $\frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} e^{2j\pi(k-i)\frac{t}{T_s}} dt = 0$ si $k \neq i$, 1 si $k = i$

En pratique, la modulation, peut être réalisée par une transformée de Fourier inverse et la démodulation peut être réalisée par une transformée de Fourier.

La constellation du signal émis est donnée dans la figure 1.9

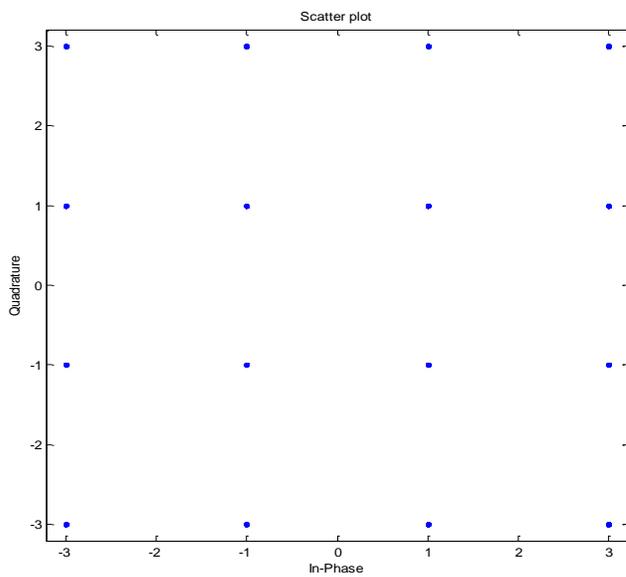


Figure 1.9 La constellation du signal émis

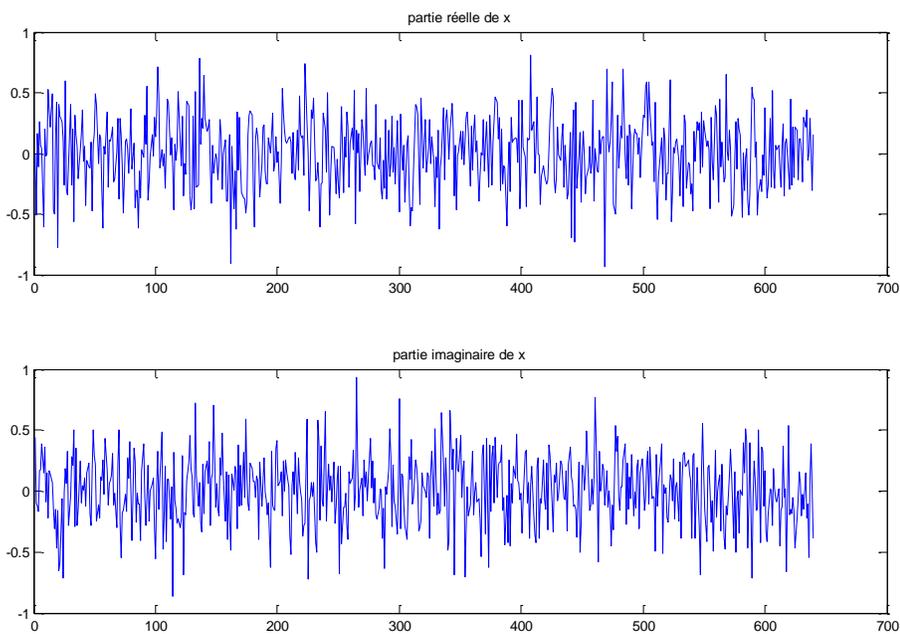


Figure 1.10 : Le signal émis

La constellation après la réception est montrée dans la Figure 1.11.

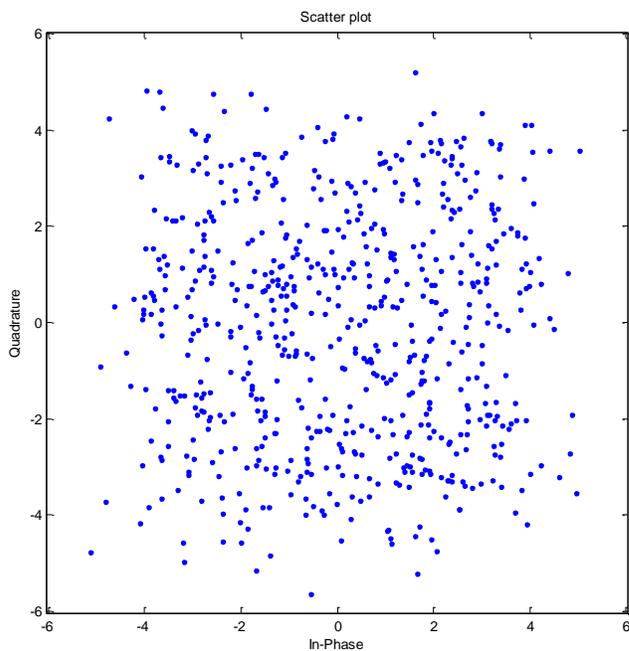


Figure 1.11 : La constellation du signal reçu

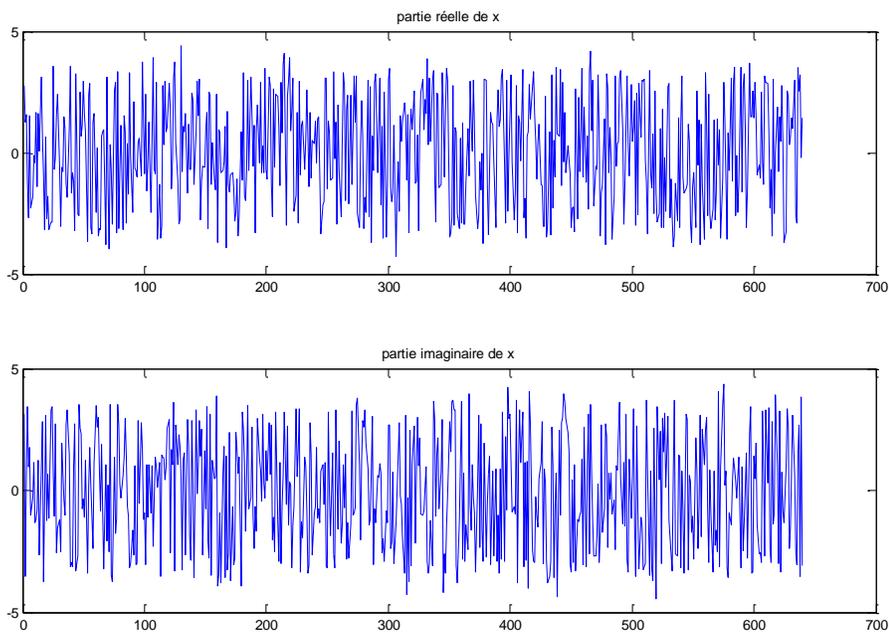


Figure 1.12 : Le signal reçu

1.2.5 Le canal de transmission :

Le canal de transmission est un élément de la chaîne de communication toujours délicat à définir puisqu'il n'a pas la même signification selon que l'on se place du point de vue de la propagation, de la théorie de l'information ou de la théorie des communications. Pour ce qui nous concerne, c'est-à-dire au sens de la théorie des communications, le canal de transmission peut inclure le milieu de transmission, le bruit, mais aussi, éventuellement, le filtre d'émission placé physiquement dans l'émetteur, ainsi que les antennes d'émission et de réception pour les transmissions en espace libre. Cette représentation du canal de transmission, illustrée sur la figure (1.13), revêt un caractère plutôt symbolique mais est bien adaptée à l'analyse que nous ferons de la chaîne de transmission.

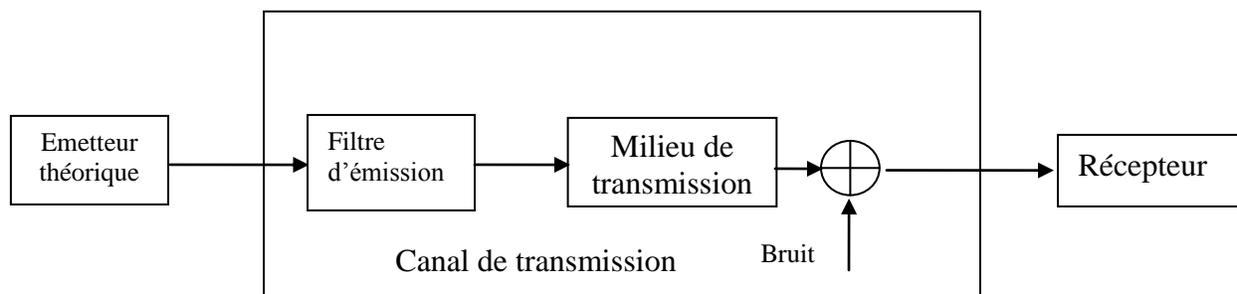


Figure 1.13 : Le canal de transmission

Les canaux de transmissions peuvent être classés en deux groupes [13] :

- * Les canaux stationnaires dont les paramètres sont fixes au cours du temps : fibres optiques, câbles métalliques, etc.
- * Les canaux non stationnaires dont les paramètres évoluent au cours du temps : les communications avec les mobiles, communications sans fils.

1.2.5.1 Les canaux stationnaires

Parmi les canaux stationnaires, le plus utilisé, celui sur lequel l'évaluation des performances des systèmes de communications est aussi la plus simple est le canal AGB (bruit Additif Gaussien Blanc) ou AWGN (Average White Gaussian Noise). [14]

Ce bruit est avant tout un modèle basé sur les deux suppositions suivantes :

- tous les bits ont la même probabilité, quelle que soit leur position.
- les erreurs des différentes positions sont indépendantes.

Le bruit est dit gaussien car il a une densité de probabilité gaussienne.

Le canal de transmission à bruit additif gaussien blanc AWGN est représenté sur la figure 1.14. Il est constitué par l'addition d'un bruit gaussien blanc, de densité spectrale bilatérale de puissance $S_b(f) = N_0/2$. C'est sans aucun doute le canal de transmission le plus simple et le plus étudié. Les résultats obtenus avec ce canal de transmission servent de référence pour les autres systèmes. Le modèle de canal AWGN représente assez fidèlement un canal de transmission radioélectrique, lorsque les antennes d'émission et de réception sont en vue directe. La diffusion de la télévision par satellite est un exemple courant. L'installateur de la parabole doit s'assurer qu'aucun obstacle, feuillage ou construction, ne se situe sur le trajet satellite-parabole.

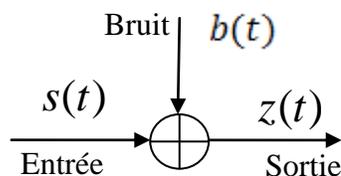


Figure 1.14 : Le canal à bruit additif blanc gaussien AWGN

Les canaux sélectifs comportent un filtre linéaire et un bruit AWGN. Ceci représente beaucoup de systèmes de transmission sur câbles métalliques ou sur fibres optiques.

1.2.5.2 Les canaux non stationnaires [14]

Les canaux de Rayleigh où le gain complexe du canal est un processus aléatoire gaussien complexe, par exemple les communications radio mobiles à faible débit. Les canaux sélectifs non stationnaires, qui comportent un ensemble discret ou continu de canaux de Rayleigh associés à des temps de propagation différents. Ils peuvent être représentés par un filtre linéaire non stationnaire, par exemple les communications radio mobiles à haut débit. Dans le cas d'un canal gaussien blanc, on considère le signal reçu $y(t)$ suivant :

$$y(t) = x(t) + b(t) \quad (1.18)$$

Où $x(t)$ est le signal envoyé et $b(t)$ le bruit (purement additif).

Le modèle de Rayleigh considère une modification de l'amplitude du signal :

$$y(t) = h(t) \times x(t) + b(t) \quad (1.19)$$

Où

$$h(t) = \alpha(t) + j\beta(t) \quad (1.20)$$

Avec $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ distribuées selon des lois gaussiennes.

La loi de probabilité pour $|h(t)|$ est alors décrite par :

$$h(t) = \frac{t}{\text{sig}^2} \exp\left(-\frac{t^2}{2 * \text{sig}^2}\right) \quad (1.21)$$

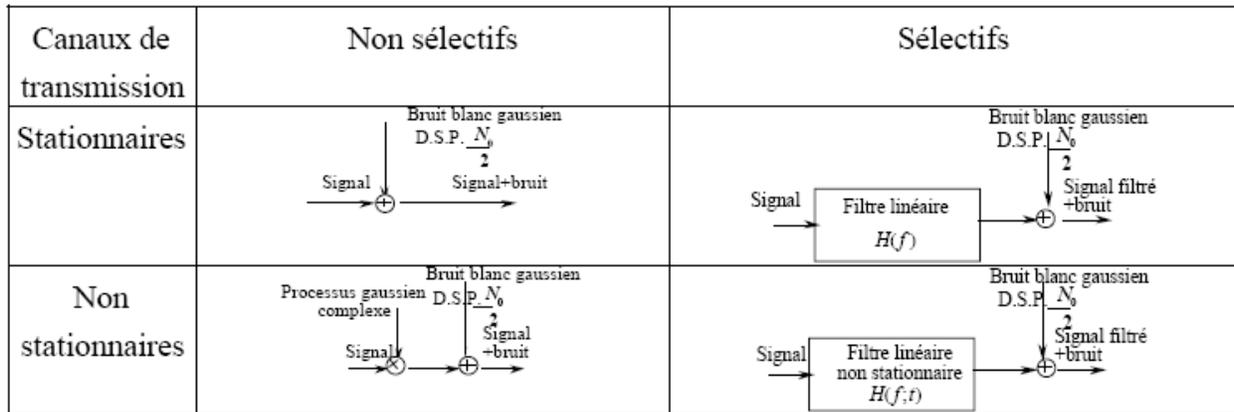


Figure 1.15 : Classification des canaux de transmission

1.2.5.3 Le milieu de transmission [9][15]

Le milieu de transmission représente le lien physique entre l'émetteur et le récepteur ;

- * un câble bifilaire dont la bande passante est faible et qui est en général réservé pour les transmission à bas débit (inférieur à 2Mbit/s sur le réseau téléphonique),
- * un câble coaxial, qui possède une bande passante plus importante que le câble bifilaire et qui permet de réaliser des transmission avec un débit relativement élevé : Plusieurs centaines de Mbit/s (565 Mbit/s sur le réseau téléphonique). Le câble coaxial est notamment utilisé pour connecter les centraux téléphoniques entre lesquels transite un grand nombre de communication.
- * La fibre optique [16], grâce à sa bande passante très élevée et sa faible atténuation, est considérée comme un support très intéressant. Les fibres optiques sont de plus en plus utilisées pour les réseaux terrestres à grande capacité (plusieurs Gbit/s, voire dans le futur, plusieurs dizaine de Gbit/s).
- * L'espace libre utilise la propagation d'une onde électromagnétique dans l'atmosphère. Ce milieu est généralement réservé aux transmissions par satellite ou par faisceaux hertziens ainsi qu'aux radiocommunications avec les mobiles.

La modélisation du milieu de transmission peut être très complexe. Le milieu peut se comporter comme un simple Filtre linéaire, de réponse en fréquence $C(f)$, mais aussi être

non stationnaire (la réponse $C(f)$ est alors fonction de la fréquence) ou présenter des non linéarités ou encore un effet Doppler.

1.2.5.4 Le bruit

Le bruit est une perturbation aléatoire dont les origines sont le milieu de transmission (bruit externe), ou les dispositifs électroniques utilisés dans le récepteur (bruit interne). Parmi les sources de bruit externe, on peut citer les rayonnements divers captés par l'antenne (cas des transmissions en espace libre), les interférences éventuelles entre les différents utilisateurs du milieu de transmission ou encore les bruits d'origine industrielle (moteurs, lignes à haute tension, etc.).

Le bruit interne a pour origine le mouvement brownien des électrons dans les composants passifs (résistances) et les composants actifs (semi-conducteur) qui constituent les dispositifs du récepteur (amplificateur, filtres, mélangeurs, etc.). Le bruit engendré par les composants passifs est un bruit blanc (densité spectrale de puissance uniforme), au moins dans le domaine de fréquences utilisé en radiocommunication, qui dépend de la température, d'où son nom de bruit thermique. Les composants actifs (semi-conducteurs) sont aussi générateurs de bruits divers, dont le bruit dit de grenaille est sans doute le plus important. Le bruit de grenaille est aussi blanc mais indépendant de la température, c'est donc un bruit non thermique, fonction du courant qui traverse les composants. Compte tenu du fait qu'il existe un grand nombre d'électrons dans la matière, évoluant indépendamment les uns des autres et suivant une même loi, le bruit interne peut être modélisé par un processus gaussien d'après le théorème de limite centrale. Le bruit interne est en générale prépondérant dans les systèmes de transmission.

Dans notre approche, toutes les contributions du bruit interne et externe seront prises en compte dans une source unique de bruit $B(t)$ située en amont du récepteur. Les dispositifs électronique du récepteur seront alors supposés idéaux, en d'autres termes, non générateurs de bruit. Ce bruit peut être modélisé par un processus aléatoire gaussien, à moyenne nulle, stationnaire, indépendant du signal émis et de densité spectrale de puissance bilatérale

$$\gamma(f) = \frac{N_0}{2} \quad \forall f \quad (1.22)$$

La densité spectrale de puissance mono latérale N_0 du bruit est égale à $k(T_i + T_e)$ ou k est la constante de Boltzmann ($k = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$), T_e la température de bruit de la source de bruit externe et T_i la température de bruit équivalente à la l'entrée du récepteur, en Kelvin. En effet, un récepteur radioélectrique est caractérisé, du point de vue du bruit, par sa température interne de bruit T_i ; la densité spectrale de bruit engendrée par ce récepteur, et ramenée à son entrée, est donc kT_i .

Le récepteur peut être de manière équivalente caractérisé par son facteur de bruit F auquel cas N_0 est égal kT_0F , où T_0 désigne la température de référence : $T_0 = 290 \text{ K}$. La densité spectrale de puissance kT_0 correspond à une puissance de -114 dBm (décibel par rapport au mW) dans une bande de 1 MHz ; c'est-à-dire que la puissance recueillie dans ces conditions est de $10^{-11.4} \text{ mW}$. La connaissance de cette valeur de référence évite de devoir recalculer à chaque fois la puissance de bruit en revenant à la constante de Boltzmann.

La puissance de bruit recueillie dans une bande B (en MHz) avec un récepteur de température interne T_i , exprimée en dBm , est alors simplement égale à :

$$N_0 = -114 + 10 \log B + 10 \log \frac{T_i}{290} \quad (1.23)$$

L'hypothèse de bruit blanc qui correspond à un bruit de puissance infinie peut sembler être non réalisable. En effet, le bruit blanc n'est qu'un modèle qui ne peut être utilisé que si la densité spectrale de puissance du bruit est constante dans une bande de fréquence supérieure à la bande occupée par le signal modulé. Cette hypothèse est pratiquement toujours vérifiée dans les systèmes de transmission.

1.2.5.5 Transmission en bande de base et transmission sur onde porteuse

Lorsque la bande de fréquence B allouée à la transmission du message numérique est comprise entre une fréquence égale ou proche de zéro et une fréquence F , la transmission est dite en bande de base. Les transmissions en bande de base utilisent les câbles comme milieu de transmission. Si la bande de fréquence B allouée à la transmission est centrée autour d'une fréquence f_0 , on parle alors de transmission sur onde porteuse ou simplement sur porteuse

1.2.6 Le récepteur :

Le récepteur qui a pour fonction de reconstituer le message émis par la source à partir du signal reçu, comprend des circuits d'amplification, de changement de fréquence, de démodulation (pour les transmissions sur onde porteuse), de filtrage puis d'échantillonnage et de prise de décision (Figure 1.16). Le changement de fréquence et le démodulateur permettent de ramener le signal modulé en bande de base. Le signal en bande de base est ensuite filtré puis échantillonné. Finalement un circuit de décision identifie la valeur des éléments binaires transmis à partir des échantillons reçus. Le choix effectué par le circuit de décision est binaire, décision 0 ou décision 1, ce qui correspond à une opération dite de « détection ».

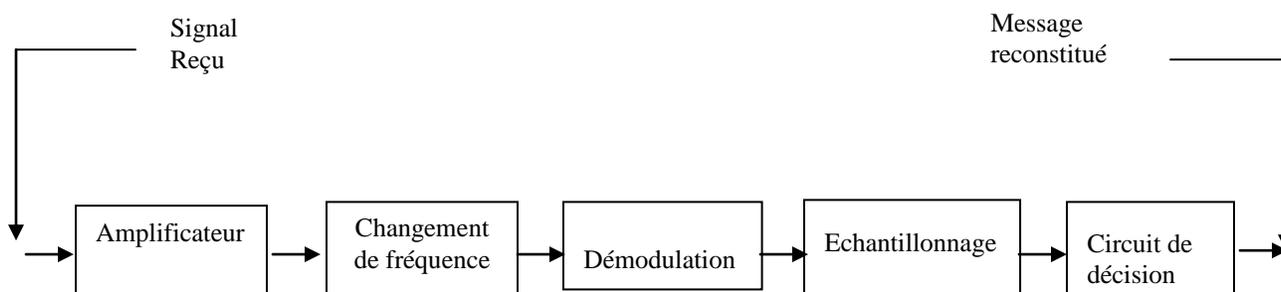


Figure 1.16 : Principe De Récepteur Pour Transmission Sur Onde Porteuse

1.2.6.1 Egalisation

a) Définition d'un égaliseur

Dans le domaine de télécommunications, les données émises traversent un canal de transmission et les dispositifs électroniques associés à l'émetteur et au récepteur. Le rôle de l'égaliseur est alors de réduire au mieux les distorsions apportées par ces éléments [17].

Le fait de vouloir passer un flot important d'informations dans les systèmes de transmission numériques au travers d'un canal dont la bande est souvent limitée a tendance à créer des Interférence Entre Symboles (IES) ce qui peut dégrader très fortement le signal reçu.

Si le canal de transmission avait une atténuation constante et un déphasage linéaire sur la bande du signal, il ne modifierait pas la forme des impulsions émises et le récepteur recevrait tout simplement une version bruitée du signal émis. En pratique, ces deux conditions ne sont que très rarement vérifiées et la réponse du canal a besoin d'être égalisée pour éliminer la distorsion du signal reçu. Cependant, dans le cadre général, plusieurs types d'égalisation peuvent être définis : égalisation non-adaptative, égalisation aveugle et égalisation adaptative.

Par ailleurs, la réponse du canal est en général inconnue et, de plus, susceptible de varier au cours du temps. Son égalisation nécessite alors un égaliseur adaptatif capable de s'adapter au canal et de poursuivre ses variations temporelles.

b) Principe de l'égalisation

L'objet de la fonction d'égalisation est de permettre de retrouver, à partir de la séquence reçue $y(n)$, présentant de l'interférence entre symboles (IES) introduite par la sélectivité du canal, la séquence émise $a(n)$.

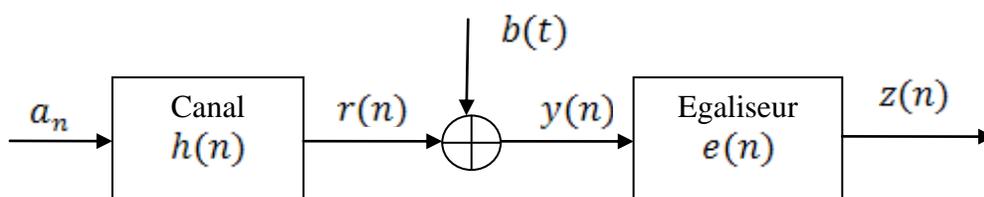


Figure 1. 17 : Modèle de canal équivalent avec égaliseur

L'ensemble modulateur, milieu de transmission, démodulateur est modélisé par un canal discret équivalent de réponse $h(n)$, $b(n)$ étant le bruit blanc additif gaussien.

Pour rejeter l'effet de cette interférence entre symboles, plusieurs techniques peuvent être employées dans l'égalisation, mais les plus connues sont :

- Les égaliseurs transverses linéaires [2] (Linear Transversal Equalizers (LTE));
- Égalisation à erreur quadratique moyenne minimale;

c) Egaliseur transverse linéaire

Les égaliseurs transverses sont les plus simples à mettre en œuvre. En effet, il s'agit simplement d'utiliser un filtre numérique à réponse impulsionnelle finie, pour lequel les méthodes de calcul et d'implantation sont bien connues.

La structure du filtre est donnée sur la figure 1.18 et correspond à la relation entrée-sortie :

$$z(n) = \sum_{i=0}^{M-1} e(i)y(n-i) \quad (1.24)$$

Où $e(n)$ est la réponse impulsionnelle de l'égaliseur, de longueur M , $y(n)$ est la séquence d'observation, et $z(n)$ la sortie de l'égaliseur

Symbole avec IES

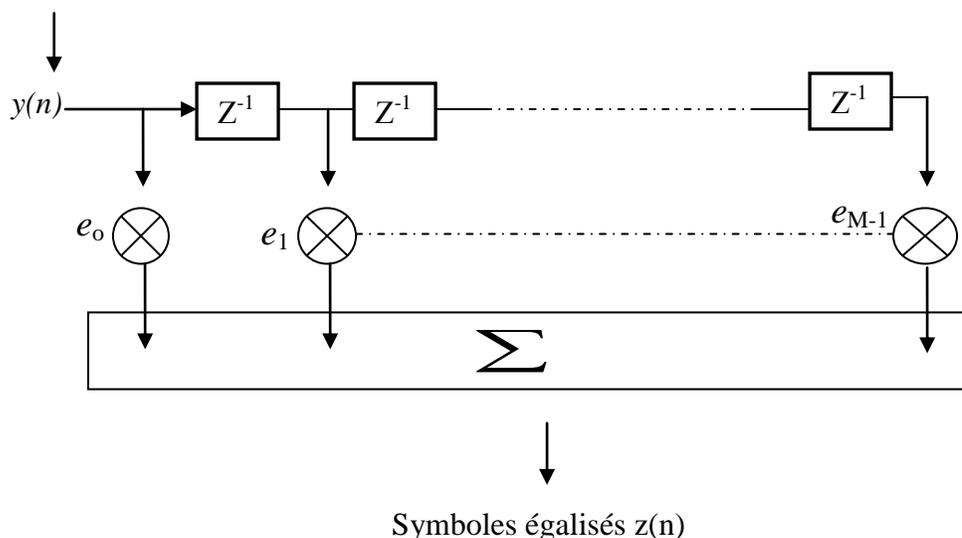


Figure 1.18 : Egaliseur transverse linéaire

d) Egaliseur par « Zero-Forcing » [14][18]

Le zero-forcing est un filtre qui tente d'inverser exactement la fonction de transfert du canal, ce qui est à priori précisément le but recherché, idéalement, par l'égalisation. Ce faisant, l'interférence entre symboles est exactement compensée (pourvu que l'ensemble des filtres d'émission et de réception soit de Nyquist), et l'on dit que l'interférence entre symboles est forcée à zéro. On a ainsi :

$$E(z) = \frac{1}{C(z)} \tag{1.25}$$

Où $E(z)$ est la fonction de transfert de l'égaliseur, et $C(z)$ celle du canal.

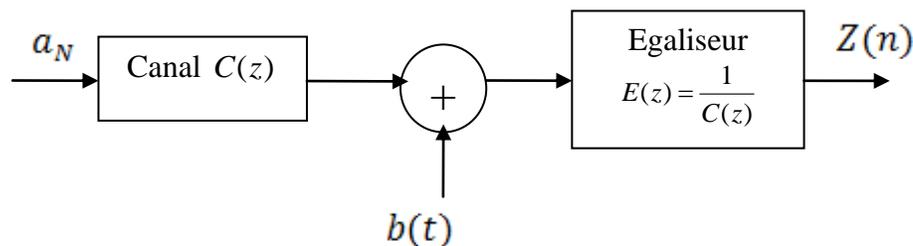


Figure 1.19 : Egaliseur par « Zero-Forcing »

e) **Égalisation à erreur quadratique moyenne minimale [18]**

L'idée de l'égaliseur à erreur quadratique minimale (égaliseur MMSE) est de minimiser l'erreur quadratique moyenne entre la séquence de symboles $a(n)$ et la sortie de l'égaliseur $y(n)$. Le bruit est ainsi pris en compte dans le critère. On cherche ainsi à minimiser l'erreur quadratique moyenne □ □

$$j(w) = E \left[\| a(n - \Delta) - y(n) \|^2 \right] \tag{1.26}$$

Avec :

$$y(n) = \sum_{i=0}^{L-1} w_i^* x(n-i) = W^H X(n) \text{ , où } X(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \dots \dots \dots \ x(n-L+1)]^T$$

Le problème est celui du filtre optimal qui a comme solution les équations de Wiener-Hopf:

$$R_x W = p_{ax}(\Delta) \tag{1.27}$$

Où R_x est la matrice d'auto-corrélation de $x(n)$ et $p_{ax}(\Delta)$ est le vecteur d'inter-corrélation entre $x(n)$ et $a(n - \Delta)$.

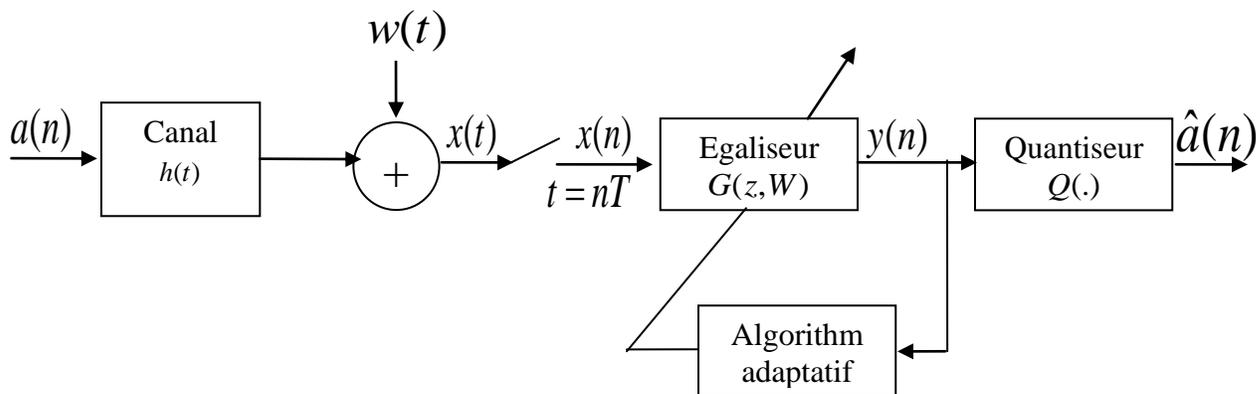


Figure 1.20 : Système adaptatif d'égalisation.

Selon le modèle d'égalisation illustré en Figure 1.20, le signal d'entrée dans l'égaliseur est décrit par la relation suivante

$$x(n) = h(n) * a(n) + w(n) \quad (1.28)$$

Et en appliquant la transformée en Z à l'équation (1.27), on obtient la fonction de transfert du filtre égaliseur qui minimise l'erreur quadratique moyenne :

$$G_{mmse}(z, W) = \frac{H^*(z^{-1})z^{-\Delta}}{H(z)H^*(z^{-1}) + N_0} \quad (1.29)$$

Où N_0 est la densité spectrale de puissance du bruit blanc additif.

Si la fonction de transfert de équation 1.29 n'est pas physiquement réalisable, on préfère la résolution du système de Wiener-Hopf équation 1.27 pour obtenir le filtre FIR égaliseur MMSE. Si l'égalisation obtenue est clairement de meilleure qualité que celle fournie par un égaliseur *zero forcing*, en raison de la prise en compte effective du bruit, elle reste souvent de qualité médiocre, en particulier en présence d'évanouissements sélectifs (non stationnarités). Ceci est également lié à la structure transverse (pas de pôles) qui limite la capacité de représentation d'une réponse quelconque. Par ailleurs, pour la mise en oeuvre pratique, il est nécessaire de connaître $a(n-\Delta)$. Pour ce faire, on utilise une séquence connue du récepteur, une *séquence d'apprentissage*, pour calculer les coefficients du filtre. La nécessité d'inclure dans l'émission une séquence d'apprentissage, éventuellement répétée périodiquement si le système est non stationnaire, limite en outre le débit en données utiles.

En pratique, les moyennes statistiques utilisées dans l'équation 1.27 sont remplacées par des moyennes temporelles. Pour une séquence d'apprentissage de longueur N , les quantités survenant dans la formule de Wiener-Hopf sont établis par:

$$\hat{R}_x = \sum_{L+\Delta-1}^N x(n) \times H(n) \quad \text{et} \quad \hat{p}_{ax}(\Delta) = \sum_{L+\Delta-1}^N \hat{a}(n-\Delta)x(n) \quad (1.30)$$

Où L est la longueur du filtre égaliseur et $h(n)$ est la réponse impulsionnelle finie du canal de longueur M , avec : $\Delta = \frac{M + L - 1}{2}$

Il existe également d'autres types d'égaliseurs : Egaliseur récursif (DFE), Egaliseur MLSE (Maximum Likelihood Sequence Estimate), etc. [14]

Il est à noter au passage qu'il est supposé, pour les techniques de codage et d'égalisation, que le récepteur est synchronisé avec l'émetteur pour éviter une détérioration des performances.

f) Interférence entre symboles [19][20]

En sortie du filtre de réception $h(-t)$ (adapté au filtre d'émission $h(t)$), on reçoit le signal

$$y(t) = \sum_n a_n r(t - nT) + \text{bruit} \quad (1.31)$$

Où a_k sont les symboles d'information émis, et $r(t) = h(t) * h(-t)$ est la réponse globale du système. La partie utile à détecter à l'instant $t = kT$ est $a_k r(0)$, mais après échantillonnage à $t = kT$ en sortie du filtre adapté, il reste

$$y(kT) = a_k r(0) + r((k - n)T) + b_k \quad (1.32)$$

Où b_k est un échantillon de bruit et $\sum_{n \neq k} a_n r((k - n)T)$ représente l'interférence entre symboles (IES) (*Inter-Symbol Interference* (ISI)). L'IES est une perturbation supplémentaire qui affaiblit les performances de la détection en présence de bruit ; si elle est trop importante elle peut même provoquer des erreurs de détection en l'absence de bruit.

1.2.7 Mesure de la qualité d'une transmission numérique [9]

La qualité d'une transmission dépend de la fidélité avec laquelle les éléments binaires du message sont restitués au destinataire. Elle est mesurée en général en évaluant la probabilité d'erreur par élément binaire, notée P_{eb} , définie comme étant la probabilité de prendre une décision erronée sur un élément binaire. Cette probabilité d'erreur n'est jamais strictement nulle, mais cela ne signifie pas pour autant que la transmission est de mauvaise qualité ; en effet, il suffit qu'elle prenne une valeur suffisamment faible pour satisfaire à un certain critère de fidélité ; cette valeur dépend du type d'information transmise (parole, son, image, données, etc.) et du niveau de fidélité exigé (une probabilité d'erreur de 10^{-6} par exemple pourrait être jugée tout à fait satisfaisante pour la transmission de la parole en téléphonie).

Désignons par α_k l'élément binaire émis à l'instant KT_b . En tenant compte du fait que les éléments binaires α_k issus de la source sont indépendants et identiquement distribués sur l'alphabet $\{0,1\}$, la probabilité d'erreur par élément binaire P_{eb} est égale à

$$P_{eb} = \Pr\{\alpha_k = 1\} \Pr\{\hat{\alpha}_k = 0 | \alpha_k = 1\} + \Pr\{\alpha_k = 0\} \Pr\{\hat{\alpha}_k = 1 | \alpha_k = 0\} \quad (1.33)$$

Où $\hat{\alpha}_k$ représente le résultat de la décision prise sur l'élément binaire α_k .

Pour un canal perturbé par un bruit additif $B(t)$ stationnaire, cette probabilité d'erreur par élément binaire ne dépend pas de l'indice k considéré.

La mesure de cette probabilité d'erreur est réalisée en émettant une séquence de N éléments binaires connue du destinataire, puis en évaluant en réception le rapport entre le nombre n d'éléments binaires erronés et le nombre N d'éléments binaires émis. Ce rapport est appelé **Taux d'Erreur binaire (TEB)**, en anglais **BIT ERROR RATE (BER)**.

1.3 Conclusion

Dans la transmission numérique, il est remarqué que le signal traverse plusieurs blocs : le codage, la modulation, le canal de transmission, ce qui influe sur le débit de transmission. Pour cela, on doit introduire la notion de performance du système de transmission. Parmi les méthodes d'estimation de performance, on distingue celles basées sur l'estimation du taux d'erreur binaire (TEB) telle que la méthode d'estimation de Monte Carlo (MC). Ces techniques sont développées dans le prochain chapitre.

CHAPITRE**2**

Méthode d'estimation « Monte Carlo »

Les deux dernières décennies ont été marquées par une croissance considérable des systèmes de communications qui sont devenus très complexes. L'évaluation des performances de ces systèmes par des méthodes de calcul analytique est souvent impossible. D'où la nécessité du recours aux méthodes de simulation informatique.

La méthode de simulation Monte Carlo (MC) est la technique la plus utilisée pour contourner ces calculs et estimer les résultats à cause de son succès dans diverses applications.

Dans ce chapitre. Nous rappelons quelques définitions et terminologies de la théorie d'estimation et nous présentons la méthode de simulation Monte Carlo.

2.1 Introduction

Bien souvent, les problèmes scientifiques conduisent à des calculs analytiques complexes tels que l'évaluation d'intégrales ou de sommations et la résolution des équations différentielles et intégrales. Pour des problèmes complexes. Les calculs analytiques sont non directement réalisables. On fait, pour ceci, appel à des méthodes d'approximation. Parmi les méthodes les plus couramment utilisées, nous retrouvons les méthodes classiques d'analyse numérique, efficaces pour une seule dimension. Ces techniques s'avèrent rapidement sans intérêt dès que la dimension augmente [21]. Or, en pratique le nombre de variables pour la majorité des problèmes est grand [22] [23]. Dans cette optique, des méthodes de simulations statistiques, dites "Monte Carlo"[8], sont très prometteuses puisque leur vitesse de convergence est indépendante de la dimension du problème mathématique [23] [24]. En revanche, elles ne fournissent pas la solution numérique du problème, mais un intervalle de confiance la contenant avec une probabilité donnée [23], [24] [25].

2.2 La méthode de simulation Monte Carlo

2.2.1 Présentation et historique

Nous entendons par simulation, le fait de modéliser et reproduire tous les éléments qui constituent un système donné avant de procéder à l'analyse de ses performances. La technique de simulation Monte Carlo est définie dans [26], [7] comme une expérience statistique permettant la modélisation logicielle d'un système réel en vue de mesurer ses performances. Ces mesures (observations) consistent à évaluer des valeurs discrètes séparées d'un processus aléatoire fini à un point donné du système.

Les techniques de Monte Carlo ont été utilisées depuis plusieurs siècles, même si ce n'est qu'après la seconde guerre mondiale qu'elles ont acquis un véritable statut de méthode. Plus récemment, nous en trouvons l'une des premières applications. Le problème de l'aiguille de Buffon [23]. Au début du vingtième siècle, cette technique fut utilisée pour étudier l'équation de Boltzmann [23] [24].

Le terme "Monte Carlo" a été introduit par Neumann et Ulam durant la deuxième guerre mondiale lors d'un travail secret à Los Alamos [27]. Le nom "**Monte Carlo**" est inspiré de celui de la ville **Monte Carlo** à **Monaco** célèbre pour ses casinos.

La méthode de simulation "**Monte Carlo**" est aujourd'hui l'une des techniques les plus puissantes et les plus utilisées pour l'analyse de problèmes complexes et ses applications peuvent être trouvées dans plusieurs domaines [23][24].

Dans le domaine de communications numériques, l'approche immédiate de la simulation **Monte Carlo** consiste à modéliser, dans un premier temps, toutes les composantes de la chaîne de transmission (Codeur/Décodeur, Modulateur/Démodulateur, etc.) et le milieu de propagation (canal) à l'aide d'un simulateur et d'en étudier le comportement et évaluer les performances dans une deuxième étape. Les clés universelles pour l'évaluation de performance d'un système de communication numérique sont, en général, les puissances moyennes des signaux, les rapports signal sur bruit (Signal-to-Noise Ratio ou SNR), les lois de probabilités, les densités spectrales de puissance et les taux d'erreurs binaires ou par symboles.

Dans ce travail, nous nous intéresserons essentiellement à l'évaluation des taux d'erreur binaire TEB (Bit Error Rate).

2.2.2 Estimateur et estimation: position du problème

Soit $X(t)$ un processus aléatoire considéré comme un ensemble de fonctions temporelles ($x(t)$) et $Y(t) = g[x(t)]$ une fonction de $X(t)$. L'objectif essentiel dans une simulation est de trouver les propriétés statistiques de $Y(t)$ dépendantes d'un paramètre θ . Ceci nous ramène à opérer d'une manière appropriée sur une ou plusieurs observations du processus aléatoire $Y(t)$. On définit une observation comme une portion de durée finie du processus $Y(t)$ [23][25], soit:

$$Y_T = \begin{cases} y(t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases} \quad (2.1)$$

Ou comme une séquence d'échantillons

$$Y_N = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N) \quad (2.2)$$

Où $Y_i = Y((i-1)T_s)$; T_s étant la durée d'un échantillon de simulation.

Dans les deux cas, nous notons l'observation par Y . Cette dernière est une variable aléatoire, mais une fois la fonction $y(t)$ choisie, le vecteur correspondant y devient déterministe et peut être considéré comme une mesure ou réalisation. Ainsi, le problème d'estimation revient à estimer la valeur du paramètre θ à partir de la connaissance de la réalisation Y . Pour cela, il est nécessaire d'introduire un opérateur $G[\cdot]$ qui associe à l'observation Y un estimateur $\hat{\theta}$ de la variable aléatoire θ . Si, avec l'opérateur G , nous projetons à estimer le paramètre θ on dit que $\hat{\theta} = G[Y]$ est un estimateur de θ . Une valeur spécifique de $G[Y]$ calculée à partir de la réalisation Y est appelée estimation ou valeur estimée. Il y a lieu de bien distinguer l'estimateur, qui est une variable aléatoire, de la valeur estimée (ou estimation) qui est, en fait, une réalisation de l'estimateur, donc une grandeur déterministe.

Comme toute variable aléatoire, le paramètre $\hat{\theta}$ a une fonction de densité de probabilité $f_{\hat{\theta}}(\theta; N)$ et une distribution associée. Tous les moments statistiques de $\hat{\theta}$ peuvent être déterminés à partir de $f_{\hat{\theta}}(\theta; N)$.

Pour une caractéristique $\hat{\theta}$ donnée, il existe plusieurs estimateurs possibles correspondants à des choix multiples de l'opérateur G . Un exemple souvent utilisé d'estimateur est l'espérance mathématique de l'ensemble pondéré du vecteur Y . Il est donné par:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i Y_i \quad (2.3)$$

2.2.3 Qualité de l'estimateur

La caractéristique essentielle d'un estimateur $\hat{\theta}$ est qu'il tend vers la valeur réelle θ ; on parle dans ce cas d'un bon estimateur. Pour avoir un bon estimateur, le nombre d'échantillons N doit tendre vers l'infini (propriété d'ergodisité). Or, en pratique, nous sommes limités par la mémoire disponible, à un ensemble fini d'échantillons. Il est donc nécessaire de déterminer la qualité de l'estimateur calculé. Cette dernière est

souvent exprimée, dans un sens probabiliste, comme l'écart entre la valeur estimée et la valeur exacte.

Toutefois, la qualité d'un estimateur peut être mesurée de plusieurs façons [28] [23], par exemple:

- 1) en étudiant ses moments d'ordre un et deux,
- 2) en introduisant le risque à priori associé à une fonction de perte,
- 3) par la vraisemblance de la décision,
- 4) par la distance de la réalisation Y à une réalisation de référence Y_r de Y , etc.

Avant de définir les critères de qualité d'un estimateur, nous allons introduire les définitions du biais, de la variance, de la dispersion, de l'efficacité et de la consistance d'un estimateur.

2.2.3.1 Biais de L'estimateur

Le biais de l'estimateur $\hat{\theta}$, noté b , est défini comme la moyenne de l'erreur d'estimation:

$$b = E(\hat{\theta} - \theta) \quad (2.4)$$

Un estimateur est dit sans biais si sa moyenne $E(\hat{\theta})$ est égale à la valeur exacte du paramètre θ (en d'autres termes, $b = 0$):

$$\begin{aligned} E(\hat{\theta}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta f_{\hat{\theta}}(\theta; N) d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(y) f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} G[g(x)] f_X(x) dy \\ &= \theta \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dans le cas contraire où $E(\hat{\theta}) \neq \theta$, l'estimateur est dit biaisé.

2.2.3.2 Variance et dispersion de l'estimateur

Pour caractériser l'erreur entre θ et $\hat{\theta}$, nous utilisons les critères de la variance ou de l'écart type (racine carré de la variance) et de la dispersion de l'estimateur autour du paramètre à estimer.

La variance de l'estimateur $\hat{\theta}$ est donnée par [23]:

$$\sigma^2(\hat{\theta}) = E\{(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))'\} \quad (2.6)$$

On fait souvent l'assimilation de la variance à la dispersion (erreur quadratique moyenne) donnée par:

$$D = E_{qm}(\hat{\theta}) = E\{(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)'\} \quad (2.7)$$

Nous remarquons que si l'estimateur est sans biais $E(\hat{\theta}) = \theta$, la variance $\sigma^2(\hat{\theta})$ et la dispersion D se confondent.

2.2.3.3 Efficacité de l'estimateur

Soit $\{\hat{\theta}^j, j \in J\}$ (où J un ensemble d'indice) l'ensemble de tous les estimateurs possibles du paramètre θ , ayant tous le même biais b donné. On appelle estimateur efficace de θ , l'estimateur $\hat{\theta}^{eff}$ tel que:

$$\|\hat{\theta}^{eff} - \theta\|^2 \leq \|\hat{\theta}^j - \theta\|^2 \quad \forall j \in J \quad (2.8)$$

En d'autres termes, l'estimateur efficace est celui qui minimise à un biais donné, dans l'ensemble $\{\hat{\theta}^j, j \in J\}$, l'application:

$$\hat{\theta} \rightarrow \|\hat{\theta}^j - \theta\|^2 \quad (2.9)$$

2.2.3.4 Estimateur séquentiel consistant

Soit Z_L une variable aléatoire constituée de L réalisations indépendantes de la variable aléatoire Y :

$$Z_L = (Y^{(1)}, \dots, Y^{(L)}) \quad (2.10)$$

Nous cherchons à estimer θ à partir de la connaissance de Z_L , on parle dans ce cas d'estimation séquentielle.

Un estimateur séquentiel est dit consistant, si la suite $\{\hat{\theta}_L\}_L$ converge en probabilité vers θ , lorsque $L \rightarrow \infty$. Cela revient à écrire:

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{L \rightarrow \infty} P(\|\hat{\theta}_L - \theta\| \geq \varepsilon) = 0 \quad (2.11)$$

Une condition suffisante pour que l'estimateur soit consistant est que la suite $\{\hat{\theta}_L\}_L$ converge en module vers θ , c'est-à-dire que:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \|\hat{\theta}_L - \theta\|^2 = 0 \quad (2.12)$$

2.2.3.5 Qualité de l'estimateur

Un estimateur est qualifié de bon s'il est sans biais et efficace pour un nombre donné d'échantillons. Quand il s'agit d'un estimateur séquentiel, il faut ajouter la condition de la consistance.

Malheureusement, il n'est pas toujours possible de construire un estimateur non biaisé, il faudra alors minimiser le biais.

D'autre part, plus la variance est petite, plus l'estimateur est meilleur pour N données. En effet, si $\sigma^2(\hat{\theta})$ tend vers 0 et si $\hat{\theta}$ est non biaisé, alors chaque observation est arbitrairement proche de la valeur exacte du paramètre. Généralement, la variance tend vers 0 seulement quand N tend vers l'infini. Nous sommes donc face à un compromis entre la variance de l'estimateur et la dimension des échantillons N .

2.2.3.6 Intervalle et niveau de confiance

L'intervalle de confiance est la mesure la plus descriptive de la qualité d'un estimateur.

Soit $h_1(\hat{\theta})$ et $h_2(\hat{\theta})$ deux fonctions de l'estimateur, telles que, avec une grande probabilité, la valeur exacte de θ appartient à l'intervalle $[h_1, h_2]$. La différence $h_1 - h_2$ est la largeur de l'intervalle de confiance. La probabilité associée à la condition $h_1 \leq \theta \leq h_2$ est appelée niveau de confiance. Elle est souvent notée par $(1 - \alpha)$.

L'intervalle et le niveau de confiance sont reliés par l'équation suivante:

$$P[h_1(\theta) \leq \theta \leq h_2(\theta)] = 1 - \alpha \quad (2.13)$$

L'interprétation propre de cette équation est que la valeur exacte de θ appartient à l'intervalle aléatoire défini par $[h_1, h_2]$ avec la probabilité $(1 - \alpha)$ [25][23].

2.3 Probabilité d'erreur théorique [29]

Supposons que le canal de transmission est le canal de Nyquist, en d'autres termes l'interférence entre symboles du paquet est nulle. Plaçons-nous dans le cas quand le canal introduit un bruit au paquet transmis et considérant le fonctionnement du module de décision dans la chaîne de réception. Le bruit étant supposé être un bruit blanc additif gaussien.

2.3.1 Définitions

Le module de décision estime le k -ème symbole transmis a_k à partir de la valeur échantillonnée à l'instant de décision $t = kT$.

Le principe de prise de décision dans le cas binaire est montré dans la Figure 2.1.

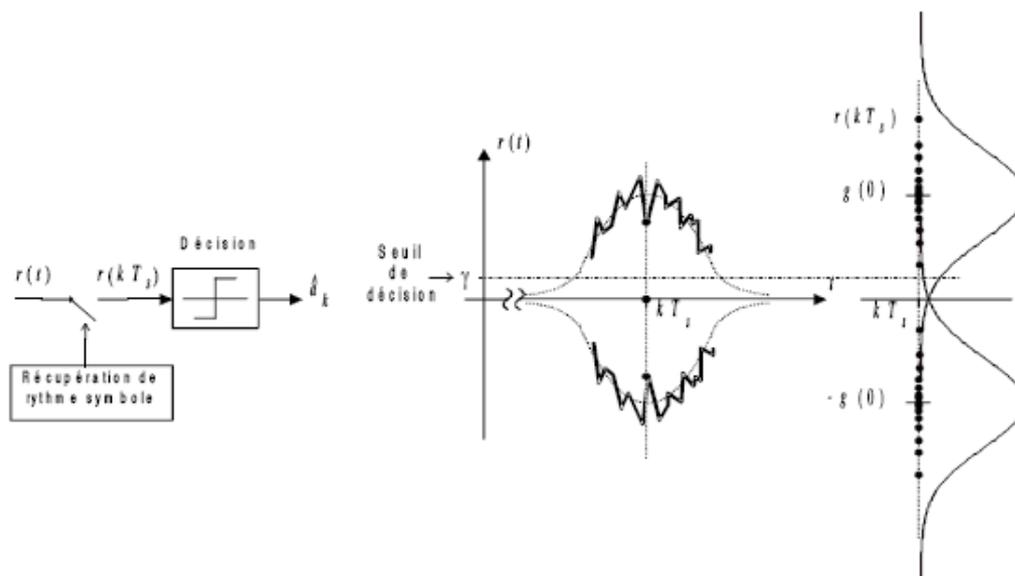


Figure 2.1: Prise de décision dans le cas binaire

Le bit 0 correspond à $a_k = -1$, le bit 1 correspond à $a_k = +1$.

Dans le cas M-aire, la variable aléatoire du signal prend M valeurs ($a_k = \mp 1, \mp 2, \dots, \mp M/2$).

Nous avons

$$r(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k g(t - kT_s) + b(t) \quad (2.14)$$

Ce qui se traduit en (à cause de l'interférence entre symboles « IES » nulle)

$$r(kT_s) = a_k g(0) + b(kT_s) \quad (2.15)$$

La valeur échantillonnée $r(kT_s)$ contient deux valeurs aléatoires:

- partie "signal" $a_k g(0)$, comme $a_k = \pm 1$;
- partie "bruit" $b(kT_s)$: variable aléatoire centrée, de variance σ^2 , non corrélée avec la partie « signal », ayant la densité de probabilité $f_b(v)$.

$r(kT_s)$ est donc une variable aléatoire, avec la densité de probabilité

$$f_r(v) = \sum_{i=\pm 1, \pm M/2} \text{Pr ob}(a_k = i) f_r(v / a_k = i) \quad (2.16)$$

La densité conditionnelle de $r[kT_s]$ s'écrit comme

$$f_r(v / a_k = i) = f_b(v - ig(0)) \quad (2.17)$$

Dans la figure 2.1, nous avons l'illustration de deux densités conditionnelles de $r[kT_s]$, correspondant aux symboles émis +1 et -1.

Donc La probabilité d'erreurs par symbole est définie comme

$$P_s = \text{Pr ob}(\hat{a}_k \neq a_k) \quad (2.18)$$

Et la probabilité d'erreurs par bit est définie comme

$$P_b = \text{Pr ob}(\hat{b} \neq b) \quad (2.19)$$

La relation entre P_s et P_b est donnée par:

$$\frac{P_s}{\log M} \leq P_b \leq P_s \quad (2.20)$$

La valeur minimale de P_b est atteinte quand un bit erroné conduit au symbole erroné, alors que la valeur maximale est atteinte quand tous les bits dans un symbole sont estimés d'une manière incorrecte.

2.3.2 Cas des symboles binaires

Dans le cas binaire, $a_k = \{\pm 1\}$. En plus $P_s = P_b$. Considérons deux hypothèses:

$$H_0 : a_k = -1$$

$$H_1 : a_k = +1$$

Avec les probabilités $Pr ob(a_k = -1) = p_0$ et $Pr ob(a_k = +1) = p_1$, $p_0 + p_1 = 1$.

Soit γ est le seuil de décision, alors la règle de décision est:

$$r[kT_s] \begin{cases} < H_0 \\ > H_1 \end{cases} \gamma \tag{2.21}$$

Une question importante est: quel est le choix optimal de γ , celui qui minimiserait la probabilité d'erreur? Pour trouver la réponse, considérons deux densités de probabilités conditionnelles, présentées dans Figure 2.2.

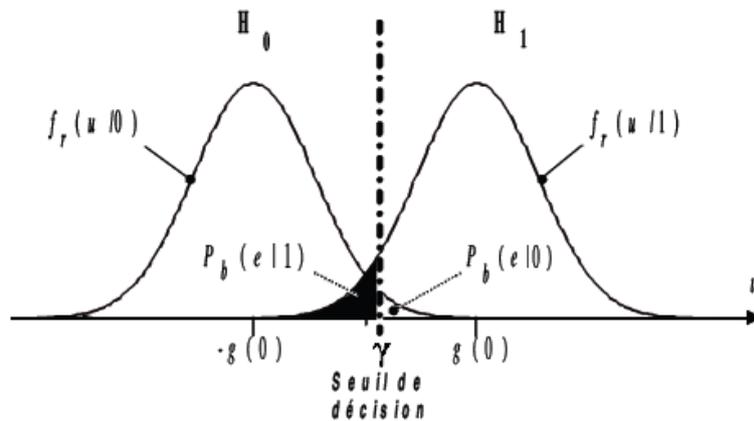


Figure 2.2: Densités de probabilités conditionnelles pour deux hypothèses.

Rappelons que

$$P_b = p_0 P_b(\text{erreur} / 0) + p_1 P_b(\text{erreur} / 1) \tag{2.22}$$

$$= p_0 \int_{-\infty}^{\gamma} f_r(x/0) dx + p_1 \int_{\gamma}^{\infty} f_r(x/1) dx$$

$$\frac{dP_b}{d\gamma} = -p_0 f_r(x/0) + p_1 f_r(x/1) = 0$$

$$\frac{f_r(x/1)}{f_r(x/0)} = \frac{p_0}{p_1} \tag{2.23}$$

Notons que

$$\frac{d^2 P_b}{d\gamma^2} = -p_0 \left. \frac{df_r(x/0)}{dx} \right|_{x=\gamma} + p_1 \left. \frac{df_r(x/1)}{dx} \right|_{x=\gamma} > 0 \quad (2.24)$$

Alors la solution trouvée est bien l'optimum. Il est Remarqué que le seuil de correction dépend des probabilités d'avoir les valeurs de bits 0 et 1.

Considérons le cas du bruit additif gaussien. Nous avons alors les densités de probabilité conditionnelles de type loi normale:

$$f_r(x/0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_b^2}} e^{-\frac{(x+g(0))^2}{2\sigma_b^2}} \quad \text{et} \quad f_r(x/1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_b^2}} e^{-\frac{(x-g(0))^2}{2\sigma_b^2}}$$

Alors, le seuil optimal de décision est

$$\gamma = \frac{\sigma_b^2}{2g(0)} \ln \frac{p_0}{p_1} \quad (2.25)$$

Donc, le seuil de décision a tendance de s'éloigner du symbole le plus probable, ce qui augmente sa région de décision.

Dans les systèmes des communications, nous avons presque toujours les probabilités $p_0 = p_1 = 1/2$. En tenant compte du bruit gaussien, le seuil optimal est donné par :

$$\gamma = 0 \quad (2.26)$$

Nous avons donc

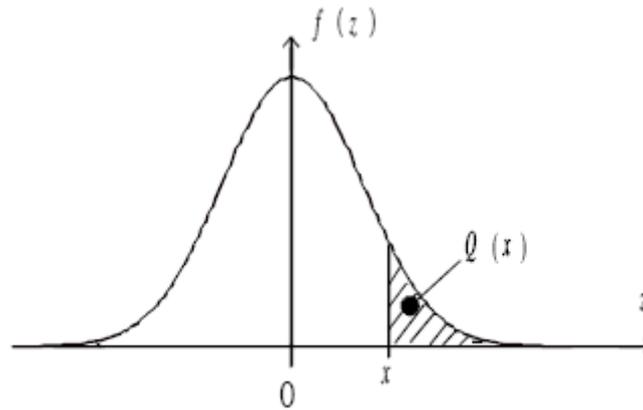
$$P_b(\text{erreur}/0) = P_b(\text{erreur}/1) = P_b = \int_0^\infty f_r(x/0) dx \quad (2.27)$$

En substituant $z = (x + g(0))/\sigma_b$, nous avons que

$$P_b = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{g(0)/\sigma_b}^\infty e^{-z^2/2} dz \quad (2.28)$$

Soit la fonction d'erreur $Q(x)$ ou la queue de gaussienne est la fonction suivante:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-z^2/2} dz \quad (2.29)$$

Figure 2.3 : Fonction d'erreur Q

Cette fonction est monotone et décroissante. Nous avons alors

$$Q(-\infty) = 1, \quad Q(0) = 1/2, \quad Q(\infty) = 0, \quad Q(-x) = 1 - Q(x)$$

$Q(x)$ peut être approximée de la manière suivante:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}x} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^{-x^2/2} < Q(x) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-x^2/2}$$

$$Q(x) \leq \frac{1}{2} e^{-x^2/2} \quad (2.30)$$

Pour la programmation, $Q(x)$ peut être exprimée en termes de la fonction d'erreur complémentaire « erfc », soit:

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt = 2Q(x\sqrt{2}) \quad (2.31)$$

En revenant à P_b , nous avons

$$P_b = Q\left(\frac{g(0)}{\sigma_b}\right); \left(= \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{g(0)}{\sigma_b\sqrt{2}}\right)\right) \quad (2.32)$$

Un exemple de la courbe de P_b est donné dans Figure 2.4 où les valeurs $\frac{g(0)}{\sigma_b}$ sont

exprimées en décibels (dB), c'est-à-dire en $20\log\left(\frac{g(0)}{\sigma_b}\right)$.

Le rapport $\frac{g(0)}{\sigma_b}$ est appelé le rapport signal à bruit et est une mesure importante des performances des systèmes des communications. Habituellement il se mesure en dB. L'abréviation en anglais est SNR (signal to noise ratio).

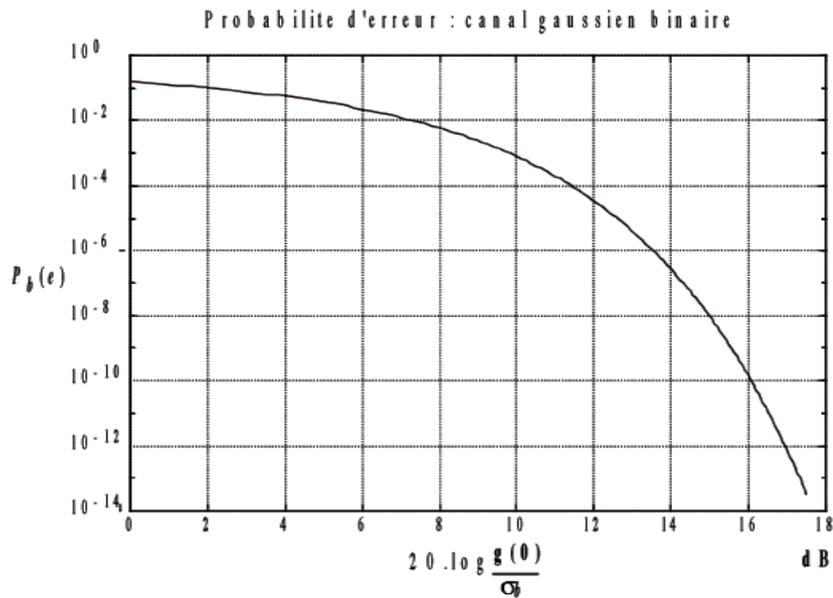


Figure 2.4: Probabilité d'erreur binaire pour le canal gaussien.

Quelques valeurs de P_b sont données dans le tableau 2.1.

$P_b(e) = Q\left[\frac{g(0)}{\sigma_b}\right]$	$\frac{g(0)}{\sigma_b}$	$\frac{g(0)}{\sigma_b} \Big (dB)$
10^{-2}	2.33	7.35
10^{-3}	3.09	9.80
10^{-4}	3.71	11.4
10^{-5}	4.26	12.6
10^{-6}	4.75	13.5
10^{-7}	5.19	14.3
10^{-8}	5.61	15.0
10^{-9}	5.99	15.5
10^{-10}	6.36	16.1
10^{-11}	6.70	16.5
10^{-12}	7.03	16.9

Table 2.1: table des probabilités d'erreur binaire pour un canal Gaussien

Pour mettre en évidence les ordres des grandeurs, on effectue à titre d'exemple le calcul suivant: au débit de 100Mbit/s , $P_b = 10^{-8}$ correspond à une erreur par seconde, alors que $P_b = 10^{-12}$ correspond à une erreur par $2\text{h}45\text{min}$

2.3.3 Cas des symboles M-aires

Le symbole a_k peut prendre M valeurs différentes:

$$a_k = \{\pm 1, \dots, \pm M/2\}$$

La probabilité d'erreur par symbole se calcule par:

$$P_s = \sum_{i=-M/2}^{M/2} P_s(\text{erreur}, i) = P_s = \sum_{i=-M/2}^{M/2} \text{Prob}(i) P_s(\text{erreur}|i) \quad (2.33)$$

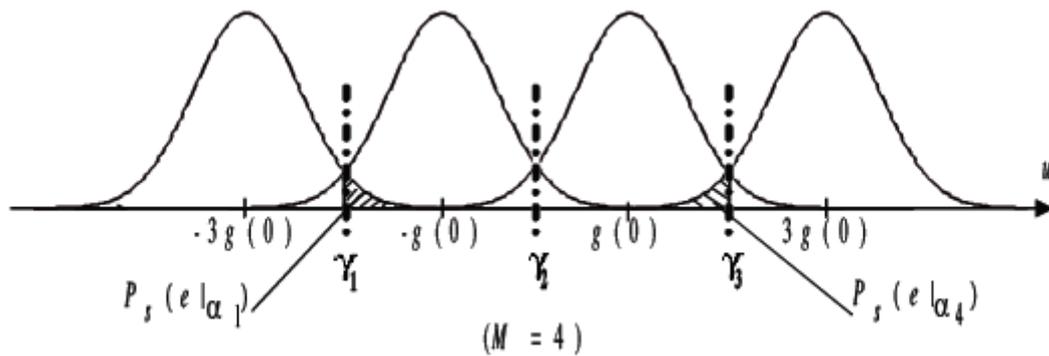


Figure 2.5 : exemple pour M=4

Les seuils optimaux de décision dépendent donc de toutes les probabilités des symboles i . Dans le cas des symboles équiprobables, quand $\text{Prob}(i) = \frac{1}{M}$; nous avons

$$P_s = \frac{1}{M} \sum_{i=-M/2}^{M/2} P_s(\text{erreur}|i) \quad (2.34)$$

Il est alors possible de démontrer (le calcul similaire au cas binaire) que les seuils optimaux de décision se trouvent au milieu de chaque intervalle. Sachant que :

$$P_s(\text{erreur}|-M/2) = P_s(\text{erreur}|M/2) = Q\left(\frac{g(0)}{\sigma_b}\right)$$

$$P_s(\text{erreur}|i) = 2Q\left(\frac{g(0)}{\sigma_b}\right) \quad M/2+1 < i < M/2+1$$

On en déduit alors l'expression de la probabilité d'erreur par symbole:

$$P_s = 2 \frac{M-1}{M} Q\left(\frac{g(0)}{\sigma_b}\right) \quad (2.35)$$

Sachant que $2 \leq M < \infty$, on constate que la probabilité d'erreur par symbole varie du simple au double, la valeur minimale étant obtenu dans le cas binaire:

$$Q\left(\frac{g(0)}{\sigma_b}\right) \leq P_s < 2Q\left(\frac{g(0)}{\sigma_b}\right) \quad (2.36)$$

La probabilité d'erreur par bit devient donc :

$$P_b = 2 \frac{M-1}{M \log_2 M} Q\left(\frac{g(0)}{\sigma_b}\right) \quad (2.37)$$

2.4 Estimation de la probabilité d'erreur par la technique de Monte Carlo

2.4.1 Probabilité d'erreur

La méthode la plus appropriée pour l'évaluation de performance d'un système de communications numériques est l'étude du comportement de production d'erreurs. Un tel comportement peut être caractérisé par différents aspects. Le scénario, le plus souvent adopté, est de considérer un système numérique qui transmet un nombre fini de symboles issus d'un alphabet de taille M (où $M = 2^k$) et de mesurer le nombre moyen d'erreurs qui sont produites tout au long de la transmission.

Considérons N le nombre de symboles transmis et $n(N)$ le nombre d'erreurs de symbole y correspondant et notons:

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n(N)}{N} \quad (2.38)$$

Par définition, P est la probabilité d'erreur par symbole [25][23]. Cette définition résume l'idée fondamentale de la technique de simulation Monte Carlo que nous allons par la suite développer davantage.

Etant donné $M = 2^k$, alors un symbole contient K - bits. Ainsi, à chaque probabilité d'erreur par symbole correspond une probabilité d'erreur par bit qu'on l'appelle aussi taux d'erreur binaire (TEB).

Le taux d'erreur binaire (TEB) est une information fondamentale pour mesurer la fiabilité d'un système et sur laquelle nous mettons l'accent dans ce travail. Toutefois, dans certaines situations, des informations telles que la distribution des erreurs et leurs corrélations sont très utiles.

Le problème essentiel en transmission de données, c'est de pouvoir distinguer deux signaux utiles différents lorsqu'ils sont perturbés par différentes sources de bruit.

En transmission binaire, le problème revient à transmettre sans ambiguïté un "0" ou un "1".

Dans le but de développer la technique de mesure de TEB, considérons un système élémentaire de communication en bande de base binaire. Nous supposons que la source d'information émet une variable aléatoire x qui prend les valeurs "0" et "1" avec les probabilités respectives π_0 et π_1 . En raison des perturbations apportées par la voie de transmission, le signal reçu v diffère de x .

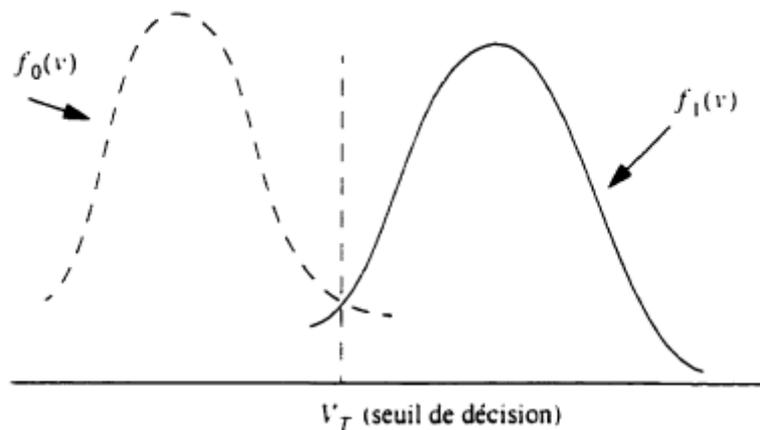


Figure : 2.6 Fonction de densité de probabilité du signal à la réception

La variable v appartient à un espace D à une dimension qui s'étend de $-\infty$ à $+\infty$. Le processus de décision à seuil partage l'espace D en deux sous espaces D_0 et D_1 . Pour un seuil de décision V_T donné, une erreur se produit quand "0" est émis et la tension du signal reçu est supérieur à V_T ou lorsque "1" est émis et la tension du signal reçu est au dessous de V_T .

Le processus de décision à seuil peut être décrit en terme des fonctions de densité de probabilité $f_0(v, \tau)$ et $f_1(v, \tau)$ du signal reçu $v(t)$ à un instant d'échantillonnage τ . Sachant que "0" ou "1" a été transmis (voir, Figure 2.6). Ainsi, les probabilités conditionnelles d'erreur sont données par:

$$P[\text{erreur} / 1] = p_1 = \int_{-\infty}^{V_T} f_1(v) dv = F_1(V_T) \quad (2.39)$$

$$P[\text{erreur} / 0] = p_0 = \int_{V_T}^{+\infty} f_0(v) dv = 1 - F_0(V_T) \quad (2.40)$$

Où $F_1(V_T)$ et $F_0(V_T)$ sont les fonctions de distributions cumulatives correspondant respectivement aux fonctions $f_0(v, \tau)$ et $f_1(v, \tau)$

La probabilité moyenne d'erreur est alors:

$$P_e = \pi_0 p_0 + \pi_1 p_1 \quad (2.41)$$

Avec π_0 et π_1 les probabilités respectives à priori des symboles "1" et "0".

2.4.2 Application de MC pour l'évaluation des taux d'erreurs binaires

L'application de Monte Carlo pour l'évaluation des taux d'erreur binaire signifie tout simplement l'implémentation d'une séquence d'expérience de Bernouilli. En fait, lors d'une simulation Monte Carlo, nous comptons le nombre de "succès" (erreur pour ce contexte), et nous le divisons par le nombre d'expérience.

La figure 2.7 représente l'application de MC pour une chaîne de communication. La chaîne proposée comporte trois étapes importantes. La première étape consiste à générer et transmettre les données binaires. La deuxième se résume dans le processus de décision et la troisième représente la comparaison entre les données émises et reçues et le décompte des erreurs.

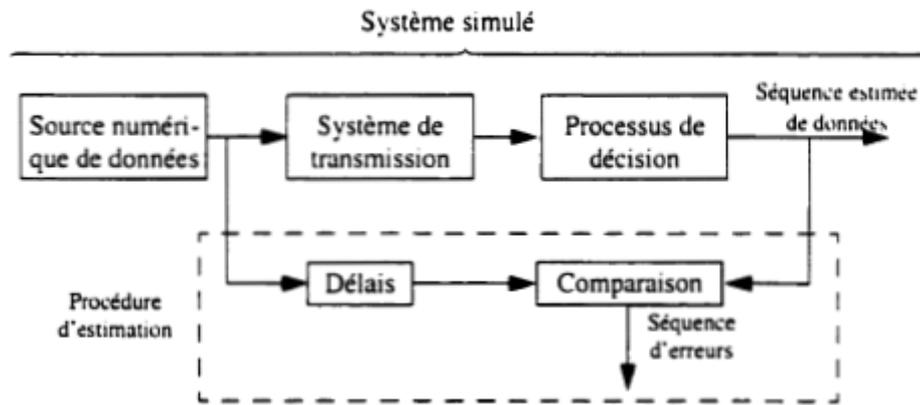


Figure : 2.7 Schéma de l'implémentation de la procédure d'estimation de MC.

Dans le reste de ce paragraphe, nous allons étudier les propriétés mathématiques de la méthode de MC. Nous traitons le cas particulier où les symboles "0" et "1" sont équiprobables et les probabilités d'erreur y afférents sont les mêmes et nous supposons arbitrairement que le symbole "0" est émis. La généralisation de calculs pour les cas contraires est immédiate.

Sachant que le symbole "0" est émis, la probabilité conditionnelle d'erreur sera donnée par l'équation (2.40). En introduisant la fonction d'indicateur d'erreur définie par l'équation (2.43), la probabilité d'erreur peut se réécrire sous

$$P_e = P_0 = \int_{v \in D_E} f_0(v) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} H(v) f_0(v) dv \quad (2.42)$$

$H(v)$ étant la fonction d'indicateur d'erreur définie comme suit:

$$H(v) = \begin{cases} 1 & v \in D_E \text{ (ou } v \geq V_T) \\ 0 & v \notin D_E \text{ (ou } v < V_T) \end{cases} \quad (2.43)$$

Avec D_E est la région où v correspond à une erreur.

La probabilité d'erreur donnée par l'équation (2.42) est équivalente à :

$$P_e = E\{H(v)\} \quad (2.44)$$

Où $E\{\cdot\}$ est l'espérance mathématique.

Un estimateur naturel de l'espérance mathématique est la moyenne temporelle de l'échantillon $\langle H(v_i) \rangle$, soit alors:

$$\hat{P}_e = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{i=0}^{N_{MC}-1} H(v_i) \quad (2.45)$$

Où $v_i = v(t_i)$, avec les t_i sont les instants de décision et N_{MC} est le nombre total d'échantillons transmis.

L'équation (2.45) décrit formellement la technique de Monte Carlo qui consiste à observer sur les N_{MC} bits d'information transmis, le nombre de bits erronés.

Indépendamment des symboles émis et de leur probabilité de production et comme extension de l'équation (2.45), un estimateur de (*TEB*) peut s'écrire sous la forme:

$$\hat{P}_e = \frac{n}{N_{MC}} \quad (2.46)$$

Où N_{MC} est le nombre de bits à l'entrée du système et n est le nombre total d'erreurs observées.

D'après la loi forte de grands nombres, si $N_{MC} \rightarrow \infty$, l'estimateur \hat{P}_e converge presque sûrement vers la valeur P_e [30] [23]. Or, en pratique, nous simulons avec un nombre fini d'échantillons. D'où la nécessité de qualifier la qualité de l'estimateur \hat{P}_e . Comme nous l'avons signalé précédemment, l'intervalle et le niveau de confiance sont les mesures les plus utilisées pour évaluer la qualité d'un estimateur.

2.4.2.1 Intervalle de confiance: loi binomiale

La mesure de la qualité d'un estimateur en terme d'intervalle et niveau de confiance consiste à déterminer deux réels h_1 et h_2 , fonctions de l'estimateur \hat{p}_e , de telle sorte que ce dernier soit dans l'intervalle $[h_1, h_2]$ avec une probabilité (élevée) $1-\alpha$ donnée.

Pour un N_{MC} donné, la distribution du terme $n\hat{p}_e$ suit une loi binomiale.

On démontre alors [31] [23] que h_1 et h_2 sont les solutions respectives de:

$$\sum_{k=0}^n \binom{N_{MC}}{K} h_1^k (1-h_1)^{N_{MC}-K} = 1 - F(h_1 : n, N_{MC} - n - 1) = \frac{\alpha}{2} \quad (2.47)$$

$$\sum_{k=n}^{N_{MC}} \binom{N_{MC}}{K} h_2^k (1-h_2)^{N_{MC}-K} = 1 - F(h_2 : n - 1, N_{MC} - n) = \frac{\alpha}{2} \quad (2.48)$$

Où $F(x : \alpha, \beta) = \frac{(\alpha + \beta + 1)!}{\alpha! \beta!} \int_0^x t^\alpha (1-t)^\beta dt$ est la fonction de distribution cumulative beta.

Bien qu'il soit complètement rigoureux et précis, le calcul de h_1 et h_2 , par les équations (2.47) et (2.48) présente deux inconvénients majeurs. Premièrement, les dites équations doivent être résolues d'une manière itérative. Deuxièmement, les tables de la fonction beta sont limitées et ne couvrent pas les valeurs qui nous intéressent pour estimer des (TEB) [25] [23]. Ainsi, il est nécessaire d'adopter les approximations classiques de la loi binomiale

2.4.2.2 Intervalle de confiance: approximation par la loi de Poisson

Nous savons que, sous les conditions suivantes:

$$P \rightarrow 0, N_{MC} \rightarrow \infty \text{ et } \lim_{N_{MC} \rightarrow \infty} \hat{P}_e N_{MC} = \lambda$$

Où λ est une constante positive, la distribution binomiale peut être approximée par la loi de Poisson [32] [23].

Avec cette approximation, l'évaluation de la qualité de l'estimateur nous amène à chercher un intervalle de confiance $[\lambda_1/N_{MC}, \lambda_2/N_{MC}]$ contenant le TEB avec un niveau de confiance $1 - \alpha$.

Il est montré dans [25] [23] que λ_1 et λ_2 sont solutions des équations:

$$\sum_{k=0}^n \exp(-\lambda_1) \frac{\lambda_1^k}{k!} = \frac{\alpha}{2} \text{ et } \sum_{k=n}^{N_{MC}} \exp(-\lambda_2) \frac{\lambda_2^k}{k!} = \frac{\alpha}{2} \quad (2.49)$$

L'utilité des équations (2.49) réside dans le fait que les tables de la distribution de Poisson couvrent les valeurs d'intérêt usuel pour la détermination des intervalles de confiance contenant les TEB à estimer.

2.4.2.3 Intervalle de confiance: approximation par la loi normale

L'approximation par la loi de Poisson est intéressante pour des faibles taux d'erreur ($\hat{P}_e \rightarrow 0$). Sous des hypothèses moins contraignantes, où nous supposons que $N_{MC} \rightarrow \infty$ sans que nous imposions des conditions sur \hat{P}_e , la distribution binomiale de \hat{P}_e , tend vers la loi normale de moyenne P_e et de variance $\frac{P_e(1-P_e)}{N}$. Nous pouvons alors construire l'intervalle de confiance sous la forme donnée dans [25] [23] par l'équation suivante:

$$\text{Prob} \left\{ \begin{array}{l} \frac{N_{MC}}{N_{MC} + d_\alpha^2} \hat{P}_e + \frac{d_\alpha^2}{2N_{MC}} - d_\alpha \sqrt{\frac{\hat{P}_e(1-\hat{P}_e)}{N_{MC}} + \left(\frac{d_\alpha}{2N_{MC}}\right)^2} \\ \leq \hat{P}_e \leq \frac{N_{MC}}{N_{MC} + d_\alpha^2} \left[\hat{P}_e + \frac{d_\alpha^2}{2N_{MC}} + d_\alpha \sqrt{\frac{\hat{P}_e(1-\hat{P}_e)}{N_{MC}} + \left(\frac{d_\alpha}{2N_{MC}}\right)^2} \right] \end{array} \right\} = 1 - \alpha \quad (2.50)$$

Où P_e est la vraie valeur du TEB et d_α est un paramètre choisi tel que :

$$\int_{-d_\alpha}^{d_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = 1 - \alpha \quad (2.51)$$

L'importance de l'approximation par la loi normale réside dans l'accessibilité universelle aux tables de cette loi et dans le fait que nous pouvons illustrer ses valeurs graphiquement [25] [23]. Pour la construction de graphiques, supposons $\hat{P}_e = 10^{-k}$ et $N_{MC} = \eta 10^k$.

Nous notons que les approximations suivantes $\hat{P}_e(1-\hat{P}_e) \cong \hat{P}_e$ et $N_{MC}/(N_{MC} + d_\alpha^2) \cong 1$ sont souvent vérifiées. Nous pouvons ainsi écrire l'équation (2.50) sous la forme:

$$\text{Prob}[y_+ \leq P_e \leq y_-] = 1 - \alpha \quad (2.52)$$

Où l'intervalle de confiance $[y_+, y_-]$ est donné par:

$$y_{\pm} = 10^{-k} \left\{ 1 + \frac{d_\alpha^2}{2\eta} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\eta}{d_\alpha^2}} \right] \right\} \quad (2.53)$$

La figure 2.8 illustre cet intervalle de confiance en fonction du nombre de points de simulation N_{MC} , et ce pour des niveaux de confiance de : 90%, 95% et 99%. Cet ensemble de courbes nous permet de retrouver la règle du pouce qui veut que le nombre N_{MC} d'échantillons de simulation soit de l'ordre de $10/P_e$.

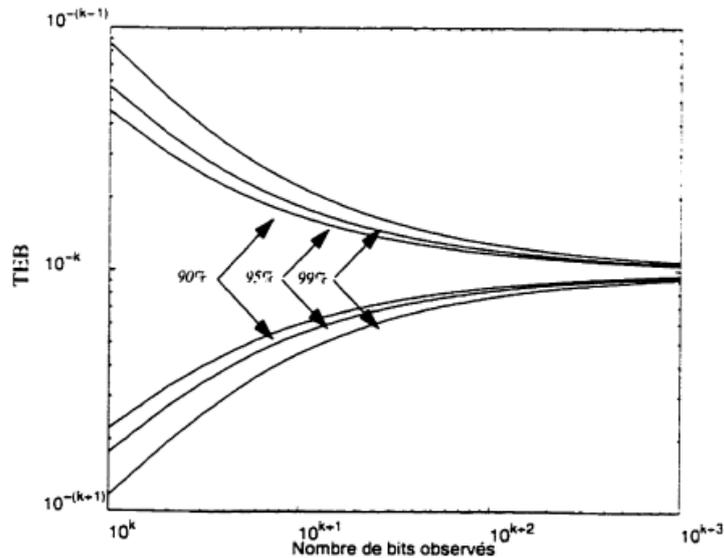


Figure : 2.8 Bandes de confiance sur le TEB lorsque la valeur observée est 10^{-k}

2.4.2.4 Moyenne et variance de l'estimateur de MC

L'estimateur de MC donné par l'équation (2.46) peut être réécrit sous la forme:

$$\hat{P}_e = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{i=1}^{N_{MC}} e_i \tag{2.54}$$

Avec $\{e_i\}$ est une séquence d'erreurs définie par:

$$\begin{cases} e_i = 1 & \text{Si une erreur se produit à la } i\text{ème observation} \\ e_i = 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Sachant que $E(e_i) = P_e$, on démontre que l'estimateur de MC est un biais, en d'autres termes $E(\hat{P}_e) = P_e$.

La variance de l'estimateur \hat{P}_e est:

$$\sigma_{MC}^2(\hat{P}) = E(\hat{P}_e^2) - P_e^2 \quad (2.55)$$

$$\sigma_{MC}^2(\hat{P}_e) = \frac{P_e}{N_{MC}} - \frac{P_e^2}{N_{MC}} = P_e(1 - P_e) / N_{MC} \quad (2.56)$$

L'équation (2.56) est équivalente à:

$$\sigma_{MC}^2(\hat{P}_e) = \frac{1}{N_{MC}} \int_{-\infty}^{+\infty} H(v) f_v(v) (1 - P_e) dv \quad (2.57)$$

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé la méthode de simulation Monte Carlo tout en donnant ses propriétés mathématiques et son utilité pour l'évaluation des performances des systèmes de communication. En dépit de sa popularité et de son succès, la méthode est coûteuse en terme de temps de simulation.

CHAPITRE**3**

Le problème majeur, avant l'implémentation d'un système de communication numérique (FH, Communication par satellite, GSM, UMTS...), consiste à trouver la manière de calculer les performances de ce système en adoptant comme critère le taux d'erreur binaire (TEB). La technique de simulation Monte Carlo (développée au chapitre 2) est la plus utilisée pour la résolution de ce type problème. Cette technique est testée dans le présent chapitre en supposant une modulation BPSK et un bruit additif aléatoire gaussien (AWGN).

3.1 Introduction

La transmission numérique permet d’acheminer des messages discrets d’une source à un destinataire via un canal (voir, figure 1.1).

Dans ce qui suit, nous allons donner un aperçu sur la modulation BPSK pour différents types des canaux de transmission et d’égalisations et présenter pour chaque type, les procédures d'application de la méthode d’estimation Monte Carlo.

3.2 Simulation des systèmes en modulation binaire BPSK

3.2.1 Modulation binaire BPSK

Pour la modulation Binary Phase Shift Keying (BPSK), les bits 1 et 0 peuvent être représentés par les niveaux analogiques $+\sqrt{E_b}$ et $-\sqrt{E_b}$ respectivement. Le modèle du système (modulation/démodulation) est représenté dans la figure 3.1.

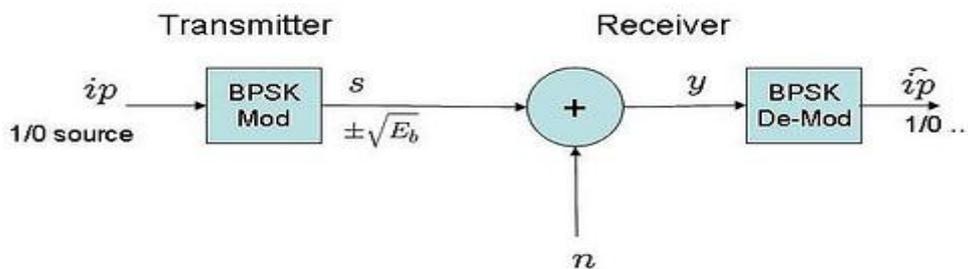


Figure:3.1 : Schéma simplifié de BPSK émetteur-récepteur

Les expressions du signal modulé sont données par :

$$\begin{cases} s_0(t) = +\sqrt{E_b} \cos 2\pi f_c t \\ s_1(t) = -s_0(t) = -\sqrt{E_b} \cos 2\pi f_c t \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq t \leq T \\ 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (3.1)$$

3.2.2 Modèle du bruit AWGN

La forme d’onde transmise est corrompue par le bruit n , additif aléatoire et gaussien (AWGN).

Les valeurs du bruit n suivent la fonction de distribution gaussienne de probabilité : $P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ avec $\mu=0$ et $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$.

3.2.2.1 Calcul de la probabilité d'erreur [14]

Le signal reçu est $y = s_1 + n$ lorsque le bit 1 est transmis et $y = s_0 + n$ lorsque le bit 0 est transmis.

La fonction de distribution de probabilité conditionnelle (PDF) de y sachant s_0 et celle de y sachant s_1 sont données par les expressions suivantes :

$$P(y / s_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(y+\sqrt{E_b})^2}{N_0}} \quad P(y / s_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(y-\sqrt{E_b})^2}{N_0}} \quad (3.2)$$

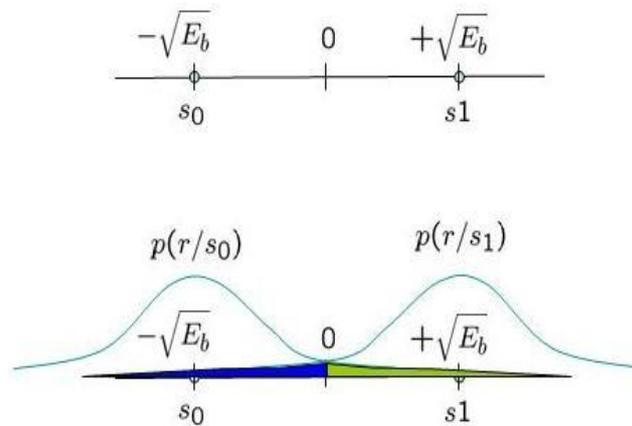


Figure 3.2: Densité de probabilité conditionnelle avec modulation BPSK

En supposant que s_1 et s_0 sont également probables, le seuil de 0 forme la frontière de décision optimale.

- si le signal reçu y est supérieur à 0, le récepteur suppose que s_1 a été transmis.
- si le signal reçu est y inférieur ou égal à 0, le récepteur suppose que s_0 a été transmis.

Donc : $y > 0 \Rightarrow s_1$ et $y \leq 0 \Rightarrow s_0$

a) Probabilité d'erreur sachant s_1 est transmis

Avec ce seuil, la probabilité d'erreur, sachant s_1 est transmis, est la zone bleue dans la figure 3.2. Elle est exprimée par :

$$P(e / s_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(y-\sqrt{E_b})^2}{N_0}} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\sqrt{E_b}}{\sqrt{N_0}}}^{\infty} e^{-z^2} dz$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (3.3)$$

Où, $\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-x^2} dx$ est la fonction d'erreur complémentaire.

b) Probabilité d'erreur, sachant s_0 est transmis

La probabilité d'erreur, sachant s_0 est transmis, est la zone verte dans la figure 3.2. Elle est exprimée par :

$$P(e / s_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(y+\sqrt{E_b})^2}{N_0}} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\sqrt{E_b}}{\sqrt{N_0}}}^{\infty} e^{-z^2} dz$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (3.4)$$

c) Probabilité d'erreur totale par bits

$$P_b = p(s_1)p(e / s_1) + p(s_0)p(e / s_0) \quad (3.5)$$

Étant donné que nous avons supposé que s_1 et s_0 sont également probables, soit :

$$p(s_1) = p(s_0) = \frac{1}{2} \quad (3.6)$$

La probabilité d'erreur binaire est exprimée par:

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (3.7)$$

3.2.2.2 Procédure de simulation

La procédure de simulation (Cf. Annexe 3) consiste à générer des symboles binaires, modulés par la modulation BPSK. On ajoute ensuite un bruit blanc gaussien, puis on effectue une démodulation des symboles reçus en se basant sur la localisation dans la constellation. On effectue après le comptage d'erreurs. Cette procédure est répétée pour différentes $\frac{E_b}{N_0}$ valeurs. Les résultats de la simulation, pour deux nombres de bits d'émission $N=10^3$ et $N=10^6$, sont donnés dans les Figure 3.3 et Figure 3.4 respectivement.

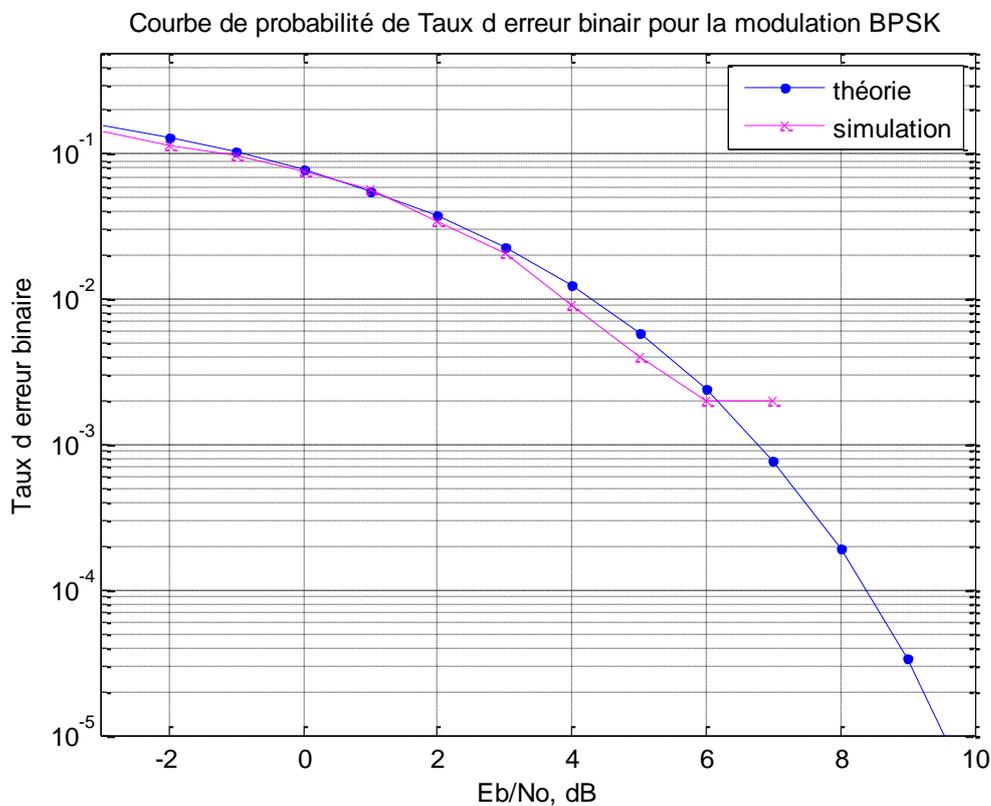


Figure 3.3 : Simulation BER pour modulation BPSK avec canal AWGN Pour $N=10^3$ bit d'émission

Nous remarquons dans la figure 3.3, que pour $E_b/N \in [-3, 3]$, la courbe théorique et la courbe de simulation sont presque identiques. Alors que pour $E_b/N \in [3, 7]$ la

courbe théorique et la courbe de simulation ne se confondent pas. Il est à noter au passage que pour $E_b/N \in [7,10]$, on n'a pas pu avoir de courbe de simulation.

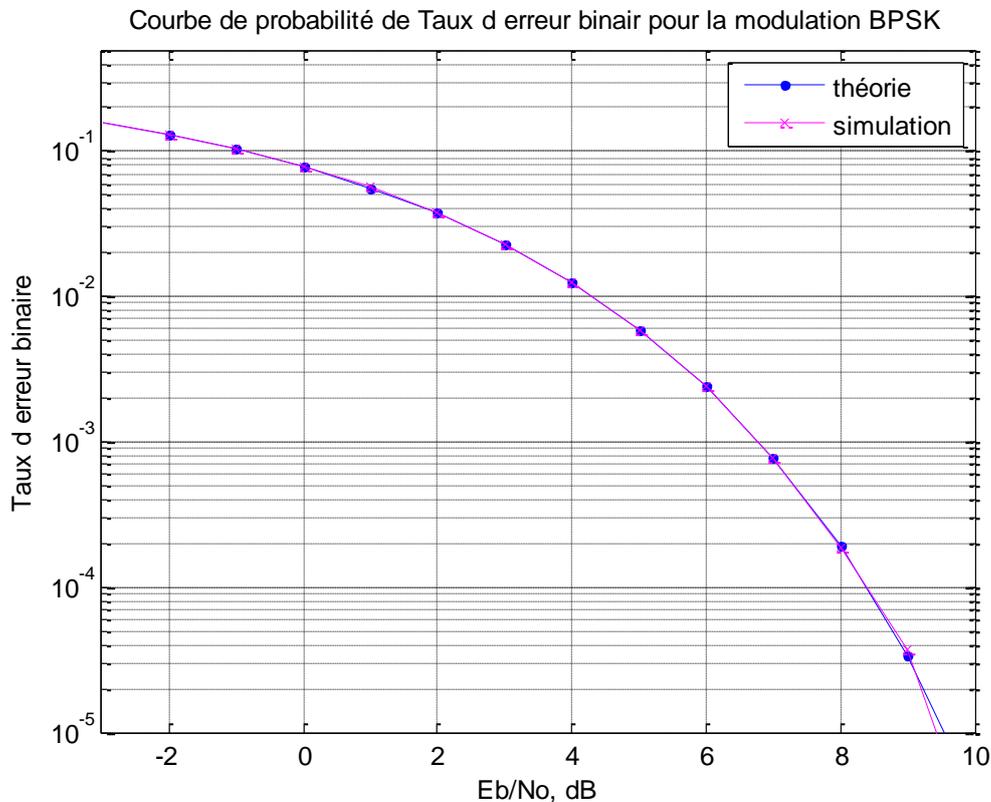


Figure 3.4 : Simulation BER pour modulation BPSK avec canal AWGN Pour $N=10^6$ bit d'émission

Nous remarquons dans la figure 3.4, que pour $E_b/N \in [-3,10]$, la courbe théorique et la courbe de simulation sont presque identiques.

D'où l'on peut confirmer que la méthode de simulation de Monte Carlo est bien une méthode efficace de simulation des système de communication numériques mais à condition d'augmenter le nombre de bit simulé pour avoir une meilleure valeur de BER.

3.2.3 Canal de Rayleigh

Le canal de Rayleigh est défini par l'expression suivante :

$$h = h_{re} + jh_{im} \quad (3.8)$$

Où les parties réelles et imaginaires sont des variables aléatoires d'une loi gaussiennes de moyenne nulle 0 et de variance σ^2 indépendantes et identiquement distribuées. L'amplitude $|h|$ qui a une densité de probabilité

$$p(h) = \frac{h}{\sigma^2} e^{-\frac{h^2}{2\sigma^2}}, \quad z \geq 0 \quad (3.9)$$

Est appelée une **variable aléatoire de Rayleigh**. Ce modèle, appelé **modèle de canal de Rayleigh fading**, est raisonnable pour un environnement où il y a un grand nombre de réflecteurs.

3.2.3.1 Modèle de système

Le signal reçu en **canal de Rayleigh fading** est de la forme $y = hx + n$, où y est le symbole reçu, h est facteur d'échelle complexe correspondant à **Rayleigh** multi canal, x est le symbole transmis (en prenant les valeurs +1 et -1) et n le bruit blanc gaussien additif (AWGN).

3.2.3.2 Hypothèses

a) Le canal est plat Fading [33], cela signifie que le canal à trajets multiples à un seul robinet. Ainsi, l'opération de convolution se réduit à une simple multiplication.

b) La chaîne est aléatoire et variant dans le temps, ce qui signifie que chaque symbole transmis est multiplié par un nombre aléatoire variable complexe h . A partir de h , caractérisant le modèle d'un canal de Rayleigh, les parties réelles et imaginaires sont distribués gaussienne ayant une moyenne de 0 et de variance $1/2$.

c) Le bruit n a la fonction de probabilité gaussienne de densité avec

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(n-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{ avec } \mu=0 \text{ et } \sigma^2 = \frac{N_0}{2}. \quad (3.10)$$

d) Le canal h est connu au niveau du récepteur.

L'égalisation est effectuée au niveau du récepteur en divisant le symbole reçu y par h , soit :

$$\hat{y} = \frac{y}{h} = \frac{hx + n}{h} = x + \tilde{n} \quad (3.11)$$

Où $\tilde{n} = \frac{n}{h}$ est le bruit additif réduit par le coefficient de canal.

3.2.3.3 Taux d'erreur binaire (BER ou TEB) [14]

Pour le calcul du BER dans le canal AWGN, la probabilité d'erreur de transmission de +1 ou -1 est calculée en intégrant la queue de la fonction gaussienne de densité de probabilité pour une valeur donnée de l'énergie par rapport au bruit $\frac{E_b}{N_0}$.

Le taux d'erreur binaire est :

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{E_b}{N_0} \right). \quad (3.12)$$

Toutefois, en présence de canaux h , l'énergie de bit effective par rapport au bruit est $\frac{|h|^2 E_b}{N_0}$. Donc, la probabilité d'erreur binaire pour une valeur donnée de h est :

$$P_{b|h} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{|h|^2 E_b}{N_0}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}), \quad (3.13)$$

Où $\gamma = \frac{|h|^2 E_b}{N_0}$.

Pour trouver la probabilité d'erreur sur l'ensemble des valeurs aléatoires de $|h|^2$, il faut évaluer la fonction de densité de probabilité conditionnelle $P_{b|h}$ sur la fonction de densité de probabilité de γ .

a) Fonction de densité de probabilité de γ

De notre discussion sur les chi-carré variable aléatoire (Cf. Annexe 1), nous savons que si $|h|$ est une variable de Rayleigh distribuée au hasard, puis $|h|^2$ est chi carré distribuée avec deux degrés de liberté. Puisque $|h|^2$ chi carré est distribuée, γ est également distribuée chi carré. La fonction de densité de probabilité de γ est :

$$P(\gamma) = \frac{1}{(E_b/N_0)} e^{\frac{-\gamma}{(E_b/N_0)}} , \gamma \geq 0 \quad (3.14)$$

Donc, **la probabilité d'erreur** est exprimée par :

$$P_b = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) p(\gamma) d\gamma \quad (3.15)$$

D'une certaine manière, cette équation se réduit à :

$$P_b = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{(E_b/N_0)}{(E_b/N_0)+1}} \right) \quad (3.16)$$

Pour $N=10^6$ bit d'émission, il est effectué une simulation pour l'estimation des BER pour la modulation BPSK avec canal Rayleigh. Les résultats de simulation sont donnés dans la figure 3.5. Il est observé que pour $E_b/N \in [-2,5,35]$, la courbe (BER) théorique et la courbe (BER) de simulation sont confondues pour le canal de Rayleigh.

Pour la courbe de canal AWGN, il est observé une performance meilleure en terme d'estimation du (BER) relativement au canal de Rayleigh, et ce à cause de l'effet de canal multi-trajets (canal Rayleigh) qui influe directement sur le taux d'erreur binaire.

Comparé au cas AWGN, autour de 25dB, la dégradation liée au canal multi trajets (au point 10^{-4}) est mauvaise parce que nous avons besoin de dépenser tant d'énergie pour obtenir une liaison sans fil établie de manière fiable.

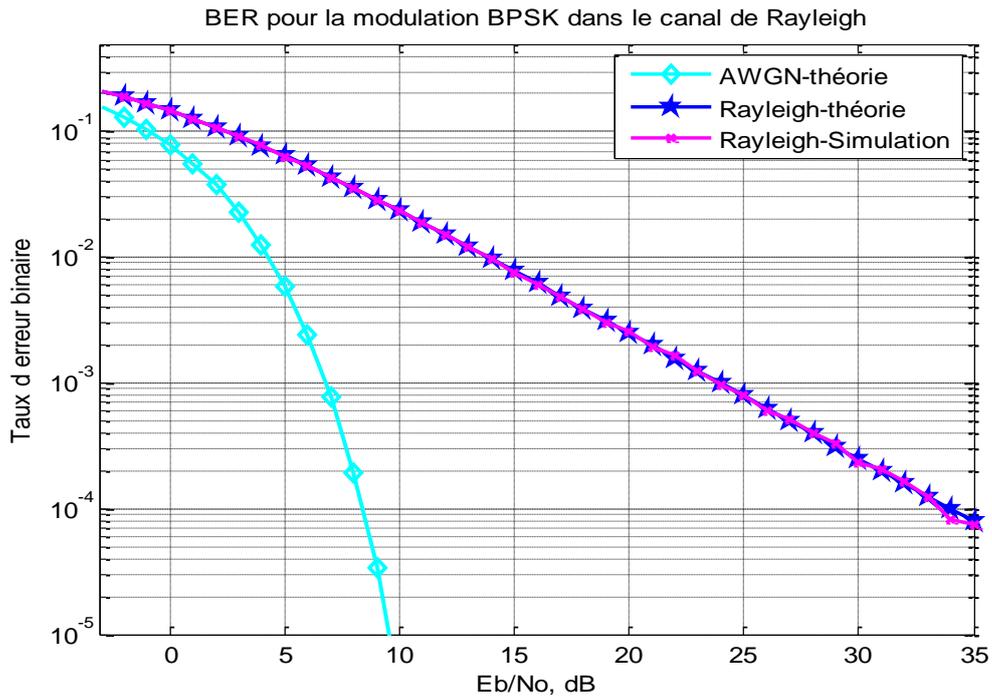


Figure 3.5 : Simulation BER pour modulation BPSK avec canal Rayleigh Pour $N=10^6$ bit d'émission

3.2.4 Utilisation d'égaliseurs pour la compensation des ISI

On utilise un canal sélectif en fréquence avec l'utilisation des égaliseurs (ZF) et (MMSE) pour compenser l'interférence inter symbole (ISI). Nous supposons qu'il n'y a pas d'impulsion mise en forme à l'émetteur. Le canal de l'IIS est supposé être un canal fixe à 3 robinets.

3.2.4.1 Symboles transmis

Les symboles transmis sont modélisés comme suit :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT) \tag{3.17}$$

Où : T est la période du symbole, a_n est le symbole transmis, $g(t)$ est le filtre d'émission, n est l'indice de symbole et $s(t)$ est le signal de sortie.

Pour plus de simplicité, on suppose que l'impulsion est transmise en l'absence du filtre de mise en forme, soit : $g(t) = \delta(t)$.

Les symboles de transmission peuvent être alors modélisés par l'équivalent en temps discret

$$s[k] = a_n$$

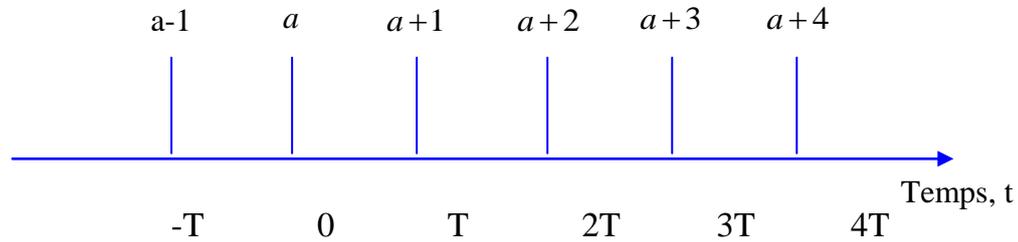


Figure 3.6: Les symboles de transmission

3.2.4.2 Modèle de canal

Soit le canal multi-trajets de 3 coefficients avec un espacement de T .

$$h[k] = [h_1 \ h_2 \ h_3]$$

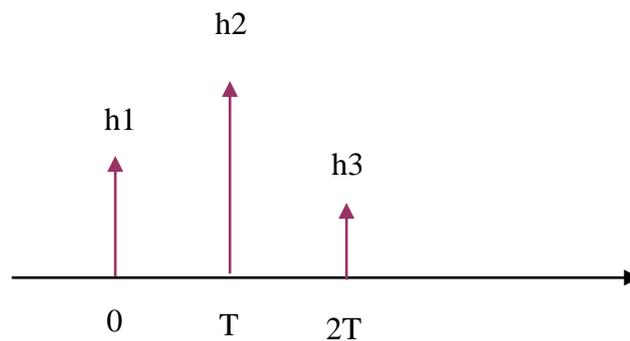


Figure 3.7: Modèle de canal (3 multi trajets du robinet)

En plus du canal multi trajets, le signal reçu est corrompu par le bruit n , généralement appelé **bruit blanc gaussien additif** (AWGN).

Le signal reçu est alors exprimé par :

$$y[k] = s[k] \otimes h[k] + n \quad (3.18)$$

Où \otimes est l'opérateur de convolution.

3.2.4.3 L'égalisation Forçage à Zéro (ZF)

Objectif de l'égalisation Forçage à Zéro est de trouver un ensemble de coefficients de filtre $c[k]$ pour avoir $h[k] \otimes c[k] = \delta[k]$.

Après l'égalisation, on a :

$$\begin{aligned}\hat{y}_{ZF}[k] &= c[k] \otimes y[k] \\ &= c[k](s[k] \otimes h[k] + n) \\ &= s[k] + c[k] \otimes n\end{aligned}\quad (3.19)$$

Le terme $c[k] \otimes n$ provoque une atténuation du bruit le résultant une performance moindre taux d'erreur binaire.

Calcul des coefficients d'égalisation

A partir de la matrice de Toeplitz , nous savons que l'opération de convolution peut être représentée comme une multiplication matricielle. Cette opération peut être illustrée dans l'exemple Matlab suivant :

```
x = [1:3];
h = [4:6];
xM = toeplitz([x zeros(1,length(h)-1) ], [x(1) zeros(1,length(h)-1) ]);
y1 = xM*h';
y2 = conv(x,h);
diff = y1'-y2 ;
```

En supposant que les coefficients $c[k]$ à 3 robinets, l'équation $h[k] \otimes c[k] = \delta[k]$ peut être représentée comme suit :

$$\begin{bmatrix} h2 & h1 & 0 \\ h3 & h2 & h1 \\ 0 & h3 & h2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\quad (3.20)$$

Le vecteur $c[k]$ est donné par :

$$\begin{bmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h2 & h1 & 0 \\ h3 & h2 & h1 \\ 0 & h3 & h2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Si nous supposons que $c[k]$ à 5 robinets, on a alors

$$\begin{bmatrix} h2 & h1 & 0 & 0 & 0 \\ h3 & h2 & h1 & 0 & 0 \\ 0 & h3 & h2 & h1 & 0 \\ 0 & 0 & h3 & h2 & h1 \\ 0 & 0 & 0 & h3 & h1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \\ c4 \\ c5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

D'où le vecteur $c[k]$ est obtenu comme suit :

$$\begin{bmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \\ c4 \\ c5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h2 & h1 & 0 & 0 & 0 \\ h3 & h2 & h1 & 0 & 0 \\ 0 & h3 & h2 & h1 & 0 \\ 0 & 0 & h3 & h2 & h1 \\ 0 & 0 & 0 & h3 & h1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

* Pour un canal à 3 robinets, la réponse en fréquence du canal $h[k]$ et l'égaliseur $c[k]$ sont présentés dans la figure 3.8.

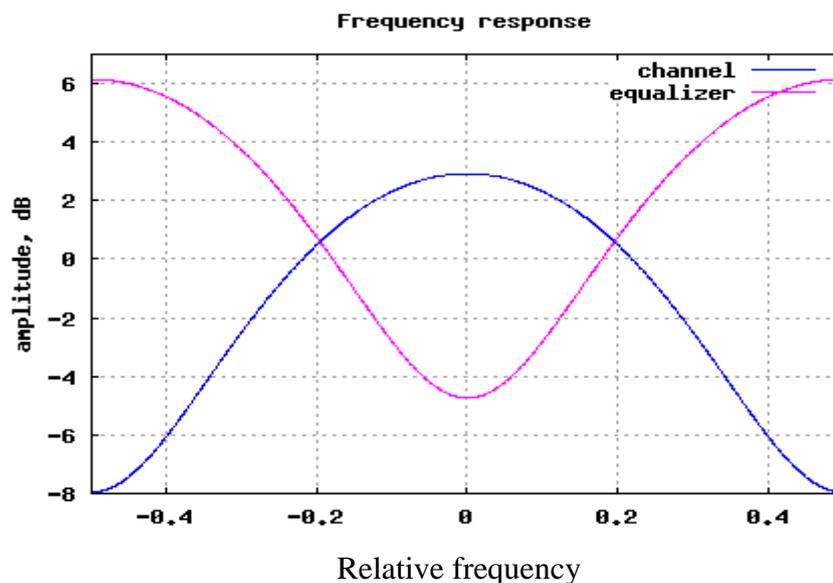


Figure 3.8: Réponse en fréquence du canal et de l'égaliseur

Procédure de simulation

La simulation est effectuée pour le calcul du taux d'erreur binaire théorique et estimé pour une modulation BPSK avec un égaliseur ZF.

La procédure de simulation (Cf. Annexe 4) consiste à générer des symboles binaires, modulés par la modulation BPSK (le bit 0 représenté par -1 et 1 bit représenté par +1) puis on effectue une convolution des symboles avec les 3 coefficients du canal. Et on ajoute ensuite un bruit blanc gaussien. On calcule après le filtre d'égalisation au niveau du récepteur (le filtre d'égalisation est de 3, 5, 7, 9 robinets de longueur). Puis on effectue une démodulation et une conversion des bits. On effectue après le comptage d'erreurs. Cette procédure est répétée pour différentes $\frac{E_b}{N_0}$ valeurs. Les résultats de la simulation, pour un nombre de bits d'émission $N=10^6$, sont représentés dans la Figure 3.9.

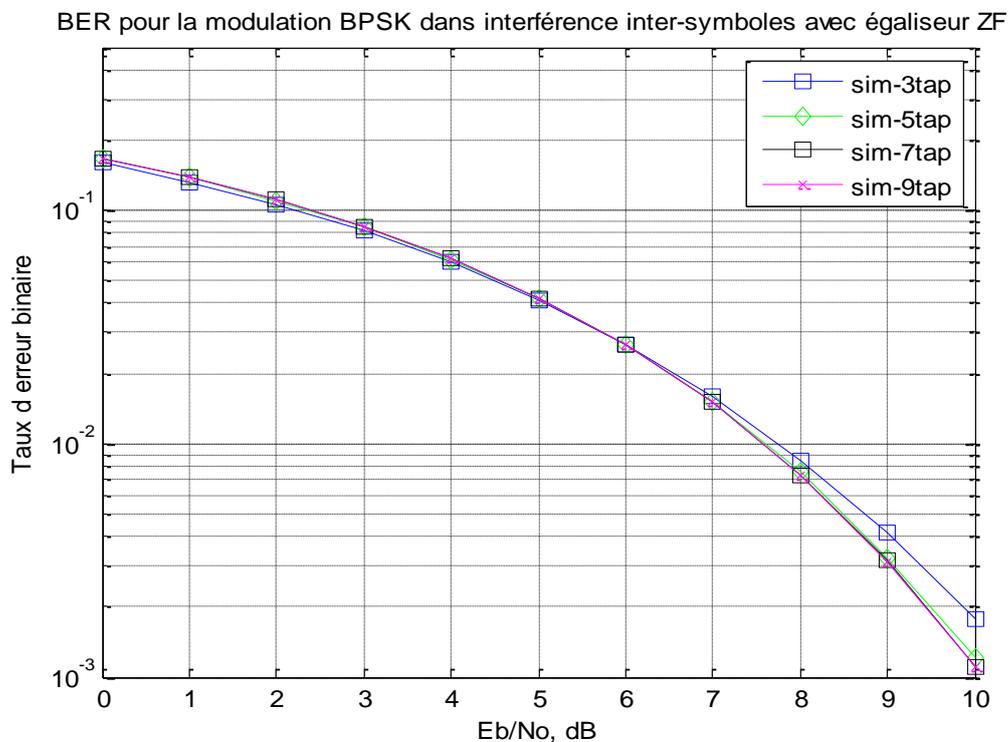


Figure 3.9: Simulation BER pour modulation BPSK dans un canal de 3 robinets ISI avec l'égaliseur ZF Pour $N=10^6$ bit d'émission

A partir de la figure 3.9, il est observé que l'augmentation de la longueur du robinet égaliseur 3 à 5 montre une amélioration raisonnable des performances. Cependant, les résultats sont relativement moins bons que les résultats relatifs au canal AWGN. Cela est dû à l'amplification du bruit par le filtre d'égalisation ZF. Néanmoins, les résultats obtenus sont nettement meilleurs que ceux du canal du canal Rayleigh.

3.2.4.4 Egalisation MMSE

Dans la solution Minimum d'Erreur Quadratique Moyenne, pour chaque temps d'échantillonnage k , nous voulons trouver un ensemble de coefficients $c[k]$ qui minimise l'erreur entre le signal désiré $s[k]$ et le signal égalisé $c[k] \otimes y[k]$, soit :

$$\begin{aligned}
 E(e[k])^2 &= E(s[k] - c[k] \otimes y[k])^2 \\
 &= E(s[k] - c^T y)(s[k] - c^T y)^T \\
 &= E(s[k])^2 - E(c^T y s[k]) - E(s[k] y^T c) + E(c^T y y^T c) \\
 &= E(s[k])^2 - c^T R_{ys} - R_{sy} c + c^T R_{yy} c
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

où,

$e[k]$: est l'erreur au moment de l'échantillon k ,

c : est un vecteur colonne de dimension $[K*1]$ où l'on stocke les coefficients d'égalisation.

y : est un vecteur colonne de dimension $[K*1]$ pour le stockage des échantillons reçus.

K : est le nombre d'entailles dans l'égaliseur.

$R_{ys} = E(y s[k])$: est la corrélation croisée entre la séquence reçue et la séquence d'entrée.

$R_{sy} = E(s[k] y^T)$: est la corrélation croisée entre la séquence reçue et la séquence d'entrée.

$R_{yy} = E(yy^T)$: est l'auto-corrélation de la séquence reçue.

Pour le calcul de la MMSE, nous avons besoin de trouver un ensemble de coefficients c qui minimise $E(e[k])^2$.

En dérivant par rapport à c et en égalant à 0,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dc} \left[E(s[k])^2 - c^T R_{ys} - R_{sy}c + c^T R_{yy}c \right] &= 0 \\ -R_{sy} + R_{yy}c &= 0 \\ c &= R_{yy}^{-1}R_{sy} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Pour simplifier le calcul, on écrit :

$$\begin{aligned} R_{sy} &= E(s[k]y^T) \\ &= E(s[k](hs[k]+n)^T) \\ &= h^T E(s^2[k]) + E(s[k]n) \\ &= h \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} R_{yy} &= E(yy^T) \\ &= E((hs[k]+n)(hs[k]+n)^T) \\ &= E(hh^T)E(s^2[k]) + hE(s[k]n) + E(n[k]s[k])h^T + E(n^2) \\ &= E(hh^T) + E(n^2) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Avec

$E(s^2[k]) = 1$: est la variance du signal d'entrée

$E(s[k]n[k]) = 0$: (pas de corrélation entre le signal d'entrée et le bruit)

3.2.4.5 Procédure de simulation

La simulation est effectuée pour le calcul du taux d'erreur binaire théorique et estimé pour une modulation BPSK avec un égaliseur MMSE.

La procédure de simulation consiste à générer des symboles binaires, modulés par la modulation BPSK (le bit 0 représenté par -1 et 1 bit représenté par +1) puis on

effectue une convolution des symboles avec les 3 coefficients du canal. Et on ajoute ensuite un bruit blanc gaussien. On calcule la MMSE et le filtre d'égalisation ZF au niveau du récepteur (avec 7 robinets de longueur).

. Puis on effectue une démodulation et une conversion des bits. On effectue après le comptage d'erreurs. Cette procédure est répétée pour différentes $\frac{E_b}{N_0}$ valeurs. Les résultats de la simulation, pour un nombre de bits d'émission $N = 10^6$, sont représentés dans la Figure 3.10.

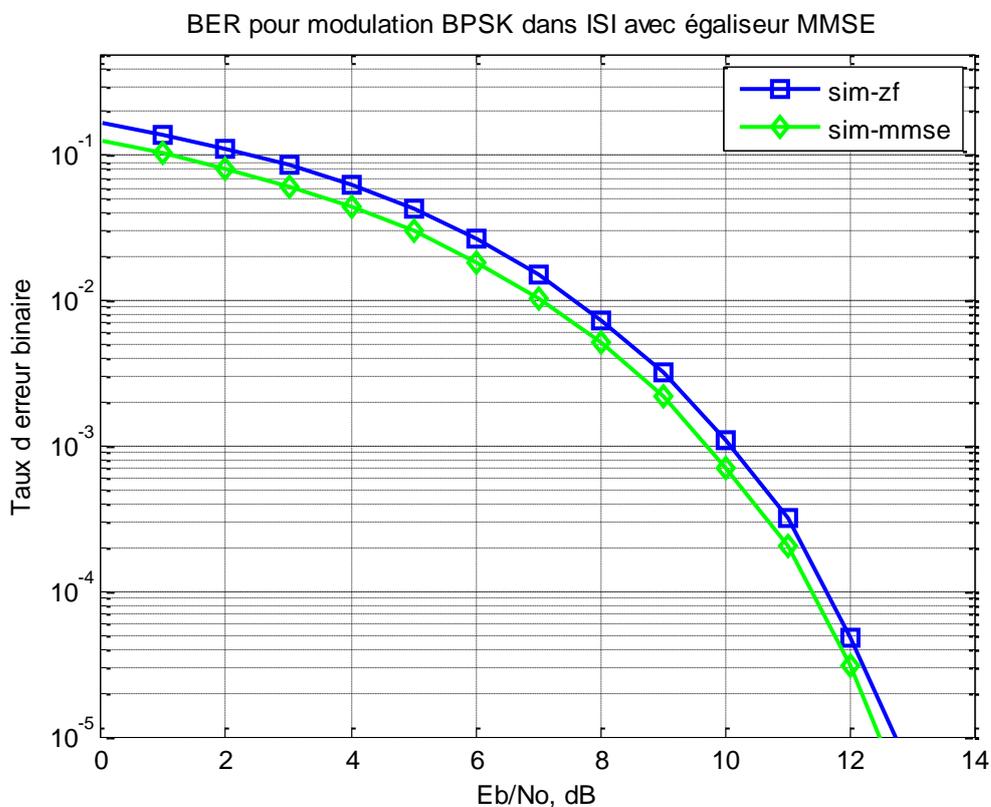


Figure 3.10: Simulation BER pour modulation BPSK dans un canal de 3 robinet ISI avec l'égaliseur MMSE Pour $N=10^6$ bit d'émission

On peut observer, à partir de la figure 3.10, une nette amélioration de 0.5dB en utilisant l'égaliseur MMSE comparativement à l'égaliseur ZF.

3.2.5 BER pour BPSK en la modulation OFDM

Considérons dans ce cas un émetteur et un récepteur OFDM simples. On va donner la relation entre E_b/N_0 (Bit Noise Ratio) et E_s/N_0 (Signal to Noise Ratio) et on va calculer par la suite le taux d'erreur binaire avec BPSK.

On utilise le système OFDM en se basant sur les spécifications IEEE 802.11a suivantes :

Paramètre	Valeur
Taille de la FFT. nfft	64
Nombre de sous porteurs utilisés.	52
La fréquence d'échantillonnage FFT	20MHz
l'espacement des sous porteuse	312.5KHz
Utilisé l'indice de sous porteuse	$\{-26 \text{ à } -1, +1 \text{ à } +26\}$
Préfixe de cycle de durée, T_{cp}	0.8 μ s
la durée de donner symbole, T_d	3.2 μ s
la durée Total des Symbole, T_s	4 μ s

3.2.5.1 Préfixe cyclique

Dans une transmission OFDM, nous savons que la transmission de préfixe cyclique ne porte pas d'information dans le canal AWGN. L'énergie du signal est étalée dans le temps $T_d + T_{cp}$ tandis que l'énergie bit est étalée sur la durée T_d , soit :

$$E_s (T_d + T_{cp}) = E_b T_d \quad (3.28)$$

Pour la simplification, on écrit :

$$E_s = \frac{T_d}{T_d + T_{cp}} E_b \quad (3.29)$$

3.2.5.2 Bande passante

Dans la transmission OFDM, toutes les sous porteuses disponibles auprès de la DFT ne sont pas utilisées pour la transmission de données. Typiquement une certaine sous porteuse au bord reste inutilisé pour assurer une bande passante large. Pour le scénario, par exemple, hors de la bande passante disponible de -10MHz à 10 MHz, sous porteuses uniquement de $-8.1250MHz(-26/64*20MHz)$ vers $+8.1250MHz(+26/64*20MHz)$ sont utilisées.

Cela signifie que l'énergie du signal est étalé sur une bande passante de $16.25MHz$, tandis que le bruit est étalée sur une bande passante de $20MHz$ ($-10MHz$ à $10MHz$), en d'autres termes, $20MHz * E_s = 16.25MHz * E_b$

Pour la simplification, on écrit :

$$E_s = \frac{nDSC}{nFFT} E_b \quad (3.30)$$

3.2.5.3 Relation entre E_b/N_0 et E_s/N_0 en OFDM

En combinant les deux aspects ci-dessus, la relation entre l'énergie et de symbole de l'énergie bit est donnée comme suit:

$$\frac{E_s}{N_0} = \frac{E_b}{N_0} \left(\frac{nDSC}{nFFT} \right) \left(\frac{T_d}{T_d + T_{cp}} \right) \quad (3.31)$$

La relation (3.21) est donnée en décibels par l'expression:

$$\frac{E_s}{N_0} dB = \frac{E_b}{N_0} dB + 10 \log \left(\frac{nDSC}{nFFT} \right) + 10 \log \left(\frac{T_d}{T_d + T_{cp}} \right) \quad (3.32)$$

3.2.5.4 Modèle de simulation avec canal AWGN

La simulation est effectuée pour le calcul du taux d'erreur binaire théorique et estimé pour une modulation BPSK en OFDM.

La procédure de simulation (Cf. Annexe 4) consiste à générer des symboles binaires, modulés par la modulation BPSK (le bit 0 représenté par -1 et 1 bit représenté par +1) puis on attribue à plusieurs symboles OFDM, où les sous porteuses de données -26 à -1 et de 1 à 26 sont utilisés, en ajoutant le préfixe cyclique, la concaténation de symboles multiples pour former une longue séquence de transmission. On ajoute ensuite un bruit blanc gaussien. Et on regroupe le vecteur reçu des symboles multiples, en supprimant le préfixe cyclique et en prenant les sous porteuses désirées. Puis on effectue une démodulation et une conversion des bits. Les résultats de la simulation, pour un nombre de bits d'émission $N = 10^6$, sont représentés dans la Figure 3.11.

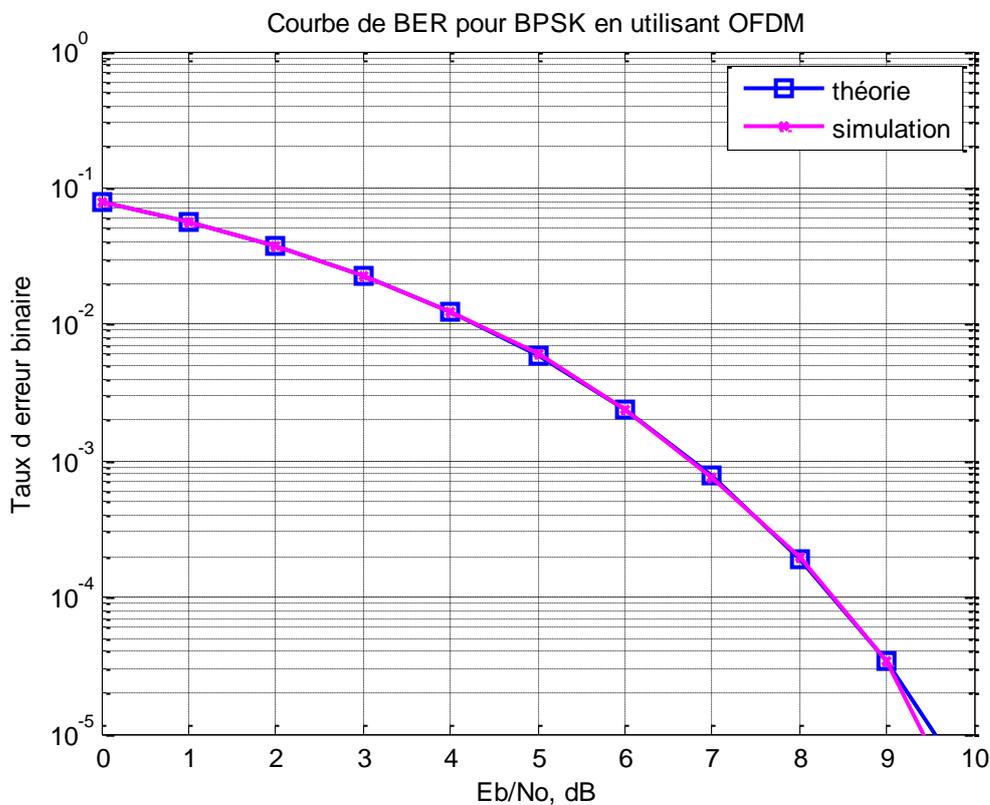


Figure 3.11: Simulation BER pour BPSK avec modulation OFDM dans un canal de AWGN Pour $N=10^6$ bit d'émission

On constate que le taux d'erreur binaire simulé est en bon accord avec le taux d'erreur binaire théorique de modulation BPSK, soit :

$$P_{b,BPSK} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (3.33)$$

3.2.5.5 Modèle de simulation avec canal de Rayleigh multi trajets

La procédure de simulation consiste à générer des symboles binaires aléatoires, modulés par la modulation BPSK (le bit 0 représenté par -1 et 1 bit représenté par +1). On effectue une attribution à plusieurs symboles OFDM, où les sous porteuses de données -26 à -1 et de 1 à 26 sont utilisées et en ajoutant le préfixe cyclique. On effectue après une convolution de chaque symbole OFDM avec un canal de Rayleigh. L'évanouissement sur chaque symbole étant indépendant. La réponse fréquentielle du canal fading sur chaque symbole est calculée et stockée en mémoire. La concaténation de symboles multiples est effectuée pour former une longue séquence de transmission.

On ajoute ensuite un bruit blanc gaussien, on regroupe le vecteur reçu des symboles multiples, en supprimant le préfixe cyclique et on converti le domaine temporel des symboles reçus dans le domaine fréquentiel puis on divise les symboles reçus sur la réponse fréquentielle connue du canal et on prend les sous porteuses désirées. Puis on effectue une démodulation et une conversion des bits.

On effectue après le comptage d'erreurs. Cette procédure est répétée pour plusieurs valeurs de $\frac{E_b}{N_0}$.

Les résultats de la simulation, pour un nombre de bits d'émission $N=10^6$, sont représentés dans la Figure 3.12.

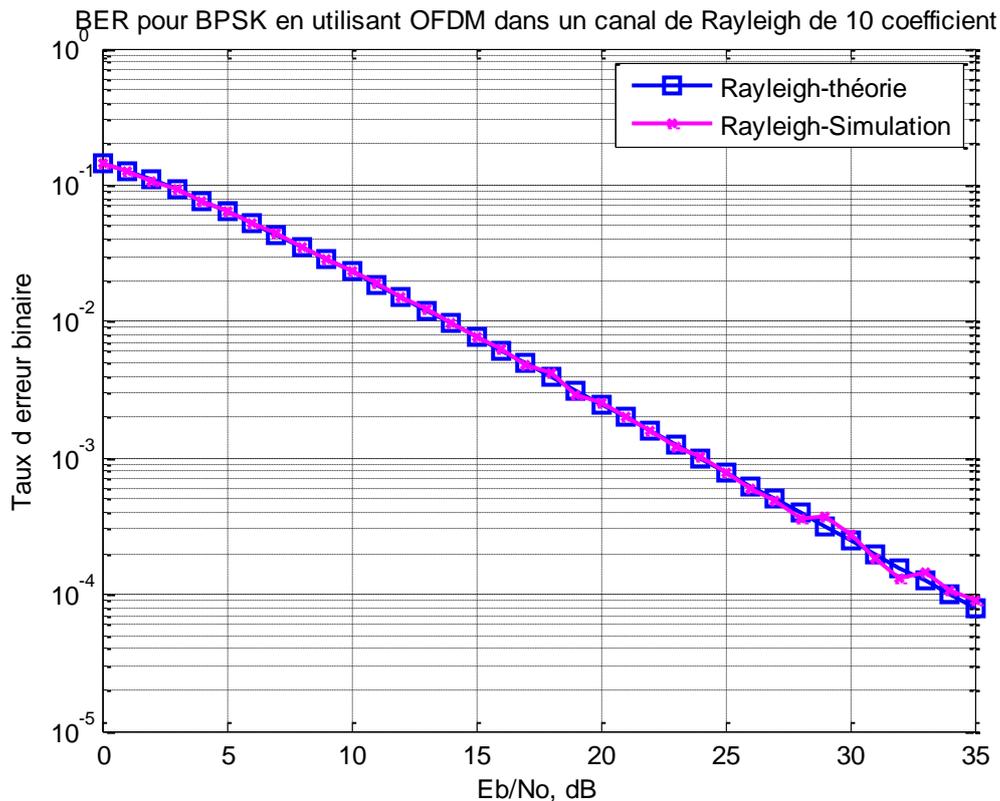


Figure 3.12: Simulation BER pour BPSK avec modulation OFDM dans un canal de Rayleigh de 10 multi trajet pour $N=10^6$ bit d'émission

Les résultats de simulation de la figure 3.12, montrent que les BER estimés sont en bon accord avec les résultats théoriques des BER.

3.3 Calcul des Variances

Le variance est un paramètre pour évalue mon estimateur, c'est l'écart entre la valeur exacte et la valeur estimée ;

D'après les figures (3.13 à 3.18), on trouve que si le rapport E_b/N_0 tend ver infini, la variance converge exponentiellement vers la valeur zéro ce qui fait que la valeur estimée et la valeur réelle sont confondues.

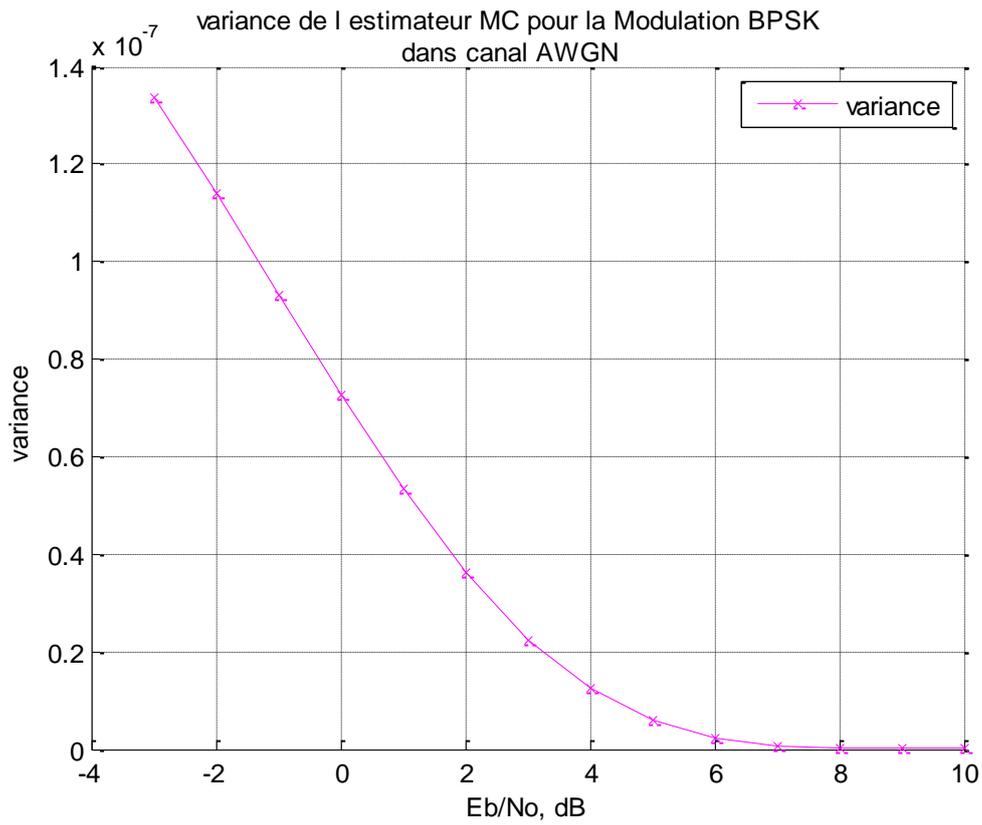


Figure 3.13 : Variance de l'estimateur MC pour la Modulation BPSK dans canal AWGN

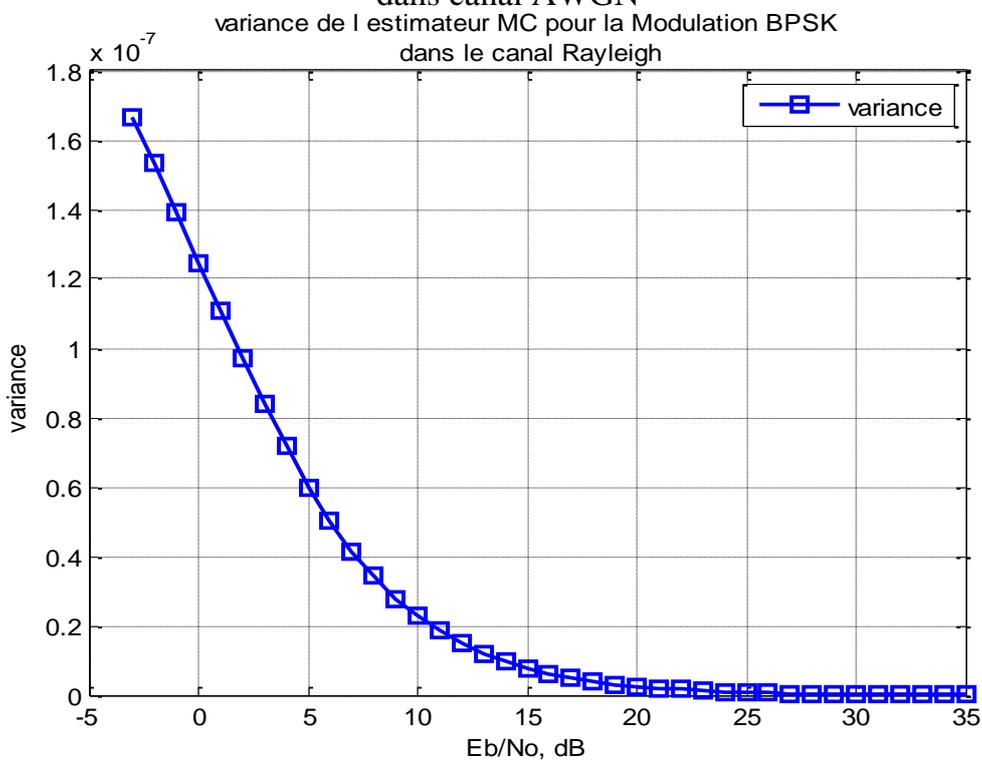


Figure 3.14: Variance de l'estimateur MC pour la Modulation BPSK Dans le canal Rayleigh

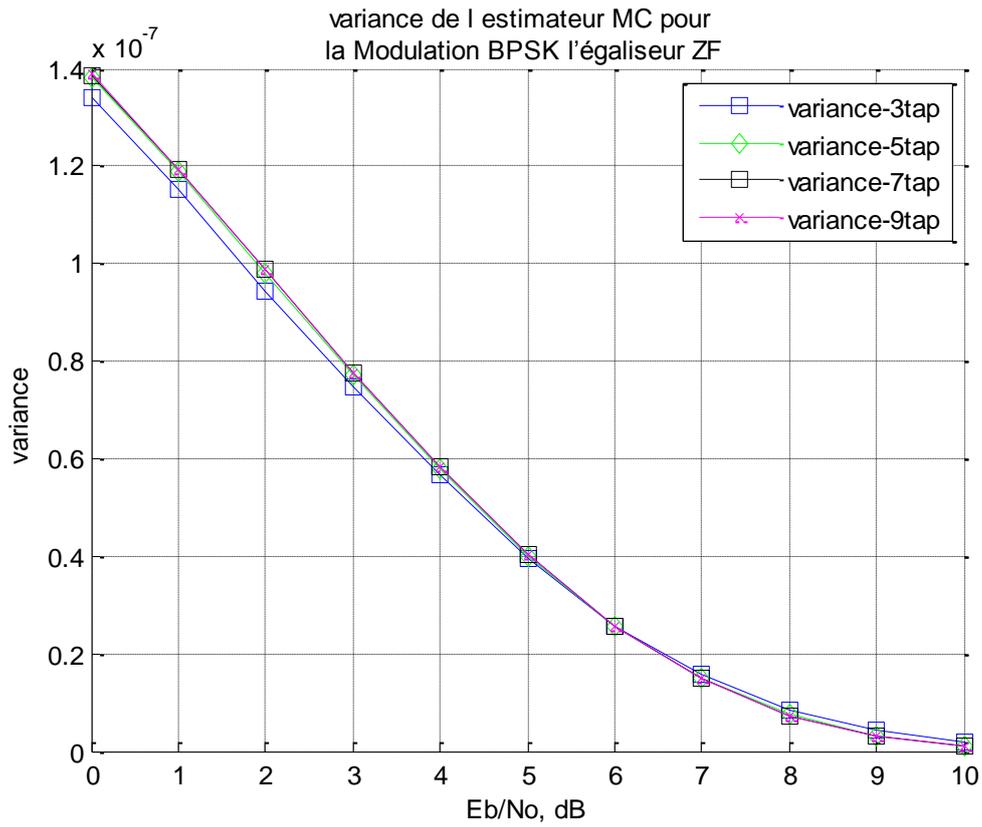


Figure 1.15: Variance de l'estimateur MC pour la Modulation BPSK avec égaliseur ZF

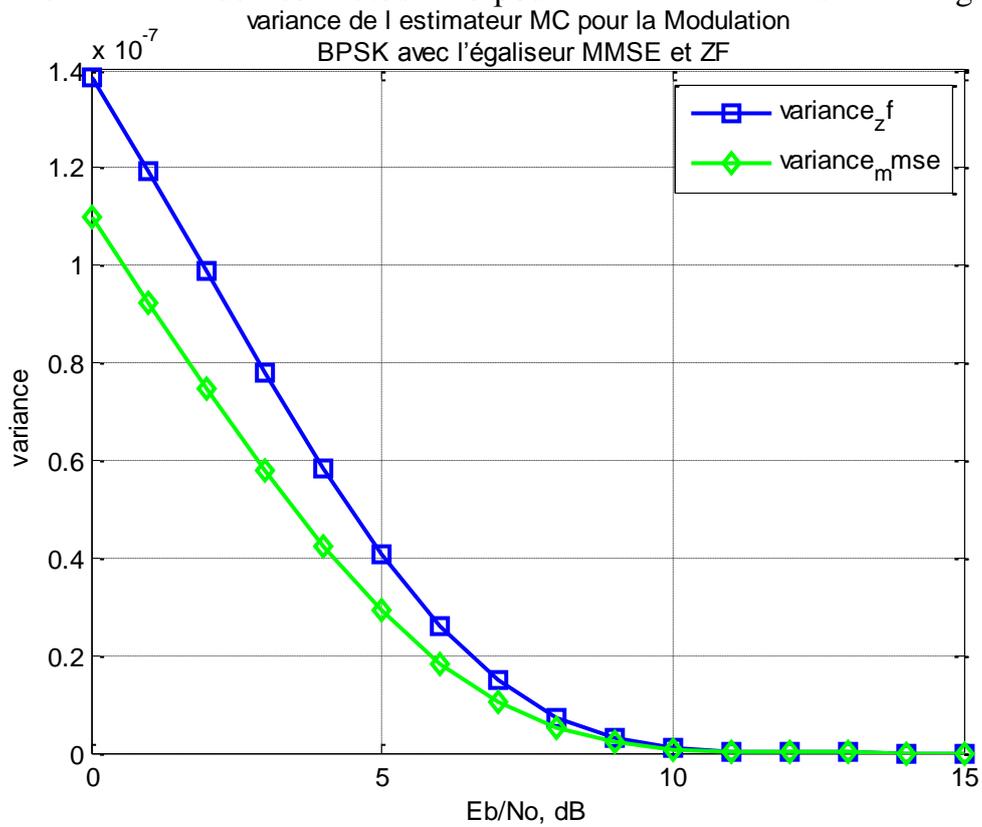


Figure 3.16: Variance de l'estimateur MC pour la Modulation BPSK avec les égaliseurs MMSE et ZF

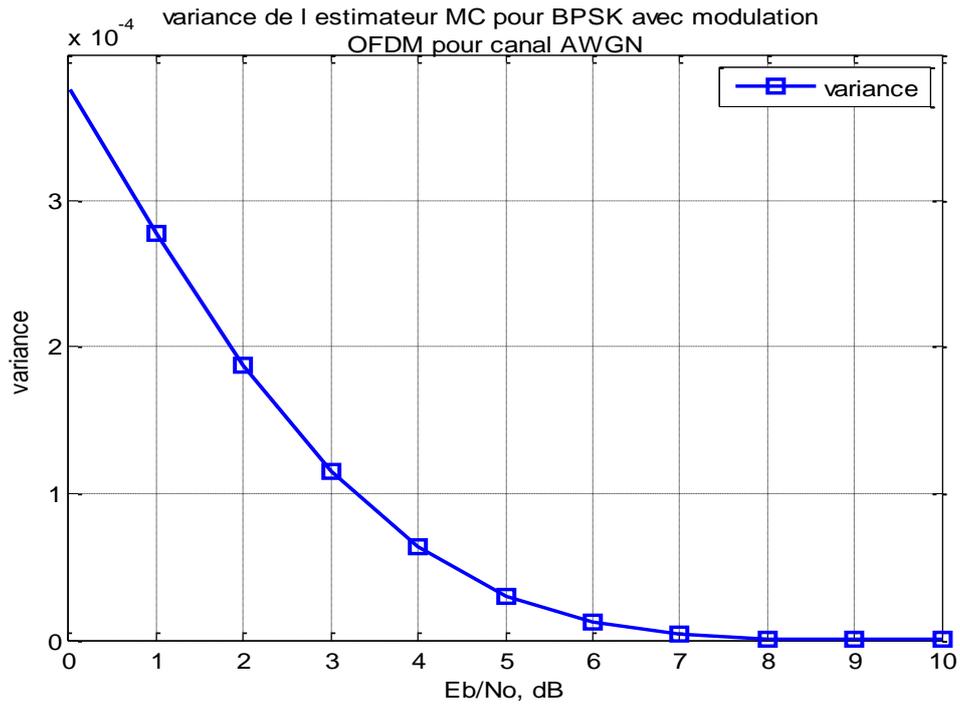


Figure 3.17: Variance de l'estimateur MC pour BPSK avec modulation OFDM pour le canal AWGN

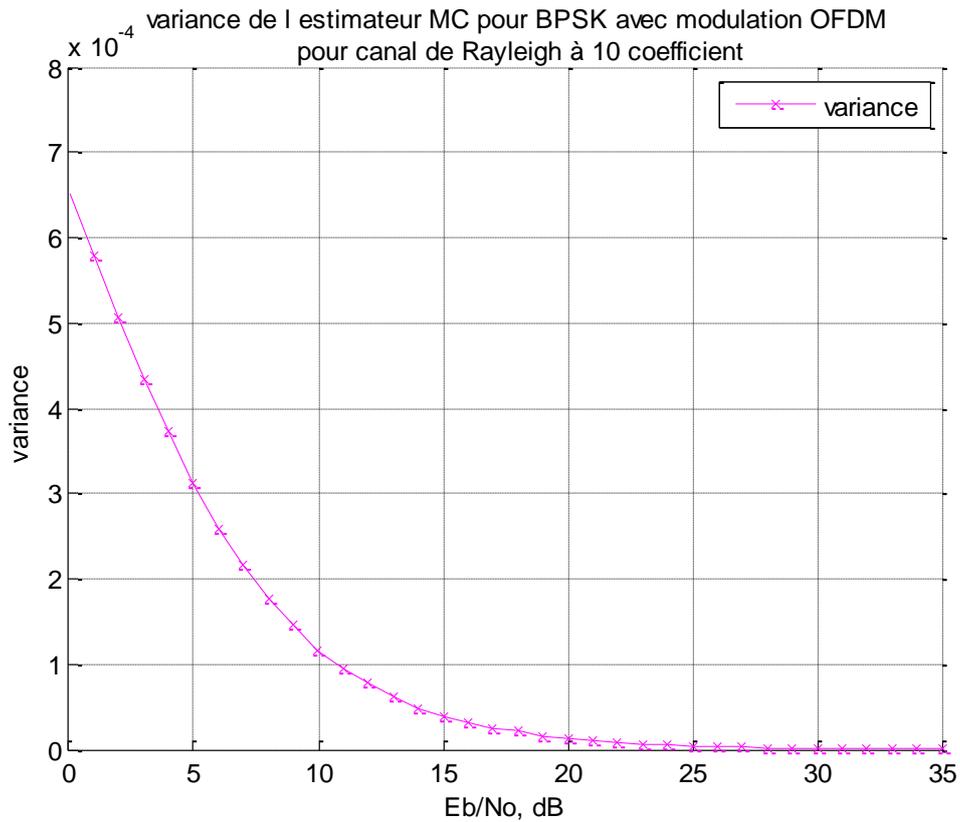


Figure 3.18: Variance de l'estimateur MC pour BPSK avec modulation OFDM pour canal de Rayleigh à 10 coefficient

3.4 Diagramme de l'œil:

3.4.1 Présentation sur le Diagramme de l'œil

Le diagramme de l'oeil permet d'une manière très simple d'apprécier la qualité des signaux numériques reçus avant qu'ils atteignent le dispositif de démodulation. Il s'agit d'une des mesures de base en transmission numérique.

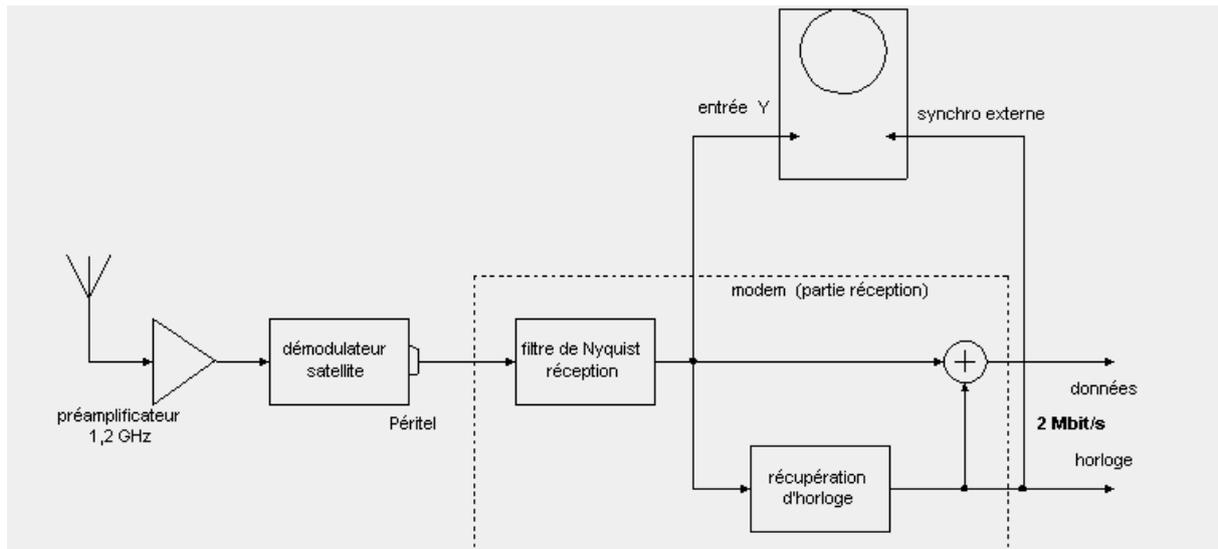


Figure 3.19 schéma de visualisation de diagramme de l'œil

La quantité d'IES affectant une communication peut être visualisée en observant le faisceau de tracés du signal reçu sur un multiple de la durée symbole, c'est-à-dire la superposition des intervalles [34]. Le résultat visuel s'appelle le **diagramme de l'œil**, en raison de sa ressemblance avec un œil, pour la transmission de symboles binaire. Il fournit des informations intéressantes sur la performance de la chaîne de transmission (cf. Figure 3.20).

La hauteur (ouverture verticale) définit la marge dont on dispose en termes de bruit additif. En effet, la présence de bruit causera une erreur de décision, avec une probabilité d'erreur plus grande, hauteur sera plus petite. L'instant d'échantillonnage idéal correspond à l'abscisse de plus grande ouverture.

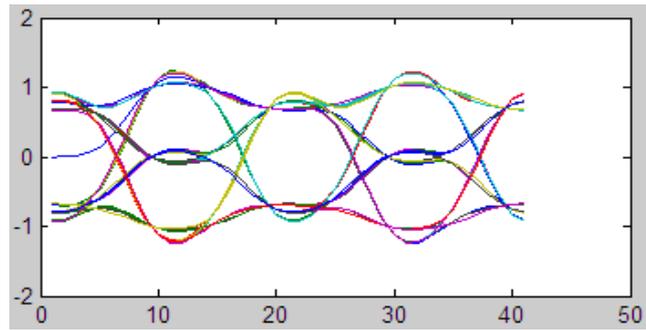


Figure 3.20 diagramme de l'œil

La largeur de l'œil (ouverture horizontale) donne la marge dont on dispose en écart de temps entre l'instant d'échantillonnage idéal et un autre instant.

La pente de la fermeture (ou ouverture) détermine la sensibilité à une erreur à cet instant.

Lorsque l'effet de l'IES est très grave, l'œil est complètement fermé. Il faut alors une technique pour corriger cet effet (égalisation).

Présentons un exemple commun de filtre en cosinus surélevé. Filtre de Nyquist en cosinus surélevé (raised cosine filter) de fonction de transfert [35]

$$g(f) = \begin{cases} \frac{T_s}{2} \left(1 - \sin \left(\frac{\pi}{2\alpha} [2|f|T_s - 1] \right) \right), & \frac{1-\alpha}{2T_s} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T_s} \\ T_s, & 0 \leq |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T_s} \\ 0, & \text{autrement} \end{cases} \quad (3.34)$$

Dans le domaine temporel

$$g(t) = \frac{\sin(\pi t/T_s) \cos(\pi \alpha t/T_s)}{(\pi t/T_s) 1 - (\pi \alpha t/T_s)^2} \quad (3.35)$$

Avec $0 \leq \alpha \leq 1$

3.4.2 Résultats de simulation pour le diagramme de l'œil

Modulation BPSK avec bruit AWGN pour deux valeurs de E_b/N_0 $E_b/N_0 = -3\text{db}$

diagramme de l'oeil pour $\alpha=1$

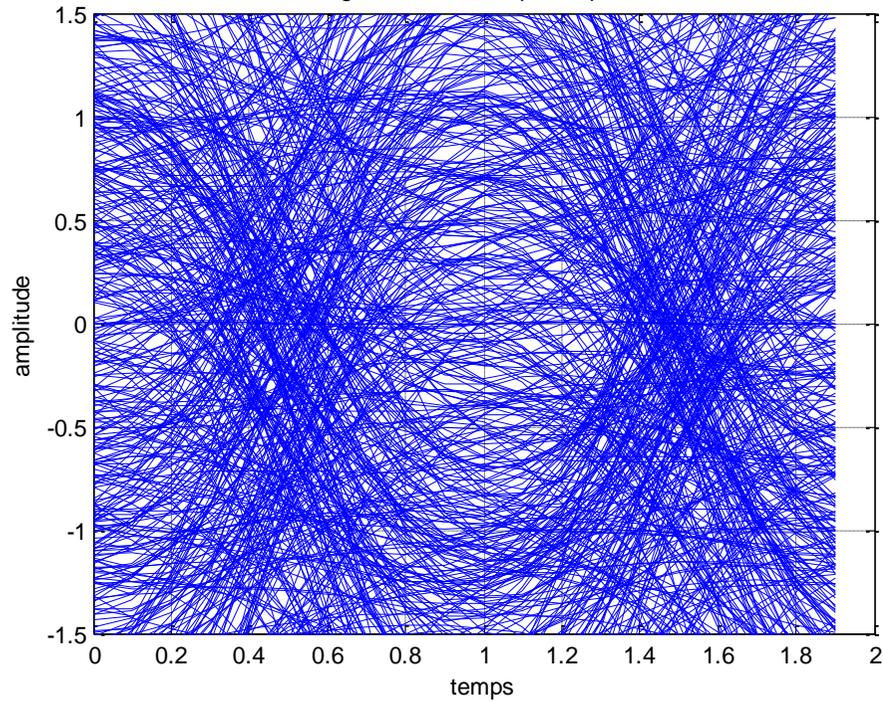
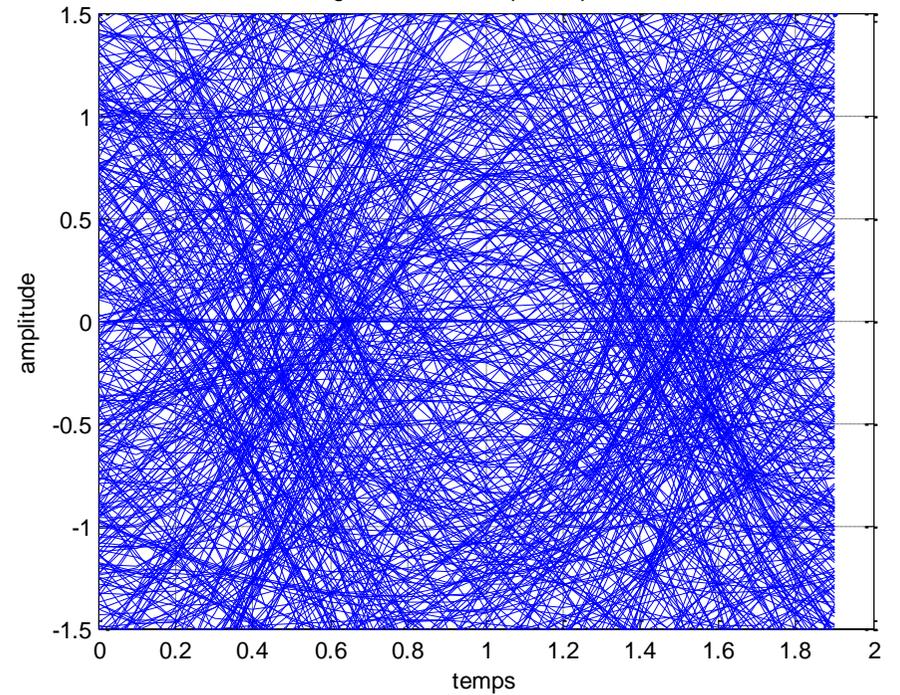


diagramme de l'oeil pour $\alpha=0.5$



$\alpha = 1$

$\alpha = 0.5$

Modulation BPSK avec bruit AWGN pour deux valeurs de E_b/N_0 $E_b/N_0= 10\text{db}$

diagramme de l'oeil pour alpha=1

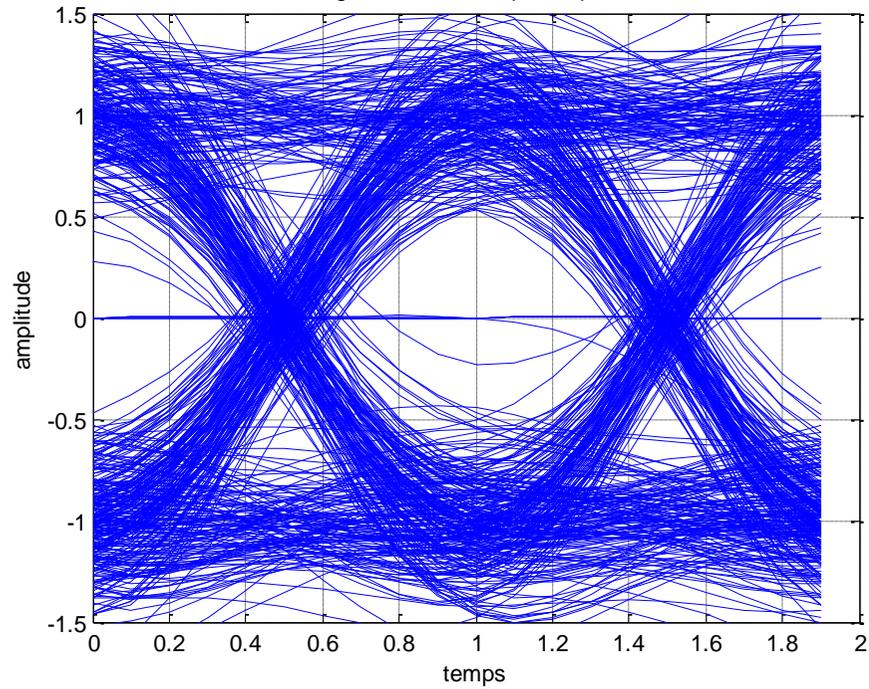
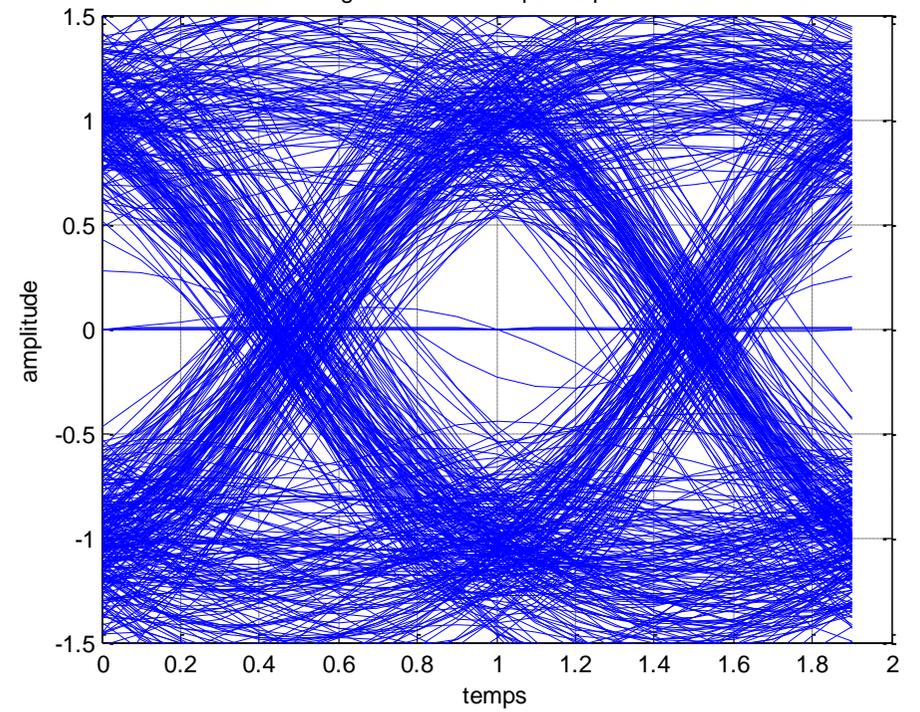


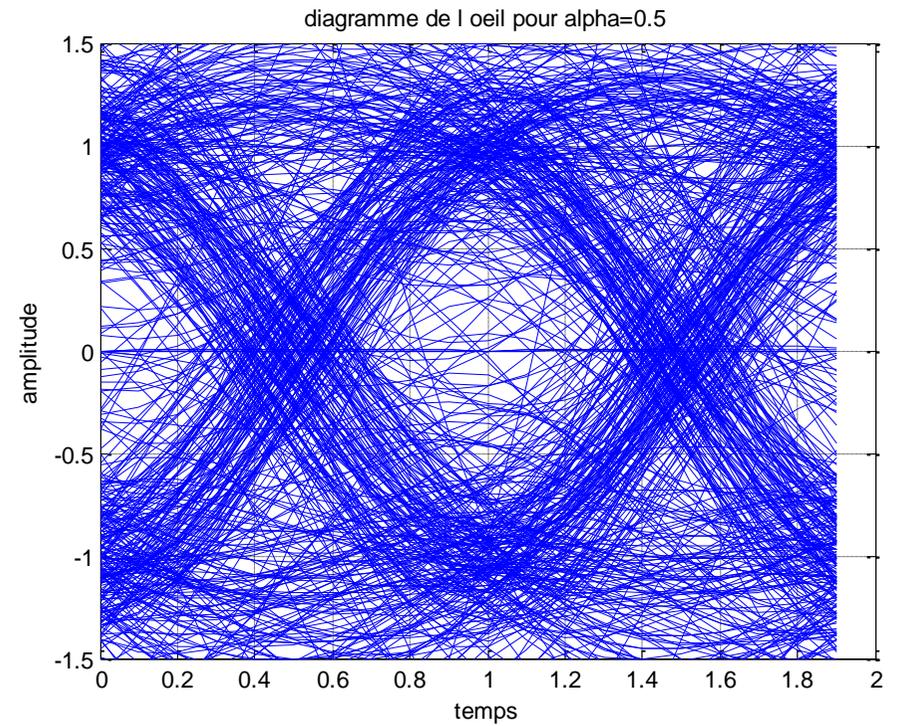
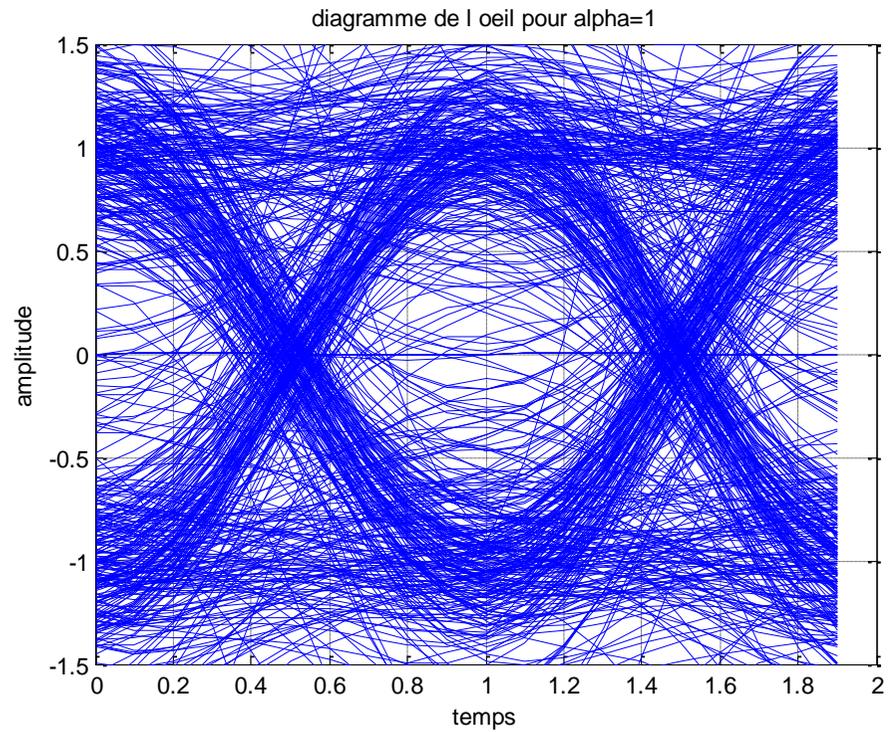
diagramme de l'oeil pour alpha=0.5



$\alpha = 1$

$\alpha = 0.5$

Modulation BPSK avec bruit AWGN et canal rayleigh $E_b/N= +10$



$\alpha = 1$

$\alpha = 0.5$

Modulation BPSK avec bruit AWGN et canal rayleigh pour un égalisation MMSE $E_b/N= +10$

diagramme de l'oeil pour alpha=1

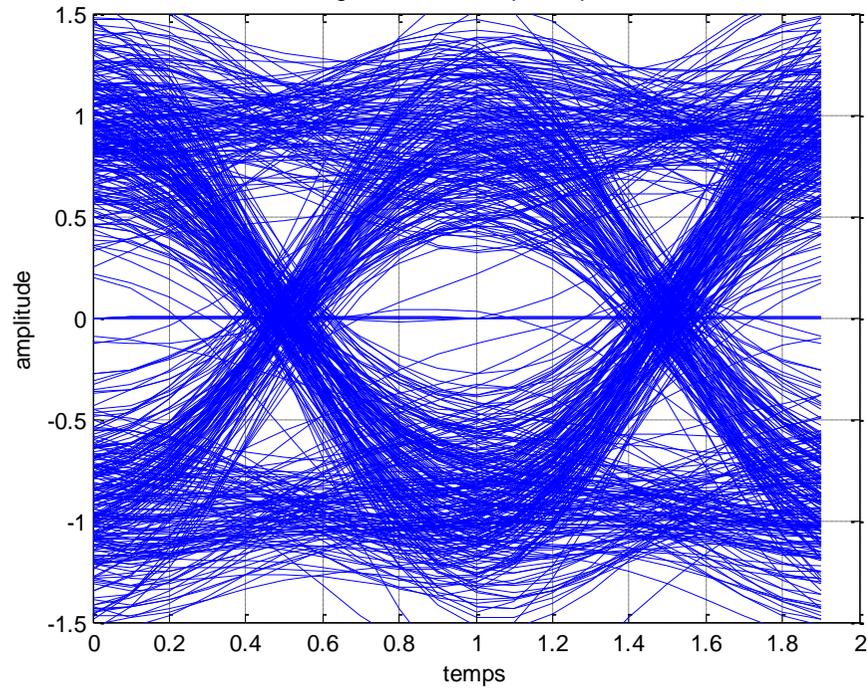
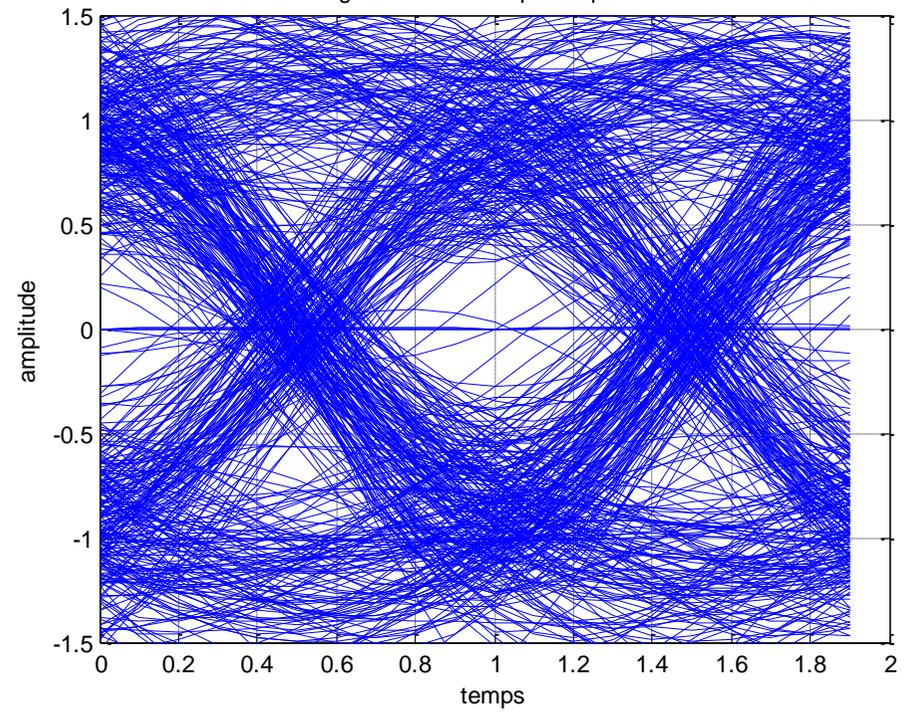


diagramme de l'oeil pour alpha=0.5

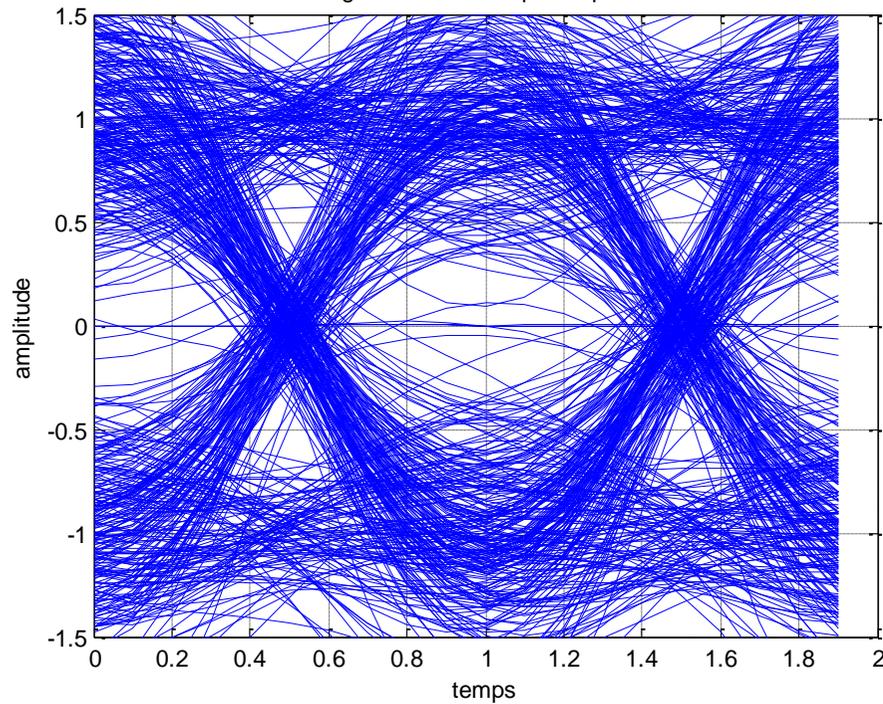


$\alpha = 1$

$\alpha = 0.5$

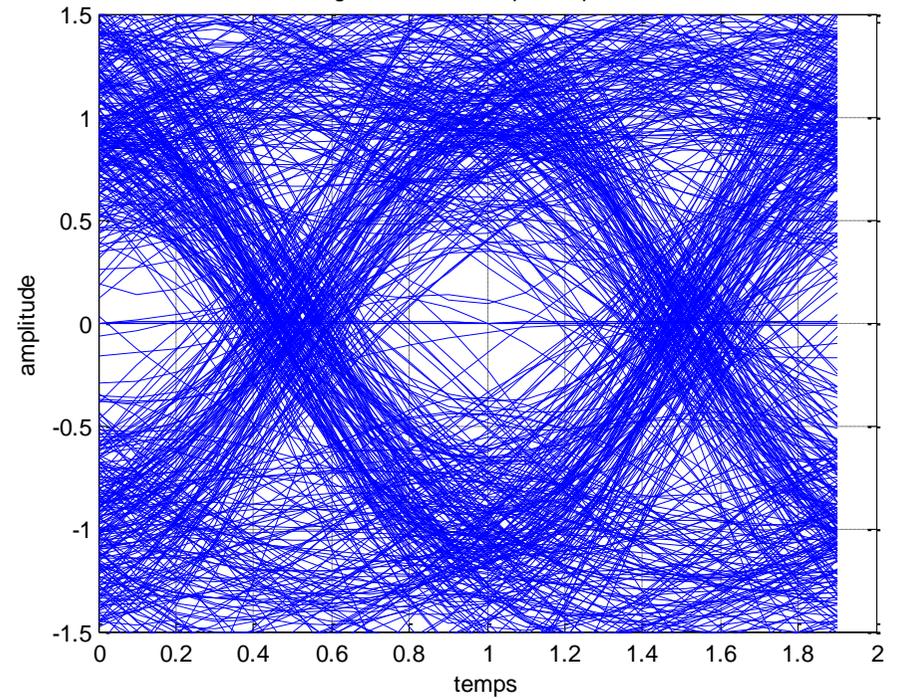
Modulation BPSK avec bruit AWGN et canal rayleigh pour un égalisation ZF $E_b/N= +10$

diagramme de l'oeil pour alpha=1



$\alpha = 1$

diagramme de l'oeil pour alpha=0.5



$\alpha = 0.5$

Sur ces figures nous constatons l'influence du bruit sur le diagramme de l'œil qui se manifeste par une très petite ouverture (bruit AWGN pour deux valeurs de E_b/N , soient : $E_b/N = -3\text{db}$, bruit AWGN et canal rayleigh $E_b/N = +10$). De même, il est mis en évidence l'effet de l'augmentation de α qui se manifeste par une augmentation du rapport signal sur bruit. En faisant appel aux techniques d'égalisation (MMSE et ZF) nous observons que le diagramme de l'œil s'ouvre verticalement.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une étude de simulation d'un système de communication numérique. Les exemples illustrent plusieurs principes fondamentaux de modélisation et de simulation, y compris l'estimation du TEB par la méthode de Monte Carlo, la variance, la comparaison des BER théoriques et simulés, ainsi que l'intérêt du diagramme de l'œil.

A partir des résultats obtenus dans le présent chapitre, il est constaté que la méthode de simulation Monte Carlo est une méthode d'estimation efficace du TEB pour un système de communication numérique du fait que les courbes obtenues des TEB estimés se confondent avec les valeurs théoriques des TEB.

Et pour mieux apprécier cette technique, nous allons l'appliquer dans le prochain chapitre pour le cas particulier de la modulation M-aire.

CHAPITRE

4

Application à la modulation M-aire

Dans la transmission numérique, on a besoin d'augmenter le débit binaire ; la solution est d'utiliser la modulation **m-aire** (**M-PAM**, **M-QAM**, **M-PSK**) pour diminuer le temps de transfert des données (image, vidéo, etc.). Dans ce type de modulation, un symbole correspond à M bits ; pour cela, la question qui se pose est : Est-ce que la méthode d'estimation Monte Carlo [36] développée auparavant reste valable pour ce type de modulation ou non ? Ce qui va être considéré dans le présent chapitre.

4.1 Introduction

La modulation consiste à convertir l'information numérique en formes d'ondes électrique adaptées aux caractéristiques du canal [14]. Les formes d'ondes peuvent varier selon leurs amplitudes, leur phase ou la combinaison des deux pour former la constellation de la modulation. La constellation (ou le diagramme de l'espace) de la modulation peut se faire bit par bit (modulation binaire) ou, pour une bonne efficacité spectrale, par symboles de k bits. Dans ce dernier cas, 2^k formes d'ondes sont nécessaires pour transmettre l'information.

Nous allons, dans ce qui suit, donner un aperçu sur les différents types de modulation **M-aire (M-PAM, M-QAM, M-PSK)** et présenter pour chaque type, les procédures d'application de la méthode de Monte Carlo correspondantes.

4.2 Taux d'erreur symbole (SER) pour la modulation 4-PAM

4.2.1 : Contexte

On considère que les alphabets utilisés pour un 4-PAM est $\alpha_{4PAM} = \{\pm 1, \pm 3\}$ [37]. La moyenne d'énergie de la constellation suppose que tous les alphabets sont également probables, soit :

$$\begin{aligned} E_{16PAM} &= E\left[|\alpha_{4PAM}|^2\right] \\ &= \frac{1*2}{4} \sum [1^2 + 3^2] \\ &= 5 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Le tracé de la constellation pour un signal 4-PAM après la normalisation est donné dans la figure 4.1.

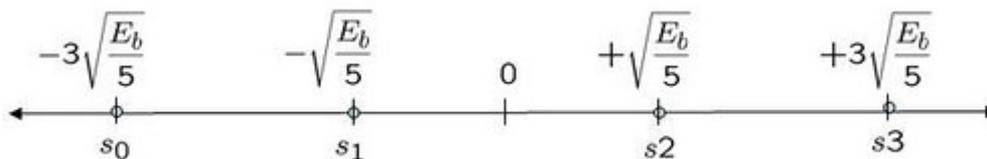


Figure 4.1: Diagramme de Constellation pour la modulation 4-PAM

4.2.2 : Modèle du bruit

Soit à analyser la probabilité d’erreur symbole pour le schéma de modulation avec un bruit additif gaussien (AWGN). Le bruit n suit la fonction de distribution gaussienne de probabilité suivante :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{avec } \mu=0 \text{ et } \sigma^2 = \frac{N_0}{2} \tag{4.2}$$

4.2.3 : Calcul du taux d’erreur symbole [14]

En se référant à la Figure 4.1, le signal reçu peut être défini par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} &y = s_0 + n \\ \text{ou } &y = s_1 + n \\ \text{ou } &y = s_2 + n \\ \text{ou } &y = s_3 + n \end{aligned} \tag{4.3}$$

* Si on considère le cas où s_3 est transmis, la fonction de distribution de probabilité conditionnelle (Pdf) de y , sachant que s_3 a été transmis, est:

$$p(y|s_3) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{\left(y - 3\sqrt{\frac{E_b}{5}}\right)^2}{N_0}} \tag{4.4}$$

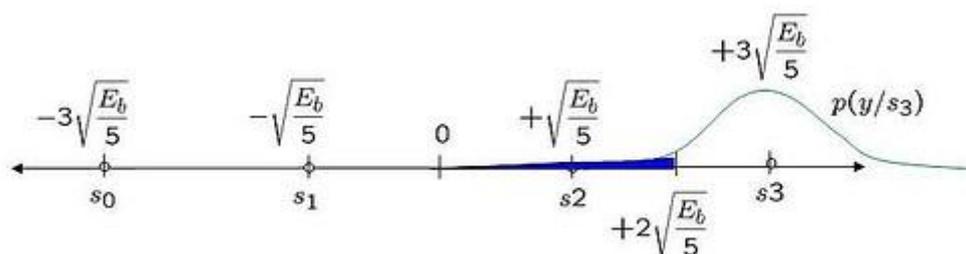


Figure 4.2 : La fonction de distribution de probabilité quand l’alphabet +3 est envoyé

En utilisant le point milieu entre +1 et +3 comme le seuil de détection, c'est à dire

pour le signal reçu, on vérifie la condition $y > +2\sqrt{\frac{E_s}{5}} \Rightarrow s_3$.

Avec ce seuil, la probabilité conditionnelle d'erreur, sachant que s_3 est transmis, est la zone bleue illustrée dans la figure 4.2. Elle est exprimée par la relation :

$$p(e|s_3) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\infty}^{+2\sqrt{\frac{E_s}{5}}} e^{-\frac{(y-3\sqrt{\frac{E_s}{5}})^2}{N_0}} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\sqrt{E_s}}{\sqrt{5N_0}}}^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_s}{5N_0}}\right) \quad (4.5)$$

Étant donné que la constellation de +3 et -3 est symétrique, la probabilité conditionnelle d'erreur, sachant que s_0 est transmis, est aussi représentée par l'expression :

$$p(e|s_0) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_s}{5N_0}}\right) \quad (4.6)$$

* **Si on considère le cas où s_3 est transmis**, la fonction de distribution de probabilité conditionnelle (Pdf) de y , sachant que s_2 a été transmis, est:

$$p(y|s_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(y-\sqrt{\frac{E_s}{5}})^2}{N_0}} \quad (4.7)$$

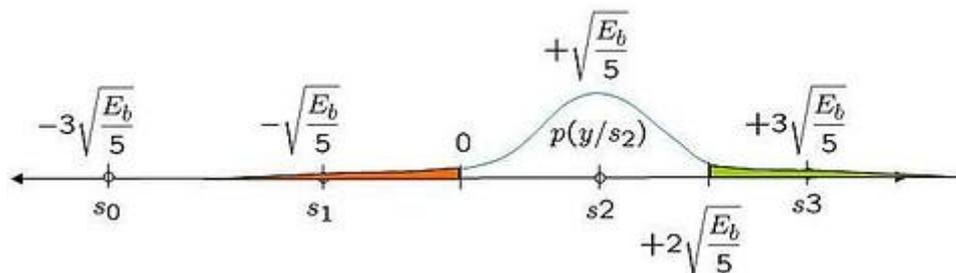


Figure 4.3: La fonction de distribution de probabilité quand l'alphabet +1 est envoyé

La probabilité conditionnelle d'erreur, sachant que s_2 est transmis est représentée par la zone dans les régions verte et rouge de la figure 4.3. Elle est exprimée par :

$$p(e|s_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{\left(y - \sqrt{\frac{E_s}{5}}\right)^2}{N_0}} dy + \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{+\sqrt{\frac{E_s}{5}}}^{\infty} e^{-\frac{\left(y - \sqrt{\frac{E_s}{5}}\right)^2}{N_0}} dy = \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_s}{5N_0}} \right) \quad (4.8)$$

Étant donné que la constellation de +1 et -1 est symétrique, la probabilité conditionnelle d'erreur, sachant que s_1 est transmis, est également donnée par :

$$p(e|s_1) = \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_s}{5N_0}} \right) \quad (4.9)$$

Et étant donné que tous les alphabets sont équiprobables, la probabilité totale d'erreur symbole P_s est alors donnée par :

$$P_s = p(s_0) p(e|s_0) + p(s_1) p(e|s_1) + p(s_2) p(e|s_2) + p(s_3) p(e|s_3) \quad (4.10)$$

En supposant que, s_0 , s_1 , s_2 et s_3 sont équiprobables, en d'autres termes $p(s_0) = p(s_1) = p(s_2) = p(s_3) = 1/4$, la probabilité totale d'erreur symbole est alors :

$$P_s = \frac{1}{4} \left[\frac{2}{2} \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_s}{5N_0}} \right) + 2 \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_s}{5N_0}} \right) \right] = \frac{3}{4} \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_s}{5N_0}} \right) \quad (4.11)$$

4.2.4. Procédure de simulation

La procédure de simulation (Cf. Annexe 4) consiste à générer des symboles binaires, modulés par la modulation 4-PAM. On ajoute ensuite un bruit blanc gaussien, puis on effectue une démodulation des symboles reçus par un démodulateur 4-PAM. On effectue après le comptage d'erreurs. Cette procédure est répétée pour différentes

$\frac{E_s}{N_0}$ valeurs. Le résultat de la simulation est donné dans la Figure 4.4.

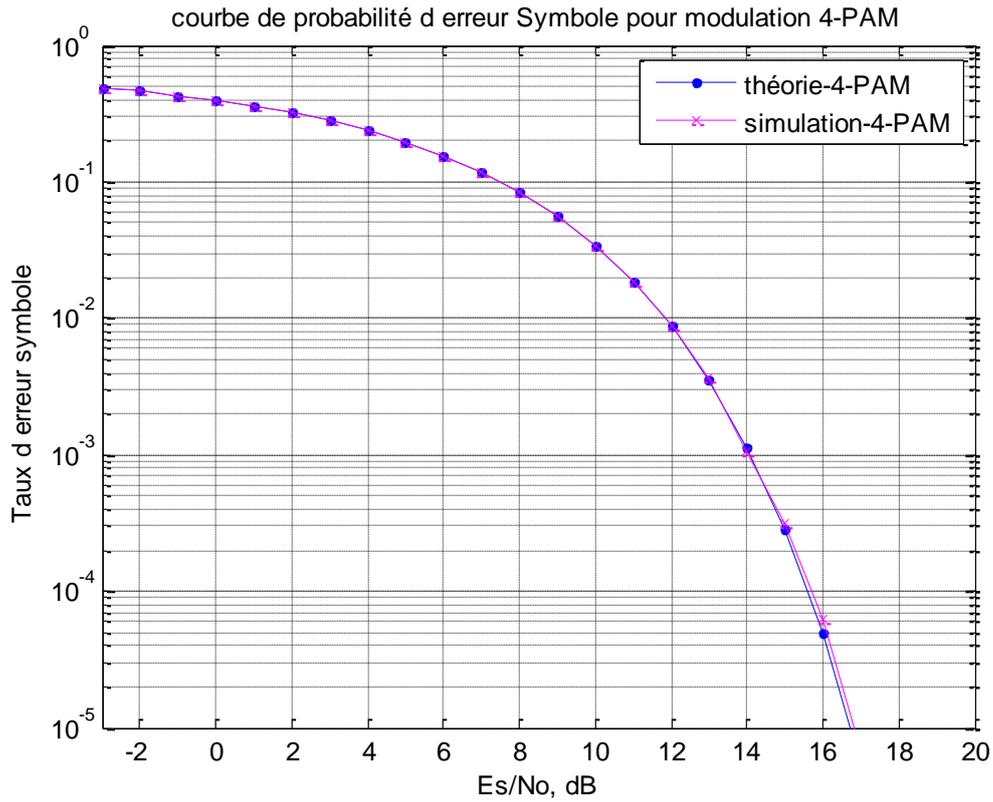


Figure 4.4: Taux d'erreur symbole pour une modulation 4-PAM pour 10^6 bits d'émission

4.3 : Taux d'erreur symbole (SER) pour la modulation QPSK (4-QAM)

4.3.1 : Contexte

On considère que les alphabets utilisés pour une modulation QPSK (4-QAM) sont

$$\alpha_{QPSK} = \{\pm 1 \pm j\} \text{ [33].}$$

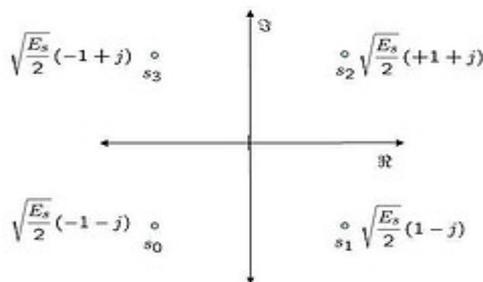


Figure 4.5: Diagramme de Constellation pour QPSK (4-QAM) constellation

Le facteur d'échelle de Q dans ce type de modulation est utilisé pour la normalisation à 1 de l'énergie moyenne des symboles émis, avec la supposition que tous les points de constellation sont également probables.

4.3.2 : Modèle de bruit

On suppose que le bruit additif n suit la fonction de distribution de probabilité

gaussienne, soit : $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ avec $\mu=0$ et $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$

4.3.3 : Calcul de la probabilité d'erreur

En considérant le symbole s_2 de la figure 4.5, la fonction de distribution de probabilité conditionnelle (Pdf) de y , sachant que s_2 a été transmis est exprimée par:

$$p(y|s_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{\left(y - \sqrt{\frac{E_s}{2}}(+1 + j)\right)^2}{N_0}} \tag{4.12}$$

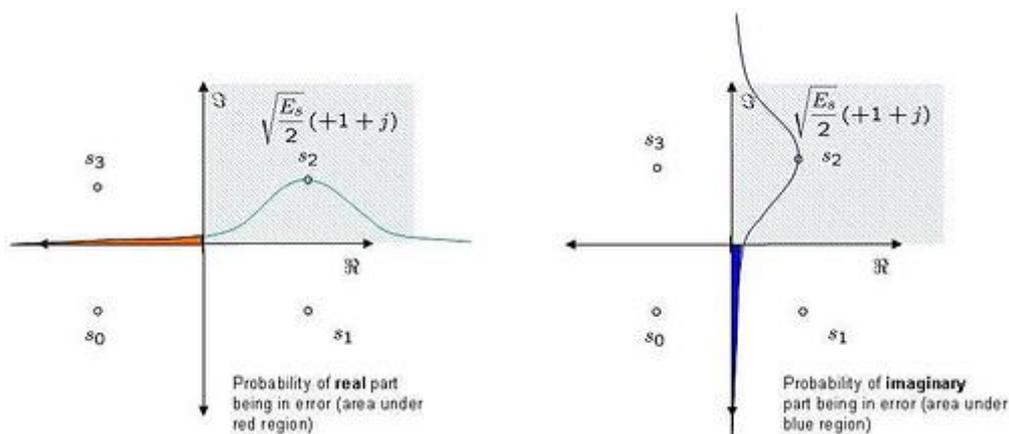


Figure 4.6: Fonction de densité de probabilité pour le modulation QPSK (4-QAM)

Comme on peut le voir sur la figure 4.6, le symbole n'est décodé correctement que sauf s'il se trouve dans la région hachurée, soit :

$$p(c|s_2) = p(\Re_y > 0|s_2) p(\Im_y > 0|s_2) \tag{4.13}$$

Où la probabilité de la composante réelle supérieure à 0 de y , sachant que s_2 a été transmis, est localisée à l'extérieur de la région rouge de la figure 4.6. Elle est donnée par :

$$p(\Re_y > 0 | s_2) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(\Re_y - \sqrt{\frac{E_s}{2}})^2}{N_0}} dy = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}} \right) \quad (4.14)$$

Et la probabilité de la composante imaginaire supérieure à 0 de y , sachant que s_2 a été transmis est localisée à l'extérieur de la région bleue de la figure 4.6. Elle est donnée par :

$$p(\Im_y > 0 | s_2) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(\Im_y - \sqrt{\frac{E_s}{2}})^2}{N_0}} dy = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}} \right) \quad (4.15)$$

La probabilité de décodage correct de s_2 est exprimée donc par:

$$\begin{aligned} p(c | s_2) &= \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}} \right) \right]^2 \\ &= \left[1 - \frac{2}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}} \right) + \frac{1}{4} \operatorname{erfc}^2 \left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}} \right) \right] \\ &= 1 - \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}} \right) + \frac{1}{4} \operatorname{erfc}^2 \left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}} \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

4.3.4 : Probabilité totale d'erreur symbole

Il y a une erreur sur un symbole, lorsque l'un des symboles est au moins décodé incorrectement. La probabilité totale d'erreur symbole est exprimée par :

$$\begin{aligned} P_{QPSK} &= 1 - p(c | s_2) \\ &= 1 - \left[1 - \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}} \right) + \frac{1}{4} \operatorname{erfc}^2 \left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}} \right) \right] \\ &= \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}} \right) - \frac{1}{4} \operatorname{erfc}^2 \left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}} \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Pour des valeurs élevées de $\frac{E_s}{N_0}$, le deuxième terme de l'équation devient négligeable et la probabilité d'erreur peut être approchée par :

$$P_{QPSK} \approx \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}} \right) \quad (4.18)$$

4.3.5 : Procédure de simulation

La procédure de simulation (Cf. Annexe 4) consiste à générer des symboles binaires, modulés par la modulation QPSK. On ajoute ensuite un bruit blanc gaussien, puis on effectue le décodage du symbole reçu pour $\frac{E_s}{N_0}$ valeurs. Le résultat de la simulation est donné dans la Figure 4.7.

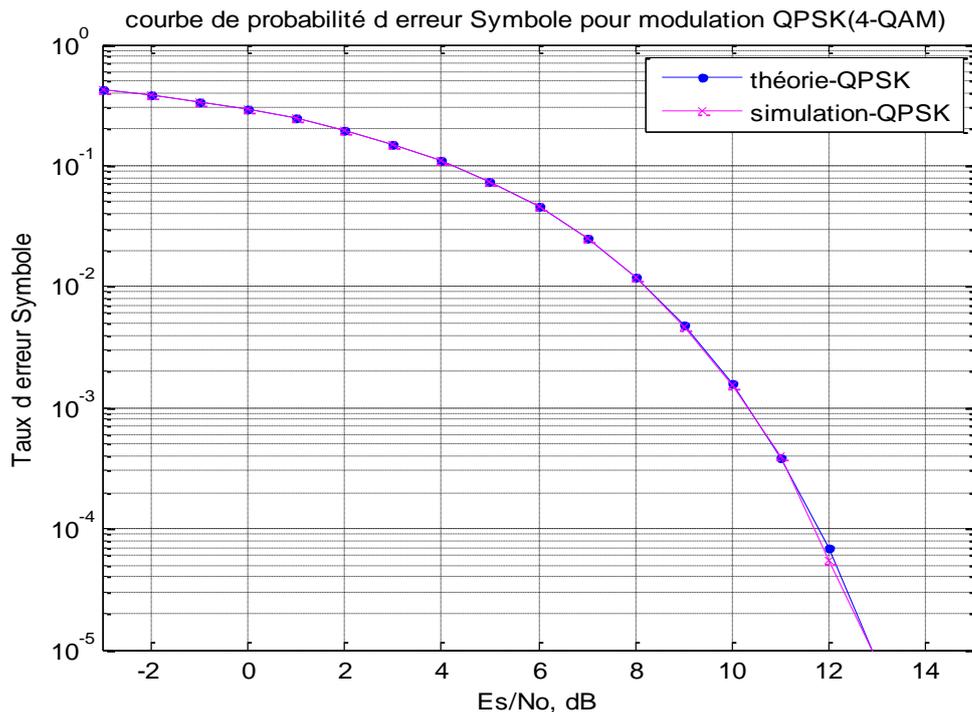


Figure 4.7: Taux d'erreur symbole de modulation QPSK (4QAM) pour 10^6 bit d'émission

A travers la simulation effectuée, il est observé une bonne concordance entre le graphe simulé et théorique pour la modulation QPSK.

De même, il est observé que comparativement à la modulation 4-PAM, le type de modulation présenté nécessite $\frac{E_s}{N_0}$ valeurs seulement autour 2dB pour atteindre un taux d'erreur symbole de 10^{-3} .

4.4 : Modulation 16-PSK

4.4.1 : Taux d'erreur symbole pour la modulation 16-PSK

Considérons un générateur de modulation M-PSK, où l'on utilise les alphabets [37]:

$$\alpha_{16-PSK} = \sqrt{E_s} \left\{ 1, e^{\frac{j2\pi}{M}}, e^{\frac{j4\pi}{M}}, \dots, e^{\frac{j2\pi(M-1)}{M}} \right\} \quad (4.19)$$

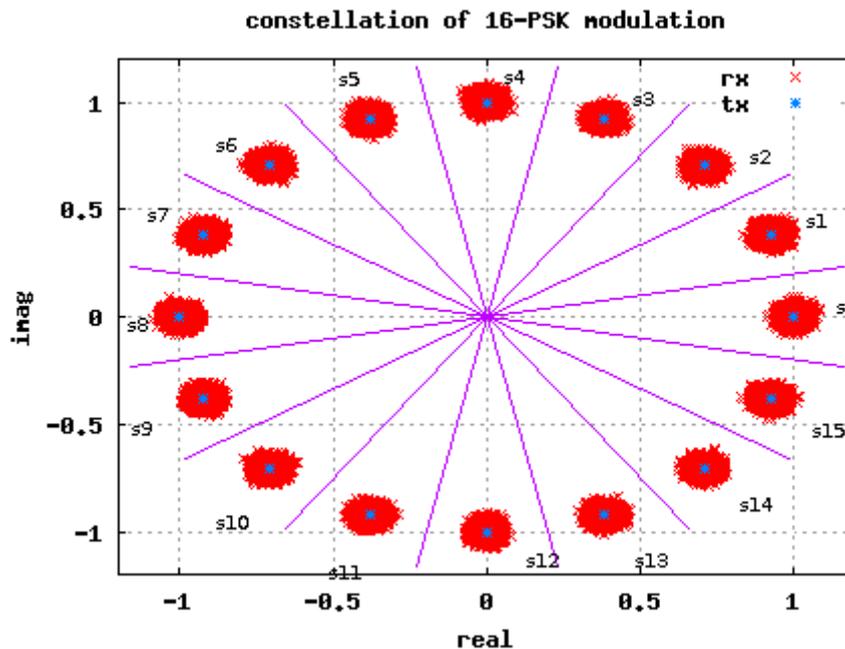


Figure 4.8: Diagramme de constellation de la modulation 16-PSK

Pour le calcul du taux d'erreur symbole, on considère le symbole sur l'axe réel, c'est-à-dire $s_0 = \sqrt{E_s}$. Le symbole reçu est alors $y = \sqrt{E_s} + n$ où n est un bruit blanc gaussien.

Donc, en considérant le symbole s_0 de la figure 4.8, la fonction de distribution de probabilité conditionnelle (Pdf) de y , sachant que s_0 a été transmis est exprimée par:

$$p(y|s_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(x-\sqrt{E_s})^2}{N_0}} \quad (4.20)$$

Il est à signaler au passage que, si le symbole reçu est localisé dans la limite définie par les lignes de couleur magenta, le symbole sera alors démodulé correctement. Pour calculer le taux d'erreur symbole, il faut alors calculer la probabilité que la phase du symbole reçu se trouve dans la limite définie par les lignes de couleur magenta de la figure 4.8. En d'autres termes, à partir de $-\frac{\pi}{M}$ à $+\frac{\pi}{M}$.

Pour simplifier le calcul, faisons les hypothèses suivantes:

i) Le rapport signal sur bruit, $\frac{E_s}{N_0}$ est relativement élevé.

Pour une valeur relativement élevée de $\frac{E_s}{N_0}$, la partie réelle du symbole reçu n'est pas affectée par le bruit, soit : $\Re_y \approx \sqrt{E_s}$. Et la partie imaginaire du symbole reçu est égale au bruit, soit : $\Im_y = n$.

ii) La valeur de M est raisonnablement élevée (soit : $M > 4$).

Pour une valeur relativement élevée de M , les points de la constellation sont étroitement espacés. Étant donné cela, la distance des point de la constellation de s_0 (la ligne de couleur magenta) peut être approchée par $\sqrt{E_s} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)$.

Etant données les deux hypothèses (i) et (ii), on constate que le symbole s_0 sera décodé incorrectement, si la composante imaginaire du symbole reçu y est supérieure à $\sqrt{E_s} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)$.

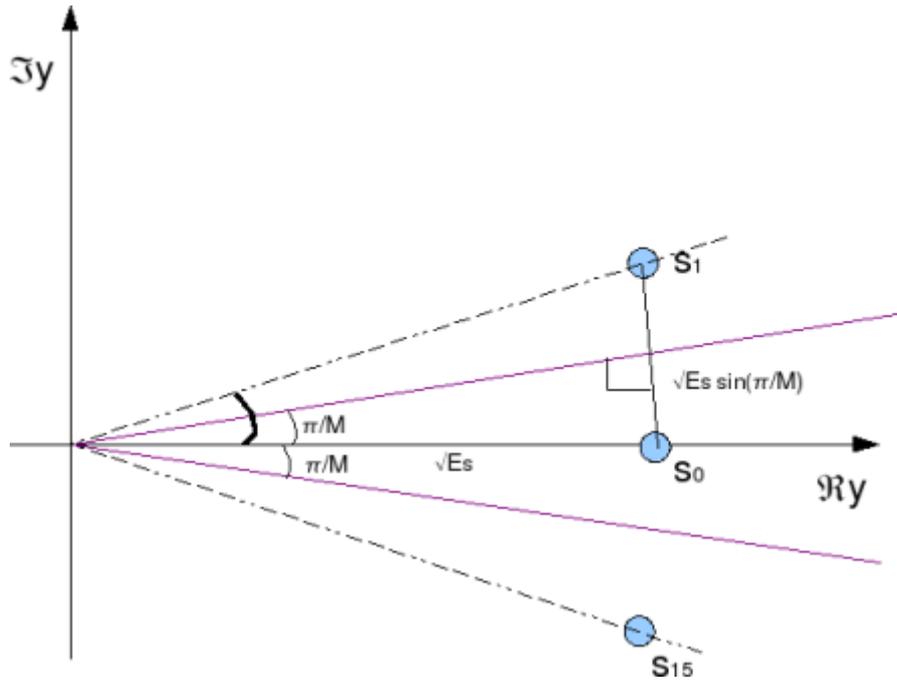


Figure 4.9: Distance entre les points de la constellation

La probabilité de y étant supérieure à $\sqrt{E_s} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)$. Elle est exprimée par :

$$p\left(\Im(y) > \sqrt{E_s} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{\sqrt{E_s} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)}^{\infty} e^{-\frac{\Im_y^2}{N_0}} dy \quad (4.21)$$

Pour un souci de calcul, on effectue un changement de variable, soit : $u = \frac{\Im_y}{\sqrt{N_0}}$.

D'où :

$$p\left(\Im(y) > \sqrt{E_s} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\sqrt{E_s} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)}{\sqrt{N_0}}}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left[\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right] \quad (4.22)$$

De même, le symbole s_0 sera décodé incorrectement, si la composante imaginaire du symbole reçu y est inférieure à $-\sqrt{E_s} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)$.

La probabilité de y , être moins de $-\sqrt{E_s} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)$, est exprimée par :

$$p\left(\mathfrak{I}(y) < -\sqrt{E_s} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{E_s} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)} e^{-\frac{\mathfrak{I}_y^2}{N_0}} dy = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left[\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right] \quad (4.23)$$

La probabilité d'erreur totale, sachant que s_0 a été transmis, est exprimée par :

$$p(e|s_0) = \operatorname{erfc}\left[\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right] \quad (4.24)$$

Si au moins l'un des symboles reçus est décodé incorrectement, le taux total d'erreur de symbole de modulation M-PSK est donné par l'expression :

$$P_{e,MP SK} = \operatorname{erfc}\left[\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right] \quad (4.25)$$

4.4.2 : Procédure de simulation

La procédure de simulation (Cf. Annexe 4) consiste à générer des symboles binaires, modulés par la modulation M-PSK. On ajoute ensuite un bruit blanc gaussien, puis on effectue une démodulation des symboles reçus par un démodulateur M-PSK. On effectue après le comptage d'erreurs. Cette procédure est répétée pour différentes $\frac{E_s}{N_0}$ valeurs. Le résultat de la simulation est donné dans la Figure 4.10.

A travers la simulation effectuée, il est observé dans la figure 4.10 une bonne concordance entre le graphe du taux d'erreur symbole simulé et théorique pour la modulation M-PSK.

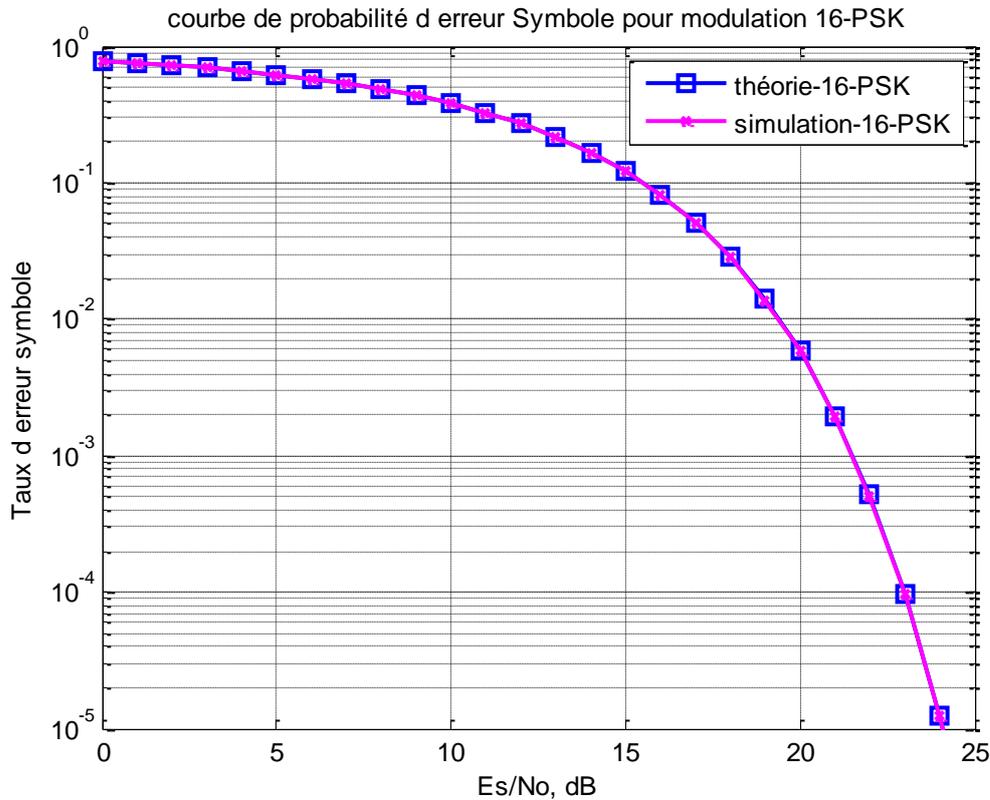


Figure 4.10 : Taux d'erreur symbole pour une modulation 16-PSK pour $2 \cdot 10^6$ bit d'émission

4.5. Conclusion

Dans le présent chapitre nous avons pu montrer que La simulation de Monte Carlo reste toujours valable pour la Modulation M-aire et ce à travers des développements théoriques et des travaux de simulations. L'efficacité de la technique proposée pour la modulation M-aire est ainsi prouvée à travers la comparaison des courbes du Taux d'Erreur symbole théorique et des courbes du taux d'Erreur symbole estimé par la méthode de simulation de monte Carlo.

Conclusion Générale

L'objectif de ce travail était d'évaluer les performances des systèmes de transmission numérique. Pour quantifier ces performances, nous avons fait appel à la technique de simulation de Monte Carlo.

Le travail nous a permis d'appréhender d'une manière méthodologique l'opération d'estimation des taux d'erreur binaire et les problèmes ayant traités.

D'une manière générale, nous avons eu l'occasion d'introduire des notions générales sur les systèmes de communications numériques, telles que : le codage de source, le codage du canal, les modèles des canaux de transmissions, les modulations numériques, le bruit et l'interférence entre symboles et les égaliseurs.

Nous avons essayé au début de s'intéresser à la technique d'estimation Monte Carlo, qui est essentiellement basée sur les lois de probabilité. Nous avons ainsi calculé, pour cette méthode, le biais et la variance pour voir la qualité de cet estimateur. De même nous avons développé des procédures pour l'application de la méthode de simulation Monte Carlo aux systèmes de communication numériques.

Ces procédures de simulation ont été développées au début pour le cas simple où le système est modulé en BPSK, puis nous avons, au troisième chapitre, effectué

Conclusion Générale

une généralisation aux différents types de canaux (AWGN et Rayleigh) et en considérant deux types d'égaliseurs (ZF et MMSE).

L'analyse des résultats de simulation a montré que pour s'attendre à un meilleur résultat de calcul du BER, un grand nombre N de bit transmis doit être considéré. En effet, il est observé à travers l'étude de simulation que pour un nombre N grand de bit transmis, les BER simulés et le BER théoriques sont confondus.

De même, il est effectué une étude de performance pour le canal de Rayleigh de en tenant compte des fonctions d'égalisation (ZF et MMSE). Pour ces deux types d'égaliseurs, il est observé une différence de 0,5dbm entre l'égaliseur ZF et l'égaliseur MMSE.

Et pour pallier au problème de complexité de réalisation et au temps de convergence, on a considéré la modulation multi porteuse OFDM qui est simple de point de vue implémentation et pour ces performances établies.

Et comme dans la transmission numérique, on a besoin toujours d'augmenter le débit binaire ; on s'est intéressé au chapitre 4 à la modulation M -aire (M-PAM, M-QAM, M-PSK) pour diminuer le temps de transfert des données (image, vidéo, etc.). Et dans le même contexte, on a étudié la faisabilité et la validité de la méthode d'estimation Monte Carlo pour ce type de modulation.

Les résultats de simulation obtenus ont bien montré l'efficacité et la validité de la méthode de simulation Monte Carlo et ce, à travers la comparaison des taux d'erreurs binaires simulés (estimés) avec les taux d'erreurs théoriques.

Néanmoins, il faut mentionner, même si l'approche développée a l'avantage d'être valable pour tous les types de modulation, avec un biais qui tend vers zéro, elle souffre de l'inconvénient du temps de calcul élevé. Pour surmonter cet inconvénient, de nouvelles techniques de simulation des performances des systèmes de communication ont vu le jour et sont en phase de test et de validation [38][39].

Bibliographie

- [1] **Sylvain TEROIS** « réduction des effets des non-linéarités dans une modulation multiporteuse a l'aide de réseaux de neurones », Thèse de doctorat, Université de Rennes1, 2003.
- [2] **Christophe LAOT** «égalisation autodidacte et turbo-égalisation application aux canaux sélectifs en fréquence », Thèse de doctorat, université Rennes 1, 1997.
- [3] **Hiroshi Harada and Ramjee Prasad** «simulation and software radio for mobile communication » Universal Personal Communication, Hardcover 2002.
- [4] **B. R. Saltzberg.** « Performance of an Efficient Parallel Data Transmission System ». IEEE Trans. Commun.. vol. COM-15. no. 6. décembre 1967. pp. 805-811.
- [5] **S. B. Weinstein et P. M. Ebert.** « Data Transmission by Frequency-Division Multiplexing using the Discrete Fourier Transform ». IEEE Trans. Commun.vol . COM- 19. no. 5 octobre 1971. pp. 628-634.
- [6] **H. Sari. G. Karam et I. Jeanclaude.** « Transmission Techniques for Digital Terrestrial TV Broadcasting ». IEEE communi. Mag.vol. 33. no. 2. 1990. pp. 5-149.
- [7] **MICHEL.C.JERUCHIM,** « Techniques for Estimating the Bit Error Rate in the Simulation of Digital Communication Systems », IEEE journal on selected areas in communications, vol. sac-2, no. 1, january 1984.
- [8] **Shlomo Mark and Shaul Mordechai** « Applications Of Monte Carlo Method In Science And Engineering », InTech, 2011.
- [9] **Michel Joindot et Alain Glavieux** « introduction aux communication numérique », Edition Dunod, 2007.
- [10] **HA H. NGUYEN, ED SHWEDYK,** « A First Course in Digital Communications», Cambridge University Press, 2009.
- [11] **Geneviève Baudoin et coll.** « Radiocommunications Numériques, Principes, modélisation, et simulation » Tome 1, Dunod, 2007.
- [12] **Ramjee Prasad** « OFDM for Wireless Communications Systems ». Artech House, 2004.
- [13] **Frédéric de Coulon,** « Theorie et traitement des signaux", Presses Polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1996.
- [14] **John G. Proakis** « Digital Communication », 4th Edition , McGraw-Hill, 2000.

- [15] **P.F. Combes** « Micro onde 1 : Lignes, Guides et Cavités », Dunod, 2007.
- [16] **Guy pujolle** « Les Réseaux », 6^{ème} edition, Eyrolles, 2004.
- [17] **J-M BROSSIER**, « Signal et communication numerique : Égalisation et synchronisation », Hermes, Paris, 1997.
- [18] **Andrei Câmpeanu** « Égalisation adaptative Traitement adaptatif du signal de télécommunications », Universitatea Politehnica Timișoara, 2010.
- [19] **Samuel Dubouloz**, «Développement d'Architectures Avancées pour Communications Ultra Large Bande (UWB) dans des Applications Bas Débit » Thèse de doctorat, Télécom Paris, 2008.
- [20] **Earl McCune**, « Practical Digital Wireless Signals » Cambridge University Press, 2010.
- [21] **Gerardo RUBINO** et **Bruno TUFFIN** « Simulations et méthodes de Monte » Technique Ingénieur. 2007.
- [22] **J. Traub** et **H. Wozmakouski**. « Les problèmes à grand nombre de variables ». Pour la Science. No.197.mars 1994.pp 52-58.
- [23] **Mohamed Lessaad Ammari**, « analyse par simulation monte carlo rapides des performances des systemes OFDM égalises », Thèse, Université de Laval, 1999.
- [24] **R.Y. Rubienstein**, « Simulation and the Monte Carlo Methods », The university of Chicago Press, 1974.
- [25] **M. C. Jeruchim. P. Balaban et K. S. Shanmugan**. « Simulation of Communication Systems ». Plenum Publishing Co. New York 1992.
- [26] **Adrian Bohdanowicz** « On Efficient BER Evaluation of Digital Communication Systems via Importance Sampling » Delft University of Technology. The Netherlands.
- [27] **N. Metropolis et S. M. Ulam**. « The Monte Carlo Method ». J.Amer Statis. Asso . no. 44. 1949. pp. 335-341.
- [28] **C.Soize**. « Méthodes mathématiques et analyse du signal ». Masson, 1993.
- [29] **Iryna Andriyanova** « Communications numériques avancées ». Notes de Cours, 2009.
- [30] **M. Fisz**. « Probability Theory and Mathematical Statistics ». Wiley, 1963.

- [31] **A. M. Mood** «introduction to the theory of statistics» McGraw-Hill, 1950.
- [32] **P.L.Meyer.** « Introductory Probability and Statistical Applications ». Reading .MA: Addison-Wesley, 1970.
- [33] **Bernard Sklar** « Digital Communications: Fundamentals and Applications », 2nd Edition, Prentice Hall, 2001.
- [34] **Gérard Blanchet et Maurice Charbit,** « Signaux et images sous matlab », Hermes Sciences, 2001.
- [35] **Iryna Andriyanova** « Communications numériques avancées ». Notes de Cours, 2009.
- [36] **Willion H. Tranter, K. Sann Shanmugan, Theodore S. Rappaport and Kurt L. Kasbar** « principles of communication systems simulation with wireless application » Prentice Hall, 2004.
- [37] **John R. Barry,Edward. Lee, David. Messerschmith.** « Digital Communication», Third Edition, Springer, 2003.
- [38] **S.Saoudi, M. Troudi and F.Ghorbel** « An Iterative Soft Bit Error Rate Estimation of Any Digital Communication Systems Using a Non parametric Probability Density Function » EURASIP Journal on wireless Communications and Networking, Hindawi Publishing Corporation, 2009.
- [39] **S.Saoudi, T.Derham, T.Ait-Idir and P. Coupe** « A Fast Soft Bit Error Rate Estimation Method » EURASIP Journal onWireless Communications and Networking, Hindawi Publishing Corporation, 2010.

ANNEXE 1

Variable aléatoire chi carré

Dans le calcul de la probabilité d'erreur binaire théorique (BER) pour la modulation BPSK dans un canal de Rayleigh, j'ai besoin de discuter sur le **chi carré variable aléatoire**.

1 Quel est le variable aléatoire chi carré ?

Un ensemble qui contient m variables aléatoires indépendants et identiquement distribués, chaque variable aléatoire X_i attribut à une loi de probabilité gaussiennes de moyenne 0 et la variance σ^2 et nous former une nouvelle variable aléatoire,

$$Z = \sum_{i=1}^m X_i^2 . \quad (\text{A 1.1})$$

Donc Z est une **variable de chi carré aléatoire** avec des m degrés de liberté.

Il y a deux types de **chi carré** de distribution. Le premier est obtenu lorsque X_i a une moyenne nulle et est appelée **chi centrale de distribution carrés**. La seconde est obtenue lorsque X_i a une moyenne de non nulle et est appelé **non centrale de distribution chi carré**. Nous allons concentrer uniquement sur **chi centrale de distributions carrées**.

2 PDF de la variable aléatoire chi-carré à seul degré de liberté [14]

L'exemple le plus simple d'une variable aléatoire chi carré est

$$Z = X^2 \quad (\text{A1.2})$$

Où X est une variable aléatoire gaussienne avec moyenne nulle et de variance σ^2 .

Le PDF de X est :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{A.1.3})$$

Par définition, la fonction de distribution cumulative (CDF) de Z est :

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(X^2 \leq z) \\ &= P(|X| \leq \sqrt{z}) \end{aligned} \quad (\text{A.1.4})$$

Cela simplifie au

$$F_Z(z) = F_X(\sqrt{z}) - F_X(-\sqrt{z}). \quad (\text{A.1.5})$$

Différencier l'équation précédente par rapport à z pour trouver la fonction de densité de probabilité

$$\begin{aligned} p_Z(z) &= \frac{p_x(\sqrt{z})}{2\sqrt{z}} + \frac{p_x(-\sqrt{z})}{2\sqrt{z}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left(e^{\frac{-z}{2\sigma^2}} + e^{\frac{-z}{2\sigma^2}} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.1.6})$$

En résumé, la **PDF de la variable aléatoire chi carré avec un degré de liberté** est,

$$p_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2z\pi\sigma^2}} e^{\frac{-z}{2\sigma^2}}. \quad (\text{A.1.7})$$

3 PDF de variable aléatoire chi carré à deux degrés de liberté

Le variable aléatoire Chi carré à deux degrés de liberté est de la forme,

$$Z = X^2 + Y^2 \quad (\text{A.1.8})$$

Où, X et Y sont indépendantes des variables aléatoires gaussiennes de moyenne nulle et de variance σ^2 .

Dans le post sur le variable aléatoire Rayleigh, nous avons donné que le format PDF de la variable aléatoire A ,

Où $A = \sqrt{X^2 + Y^2}$ est

$$p_A(a) = \frac{a}{\sigma^2} e^{\frac{-a^2}{2\sigma^2}}, \quad a \geq 0 \quad (\text{A.1.9})$$

Pour notre analyse actuelle, nous savons que

$$Z = A^2.$$

Différencier les deux côtés,

$$dz = 2ada.$$

En appliquant cela à l'équation ci-dessus, **PDF de variables aléatoires chi carré avec deux degrés de liberté** est :

$$p_Z(z) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{\frac{-z}{2\sigma^2}}, \quad z \geq 0 \quad (\text{A.1.10})$$

ANNEXE 2

SIGNAUX ALÉATOIRES

1 Définitions

Un signal est dit **aléatoire** si ses valeurs ou réalisations dépendent du hasard et s'il ne possède pas de représentation analytique. Par contre l'observation de ce signal peut être caractérisée par des grandeurs statistiques ou fréquentielles.

2 Caractérisations statistiques d'un signal aléatoire stationnaire

Soit un signal aléatoire s défini par sa loi de distribution ou loi de probabilité $p(s)$ et considéré comme stationnaire, nous pouvons caractériser ce signal avec les paramètres statistiques suivants:

– valeur moyenne ou espérance :

$$m_s = E[s] = \int_{+\infty}^{-\infty} s.p(s).ds \quad (\text{A 2.1})$$

– valeur quadratique moyenne ou moment d'ordre 2 :

$$E_{sp}[s^2] = \int_{+\infty}^{-\infty} s^2.p(s).ds \quad (\text{A 2.2})$$

– écart quadratique moyen ou moment d'ordre 2 centré ou variance :

$$\sigma_s^2 = E_{sp}[(s - m_s)^2] = \int_{+\infty}^{-\infty} (s - m_s)^2.p(s).ds \quad (\text{A 2.3})$$

– écart type :

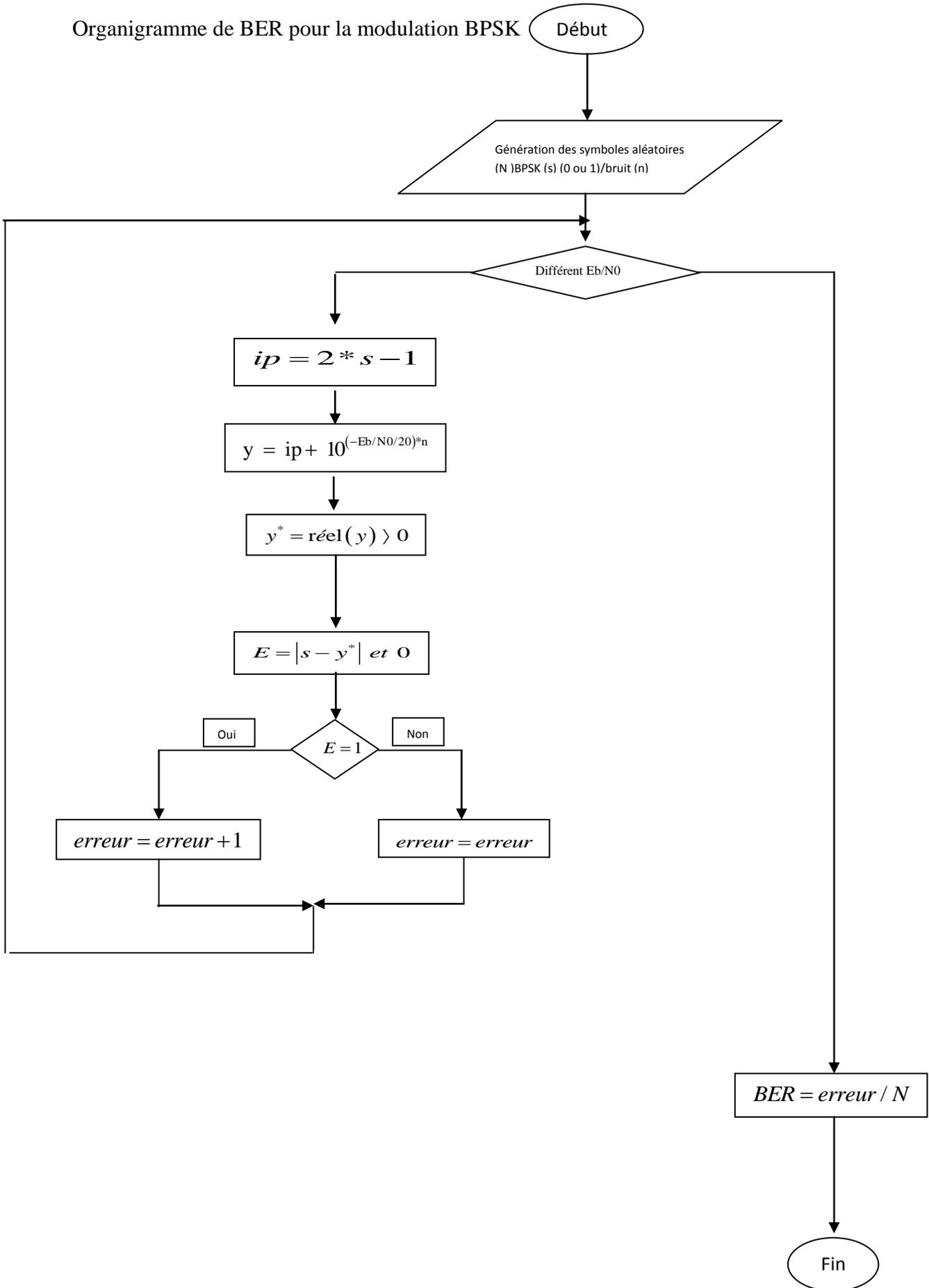
$$\sigma_s = \sqrt{E_{sp}[(s - m_s)^2]} \quad (\text{A 2.4})$$

– fonction d'autocorrélation statistique : cette fonction, notée $\Gamma_s(\tau)$, est une indication sur la liaison statistique entre les valeurs du signal aléatoire s et s' mesurées à deux instants séparés de τ

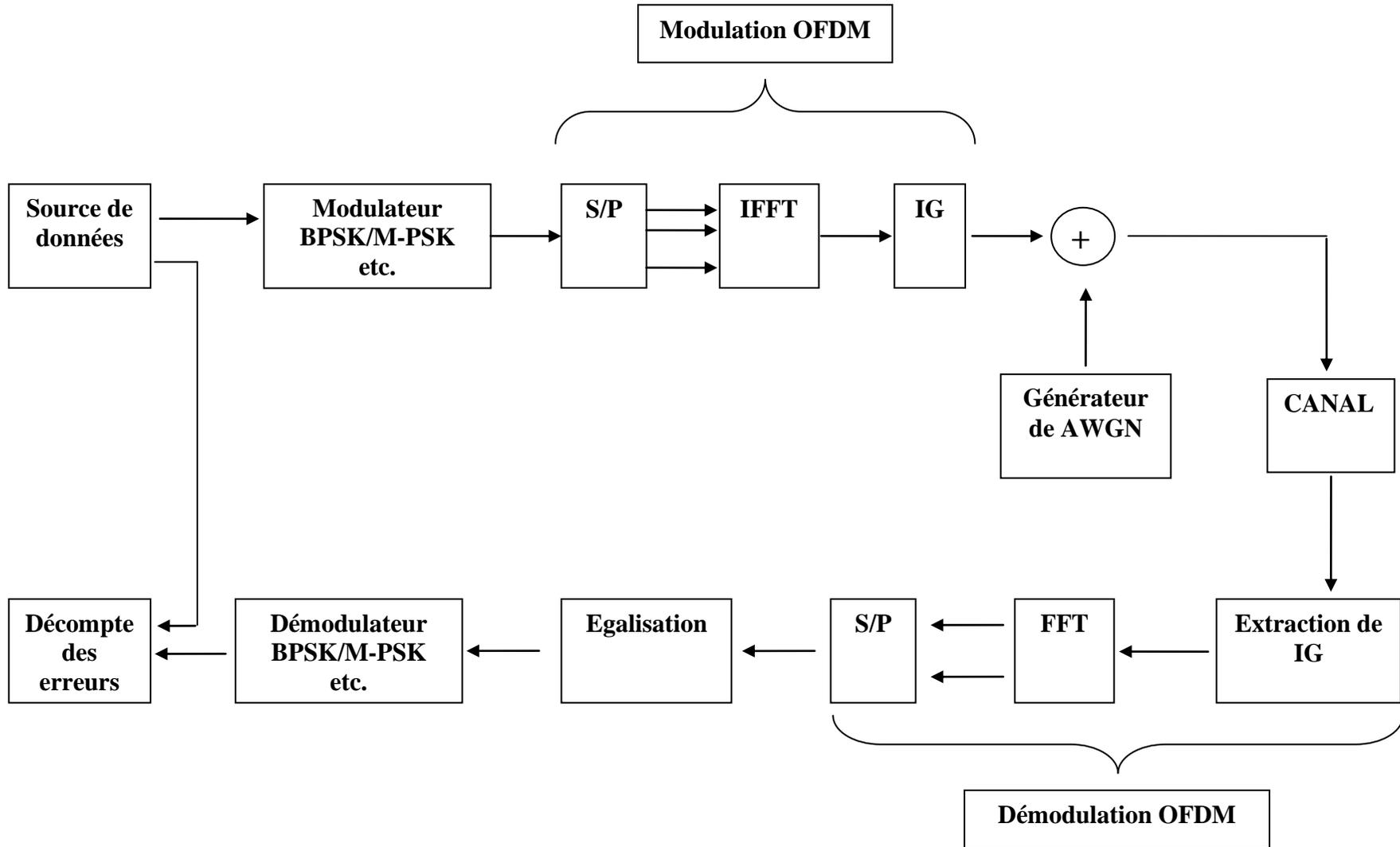
$$\Gamma_s(\tau) = E_{sp}[s.s']$$

ANNEXE 3

Organigramme de BER pour la modulation BPSK



ANNEXE 4



Modélisation du système de modulation pour la simulation Monte Carlo