

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université 8 mai 1945 Guelma
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département d'Electronique et Télécommunications



Mémoire

Présenté pour obtenir le Diplôme de Magister en Télécommunications

OPTION: Télécommunications

Par:

HALASSI A.Rezzaq

Thème

**Contribution à l'étude des filtres à interférences en polarisation :
Synthèse des filtres à gabarits prédéfinis pour les réseaux de
télécommunications optiques**

Devant le Jury :

Président :	BOUMAZA Mohamed Seghir	Prof, Université 8 mai 1945Guelma
Rapporteur:	HAMDI Rachid	MC-A Université 8 mai 1945Guelma
Examineurs:	BOUALLEG Ahcene	MC-A Université 8 mai 1945Guelma
	REDADAA Salah	MC-A Université 8 mai 1945Guelma
Invité :	TABA Mohamed Tahar	MC-B Université 8 mai 1945 Guelma

SESSION 2012

Résumé

Le travail présenté dans ce mémoire a pour objectif d'exposer des méthodes de synthèse de filtres biréfringents à gabarit prédéfini. La réponse impulsionnelle de tels filtres peut être contrôlée par les déphasages et l'orientation des angles des différents éléments de la structure. Ceci offre un degré de liberté supplémentaire pour la réalisation de filtres à fonction de transfert de forme quelconque. La méthode de Harris permet de synthétiser des fonctions de transfert de forme symétrique. La structure correspondante du filtre ainsi conçu est constituée de lames biréfringentes d'égale épaisseur et de même biréfringence.

Pour pallier à la contrainte de symétrie supposée dans la méthode de Harris et afin de permettre la réalisation de filtres à fonction de transfert de forme quelconque, une autre méthode basée sur un algorithme de synthèse plus générale est exposée. Néanmoins, le prix à payer est l'utilisation de lames à cristaux liquides en association avec les lames biréfringentes en jouant sur leurs angles d'orientation et leurs déphasages introduits. Ces lames à cristaux liquides sont alors les éléments responsables de la forme complexe de la réponse impulsionnelle du filtre.

Mots-clefs : Filtre biréfringent , système WDM, lame biréfringente ,cristaux liquides .

Abstract

The aim of the study presented in this work is to expose methods of synthesis of birefringent filters with tailored transfer functions. The impulse response of such filters can be controlled by varying the phase shift and the orientation angles of the elements of the structure. This provides an additional degree of freedom for the realization of filters with transfer functions having any shape. The Harris's method allows the synthesis of transfer functions having a symmetrical shape. The corresponding filter's structure consists of birefringent plates having equal thicknesses and the same birefringence.

To overcome the constraint of the symmetry assumed in the Harris's method and be able to realize filters with transfer function having any shape, another method based on a generalized synthesis algorithm is described. However, the price for this degree of freedom is the use of liquid-crystal cells associated to birefringent plates by playing on their orientation angles and phase shifts introduced. These liquid-crystal cells are responsible for the complex nature of the filter impulse response .

Keywords : Birefringent filter, WDM system, birefringent plate, liquid crystal.

ملخص

العمل المقدم في هذه المذكرة يهدف إلى عرض طرق لمعالجة مرشحات مستقطبة ذو قالب محدد مسبقاً. التحكم في استجابة النبضة لهذه المرشحات مقرون بزوايا الطور و اتجاه زوايا عناصر البنية (المرشح) هذا يعطي حرية إضافية لتحقيق مرشحات التي تملك دالة التحويلي ذو أشكال مختلفة . طريقة هاريس تسمح لنا بمعالجة الدوال التي تملك أشكال متناظرة فقط، حيث بنية المرشحات المرافقة تحتوي علي قطع من لوحات مستقطبة لها نفس السمك و نفس معامل الانكسار المزدوج.

للتغلب على القيد (التناظر) الموجود في طريقة هاريس و التمكن من معالجة مرشحات التي تملك دوال التحويلي ذات أشكال مختلفة. طريقة أخرى تعتمد علي خوارزمية أكثر عموماً قد طرحت، الاختلاف الذي يكمن في هذه الخوارزمية هو استعمال لوحات البلور السائل مقرونة بلوحات الزجاج المستقطب، الحصول علي أشكال الدوال المختلفة متعلق بزوايا الطور للبلور السائل و اتجاه زوايا عناصر البنية (المرشح)، علماً أن البلور السائل هو المسؤول عن الشكل المركب لاستجابة النبضة للمرشحات.

الكلمات الرئيسية : مرشح مستقطب، نظام WDM، لوحة مستقطبة، بلور سائل.

Les Acronymes et Abréviations

C	La bande Conventiennelle dans la transmission optique
DMUX	Démultiplexeur Optique
e	épaisseur de la lame biréfringente
EDFA	Erbium Doped Fiber Amplifier
F_j^i	La j^{ieme} impulsion de la i^{ieme} étage suivant l'axe rapide
F_R	La finesse du filtre de Fabry-Pirot
FP	Fabry-Pérot
L	La bande Large dans la transmission optique
LCC	Liquid Crystal Cell
MUX	Multiplexeur Optique
n_e	Indice de réfraction suivant l'axe extraordinaire
n_o	Indice de réfraction suivant l'axe ordinaire
OADM	Optical add-drop Multiplexer
OEM	Onde électromagnétique
R_{FP}	Réfectivité de Fabry-Pirot
ROADM	Reconfigurable optical add-drop Multiplexer
S_j^i	La j^{ieme} impulsion de la i^{ieme} étage suivant l'axe Lent
SF	Sériier de Fourier
TDM	Time-division Multiplexing
t_F	Le temps parcouru par l'impulsion suivant l'axe rapide
T_{FP}	Transmission de Fabry-Pirot
t_S	Le temps parcouru par l'impulsion suivant l'axe lent
WDM	Mavelength Division Multiplexing
Λ	Période de Bragg
δn	La biréfringence de la lame

Sommaire

Introduction générale	1
Chapitre 1 : Systèmes WDM et filtres optiques	3
1.1 Systèmes WDM	4
1.2 Types de Filtres Optiques	4
1.2.1 Filtre Fabry-Pérot	5
1.2.1.1 Définition	5
1.2.1.2 Principe	5
1.2.1.3 Applications	10
1.2.2 Filtre à base de réseau de Bragg	11
1.2.2.1 Principe	11
1.2.2.2 Théorie des Modes Couplés	12
1.2.2.3 Applications	16
1.3 Conclusion	17
Chapitre 2 : Filtres biréfringents	18
2.1 Propagation de la lumière dans un milieu diélectrique anisotrope	19
2.1.1 Définition	19
2.1.2 Polarisation électrique des milieux diélectriques	19
2.1.3 Équation des vitesses de phase (Équation de Fresnel)	21
2.1.4 Éllipsoïde des Indices et axe optique	24
2.2 Polarisation et biréfringence	26
2.2.1 Polarisation de la lumière	26
2.2.2 Interférences de la lumière	26
2.2.3 Biréfringence	27
2.3 Cas des Cristaux Liquides	27
2.3.1 Phases des cristaux liquides	27
2.3.1.1 Phase nématique	27
2.3.1.2 Phase smectique	28
2.4 Représentation des états de polarisation de la lumière	28
2.4.1 Représentation algébrique	29
2.4.2 Représentation de Jones	29
2.5 Filtres Biréfringents	36
2.5.1 Intensité à la sortie d'une lame biréfringente entre Polariseur/Analyseur	36
2.5.2 Filtres Biréfringents	37
2.5.2.1 Filtre biréfringent de Lyot	37
2.5.2.2 Filtre biréfringent de Solc	40
2.6 Conclusion	42
Chapitre 3 : Algorithme de synthèse des filtres biréfringents à fonction de	

transfert de forme symétrique	43
3.1 Étude théorique	44
3.1.1 Considérations générales	44
3.1.2 Réponse impulsionnelle d'une série de lames biréfringentes	44
3.1.3 Spécification de la réponse désirée	47
3.1.4 Synthèse du filtre	48
3.1.4.1 Détermination de la composante orthogonale Bloquée D (w)	50
3.1.4.2 Détermination des angles d'orientation des différents étages	52
3.2 Exemple d'application	55
3.3 Résumé de la méthode de synthèse	58
3.4 Résultats de simulation	59
3.4.1 Cas d'une fonction triangulaire à valeur moyenne non nulle	59
3.4.2 Cas d'une fonction carrée à valeur moyenne nulle	60
3.4.3 Cas d'une fonction carrée à valeur moyenne non nulle	61
3.4.4 Autres fonctions	63
3.5 Conclusion	64
 Chapitre 4 : Algorithme de synthèse des filtres biréfringents à fonction de transfert de forme quelconque	
4.1 Etude théorique	66
4.1.1 Généralité	66
4.1.2 Procédure de synthèse	67
4.1.2.1 Détermination des coefficients C_i de la réponse Impulsionnelle	67
4.1.2.2 Détermination de la composante orthogonale bloquée D (w)	67
4.1.2.3 La détermination des paramètres	70
4.1.3 Résumé de la procédure de synthèse	75
4.2 Exemple d'application	77
4.3 Résultats de simulation	81
4.3.1 Cas d'une fonction triangulaire à valeur moyenne nulle	81
4.3.2 Cas d'une fonction carrée à valeur moyenne non nulle	84
4.3.3 Autres fonctions	86
4.4 Conclusion	87
Conclusion générale	88
Annexes	
Liste des tableaux	
Liste des figures	
Références	

Introduction générale

La recherche dans le domaine des télécommunications optiques ne cesse guère de nous révéler des nouveautés. L'apparition des services multimédias est à l'origine de la refonte actuelle du réseau de télécommunications basée sur les réseaux à fibres optiques qui ont joué un rôle crucial afin d'éviter la saturation des liaisons à moyen terme.

En raison de leurs caractéristiques de transmission supérieures, les fibres optiques sont utilisées quand on transmet un débit binaire supérieur à quelques dizaines de Mbit/s sur des distances au-delà du kilomètre. Par conséquent, les liaisons terrestres et sous marines grandes distances ainsi que les réseaux métropolitains sont entièrement en fibre optique.

Au début, les systèmes à fibres optiques étaient basés sur les fibres multi modes et des lasers fonctionnant dans la fenêtre des longueurs d'onde des 800- 900 nm. En 1980, une nouvelle génération de fibres optiques et de lasers ont permis la mise en place de liaisons de transmission à 1,3 μ m. Un peu plus tard, une autre génération fonctionnant à 1.55 μ m est apparue avec des caractéristiques supérieures comparativement à ceux des systèmes à ondes courtes.

Les lasers émettant dans les gammes de longueurs d'onde 1.3 μ m et 1.55 μ m sont devenus des produits commercialisés et depuis, ils sont exclusivement utilisés dans les réseaux de longue et moyenne portée de transmission.

D'autre part, l'augmentation de la capacité de transmission d'une fibre optique peut se faire de deux manières différentes. La première approche est de multiplexer plusieurs canaux numériques élémentaires à bas débit sur un même support de communication à plus haut débit. Cette technique s'appelle le multiplexage à Répartition temporelle (TDM). Pour des débits à grande vitesse, ce type de multiplexage est limité en raison de la dispersion chromatique et les effets non linéaires, etc.

Outre le TDM, une deuxième approche pour exploiter la capacité de transmission par fibre consiste à envoyer plusieurs signaux de longueurs d'onde différentes dans une même fibre optique. Il s'agit du «Wavelength Division Multiplexing » ou en abrégé WDM. Il a été alors nécessaire d'utiliser des dispositifs qui permettent d'aiguiller séparément ces signaux au niveau des différents nœuds du réseau. Ces dispositifs appelés les Multiplexeurs Optiques à Insertion/extraction reconfigurable (ROADM) sont généralement basés sur des filtres optiques. Les ROADM jouent un rôle primordial dans les réseaux à fibre optique car ils permettent l'extraction, l'ajout, et le routage de longueurs d'onde individuelles ou des bandes de longueurs d'onde.

Le choix des filtres de longueur d'onde varie selon leur fonction spécifique ils peuvent être des développements pour des optique intégrées planaires comme les grilles rangées de guide d'ondes, ou ils peuvent être étroitement liés à la structure d'une fibre optique elle-même tel que le filtre de Bragg ou le filtre de Fabry-Pérot.

Le présent travail est reparti en quatre chapitres qui ont pour but de présenter une étude détaillée d'une méthode de synthèse d'un filtre biréfringent à gabarit prédéfini, en jouant sur les angles et les épaisseurs des lames les constituants. Néanmoins, cette méthode ne s'applique que sur des fonctions symétriques. Pour pallier à cette contrainte, une autre méthode développée par E. O. Amman pouvant synthétiser des fonctions de transfert quelconques a été présentée.

Le premier chapitre est consacré, dans un premier temps, à l'étude du réseau WDM et ensuite à la description des différents types de filtres optiques, leurs principes de fonctionnement, ainsi que la forme de leurs fonctions de transferts.

Dans le second chapitre, nous présentons l'étude détaillée des filtres biréfringents en commençant par un rappel sur les phénomènes physiques et la description des éléments biréfringents qui constituent ces filtres, et par la suite nous analysons les deux configurations de base de cette famille des filtres à savoir les filtres de Lyot et Solc.

Dans le troisième chapitre, nous présentons la procédure de synthèse qui permettra de trouver la réponse d'un filtre constitué de lames biréfringentes et contrôlé par l'orientation des angles des différentes lames. Ce filtre ne traite que les gabarits prédéfinis de forme symétrique.

Dans le dernier chapitre, on reprend le même protocole du chapitre précédent seulement avec l'utilisation d'un nouveau filtre constitué de lames biréfringentes accompagnées de lames à cristaux liquides et contrôlé par l'orientation des angles des différentes lames et qui traite les gabarits prédéfinis de forme quelconque.

Chapitre I

Systemes WDM et filtres optiques

Les filtres optiques de longueur d'onde utilisés dans les systèmes de transmission optique sont un sous-groupe particulier de dispositifs physiques définis de telle façon qu'ils sélectionnent ou modifient des parties du spectre du signal. En effet, les filtres de longueur d'onde optique sont définis par rapport aux modifications qu'ils introduisent sur le spectre des fréquences [1].

Les filtres optiques ont tous la même fonction et sont considérés comme des composants clés dans les systèmes de transmission optique. Ces filtres sont basés soit sur les phénomènes d'interférence (Fabry-Pérot, Mach-Zehnder), où la diffraction (Réseau de Bragg) [2][3].

Nous nous limiterons aux applications des filtres optiques dans les réseaux de télécommunications optiques WDM (wavelength division multiplexing).

1.1 Systèmes WDM

Les filtres optiques représentent un composant essentiel dans les éléments du système de transmission WDM et la figure suivante (fig.1.1) montre les différents composants de ce système [1][4].

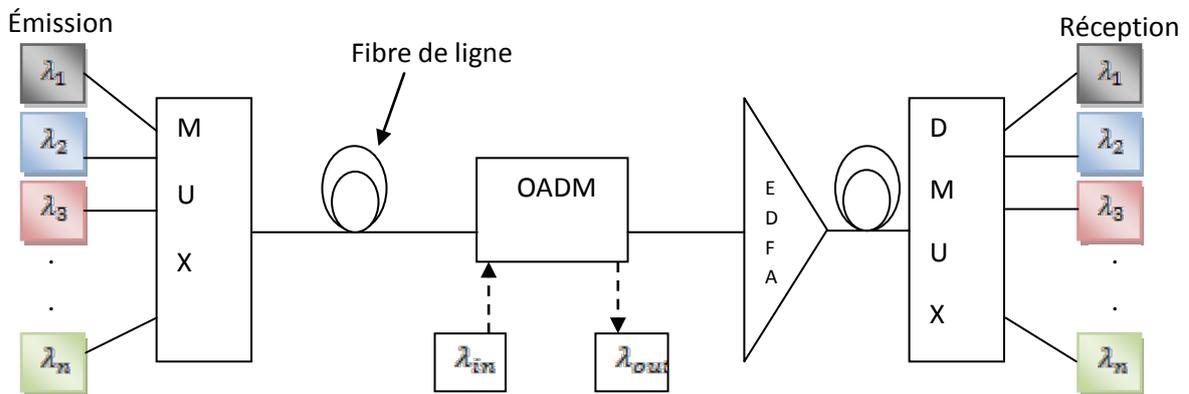


Figure.1.1 Applications des filtres dans un système WDM simplifié

- **Les Multiplexeurs/Démultiplexeurs Optiques (MUX/DMUX)**

Ce sont des dispositifs essentiels dans les systèmes de transmission WDM, quand on veut regrouper ou séparer les différents canaux (ou longueurs d'onde).

Les multiplexeurs optiques peuvent être différenciés selon la technique utilisée : réseaux de diffraction (réseau de Bragg), filtrage optique (Fabry-Pérot)... etc.

- **Multiplexeurs Optiques à Insertion/Extraction, OADM**

Ils permettent d'insérer ou d'extraire, en un point donné de la ligne de transmission, une ou plusieurs longueurs d'ondes.

Ce sont des dispositifs constitués généralement de filtres et de circulateurs optiques.

- **Les Amplificateurs à Fibre Dopée à l'Erbium (EDFA)**

Utilisé pour amplifier le signal de la bande C (c'est la bande conventionnelle de la fibre parce qu'elle présente l'atténuation la plus faible entre les longueurs d'onde 1530 et 1565 nm) et de la bande L (c'est la bande large de 1565 à 1625 nm), transmis par la fibre optique.

1.2 Types de filtres optiques

Parmi les types de filtres optiques les plus utilisés dans le système WDM on trouve les filtres de Fabry-Pérot basés sur l'interférence des ondes multiples et les filtres à base de réseau de Bragg basés sur la diffraction [3].

1.2.1 Filtre Fabry-Pérot (Interféromètre)

1.2.1.1 Définition

Un interféromètre Fabry-Pérot (FP) utilise une interférence à faisceaux multiples pour obtenir la sélectivité de longueur d'onde. Habituellement, le filtre a un port d'entrée et un port de sortie et emploie deux plaques hautement réfléchissantes qui constituent la cavité résonante créant le processus d'interférence à faisceaux multiples [1].

1.2.1.2 Principe

Le concept de base d'un filtre FP est montré sur la figure (fig.1.2) Il a été décrit en premier par Charles Fabry et Albert-Pérot en 1899.

Deux plaques planes fortement réfléchissantes sont positionnées avec précision en parallèle et ainsi forment une cavité. Un faisceau de lumière entrant dans la cavité se reflète à plusieurs reprises entre les plaques. Chaque fois que le faisceau frappe une plaque, une petite partie de sa puissance s'échappe.

Chaque rayon a une différence de phase fixe par rapport au précédent, cette différence de phase correspond à la longueur du chemin parcouru supplémentaire dans la cavité. Les faisceaux multiples parallèles sont acheminés vers un point focal commun avec une lentille et en ce point l'interférence réelle du faisceau multiple aura lieu.

Si on considère que le milieu entre les plaques est sans perte l'amplitude du champ électrique transmise peut être décrite par [1][5,6]

$$\begin{aligned}
 E_t &= t^2 E_i + t^2 r^2 e^{-i\delta} E_i + t^2 r^4 e^{-i2\delta} E_i + \dots + t^2 r^{2k} e^{-ik\delta} E_i \\
 &= E_i t^2 \sum_{k=0}^{\infty} (r^2)^k e^{-ik\delta} = E_i \frac{t^2}{1 - r^2 e^{-i\delta}} \quad (1.1)
 \end{aligned}$$

où $t = \frac{E_t}{E_i}$ est le coefficient de transmission et $r = \frac{E_r}{E_i}$ est le coefficient de réflexion. De même, l'amplitude du champ électrique réfléchi E_r

$$\begin{aligned}
 E_r &= r E_i + t^2 r e^{-i\delta} E_i + t^2 r^3 e^{-i2\delta} E_i + \dots + t^2 r^{2k-1} e^{-ik\delta} E_i \\
 &= E_i \cdot \left(r + \frac{t^2}{r} \sum_{k=1}^{\infty} (r^2 e^{-i\delta})^k \right) \\
 &= E_i \cdot \left(r + \frac{t^2}{r} \cdot \frac{r^2 e^{-i\delta}}{1 - r^2 e^{-i\delta}} \right) \quad (1.2)
 \end{aligned}$$

Le déphasage δ (ou δ') est le décalage temporel entre le faisceau transmis (ou réfléchi) et celui qui est transmis (ou réfléchi) après un aller-retour dans la cavité, avec n

étant l'indice de réfraction du milieu entre les plaques, d la distance entre les plaques, θ l'angle d'incidence de la lumière, λ_0 sa longueur d'onde dans le vide, et ν sa fréquence.

La différence de marche optique ΔS entre le faisceau directement transmis et celui transmis après un aller-retour dans la cavité est (voir fig.1.3).

$$\Delta S = n.(BC + CD) - BF = \frac{2nd}{\cos \theta'} - \sin \theta.2d \tan \theta' = \frac{2nd(1 - \sin^2 \theta')}{\cos \theta'} = 2nd \cos \theta' \quad (1.3)$$

L'application de la loi de Snell : $\sin \theta = n \sin \theta'$

Le déphasage donné par :

$$\delta = \Delta S \cdot \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{4\pi.nd\nu}{c_0} \cdot \cos \theta' \quad (1.4)$$

La différence de marche optique $\Delta S'$ et le déphasage δ' entre le rayon directement réfléchi et le rayon réfléchi après un aller retour dans la cavité en tenant compte d'un changement de phase supplémentaire de π lorsque le milieu optiquement plus dense, sont

$$\Delta S' = n.(AB + BC) - AE = \frac{2nd}{\cos \theta'} - \sin \theta.2d \tan \theta' = 2nd \cos \theta' \quad (1.5)$$

$$\delta' = \pi + \Delta S' \cdot \frac{2\pi}{\lambda_0} = \pi + \frac{4\pi.nd\nu}{c_0} \cdot \cos \theta' \quad (1.6)$$

Note :

Les plus fortes caractéristiques du filtre sont obtenues lorsque tous les faisceaux multiples sont collectés par les Lentilles.

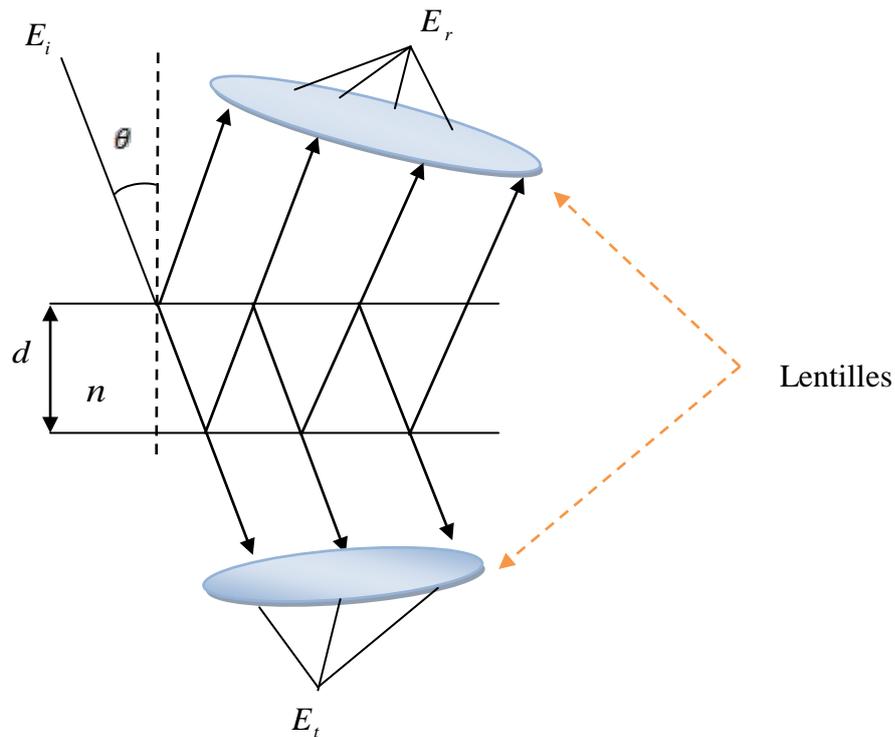


Figure.1.2 Interféromètre Fabry-Pérot

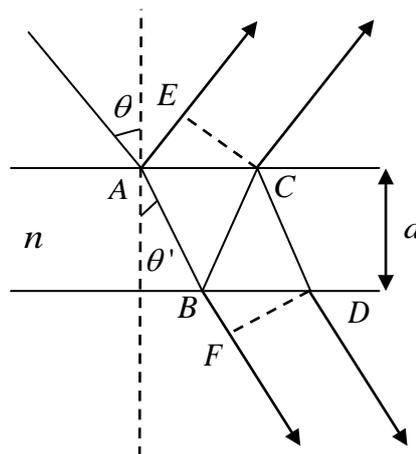


Figure.1.3 Différence de marche optique entre le rayon transmis et réfléchi

- **Calcul de l'intensité**

Le coefficient de transmission en intensité T_{FP} du filtre de Fabry-Pérot, défini comme le rapport de l'intensité de la lumière transmise et l'intensité lumineuse incidente, suit la fonction d'Airy comme [1], [3].

$$T_{FP} = \frac{I_t}{I_i} = \frac{E_t E_t^*}{E_i E_i^*} = \frac{T_0}{1 + \left\{ \frac{2}{\pi} F_R \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \right\}^2} \quad (1.7)$$

La finesse F_R et le coefficient de transmission maximale T_0 sont respectivement :

$$F_R = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} \quad (1.8)$$

$$T_0 = \frac{T^2}{(1-R)^2} = \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2} = 1 \quad (1.9)$$

où $R = |r|^2$ est le coefficient de réflexion en intensité, $T = |t|^2$ le coefficient de transmission en intensité.

De même, le coefficient de réflexion en intensité du filtre Fabry-Pérot, défini comme le rapport de l'intensité de lumière réfléchie et l'intensité lumineuse incidente, est

$$R_{FP} = \frac{I_r}{I_i} = \frac{E_r E_r^*}{E_i E_i^*} = \frac{R_0 + \left\{ \frac{2}{\pi} F_R \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \right\}^2}{1 + \left\{ \frac{2}{\pi} F_R \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \right\}^2} \quad (1.10)$$

avec le coefficient de réflexion minimale :

$$R_0 = 0 \quad (1.11)$$

et comme le milieu entre les plaques est sans perte

$$T_{FP}(v) + R_{FP}(v) = 1 \quad (1.12)$$

La réponse en intensité du Fabry-pérot est montrée sur la figure suivante.

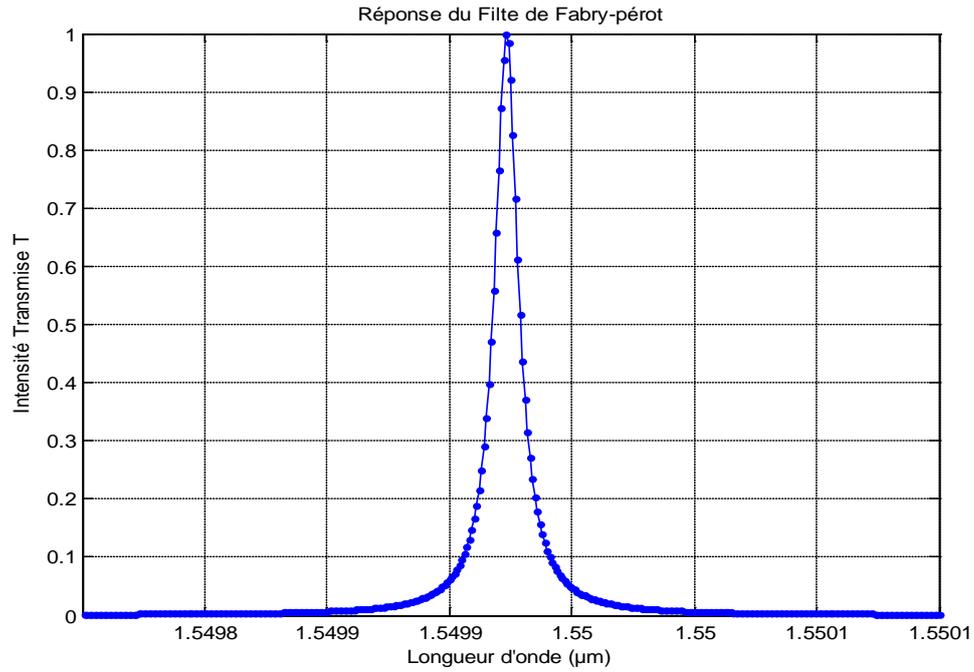


Figure.1.4 Réponse du filtre de Fabry-pérot

La figure suivante (fig.1.5) montre la réponse en longueur d'onde du coefficient de transmission en intensité pour différentes valeurs de R .

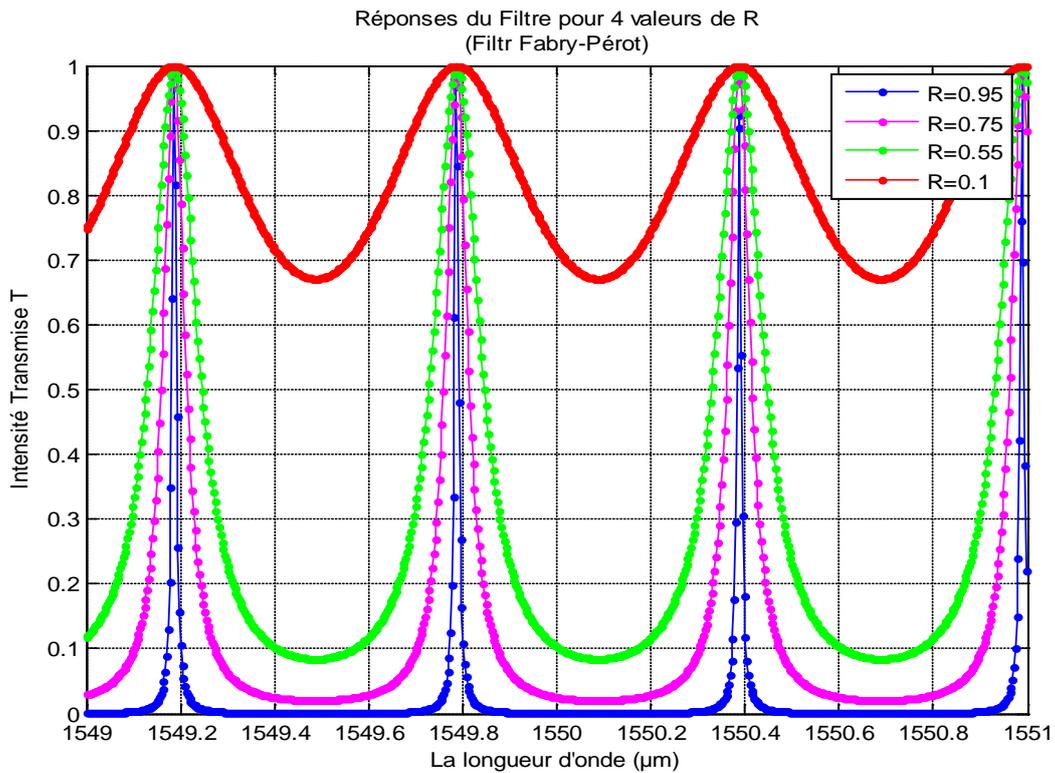


Figure.1.5 Réponses du filtre de Fabry-Pérot pour différentes valeurs de R

Tableau.1.1 Variation de la finesse en fonction de coefficient de réflexion

Coefficient de réflexion R	0.1(10 %)	0.55(55%)	0.75(75%)	0.95(95%)
La Finesse F_R	1.1	5.17	10.87	61.20

D'après le tableau ci-dessus (tab.1.1), on remarque que si le coefficient de réflexion R tend vers 1, la finesse est plus élevée, donc notre filtre est plus sélectif mais la forme de notre réponse reste inchangée (voir fig.1.5).

1.2.1.3 Applications

Dans les réseaux de transmission multi-longueur d'ondes, les canaux de longueurs d'onde peuvent être sélectionnés aux nœuds intermédiaires. Cette opération peut être assurée par le filtre Fabry-Pérot comme indiqué sur la Figure (fig.1.6) [1].

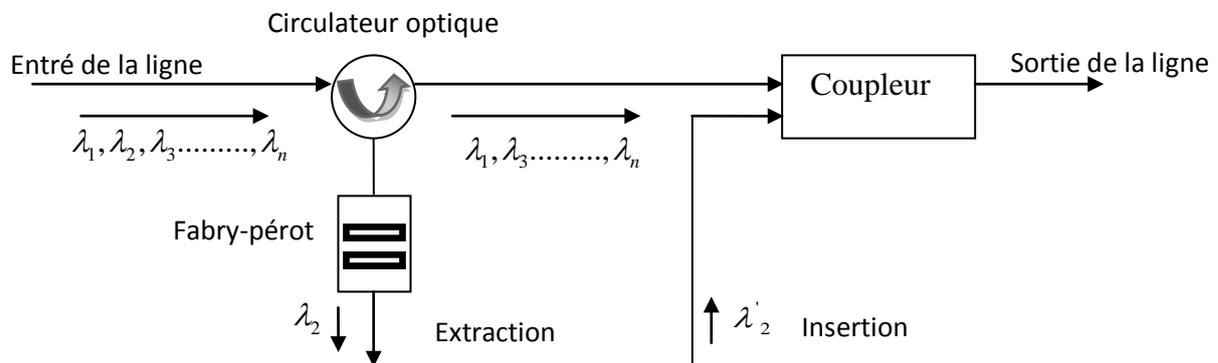


Figure.1.6 Filtre Fabry-Pérot dans un multiplexeur optique à insertion/extraction (OADM)

On constate que le filtre Fabry-Pérot laisse passer le canal sélectionné λ_2 vers une utilisation locale et reflète le reste de longueurs d'ondes vers l'entrée de coupleur via le circulateur. Au niveau du coupleur, un autre signal de données qui a la même longueur d'onde λ'_2 peut être rajouté.

Une autre application du filtre Fabry-Pérot est dans le multiplexeur/démultiplexeur, où on peut faire une séparation chromatique sur une ligne de transmission à fibre optique. La solution adoptée sur certains dispositifs est le dépôt du filtre sur l'extrémité d'une fibre optique (fig.1.7 et fig.1.8) [7].

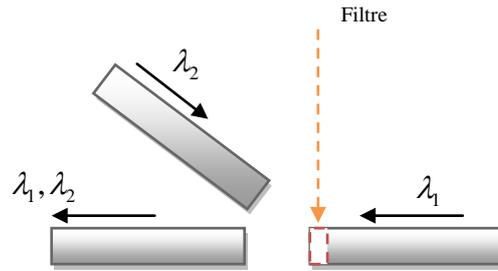


Figure.1.7 Multiplexeur à filtre optique

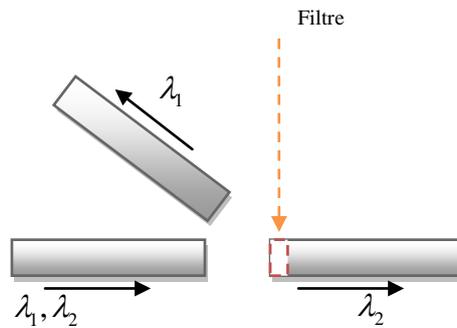


Figure.1.8 Démultiplexeur à filtre optique

1.2.2 Filtre à base de réseau de Bragg

1.2.2.1 Principe

Le multiplexage de plusieurs longueurs d'onde sur une fibre (WDM) permet non seulement d'accroître la capacité des lignes, mais facilite aussi la redistribution du signal. Pour cela la technologie des réseaux de Bragg se révèle d'un grand intérêt.

Le réseau de Bragg consiste en une variation périodique de l'indice de réfraction du cœur de la fibre s'il s'agit d'un réseau de Bragg sur fibre ou bien de l'indice de réfraction du guide s'il s'agit d'un réseau de Bragg sur guides d'onde qui sont les milieux dans lequel se propage le signal [3].

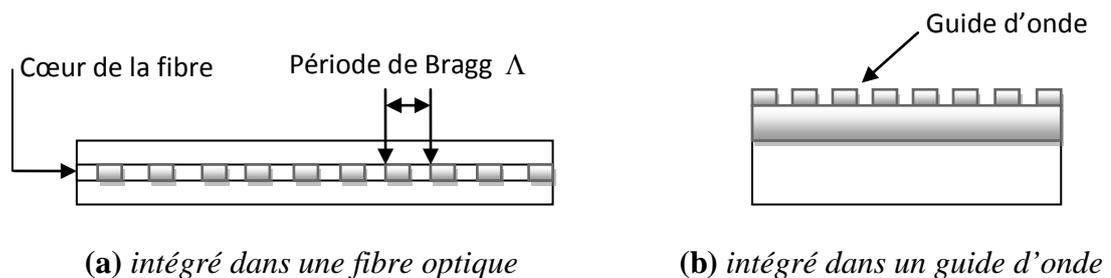


Figure.1.9 Réseau de Bragg

Le réseau de Bragg peut être envisagé comme un réseau de diffraction qui diffracte la lumière du mode aller vers le mode retour.

La condition pour avoir une diffraction dans le mode retour est appelée condition de Bragg voir (fig.1.10). Afin que la lumière soit diffractée de façon efficace dans la direction opposée, les réflexions issues de chaque période élémentaire doivent être en interférence constructive Ceci veut dire que la période de Bragg Λ , doit satisfaire la relation :

$$\Lambda = \frac{\lambda_B}{2n_{eff}} \quad (1.13)$$

où Λ est la période de la modulation d'indice, n_{eff} l'indice effectif de la fibre et λ_B la longueur d'onde de Bragg.

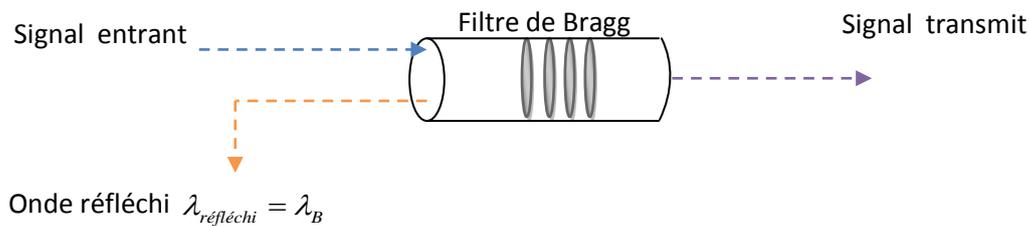


Figure.1.10 Principe du filtre de Bragg

1.2.2.2 Théorie des Modes Couplés

La modélisation du réseau de Bragg autour de la longueur d'onde de Bragg peut être réalisée par la méthode des modes couplés, dans laquelle le réseau est considéré comme une perturbation du guide d'onde seul. On considère que l'effet de cette perturbation est de transférer une partie de l'énergie se propageant dans un sens vers l'autre sens de propagation. On considère de plus qu'il existe en tout point du guide de Bragg deux ondes : l'une se propageant dans le sens positif et l'autre dans le sens négatif, selon l'axe z . Ces champs peuvent s'écrire respectivement sous la forme [8-14]:

$$\begin{aligned} E_1(x, y, z, t) &= E(x, y)A(z)e^{i(\omega t - \beta z)} \\ E_2(x, y, z, t) &= E(x, y)B(z)e^{i(\omega t + \beta z)} \end{aligned} \quad (1.14)$$

où β représente la constante de propagation, $\beta = 2\pi n_{eff} / \lambda$ et ω la pulsation temporelle de l'onde. $E(x, y)$ est le champ normalisée dans le plan transverse à la direction de propagation de l'onde. Les termes $A(z)$ et $B(z)$ dénommés amplitudes complexes correspondent aux variations spatiales de l'amplitude et de la phase des champs électriques introduites par la perturbation. Ces variations sont considérées comme lentes par rapport à la longueur d'onde des champs électriques.

Les équations gouvernant l'évolution des amplitudes :

$$\frac{dA(z)}{dz} = ikB(z) \exp[-i(2\beta - 2\pi/\Lambda)z] \quad (1.15)$$

$$\frac{dB(z)}{dz} = -ikA(z) \exp[i(2\beta - 2\pi/\Lambda)z] \quad (1.16)$$

Avec :

k : Le coefficient de couplage

$$k = \pi \Delta n_{\text{mod}} / \lambda \quad (1.17)$$

Δn_{mod} : La composante modulée de l'indice de réfraction

Pour résoudre les équations (1.15) et (1.16), une méthode consiste à effectuer le changement de variable :

$$\begin{aligned} \dot{A} &= A \exp(i\Delta.z) \\ \dot{B} &= B \exp(-i\Delta.z) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Cette transformation permet d'obtenir les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{A}(z)}{dz} &= -ik\dot{B}(z) + i\Delta\dot{A}(z) \\ \frac{d\dot{B}(z)}{dz} &= ik\dot{A}(z) - i\Delta\dot{B}(z) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Les solutions de ce système s'écrivent :

$$\dot{A}(z) = X \frac{\Delta - i\gamma}{k} \exp(\Gamma z) + Y \frac{\Delta + i\gamma}{k} \exp(-\Gamma z) \quad (1.20)$$

$$\dot{B}(z) = X \exp(\Gamma z) + Y \exp(-\Gamma z) \quad (1.21)$$

où Γ vaut $\sqrt{k^2 - \Delta^2}$, X et Y sont des constantes d'intégrations fixées par les conditions aux limites. Ce modèle permet de connaître l'évolution des amplitudes propagative et contrapropagative le long du réseau, pourvu que les deux constantes d'intégrations soient définies. Les conditions aux limites nécessaires à la résolution du système d'équations (1.20, 1.21) sont résumées sur la fig1.10. L'amplitude du signal injecté dans le guide d'onde en entrée est connu : $A(0) = A_0$. La valeur de l'amplitude réfléchiée $B(0)$ est inconnue, mais l'on sait qu'il n'y a aucune puissance entrante à la sortie du réseau, soit $B(L) = 0$.

Deux conditions aux limites étant connues, nous pouvons calculer les constantes d'intégration X et Y.

$$X = \frac{kA_0}{(\Delta + i\gamma)\exp(2\gamma L) + i\gamma - \Delta} \quad (1.22)$$

$$Y = -X \exp(2\gamma L) \quad (1.23)$$

L'expression analytique de $A(z)$ et $B(z)$ est alors connue pour tout point z du réseau.

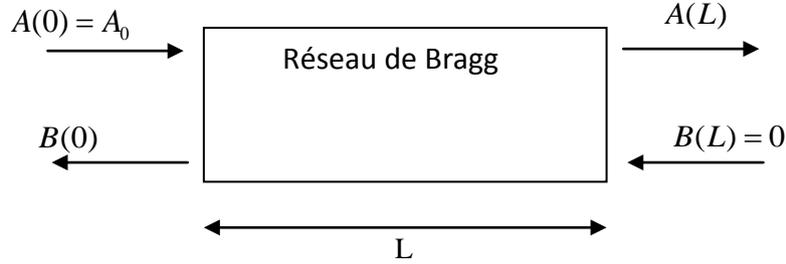


Figure.1.11 Description des conditions aux limites du problème

Il est ainsi possible de relier les amplitudes des champs en entrée et en sortie par les relations suivantes :

$$A(0) = [\cosh(\gamma L) + i\Delta\beta \sinh(\gamma L) / \gamma] e^{i\beta L} A(L) + k \sinh(\gamma L) e^{-i\beta L} B(L) \quad (1.24)$$

$$B(0) = k \sinh(\gamma L) e^{i\beta L} A(L) + [\cosh(\gamma L) + i\Delta\beta \sinh(\gamma L) / \gamma] e^{-i\beta L} B(L) \quad (1.25)$$

Il vient alors naturellement les coefficients complexes en réflexion et en transmission $t(\lambda)$:

$$r(\lambda) = \frac{B(0)}{A(0)} = \frac{k \sinh(\gamma L)}{\gamma \cosh(\gamma L) + i\Delta\beta \sinh(\gamma L)} \quad (1.26)$$

$$t(\lambda) = \frac{A(L)}{A(0)} = \frac{\gamma}{[\gamma \cosh(\gamma L) + i\Delta\beta \sinh(\gamma L)] e^{i\beta L}} \quad (1.27)$$

Les coefficients respectifs en intensité sont alors:

$$R(\lambda) = r(\lambda)r^*(\lambda) = \frac{k^2 \sinh^2(\gamma L)}{k^2 \cosh^2(\gamma L) - \Delta\beta^2} \quad (1.28)$$

$$T(\lambda) = t(\lambda)t^*(\lambda) = \frac{k^2 - \Delta\beta^2}{k^2 \cosh^2(\gamma L) - \Delta\beta^2} \quad (1.29)$$

D'après l'équation (1.15) nous pouvons remarquer que le couplage entre les modes est maximum si $\beta = 2\pi / \Lambda$. Le coefficient de couplage $k_{\lambda\beta}$ s'écrit donc :

$$k_{\lambda_B} = \pi \Delta n_{\text{mod}} / \lambda_B \quad (1.30)$$

avec λ_B la longueur d'onde de Bragg

D'où, à l'accord de phase ($\Delta\beta = 0$) :

$$R(\lambda_B) = \tanh^2(k_{\lambda_B} L) \quad (1.31)$$

$$T(\lambda_B) = \cosh^{-2}(k_{\lambda_B} L) \quad (1.32)$$

On retrouve alors les relations de base de la détermination de la réponse d'un filtre de Bragg en fonction de sa longueur et de son coefficient de couplage.

La réponse de filtre de Bragg est donnée dans la figure (fig.1.12).

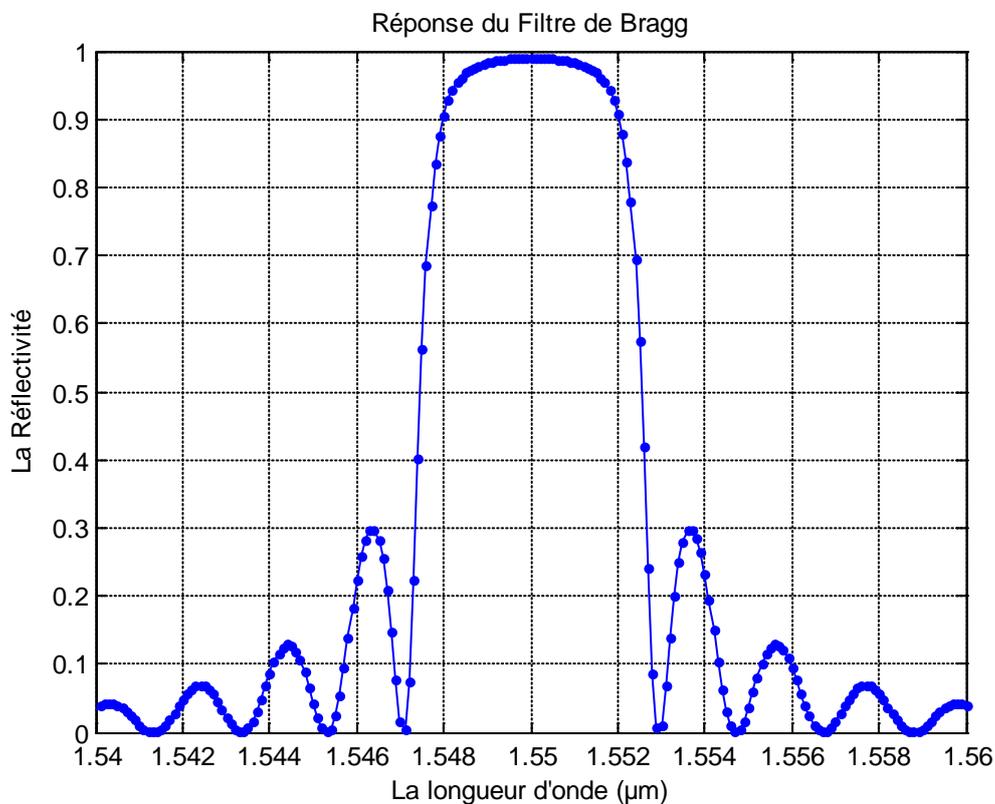


Figure.1.12 Réponse du filtre de Bragg : $kL=3$, $L=2\text{cm}$, $\lambda_B = 1.55\mu\text{m}$

Si on varie le produit κL on obtient le résultat suivant voir (fig.1.13).

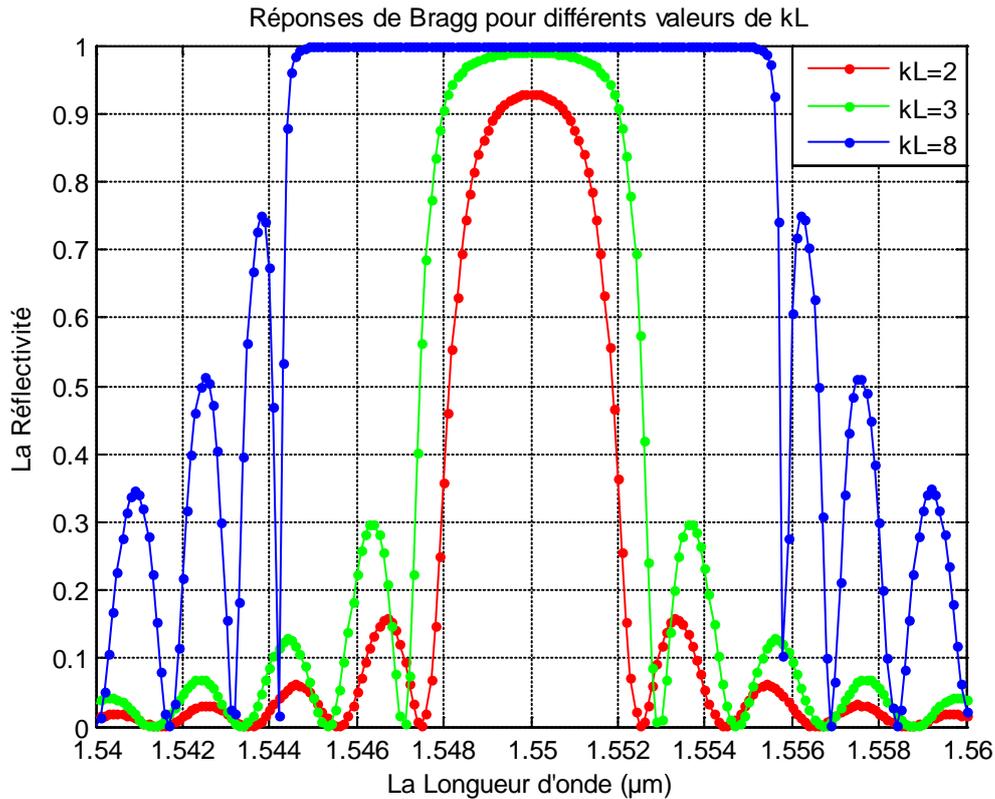


Figure 1.13 Réponses du filtre de Bragg pour différentes valeurs de κL

Il est à noter que lorsque nous augmentons la valeur du produit κL , la réflectivité du réseau augmente et peut atteindre la saturation. Notons qu'un réseau uniforme écrit à une longueur d'onde λ_B réfléchit une bande centrée à λ_B en plus d'une infinité de bandes latérales relativement plus étroites et moins puissantes.

1.2.2.3 Applications

Un OADM permet de récupérer une longueur d'onde dans un nœud donné, c'est ce que nous qualifions d'extraction de longueur d'onde. En d'autres termes, il permet d'extraire de la liaison une information transcrite sur une longueur d'onde donnée dans un nœud bien déterminé. Il permet également d'ajouter ou d'insérer une longueur d'onde supplémentaire sur le lien. Il permet donc à un nœud d'injecter des signaux à des longueurs d'onde données et de les acheminer sur le lien optique. À titre d'exemple, l'OADM de la figure (fig.1.14) est construit à l'aide d'un réseau de Bragg et de deux circulateurs optiques [1].

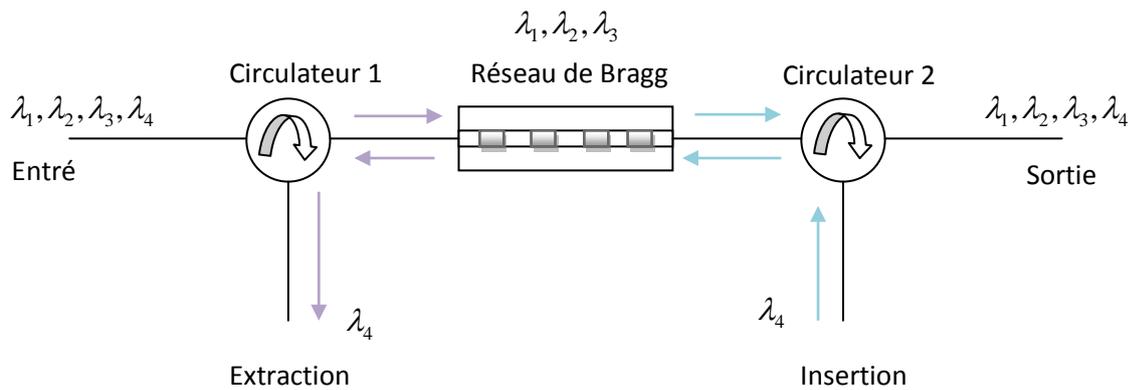


Figure.1.14 OADM à base d'un réseau de Bragg

Il faut s'assurer que la longueur d'onde insérée n'est pas utilisée sur le lien sur lequel elle est ajoutée.

1.3 Conclusion

Malgré la bonne réputation de ces filtres en WDM, leur utilisation reste toujours limitée à cause de la forme particulière de la fonction de transfert, une forme figée et bien définie.

Cette propriété n'est pas toujours recherchée car, en WDM, le besoin en filtres dont la forme de la fonction de transfert peut avoir une allure quelconque ne cesse de se faire sentir. Ce besoin sera satisfait par d'autre type de filtres qui sont les filtres biréfringents utilisant des lames biréfringents associées à des lames à cristaux liquides. Leur principe de fonctionnement est basé sur l'interférence en lumière polarisée. Ces filtres qui font l'objet de ce travail de magister seront développés dans le chapitre suivant.

Chapitre II

Filtres biréfringents

Les filtres spectraux utilisant la lumière polarisée ont été développés à l'origine pour des études astronomiques et en particulier pour l'observation de la couronne solaire avant que leur champ d'application se développe et s'étende à d'autres domaines tels que les cavités laser et bien sûr les télécommunications. Ces filtres jouent un rôle important dans divers systèmes optiques et en particulier ceux où les bandes passantes étroites et les grandes plages d'accordabilité sont nécessaires.

Ils consistent en un assemblage de lames (cristaux) biréfringentes et de polariseurs. Les filtres de LYOT (1933) et de ŠOLC (1953) constituent les deux versions de base de ce type de filtres, ils sont basés sur les interférences en lumière polarisée, qui exigent un déphasage entre les composantes de la lumière polarisée [15].

Dans ce chapitre, nous commençons par un rappel sur les phénomènes physiques clés qui régissent la technique de filtrage optique et nous exposons le modèle mathématique et physique pour les éléments biréfringents qui constituent le filtre. Ensuite, nous analysons les deux configurations de base de cette famille de filtres, à savoir la configuration de *Lyot* et celle de *Šolc*.

2.1 Propagation de la lumière dans un milieu diélectrique anisotrope

2.1.1 Définition

Un milieu diélectrique anisotrope est un milieu dont les propriétés optiques, et en particulier l'indice de réfraction, vues par une onde électromagnétique plane s'y propageant, dépendent de la direction de propagation de celle-ci. On montre que pour une direction de propagation donnée, il existe deux indices de réfraction. Ces derniers sont associés à des ondes électromagnétiques ayant des états de polarisation ou états propres qui peuvent se propager sans altération [16].

On distingue deux types d'anisotropie optique :

-Les milieux anisotropes linéaires : dont les états propres de propagation sont les états de polarisation rectiligne. Les cristaux naturels de calcite (CaCO_3) et de quartz (SiO_2) en sont un bon exemple.

-Les milieux anisotropes circulaires : dont les états propres de propagation sont les états de polarisation circulaire. Le quartz, par exemple, présente une anisotropie circulaire (en plus de son anisotropie linéaire).

Dans la suite, nous nous intéressons à l'anisotropie linéaire du fait que les composants utilisés dans ce travail jouissent de cette propriété.

2.1.2 Polarisabilité électrique des milieux diélectriques

Lorsqu'une onde électromagnétique traverse un milieu matériel, et sous l'effet du champ électrique \vec{E} il apparaît dans le matériau une polarisation électrique \vec{P} , qui dépend de \vec{E} . Les deux vecteurs ne sont pas alignés (cas d'un milieu anisotrope). La relation qui les lie est donc tensorielle à coefficients réels [17].

Le vecteur polarisation \vec{P} vérifie également :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (2.1)$$

\vec{D} : Vecteur de déplacement électrique.

ε_0 : Permittivité diélectrique de vide.

\vec{P} : Vecteur polarisation électrique.

Si le milieu présente uniquement une anisotropie linéaire et si l'onde électromagnétique est une onde plane monochromatique, caractérisée par un champ électrique \vec{E} de faible amplitude (cas de l'électromagnétisme linéaire), alors la polarisation induite s'exprime par la relation suivante

$$\vec{P} = \varepsilon_0 [x] \vec{E} \quad (2.2)$$

Ou $[x]$ est le tenseur susceptibilité électrique traduisant l'anisotropie optique linéaire du milieu. Les valeurs des termes de ce tenseur dépendent des différentes structures cristallines ou moléculaires des milieux.

Dans un repère orthonormé Oxyz, si l'on utilise la convention d'EINSTEIN pour la sommation implicite sur les indices répétés, la composante P_i ($i=x, y, z$) de la polarisation \vec{P} s'exprime par la relation :

$$P_i = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 x_{ij} E_j \quad (2.3)$$

L'induction électrique \vec{D} est telle que :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 [\varepsilon] \vec{E} \quad (2.4)$$

Ou $[\varepsilon]$ est le tenseur permittivité relative relié au tenseur $[x]$ par la relation :

$$[\varepsilon] = [I] + [x] \quad (2.5)$$

Ou $[I]$ est le tenseur identité.

Chaque terme du tenseur $[\varepsilon]$ est relié aux termes du tenseur $[x]$ par la relation :

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + x_{ij} \quad (2.6)$$

Dans laquelle δ_{ij} est le symbole de KRONECKER ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et 0 si $i \neq j$).

La permittivité électrique des matériaux étant intimement liée à la notion d'indice de réfraction, les propriétés du tenseur $[\varepsilon]$ se traduiront immédiatement par des propriétés optiques des matériaux.

Des considérations énergétiques permettent de démontrer que le tenseur $[\varepsilon]$ est symétrique, c'est-à-dire $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$. Par conséquent, il ne dépend plus que de six paramètres indépendants. Avec un changement d'axes il est possible de transformer ce tenseur réel en un tenseur diagonal réel. Le système de coordonnées cartésiennes dans lequel le tenseur est diagonal est appelé le repère propre du milieu matériel, les axes de coordonnées de ce repère sont les axes propres ou axes principaux du milieu.

Dans le repère propre, noté Oxyz, on a la relation constitutive suivante :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 [\varepsilon] \vec{E} \quad (2.7)$$

Ou $[\varepsilon]$ est maintenant un tenseur réel diagonal (pour un milieu non absorbant).

En développant cette relation symbolique, on obtient :

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Pour caractériser un milieu anisotrope linéaire non absorbant, trois coefficients sont donc nécessaires. Par analogie avec le cas des milieux isotropes, on définit les indices de réfraction principaux n_x , n_y et n_z reliés aux permittivités par la relation générale :

$$\epsilon_i = n_i^2 \quad (2.9)$$

avec $i = x, y$ ou z .

Les milieux anisotropes sont classés en deux groupes (voir tab.2.1), les milieux uniaxes et les milieux biaxes. Cette classification se fait par rapport à la propagation d'une onde électromagnétique plane et monochromatique dans ces milieux. Dans le cas des milieux anisotropes uniaxes, les indices n_o et n_e sont respectivement appelés *indice ordinaire* et *indice extraordinaire*. Seuls les milieux uniaxes seront considérés ici, car leur étude est relativement simple, leurs performances assez intéressantes et restent parmi les plus utilisés.

Tableau 2.1 Classement du milieu anisotrope

Milieu anisotrope	Tenseur des permittivités	Tenseur des indices
Milieux anisotropes uniaxes D'axe optique oz $\epsilon_x = \epsilon_y \neq \epsilon_z$	$\begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_x & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{bmatrix}$
Milieux anisotropes biaxes $\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$	$\begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{bmatrix}$

2.1.3 Equation des vitesses de phase (équation de Fresnel)

Une onde électromagnétique (OEM) qui se propage dans un milieu anisotrope est définie par (voir fig.2.1) [16 ,17].

-son vecteur déplacement électrique \vec{D} .

-son vecteur déplacement magnétique \vec{B} .

-son vecteur de propagation d'onde \vec{K} .

- son champ électrique \vec{E} .
- son champ magnétique \vec{H} .

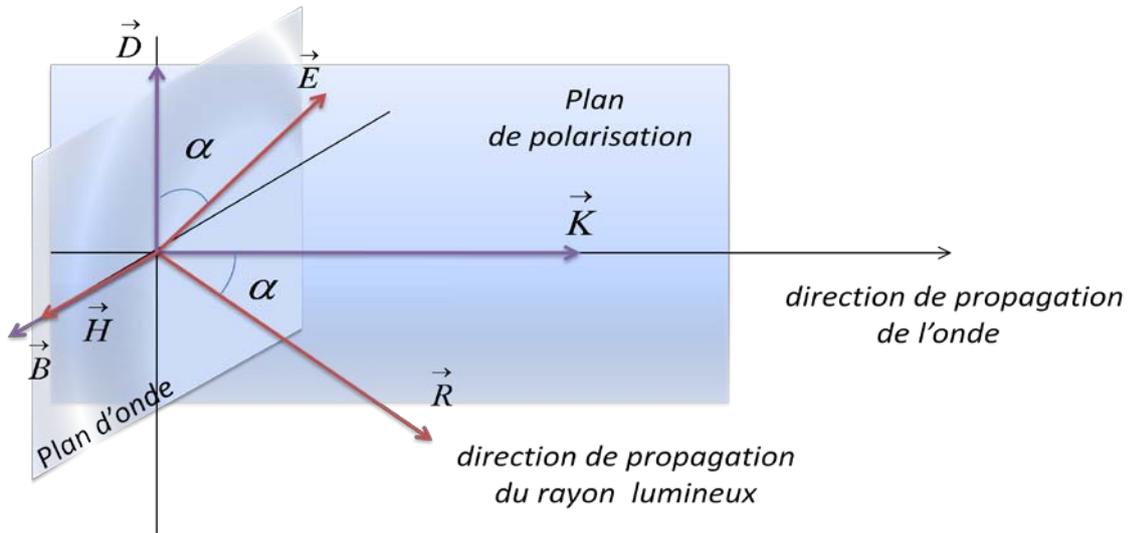


Figure 2.1 Structure d'une onde plane se propage dans un milieu anisotrope.

On choisit comme repère de l'espace la base principale $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Si une onde présente une direction de propagation donnée par \vec{K} , il est possible de décomposer ce vecteur suivant ses trois composantes dans la base principale.

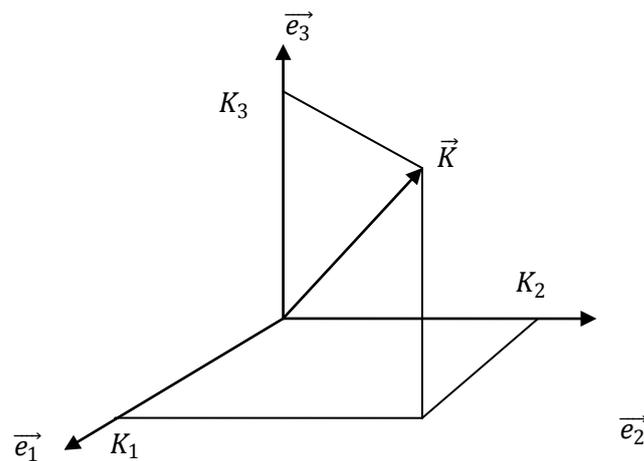


Figure.2.2 Décomposition de vecteur de propagation \vec{K}

Suivant cette direction, l'onde se propage à la vitesse v_φ , qui doit vérifier l'équation

$$\frac{k_1^2}{(v_\varphi^2 - v_1^2)} + \frac{k_2^2}{(v_\varphi^2 - v_2^2)} + \frac{k_3^2}{(v_\varphi^2 - v_3^2)} = 0 \quad (2.10)$$

ou bien

$$f(v_\varphi^2) = (v_\varphi^2 - v_2^2)(v_\varphi^2 - v_3^2)k_1^2 + (v_\varphi^2 - v_1^2)(v_\varphi^2 - v_3^2)k_2^2 + (v_\varphi^2 - v_1^2)(v_\varphi^2 - v_2^2)k_3^2 = 0 \quad (2.11)$$

Il n'y a que 2 solutions réelles v_φ' et v_φ'' à l'équation de Fresnel (fig 2.3) :

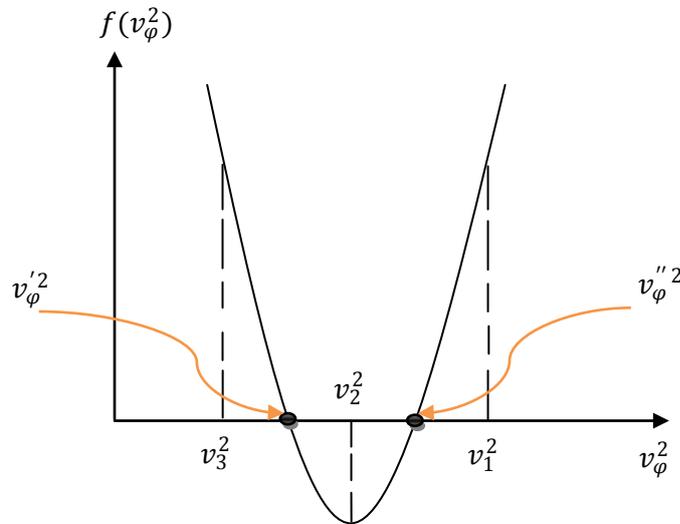


Figure.2.3 Solution de l'équation de Fresnel

Pour les deux vitesses de phase v_φ' et v_φ'' possibles, il existe deux directions de vibration possibles pour le champ électrique $\vec{e}' = \vec{E}' / \|\vec{E}'\|$ et $\vec{e}'' = \vec{E}'' / \|\vec{E}''\|$ c'est à dire également deux directions "propres" pour le vecteur déplacement $\vec{d}' = \vec{D}' / \|\vec{D}'\|$ et $\vec{d}'' = \vec{D}'' / \|\vec{D}''\|$ qui sont réelles, c'est à dire telles que la polarisation de l'onde est linéaire.

Ces deux directions \vec{d}' et \vec{d}'' définissent les lignes neutres de l'échantillon, c'est à dire les directions de polarisation pour lesquelles la lumière se propage dans le matériau comme dans un milieu isotrope avec des vitesses de phase respectives v_φ' et v_φ'' sans déformation.

D'autre part la vitesse de phase v_φ de l'onde plane, égale par définition à $v_\varphi = \frac{\omega}{K}$ où ω est la pulsation de l'onde, est reliée à l'indice normal par la relation $v_\varphi = \frac{c}{n}$. Donc, pour une direction de propagation donnée, un milieu anisotrope autorise la propagation d'une onde plane qui ne peut avoir que deux vitesses de phase possibles et doit être polarisée linéairement c.-à-d. deux indices de réfraction n' et n'' pour l'indice normal. C'est le concept de la biréfringence qui est définie comme

$$\delta n = |n' - n''| \quad (2.12)$$

2.1.4 Ellipsoïde des indices et axe optique :

- **Axe optique :**

On appelle axes optiques du milieu anisotrope, les directions de l'espace selon lesquelles une onde peut se propager dans le milieu avec une seule vitesse de phase (i.e. un seul indice).

- **Ellipsoïde des indices :**

Il est possible de construire géométriquement les deux vecteurs propres de polarisations linéaire D' et D'' et leurs indices n' et n'' , en introduisant l'ellipsoïde des indices. On note (E) la surface définie comme :

$$(E) \equiv \left\{ M, \vec{OM} = n \vec{d} \right\} \tag{2.13}$$

Considérons le vecteur $\vec{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ alors $\vec{d} = \begin{pmatrix} x/n \\ y/n \\ z/n \end{pmatrix}$ avec $\vec{d} \equiv \frac{D}{\|D\|}$

L'équation de la surface (E) dans le repère Oxyz et :

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1 \tag{2.14}$$

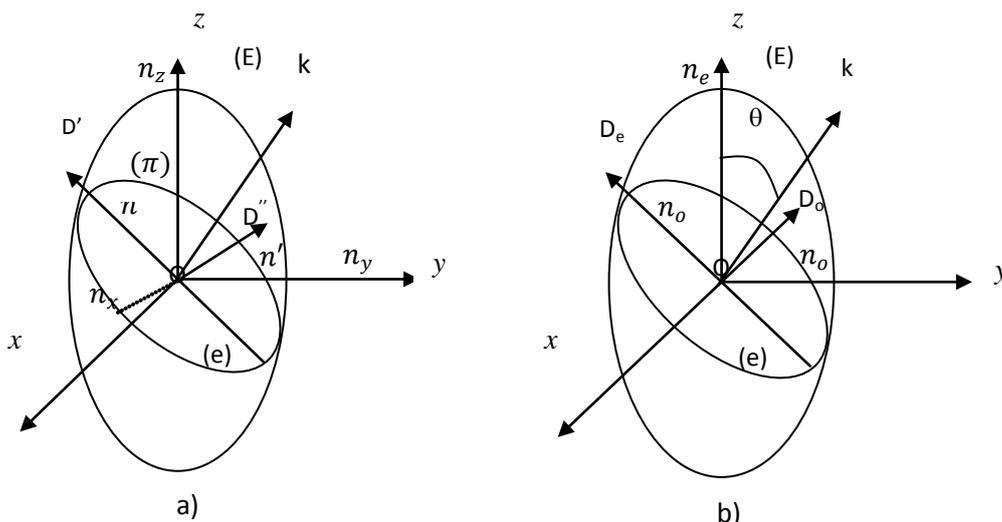


Figure 2.4: Ellipsoïde des Indices (E), plan d'onde (Π) et les différents Vecteurs D' , D'' et k .

Dans la direction du vecteur D , cet ellipsoïde des indices est ‘percé’ au point M tel que $OM = n$, l’ellipsoïde des indices (E) et le plan d’onde (π) orthogonal au vecteur d’onde k (voir fig.2.4.a). Le plan d’onde (π) coupe l’ellipsoïde des indices suivant une ellipse (e). Les vecteurs D' et D'' sont naturellement dans le plan d’onde (π). D' et D'' sont les deux états propres orthogonaux. Leurs orientations sont données par les axes de l’ellipse (e) section de l’ellipsoïde des indices (E) par le plan d’onde (π).

Dans le cas des milieux uniaxes, l’ellipsoïde des indices est un ellipsoïde de révolution autour de l’axe Oz qui est l’axe optique du milieu. Une section méridienne quelconque est décrite par une ellipse ayant pour longueur des demi-axes l’indice extraordinaire n_e sur l’axe optique et l’indice ordinaire n_o dans le plan perpendiculaire.

La figure (fig.2.4.b) montre que, quel que soit l’inclinaison θ à cause de la symétrie de révolution, la valeur de l’un des indices (par exemple n') est constant et vaut n_o valeur de l’indice ordinaire. L’état de polarisation correspondant est l’état de polarisation ordinaire D_o . La direction de l’état de polarisation D_e associé à l’onde extraordinaire est donnée par la projection de l’axe optique sur le plan d’onde. La direction de polarisation ordinaire D_o s’en déduit alors par orthogonalité. L’indice extraordinaire n_e dépend de l’angle θ et satisfait l’expression :

$$\frac{1}{n_e^2(\theta)} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} \quad (2.15)$$

Cette relation permet de calculer l’indice normal associé à l’état de polarisation extraordinaire dans un milieu uniaxe lorsque l’on connaît la direction de propagation de l’onde par rapport à l’axe optique.

Pour ce type de milieu, la biréfringence du matériau est donnée par la différence maximum des indices de réfraction, soit :

$$\delta n = |n_e - n_o| \quad (2.16)$$

Si la direction de propagation est parallèle à l’axe optique, l’ellipse section se réduit à un cercle de rayon n_o . Le milieu se comporte pour cette direction comme un milieu isotrope. Alors, n’importe quel état de polarisation se propage le long de l’axe optique sans déformation. Si la direction de propagation est perpendiculaire à l’axe optique, l’angle $\theta = \pi/2$ et l’ellipse section est une ellipse méridienne. L’indice extraordinaire est égal à l’indice extraordinaire principal n_e . L’état de polarisation extraordinaire D_e est parallèle à l’axe optique alors que l’état de polarisation ordinaire D_o lui est perpendiculaire.

L’ellipsoïde des indices représente la surface indicatrice du tenseur $[\varepsilon]$ (ou du tenseur $[n]$) et est utile dans l’étude des anisotropies induites par des champs extérieurs. En effet, l’ellipsoïde des indices se modifie légèrement sous l’action de ces champs et les nouvelles propriétés optiques du milieu sous contraintes peuvent être déduites.

2.2 Polarisation et biréfringence

2.2.1 Polarisation de la lumière

La notion de polarisation de la lumière est liée au caractère vectoriel du champ électromagnétique \vec{E} et \vec{H} associé à la propagation d'ondes lumineuses [1]. En optique, on choisit traditionnellement et par convention le champ électrique pour définir la polarisation. Pour une onde plane et monochromatique, la polarisation est associée à l'évolution temporelle du champ électrique en un point de l'espace. On définit différents états de polarisation en fonction de la forme décrite par l'extrémité de \vec{E} voir (fig.2.5) [18-22].

- Etats de polarisation linéaires lorsque l'extrémité du champ électrique décrit une droite dans le plan d'onde.
- Etats de polarisation circulaires lorsque l'extrémité du champ électrique décrit un cercle dans le plan d'onde.
- Et plus généralement, états de polarisation elliptiques lorsque l'extrémité du champ électrique décrit une ellipse dans le plan d'onde.

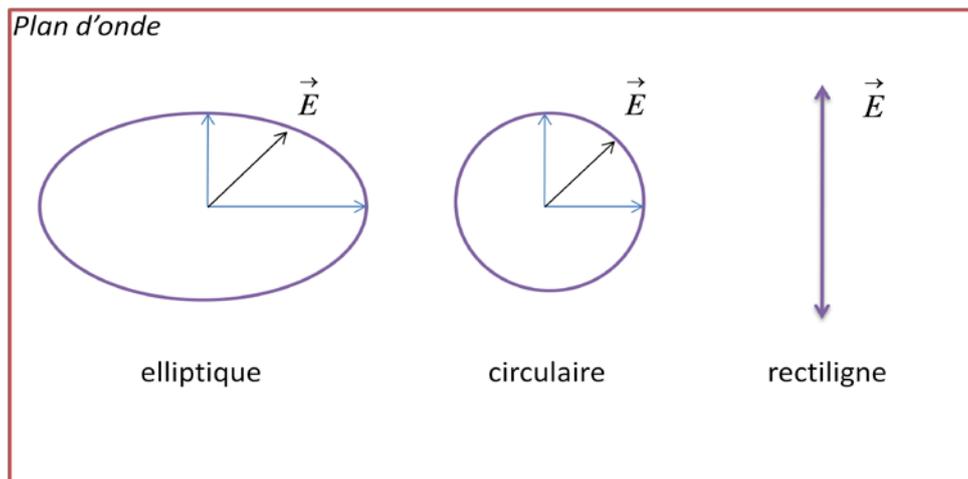


Figure.2.5 États de polarisation de la lumière

2.2.2 Interférences de la lumière

On parle d'interférences quand deux ou plusieurs ondes lumineuses se superposent, leurs amplitudes s'ajoutent, pour donner une nouvelle onde dont l'amplitude dépend du déphasage entre ces ondes. C'est le phénomène d'interférence [23,24].

Il ne peut y avoir d'interférences observables entre les ondes lumineuses que si les conditions suivantes sont respectées :

- elles sont issues d'un même point de la source, condition correspondant à la notion de cohérence spatiale.

- elles ont la même fréquence, condition correspondant à la notion de cohérence temporelle (la différence de marche des ondes qui interfèrent doit être petite devant la longueur des trains d'ondes).
- les directions de vibration de leurs vecteurs lumineux sont parallèles entre elles (ou, du moins, les composantes qui interfèrent sont parallèles).

2.2.3 Biréfringence

La biréfringence ou la double réfraction est la décomposition d'un rayon de la lumière en deux rayons, le rayon ordinaire et le rayon extraordinaire quand il traverse certains types de matériaux tels que les cristaux de calcite ou le nitrure de bore selon la polarisation de la lumière. Cet effet peut se produire seulement si le matériau est anisotrope [25]. Si le matériau a un seul axe optique (uniaxe), la biréfringence peut être définie comme la différence entre deux indices de réfraction différents.

2.3 Cas des cristaux liquides

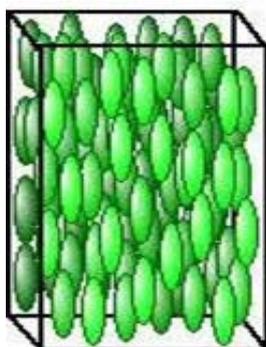
Un cristal liquide est un milieu à l'état liquide formé de molécules allongées qui peuvent s'orienter sous l'effet d'un champ électrique E . La permittivité électrique ϵ est différente selon que le champ est parallèle à l'axe des molécules ($\epsilon_{//}$) ou perpendiculaire à ce dernier (ϵ_{\perp}). En général $\epsilon_{//}$ est plus grande que ϵ_{\perp} et les molécules ont tendance à s'aligner dans la direction du champ appliqué afin de minimiser l'énergie interne électrique. Nous allons citer d'abord les principales phases des cristaux liquides [15].

2.3.1 Phases des cristaux liquides

En fonction du degré d'ordre dans lequel se trouvent les molécules, le cristal liquide peut être dans plusieurs états ou phases. Nous allons nous intéresser aux deux principales.

2.3.1.1 Phase nématique

La phase nématique du cristal liquide est caractérisée par des molécules qui n'ont pas un ordre de positionnement mais tendent à s'orienter dans la même direction Oz (suivant le directeur). Sur la Figure (fig.2.6) on peut noter que les molécules sont orientées verticalement mais ne sont pas arrangées suivant un ordre particulier.



Une représentation schématique de la phase nématique (à gauche) et une photo d'un cristal liquide nématique (en haut)

Figure 2.6. Phase nématique du cristal liquide

2.3.1.2 Phase Smectique

La phase smectique est une autre mésophase des substances cristal liquide. Dans cette phase, les molécules montrent un certain ordre transversal qui n'est pas présent dans la phase nématique. Dans cette phase, les molécules maintiennent un ordre d'orientation générale comme le nématique, mais aussi tendent à s'aligner en couches ou plans. Dans la phase smectique-A, le directeur est perpendiculaire aux plans smectiques et il n'y a aucun ordre de positionnement dans la couche (Cf. fig.2.7).

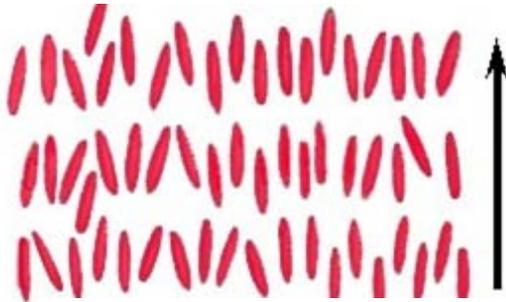


Schéma de la phase smectique-A

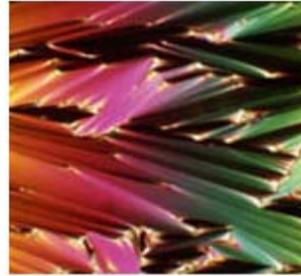


Photo de la phase smectique-A
(utilisant un microscope polarisant)

Figure.2.7 Phase smectique-A du cristal liquide

D'une façon similaire, dans la phase smectique-B, le directeur est perpendiculaire aux plans smectiques, mais les molécules sont arrangées dans un réseau d'hexagones à l'intérieur de la couche. Dans la phase smectique-C, les molécules sont arrangées comme dans la phase smectique-A, mais le directeur est incliné sous un angle de 'tilt' constant perpendiculairement aux plans smectiques (Cf. fig.2.8).



Schéma de la phase smectique-C

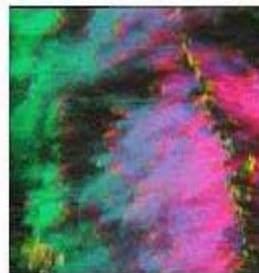


Photo de la phase smectique-C
(utilisant un microscope polarisant)

Figure.2.8 Phase smectique-C du cristal liquide

2.4 Représentation des états de polarisation de la lumière

La nature de la courbe, ellipse dans le cas général, décrite par l'extrémité du vecteur \vec{E} (induction électrique \vec{D} dans le cas des milieux anisotrope) de l'onde plane électromagnétique, conduit directement à une représentation paramétrique indépendante du temps. La représentation de l'état de polarisation la plus intuitive est la représentation algébrique liée à la courbe trajectoire. Néanmoins, la notion d'état de polarisation peut être

facilement représentée mathématiquement par un vecteur à deux composantes appelé vecteur de JONES. Cette représentation est l'une des plus utiles qui existe pour calculer l'évolution d'un état de polarisation dans un système optique.

2.4.1 Représentation algébrique :

Dans le repère orthonormé Oxy le champ \vec{E} peut s'exprimer par :

$$E_x = A_x \cos(\omega t - kz) \quad (2.17)$$

$$E_y = A_y \cos(\omega t - kz - \varphi) \quad (2.18)$$

avec $k = n.w / c$ où n est l'indice de réfraction vu par l'onde dans la direction de propagation, $\varphi = \phi_x - \phi_y$ est le déphasage entre les deux vibrations, A_x et A_y sont deux constantes réelles positives.

En manipulant ces deux équations on aura :

$$\frac{E_x^2}{A_x^2} + \frac{E_y^2}{A_y^2} - 2 \frac{E_x}{A_x} \frac{E_y}{A_y} \cos \varphi = \sin^2(\varphi) \quad (2.19)$$

Le terme $-2 \frac{E_x}{A_x} \frac{E_y}{A_y} \cos \varphi$ s'appelle le terme croisé.

- Si $\varphi = k\pi$: la polarisation est rectiligne pour laquelle le vecteur représentatif reste parallèle à une direction fixe particulière, son extrémité décrit alors une trajectoire rectiligne.
- Si $\varphi = \pi/2$ (Le terme croisé s'annule): La polarisation est elliptique, l'extrémité du vecteur représentatif décrit une ellipse.
- Si $\varphi = \pi/2$ et $A_x = A_y$: La polarisation est circulaire, dans ce cas l'extrémité du vecteur représentatif décrit un cercle.

2.4.2 Représentation de JONES

La nature vectorielle de l'état de polarisation de la lumière suggère d'utiliser une représentation vectorielle, R. C. Jones a introduit une approche matricielle dans la résolution des problèmes relatifs à la polarisation de la lumière [15].

Dans cette approche, chaque dispositif élémentaire, polariseur, déphaseur, rotateur, ...etc. est caractérisé par une matrice carrée 2×2 (opérateur linéaire). Ainsi les calculs se trouvent simplifiés. En effet, en utilisant les propriétés du calcul matriciel, il apparaîtra simplement que la transmission d'un état de polarisation à travers une succession de dispositifs biréfringents élémentaires se réduira alors à la transformation de cet état par un opérateur linéaire produit des opérateurs linéaires élémentaires.

• **Représentation du vecteur de Jones :**

A un état de polarisation d'une onde plane est associé un vecteur \mathbf{V} dit de JONES défini comme suit

$$V = \begin{pmatrix} A_x \cdot e^{j\varphi_x} \\ A_y \cdot e^{j\varphi_y} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

et qui contient l'ensemble des informations relatives à cette onde.

Ce vecteur de nature complexe peut être rapporté à des bases orthonormées particulières comme la base des états rectilignes (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) ou la base des états circulaires (\mathbf{G}, \mathbf{D}).

L'intensité I_0 du champ associé à cet état de polarisation s'exprime par le produit :

$$I_0 = V^{T*} \cdot V \quad (2.21)$$

où V^{T*} est le vecteur transposé conjugué.

Pour un état de polarisation rectiligne orienté suivant l'angle θ par rapport à l'axe Ox, son vecteur de Jones normalisé, dans le repère Oxy, est :

$$V = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

On peut lui associer son état orthogonal, qui est rectiligne et polarisé suivant la direction $\theta + \pi/2$ par rapport à l'axe Ox. Son vecteur de Jones est tel que

$$V = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Dans le cas particulier où θ vaut 0, on retrouve les états de polarisations rectilignes associés aux axes Ox et Oy (axes du laboratoire) qui s'expriment par :

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Ainsi, tout état de polarisation peut être représenté comme une superposition de deux polarisations mutuellement orthogonales.

• **Matrices de Jones :**

Les dispositifs optiques modifiant l'état de polarisation, polariseurs, déphaseurs,...peuvent être représentés par des opérateurs linéaires ayant deux vecteurs propres orthogonaux associés à deux valeurs propres, appelée matrice de Jones du dispositif. Dans ce qui suit on rappelle les matrices de Jones de quelques éléments parmi les plus rencontrés dans ce domaine.

a. Polariseurs rectilignes

Un polariseur rectiligne est un dispositif optique, biréfringent ou non, qui ne transmet qu'un état de polarisation orienté suivant une direction fixe appelée direction de passage du polariseur ou encore azimuth de transmission. Un analyseur rectiligne est fondamentalement identique à un polariseur rectiligne ; il se trouve à la sortie d'un système optique polarisant. Son nom particulier vient du fait que c'est lui qui permet d'analyser l'état de polarisation émergent.

Ces dispositifs sont caractérisés par une matrice de Jones P , exprimée dans un repère fixe Oxy. Les matrices de Jones des polariseurs dont les directions de polarisation sont respectivement les axes Ox et Oy sont données par :

$$P_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Pour un polariseur dont la direction de passage fait l'angle θ avec l'axe Ox, sa matrice de Jones s'obtient par la relation :

$$P_\theta = R(-\theta) \cdot P_x \cdot R(\theta) \quad (2.26)$$

dans laquelle $R(\theta)$ est la matrice de rotation ou matrice changement de base entre le repère du laboratoire et le repère du polariseur et elle vaut :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

d'où l'expression de P_θ :

$$P_\theta = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cdot \cos \theta \\ \sin \theta \cdot \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

b. Déphaseur (Retardation Plates ou Phase shifters)

Les lames anisotropes appelées déphaseurs ou lames à retard sont à la base d'un grand nombre de composants optiques à la fois par le déphasage qu'elles introduisent entre les ondes polarisées orthogonalement mais également dans des interféromètres. Elles sont en fait des convertisseurs des états de polarisation. Ainsi par un bon choix de lames, un état de polarisation peut être converti en un autre.

Considérons donc une lame à faces parallèles, taillée dans un milieu anisotrope linéaire uniaxe. Lorsqu'une onde plane monochromatique éclaire cette lame, deux ondes polarisées rectilignement et orthogonales entre elles émergent (*ondes propres*), une suivant l'axe lent et l'autre suivant l'axe rapide de la lame. Ces deux ondes se propagent avec deux vitesses de phase différentes.

Le déphasage introduit par la lame justifie son appellation de déphaseur, ce déphasage est fonction de la biréfringence et égal à :

$$\phi = (2\pi/\lambda) \cdot \delta n \cdot e \quad (2.29)$$

où δn représente la biréfringence de la lame et vaut :

$$\delta n = n_o - n_e \quad (2.30)$$

Soit $Oxyz$ le repère du laboratoire où Oz est la direction de propagation. La lame est placée perpendiculairement à l'axe Oz . Les lignes neutres font l'angle θ avec les axes Ox et Oy du repère du laboratoire (Cf. figure 2.9). Les lettres **F** et **S** de la figure désignent les axes « rapide », (*F pour fast*), et « lent », (*S pour slow*) de la lame, respectivement

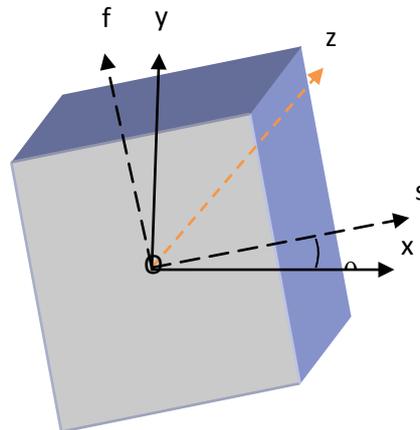


Figure 2.9 : Lame biréfringente placée perpendiculairement à l'axe de propagation Oz .

On considère une vibration lumineuse incidente ayant l'état de polarisation représenté par le vecteur de Jones suivant

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

où V_x et V_y sont deux nombre complexes. Pour déterminer comment la lumière se propage dans cette lame à retard, on a besoin de décomposer la lumière en combinaison linéaire des deux ondes « lente » et « rapide » du cristal. Ceci est effectué par la transformation des coordonnées suivante

$$\begin{pmatrix} V_S \\ V_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

V_S est la composante lente du vecteur de polarisation V , tandis que V_F en est la composante rapide.

Les axes rapide et lent sont propres au cristal. Chacune des composantes lente et rapide se propage avec sa propre vitesse de phase et sa propre polarisation. Le retard de phase qui en découle change l'état de polarisation de rayon émergent. Soit n_s et n_f les indices de réfraction des composantes lente et rapide. L'état de polarisation du rayon émergent exprimé dans le système de coordonnées (Osf) est donnée par

$$\begin{pmatrix} V'_S \\ V'_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-jn_s(w/c)e} & 0 \\ 0 & e^{-jn_f(w/c)e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_S \\ V_F \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

où e est l'épaisseur de la lame et w la pulsation de l'onde électromagnétique. Le retard de phase est donné par la différence des exponentiels dans l'équation (2.33) et est égal à

$$\varphi = (n_s - n_f)we/c \quad (2.34)$$

Comme la biréfringence typique d'un cristal composant une lame à retard est faible, alors $|n_s - n_f| \leq n_s, n_f$. Le changement de phase absolu Γ est donné par :

$$\Gamma = \frac{1}{2}(n_s + n_f)we/c \quad (2.35)$$

Alors, l'équation (2.33) peut être écrite avec les grandeurs φ et Γ comme suit :

$$\begin{pmatrix} V'_S \\ V'_F \end{pmatrix} = e^{-j\Gamma} \begin{pmatrix} e^{-j\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{j\varphi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_S \\ V_F \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Le vecteur de Jones de l'état de polarisation du rayon émergent exprimé dans le système de coordonnées x, y est donné par la transformation inverse du système de coordonnées S, F :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_x' \\ \mathbf{V}_y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_s' \\ \mathbf{V}_f' \end{pmatrix} = \mathbf{R}(-\theta) \begin{pmatrix} \mathbf{V}_s' \\ \mathbf{V}_f' \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

Par combinaison des équations (2.32), (2.36) et (2.37), on peut écrire la transformation due à la lame retardatrice comme suit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_x' \\ \mathbf{V}_y' \end{pmatrix} = \mathbf{R}(-\theta) \mathbf{W}_0 \mathbf{R}(\theta) \begin{pmatrix} \mathbf{V}_x \\ \mathbf{V}_y \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

où $\mathbf{R}(\theta)$ est la matrice de rotation et \mathbf{W}_0 est la matrice de Jones de la lame à retard exprimée dans le système de coordonnées propre Osf telle que:

$$\mathbf{W}_0 = e^{-j\Gamma} \begin{pmatrix} e^{-j\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{j\varphi/2} \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Le facteur $e^{-j\Gamma}$ peut être négligé si l'on s'intéresse au calcul des intensités et si les effets des interférences ne sont pas importants ou observables.

Une lame à retard est caractérisée par le retard de phase φ et par l'angle θ entre ses axes propres et le repère du laboratoire. Elle est représentée par le produit de trois matrices

$$\mathbf{W} = \mathbf{R}(-\theta) \mathbf{W}_0 \mathbf{R}(\theta) \quad (2.40)$$

c. Exemple : Lame à retard demi-onde ou $\frac{\lambda}{2}$

Une lame à retard est demi-onde si elle introduit un retard de phase $\varphi = \pi$. La différence de marche optique (optical path difference, OPD) est par conséquent égal à :

$$(n_s - n_f) \cdot e = \frac{\lambda}{2} \quad (2.41)$$

Si la lame à retard est orientée suivant un angle $\theta = 45^\circ$ et la vibration incidente est polarisée suivant Oy

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

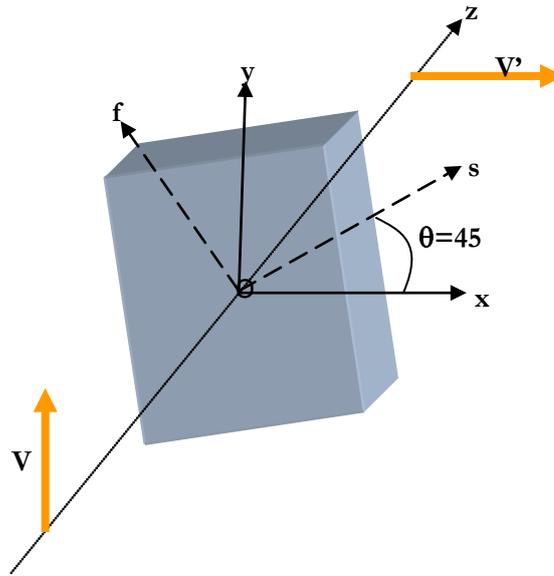


Figure 2. 10 : lame orientée suivant un angle $\theta = 45^\circ$ par rapport aux axes du laboratoire.

Alors, la matrice de Jones de la lame demi-onde est obtenue en utilisant les équations (2.38) et (2.40)

$$W = R(-45^\circ) \begin{pmatrix} e^{-j\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{+j\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} R(45^\circ) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

donc :

$$W = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2j \\ -2j & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ -j & 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur émergent V' est donné par :

$$V' = W \cdot V = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ -j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -j \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La vibration émergente est polarisée rectilignement suivant Ox. En général, on peut montrer qu'une lame demi-onde transforme une vibration incidente polarisée rectilignement et orientée à θ de ses lignes neutres en vibration émergente polarisée rectilignement mais orientée à 2θ de la première [15].

2.5 Filtres biréfringents

Comme mentionné en introduction, les filtres biréfringents consistent en un assemblage de lames biréfringentes et de polariseurs. Les filtres de Lyot et de Šolc constituent les deux versions de base de ce type de filtres. Ils sont basés sur les interférences en lumière polarisée qui exigent un déphasage (retard de phase) entre les composantes de la lumière polarisée.

Dans cette partie, nous rappelons dans un premier temps le phénomène clé qui gouverne cette technique de filtrage et les éléments qui constituent le filtre. Dans un deuxième temps, une analyse des deux configurations de bases de cette famille de filtres, à savoir la configuration de Lyot et celle de Šolc sera faite.

2.5.1 Intensité à la sortie d'une lame biréfringente entre Polariseur/Analyseur

L'étude de la propagation de la lumière à travers une lame, placée entre polariseur/analyseur est indispensable pour analyser les filtres biréfringents. Elle montre que l'intensité lumineuse transmise est fonction du déphasage entre les deux vibrations lumineuses. Elle évolue entre deux extremums. On parle alors d'interférences en lumière polarisée

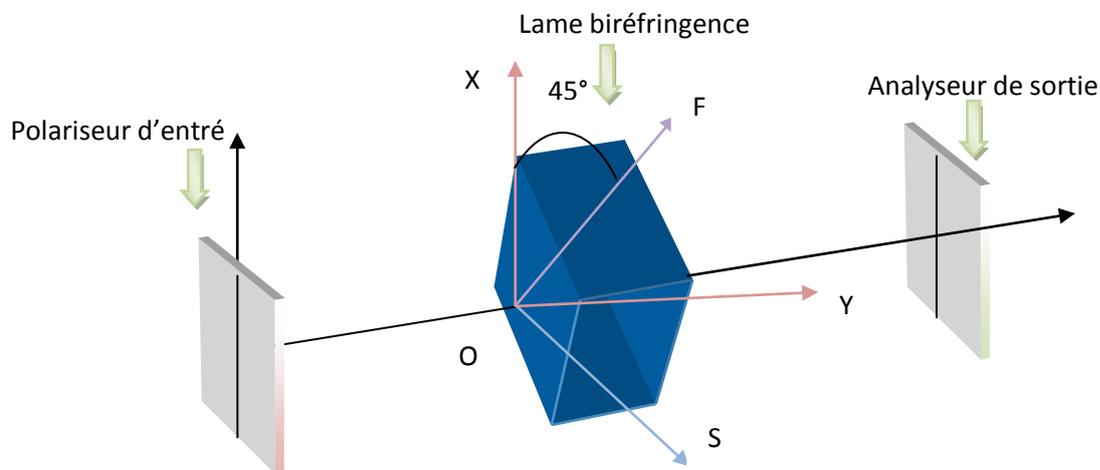


Figure.2.11 lame biréfringente entre analyseur et polariseur

Si les axes propres d'une lame à retard d'épaisseur e sont orientés selon un angle $\theta=45^\circ$ par rapport à la polarisation incidente et si les polariseur/analyseur sont parallèles, alors les règles classiques d'interférences montrent que dans ce cas l'intensité lumineuse transmise par le système dans la direction normale à la lame est donnée par

$$I_{\parallel} = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi\Delta}{\lambda}\right) \quad (2.42)$$

où $\Delta = \delta n \cdot e$ est la différence de marche optique introduite par la lame ayant une biréfringence δn , I_0 étant une constante. Si on tourne l'analyseur de 90° , l'intensité transmise dans ce cas est donnée par

$$I_{\perp} = I_0 \sin^2\left(\frac{\pi\Delta}{\lambda}\right) \quad (2.43)$$

2.5.2 Filtres biréfringents

Le fait que la transmission d'un déphaseur placé entre polariseur/analyseur croisés (ou parallèles) et orientés à 45° des axes propres du cristal dépende du nombre d'onde ($1/\lambda$) de la lumière incidente, suggère la réalisation de filtres spectraux biréfringents [16]. Plusieurs types de filtres ont été réalisés à partir de cette remarque. Le paragraphe qui suit analyse le fonctionnement de deux types de filtres, les filtres de Lyot et de Šolc.

2.5.2.1 Filtre biréfringent de Lyot :

Le premier filtre monochromatique biréfringent a été réalisé par Lyot en 1933. Il permettait d'isoler une région spectrale de 1 Angström dans le vert [26]. Ce filtre spectral est constitué d'un ensemble de N lames biréfringentes de même biréfringence δn , dont les épaisseurs respectives sont égales à $e, 2e, 4e, \dots, 2^{n-1}e$, et dont les lignes neutres sont parallèles entre elles, séparées par des polariseurs rectilignes dont les directions de transmission, toutes identiques, sont orientées à 45° des lignes neutres des lames [16,26] (Cf. fig.2.12).

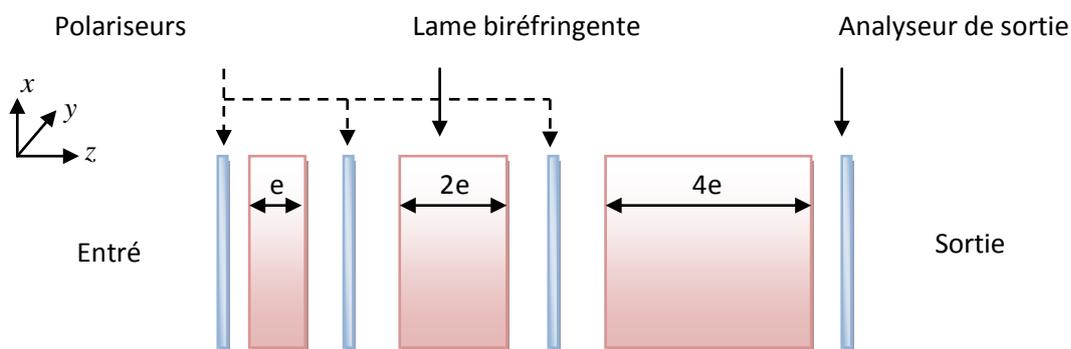


Figure.2.12 Structure du filtre de Lyot à 3 étages

Nous avons vu qu'une lame biréfringente placée entre polariseurs parallèles et éclairée par une lumière de longueur d'onde λ transmet une intensité lumineuse dont l'expression s'écrit [16].

$$I = I_0 \cos^2\left(\pi * \frac{\Delta}{\lambda}\right)$$

Le principe du filtre de Lyot est simple à mettre en évidence. Il s'agit d'utiliser une cascade d'interféromètres à deux ondes, d'épaisseurs convenables, pour la transmission d'une longueur d'onde particulière. Un filtre sélectif en longueur d'onde peut, alors, être réalisé. Sur la figure 2.13, nous avons représenté la fonction de transmission du filtre de Lyot à trois étages. Elle est obtenue en multipliant les réponses des trois interféromètres placés en cascade. La fonction de transmission de chacun des interféromètres doit alors posséder un maximum autour d'une même longueur d'onde (Cf. $\lambda_0 = 1.55\mu\text{m}$ sur la figure (fig.2.13)). Ceci est rendu possible lorsque les lames biréfringentes ont des épaisseurs respectives égales à $e, 2e, 4e, \dots, 2^{n-1}e$, où e représente l'épaisseur de la lame la plus mince.

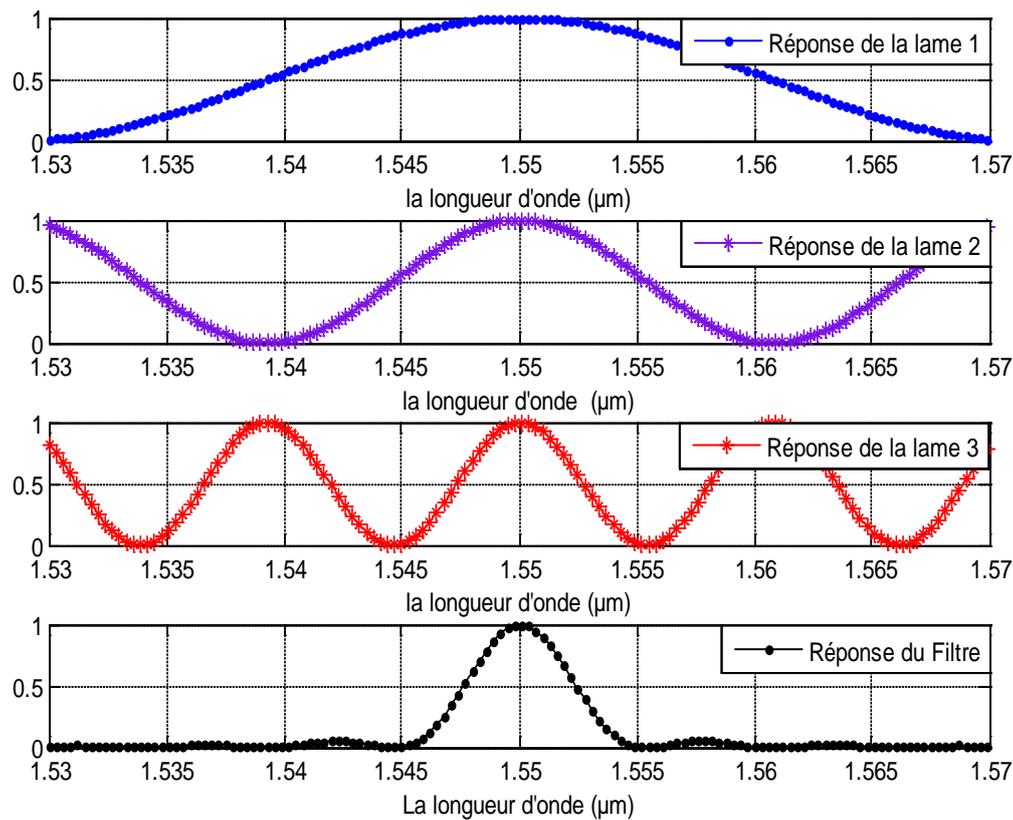


Figure.2.13 Composition de La réponse du filtre de Lyot

Le formalisme de Jones est l'outil le plus adapté pour l'analyse de ce genre de structures [16]. En effet si $M^{(k)}$ est la matrice de Jones de la lame d'ordre k et P celle d'un des polariseurs, la matrice de Jones d'un empilement de N étages s'exprime, alors, par :

$$M = P.M^{(N)}.P \dots P.M^{(2)}.P.M^{(1)}.P = \prod_{K=1}^N P.M^{(k)}.P \quad (2.44)$$

Avec :

$$\mathbf{M}^{(k)} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\phi_k}{2} & j \cdot \sin \frac{\phi_k}{2} \\ j \cdot \sin \frac{\phi_k}{2} & \cos \frac{\phi_k}{2} \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

$$\text{Et } \phi_k = 2\pi \delta n \cdot e \cdot 2^{k-1} / \lambda \quad (2.46)$$

ϕ_k : déphasage introduit par la lame d'ordre k

L'intensité transmise, pour une structure de Lyot, s'exprime alors par [18].

$$I_t = \frac{I_0}{2} \left[\frac{1}{2^N} \cdot \frac{\sin(2^N \frac{\phi}{2})}{\sin(\frac{\phi}{2})} \right]^2 \quad (2.47)$$

ϕ étant le déphasage introduit par la première lame (*la plus mince*)

On remarque que l'intensité est maximale pour $\Delta = \delta n \cdot e = k\lambda$. (k est un entier). Ainsi les lames biréfringentes devant constituer le filtre doivent être des lames **ondes** (*leur épaisseur optique $\Delta = \delta n \cdot e$ doit être multiple de λ*). Bien sûr, les lames ne sont des lames ondes que pour une seule longueur d'onde (ou un nombre discret de longueurs d'onde). Lorsqu'on s'éloigne de cette longueur d'onde, la transmission “ chute ” et l'effet du filtrage spectral apparaît.

La figure (fig.2.14) montrent que les paramètres caractéristiques du filtre sont fonctions du nombre d'étages. En effet si le nombre d'étages augmente, le spectre des lames placées entre polariseurs parallèles est donné par le produit de chacune des lames, et par conséquent la bande passante devient de plus en plus petite alors que la finesse augmente. D'autre part, le niveau des lobes secondaires devient de plus en plus faible. Par conséquent, on élimine, ou du moins on réduit, les perturbations induites par les canaux adjacents.

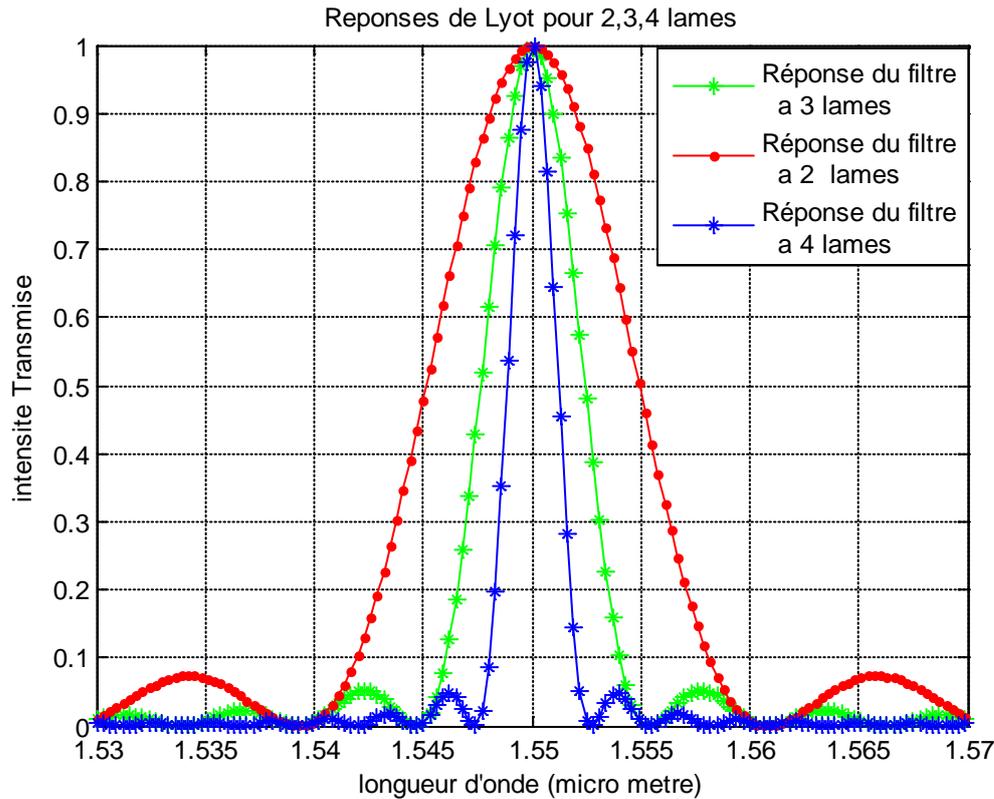


Figure.2.14 Réponses de Lyot pour 2 ,3 et 4 lames

2.5.2.2 Filtre biréfringent de Šolc :

Mis en œuvre par Ivan Šolc en 1953, le filtre, qui porte son nom, est constitué d'un empilement de lames biréfringentes, toutes de même épaisseur. L'ensemble est placé entre polariseur/analyseur parallèles ou croisés selon les configurations proposées [16]. Son principal avantage est son minimum de pertes d'insertion puisqu'il n'utilise que deux polariseurs sachant que chaque polariseur ajouté introduit des pertes supplémentaires.

Selon les orientations des lames, deux arrangements sont possibles. Ils sont appelés respectivement le filtre en éventail (*fan*) et le filtre alterné (*folded*). Chaque étage de ce dernier est constitué de deux lames orientées respectivement suivant les angles $(+\theta)$ et $(-\theta)$. Le nombre total N de lames est, alors, pair (Cf. figure 2.15-haut). Tandis que, dans l'arrangement en éventail, les lames sont orientées respectivement suivant $\theta, 3\theta, 5\theta, \dots, (2N-1)\theta$ par rapport à l'axe du polariseur (Cf. figure 2.15-bas).

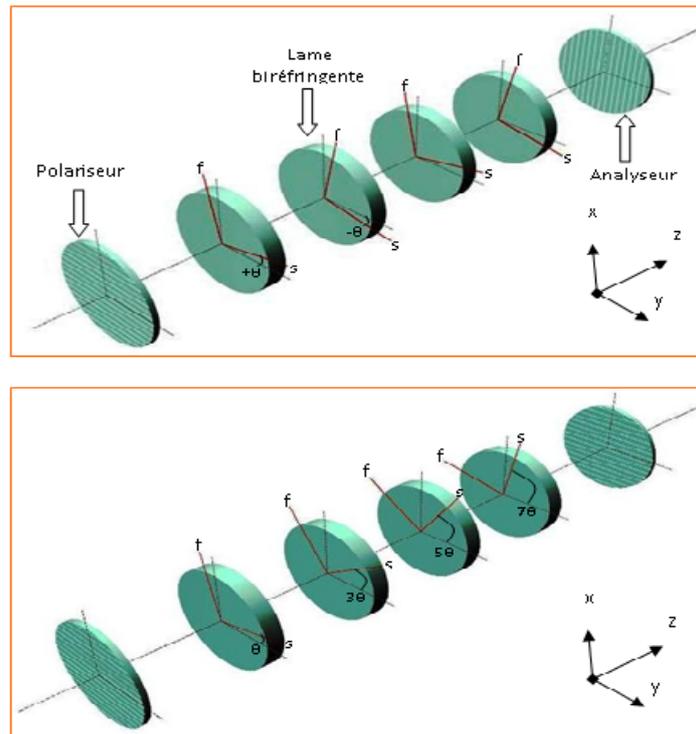


Figure.2.15 Filtre de Šolc alterné (haut) et en éventail (bas) constitué de N lames (N = 4).

En utilisant le formalisme de Jones et en reprenant la même démarche que celle utilisée dans le cas du filtre de Lyot, l'intensité transmise s'écrit [15] :

$$I_t = \frac{I_0}{2} \left[\tan(2\theta) \cos(\chi) \frac{\sin(N\chi)}{\sin(\chi)} \right] \quad (2.48)$$

Avec : $\cos(\chi) = \cos(2\theta) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$ pour le filtre en éventail

$\cos(\chi) = \cos(2\theta) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$ pour le filtre alterné

Ces expressions montrent que les transmissions des deux filtres, qui sont très analogues à celle du Lyot, sont décalées d'une demi-période. En d'autres termes, la transmission maximum du filtre en éventail est obtenue quand toutes les lames sont des **lames ondes** alors que pour le filtre alterné cela se produit quand les lames sont **demi-ondes** (épaisseur optique $\Delta = \delta n.e$ doit être multiple impaire $\lambda/2$). L'angle θ vaut $\theta = \frac{45^\circ}{N}$ pour les deux configurations. La figure 2.16 illustre la fonction de transmission de trois filtres de Šolc alternés constitués de 2, 3 et 4 étages, respectivement.

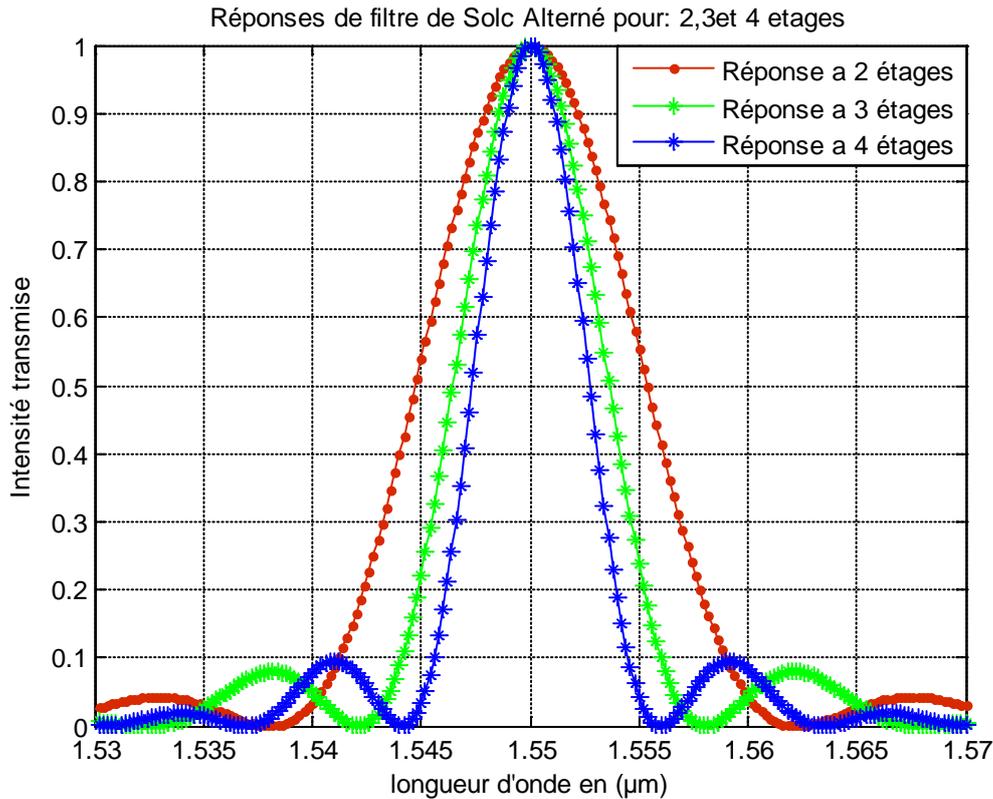


Figure 2.16 : Réponses de Solc alterné pour 2 ,3 et 4 étages

Les résultats de simulation montrent que le niveau des lobes secondaires est plus élevé dans le cas du filtre de Šolc que dans celui du *Lyot* et qu'avec l'augmentation du nombre d'étage dans le filtre de Šolc, la bande passante diminue mais le niveau des lobes secondaires augmente, ce qui par conséquent réduit le contraste de la fonction de filtrage. Donc l'ajout d'un étage dans une structure Šolc n'assure pas forcément l'obtention d'un meilleur filtre si on prend le contraste comme seul critère.

2.6 Conclusion

Le filtre de Šolc et celui du *Lyot*, comme les autres filtres optiques, trouvent des applications dans les réseaux optiques. Cependant, eux aussi présentent des fonctions de transmission particulières qui ont une forme 'figée', alors que plusieurs applications dans les réseaux modernes nécessitent des filtres dont la fonction de transmission peut changer en fonction du besoin. Les filtres qui sont des candidats potentiels pour répondre à ces nouvelles exigences sont des filtres biréfringents à gabarit prédéfini. Ces filtres feront l'objet du chapitre suivant.

Chapitre III

Algorithme de synthèse des filtres biréfringents à fonction de transfert de forme symétrique

Il y a longtemps que l'idée de réaliser un filtre constitué d'une cascade de lames biréfringentes est apparue, mais la forme spécifique et particulière de son gabarit spectral a limité son champ d'applications et n'a pas permis son extension.

Comme pour certaines applications, avoir un filtre capable de fournir un spectre de forme quelconque (prédéfinie) est parfois nécessaire. En effet, avec la diversification des applications le besoin d'avoir des dispositifs et, en particulier, des filtres optiques dont la fonction de transfert peut être décrite par une expression quelconque en fonction de la fréquence, est plus que souhaité voir une exigence [15]. Ceci constitue un véritable défi pour les filtres biréfringents conventionnels.

Dans ce chapitre, on présente une étude détaillée de la configuration de base et la méthode de synthèse permettant de réaliser un filtre biréfringent qui répond à un besoin particulier à partir d'un empilement de lames biréfringentes. La méthode est basée sur l'approche temporelle et consiste à utiliser les angles d'orientation des différentes lames afin de contrôler la réponse impulsionnelle du filtre. Ce contrôle permettra de réaliser des fonctions de transfert quelconques.

3.1 Étude théorique

3.1.1 Considérations générales

La structure de base utilisée consiste ici, dans sa forme simplifiée, en un certain nombre de lames biréfringentes identiques placées entre deux polariseurs (elle s'inspire d'une structure de type Solc).

Elle est illustrée sur la Figure (fig.3.1) ci-dessous, pour le cas d'une structure à quatre étages (lames).

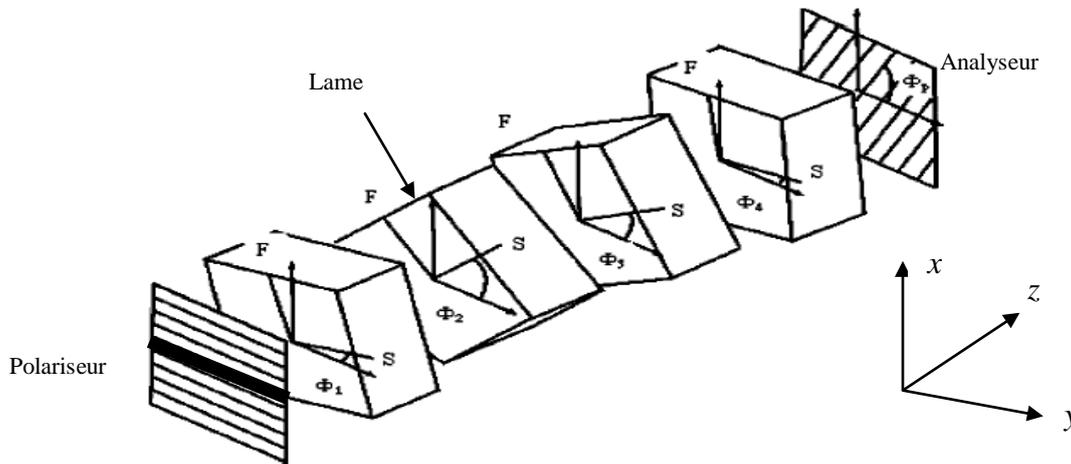


Figure 3.1 Structure d'un filtre à 4 étages

Les lettres F et S de la figure désignent les axes « rapide », (F pour *fast*), et « lent », (S pour *slow*), du cristal, respectivement.

L'axe de transmission du polariseur d'entrée est parallèle à l'axe Ox du laboratoire. L'axe de propagation est l'axe Oz .

L'objectif est de déterminer un certain nombre de paramètres, à savoir : les angles d'orientation pour les différents étages, et l'épaisseur des lames qu'il faut choisir, afin d'obtenir, en sortie du filtre, le spectre désiré. Théoriquement, par un choix judicieux de ces différents paramètres, il est possible de synthétiser n'importe quelle fonction de transfert voulue en respectant seulement le fait qu'elle doit être périodique (dans le domaine fréquentiel) et que sa réponse impulsionnelle soit réelle et causale.

3.1.2 Réponse impulsionnelle d'une série de lames biréfringentes

L'idée centrale est basée sur la considération de la réponse impulsionnelle d'un système à lames biréfringentes. Pour illustrer cette idée, on considère en premier lieu le cas simple de la réponse impulsionnelle d'une seule lame.

Une vibration lumineuse (impulsion optique) polarisée linéairement arrive sous incidence normale sur une lame biréfringente. Elle se trouve divisée en deux impulsions *ordinaire et extraordinaire* polarisées orthogonalement et dont les amplitudes dépendent de

l'orientation de la polarisation de l'impulsion incidente par rapport aux axes propres de la lame. Ces deux impulsions se propagent à des vitesses différentes et émergent donc décalées dans le temps l'une par rapport l'autre. Le décalage temporel, ou retard, résultant est donné par [27] .

$$\Delta t = t_S - t_F = \frac{\delta n * e}{c} \tag{3.1}$$

Où δn représente la biréfringence de la lame anisotrope traversée, e son épaisseur et c la vitesse de la lumière dans le vide.

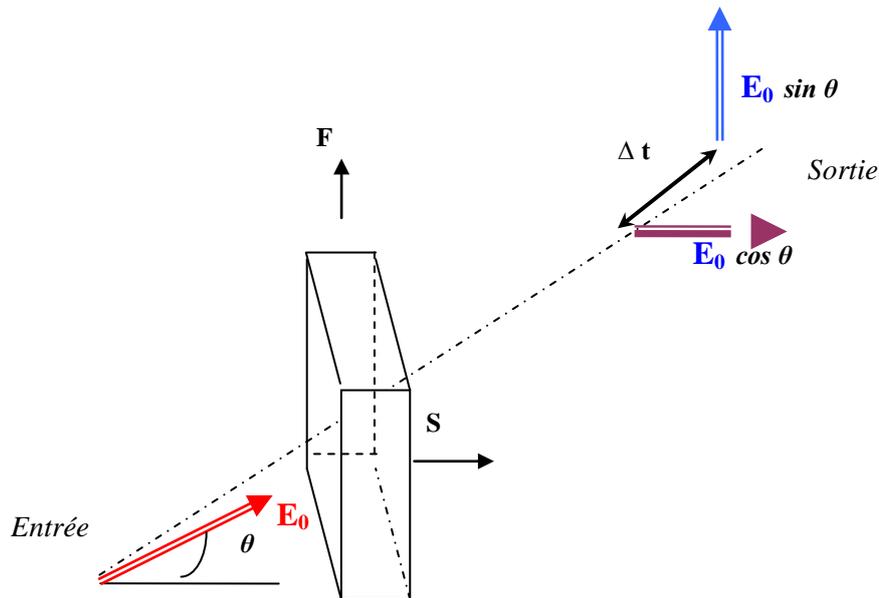


Figure 3.2 Réponse impulsionnelle d'un système à une lame

Ainsi la réponse impulsionnelle d'un système constitué d'une seule lame biréfringente (voir fig.3.2) est formée de deux impulsions polarisées orthogonalement dont les amplitudes dépendent de l'angle θ , angle entre l'un des axes propres de la lame (*axe lent*, par exemple) et la polarisation incidente. Dans le cas particulier où θ vaut 45° , on aura deux impulsions d'égales amplitudes aux instants t_F et t_S .

***Cas Général :**

Considérons maintenant le cas général de la mise en cascade de plusieurs lames, d'épaisseurs et d'orientations arbitraires.

On s'intéresse juste aux décalages temporels des différentes impulsions et non à leurs états de polarisation (voir fig 3.4.a et fig 3.4.b).

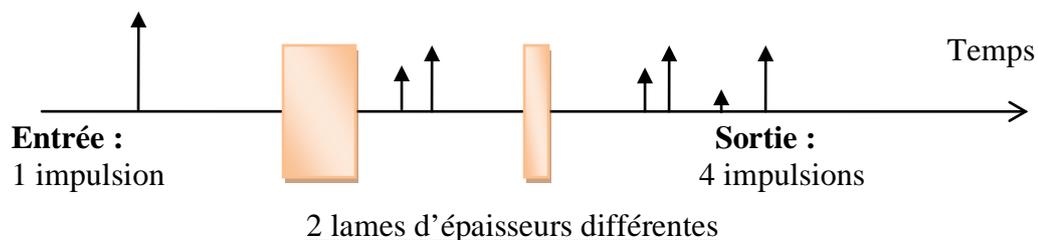


Figure.3.3 Réponse impulsionnelle d'un système à deux lames

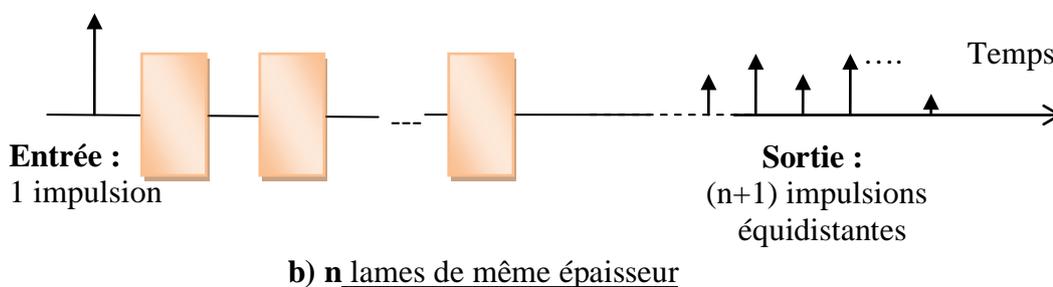
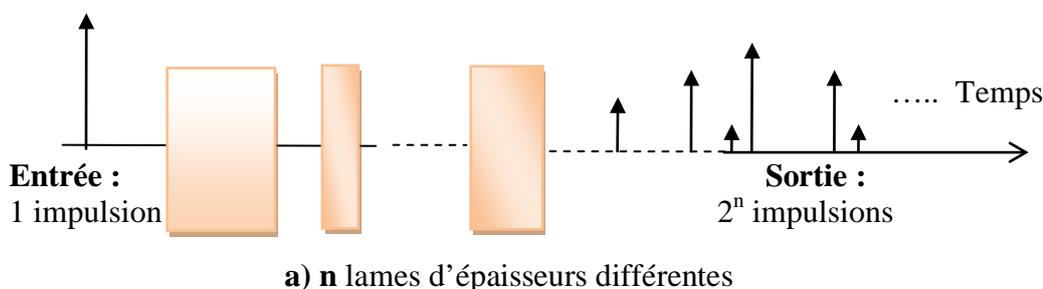


Figure.3.4 Réponse impulsionnelle d'un système à plusieurs lames

Pour un système à deux lames (voir fig.3.3), la sortie de la première lame est constituée de deux impulsions. Chacune d'elles constitue une impulsion incidente pour la deuxième lame et produit à son tour deux nouvelles impulsions. Ainsi la réponse impulsionnelle de ce système sera constituée de quatre impulsions, deux seront polarisées suivant l'axe *rapide* de la deuxième lame et les deux autres selon son axe *lent*. Avec un nombre plus important d'empilement de lames, ce processus continuera et donnera, ainsi, pour n lames biréfringentes d'épaisseurs et d'orientations différentes, un ensemble de 2^n impulsions (voir fig. 3.4.a). Leurs amplitudes et leurs polarisations dépendront des angles d'orientations des lames tandis que leur temps relatifs d'émergence sera fonction à la fois de la biréfringence et de l'épaisseur des lames employées.

Ainsi, on montre bien que la réponse impulsionnelle d'une cascade de lames biréfringentes est un train d'impulsions de durée finie. Dans le cas où l'ensemble des n lames utilisées sont identiques (même matériau et même dimension), la sortie sera seulement $(n + 1)$

impulsions au lieu de 2^n . En plus, les impulsions émergentes seront équidistantes (uniformément espacées dans le temps (voir fig.3.4.b).

Afin d'illustrer le fait que le nombre d'impulsions émergentes est réduit dans ce cas particulier, on prend le cas simple de deux lames identiques d'orientations quelconques. L'impulsion traversant l'axe *rapide* de la première lame et l'axe *lent* de la deuxième émerge exactement au même temps que celle traversant l'axe *lent* de la première lame et l'axe *rapide* de la deuxième. Ces deux impulsions vont se combiner en sortie qui sera donc composée de trois impulsions au lieu de quatre.

Donc, l'idée est d'utiliser les angles d'orientations des différentes lames dans le but de contrôler les amplitudes des $(n + 1)$ impulsions de sortie. La première étape sera donc de spécifier les amplitudes des impulsions en sortie de la structure (après le polariseur de sortie).

3.1.3 Spécification de la réponse désirée

Soient $g(t)$ et $G(\omega)$ la réponse impulsionnelle et la fonction de transfert d'un système. Supposons que ces deux fonctions sont continues et non périodiques (voir fig.3.5)

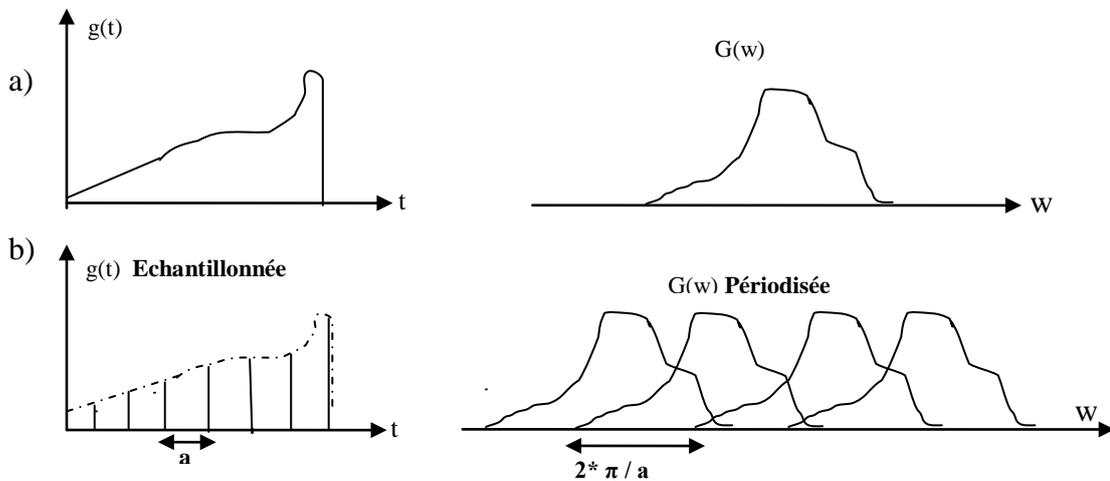


Figure.3.5 Principe de dualité : Echantillonnage / Périodisation

Si au lieu d'avoir $g(t)$ continue, on a la fonction $g(t)$ échantillonnée à un rythme uniforme de a échantillons par secondes, alors la fonction de transfert $G(w)$ du système sera périodique de période $2\pi/a$ (rad / seconde). Ceci correspond parfaitement à la structure étudiée ici, c'est-à-dire, la suite de lames biréfringentes dont l'épaisseur est telle que le temps que sépare deux impulsions successives $t_s - t_F$ de l'équation (3.1) soit égale à a secondes. Et bien sûr, afin d'éviter le repliement du spectre, la fréquence d'échantillonnage ($f_e = 1/a$) doit respecter le théorème d'échantillonnage de Shannon.

A partir d'une fonction de transfert supposée périodique, il suffit de lui trouver une approximation convenable que peut reproduire le filtre donné par la Figure (fig.3.1). Ceci

revient à déterminer la configuration du filtre (les angles d'orientation de ses lames biréfringentes) donnant comme réponse impulsionnelle cette approximation.

L'approximation sera faite via une décomposition en série de Fourier avec un nombre limité de termes soit

$$G(w) \cong C(w) \quad \text{où}$$

$$C(w) = C_0 + C_1 e^{-j a w} + C_2 e^{-j 2 a w} + \dots + C_n e^{-j n a w} = \sum_{k=0}^n C_k e^{-j k a w} \quad (3.2)$$

A cette fonction de transfert correspond la réponse impulsionnelle qu'il est facile de calculer en prenant sa transformée de Fourier inverse :

$$c(t) = C_0 \delta(t) + C_1 \delta(t - a) + C_2 \delta(t - 2a) + \dots + C_n \delta(t - na) = \sum_{k=0}^n C_k \delta(t - ka) \quad (3.3)$$

On constate bien l'intérêt de l'utilisation des séries exponentielles dans cette approximation. En effet la transformée de Fourier de telles séries donne une suite d'impulsions équidistantes, et d'amplitudes variables, qui constitue la forme exacte de la réponse impulsionnelle de notre filtre à lames biréfringentes.

Les techniques bien rodées de synthèse des filtres numériques s'avèrent bien adaptées au calcul des coefficients C_i pour une fonction $G(w)$ donnée.

Toutefois deux points sont à prendre en compte, au moment d'effectuer l'approximation, concernant $G(w)$ et $c(t)$, à savoir :

- Comme la réponse impulsionnelle de tout système physique doit être réelle, la partie réelle de $C(w)$ doit être une fonction paire et sa partie imaginaire une fonction impaire.
- Il n'est pas nécessaire que $C(w)$ et $c(t)$ soient causales puisqu'on est libre de choisir le repère temps et de déplacer l'origine lors de l'écriture des deux fonctions pour qu'il soit plus approprié. En effet, ce qui importe le plus c'est surtout les positions relatives (dans le temps) des différentes impulsions. L'origine temporelle sera l'instant d'émergence de la première impulsion.

Le nombre de lames nécessaires dépend de la nature de la fonction spectrale qu'on cherche à approcher, ainsi que de la précision de l'approximation désirée.

3.1.4 Synthèse du filtre

Dans les équations (3.2) et (3.3), les C_k représentent les amplitudes des impulsions composant le train émis par le filtre à lames biréfringentes. Il est important de pouvoir décrire quantitativement l'évolution du train d'impulsions à travers les différents étages.

Bien que $c(t)$ soit polarisée parallèlement à l'axe de transmission du polariseur de sortie, le train d'impulsion traversant chaque étage possède des composantes polarisées parallèlement

aux deux axes (lent S et rapide F) de ce même étage. Ceci impose de s'intéresser non seulement à l'évolution temporelle du signal mais aussi à l'évolution de sa polarisation.

***Notations**

Les notations employées dans l'identification des impulsions sont illustrées ci-après dans le cas simple de deux lames placées entre deux polariseurs

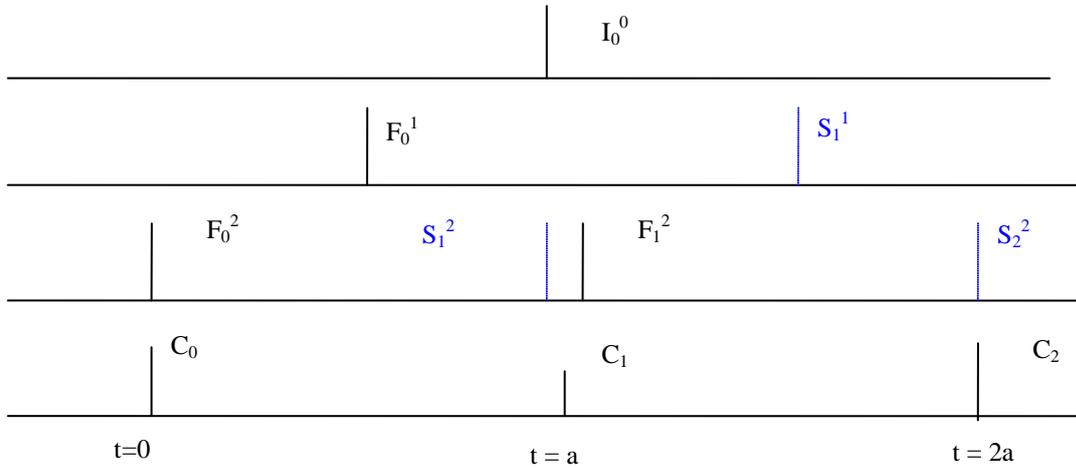


Figure 3.6 : Suite d'impulsions en sortie d'un système à 2 lames

La sortie de la deuxième lame est constituée de composantes polarisées selon ses deux directions S et F .

$$F^2(t) = F_0^2 \delta(t) + F_1^2 \delta(t - a) \tag{3.4}$$

$$S^2(t) = S_1^2 \delta(t - a) + S_2^2 \delta(t - 2a) \tag{3.5}$$

S signifie que l'impulsion émise est parallèle à l'axe lent, F signifie que l'impulsion émise est parallèle à l'axe rapide.

L'**indice** indique le temps d'occurrence des impulsions et l'**exposant** indique l'ordre de la lame (dans ce cas, le 2 signifie la sortie de la deuxième lame).

Ainsi la première impulsion, émise à $t = 0$, possède l'indice 0. Les deux impulsions suivantes, émises à $t = a$, ont pour indice 1 et ainsi de suite. On note, en particulier, que S_0^2 et F_2^2 sont nuls.

La figure ci-dessous récapitule l'ensemble de ces notations.

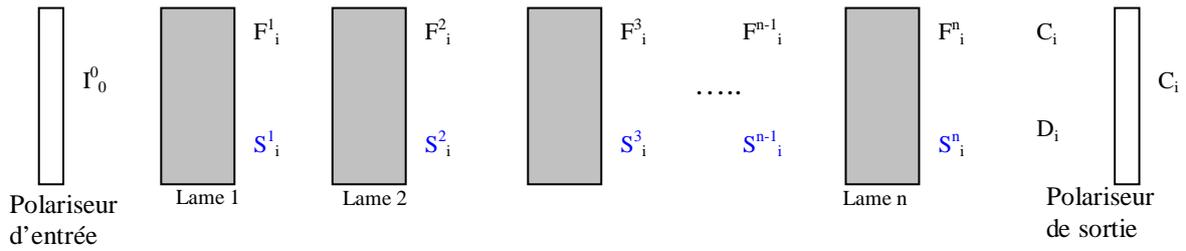


Figure.3.7 : Structure du filtre avec les notations

Comme à la sortie de chaque lame, on trouve deux composantes (selon les deux axes) qui en même temps constituent l'entrée de l'étage suivant, ce schéma s'applique évidemment au polariseur de sortie qui lui par contre ne laisse passer que la composante parallèle à son axe de transmission qui est en fait la réponse impulsionnelle désirée notée $c(t)$, constituée du train d'impulsions de coefficients C_i . Par contre, la composante polarisée orthogonalement, qu'on note $d(t)$ (ou $D(w)$) dont les coefficients sont D_i , est bloquée par ce même polariseur.

3.1.4.1 Détermination de la composante orthogonale bloquée $D(w)$:

L'étape suivante consiste à déterminer ce signal $d(t)$ orthogonal à l'axe de transmission du polariseur de sortie.

En effet, comme les lames sont supposées sans pertes, et en vertu du principe de conservation d'énergie, en tout point entre les deux polariseurs d'entrée et de sortie, l'énergie doit être conservée. Ceci impose certaines restrictions sur les différents paramètres F^i, S^i, C_i et D_i (voir Annexe B) et en particulier.

- la première impulsion se propage selon l'axe *rapide*.
- la dernière quant à elle se propage selon l'axe *lent*.
- les F_i^i sont nuls, c'est-à-dire la dernière impulsion rapide est nulle.
- et les S_0^i nuls aussi, c'est-à-dire la première impulsion lente est nulle.

et ce au niveau de chaque étage.

En utilisant ce principe, on peut écrire [27] :

$$|D(w)|^2 = D(w)D(w)^* = (I_0^0)^2 - C(w)C(w)^* \quad (3.6)$$

A partir du carré du module de $D(w)$, il est possible de calculer la réponse impulsionnelle et trouver les coefficients D_i en s'appuyant sur la méthode suivante développée par *Pegis* [28].

• **Méthode de calcul de $D(w)$ à partir de $|D(w)|^2$**

Soit le polynôme positif semi-fini suivant [27,28]

$$|D(w)|^2 = A_0 + 2.A_1.Cos(aw) + + 2.A_n.Cos(n.a.w) . \quad (3.7)$$

Il est possible de réécrire l'équation précédente sous la forme :

$$|D(w)|^2 = A_n.e^{jnaw} + A_{n-1}.e^{j(n-1)aw} + + A_1.e^{jaw} + A_0 + A_1.e^{-jaw} + + A_{n-1}.e^{-j(n-1)aw} + A_n.e^{-jnaw} \quad (3.8)$$

Il faut noter que les zéros de cette équation apparaissent en paires réciproques.

Cette même équation (3.8) peut être factorisée comme suit :

$$|D(w)|^2 = (D_0 + D_1.e^{-jaw} + + D_{n-1}.e^{-j(n-1)aw} + D_n.e^{-jnaw}).(D_0 + D_1.e^{jaw} + + D_{n-1}.e^{j(n-1)aw} + D_n.e^{jnaw}) \quad (3.9)$$

Les D_i ne sont pas uniques, mais plutôt il existe 2^{n+1} ensembles possibles. Comme $|D(w)|^2$ est toujours positif et pair, on peut l'écrire sous la forme :

$$|D(w)|^2 = D(w).D(w)^* \quad (3.10)$$

La comparaison de (3.9) avec (3.10), fait apparaître que (3.10) ne peut être satisfaite que si les D_i de l'équation (3.9) sont strictement Réels. Cependant au moins un ensemble réel de coefficients doit exister.

La méthode permettant d'obtenir les D_i est attribuée à *Pegis* [28]. Elle sera exposée dans ce qui suit :

On part de l'expression de $|D(w)|^2$ donnée par (3.8) et avec un changement de variable $x = e^{jaw}$ on peut écrire :

$$A_n \cdot x^n + A_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + A_1 \cdot x^1 + A_0 + A_1 \cdot x^{-1} + \dots + A_{n-1} \cdot x^{-(n-1)} + A_n \cdot x^{-n} = 0 \quad (3.11)$$

qu'il faudra mettre sous la forme :

$$B_n (x + x^{-1})^n + B_{n-1} (x + x^{-1})^{n-1} + \dots + B_1 (x + x^{-1}) + B_0 = 0 \quad (3.12)$$

En effectuant le changement de variable suivant :

$$y = x + x^{-1} \quad (3.13)$$

L'équation (3.12) devient :

$$B_n \cdot y^n + B_{n-1} \cdot y^{n-1} + \dots + B_1 \cdot y^1 + B_0 = 0 \quad (3.14)$$

La résolution de cette équation donnera n racines notées : y_1, y_2, \dots, y_n et par l'utilisation de l'équation (3.13) pour tous les y_i on arrive à déterminer les paires réciproques de racines à savoir :

$$(x_1, 1/x_1) ; (x_2, 1/x_2) ; \dots ; (x_n, 1/x_n)$$

Ensuite, en prenant un seul membre de chaque paire, on construit tous les polynômes possibles ayant des coefficients d_i réels.

A titre d'exemple, un polynôme possible pourra être le suivant :

$$(x-x_1)(x-1/x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n) \\ = x^n + d_{n-1}.x^{n-1} + \dots + d_2.x^2 + d_1.x + d_0 \quad (3.15)$$

Les coefficients D_i recherchés étant proportionnels aux d_i selon :

$$D_i = q.d_i \quad (3.16)$$

où la quantité q vérifie l'équation :

$$q^2(d_0^2 + d_1^2 + \dots + d_n^2) = A_0 \quad (3.17)$$

On note que le nombre d'ensembles de D_i réels dépend du nombre de racines complexes y_i . Si m est le nombre de racines y_i qui sont complexes, alors il existe $2^{n+1-m/2}$ ensembles (de réels) possibles de D_i [28].

Tous les D_i sont calculés, on peut mettre $D(w)$ sous la forme :

$$D(w) = D_0 + D_1 e^{-j\omega w} + \dots + D_n e^{-jn\omega w} \quad (3.18)$$

La réponse impulsionnelle correspondante s'écrit

$$d(t) = D_0 \delta(t) + D_1 \delta(t-a) + D_2 \delta(t-2a) + \dots + D_n \delta(t-na) \quad (3.19)$$

3.1.4.2 Détermination des Angles d'orientation des différents étages

Le couple de coefficients C_i et D_i , tout en donnant une description complète entre entrée et sortie du polariseur de sortie, représente en même temps la sortie de la dernière lame ($n^{\text{ième}}$) et il convient de transformer cette sortie et de faire sa projection sur le système d'axes principaux de la dernière lame.

On note que dans cette méthode, les angles d'orientation calculés sont des angles relatifs. En effet, l'angle d'orientation θ_j de la lame j est un angle relatif par rapport à l'angle

d'orientation θ_{j-1} de la lame qui la précède $j-1$. En d'autres termes, si on se réfère à la figure 3.1, on aura :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \varphi_1 ; \\ \theta_2 &= \varphi_2 - \varphi_1 ; \\ &\dots \\ \theta_n &= \varphi_n - \varphi_{n-1} \\ \theta_p &= \varphi_p - \varphi_n \end{aligned} \tag{3.20}$$

$\varphi_1, \dots, \varphi_n$: sont les angles des différentes lames ; φ_p : angle du polariseur de sortie.
Par la technique de changement de base et de projection (voir Annexe B) on obtient :

$$\begin{pmatrix} F_i^n \\ S_i^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta_p & -\cos \theta_p \\ \cos \theta_p & \sin \theta_p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_i \\ D_i \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

θ_p représente l'angle relatif du polariseur de sortie (par rapport à la dernière lame).
Ce système d'équation doit satisfaire la condition

$$F_n^n = S_0^n = 0 \tag{3.22}$$

Pour cela, il faut avoir

$$F_n^n = C_n \sin \theta_p - D_n \cos \theta_p = 0 \Rightarrow \tan \theta_p = \frac{D_n}{C_n} \tag{3.23}$$

$$\text{De même pour } S_0^n = 0 \quad \text{soit :} \quad \tan \theta_p = \frac{-C_0}{D_0} \tag{3.24}$$

Alors :

$$C_0 C_n + D_0 \cdot D_n = 0 \tag{3.25}$$

Condition déjà satisfaite via la conservation d'énergie.

Ainsi l'angle d'orientation du polariseur de sortie est déterminé et il suffit de réinjecter sa valeur dans la relation (3.21) afin de trouver les valeurs des F_i^n et de S_i^n (sorties selon les axes rapide et lent, respectivement, de l'étage n). Comme l'entrée de l'étage n représente la sortie de l'étage $(n-1)$, par projection sur les axes propres de ce dernier et l'utilisation de la condition de conservation d'énergie, on détermine l'angle d'orientation de l'étage n . Les entrées de chaque lame en fonction de sa sortie sont déterminées en suivant les

équations données (voir Annexe C). Ce processus peut être répété pour l'étage $(n-1)$. Ainsi, on remonte toute la structure en déterminant alternativement l'angle d'orientation des lames et leurs entrées.

• **Exemple :**

A travers cet exemple, on illustre le processus de calcul des entrées et de l'angle d'orientation d'un des étages du filtre. Prenons le cas de la troisième lame.

Les sorties au niveau de la troisième lame étant connues (F_1^3, S_1^3) et on cherche à déterminer θ_3 et les entrées (F_1^2, S_1^2) . Plus précisément, à partir de $F_0^3, F_1^3, F_2^3, S_1^3, S_2^3, S_3^3$ il faut déterminer θ_3 ainsi que les $F_0^2, F_1^2, S_1^2, S_2^2$.

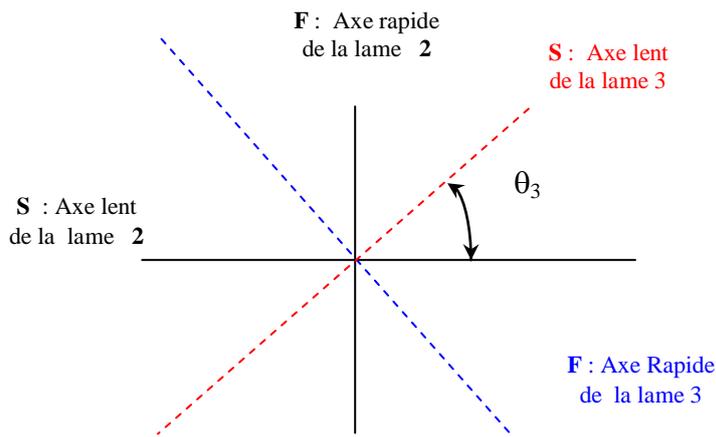


Figure 3.8 : Orientation des axes propres des lames 2 et 3

La projection de la sortie sur les axes propres de la lame 2 (Cf. fig.3.8) donne le système d'équations suivant

$$\begin{pmatrix} F_0^3 \\ F_1^3 \\ F_2^3 \\ S_1^3 \\ S_2^3 \\ S_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta_3 \\ \sin \theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_0^2 \\ F_1^2 \\ S_1^2 \\ S_2^2 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Pour que ce système d'équations non homogènes possède une solution, il faut que le rang de la matrice de coefficients soit égal au rang de la matrice étendue (matrice de coefficients

plus une colonne supplémentaire de F_1^3 et S_1^3 . Pour satisfaire cette condition, il faut avoir

$$\tan(\theta_3) = -\frac{F_2^3}{S_3^3} \quad (3.27)$$

L'équation (3.27) donne l'angle d'orientation de la lame 3. Le calcul des entrées se fera par les formules données (voir Annexe C). Et d'une manière générale pour l'étage d'ordre i , son angle d'orientation se calcule via l'équation :

$$\tan(\theta_i) = -\frac{F_{i-1}^i}{S_i^i} \quad (3.28)$$

La détermination des différents angles d'orientation achève la caractérisation du filtre pouvant répondre à un gabarit prédéfini.

3.2 Exemple d'application

L'exemple de calcul suivant illustre cette procédure de synthèse. Supposons que la fonction de transfert idéale à synthétiser, $G(w)$ soit celle donnée par la figure (fig.3.9) (fonction triangulaire à valeur moyenne nulle). Le développement en série de Fourier (SF) de $G(w)$, à l'ordre 5 donne une approximation suffisante pour cette fonction

$$K(w) = \frac{4}{\pi^2} \left[\frac{1}{25} \cdot e^{-j5aw} + \frac{1}{9} \cdot e^{-j3aw} + e^{-jaw} + e^{jaw} + \frac{1}{9} \cdot e^{j3aw} + \frac{1}{25} \cdot e^{j5aw} \right] .$$

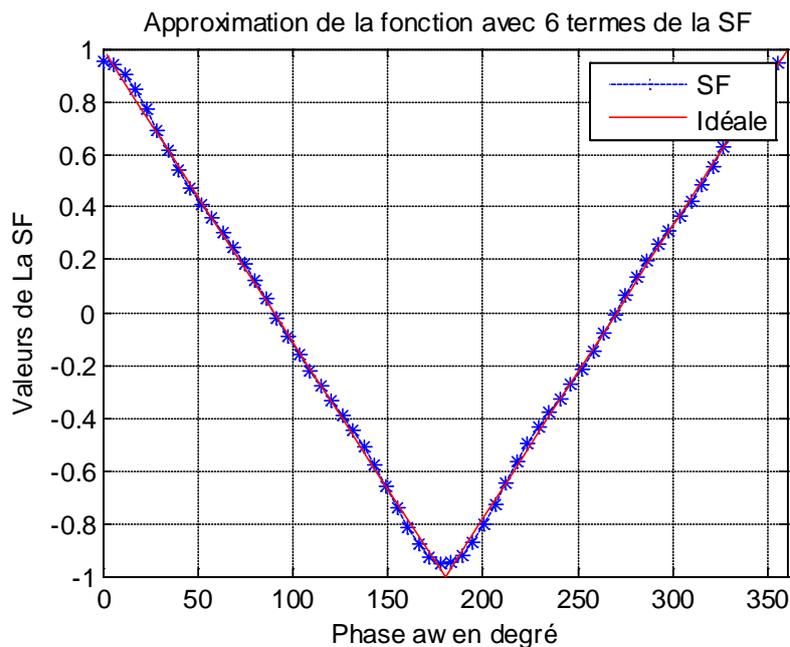


Figure.3.9 Approximation d'une fonction triangulaire par la SF avec 6 termes

Pour rendre la fonction $K(w)$ causale il faut la multiplier par e^{-j5aw} , qui revient à introduire un simple retard dans le domaine temporel et n'altère en rien ni la réponse

impulsionnelle du filtre ni sa fonction de transfert, et avec le changement de variable $b= 2.a$, donne.

$$C(w) = e^{-j5aw} .K(w) = \frac{4}{\pi^2} \left[\frac{1}{25} + \frac{1}{9} .e^{-jbw} + e^{-j2bw} + e^{-j3bw} + \frac{1}{9} .e^{-j4bw} + \frac{1}{25} .e^{-j5bw} \right]$$

Soit :

$$C(w) = 0.01621 + 0.04503.e^{-jbw} + 0.40528.e^{-j2bw} + 0.40528.e^{-j3bw} + 0.04503.e^{-j4bw} + 0.01621.e^{-j5bw}$$

En utilisant l'équation (2.68), on trouve :

$$|D(w)|^2 = (I_0^0)^2 - 0.33309 - .040443 .\cos bw - 0.09928 .\cos 2bw - 0.03034 .\cos 3bw - \\ -0.00292 .\cos 4bw - 0.000526 .\cos 5bw$$

Avec $(I_0^0)^2 = 1$

d'où :

$$|D(w)|^2 = -0.000263 .x^5 - 0.00146 .x^4 - 0.01517 .x^3 - 0.04964 .x^2 - 0.20222 .x + \\ + 0.66691 - 0.20222 .x^{-1} - 0.04964 .x^{-2} - 0.01517 .x^{-3} - 0.00146 .x^{-4} - -0.000263 .x^{-5}$$

où : $\cos(bw)$ est remplacé par $\frac{e^{-jbw} + e^{jbw}}{2}$ et on pose $x = e^{jbw}$.

L'application de la méthode de *Pégis* [28], permet de déterminer les coefficients D_i . Dans le cas particulier du polynôme $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$ où les x_i sont les racines du terme de droite de l'équation donnant $|D(w)|^2$, les D_i ont les valeurs suivantes :

$D_0 = -0.75607$	$D_1 = 0.29887$
$D_2 = 0.07414$	$D_3 = 0.02091$
$D_4 = 0.002068$	$D_5 = 0.000348$

L'application des équations (3.22), (3.23) et (3.24) nous donne l'angle d'orientation du polariseur de sortie, soit :

$$\tan(\theta_p) = \frac{D_5}{C_5} = 0.02144 \quad \rightarrow \quad \theta_p = 1^\circ 14'$$

Avec la relation (3.21), on détermine les valeurs des F_i^5 et S_i^5 soit

$$\begin{pmatrix} F_0^5 \\ F_1^5 \\ F_2^5 \\ F_3^5 \\ F_4^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75625 \\ -0.29784 \\ -0.06543 \\ -0.0122 \\ -0.0011 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} S_1^5 \\ S_2^5 \\ S_3^5 \\ S_4^5 \\ S_5^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.05143 \\ 0.400678 \\ 0.40564 \\ 0.04507 \\ 0.01621 \end{pmatrix}$$

Ce qui permet par la suite de calculer θ_5 , angle d'orientation de la dernière lame, qui vaut :

$$\tan(\theta_5) = \frac{-F_4^5}{S_5^5} = 0.06799 \quad \rightarrow \quad \theta_5 = 3^\circ 53'.$$

De la même manière, on trouve les différents θ_i , soit :

$$\theta_4 = 29^\circ 20' \quad \theta_3 = 29^\circ 20' \quad \theta_2 = 3^\circ 53' \quad \theta_1 = -88^\circ 46'.$$

L'application de la méthode de Jones [29] en utilisant les valeurs des angles obtenus, permet de déterminer la fonction de transfert de ce filtre. Par simulation, on obtient la figure suivante.

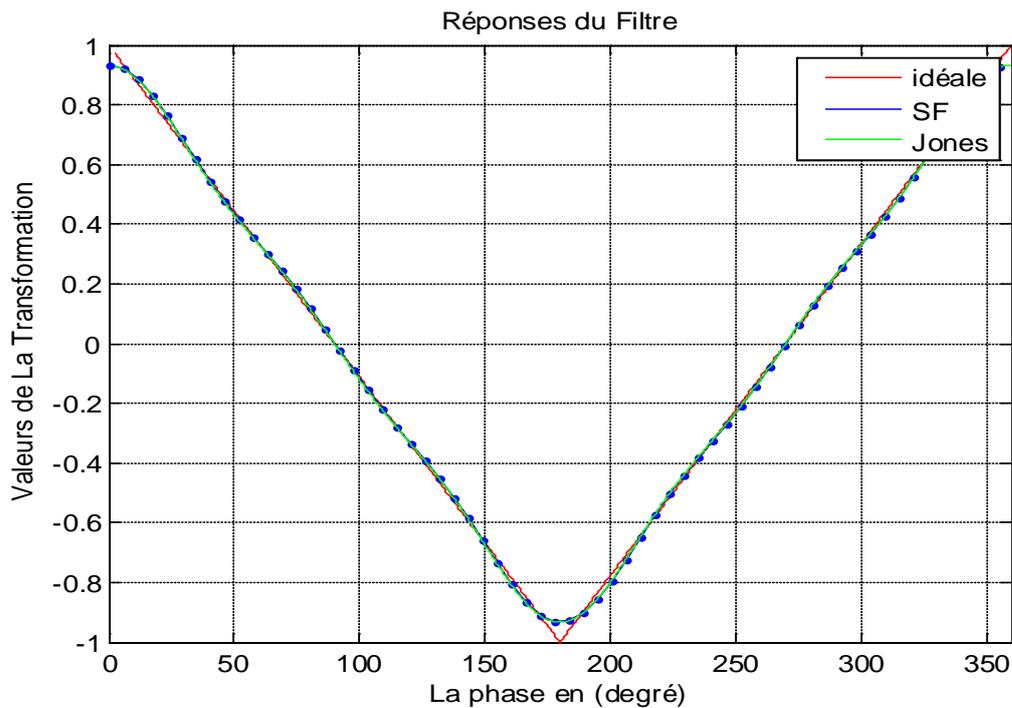


Figure.3.10 Approximations d'une fonction triangulaire par la SF et Jones avec 6 termes.

A partir de la figure (fig.3.10), on remarque que le formalisme de Jones donne une bonne approximation de la réponse de filtre a partir des angles absolu obtenu par l’algorithme de synthèse.

3.3 Résumé de la méthode de synthèse

L’ensemble de la procédure de synthèse d’un filtre optique biréfringent à gabarit prédéfini est récapitulée dans ce qui suit :

- 1- Choix de la réponse désirée selon les spécifications prédéfinie du gabarit et son

écriture sous la forme : $C(w) = \sum_{k=0}^n C_k e^{-jkaw}$ avec C_k Réels.

- 2- Calcul de l’épaisseur des lames suivant l’équation $e = \frac{a \cdot c}{\delta n}$ où la quantité a s’obtient de la comparaison de $C(w)$ de l’étape 1 avec l’équation (3.2) .

- 3- Choix de la valeur de $(I_0^0)^2$; ce choix peut être quelconque pourvu qu’elle soit supérieure à la valeur maximale de $C(w).C(w)^*$. Il est préférable de prendre

$$(I_0^0)^2 = \text{Max} \left[C(w).C^*(w) \right] .$$

- 4- Calcul de $D(w).D(w)^*$ puis détermination de $D(w)$ par la méthode de *Pegis* [28].
- 5- Calcul de θ_p , angle d’orientation du polariseur de sortie à partir des équations (3.22)-(3.24)
- 6- Calcul des F_i^n et S_i^n via le système d’équation (3.21).
- 7- Calcul de l’angle d’orientation de la dernière lame θ_n , via la relation (3.25). A partir des équations (1) et (2) (voir *Annexe C*) on calcule l’entrée de dernier étage qui représente, en même temps, la sorite de l’étage précédent (l’avant dernier).
- 8- Refaire l’étape 7 pour trouver, successivement, tous les étages ($n-1, n-2, \dots, 2$ et 1) jusqu’à déterminer tous les angles de tous les étages.

3.4 Résultats de simulation

3.4.1 Cas d'une fonction triangulaire à valeur moyenne non nulle

Dans l'exemple d'application précédent, nous avons vu que la distance temporelle entre deux impulsions successives est a seconde, mais comme la fonction est symétrique à valeur moyenne nulle (tous les coefficients paire sont nuls), ceci nous a permis de prendre uniquement les coefficients non nuls et la distance entre les impulsions devient $b = 2a$. Ainsi, l'épaisseur de chaque lame est

$$e = \frac{b.c}{\Delta n}.$$

Maintenant, on reprend le même exemple d'application mais cette fois-ci avec une fonction triangulaire à valeur moyenne non nulle (voir fig. 3.11):

Dans ce cas, tous les coefficients pairs sont nuls sauf la valeur moyenne. Pour écrire la fonction de transfert sous la forme de l'équation (3.2), il faut compter tous les coefficients d'ordre paire et impaire (voir tab.3.1). La distance temporelle entre les impulsions est a et

l'épaisseur de chaque lame est alors $e = \frac{a.c}{\Delta n}$.

Tableau 3.1. Paramètres de la fonction triangulaire à valeurs moyenne non nulle

Les coefficients C_i	Les angles absolus de lames en degré $\varphi_i : \varphi_1 \rightarrow \varphi_p$
0.0081	-89.3774
0	-89.1134
0.0225	-87.1984
0	-86.3212
0.2026	-70.5549
0.5	-34.3112
0.2026	-18.5450
0	-17.6678
0.0225	-15.7528
0	-15.4888
0.0081	-14.8662

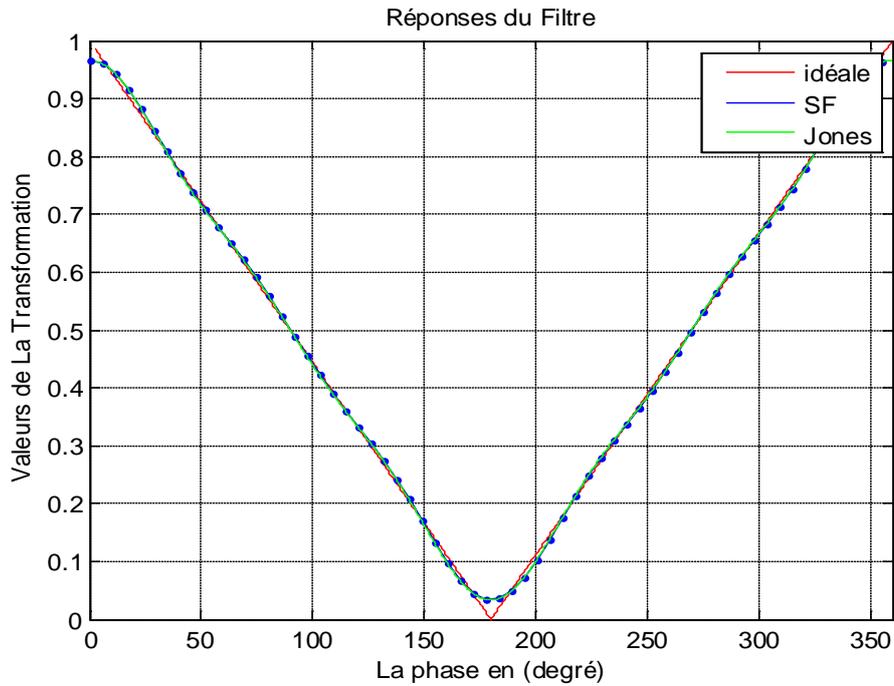


Figure 3.11: Approximation d’une fonction triangulaire à valeur moyenne non nulle Avec 11 termes

3.4.2 Cas d’une fonction carrée à valeur moyenne nulle

De même que pour la fonction triangulaire à valeur moyenne nulle, tous les coefficients pairs sont nuls, l’exécution de l’algorithme de synthèse donne les résultats montrés sur le Tableau (tab.3.2) et les réponses du filtre sur la figure (fig.3.12)

Tableau.3.2 Paramètres de la fonction carrée à valeurs moyenne nulle

Les coefficients C_i	Les angles absolus de lames en degré $\varphi_i : \varphi_1 \rightarrow \varphi_p$
0.0909	-81.5177
-0.1273	-93.3904
0.2122	-75.8865
-0.6366	-115.2069
-0.6366	-154.5272
0.2122	-137.0234
-0.1273	-148.8961
0.0909	-140.4138

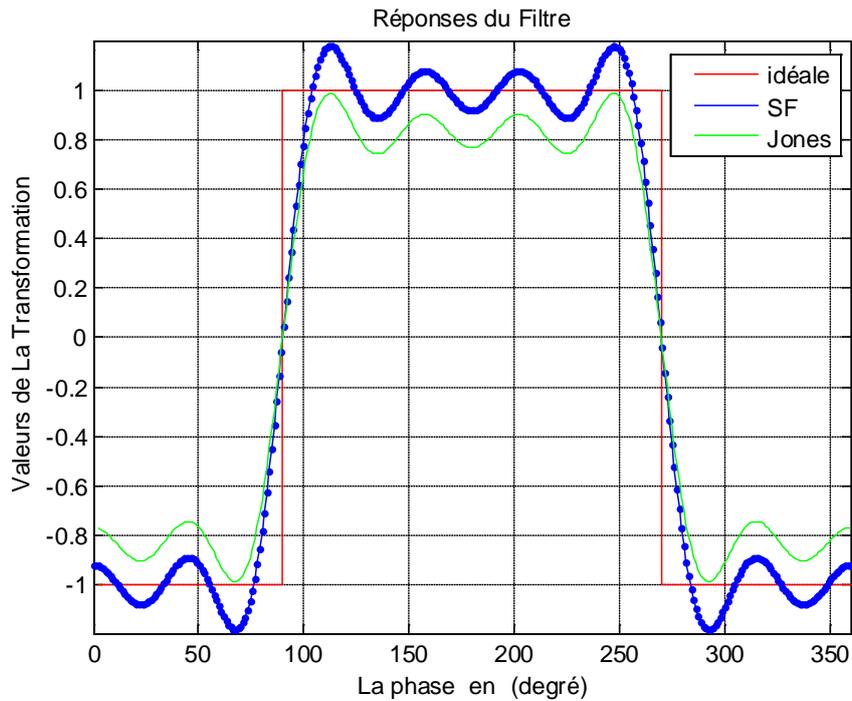


Figure.3.12 Approximation d'une fonction carrée à valeur moyenne nulle Avec 8 termes

3.4.3 Cas d'une fonction carrée à valeur moyenne non nulle

Sur le tableau (tab.3.2), on montre les coefficients et les angles des lames pour une fonction carrée à valeur moyenne non nulle avec les 15 premiers termes du développement en série de fourier

Tableau.3.3 Paramètres de la fonction carrée à valeurs moyenne non nulle

Les coefficients C_i	Les angles absolus de lames en degré $\varphi_i : \varphi_1 \rightarrow \varphi_p$
0.0455	-86.4771
0	-88.3741
-0.0637	-92.7470
0	-89.4689
0.1061	-82.6759
0	-88.1565
-0.3183	-108.4082
0.5	-69.5821
-0.3183	-89.8338
0	-95.3144
0.1061	-88.5214
0	-85.2433
-0.0637	-89.6162
0	-91.5132
0.0455	-87.9903

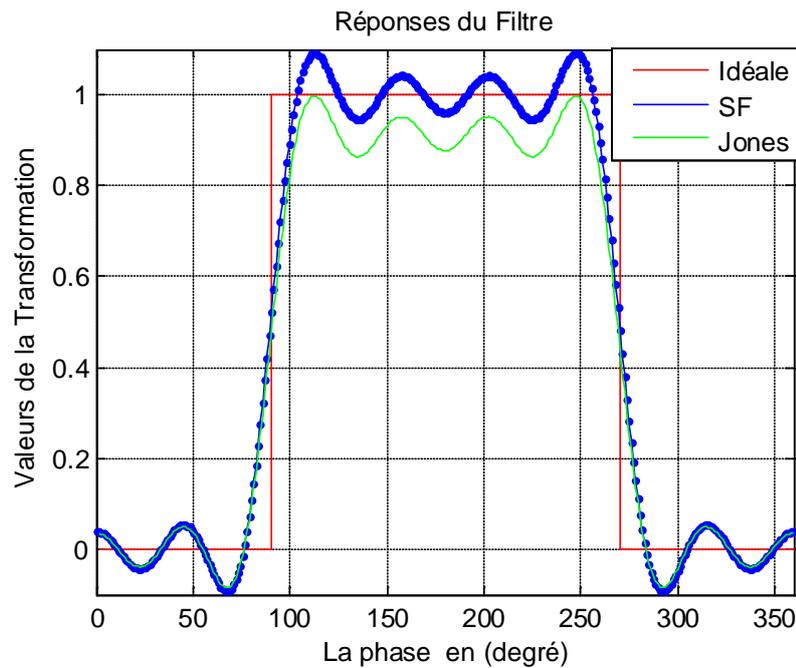


Figure.3.13 Approximations d’une fonction carrée à valeur moyenne non nulle Avec 15 Termes

Il faut noter que le comptage de tous les coefficients est aussi valable pour des fonctions à valeur moyenne nulle. Si on reprend l’exemple de la fonction triangulaire à valeur moyenne nulle mais cette fois avec le comptage de toutes les impulsions, le résultat est résumé sur le tableau suivant (cas 2) :

Tableau.3.4 Fonction triangulaire a valeur moyenne nulle et a valeur moyenne non nulle

Cas 1 : Fonction triangle à valeur moyenne nulle (comptage des coefficients non nuls seulement)	Cas 1 Les angles absolus de lames en degré $\varphi_i : \varphi_1 \rightarrow \varphi_p$	Cas 2 : Fonction triangle à valeur moyenne nulle (comptage de tous les coefficients)	Cas2 Les angles absolus de lames en degré $\varphi_i : \varphi_1 \rightarrow \varphi_p$
0.0162	-88.7717	0.0162	-88.7717
0.0450	-84.8813	0	-88.7717
0.4053	-55.5419	0.0450	-84.8813
0.4053	-26.2025	0	-84.8813
0.0450	-22.3121	0.4053	-55.5419
0.0162	-21.0838	0	-55.5419
		0.4053	-26.2025
		0	-26.2025
		0.0450	-22.3121
		0	-22.3121
		0.0162	-21.0838

Dans le **cas 1**, si on considère la distance entre les impulsions est b seconde, le nombre des coefficients est $n= 6$ coefficients ce qui nécessite un nombre de lames $k = 5$; Avec $k=n-1$.

Chaque lame d'épaisseur $e' = \frac{b.c}{\Delta n}$ a une orientation bien définie.

Pour le **cas 2**, la distance temporelle a est la moitié du celle du **cas 1**, donc : $a=b/2$,

La condition $k=n-1$ reste vérifiée mais, l'orientations des lames est telle que chaque deux lames adjacentes d'épaisseur $e = \frac{a.c}{\Delta n}$ ont la même orientation. Si les lames ont la même

biréfringence, donc la même Différence de Marche Optique (*DMO*) : $DMO = \Delta n.e$ où Δn est la biréfringence de la lame. Comme chaque deux lames adjacentes d'épaisseur e ont la même orientation et donc la même *DMO*, elles se comportent alors comme une seule lame d'épaisseur $e' = 2*e$, ce qui nous conduit au raisonnement du cas 1 où e' est l'épaisseur de chaque lame.

3.4.4 Autres fonctions

1- Soit la fonction $f(x)$ définie comme suit

$$f(x) \begin{cases} \cos(x)^2, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \\ 0, \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Le résultat de la simulation est donné par la figure (fig.3.14)

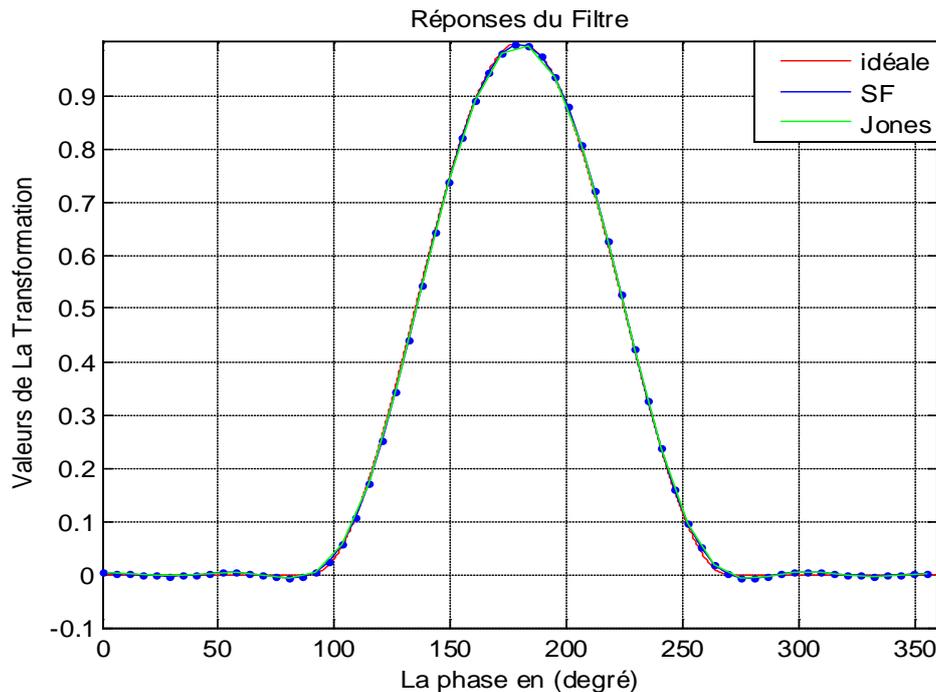


Figure.3.14 Approximations de la fonction $f(x)$ avec 7 termes

2- Soit la fonction $g(x)$ définie comme suit

$$g(x) \begin{cases} \frac{2x}{\pi} - 1, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right] \\ -\frac{2x}{\pi} + 3, x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2} \right] \\ 0, \text{ailleurs} \end{cases}$$

Le résultat de la simulation est donné par la figure (fig.3.15)

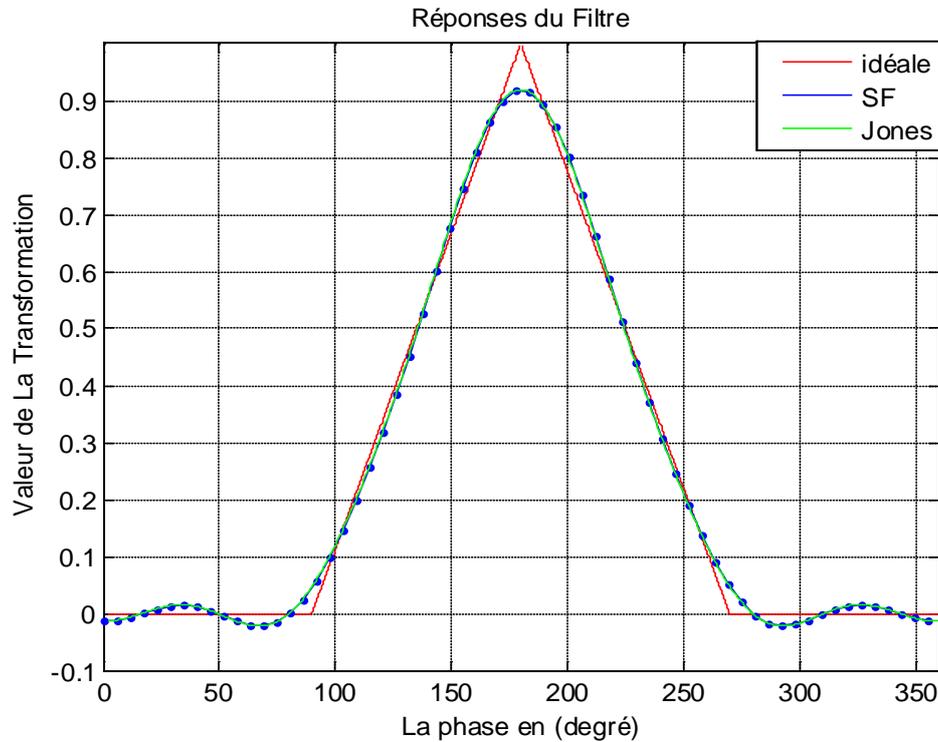


Figure.3.15 Approximations de la fonction $g(x)$ avec 11 termes

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a vu la procédure de synthèse qui nous a permis de trouver la réponse de notre filtre biréfringent grâce à une approche dans le domaine temporel, de ce fait il est possible, avec de telles structures, de réaliser des filtres à gabarits prédéfinis.

En effet, la réponse impulsionnelle de tels filtres peut être contrôlée par l'orientation des angles des différents éléments de la structure. Ceci offre un degré de liberté supplémentaire pour la réalisation de filtres à fonction de transfert symétrique (triangulaire à valeur moyenne nulle, triangulaire à valeur moyenne non nulle, carrée à valeur moyenne nulle, carrée à valeur moyenne non nulle,....).

Le chapitre suivant sera consacré à la présentation d'un algorithme de synthèse plus générale basé sur des lames biréfringentes associées à des lames à cristaux liquides et qui permet de traiter des fonctions de transferts de formes quelconques.

Chapitre IV

Algorithme de synthèse des filtres biréfringents à fonction de transfert de forme quelconque

Dans le chapitre précédent, il a été question de décrire la procédure de synthèse d'un filtre biréfringent dont la fonction de transfert est symétrique et où les C_i sont réels.

Dans ce chapitre, la forme de la fonction de transfert de ce filtre peut être de forme quelconque ce qui conduit à des coefficients qui seront en général complexes.

Cette nouvelle méthode de synthèse offre une grande liberté dans le choix de la fonction de transfert $C(w)$ du filtre dont la configuration de base est montrée sur la figure (fig.4.1).

Le filtre biréfringent du chapitre précédent est constitué seulement de lames biréfringentes placées entre deux polariseurs l'un à l'entrée et l'autre à la sortie, alors que le filtre objet de l'étude de ce chapitre est constitué aussi d'une série de lames biréfringentes mais chacune est accompagnée d'une lame à cristaux liquides (Liquid Crystal Cell, LCC). Aussi, le polariseur de sortie est précédé d'une lame à cristaux liquides.

Comme on a vu dans le chapitre 3, la nouvelle procédure de synthèse va permettre de déterminer les angles de rotation de chaque lame biréfringente et du polariseur de sortie, ainsi que les retards introduits par chaque LCC responsable de la forme complexe des coefficients C_i .

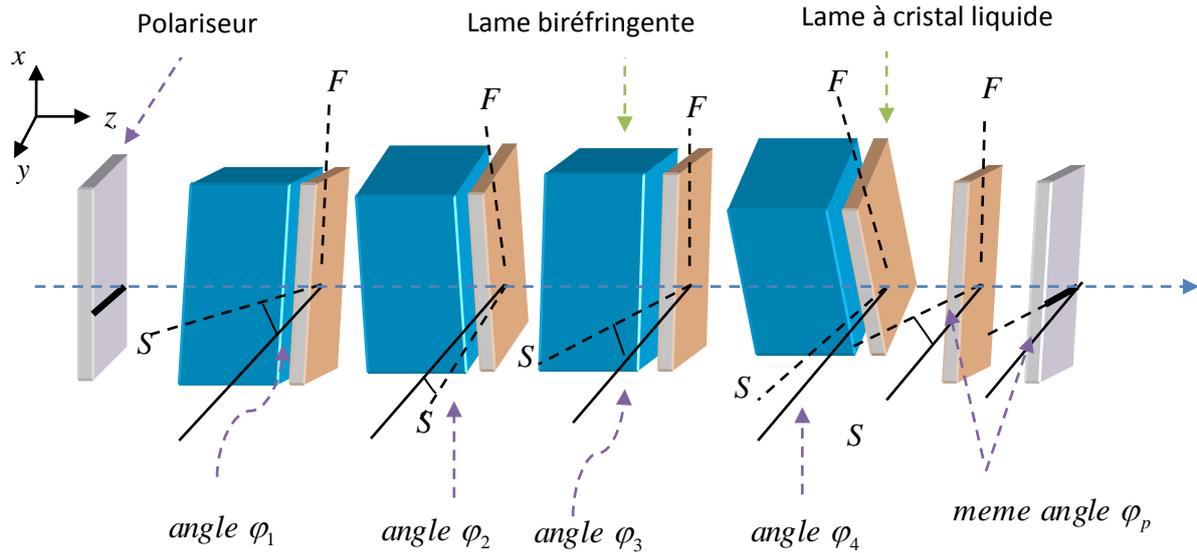


Figure.4.1 Structure d'un filtre biréfringent à gabarit prédéfini (quatre étages)

Nous allons commencer par décrire la nouvelle procédure de synthèse, ensuite nous allons donner un exemple d'application.

4.1 Etude théorique

4.1.1 Généralité

Le but de cette procédure de synthèse est de trouver les angles de rotation des n lamelles biréfringentes, les retards introduits par les $n + 1$ lamelles à cristaux liquides et l'angle du polariseur de sortie, qui permettent d'obtenir la fonction de transfert désirée. Pour un $C(w)$ donné, $2n + 2$ paramètres sont à déterminer. Dans cette partie, nous sommes libres de choisir le nombre des composants de $C(w)$ tout en spécifiant les parties réelle et imaginaire des $n + 1$ coefficients C_i . L'épaisseur e des lamelles (toutes les lamelles ont la même épaisseur) est déterminée par la périodicité de la fonction de transfert désirée (voir chapitre 3).

Les notations, les approximations et certaines informations utilisées ici sont les mêmes que celles décrites dans le chapitre précédent. Le plus important dans ce chapitre est le rôle que jouent les LCCs. Une LCC est utilisée en association avec chaque lame biréfringente du filtre ainsi qu'avec le polariseur de sortie. Puisque les LCCs n'ont pas été utilisées dans le chapitre précédent, nous allons brièvement décrire leur fonctionnement.

Les LCCs se comportent essentiellement comme de très petites lamelles biréfringentes. Une LCC introduit une différence de phase de b radians (où $0 < b < 2\pi$) entre les axes lents (S) et les axes rapides (F) des lamelles qui constituent le filtre biréfringent. On suppose que cette différence de phase soit indépendante de la fréquence w ; ceci est approximativement acceptable pour les cas que nous traitons ici. Alors, l'impulsion qui passe

à travers la LCC et polarisée dans la direction de l'axe S , est affectée du terme e^{-ib} , tandis que l'impulsion qui est polarisée suivant l'axe rapide F , est la même que celle obtenue dans le chapitre 3.

Comme dans le chapitre précédent, nous supposons que le filtre biréfringent est sans perte, c'est-à-dire que l'énergie doit-être conservée en tout point situé entre les éléments du filtre (voir *Annexe D*).

Il est important de rappeler qu'il est plus convenable d'utiliser les angles relatifs (angles mesurés entre les éléments).

4.1.2 Procédure de synthèse

4.1.2.1 Détermination les coefficients C_i de la réponse impulsionnelle

Comme mentionné dans le chapitre précédent, la méthode d'approximation utilisée pour déterminer la réponse impulsionnelle est identique. Puisque la transformée de Fourier inverse de la fonction de transfert du filtre est sa réponse impulsionnelle, nous obtenons à partir de la transformée de Fourier inverse de la fonction de transfert du filtre de la figure (fig.4.1), la réponse impulsionnelle qui s'écrit sous la forme :

$$c(t) = C_0 \delta(t) + C_1 \delta(t - a) + C_2 \delta(t - 2a) + \dots + C_n \delta(t - na) \quad (4.1)$$

Ainsi la réponse impulsionnelle de notre filtre est constituée d'une série d'impulsions périodiques dont les amplitudes sont données par les C_i .

Dans la synthèse, nous commençons avec la fonction de transfert $C(w)$ désirée. Ceci est équivalent à la réponse impulsionnelle $C(t)$ fournie par le filtre. Ensuite nous déterminerons les trains d'impulsions situés en tout point situé entre les éléments du filtre, en commençant par le dernier composant (le polariseur de sortie) jusqu'au polariseur placé à l'entrée. Ces impulsions sont dénotées par les F_i^j et les S_i^j de la figure (fig.4.2), où les impulsions F_i^j sont polarisées le long de l'axe rapide de la j^{ieme} lame et les impulsions S_i^j le long de l'axe lent. C'est à partir de ces impulsions que l'on calculera les angles des lames biréfringentes, ceux des LCCs et l'angle du polariseur de sortie.

4.1.2.2 Détermination de la composante orthogonale bloquée $D(w)$

Supposons que $C(w)$ et donc les C_i désirés de l'équation (4.1) soient choisis. Nous devons alors trouver le signal $D(w)$ qui est polarisé perpendiculairement à $C(w)$ et donc stoppé par le polariseur de sortie. Puisque le filtre est sans perte (entre le polariseur placée à la sortie et celui situé à l'entrée), l'énergie du signal qui converge vers la première lame doit-être égale à la somme des énergies dans les $C(w)$ et $D(w)$. A cet effet l'équation obtenue a la forme suivante

$$C(w)C^*(w) + D(w)D^*(w) = (I_0^0)^2 \quad (4.2)$$

où I_0^0 représente l'impulsion qui est incidente sur la première lame. En réécrivant cette équation, nous avons :

$$D(w)D^*(w) = (I_0^0)^2 - C(w)C^*(w) \quad (4.3)$$

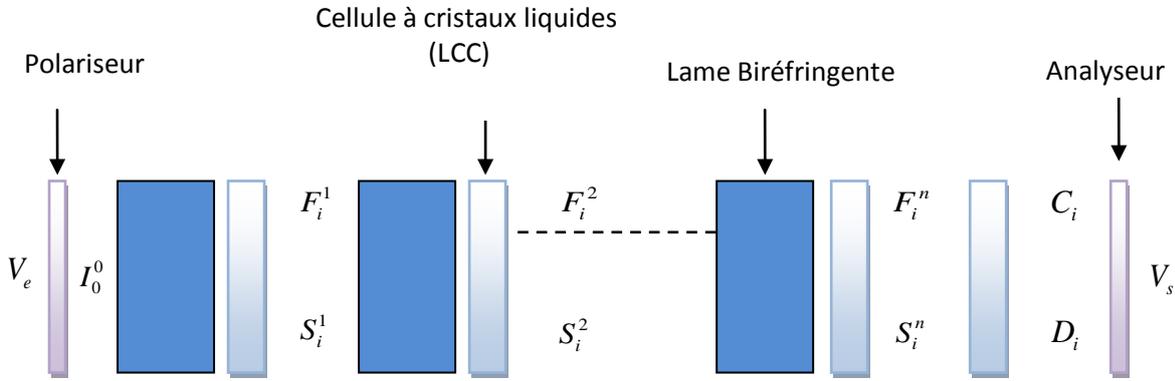


Figure 4.2 : Filtre à N étages

Maintenant, cherchons la valeur de I_0^0 . Le coté gauche de l'équation (4.3) ne doit pas être négatif pour toutes les fréquences ; ainsi la valeur $(I_0^0)^2$ doit être plus grande ou égale au maximum de la valeur de $C(w).C(w)^*$. Après avoir obtenu I_0^0 , nous pouvons calculer $D(w)$ à partir de $D(w).D(w)^*$ en utilisant la méthode suivante [28].

- **Méthode de calcul de $D(w)$**

Ici, nous décrivons une méthode pour calculer $D(w)$ à partir de $|D(w)|^2$, la méthode est similaire à celle donnée dans le chapitre 3, mais différente dans certains détails.

Nous commençons avec le polynôme semi-défini positif .

$$\begin{aligned} |D(w)|^2 &= D(w)D(w)^* = (I_0^0)^2 - C(w)C(w)^* \\ &= A_n e^{jnaw} + A_{n-1} e^{j(n-1)aw} + \dots + A_1 e^{jaw} + A_0 + A_1^* e^{-jaw} + \dots + A_{n-1}^* e^{-j(n-1)aw} + A_n^* e^{-jnaw} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Posons $x = e^{-jaw}$ et en inversant l'ordre des termes, l'équation (4.4) devient

$$|D(w)|^2 = A_n^* x^n + A_{n-1}^* x^{n-1} + \dots + A_1^* x + A_0 + A_1 x^{-1} + \dots + A_{n-1} x^{-(n-1)} + A_n x^{-n} \quad (4.5)$$

Supposons que x_1 est la racine de l'équation (4.5), alors

$$A_n^* x_1^n + A_{n-1}^* x_1^{n-1} + \dots + A_1^* x_1 + A_0 + A_1 x_1^{-1} + \dots + A_{n-1} x_1^{-(n-1)} + A_n x_1^{-n} = 0 \quad (4.6)$$

Si nous prenons maintenant le conjugué de l'équation (4.6), nous obtenons

$$A_n (x_1^*)^n + A_{n-1} (x_1^*)^{n-1} + \dots + A_1 (x_1^*) + A_0^* + A_1^* (x_1^*)^{-1} + \dots + A_{n-1}^* (x_1^*)^{-(n-1)} + A_n^* (x_1^*)^{-n} = 0 \quad (4.7)$$

L'équation (4.7) peut se réécrire comme

$$A_n \left(\frac{1}{x_1^*}\right)^n + A_{n-1} \left(\frac{1}{x_1^*}\right)^{n-1} + \dots + A_1 \left(\frac{1}{x_1^*}\right) + A_0^* + A_1^* \left(\frac{1}{x_1^*}\right)^{-1} + \dots + A_{n-1}^* \left(\frac{1}{x_1^*}\right)^{-(n-1)} + A_n^* \left(\frac{1}{x_1^*}\right)^{-n} = 0 \quad (4.8)$$

Mais, nous voyons maintenant que l'équation (4.6) et (4.8) ont des coefficients identiques, avec x_1 devenant la variable dans l'équation (4.6) et $(1/x_1^*)$ la variable dans l'équation (4.8). Ainsi, si x_1 est une racine de l'équation (4.5), alors $(1/x_1^*)$ en est aussi. Une de ces deux racines est associée avec $D(x)$ et l'autre avec $D(x)^*$. D'ici nous associons la moitié des racines de l'équation (4.5) avec $D(x)$ et l'autre moitié avec $D(x)^*$, $D(x)$ (et par conséquent $D(w)$) peut alors être construit à partir de ces racines.

Pour résumer, commençons avec $|D(w)|^2$ écrit sous la forme de l'équation (4.4). Les A_i sont en général complexes. La forme de l'équation

$$A_n^* x^n + A_{n-1}^* x^{n-1} + \dots + A_1^* x + A_0 + A_1 x^{-1} + \dots + A_{n-1} x^{-(n-1)} + A_n x^{-n} = 0 \quad (4.9)$$

Réolvons cette équation pour ses $2n$ racines. Ces racines existent toujours en paires réciproques de la forme :

$$\left(x_1, \frac{1}{x_1^*}\right), \left(x_2, \frac{1}{x_2^*}\right), \dots, \left(x_n, \frac{1}{x_n^*}\right) \quad (4.10)$$

Construisons toutes les équations possibles en utilisant une seule racine à partir de chaque rang de (4.10). Un groupement choisi est, par exemple

$$\begin{aligned} & (x - x_1)(x - x_2)\left(x - \frac{1}{x_3^*}\right)\left(x - \frac{1}{x_4^*}\right)\dots\left(x - \frac{1}{x_n^*}\right) \\ & = x^n - d_{n-1}x^{n-1} + \dots + d_2x^2 + d_1x + d_0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Chaque différent groupement des racines donnent différentes expressions de $D(w)$.

Les Di sont proportionnels aux di , où q est la constante de proportionnalité, qui est en générale complexe. En écrivant q sous la forme .

$$q = |q|.e^{j\mu}$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} D_0 &= |q|.e^{j\mu}d_0 = e^{j\mu}D_0' \\ D_1 &= |q|.e^{j\mu}d_1 = e^{j\mu}D_1' \\ D_2 &= |q|.e^{j\mu}d_2 = e^{j\mu}D_2' \\ &\dots\dots\dots \\ D_n &= |q|.e^{j\mu}d_n = e^{j\mu}D_n' \end{aligned} \tag{4.12}$$

où

$$D_i' = |q|.d_i$$

La valeur de $|q|$ est calculée à partir de

$$|q|^2 \cdot [d_0d_0^* + d_1d_1^* + \dots\dots\dots + d_{n-1}d_{n-1}^* + 1] = A_0 \tag{4.13}$$

Si $D(w)$ est une solution de l'équation (4.4), alors : $exp(j\mu).D(w)$ l'est aussi.

$$\begin{aligned} D(w) &= e^{j\mu} [D_0' + D_1'e^{-jaw} + D_2'e^{-j2aw} + \dots\dots\dots + D_n'e^{-jnaw}] \\ &= D_0 + D_1e^{-jaw} + D_2e^{-j2aw} + \dots\dots\dots + D_n e^{-jnaw} \end{aligned} \tag{4.14}$$

Bien que cette méthode nous donne les valeurs de D_i' , elle ne permet pas de déterminer la valeur de μ . La valeur de μ doit être déterminée à partir d'autres considérations, et comme décrite brièvement, cette valeur est fixée par la façon dans laquelle la synthèse est formulée.

4.1.2.3 La détermination de α_p, b_p, μ

Maintenant, établissons une relation entre les entrées (les F_i^n et S_i^n) et les sorties (les C_i et D_i) de LCC finale. Rappelons que les F_i^n et S_i^n sont les composantes situées le long des axes rapide et lent du nième étage tandis que les C_i et D_i sont les composantes situées le long des axes rapide et lent de la LCC finale.

En se référant à la figure (fig. F.1.a, voir Annexe F) nous trouvons

$$\begin{pmatrix} F_i^n \\ S_i^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{jb_p} \sin \theta_p & -\cos \theta_p \\ e^{jb_p} \cos \theta_p & \sin \theta_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_i \\ e^{j\mu} D_i' \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

où θ_p est l'angle relatif de la LCC finale (et aussi du polariseur de sortie), et b_p est le retard de phase introduit par cette LCC.

Nous devons ensuite déterminer les valeurs μ , θ_p et b_p . Pour cela, nous dérivons et résolvons trois équations simultanées. La première de ces équations est obtenue en notant que la première impulsion du $n^{ième}$ étage doit avoir une amplitude réelle. Ceci est équivalent à dire que F_0^n doit être réel. Cette condition découle de notre convention qui suppose que la lumière qui passe à travers une LCC et polarisée suivant la direction S est affectée d'un terme de phase e^{-jb} tandis que la lumière polarisée suivant la direction F est n'en est pas affectée (terme de phase unité). En effet, la première impulsion sortante du nième étage doit être polarisée le long de son axe F . Cette impulsion est le résultat de la décomposition de tous les sous composantes sur les différents axes rapides des étages précédents. Chaque sous composante sera affectée d'un terme de phase unité en passant dans la LCC et donc sera réelle (voir fig.4.3). A partir de l'équation (4.6), nous obtenons pour F_0^n .

$$F_0^n = e^{jb_p} \cdot \sin \theta_p \cdot C_0 - e^{j\mu} \cdot \cos \theta_p \cdot D_0' \quad (4.16)$$

En plaçant les parties imaginaires du coté gauche et droit de cette équation, nous obtenons la première de nos trois équations désirées

$$\sin \theta_p \left[\text{Im}(C_0) \cdot \cos b_p + \text{Re}(C_0) \cdot \sin b_p \right] - \cos \theta_p \left[\text{Im}(D_0') \cdot \cos \mu + \text{Re}(D_0') \cdot \sin \mu \right] = 0 \quad (4.17)$$

Où Im et Re représentent respectivement les parties imaginaire et réelle de la valeur en question. Les deux équations restantes sont obtenues à partir de la première et dernière impulsions du nième étage, respectivement F_n^n et S_0^n . Nous avons $F_n^n = S_0^n = 0$.

qui avec l'association de l'équation (4.15) donne,

$$e^{j(b_p - \mu)} \cdot \tan \theta_p = \frac{D_n'}{C_n} \quad (4.18)$$

et

$$e^{-j(b_p - \mu)} \cdot \tan \theta_p = -\frac{C_0}{D_0'} \quad (4.19)$$

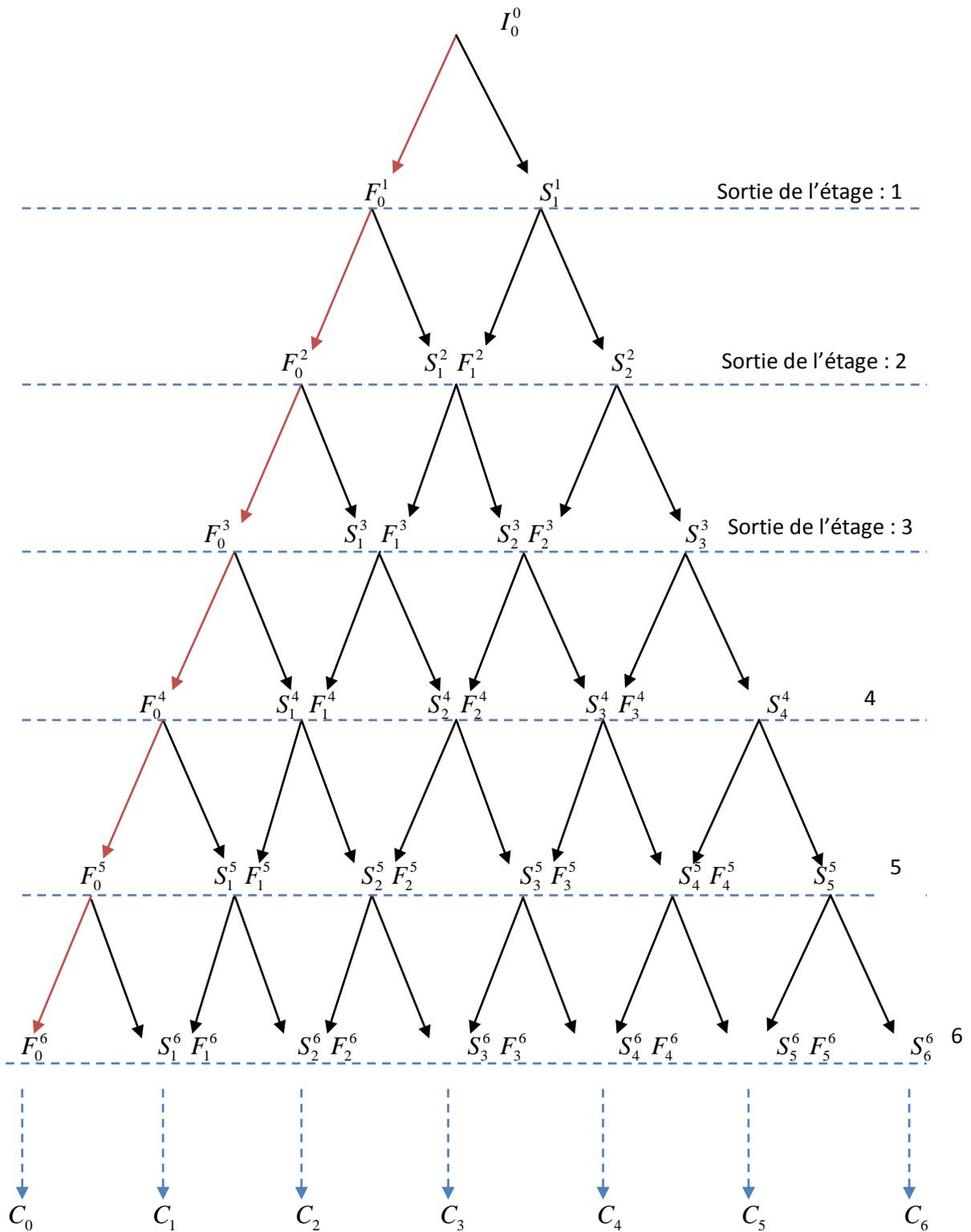


Figure.4.3 L'évolution des impulsions à travers les différents étages.

En prenant le conjugué complexe des deux cotés de l'équation (4.19) , nous obtenons

$$e^{j(b_p - \mu)} \cdot \tan \theta_p = -\frac{C_0^*}{D_0^*} \quad (4.20)$$

En combinant cette équation avec l'équation (4.18) , nous obtenons

$$C_0^* C_n + D_0^* D_n' = 0 \quad (4.21)$$

Cette relation est vraie si les équations (4.18) et (4.19) sont satisfaites simultanément. En notant que $D_i' = e^{-j\mu} D_i$, nous pouvons écrire (4.21) comme

$$C_0^* C_n + D_0^* D_n = 0 \quad (4.22)$$

Mais l'équation (4.22) est automatiquement satisfaite à partir de la conservation d'énergie puisqu'elle est équivalente à l'équation (D.9) (voir Annexe D).

Puisque les C_i et D_i' sont complexes, nous pouvons réécrire (4.18) sous la forme suivante

$$e^{i(b_p - \mu)} \cdot \tan \theta_p = \left| \frac{D_n'}{C_n} \right| \cdot e^{i\alpha_p} \quad (4.23)$$

où dans (4.23) nous avons exprimé D_n' / C_n par son module et sa phase. Il est évident à partir de (4.23) que l'angle de rotation θ_p du polariseur de sortie et la LCC finale devrait être choisi tel que

$$\tan \theta_p = \left| \frac{D_n'}{C_n} \right| \quad (4.24)$$

Par manipulations supplémentaires des équations (4.17), (4.18), et (4.19), nous obtenons

$$\tan b_p = -\frac{\text{Im}(C_0)}{\text{Re}(C_0)} \quad (4.25)$$

$$\text{et} \quad \mu = b_p - \alpha_p \quad (4.26)$$

Ayant déterminé α_p , b_p et μ , nous pouvons remplacer ces valeurs dans (4.15) pour obtenir les sorties le long des axes rapide et lent du nième étage F_i^n et S_i^n . Ensuite, nous devons trouver les angles de rotation et le retard de phase des LCC des n étages du filtre.

En se référant à la figure (fig. F.1) (voir Annexe F) qui lie les entrées et sorties de chaque étage, et si on pose $i = n$ dans l'équation (F.4) (voir Annexe F) , nous aurons les relations qui

lient l'entrée et la sortie pour le nième étage. Nous connaissons la sortie F_i^n et S_i^n et nous souhaitons trouver θ_n, b_n , et l'entrée. Comme discuté en détail dans le chapitre 3, à partir d'une entrée et une sortie donnée on a

$$e^{jb_p} \cdot \tan \theta_n = -\frac{F_{n-1}^n}{S_n^n} = \left| \frac{F_{n-1}^n}{S_n^n} \right| \cdot e^{j\alpha_n} \quad (4.27)$$

et
$$F_0^{n*} F_{n-1}^n + S_1^{n*} S_n^n = 0 \quad (4.28)$$

L'équation (4.28) peut être satisfaite par un choix convenable de θ_n et b_n , tandis que (4.27) est automatiquement satisfaite par la conservation de l'énergie. Connaissant θ_n et b_n , nous pouvons alors calculer l'entrée pour le n^{ieme} étage (qui est aussi la sortie du $(n-1)^{ieme}$ étage) à partir de (F.4) (voir Annexe F). Nous pouvons alors répéter la procédure décrite pour déterminer θ_{n-1} et b_{n-1} . De cette façon, nous pouvons répéter la procédure en partant de la LCC finale et en parcourant le filtre entier jusqu'à ce que tous les angles de rotation ainsi que les retards de phase des LCCs soient complètement déterminés. Les équations générales pour le j^{ieme} étage sont

$$e^{jb_j} \cdot \tan \theta_j = -\frac{F_{j-1}^j}{S_j^j} = \left| \frac{F_{j-1}^j}{S_j^j} \right| \cdot e^{j\alpha_j} \quad (4.29)$$

et
$$F_0^{j*} F_{j-1}^j + S_1^{j*} S_j^j = 0 \quad (4.30)$$

qui donne
$$b_j = \alpha_j \quad (4.31)$$

et
$$\tan \theta_j = \left| \frac{F_{j-1}^j}{S_j^j} \right| \quad (4.32)$$

L'équation (4.30) est toujours automatiquement satisfaite par la conservation de l'énergie (voir Annexe F).

- **Cas particulier**

Si $\alpha_j = 0$ une (LCC) n'est pas nécessaire (en théorie) pour cet étage particulier. En plus, si $\alpha_j = \pi$, une solution alternative de l'équation (4.29) est

$$b_j = 0 \quad (4.33)$$

et
$$\tan \theta_j = -\left| \frac{F_{j-1}^j}{S_j^j} \right| \quad (4.34)$$

Dès lors, à chaque fois que $\alpha_j = \pi$, alors les équations (4.33) et (4.34), plutôt que (4.31) et (4.32), devraient être utilisées pour déterminer b_j et α_j

A ce stade, nous avons toutes les informations nécessaires pour synthétiser un filtre biréfringent. Voici, en résumé, la présentation de la procédure de synthèse.

4.1.3 Résumé de la procédure de synthèse

- 1) Choisissons la fonction de transfert désirée $C(w)$
- 2) L'épaisseur nécessaire pour toutes les lames biréfringentes est donnée par $e = a.c / \delta n$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide, δn est la biréfringence d'une lame et a est déterminée à partir de la périodicité de la fonction de transfert désirée.
- 3) Choisissons une valeur réelle pour I_0^0 . Le choix est arbitraire tant que $(I_0^0)^2$ soit plus grand ou égal au maximum de $C(w).C(w)^*$.
- 4) Calculons $D(w).D(w)^*$ à partir de l'équation(4.3). pour déterminer $D(w)$ à partir de $D(w).D(w)^*$. Cela donne les D_i' de l'équation(4.14) mais ne détermine pas μ . Plusieurs solutions $D(w)$ sont alors trouvées. Chaque solution $D(w)$ associée à $C(w)$ représente un filtre réalisable. Les D_i' de ces $D(w)$ sont en général complexes. Les étapes restantes devront être exécutées pour chaque solution $D(w)$.
- 5) Calculons l'angle de rotation θ_p du polariseur de sortie, qui est aussi celui de la LCC finale, à partir de l'équation (4.24), le retard de phase b_p de la LCC finale à partir de l'équation (4.25), et μ à partir de l'équation (4.26).
- 6) Calculons les F_i^n et S_i^n à partir de l'équation (4.15)
- 7) En utilisant l'équation(4.32), calculons l'angle de rotation θ_n du dernier étage. Le retard de phase b_n de la LCC pour cet étage devra être calculé à partir de l'équation(4.31). En utilisant les équations (E.1) et (E.2) (*voir Annexe E*), calculons l'entrée du dernier étage (qui est la sortie de l'étage précédent).
- 8) Répéter la procédure de l'étape (7) pour chaque étage jusqu'à ce que l'angle de rotation et le retard de phase de la LCC de chaque étage soient déterminés. Si $\alpha_j = \pi$ pour un étage particulier, les équations (4.33) et (4.34), plutôt que (4.31) et (4.32) devront être utilisées pour calculer θ_i et b_j .

- **Discussion**

La procédure de synthèse décrite précédemment s'applique au cas de fonctions de transfert ayant des coefficients C_i complexes. Dans le chapitre 3, nous nous sommes limités aux fonctions de transfert ayant des C_i réels. Cela signifie que nous nous sommes limités aux $C(w)$ dont les parties réelles sont paires et les parties imaginaires sont impaires. Ces restrictions ont été maintenant enlevées ; désormais les parties réelle et imaginaire de $C(w)$ peuvent être asymétriques.

Toutefois, une objection pourrait être soulevée quant à la nature complexe des coefficients C_i . En effet, notre filtre a une réponse impulsionnelle complexe qui est donnée par l'équation (4.1) ; mais il est bien connu que la réponse impulsionnelle d'un filtre physique doit être réelle. Ce dilemme s'explique du fait que dans notre théorie, nous avons supposé que les cellules à cristaux liquides (LCC) utilisées dans le filtre sont achromatiques ; c'est-à-dire qu'elles introduisent un retard de phase qui est indépendant de la fréquence w . Un tel retard n'est pas réalisable en pratique. Cependant, sur une gamme de fréquence de travail $\Delta\omega$ bien limitée, ces LCCs peuvent être supposées achromatiques. Du coup, la réponse du filtre synthétisé approxime parfaitement la courbe $C(w)$ à l'intérieur de $\Delta\omega$. A l'extérieur de cette gamme de fréquence, la réponse du filtre synthétisé s'écarte de $C(w)$. Puisque les filtres biréfringents sont ordinairement conçus pour être utilisés dans une gamme de fréquences limitée, l'hypothèse des LCC achromatiques représente alors une situation acceptable.

Ainsi, nous voyons que $C(w)$ décrit avec justesse la fonction de transfert d'un filtre seulement dans une gamme de spectre limitée. Mais, quand nous prenons la transformée de Fourier inverse de $C(w)$ pour obtenir la réponse impulsionnelle donnée par l'équation (4.1), nous avons incorrectement supposé que $C(w)$ est valide pour toutes les valeurs possibles de la fréquence w . D'ici, il n'est pas surprenant que le résultat soit une réponse impulsionnelle complexe pour le filtre. Quoique l'équation (4.1) ne donne pas avec justesse la réponse impulsionnelle, l'approche du domaine temporel est utile pour visualiser et comprendre la procédure de synthèse.

Le filtre obtenu à partir de cette procédure de synthèse contient une LCC associée au polariseur de sortie. Dans la pratique, il est souvent possible de retirer cette LCC. En effet, si on suppose à titre d'exemple que nous avons synthétisé un filtre qui a un $C(w)$ désiré. Si nous retirons la LCC finale de ce filtre, alors sa nouvelle fonction de transfert sera $\exp(ib_p)C(w)$. Ainsi, la nouvelle fonction de transfert diffère de la transmittance désirée seulement par ce facteur de phase. Souvent, l'introduction de ce facteur de phase n'a pas de conséquence, et d'ici la LCC finale peut être retirée. De plus, nous notons à partir de l'équation (4.25) que si C_0 est choisi pour être réel, $b_p = 0$ et le besoin d'une LCC finale est automatiquement annulé.

Finalement, nous notons que (comme vu sur les figures 4.1 et 4.2) le filtre présenté dans ce chapitre contient un grand nombre d'éléments biréfringents que le filtre présenté dans le chapitre précédent. Il devrait être souligné que les figures (fig.4.1 et fig.4.2) montrent des filtres prévus par la théorie. Dans la pratique, le filtre présenté dans le chapitre 3 requiert l'utilisation d'une LCC en association avec chaque lame biréfringente du filtre pour compenser légèrement les variations sur les épaisseurs de ces lames. Par conséquent, les formes pratiques du filtre de ce chapitre et celui du chapitre 3 sont identiques ; la flexibilité additionnelle est obtenue alors 'sans dépense' pour la synthèse du présent filtre complexe. Dans ce chapitre, chaque LCC assure donc deux fonctions :

- a) Introduit le retard demandé par la théorie
- b) Compense la variation sur les épaisseurs des lames biréfringentes.

4.2 Exemple d'application

Un exemple d'application permet d'illustrer la procédure de synthèse présentée dans le paragraphe 4.1.2. Supposons que nous souhaitions faire une approximation d'une fonction de transfert réelle $G(w)$ montrée sur la figure (fig.4.3). Puisque $G(w)$ est ni paire ni impaire, des coefficients complexes sont présents dans son approximation en série de Fourier. Nous nous limitons à une série de Fourier comptant sept coefficients complexes.

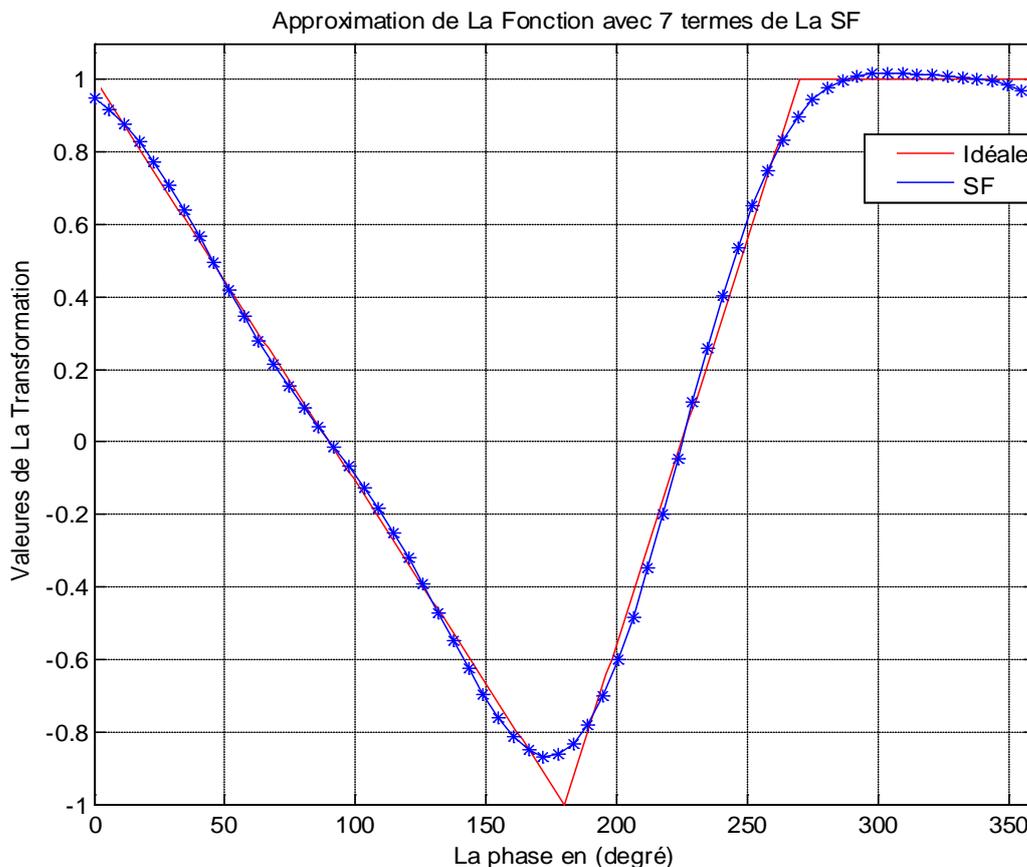


Figure 4.4 Fonction de transfert idéale et SF avec 7 termes.

La fonction de transfert idéale $G(w)$ est montrée en rouge et son approximation en série de Fourier $K(w)$ est illustrée en Bleu. Cette approximation est donnée par

$$K(w) = \left(\frac{1}{\pi^2}\right) \left[\left(\frac{4}{9} - j\frac{2}{9}\right)e^{j3aw} - e^{j2aw} + (4 + j2)e^{jaw} + \frac{\pi^2}{4} + (4 - j2)e^{-jaw} + e^{-j2aw} + \left(\frac{4}{9} + j\frac{2}{9}\right)e^{-j3aw} \right]$$

et est représentée en traits pointillés sur la Figure (fig. 4.3). En suivant la démarche exposée dans le chapitre 3, nous allons transformer l'approximation $K(w)$ non causale en une fonction causale en la multipliant par e^{-j3aw} , ce qui donne

$$C(w) = e^{-j3aw} \cdot K(w)$$

$$= \left(\frac{1}{\pi^2}\right) \left[\left(\frac{4}{9} - j\frac{2}{9}\right)e^{-jaw} + (4 + j2)e^{-j2aw} + \frac{\pi^2}{4}e^{-j3aw} + (4 - j2)e^{-j4aw} + e^{-j5aw} + \left(\frac{4}{9} + j\frac{2}{9}\right)e^{-j6aw} \right]$$

La multiplication par e^{-j3aw} est équivalente à introduire un pure retard dans le domaine temporel. Ainsi la réponse impulsionnelle et la fonction de transfert restent les mêmes. Par ailleurs, comme les séries contiennent sept termes, le filtre synthétisé contient alors six étages.

Calculons à présent $D(w)$. A partir de l'équation (4.3) nous avons

$$|D(w)|^2 = D(w)D(w)^*$$

$$= (I_0^0)^2 - 0.44257 - (0.11139 + j0.14695)e^{jaw} - (0.11139 + j0.14695)e^{-jaw} + \dots$$

$$- (0.09990 + j0.12775)e^{j2aw} - (0.09990 - j0.12775)e^{-j2aw} - (-0.05961 + j0.05232)e^{j3aw} + \dots$$

$$- (-0.05961 - j0.05232)e^{-j3aw} - 0.05589x^{-j4aw} - 0.05589x^{j4aw} - (-0.00913 + j0.00456)x^{j5aw} + \dots$$

$$- (-0.00913 - j0.00456)e^{-j5aw} - (0.00152 - j0.00203)e^{j6aw} - (0.00152 + j0.00203)e^{-j6aw}.$$

La valeur I_0^0 de l'impulsion incidente doit-être fixée pour obtenir $|D(w)|^2$. Elle peut avoir n'importe quelle valeur réelle tant que $(I_0^0)^2$ soit plus grand que la valeur maximale de $C(w).C(w)^*$. Le maximum de $C(w).C(w)^*$ a été calculé et a une valeur de 1.035. Ainsi, nous fixons $I_0^0 = 1.050$, ce qui donne $(I_0^0)^2 = 1.1025$. Si on fait le changement de variable $x = e^{-j3aw}$, l'équation de $|D(w)|^2$ sera donc

$$|D(w)|^2 = -(0.00152 + j0.00203)x^6 - (-0.00913 - j0.00456)x^5 - 0.05589x^4 + \dots$$

$$- (-0.05961 + j0.05232)x^3 - (0.09990 - j0.12775)x^2 - (0.11139 - j0.14695)x + 0.65993 + \dots$$

$$- (0.11139 + j0.14695)x^{-1} - (0.09990 + j0.12775)x^{-2} - (-0.05961 - j0.05232)x^{-3} + \dots$$

$$-0.05589x^{-4} - (-0.00913 + j0.00456)x^{-5} - (0.00152 - j0.00203)x^{-6}$$

En suivant la méthode de calcul de $D(w)$ précédente, nous trouvons les racines de cette équation. Ce sont alors 128 ensembles possibles des D_i qui peuvent être obtenus à partir de ces racines. Cependant, 64 de ces ensembles sont simplement les négatifs des autres soixante quatre. Nous considérons seulement l'ensemble qui est formé par le polynôme :

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)(x - x_6)$$

En exécutant la multiplication indiquée, nous obtenons

$$x^6 + (-0.63801 - i1.04187)x^5 + (0.02599 - i0.29300)x^4 + (0.06553 + i0.44610)x^3 + \dots \\ + (-0.23903 - i0.05436)x^2 + (0.04871 - i0.00793)x + (-0.00721 + i0.00961).$$

Comme annoncé dans les équations (4.12), un ensemble de D_i' est proportionnel aux coefficients de ce polynôme. En évaluant $|q|$ dans les équations (E.13) (voir Annexe E), nous trouvons que $|q| = 0.45943$ et aussi :

$$D_0' = -0.00331 + i0.00441 \qquad D_3' = 0.03011 + i0.20496 \\ D_5' = -0.29312 - i0.48203 \quad D_1' = 0.02238 - i0.00364 \qquad D_4' = 0.01194 - i0.13461 \\ D_6' = 0.45943 \quad D_2' = -0.10982 - i0.02495$$

A partir des équations (4.24), (4.25), (4.26) nous pouvons maintenant calculer θ_p, b_p, μ . Les résultats sont :

$$\theta_p = 83^\circ 45', \quad b_p = 0.46365 \text{ rad}, \quad \mu = -5.35589 \text{ rad}$$

En utilisant les équations (4.12), nous trouvons que :

$$D_0 = e^{j\mu} D_0' = 0.00552 \qquad D_4 = e^{j\mu} D_4' = 0.11485 - j0.07122 \\ D_1 = e^{j\mu} D_1' = 0.01634 + j0.01572 \qquad D_5 = e^{j\mu} D_5' = 0.20976 - j0.52372 \\ D_2 = e^{j\mu} D_2' = -0.04593 - j0.10282 \qquad D_6 = e^{j\mu} D_6' = 0.27566 + j0.36755 \\ D_3 = e^{j\mu} D_3' = -0.1459 + j0.14706$$

et par conséquent $D(w)$ est complètement connu. L'équation (4.15) est maintenant utilisée pour calculer les F_i^6 et S_i^6 , ce qui donne

$$\begin{pmatrix} F_0^6 \\ F_1^6 \\ F_2^6 \\ F_3^6 \\ F_4^6 \\ F_5^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.05065 \\ -0.09187 - j0.04675 \\ 0.27526 + j0.37154 \\ 0.23817 + j0.09512 \\ 0.43791 + j0.00776 \\ -0.11293 + j0.01201 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} S_1^6 \\ S_2^6 \\ S_3^6 \\ S_4^6 \\ S_5^6 \\ S_6^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00637 + j0.01069 \\ -0.01604 - j0.06272 \\ -0.12067 + j0.15836 \\ 0.16353 - j0.07079 \\ 0.19863 - j0.52554 \\ 0.27731 + j0.36975 \end{pmatrix}$$

En plus, nous devons noter que F_0^6 doit être réel et que F_6^6 et S_0^6 doivent être égales à zéro.

Nous sommes alors capables de calculer θ_6 et b_6 , l'angle relatif du dernier étage et le retard de la LCC finale, respectivement. En utilisant l'équation (4.32), nous trouvons

$$\theta_6 = 13^\circ 48'$$

et à partir de l'équation (4.31), $b_6 = 5.24997 \text{ rad}$

Les impulsions d'entrée des six étages sont maintenant calculées à partir des équations (E.3) et (E.4) (voir *Annexe E*) Les équations (4.31) et (4.32) sont encore appliquées

$$\theta_5 = 36^\circ 45' \quad \text{et} \quad b_5 = 6.11153 \text{ rad}$$

En appliquant les équations (E.3) et (E.4) (voir *Annexe E*) et les équations (4.31) et (4.32) nous obtenons les autres θ_i et b_i .

L'ensemble des résultats est présenté comme suit

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6^\circ 15' \\ 13^\circ 48' \\ 36^\circ 45' \\ 43^\circ 00' \\ 36^\circ 45' \\ 13^\circ 48' \\ 83^\circ 45' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.10838 \\ 2.96994 \\ 0.74123 \\ 0.74123 \\ 2.96994 \\ 5.24997 \\ 0.46365 \end{pmatrix} \text{ radians}$$

En appliquant le formalisme de Jones, on peut trouver la réponse de notre filtre. Cette réponse est représentée par la courbe en trait vert sur la figure (fig.4.5).

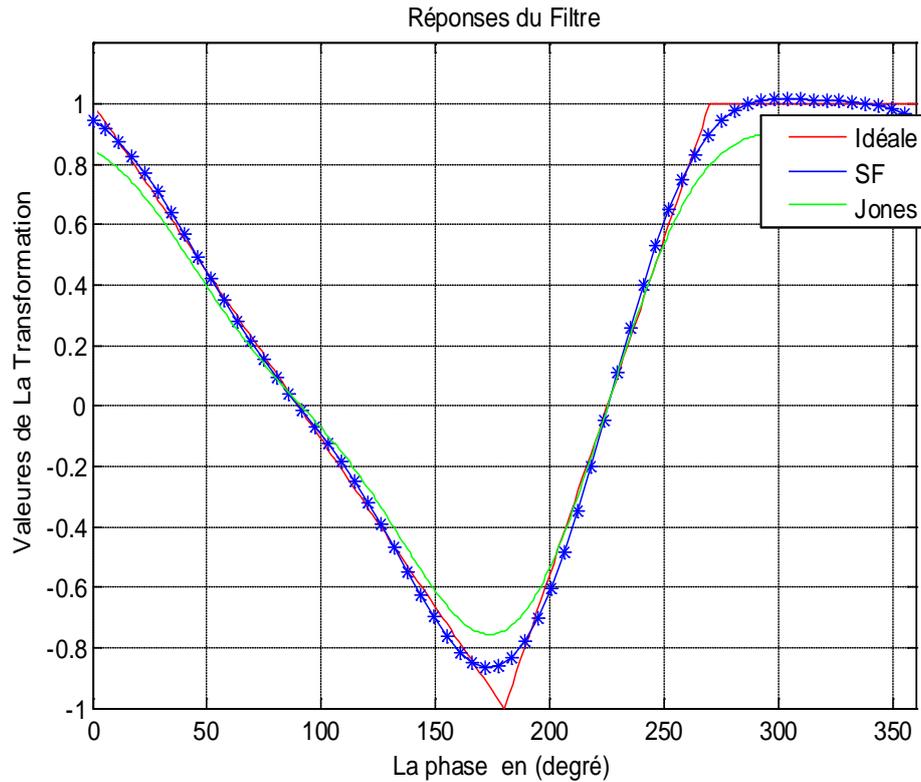


Figure 4.5 Fonction de transfert idéale et ses approximations avec 7 termes

4.3 Résultats de simulation

4.3.1 Cas d'une fonction triangulaire à valeur moyenne nulle

Dans l'exemple d'application précédent, nous avons constaté que l'application de cet algorithme sur une fonction de forme quelconque nous a permis d'avoir de bons résultats. Dans cette partie, nous allons généraliser l'application de l'algorithme de synthèse aux cas des filtres biréfringents à fonctions de transfert de forme quelconque.

Nous commençons par reprendre la fonction symétrique de l'exemple d'application vu dans le chapitre 3.

Supposons que la fonction de transfert, idéale, à synthétiser, $G(w)$ soit celle donnée sur la figure 4.6 (courbe en rouge). Le développement en série de Fourier de $G(w)$, limité à l'ordre 5, donne

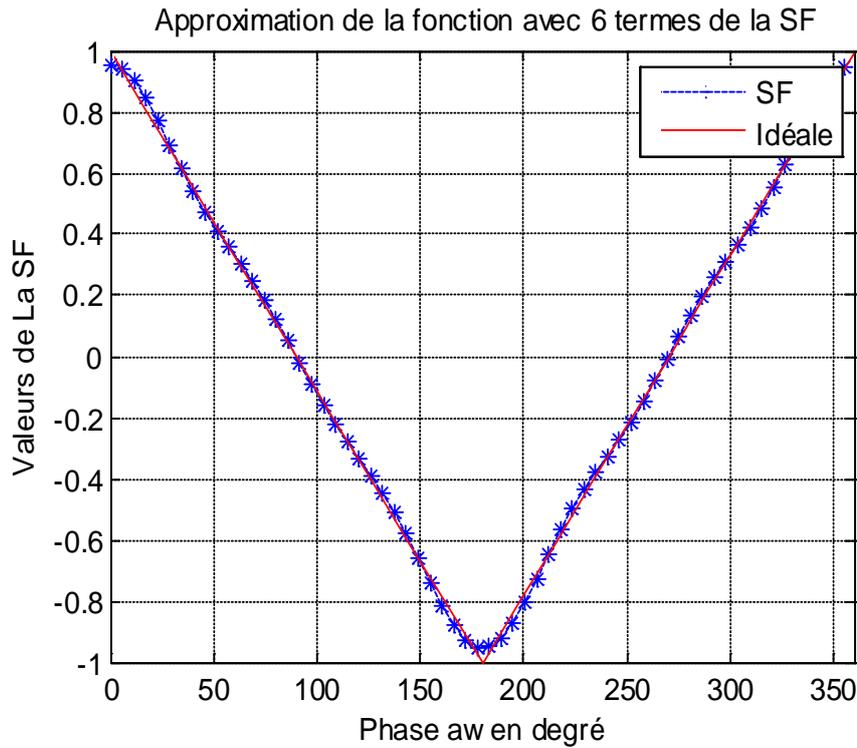


Figure 4.6. Fonction de transfert idéale et sa SF avec 6 termes

En se basant sur les équations (4.31) et (4.32), on pourra déterminer les paramètres à savoir les angles et les déphasages introduits par chaque lame à cristal liquide (LCC). Le Tableau (tab.4.1) illustre les valeurs obtenues pour ces paramètres

Tableau .4.1 Les paramètres de la fonction triangulaire à valeur moyenne nulle

Les coefficients C_i	Les angles absolus (en degré) $\varphi_i : \varphi_1 \rightarrow \varphi_p$	le déphasage introduit par chaque (LCC) $\alpha_i : \alpha_1 \rightarrow \alpha_p$ (en radian)
0.0162	88.7717	3.14160
0.0450	92.6621	0
0.4053	122.0015	0
0.4053	151.3409	0
0.0450	155.2313	0
0.0162	156.4596	0

Le tableau (tab.4.1) montre Les paramètres de la fonction triangulaire à valeur moyenne nulle obtenus par simulation.

On remarque que le déphasage obtenu égale (0 ou π) c à d les LCCs ne sont plus nécessaires pour ce filtre (voir **cas particulier**) .

Les solutions alternatives des paramètres sont résumées dans le tableau (tab.4.2)

Tableau .4.2 Les solutions alternatives des paramètres de la fonction triangulaire

Les coefficients C_i	Les angles absolus (en degré) $\varphi_i : \varphi_1 \rightarrow \varphi_p$	le déphasage introduit par chaque (LCC) $b_i : b_1 \rightarrow b_p$ (en radian)
0.0162	-88.7717	0
0.0450	-84.8813	0
0.4053	-55.5419	0
0.4053	-26.2025	0
0.0450	-22.3121	0
0.0162	-21.0838	0

L'application de la méthode de Jones [29] donne la réponse de ce filtre (voir courbe en vert sur la figure (fig.4.7)).

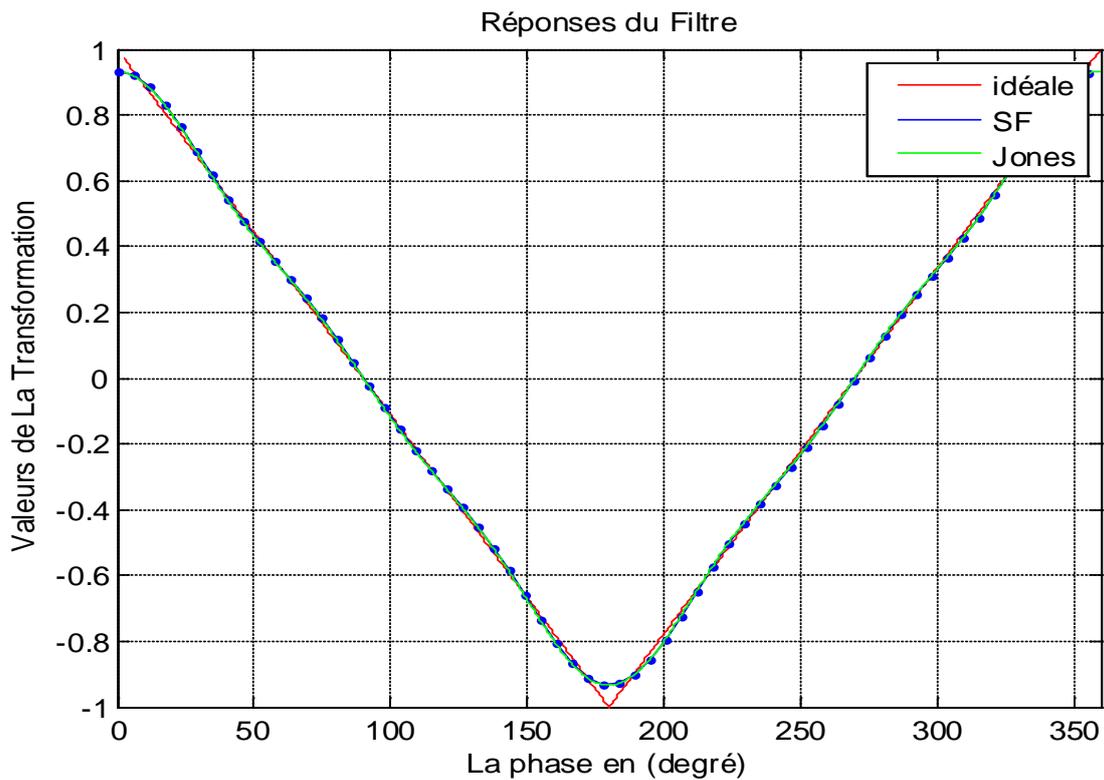


Figure.4.7 Fonction de transfert idéale et ses approximations avec 6 termes

Au vu du Tableau (tab 4.2), on remarque que les angles absolus obtenus sont les mêmes que ceux obtenus dans le chapitre 3 (voir tab.3.3).

4.3.2 Cas d'une fonction carrée à valeur moyenne non nulle

Le tableau ci-dessous (tab.4.3) montre les paramètres de la fonction carrée à valeur moyenne non nulle .

Tableau.4.3 Paramètres de la fonction carrée à valeur moyenne non nulle

Les coefficients C_i	Les angles absolus (en degré) $\varphi_i : \varphi_1 \rightarrow \varphi_p$	le déphasage introduit par chaque (LCC) $\alpha_i : \alpha_1 \rightarrow \alpha_p$ (en radian)
0.0455	86.1233	0
0	88.5410	0
-0.0637	93.2838	0
0	88.9283	0
0.1061	81.8567	0
0	89.1218	0
-0.3183	110.1373	0
0.5000	67.8115	0
-0.3183	88.8270	0
0	96.0921	0
0.1061	89.0205	0
0	84.6650	0
-0.0637	89.4079	0
0	91.8255	3.1416
0.0455	95.7022	0

La même chose peut être dite si on reprend la fonction carrée à valeur moyenne nulle du chapitre 3 (voir fig.4.8). On trouve aussi les mêmes valeurs des paramètres (voir tab.3.13 et tab.4.4)

L'application de la méthode de Jones [29] donne la réponse de ce filtre (voir courbe en vert sur la figure (fig.4.8)).

Tableau.4.4 les solutions alternatives des paramètres de la fonction carrée

Les coefficients C_i	Les angles absolus $\varphi_i : \varphi_1 \rightarrow \varphi_p$ (en degré)	le déphasage introduit par chaque (LCC) $b_i : b_1 \rightarrow b_p$ (en radian)
0.0455	-86.1233	0
0	-88.5410	0
-0.0637	-93.2838	0
0	-88.9283	0
0.1061	-81.8567	0
0	-89.1218	0
-0.3183	-110.1373	0
0.5000	-67.8115	0
-0.3183	-88.8270	0
0	-96.0921	0
0.1061	-89.0205	0
0	-84.6650	0
-0.0637	-89.4079	0
0	-91.8255	0
0.0455	-87.9488	0

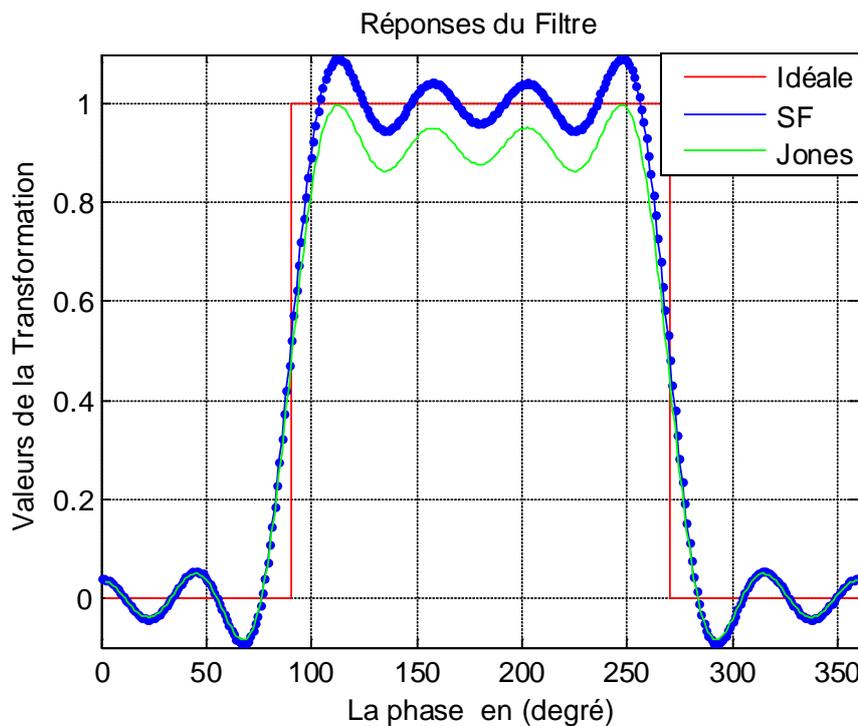


Figure 4.8 Fonction carrée à valeur moyenne non nulle et ses approximations avec 15 termes

A partir des Tableaux (tab.4.2 et tab.4.4), on remarque que les déphasages introduits par les LCCs sont nuls, ce qui bel et bien montre que les LCCs ne sont plus nécessaires pour déterminer la réponse des filtres ayant une fonction de transfert de forme symétrique.

4.3.3 Autres fonctions

En se basant sur les équations (4.31) et (4.32), et le **cas particulier** on pourra déterminer les paramètres à savoir les angles et les déphasages introduits par chaque lame à cristal liquide (LCC) pour les deux fonction suivantes

1- Soit la fonction $f(x)$ définie comme suit :

$$f(x) \begin{cases} \cos(x)^2, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \\ 0, \text{ailleurs} \end{cases}$$

Le résultat de la simulation est donné par la figure (fig.4.9)

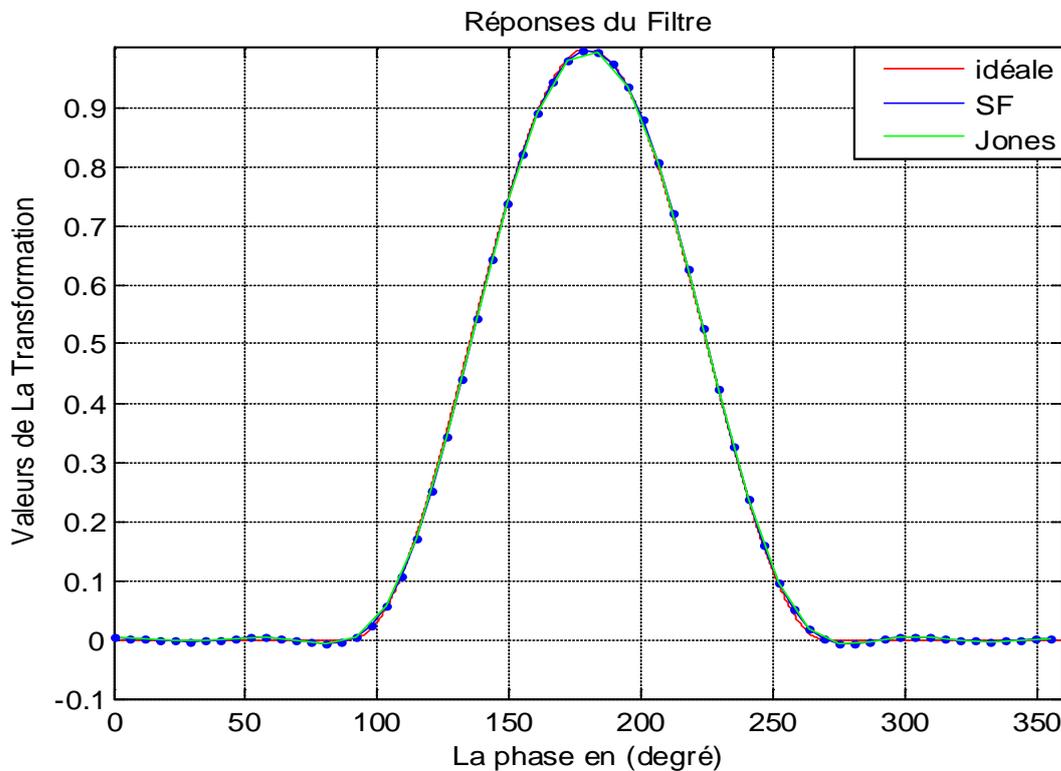


Figure 4.9 La fonction $f(x)$ et ses approximations avec 7 termes

2- Soit la fonction $g(x)$ définie comme suit :

$$g(x) \begin{cases} \frac{2x}{\pi} - 1, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right] \\ \frac{-2x}{\pi} + 3, x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2} \right] \\ 0, \text{ailleurs} \end{cases}$$

Le résultat de la simulation est donné par la figure (fig.4.10)

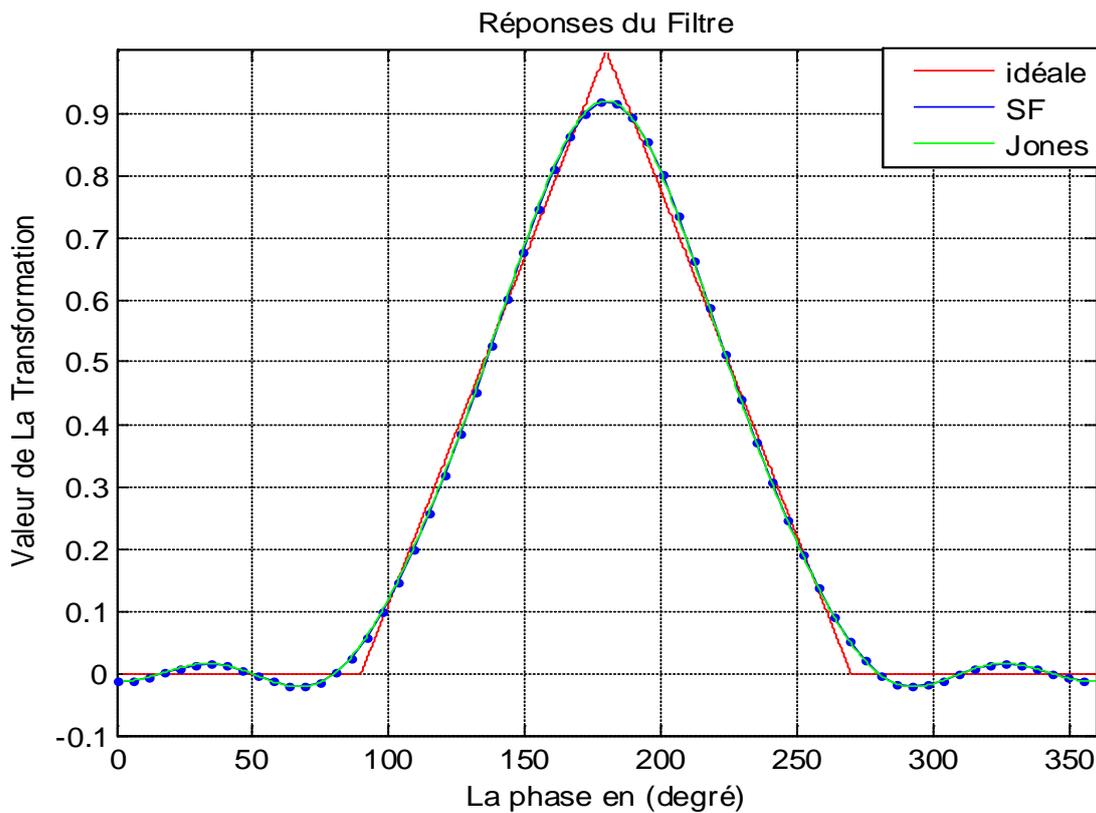


Figure 4.10 La fonction $g(x)$ et ses approximations avec 11 termes

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons exposé un algorithme de synthèse plus générale que celui présenté au chapitre 3 et qui nous permet de traiter des fonction de transfert de forme quelconque en jouant sur les angles d'orientation et les déphasages introduits par les lames à cristaux liquides (LCCs). Ces LCCs sont les éléments responsables de la forme complexe des impulsions. L'ajout des lames à cristaux liquides offre un nouveau degré de liberté pour synthétiser des fonctions de transfert de forme quelconque.

Conclusion générale

La qualité du signal qu'elle transporte et les débits qu'elle autorise ont fait de la fibre optique la reine des media. Que ce soit de la voix, de l' image, du texte, des fichiers binaires, que ce soit n' importe quel format de trame, la fibre optique, grâce à WDM achemine tout type de données. Le dynamisme de cette activité se reflète par la multiplication des nœuds de routage à l'intersection des différents secteurs de réseaux. Ces derniers intègrent des sous systèmes comme les OADM et les OXC dont le principe de fonctionnement repose sur la fonction de filtrage optique. Cette fonction se retrouve aussi dans d'autres sous systèmes du réseau WDM comme dans les multiplexeurs, démultiplexeurs.

Après avoir introduit le WDM, ses composants principaux notamment les composants qui utilisent les filtres, nous avons ensuite développé quelques types de filtres optiques existant notamment le filtre de Fabry – Pérot et le filtre à réseau de Bragg. Ces filtres, quoiqu'ils présentent d'intéressantes caractéristiques, la forme de leur fonction de transfert est très spécifique et particulière. Ceci nous a amené à s'intéresser aux filtres biréfringents en commençant par l'études des éléments de base qui les constituent et par la suite l'étude de ses deux versions à savoir le filtre de LYOT et celui de SOLC.

L'objectif de notre travail mené dans le cadre de ce magister est double. Le premier objectif consiste en la présentation d'une méthode de synthèse d'un filtre à gabarit prédéfini. Cette méthode basée sur l'analyse temporelle, au sens traitement du signal, de la réponse impulsionnelle des filtres biréfringents permet de réaliser des fonctions de transfert de forme quelconque mais symétrique grâce à un choix judicieux des angles d'orientation des lames biréfringentes.

Le deuxième objectif consiste à surmonter cette dernière restriction sur la symétrie de la fonction de transfert qui limite le champ d'application de ces filtres. Ceci nous a amené à présenter une autre méthode de synthèse permettant de synthétiser des filtres à fonctions de transfert de forme quelconque. Cependant, ce nouveau degré de liberté dans la synthèse des fonctions de transfert s'accompagne d'une complexité des filtres synthétisés à cause de la présence de lames à cristaux liquides accompagnant chaque lame biréfringente.

Annexe A : Conditions de conservation d'énergie

Le principe de conservation d'énergie impose aux paramètres F_i et S_i de satisfaire certaines conditions. Les lames biréfringentes étant supposées sans pertes, l'énergie selon l'axe rapide plus l'énergie selon l'axe lent à la sortie de la quatrième lame doit être égale à l'énergie incidente (entrée). Mathématiquement, ceci s'exprime par

$$F^4(w).F^{4*}(w) + S^4(w).S^{4*}(w) = (I_0^0)^2 \quad (\text{A.1})$$

En développant la partie droite de cette équation et après identification des coefficients similaires, on obtient le système d'équations suivant :

$$(F_0^4)^2 + (F_1^4)^2 + (F_2^4)^2 + (F_3^4)^2 + (S_1^4)^2 + (S_2^4)^2 + (S_3^4)^2 + (S_4^4)^2 = (I_0^0)^2 \quad (\text{A.2})$$

$$F_0^4 F_1^4 + F_1^4 F_2^4 + F_2^4 F_3^4 + S_1^4 S_2^4 + S_3^4 S_4^4 = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$F_0^4 F_2^4 + F_1^4 F_3^4 + S_1^4 S_3^4 + S_2^4 S_4^4 = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$F_0^4 F_3^4 + S_1^4 S_4^4 = 0. \quad (\text{A.5})$$

Et d'une façon générale, pour le I^{ieme} étage, on aura :

$$(F_0^i)^2 + (F_1^i)^2 + (F_2^i)^2 + \dots + (F_{i-1}^i)^2 + (S_1^i)^2 + (S_2^i)^2 + \dots + (S_{i-1}^i)^2 + (S_i^i)^2 = (I_0^0)^2 \quad (\text{A.6})$$

$$F_0^i F_1^i + F_1^i F_2^i + \dots + F_{i-2}^i F_{i-1}^i + S_1^i S_2^i + S_2^i S_3^i + \dots + S_{i-1}^i S_i^i = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$F_0^i F_2^i + F_1^i F_3^i + \dots + F_{i-3}^i F_{i-1}^i + S_1^i S_3^i + S_2^i S_4^i + \dots + S_{i-2}^i S_i^i = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$F_0^i F_{i-1}^i + S_1^i S_i^i = 0 \quad (\text{A.9})$$

De même pour $C(w)$ et $D(w)$ dont les équations sont :

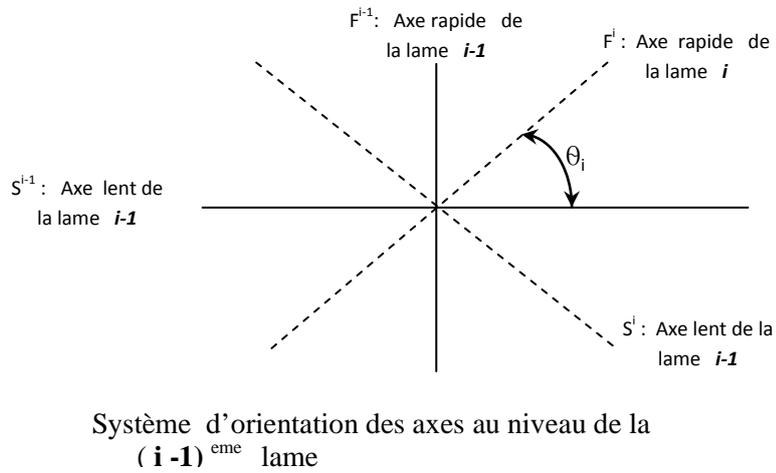
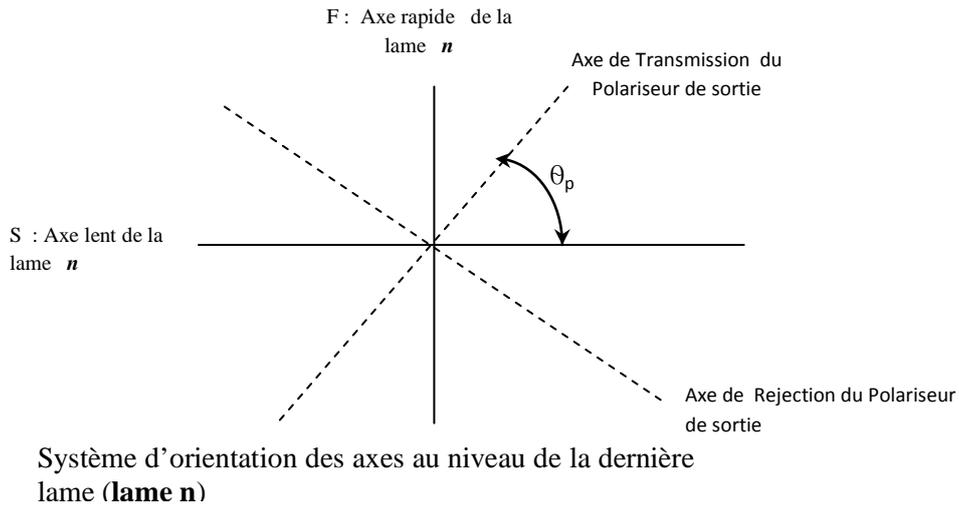
$$(C_0)^2 + (C_1)^2 + (C_2)^2 + \dots + (C_n)^2 + (D_0)^2 + (D_1)^2 + \dots + (D_n)^2 = (I_0^0)^2 \quad (\text{A.10})$$

$$(C_0 C_1) + (C_1 C_2) + \dots + (C_{n-1} C_n) + (D_0 D_1) + (D_1 D_2) + \dots + (D_{n-1} D_n) = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$C_0 C_n + D_0 D_n = 0 \quad (\text{A.12})$$

Annexe B : Changement de base (de repère)

Les figures suivantes illustrent la convention adoptée par rapport à l'orientation relative entre chaque deux éléments (étages) successifs :



Suivant les notations prises pour la description des impulsions qui émergent à la sortie de chaque étage, on peut écrire

Au niveau de la première lame :

$$\begin{pmatrix} F_0^1 \\ S_1^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \end{pmatrix} \cdot (I_0^0) \quad (\text{B.1})$$

Au niveau de la deuxième lame :

$$\begin{pmatrix} F_0^2 \\ F_1^1 \\ S_1^2 \\ S_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & 0 \\ 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_0^1 \\ S_1^1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Au niveau de la troisième lame :

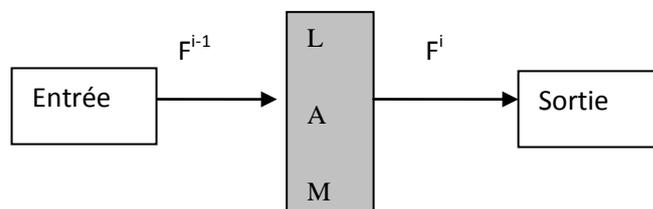
$$\begin{pmatrix} F_0^3 \\ F_1^3 \\ F_2^3 \\ S_1^3 \\ S_2^3 \\ S_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta_3 \\ \sin \theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_0^2 \\ F_1^2 \\ S_1^2 \\ S_2^2 \end{pmatrix} \quad (B.3)$$

Et d'une manière générale au niveau de la I^{eme} lame, on a le système suivant [38] :

$$\begin{pmatrix} F_0^i \\ F_1^i \\ F_2^i \\ \dots \\ \dots \\ F_{i-3}^i \\ F_{i-2}^i \\ F_{i-1}^i \\ S_1^i \\ S_2^i \\ S_3^i \\ \dots \\ \dots \\ S_{i-2}^i \\ S_{i-1}^i \\ S_i^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_i & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_i & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\sin \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta_i & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \theta_i & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \cos \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \cos \theta_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_0^{i-1} \\ F_1^{i-1} \\ F_2^{i-1} \\ \dots \\ \dots \\ F_{i-3}^{i-1} \\ F_{i-2}^{i-1} \\ S_1^{i-1} \\ S_2^{i-1} \\ S_3^{i-1} \\ S_4^{i-1} \\ \dots \\ \dots \\ S_{i-2}^{i-1} \\ S_{i-1}^{i-1} \end{pmatrix} \quad (B.4)$$

Annexe C : Calcul de l'entrée d'une lame en fonction de la sortie

On rappelle ci-après les expressions développées par Harris [27] pour calculer d'une façon systématique et rapide l'entrée d'une lame cristalline dans le cas où sa sortie est connue :



$$\begin{pmatrix} F_0^{i-1} \\ F_1^{i-1} \\ F_2^{i-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{i-1}^{i-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\{(F_{i-1}^i)^2 + S_i^i\}^{1/2}} \cdot \begin{pmatrix} F_0^i & S_1^i \\ F_1^i & S_2^i \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ F_{i-1}^i & S_i^i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_i^i \\ -F_{i-1}^i \end{pmatrix} \quad (C.1)$$

$$\begin{pmatrix} S_0^{i-1} \\ S_1^{i-1} \\ S_2^{i-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ S_{i-1}^{i-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\{(F_{i-1}^i)^2 + S_i^i\}^{1/2}} \cdot \begin{pmatrix} F_0^i & S_1^i \\ F_1^i & S_2^i \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ F_{i-1}^i & S_i^i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{i-1}^i \\ S_i^i \end{pmatrix} \quad (C.2)$$

Il faut noter que F_{i-1}^{i-1} et S_0^{i-1} doivent être, toujours, nuls.

Annexe D : condition de conservation d'énergie

Dans cette annexe, les restrictions posées sur les F_i, S_i (et sur les C_i et D_i), sont tirées de la conservation de l'énergie. considérons un ième étage du filtre de la *Figure 4.1*. puisque le filtre est sans perte, l'énergie située a la sortie de l'axe rapide plus l'énergie située a la sortie de l'axe lent du ième étage doit être égale à l'énergie incidente sur le premier étage .

Mathématiquement cela donne :

$$F^i(w)F^{i*}(w) + S^i(w)S^{i*}(w) = (I_0^0)^2 \quad (D.1)$$

Si nous écrivons à partir de l'équation (B1), les relations entre les énergies correspondant à chaque impulsion, nous obtenons les équations suivantes :

$$F_0^{i*}F_0^i + F_1^{i*}F_1^i + \dots + F_{i-1}^{i*}F_{i-1}^i + S_1^{i*}S_1^i + S_2^{i*}S_2^i + \dots + S_i^{i*}S_i^i = (I_0^0)^2 \quad (D.2)$$

$$F_0^{i*}F_1^i + F_1^{i*}F_2^i + \dots + F_{i-2}^{i*}F_{i-1}^i + S_1^{i*}S_2^i + S_2^{i*}S_3^i + \dots + S_{i-1}^{i*}S_i^i = 0 \quad (D.3)$$

$$F_0^{i*}F_2^i + F_1^{i*}F_3^i + \dots + F_{i-3}^{i*}F_{i-1}^i + S_1^{i*}S_3^i + S_2^{i*}S_4^i + \dots + S_{i-2}^{i*}S_i^i = 0 \quad (D.4)$$

.....

$$F_0^{i*}F_{i-1}^i + S_1^{i*}S_i^i = 0 \quad (D.5)$$

De même pour C(w) et D(w) dont les équations sont :

$$C_0^*C_0 + C_1^*C_1 + C_2^*C_2 + \dots + C_n^*C_n + D_0^*D_0 + D_1^*D_1 + \dots + D_n^*D_n = (I_0^0)^2 \quad (D.6)$$

$$C_0^*C_1 + C_1^*C_2 + C_2^*C_3 + \dots + C_{n-1}^*C_n + D_0^*D_1 + D_1^*D_2 + \dots + D_{n-1}^*D_n = 0 \quad (D.7)$$

$$C_0^*C_2 + C_1^*C_3 + C_2^*C_4 + \dots + C_{n-2}^*C_n + D_0^*D_2 + D_1^*D_3 + \dots + D_{n-2}^*D_n = 0 \quad (D.8)$$

.....

.....

....

$$C_o^*C_n + D_o^*D_n = 0 \quad (D.9)$$

Annexe E : calcul de l'entrée d'une lame en fonction de la sortie

Cette annexe nous donne une méthode systématique et rapide pour calculer les entrées de chaque étage du filtre, seules les sorties sont connus. Cela est simplement une procédure formulée pour déterminer les F^{j-1}, S^{j-1} dans la forme polaire :

$$F_{j-1}^j = |F_{j-1}^j| \cdot e^{i\theta_{j-1}^j} \quad (E.1)$$

$$S_{j-1}^j = |S_{j-1}^j| \cdot e^{i\theta_{j-1}^j} \quad (E.2)$$

En utilisant ces définitions, nous trouvons les expressions pour les F^{j-1} et S^{j-1} dans les formes matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} F_0^{j-1} \\ F_1^{j-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{j-1}^{j-1} \end{pmatrix} = \frac{e^{-is_j^j}}{\sqrt{|F_{j-1}^j|^2 + |S_j^j|^2}} \cdot \begin{pmatrix} F_0^j & S_1^j \\ F_1^j & S_2^j \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ F_{j-1}^j & S_j^j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_j^j \\ -F_{j-1}^j \end{pmatrix} \quad (E.3)$$

$$\begin{pmatrix} S_0^{j-1} \\ S_1^{j-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ S_{j-1}^{j-1} \end{pmatrix} = \frac{e^{ib_j} \cdot e^{is_j^j}}{\sqrt{|F_{j-1}^j|^2 + |S_j^j|^2}} \cdot \begin{pmatrix} F_0^j & S_1^j \\ F_1^j & S_2^j \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ F_{j-1}^j & S_j^j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{j-1}^{j*} \\ S_j^{j*} \end{pmatrix} \quad (E.4)$$

Annexe F : Changement de Base (de repère)

Les figures suivantes illustrent la convention adoptée par rapport à l'orientation relative entre chaque deux éléments (étages) successifs :

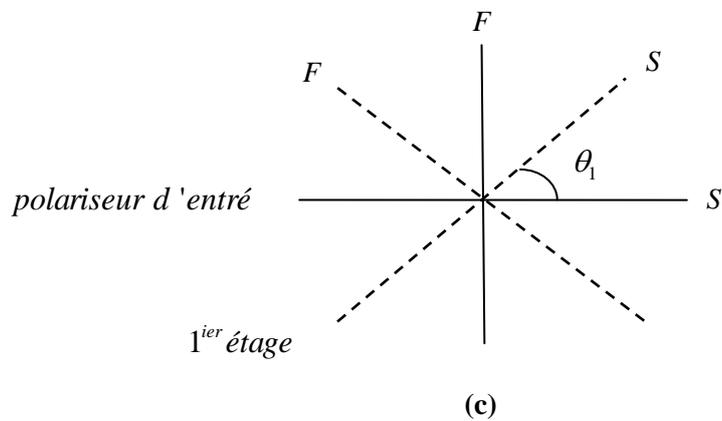
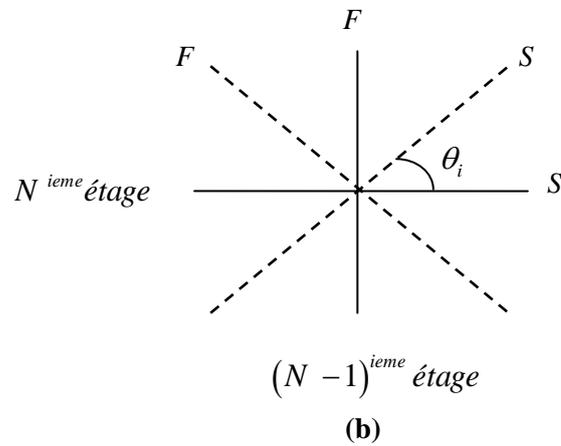
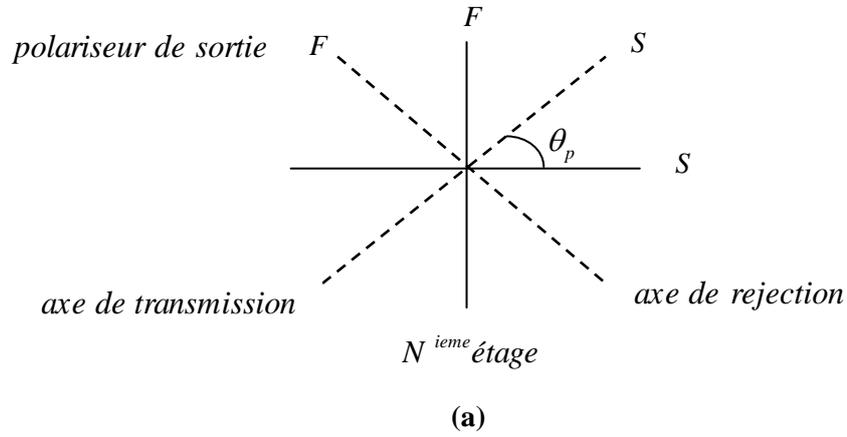


Figure F.1 : Changement de Base

Suivant les notations prises pour la description des impulsions qui émergent à la sortie de chaque étage, on peut écrire .

Etage 1

$$\begin{pmatrix} F_0^1 \\ S_1^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta_1 \\ \exp(-ib_1) \cos \theta_1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} F_0^0 \\ S_1^0 \end{pmatrix} \quad (F.1)$$

Etage 2

$$\begin{pmatrix} F_0^1 \\ F_1^1 \\ S_1^2 \\ S_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & -\sin \theta_2 \\ \exp(-ib_2) \sin \theta_2 & 0 \\ 0 & \exp(-ib_2) \cos \theta_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} F_0^1 \\ S_1^1 \end{pmatrix} \quad (F.2)$$

Etage 3

$$\begin{pmatrix} F_0^3 \\ F_1^3 \\ F_2^3 \\ S_1^3 \\ S_2^3 \\ S_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta_3 \\ \exp(-ib_3) \sin \theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-ib_3) \sin \theta_3 & \exp(-ib_3) \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(-ib_3) \cos \theta_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} F_0^2 \\ F_1^2 \\ S_1^2 \\ S_2^2 \end{pmatrix} \quad (F.3)$$

Et en général $i^{\text{ième}}$ étage

$$\begin{pmatrix} F_0^i \\ F_1^i \\ F_2^i \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ F_{i-3}^i \\ F_{i-2}^i \\ F_{i-1}^i \\ S_1^i \\ S_2^i \\ S_3^i \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ S_{i-2}^i \\ S_{i-1}^i \\ S_i^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_i & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_i & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\sin \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\sin \theta_i \\ \exp(-ib_i) \sin \theta_i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-ib_i) \sin \theta_i & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-ib_i) \sin \theta_i & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \exp(-ib_i) \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \exp(-ib_i) \cos \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \exp(-ib_i) \cos \theta_i \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} F_0^{i-1} \\ F_1^{i-1} \\ F_2^{i-1} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ F_{i-3}^{i-1} \\ F_{i-2}^{i-1} \\ S_1^{i-1} \\ S_2^{i-1} \\ S_3^{i-1} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ S_{i-2}^{i-1} \\ S_{i-1}^{i-1} \end{pmatrix} \quad (F.4)$$

Liste des Tableaux

Chapitre 1

1.1	Variation de la finesse en fonction de coefficient de réflexion	10
-----	-----------------------------------------------------------------	----

Chapitre 2

2.1	Classement du milieu anisotrope	21
-----	---------------------------------	----

Chapitre 3

3.1	Paramètres de la fonction triangulaire à valeur moyenne non nulle	59
3.2	Paramètres de la fonction carrée à valeur moyenne nulle	60
3.3	Paramètres de la fonction carrée à valeur moyenne non nulle	61
3.4	Fonction triangulaire a valeur moyenne nulle et a valeur moyenne non nulle	62

Chapitre 4

4.1	Les paramètres de la fonction triangulaire a valeur moyenne nulle	82
4.2	Les solutions alternatives des paramètres de la fonction triangulaire	83
4.3	Paramètres de la fonction carrée à valeur moyenne non nulle	84
4.4	Les solutions alternatives des paramètres de la fonction carrée	85

Liste des figures

Chapitre 1

1.1	Applications des filtres dans un système WDM simplifié	4
1.2	Interféromètre Fabry-Pirot	7
1.3	Différence de marche optique entre le rayon transmis et réfléchi	7
1.4	Réponse du filtre de Fabry-pérot	9
1.5	Réponses du filtre de Fabry-Pérot pour différentes valeurs de R	9
1.6	Filtre Fabry-Pérot dans un multiplexeur optique à insertion/extraction (OADM)	10
1.7	Multiplexeur à filtre optique	11
1.8	Démultiplexeur à filtre optique	11
1.9	Réseau de Bragg	11
1.10	Principe du filtre de Bragg	12
1.11	Description des conditions aux limites du problème	14
1.12	Réponse du filtre de Bragg : $kL = 3$, $L = 2\text{cm}$, $\lambda_B = 1.55\mu\text{m}$	15
1.13	Réponses du Filtre de Bragg pour Différentes Valeurs de κL	16
1.14	OADM à Base d'un Réseau de Bragg	17

Chapitre 2

2.1	Structure d'une onde plane se propage dans un milieu anisotrope	22
2.2	Décomposition de vecteur de propagation	22
2.3	Solution de l'équation de Fresnel	23
2.4	Ellipsoïde des Indices (E), plan d'onde (Π) et les différents vecteurs D' , D'' et k	24
2.5	Etats de polarisation de la lumière	26
2.6	Phase nématique du cristal liquide	27
2.7	Phase smectique-A du cristal liquide	28
2.8	Phase smectique-C du cristal liquide	28
2.9	Lame biréfringente placée perpendiculairement à l'axe de propagation Oz	32
2.10	Lame orientée suivant un angle $\theta = 45^\circ$ par rapport aux axes du Laboratoire	35
2.11	Lame biréfringente entre analyseur et polariseur	36
2.12	Structure du filtre de Lyot à 3 étages	37
2.13	Composition de La réponse du Filtre Lyot	38
2.14	Réponses du Lyot pour 2, 3 et 4 lames	40
2.15	Filtre du Solc alterné (haut) et en éventail (bas) constitué de N lames ($N = 4$)	41
2.16	Réponses de Solc alterné pour 2, 3 et 4 étages	42

Chapitre 3

3.1	Structure d'un filtre à 4 étages	44
3.2	Réponse impulsionnelle d'un système à une lame	45
3.3	Réponse impulsionnelle d'un système à deux lames	46
3.4	Réponse impulsionnelle d'un système à plusieurs lames	46
3.5	Principe de dualité : Echantillonnage / Périodisation	47
3.6	Suite d'impulsions en sortie d'un système à 2 lames	49
3.7	Structure du filtre avec les notations	50
3.8	Orientation des axes propres des lames 2 et 3	54
3.9	Approximation d'une fonction triangulaire par la SF à 6 termes	55
3.10	Approximations d'une fonction triangulaire par la SF et Jones Avec 6 termes	57
3.11	Approximation d'une fonction triangulaire à valeur moyenne nulle Avec 11 termes	60
3.12	Approximation d'une fonction carrée à valeur moyenne nulle Avec 8 termes	61
3.13	Approximation d'une fonction carrée à valeur moyenne non nulle Avec 15 termes	62
3.14	Approximations de la fonction $f(x)$ avec 7 termes	63
3.15	Approximations de la fonction $f(x)$ avec 11 termes	64

Chapitre 4

4.1	Structure d'un filtre biréfringent à gabarit prédéfini (quatre étages)	66
4.2	Filtre à N étages.	68
4.3	L'évolution des impulsions à travers les différents étages	72
4.4	Fonction de transfert idéale et sa SF avec 7 termes	77
4.5	Fonction de transfert idéale et ses approximations avec 7 termes	81
4.6	Fonction de transfert idéale et sa SF avec 6 termes	82
4.7	Fonction de transfert idéale et ses approximations avec 6 termes	83
4.8	Fonction carrée à valeur moyenne non nulle et ses approximation avec 15 termes	85
4.9	La fonction $f(x)$ et ses approximations avec 7 termes	86
4.10	La fonction $g(x)$ et ses approximations avec 11 termes	87

Références

- [1] H. Venghaus, "Wavelength Filters in Fibre Optics", Ed .Springer .Berlin, April 2006 .
- [2] C. K. Madsen, J. ZHAO, "Optical Filter Design and Analysis", Ed. John Wiley & Sons, 1999.
- [3] O.Gourmala, "Etude et Réalisation des Réseaux de Bragg pour des Applications Photoniques"
Thèse de Magister, Université de Tlemcen, 2006.
- [4] M.Ghadjati, N.Ayache, "Synthèse d'un Filtre à Gabarit Prédéfini pour le WDM", PFE,
Université 8 mai 1945 Guelma, 2008.
- [5] Site Internet repairfaq.ece.drexel.edu/sam/MEOS/EXP03.pdf
- [6] Site Internet www.script.univ-paris-diderot.fr/doc/319-oo/chap4.pdf
- [7] M. Henry, "Optique Ondulatoire : Interférences, Diffraction, Polarisation", Techniques de
L'ingénieur pg : 15 .
- [8] B.Dagens, "Conception et évaluation de diodes Laser a Réflecteurs de Bragg Distribués et
D'amplificateurs a onde diffractée en vue de Leur Association en une source Cohérente de
Puissance", Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier de Toulouse, 1995.
- [9] H.B.Jaafar, "Optimisation, Ecriture et Démonstration D'encodeurs à Réseaux Encodeurs à
Réseaux De Bragg Multiples Pour Le CDMA", Université Laval, Janvier 2001.
- [10] F.Lemarchand, "Etude et Réalisation de Réseaux de Diffraction pour Le Filtrage Optique
Bande étroite", Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure de Physique de Marseille 1999.
- [11] C.alberto, "Analyse de composants photoniques par réflectométrie a faible cohérence Sensible
à la phase", Thèse de doctorat, école Doctorale d'informatique, Télécommunications et
électronique de paris, 2004.
- [12] L. Bastard, "Intégration Monolithique de Lasers Calibrés en Optique Intégrée sur Verre",
Thèse De doctorat Institut National Polytechnique de Grenoble ,2003.
- [13] D. Mechin, "Etude et réalisation de multiplexeurs insertion-extraction à réseaux de Bragg",
Thèse de doctorat, Université Jean Monnet de Saint-Étienne 2001.
- [14] K. Jaafoura, "Conception et caractérisation d'un RODM a Temps de Commutation Ajustable",
Thèse de doctorat, L'école de technologie supérieur Québec 2010.

- [15] R.Hamdi, "Filtres en polarisation dédiés aux applications insertion/extraction optiques Reconfigurables", Thèse de doctorat Université 08 Mai 1945 Guelma 2008.
- [16] S. Huard, "Polarisation de la lumière", Edition. Masson 1994.
- [17] Site Internet www.lerepairedessciences.fr/.../Cours_opt_anis_v2_0.pdf.
- [18] Site Internet :www.educnet.education.fr/rnchimie/phys/baillet/06/tp_pola.pdf
- [19] Site Internet :physique-eea.ujf-grenoble.fr/intra/Organisation/.../polarisation.pdf
- [20] Site Internet :<http://physique.coursgratuits.net/optique-ondulatoire/polarisation-de-la-Lumiere>.
- [21] J.Vernet, "Étude Spectropolarimétrique des Premières Phases de L'évolution des Galaxies Les plus Massives", Thèse de doctorat Université PARIS VII, 2001.
- [22] J. Dillet, "Caractérisation de milieux diffusants en écoulement par transport incohérent de Lumière polarisée", Thèse de doctorat Université Henri Poincaré, Nancy-1, 2007.
- [23] L. Zuppiroli, M.N.Bussac, Traité de la lumière, Edition polytechniques et universitaires Romandes (PPUR), 2009.
- [24] C. Giancoli, "Physique générale: Ondes, optique et physique moderne", Edition De Boeck, 2004.
- [25] F. Miller, A. Vandome, J. McBrewster, "Birefringence", Edition VDM Publishing House 2009.
- [26] M. Françon, "Séparation des Radiations par les filtres optiques", Ed. Masson 1984.
- [27] S. E. Harris et al., "Optical Network synthesis Using Birefringent Crystals. I. Synthesis of Lossless Network of Equal-Length Crystals", Journal of the Optical Society of America, Vol 54, N° 10, 1964.
- [28] R. J. Pegis, "An Exact Method for Multilayer Dielectric Films", Journal of the Optical Society of America, Vol 51, N° 11, 1961.
- [29] R.C.Jones, J. Opt. Soc. Am. Vol 31, N° 488, 1941.
- [30] E. O. Ammann, J. M. Yarborough, "Optical Network Synthesis Using Birefringent Crystals. V. Synthesis of Lossless Networks Containing Equal-Length Crystals and Compensators", Journal of the Optical Society of America, Vol 56, N° 12, 1966.