

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE 8MAI 1945 – GUELMA  
FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE ET TELECOMMUNICATIONS



Thèse

*Présenté pour obtenir le diplôme de*  
DOCTORAT EN SCIENCES

Option :

Génie Electrique

*par*

AMIEUR TOUFIK

---

---

**Robustification d'un contrôleur fractionnaire par l'introduction  
de l'ordre non entier dans le critère de la sensibilité mixte**

---

---

Soutenu le : 09/07/2017

Devant le jury composé de :

<b>Président :</b>	BABOURI Abdesselam	<i>Prof.</i>	Université 8 Mai 1945 Guelma
<b>Rapporteur :</b>	SEDRAOUI Moussa	<i>Prof.</i>	Université 8 Mai 1945 Guelma
<b>Examineurs:</b>	LACHOURI Abderrazek	<i>Prof.</i>	Université 20 Août 1955 Skikda
	MEHENNAOUI Lamine	<i>M.C.A</i>	Université 20 Août 1955 Skikda

# AVANT-PROPOS

*En premier lieu je tien à remercier Dieu, notre créateur, pour m'avoir donné la force d'accomplir ce travail.*

*Après de longues années d'étude on arrive aujourd'hui à la fin de celles-ci tout en souhaitant réussite, béni soit dieu le compassion et le miséricordieux qui nous a donné son aide et sa force afin qu'on puisse parvenir au terme de ce modeste travail.*

*Je voudrais saluer et remercier ici les personnes qui vont contribuer, toutes dans des manières très différentes, au déroulement original de mes quatre années de thèse.*

*Mes premiers sincères remerciements vont à mon directeur de recherche Monsieur Pr. SEDRAOUI Moussa. Sa constante disponibilité, sa direction scientifique et ses qualités humaines m'ont été une aide précieuse pour mener à bien ce projet de doctorat.*

*Je remercie également messieurs, Pr. BABOURI Abdesselam, Pr. LACHOURI Abderrazek, Dr. MEHENNAOUI Lamine pour l'intérêt qu'ils ont accordé à mon travail en acceptant de l'examiner.*

*Pendant ces quatre années, j'ai été entouré par des personnes qui ont manifesté un intérêt tout particulier pour mes travaux, dont les critiques se sont révélées très précieuses, la liste est longue mais je tiens à remercier plus spécialement messieurs FERAGA Chams-eddine, BOUIADJRA BACHIR Rochdi, AIDOUH Mohammed et BOUALLEG Abdelhalim.*

*Il sera difficile de trouver les mots pour remercier mes parents, mes sœurs et mes frères qui ont pu me supporter, ont su m'encourager et m'aider tout au long de ce travail. Qu'ils trouvent ici toute ma gratitude et mon amour.*

*Enfin, nous remercions tous nos amis pour leur soutien moral.*

***Amieur Toufik***

## الملخص

في هذه الأطروحة، نقترح طريقة جديدة من أجل تقويم وحدة التحكم ذات رتبة كسرية أين يتم إدخال الأوزان الكسرية القابلة للتعديل في مشكلة الحساسية المختلطة المعممة. هذا الاقتراح يمكننا من تحقيق زيادة في تحسين الأداء و ضمان متانة استقرار النظام مع احترام العديد من مختلف القيود ونذكر من مجملها: تتبع مسارات محددة مسبقا، عدم التأثير بالاضطرابات الخارجية وتخفيض في ضوضاء القياس. طريقة المتانة المقترحة تحمل خطوتين. في الخطوة الأولى، يتم تصميم وحدة تحكم ذات رتبة كسرية ويستخدم في ذلك الأوزان ذات الرتب الطبيعية في حل مشكلة الحساسية المختلطة المعممة. في الخطوة الثانية، يتم تصميم وحدة تحكم ذات رتبة كسرية متينة ويستخدم في ذلك الأوزان ذات الرتب الكسرية القابلة للتعديل وهذا من أجل ضمان تحسين الأداء السابق و ضمان متانة و أكثر استقرار للنظام وهذا ليس فقط من أجل النظام المثالي، ولكن أيضا من أجل مجموعة الأنظمة الديناميكية المجاورة. و لقد تم استخدام هذه الطريقة المقترحة وهذا من أجل السيطرة على مولد لامتران ثنائي التغذية حيث أن ديناميكيته ممثلة بنظام خطي ارتيابي مضاعف خارجيا. و لقد تمت مقارنة النتائج المتحصل عليها مع نظام التحكم ذو الرتبة الكسرية ذا الأوزان ذات الرتب الطبيعية وكذلك مع نظام التحكم الكلاسيكي  $\infty H$  حيث تم إثبات فعالية الطريقة المقترحة في المجالين التواتري و الزمني

## كلمات مفتاحية

التحكم ذو الرتبة الكسرية، التحكم المتين ذو الرتبة الكسرية، التحكم الكلاسيكي، المولد اللامتران ثنائي التغذية.

## Abstract

In this work, a robustification method of the primary fractional controller is proposed. This novel method uses the adjustable fractional weights on the  $H_\infty$  mixed sensitivity problem. It can achieve an enhancement in both, nominal performance and robust stability margins for the uncertain plants while respecting the frequency-domain constraints, such as the tracking of the set-point references, load disturbances attenuation and measurement noises suppression. The proposed robustification holds two steps; in the first step, a primary fractional controller is designed from solving the  $H_\infty$  mixed-sensitivity problem that uses the fixed integer-weights. In the second step, the robustified fractional controller with adjustable fractional weights is designed in order to guarantee a good compromise between the nominal performance and the robust stability not only for the nominal plant, but also for all set of the neighbouring plants. The proposed robustified fractional controller is used to control the doubly-fed induction generator. Its dynamic is modelled by the unstructured output-multiplicative uncertain plant. Simulation results given by both primary and robustified fractional controllers are compared in time and frequency domains with those given by the conventional integer  $H_\infty$  controller in order to validate the effectiveness of the proposed method.

## Keywords

Primary fractional controller; Robustified fractional controller; Conventional integer controller; Doubly-fed induction generator.

## Résumé

Dans ce travail, une méthode de robustification du contrôleur fractionnaire primaire est proposée afin d'améliorer ses marges de robustesse de stabilité robuste et des performances nominales. L'idée adoptée dans cette robustification est basée sur l'introduction des pondérations rationnelles ajustables dans le critère de sensibilité mixte généralisé. Ces pondérations permettent de quantifier un nombre considérable des spécifications fréquentielles imposées ce qui peut améliorer les performances du contrôleur fractionnaire primaire. Les paramètres optimaux de ces pondérations ainsi que ceux du contrôleur fractionnaire robustifié sont obtenus via la résolution itérative du problème de sensibilité mixte généralisé, en utilisant la fonction *Fminimax* du logiciel *Matlab*. De ce fait, la robustification proposée s'articule sur deux étapes essentielles qui sont : un contrôleur fractionnaire primaire est premièrement conçu à partir de la résolution du problème de sensibilité mixte généralisé basé sur des pondérations irrationnelles fixes. Ensuite, un contrôleur fractionnaire robustifié est synthétisé avec une sélection optimale et systématique des pondérations fractales ajustables. Ce contrôleur doit garantir une amélioration du compromis de robustesse entre la performance nominale et la stabilité robuste du système bouclé par le contrôleur fractionnaire primaire. Ceci non seulement pour le régime de fonctionnement nominal, mais aussi pour tous les régimes de fonctionnement perturbés. La validation de l'idée proposée est montrée à partir de la commande d'un générateur asynchrone à double alimentations où son comportement réel est modélisé par un modèle linéaire incertain. Les résultats de simulation obtenus sont comparés, dans les plans fréquentiel et temporel, à ceux fournies par le contrôleur fractionnaire primaire ainsi celui synthétisé par la méthode  $H_\infty$  utilisant l'approche *LMI*.

## Mots-clés

Contrôleur fractionnaire primaire, contrôleur fractionnaire robustifié, contrôleur conventionnel, Générateur asynchrone à double alimentations.

# Table des matières

Liste des figures	I
Symboles et abréviations	II
Introduction générale	1

## Chapitre 1

### Commande Robuste d'Ordre Entier *CROE*

1. Introduction	9
1.1. Représentation d'un système pluridimensionnel	10
1.1.1. Représentation utilisant le modèle linéaire incertain	10
1.1.2. Représentations fréquentielles	12
1.1.3. La décomposition en valeurs singulières <i>SVD</i>	12
1.1.3.1. <i>SVD</i> pour les systèmes <i>LTI</i> multi-variables	12
1.1.3.2. Les normes $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$	13
1.2. Modélisation des incertitudes	13
1.2.1. Incertitude additive directe ou inverse	14
1.2.2. Incertitudes multiplicatives	14
1.3. Transformation linéaire fractionnaire <i>LFT</i>	15
1.3.1. <i>LFT</i> supérieure	15
1.3.2. <i>LFT</i> inférieure	16
1.4. Stabilité des systèmes pluridimensionnels	17
1.4.1. Stabilité nominale	17
1.4.2. Stabilité interne	17
1.4.3. Stabilité robuste	17
1.4.3.1. Théorème du petit gain	18
1.4.3.2. Condition de stabilité	19
1.4.4. Analyse de robustesse en présences de diverses entrées exogènes	19
1.5. Problème $\mathcal{H}_\infty$ standard	22

1.5.1. Problème $\mathcal{H}_\infty$ optimal	23
1.5.2. Problème $\mathcal{H}_\infty$ sous optimal	24
1.5.3. Problème de Sensibilité Mixte généralisée	24
<b>1.6. Résolution du problème <math>\mathcal{H}_\infty</math></b>	<b>26</b>
1.6.1. Résolution fondée sur les équations de <i>Riccati</i>	26
1.6.1.1. Théorème 1.1	27
1.6.2. Résolution fondée sur l'approche <i>LMIs</i>	29
1.6.2.1. Lemme 1.1	29
1.6.2.2. Théorème 1.2	30
<b>1.7. Exemple d'application et de simulation</b>	<b>30</b>
1.7.1. Description du système <i>HVAC</i>	30
1.7.2. Synthèse des contrôleurs robustes par les versions de la méthode $\mathcal{H}_\infty$	32
<b>1.8. Conclusion</b>	<b>41</b>

## Chapitre 2

### Commande Robuste d'Ordre Non Entier *CRONE*

<b>2. Introduction</b>	<b>42</b>
<b>2.1. Théorie de la dérivation non entière</b>	<b>43</b>
2.1.1. Fonctions spécifiques pour la dérivation non entière	43
2.1.1.1. Fonction <i>Gamma</i>	43
2.1.1.2. Fonction <i>Mittag-Leffler</i>	43
<b>2.2. Opérateurs d'intégration et de dérivation d'ordre non entiers</b>	<b>44</b>
2.2.1. Dérivation et intégration d'ordre non entier	44
2.2.1.1. Définition au sens de <i>Grunwald-Letnikov</i> GL	44
2.2.1.2. Définition au sens de <i>Riemann-Liouville</i> RL	45
2.2.1.3. Définition au sens de <i>Caputo</i>	45
2.2.2. Quelques propriétés de la dérivation non entière	46
2.2.3. Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire	47
2.2.3.1. Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire	47
2.2.3.2. Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire	47
2.2.4. Représentation d'un contrôleur fractionnaire	48
2.2.4.1. Équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire	48

2.2.4.2. Représentation d'état d'un contrôleur fractionnaire commensurable	49
2.2.5. Matrice de transfert d'un contrôleur fractionnaire commensurable	49
<b>2.3. Stabilité d'un système bouclé par un contrôleur fractionnaire pluridimensionnel</b>	<b>50</b>
2.3.1. Théorème 1	50
<b>2.4. Approximations des opérateurs d'ordre fractionnaire</b>	<b>51</b>
2.4.1. Méthode utilisant les expansions de fraction continue <i>CFE</i>	51
2.4.1.1. <i>CFE</i> utilisant une fonction génératrice continue	52
2.4.1.2. <i>CFE</i> utilisant la fonction génératrice discrète	53
2.4.2. Approximation utilisant le développement en série des expansions de <i>Maclaurin</i>	55
2.4.3. Méthode de <i>Carlson</i>	56
2.4.4. Méthode d' <i>Oustaloup</i>	56
2.4.5. Méthode de <i>Charef</i>	57
<b>2.5. Synthèse d'un contrôleur robuste par l'optimisation <i>Min-Max</i></b>	<b>58</b>
2.5.1. Structure générale du <i>PID</i> fractionnaire pluridimensionnel $PI^\lambda D^\mu$	59
2.5.2. Problème de sensibilité mixte généralisé utilisant le contrôleur $PI^\lambda D^\mu$	59
2.5.3. Problème de sensibilité mixte généralisé utilisant l'estimant du contrôleur $PI^\lambda D^\mu$	60
2.5.4. Résolution basée sur l'optimisation <i>Min-Max</i>	61
2.5.4.1. Algorithme d'optimisation <i>Min-Max</i>	61
2.5.5. Structure générale de la fonction <i>Fminimax</i>	63
<b>2.6. Simulation</b>	<b>64</b>
2.6.1. Méthodes d'approximation utilisant les deux <i>CFEs</i> ( <i>CFE-bas</i> et <i>CFE-haut</i> )	67
2.6.2. Méthode de <i>Matsuda</i> utilisant la <i>CFE</i>	68
2.6.3. Méthode d' <i>Oustaloup</i>	70
<b>2.7. Conclusion</b>	<b>73</b>

## Chapitre 3

### Robustification du contrôleur fractionnaire primaire *CFP*

<b>3. Introduction</b>	<b>74</b>
<b>3.1. Matrices des pondérations rationnelles</b>	<b>75</b>
3.1.1. Pondération rationnelle limitant les sensibilités directes $S_{1,2}$	75

3.1.2. Pondération rationnelle limitant les commandes fournies par $K_{1;2}$	76
3.1.3. Pondération rationnelle limitant les sensibilités complémentaires $T_{1;2}$	77
<b>3.2. Règles d'ajustement des pondérations rationnelles</b>	<b>77</b>
<b>3.3. Comparaison entre les pondérations rationnelles et irrationnelles</b>	<b>80</b>
3.3.1. Comparaison entre $\sigma_{max}[W_{S_0}^{-1}(j\omega)]$ et $\sigma_{max}[W_{S_1}^{-1}(j\omega)]$	80
3.3.2. Comparaison entre $\sigma_{max}[W_{R_0}^{-1}(j\omega)]$ et $\sigma_{max}[W_{R_1}^{-1}(j\omega)]$	80
3.3.3. Comparaison entre $\sigma_{max}[W_{T_0}^{-1}(j\omega)]$ et $\sigma_{max}[W_{T_1}^{-1}(j\omega)]$	81
<b>3.4. Problème de sensibilité mixte généralisé basé sur le <math>CFR_1</math></b>	<b>82</b>
3.4.1. Solution du problème par la fonction $F_{minimax}$	82
<b>3.5. Problème de sensibilité mixte généralisé basé sur le <math>CFR_2</math></b>	<b>83</b>
3.5.1. Reformulation du problème de sensibilité mixte généralisé basé sur le $CFR_2$	86
3.5.2. Méthodes d'approximation du $CFR_2$	87
3.5.2.1. Identification fréquentielle utilisant la fonction de <i>Hartley</i>	87
3.5.2.2. Identification fréquentielle utilisant la fonction de <i>Levy</i>	87
3.5.2.3. Identification fréquentielle utilisant la fonction de <i>Vinagre</i>	88
3.5.2.4. Identification fréquentielle utilisant la fonction <i>Fitfrd</i>	88
<b>3.6. Etude en simulation</b>	<b>89</b>
<b>3.7. Conclusion</b>	<b>95</b>

## Chapitre 4

### Application sur système la *MADA*

<b>4. Introduction</b>	<b>96</b>
<b>4.1. Les systèmes éoliens</b>	<b>96</b>
4.1.1. Principe de fonctionnement d'une éolienne	97
<b>4.2. Types d'aérogénérateurs</b>	<b>97</b>
4.2.1. Aérogénérateurs à axe vertical <i>VAWT</i>	97
4.2.2. Aérogénérateurs à axe horizontal	98
<b>4.3. La chaîne de transformation énergétique</b>	<b>99</b>
4.3.1. La transformation de l'énergie par les pales	99
4.3.2. L'accélération du mouvement de rotation grâce au multiplicateur	99
4.3.3. La production d'électricité par le générateur	99
4.3.4. Le traitement de l'électricité par le convertisseur et le transformateur	99



<b>4.4. Topologies de génératrices éoliennes à vitesse variable</b>	<b>99</b>
4.4.1. Système utilisant une génératrice asynchrone	100
4.4.2. Système utilisant la génératrice asynchrone à double alimentation	100
4.4.3. Système utilisant une génératrice synchrone	101
<b>4.5. Etat de l'art sur la machine asynchrone à double alimentation</b>	<b>102</b>
4.5.1. Introduction	102
4.5.2. Structure de la <i>MADA</i>	103
4.5.3. Modes de fonctionnement de la <i>MADA</i>	103
4.5.4. Application de la machine asynchrone à double alimentation	104
4.5.5. Avantages et inconvénients de la <i>MADA</i>	105
4.5.6. Modélisation de la machine asynchrone à double alimentation	107
<b>4.6. Résultats de simulation et discussions</b>	<b>109</b>
4.6.1. Contrôleur conventionnel d'ordre entier <i>CCOE</i>	110
4.6.2. Contrôleur Fractionnaire Primaire <i>CFP</i>	111
4.6.3. Contrôleur Fractionnaire Robustifié <i>CFR</i>	113
<b>4.7. Conclusion</b>	<b>120</b>
 <b>Conclusion générale et perspectives</b>	
 Conclusion générale	121
Perspectives	123
<b>Références Bibliographiques</b>	<b>124</b>

## Liste des figures

<i>Fig.1.1. Configuration standard d'un système bouclé</i>	11
<i>Fig.1.2. Incertitude additive</i>	14
<i>Fig.1.3. Incertitudes multiplicative</i>	15
<i>Fig.1.4. Schéma d'une LFT d'un système bouclé</i>	16
<i>Fig.1.5. Structure d'un système bouclé pour l'analyse de la robustesse de stabilité</i>	18
<i>Fig.1.6. Configuration standard d'un système bouclé</i>	20
<i>Fig.1.7. Configuration (P – K) du système bouclé</i>	23
<i>Fig. 1.8. Lieux de <math>\sigma_{\max}[G_N(j\omega)]</math>, <math>\sigma_{\min}[G_N(j\omega)]</math> et <math>\frac{\sigma_{\max}[G_N(j\omega)]}{\sigma_{\min}[G_N(j\omega)]}</math></i>	31
<i>Fig. 1.9. Lieux des valeurs singulières maximales de <math>\Delta_s(j\omega)</math> et <math>W_T(j\omega)</math></i>	33
<i>Fig. 1.10. Stabilité robuste / performances nominales fournis par le contrôleur PID pluridimensionnel</i>	34
<i>Fig. 1.11. Examen de la stabilité robuste dans le plan fréquentiel</i>	35
<i>Fig. 1.12. Performances nominales du système bouclé par les trois contrôleurs précédents</i>	36
<i>Fig. 1.13. Système bouclé constitué par le système perturbé et les trois contrôleurs précédents</i>	37
<i>Fig. 1.14. Blocs Simulink/Matlab modélisant le système perturbé</i>	37
<i>Fig. 1.15. Sorties globales du système bouclé par le contrôleur PID pluridimensionnel</i>	38
<i>Fig. 1.16. Sorties globales du système bouclé par le contrôleur <math>\mathcal{H}_\infty</math> utilisant l'approche LMIs</i>	38
<i>Fig. 1.17. Sorties globales du système bouclé par le contrôleur <math>\mathcal{H}_\infty</math> utilisant les équations de Riccati</i>	38
<i>Fig. 1.18. Comparaison des sorties obtenues par les trois contrôleurs précédents</i>	39
<i>Fig.1.19. Comparaison des commandes fournies par les trois contrôleurs précédents</i>	39
<i>Fig.1.20. Convergence des commandes fournies vers l'inverse des gains statiques de <math>G(s)</math></i>	40
<i>Fig.2.1. Régions de stabilité d'un contrôleur fractionnaire</i>	51
<i>Fig.2.2. Amélioration de la robustesse des performances nominales par le contrôleur <math>PI^\lambda D^\mu</math></i>	65
<i>Fig.2.3. Satisfaction de la condition de robustesse sur la stabilité robuste par le contrôleur <math>PI^\lambda D^\mu</math></i>	66
<i>Fig.2.4. Réponses fréquentielles du contrôleur <math>PI^\lambda D^\mu</math> comparées avec celles fournies par les CFEs bas et haut</i>	68
<i>Fig.2.5. Réponses fréquentielles du <math>PI^\lambda D^\mu</math> comparées avec celles fournies par la méthode de Matsuda</i>	69
<i>Fig.2.6. Réponses fréquentielles fournies par le CFP et celles déterminées par la méthode d'Oustaloup</i>	71
<i>Fig.2.7. Configuration de Simulink/Matlab utilisée pour la comparaison des réponses</i>	71

temporelles

<b>Fig.2.8.</b> Sorties globales du système bouclé fournies par les trois contrôleurs robustes précédents	72
<b>Fig.2.9.</b> Commandes globales fournies par les trois contrôleurs robustes précédents	72
<b>Fig.3.1.</b> Comparaison entre les courbes de $\sigma_{\max}[W_{S_0}^{-1}(j\omega)]$ et $\sigma_{\max}[W_{S_1}^{-1}(j\omega)]$	80
<b>Fig.3.2.</b> Comparaison entre les courbes de $\sigma_{\max}[W_{R_0}^{-1}(j\omega)]$ et $\sigma_{\max}[W_{R_1}^{-1}(j\omega)]$	81
<b>Fig.3.3.</b> Comparaison entre les courbes de $\sigma_{\max}[W_{T_0}^{-1}(j\omega)]$ et $\sigma_{\max}[W_{T_1}^{-1}(j\omega)]$	81
<b>Fig.3.4.</b> Amélioration de la robustesse des performances nominales par le contrôleur $PI^\lambda D^\mu$	91
<b>Fig.3.5.</b> Satisfaction de la condition de robustesse sur la stabilité robuste par le contrôleur $PI^\lambda D^\mu$	92
<b>Fig.3.6.</b> Sorties globales du système bouclé fournies par les trois contrôleurs robustes précédents	93
<b>Fig.3.7.</b> La commande fournie par le contrôleur fractionnaire primaire CFP	94
<b>Fig.3.8.</b> La commande fournie par le contrôleur fractionnaire robustifié $CFR_1$	94
<b>Fig.3.9.</b> La commande fournie le contrôleur fractionnaire robustifié $CFR_2$	94
<b>Fig.3.10.</b> Comparaison des commandes fournies par $CFR_1$ et $CFR_2$	95
<b>Fig. 4.1.</b> Conversion de l'énergie cinétique du vent	97
<b>Fig. 4.2.</b> Éolienne à vitesse variable basée sur une machine asynchrone	100
<b>Fig. 4.3.</b> Éolienne à vitesse variable basée sur une MADA	101
<b>Fig. 4.4.</b> Éolienne à vitesse variable basée sur une machine synchrone	101
<b>Fig. 4.5.</b> Schéma de l'alimentation de la MADA pour une application génératrice	102
<b>Fig.4.6.</b> Schéma de l'alimentation de la MADA pour une application moteur	103
<b>Fig. 4.7.</b> Structure du rotor de la MADA	103
<b>Fig. 4.8.</b> Modes de fonctionnement de la MADA	104
<b>Fig. 4.9.</b> Comparaison de Zone de fonctionnement en survitesse sans démagnétisation : machine à cage et MADA	106
<b>Fig. 4.10.</b> Représentation d'un fonctionnement avec démagnétisation d'une MADA	106
<b>Fig. 4.11.</b> Schéma d'une éolienne à vitesse variable basée sur une MADA	107
<b>Fig.4.12.</b> Schéma bloc pour commander une MADA par les trois contrôleurs CCOE, CFP et CFR	109
<b>Fig.4.13.</b> Schéma de simulation d'une éolienne à vitesse variable basée sur une MADA	110
<b>Fig. 4.14.</b> Amélioration de la marge de robustesse en performances du système bouclé	114
<b>Fig.4.15.</b> Amélioration de la marge de Robustesse de stabilité du système bouclé	115
<b>Fig. 4.16.</b> Les sorties de processus obtenues par les trois contrôleurs CCOE, CFP et $CFR_2$	117
<b>Fig. 4.17.</b> Suivi de consigne références données par les trois contrôleurs CCOE, CFP et $CFR_2$ (zoom1)	117

## Liste des figures

---

- Fig. 4.18.** *Rejection de perturbations par les trois contrôleurs CCOE, CFP et CFR<sub>2</sub> (zoom2)* **118**
- Fig.4.19.** *Minimisation de l'effet de bruits par les trois contrôleurs CCOE, CFP et CFR<sub>2</sub> (zoom3)* **118**
- Fig. 4.20.** *Suivi dynamique de la tension de référence donnée par la CFR<sub>2</sub>* **119**
- Fig. 4.21.** *Les tensions rotoriques obtenues  $V_{r,a}(t)$ ,  $V_{r,b}(t)$  et  $V_{r,c}(t)$  par la CFR<sub>2</sub>* **120**

## Symboles et Abréviations

$x(t)$	Vecteur d'état du système à commander
$u(t)$	Vecteur de commandes fournies par le contrôleur
$y(t)$	Vecteur de sorties (grandeurs à régler)
$G(s)$	Matrice de transfert du système à commander
$K(s)$	Matrice de transfert décrivant le contrôleur robuste à synthétiser
$P(s)$	Matrice de transfert décrivant le modèle généralisé
$\Delta_x(s)$	Matrice de transfert stable décrivant les incertitudes de modélisation
$w(s)$	Vecteur qui représente les différentes entrées exogènes
$z(s)$	Vecteur qui représente les différentes sorties exogènes
$S(s)$	Sensibilité directe
$T(s)$	Sensibilité complémentaire
$d_u$	Vecteur des perturbations à l'entrée du système
$d_y$	Vecteur des perturbations à la sortie du système
$\eta_y$	Vecteur des bruits de mesures
$V_{ds}$	Composantes du vecteur tension statorique selon l'axe « d »
$V_{qs}$	Composantes du vecteur tension statorique selon l'axe « q »
$V_{dr}$	Composantes du vecteur tension rotorique selon l'axe « d »
$V_{qr}$	Composantes du vecteur tension rotorique selon l'axe « q »
$I_{ds}$	Composantes du vecteur courant statorique selon l'axe « d »
$I_{qs}$	Composantes du vecteur courant statorique selon l'axe « q »
$I_{dr}$	Composantes du vecteur courant rotorique selon l'axe « d »
$I_{qr}$	Composantes du vecteur courant rotorique selon l'axe « q »
$\phi_{ds}$	Composantes du vecteur flux statorique selon l'axe « d »
$\phi_{qs}$	Composantes du vecteur flux statorique selon l'axe « q »
$\phi_{dr}$	Composantes du vecteur flux rotorique selon l'axe « d »
$\phi_{qr}$	Composantes du vecteur flux rotorique selon l'axe « q »
$R_s$	Résistances (d'une phase) de l'enroulement statorique
$R_r$	Résistances (d'une phase) de l'enroulement rotorique
$L_s$	Inductances cycliques du stator
$L_r$	Inductances cycliques du rotor
$M$	Inductance mutuelle cyclique
$p$	Nombre de paires de pôles de la machine asynchrone
$C_r$	Couple résistant
$f$	Coefficient du frottement visqueux
$J$	Moment d'inertie
$C_e$	Couple électromagnétique
$C_m$	Couple mécanique

<i>CROE</i>	Commande Robuste d'Ordre Entier
<i>CRONE</i>	Commande Robuste d'Ordre Non Entier
<i>PN</i>	Performances Nominales
<i>SR</i>	Stabilité Robuste
<i>CCOE</i>	Contrôleur Conventionnel d'Ordre Entier
<i>CFP</i>	Contrôleur Fractionnaire Primaire
<i>CFR</i>	Contrôleur Fractionnaire Robustifié
<i>MIMO</i>	Multi Input Multi Output
<i>SVD</i>	Décomposition en Valeurs Singulières
<i>LFT</i>	Transformation linéaire fractionnaire
<i>PID</i>	Proportionnel Intégral Dérivée
<i>FOPID</i>	Fractionnaire Ordre Proportionnel Intégral Dérivée
<i>HVAC</i>	Heating Ventilation Air Conditioning
<i>MADA</i>	Machine Asynchrone à Double Alimentation
<i>GADA</i>	Générateur Asynchrone à Double Alimentation
<i>VAWT</i>	Vertical Axis Wind Turbine
<i>HAWT</i>	Horizontal Axis Wind Turbine
<i>MAS</i>	Machine Asynchrone
<i>MS</i>	Machine Synchrone
<i>DFIG</i>	Doubly-Fed Induction Generator

# *Introduction générale*

### Introduction générale

Durant ces dernières décennies, le problème de la commande des systèmes pluridimensionnels à base des modèles linéaires incertains a attiré l'intérêt de plusieurs chercheurs. En effet, l'apparition systématique des grandeurs non souhaitées comme la présence des incertitudes de modélisation, l'effet des bruits de mesure, ou encore l'effet de la dynamique non linéaire négligée, ... etc, à incité mettre en œuvre des méthodes de synthèse très efficaces l'une que les autres. Ces méthodes doivent synthétiser des contrôleurs assurant un compromis idéal entre la stabilité robuste du système bouclé ainsi que les performances nominales. Ce compromis doit être assuré non seulement pour le régime de fonctionnement nominal du système réel à commander mais aussi pour un ensemble de régimes de fonctionnement dans lesquels les paramètres du modèle de synthèse peuvent varier dans une plage de variation importante.

Dans la stratégie basée sur la théorie de la commande robuste, l'élaboration du contrôleur robuste à base d'un modèle linéaire exact est souvent très difficile à atteindre dans la pratique. Ceci est causé par l'existence des incertitudes de modélisation engendrant, par conséquent, des modèles linéaires qui sont incapables de décrire parfaitement le comportement réel des systèmes à commander. Pratiquement, il existe plusieurs causes qui provoquent ces incertitudes. Généralement, les causes les plus souvent remarquées lors de la modélisation des systèmes réels sont celles produites par la dynamique en hautes fréquences, qui sont toujours mal connues, ou volontairement négligées, la présence des retards purs multiples qui provoquent souvent l'instabilité du système bouclé, la présence des erreurs commises sur la valeur exacte des paramètres physiques, l'écart entre le comportement réel du système et celui fourni par le modèle de synthèse. Cet écart est souvent produit lors de la linéarisation du système autour de son point de fonctionnement, la présence des effets non souhaités causés par l'utilisation des modèles simplifiés pour les actionneurs et les capteurs,.... etc.

Il convient donc de faire une évaluation stricte et correcte de toutes ces incertitudes et cela pour élaborer des contrôleurs capables de satisfaire un niveau élevé des spécifications temporelles et fréquentielles imposées par un tel cahier de charges. Notant ici, qu'un contrôleur conventionnel tel que le contrôleur Proportionnel-Intégral- Dérivée *PID* pluridimensionnel est largement suffisant pour stabiliser un système pluridimensionnel simple dont sa dynamique est décrite par un modèle linéaire incertain non compliqué. En revanche, le réglage optimal de ses trois gains est pratiquement très difficile à atteindre notamment si les paramètres de ce modèle changent dans une large bande [1].



En outre, la plupart de ces contrôleurs sont incapables d'assurer un bon compromis de robustesse du système bouclé même si ces variations paramétriques sont très réduites. Conformément aux exigences susnommées, l'élaboration du contrôleur robuste via un modèle incertain devient une nécessité inévitable dans l'industrie [2], [3]. En effet, pour la conception d'un contrôleur robuste, plusieurs méthodes de synthèse ont été suggérées pour les systèmes physiques modélisés par des modèles pluridimensionnels incertains. Parmi les méthodes robustes les plus utilisées dans la pratique, on peut citer la commande robuste d'ordre entier *CROE* utilisant les équations de *Riccati* ainsi que celle utilisant l'approche *LMI* (*Linear Matrix Inequalities*).

Ces méthodes robustes ont commencé au début des années 80 par les travaux des chercheurs *Doyle* et *Safonov* dans lesquels des nouveaux outils mathématiques ont été introduits, en particulier la norme  $\mathcal{H}_\infty$ , et les valeurs singulières structurées. La mesure de la stabilité et des performances à base de ces valeurs singulières était, en général, conservative aux perturbations structurées des processus. Ensuite, *Doyle* a introduit en 1982 et pour la première fois, le concept des valeurs singulières structurées dans la théorie de la commande robuste avec lesquelles d'autres chercheurs ont suggéré les règles fondamentales de l'analyse du contrôle robuste. En 1983, le problème de synthèse optimale  $\mathcal{H}_\infty$  pour les systèmes *Single Input Single Output SISO* a été résolu par *Zames* et *Francis*, mais sa généralisation aux systèmes pluridimensionnels a été abordée après, notamment en 1984. Après cette année, les solutions au problème de stabilisation des systèmes *Multi Inputs Multi Outputs MIMO* ont été présentées par plusieurs chercheurs comme *Vidyasagar* et *Kimura* et *Glover* notamment en 1986. L'évaluation de ces solutions entraîne la recherche des algorithmes performants, qui sont aujourd'hui disponibles dans les logiciels spécialisés comme le *Matlab*.

Parallèlement à ces travaux, d'autres recherches comme *Francis*, *Kwakernaak*, *Doyle*, *Glover*,...etc. ont utilisé le même formalisme pour développer la "commande  $\mathcal{H}_\infty$ " dans laquelle le problème de la commande est conçu par l'optimisation de la norme  $\mathcal{H}_\infty$  d'un transfert qui intervient entre des signaux d'entrées exogènes (perturbations, bruits, références,..., etc.) et ceux des sorties exogènes qui représentent les signaux d'erreurs judicieusement choisis. Le pas décisif pour l'utilisation de cette stratégie de commande fut franchi à la fin des années 80, quand apparurent les principales techniques permettant de résoudre le problème standard.

Récemment, d'autres stratégies de commande, qui sont inspirées du même principe de la commande robuste  $\mathcal{H}_\infty$ , ont été proposées dans la littérature pour la commande des systèmes

incertains. Ces méthodes de synthèse peuvent élaborer des contrôleurs robustes aboutissant à un bon compromis de robustesse entre les deux objectifs contradictoires comme les Performances Nominales  $PN$  et la Stabilité Robuste  $SR$  du système bouclé, et cela avec des commandes très réduites [4], [5]. La majorité d'entre-elles peuvent atteindre cet objectif à partir de la résolution itérative d'un problème d'optimisation appelé « problème de sensibilité mixte généralisée », en anglo-saxon : *Generalized Mixed Sensitivity Problem*. Ce problème d'optimisation peut contenir un ensemble des pondérations définissant les spécifications temporelles et fréquentielles d'un tel cahier de charges. De plus, La résolution de celui-ci peut être assurée par le choix adéquat d'un algorithme d'optimisation avec lequel la norme  $\mathcal{H}_\infty$  du critère de performance doit être minimisée dans une plage de fréquence fixée à priori par l'utilisateur. Le critère de performance cité précédemment est obtenu par une transformation linéaire appelée « *Linear Fractional Transformation* » *LFT*. Cette dernière reliant le contrôleur robuste à synthétiser par le modèle généralisé (système augmenté) qui englobe toutes les spécifications imposées à satisfaire. La solution optimale de ce problème est obtenue au moyen de quelques méthodes de la commande robuste, on peut citer parmi lesquelles : la méthode  $\mathcal{H}_\infty$  utilisant les équations de *Ricatti* [4], et méthode  $\mathcal{H}_\infty$  utilisant l'approche des Inégalités Matricielles Linéaires *LMI* [5].

Toutefois, ces deux méthodes précédentes peuvent fournir des contrôleurs stabilisant le système bouclé avec lesquels les performances obtenues montrent la supériorité de ces méthodes de synthèse par rapport les méthodes conventionnelles. Cet avantage se traduit par la satisfaction des conditions de robustesse sur les performances nominales et sur la stabilité robuste en présence les incertitudes de modélisations et les effets de bruits de mesure. Il se traduit également par l'obtention des meilleures marges de robustesse du compromis entre  $PN$  et  $SR$  dans lequel les signaux de commande obtenus doivent être assurés avec moins d'énergie. Néanmoins, pour certaines applications industrielles, ces méthodes de synthèses peuvent élaborer des contrôleurs d'ordre très élevé avec lesquels la phase d'implémentation est souvent très difficile en pratique. C'est pour cette raison, qu'on doit chercher des méthodes de réduction des modèles qui permettent de réduire l'ordre élevé du contrôleur robuste.

A cet effet, plusieurs techniques ont été proposées dans la littérature assurant l'objectif cité ci-dessus. Parmi ces méthodes de réduction et qui sont les plus utilisées dans la théorie de la commande robuste, on peut citer : la technique de réduction de Schur *SMR* [6], la technique optimale de Hankel *OHMR*, et d'autres [7]. Toutefois ces techniques proposées sont capables de résoudre avec efficacité remarquables le problème de la complexité des structures de certains contrôleurs robustes d'ordre élevé. Malheureusement, cette réduction peut influencer sur les

propriétés de robustesse du système bouclé chose qui peut les aggraver progressivement en fonction de l'évolution de la fréquence dans le plan fréquentiel ([3], [8], [9]). De ce fait, la recherche d'autres stratégies de commandes assurant des structures fixes et simples pour les contrôleurs robustes devient inévitable. Il est à signaler, qu'un contrôleur robuste assuré par une structure fixe avec moins de variables représente l'un des objectifs ciblé par méthodes de synthèse et cela depuis la fin des années 90. Les paramètres optimaux de cette structure sont obtenus via la résolution du problème de sensibilité mixte généralisé par plusieurs algorithmes spécifiques d'optimisation. Parmi lesquels, on peut citer : l'algorithme d'optimisation globale *GOA* [8], la programmation de la matrice des inégalités des contraintes non linéaires *MICNP* [9], optimisation des valeurs propres *EVO* [10], et d'autres. Notons ici, que l'efficacité des méthodes de synthèse utilisant les algorithmes précédents a été validée sur plusieurs systèmes physiques. Cependant, la convergence de la solution optimale définissant la structure fixée du contrôleur robuste n'est pas souvent assurée et cela est due à plusieurs raisons qui sont : la convergence de l'algorithme se ralentit et s'approche de la solution optimale à cause du nombre plus élevé des fonctions objectives à optimiser ainsi que le nombre élevé des spécifications à satisfaire. La convergence vers des minima locaux (ou optimum global) n'est pas garantie en raison du mauvais choix de l'étape d'initialisation de l'algorithme à utiliser car le choix adéquat de celle-ci peut requérir plusieurs tentatives [3].

Récemment, la synthèse basée sur les contrôleurs de deux degrés de libertés *2-Degree Of Freedom 2-DOF* est une technique alternative la plus souvent utilisée pour satisfaire le nombre élevé de spécifications du cahier de charges [11]. L'idée de ces méthodes consiste à séparer la satisfaction des performances nominales de celle de la stabilité robuste du système bouclé. De plus, elles disposent de deux contrôleurs de rétroaction dans la boucle de commande. Le premier contrôleur appelé « le pré-compensateur » qui est conçu pour assurer des meilleures propriétés de performance. Cependant, le second contrôleur appelé « le post-compensateur » qui est synthétisé pour renforcer la robustesse de la stabilité robuste et cela par la détermination du transfert appelé *Q-parameter* qui minimise la norme  $\mathcal{H}_\infty$  utilisée dans la paramétrisation de *Youla*. Plusieurs inconvénients de la technique *2-DOF- $\mathcal{H}_\infty$*  peuvent être observés. Parmi ceux-ci, on peut citer : le coût élevé de la mise en service de ces deux contrôleurs, le manque de fiabilité, et les problèmes potentiels dans l'entretien des instruments de commande. Pour éviter ces problèmes, le contrôleur *2-DOF* basé sur la commande prédictive généralisée *GPC* a été proposé pour améliorer le compromis de robustesse du système bouclé en présence des incertitudes de modélisation ainsi que les bruits de capteurs [12-14]. La synthèse de ce contrôleur doit suivre les

trois étapes suivantes : premièrement, un contrôleur primaire est tout d'abord conçu par la forme initiale de la loi de *GPC* et cela pour assurer de bonnes propriétés de suivi des trajectoires de référence. Sa robustesse est ensuite renforcée par le transfert stable *Q-parameter*. Ce dernier est ensuite combiné avec le contrôleur primaire précédent en utilisant le paramétrage de *Youla* pour élaborer le contrôleur robustifié. Il est important de noter ici que la conception du *Q-paramètre* est basée sur l'utilisation des spécifications fréquentielles et temporelles pour formuler le problème d'optimisation qui permet la détermination optimale des coefficients du transfert *Q-parameter*. En outre, un inconvénient de cette stratégie de commande s'est exprimé par le choix difficile de l'ordre optimal du transfert *Q-parameter*, ce qui est fixé après plusieurs essais.

Durant ces dernières décennies, l'avancée de la recherche dans le calcul fractionnaire a donné lieu à d'autres méthodes de synthèses très efficaces les unes que les autres. L'avantage de ces méthodes réside dans le fait qu'elles ne nécessitent que la proposition d'une structure fractale d'ordre très réduit pour élaborer le contrôleur robuste. Puis, le problème de sensibilité mixte généralisé précédent est résolu par un algorithme d'optimisation de type min-max avec lequel la solution optimale obtenue permet de définir les paramètres de cette structure suggérée.

Il est à noter ici que, l'ordre fractionnaire survenant dans l'opérateur de *Laplace* peut être rapproché par un transfert usuel d'ordre entier comportant un nombre infini de pôles et de zéros [15]. A cet effet, de nombreuses méthodes de synthèse avancée peuvent bénéficier de cette propriété importante pour concevoir un contrôleur fractionnaire avec une structure adéquate, facile à implémenter, simple et comportant un nombre d'inconnus très réduit [16]. Dans ce cas, une réduction importante de la dimension du problème de la commande est observée lors la synthèse du contrôleur chose qui représente, plus tard, une importance capitale pour le succès des outils d'optimisation [3].

Toutefois, la synthèse du contrôleur fractionnaire pluridimensionnel par la résolution du problème de sensibilité mixte généralisée utilisant les pondérations fixes et d'ordre entier peut satisfaire un nombre considérable des contraintes industrielles. Cependant, le niveau élevé de contraintes rigoureuses rend difficile l'atteinte d'un compromis idéal entre les *PN* et la *SR* du système bouclé.

Selon des travaux antérieurs [17-20], la réalisation d'une bonne marge de robustesse des *PN* et *SR* dépend largement du choix appropriée de la structure fractionnaire proposée pour la conception du contrôleur robuste. Elle dépend également du choix adéquat des pondérations fixes d'ordre entier avec lesquelles la formulation du problème de sensibilité mixte généralisée peut prendre en compte la satisfaction de toutes les spécifications imposées par le cahier de

charges [17]. Bien que la détermination des pondérations appropriées quantifiant un nombre réduit des spécifications simples nécessite plusieurs expériences et essais. En revanche, pour plusieurs spécifications dures, l'utilisation des pondérations irrationnelles peut restreindre l'efficacité du contrôleur fractionnaire [20].

Le travail de se fixe comme objectif de pallier à cette anomalie, ceci par l'introduction des pondérations fractionnaires et ajustables dans le problème de sensibilité mixte généralisée. Le choix optimal de celles-ci est effectué systématiquement par un algorithme d'optimisation tout en satisfaisant un guide de réglage permettant d'assurer des formes idéales des matrices de sensibilités dans le plan fréquentiel. Cette stratégie proposée permettant de robustifier tous les contrôleurs fractionnaires primaires dont leurs paramètres sont obtenus par la solution du problème de sensibilité mixte généralisée utilisant les pondérations irrationnelles fixes. La méthode de commande proposée, dans ce travail, sera basée sur les trois étapes suivantes : dans la première étape, un contrôleur fractionnaire standard est synthétisé via la résolution du problème de sensibilité mixte généralisée utilisant les pondérations irrationnelles fixes. Dans la deuxième étape, le problème précédent est reformulé par d'autres pondérations rationnelles ajustables inconnues. Ensuite, à partir d'un ensemble des règles de réglage, les paramètres du contrôleur fractionnaire robuste ainsi que ceux des pondérations fractionnaires sont obtenus simultanément par l'optimisation *Min-Max* en utilisant la fonction de *Matlab Fminimax*. Dans la dernière étape, les termes intégral-différentiels d'ordre non entier construisant le contrôleur résultant sont rapprochés par des transferts irrationnels en utilisant l'une des méthodes d'approximations, à savoir : *Oustaloup*, *Matsuda*, *Carlson*,...etc. Une autre contribution sera proposée dans ce travail et cela dans le but d'améliorer les performances obtenues par le contrôleur fractionnaire robuste. L'idée proposée ici consiste, à la substitution de la structure fractale du contrôleur *PID* fractionnaire, qui contient un nombre des paramètres très élevé, par celle basée sur la forme cascade des trois gains du contrôleur *PID* fractionnaire dans laquelle le nombre de variables à optimiser devient très réduit. Le processus de calcul des paramètres de cette structure proposée ainsi que les paramètres des pondérations rationnelles correspondantes est toujours conservé. Finalement, l'ordre du transfert irrationnel rapprochant cette nouvelle structure fractale est réduite en utilisant les approches basées sur l'identification fréquentielle. Les stratégies de commande proposées dans ce travail sont appliquées sur deux procédés réels dont les dynamiques sont modélisées par des modèles linéaires incertains en utilisant la forme multiplicative directe en sortie. Les résultats de simulation obtenus seront comparés à ceux fournis par les contrôleurs non robustifiés à savoir: le contrôleur *PID* conventionnel d'ordre

entier, le contrôleur robuste d'ordre entier fourni par les deux méthodes  $\mathcal{H}_\infty$  (*Riccati* et *LMI*) et le contrôleur *PID* fractionnaire basé sur la résolution du problème de sensibilité mixte généralisé utilisant les pondérations irrationnelles fixes. Les résultats obtenus sont très innovants chose qui nous a permis de les publier dans des revues scientifiques de renommée internationale.

Après cet état de l'art, l'organisation de cette thèse a été décomposée selon le modèle suivant :

Le premier chapitre de ce travail sera subdivisé en trois parties. Dans la première partie nous allons présenter les outils mathématiques fondamentaux de la commande robuste d'ordre entier tels que: la représentation des systèmes pluridimensionnels modélisés par des modèles incertains, normes et valeurs singulières d'un système linéaire et la modélisation des incertitudes non structurées. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous allons présenter le théorème du petit gain, les conditions de robustesse sur la stabilité robuste et sur les performances nominales, la formulation de problème de sensibilité mixte généralisé et les deux méthodes de synthèse du contrôleur robuste. Finalement, dans la troisième partie de ce chapitre, nous allons entamer une étude comparative dans laquelle un procédé thermique mal conditionné (*ill-conditioned system*) est contrôlé par deux contrôleurs robustes synthétisés par deux versions de la commande  $\mathcal{H}_\infty$ . Les performances obtenues sont comparées à celles fournies par le contrôleur conventionnel *PID* pluridimensionnel.

Le deuxième chapitre est dédié à l'exposition de différentes définitions utilisées dans la commande robuste d'ordre non entier *CRONE* en particulier les définitions de l'opérateur intégro-différentiel d'ordre non entier décrivant le transfert du contrôleur *PID* fractionnaire robuste. Ensuite, nous allons donner la représentation d'état d'ordre non entier notamment pour les contrôleurs fractionnaires d'ordre commensurable, les régions de stabilité d'un système bouclé par un contrôleur fractionnaire, les différentes méthodes d'approximation de l'opérateur intégro-différentiel d'ordre non entier, formulation du problème de sensibilité mixte généralisé basé sur les pondérations irrationnelles et la synthèse du contrôleur *PID* fractionnaire robuste via la solution optimale de ce problème en utilisant l'algorithme d'optimisation *Min-Max*. Finalement, ce chapitre est achevé par l'exposition de différents transferts irrationnels rapprochant le transfert du *PID* fractionnaire en utilisant les méthodes de *Clarson*, *Matsuda*, *CFE-low*, *CFE-high*, *Oustaloup*,...etc. Les performances de ce contrôleur sont comparées dans les plans fréquentiel et temporel avec celles fournies par les contrôleurs robustes du premier chapitre et cela pour présenter les avantages ainsi que les inconvénients de la commande par le contrôleur *PID* fractionnaire en présence des incertitudes de modélisation, l'effet de bruits de mesures et l'effet de l'approximation du retard multiples par la méthode de *Padé*.

Le troisième chapitre de ce travail, il sera subdivisé en trois parties. Dans la première partie nous allons présenter les nouvelles structures fractales utilisées pour la conception des pondérations rationnelles avec lesquelles le contrôleur fractionnaire primaire est robustifié et la stratégie de commande peut bénéficier plus de degré de liberté. Les paramètres de l'ensemble « contrôleur fractionnaire robustifié et pondérations fractionnaires » sont déterminées par l'optimisation *Min-Max* tout en satisfaisant les spécifications du cahier de charges ainsi que les règles de réglage assurant la sélection optimale des pondérations rationnelles ajustables. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous allons proposer une autre structure fractionnaire pour synthétiser un contrôleur fractionnaire robustifié. La structure fractale proposée comportant moins de variables inconnues ce qui réduit la dimension du problème de sensibilité mixte généralisé utilisant les pondérations rationnelles ajustables. De plus, l'implémentation du contrôleur fractionnaire est aussi améliorée par le rapprochement des blocs des transferts fractionnaires par ceux d'ordre entier en utilisant les approches basées sur l'identification fréquentielles. La troisième partie de ce chapitre sera consacrée à la validation de cette robustification proposée sur le même système thermique et les performances obtenues sont comparées avec celles fournies par un contrôleur fractionnaire primaire.

Le quatrième chapitre est dédié à la commande robuste d'ordre entier et d'ordre non entier d'une machine asynchrone à double alimentation où sa dynamique simulant le fonctionnement d'un système d'énergie renouvelable. Le fonctionnement nominal de cette machine est établi au moyen du logiciel *Simulink* et la synthèse du contrôleur fractionnaire primaire robustifié est assurée par l'optimisation *Min-Max* en utilisant la fonction *Fminimax*. Les résultats obtenus sont comparés, dans le plan fréquentiel et temporel, avec ceux fournis par les contrôleurs robustes d'ordre entier synthétisés par la méthode  $\mathcal{H}_\infty$ . Finalement, ce travail sera achevé avec une conclusion générale et quelques perspectives proposées pour les futurs par la robustification des contrôleurs fractionnaires primaires par l'introduction de l'ordre fractale dans le problème de sensibilité mixte généralisé.

***Chapitre 1 :***  
***Commande Robuste***  
***d'Ordre Entier CROE***



## 1. Introduction

La commande robuste d'ordre entier *CROE* des systèmes multivariables est une technique de commande qui vise à garantir les performances et la stabilité des processus industriels en présence des perturbations et des incertitudes de modélisation qui affectent le modèle de synthèse. En effet, ce dernier est une représentation qui approxime au mieux, avec des hypothèses simplificatrices, le système réel.

Dans la plupart des applications industrielles, il existe un écart entre le comportement observé du système réel et son modèle de synthèse. En revanche, la *CROE* vise à déterminer une loi de commande garantissant des critères imposés par des cahiers de charge où le modèle utilisé doit modéliser le fonctionnement nominal du système à commander. Par conséquent, le contrôleur robuste obtenu doit assurer une Stabilité Robuste *SR* du système bouclé ainsi que la robustesse des Performances Nominales *PN* de celui-ci. Ceci non seulement pour le régime de fonctionnement nominal mais aussi pour tous les régimes possibles de perturbations. Dans le domaine de la *CROE*, plusieurs méthodes efficaces ont été proposées pour assurer les deux robustesses précédentes en présence des incertitudes de modélisation, des bruits de mesures et finalement en présence des dynamiques négligées en hautes fréquences. Parmi les méthodes de synthèse les plus efficaces, la méthode  $\mathcal{H}_\infty$  est celle la plus utilisée pour assurer des meilleures marges de *SR* et de *PN*. C'est une méthode d'optimisation qui prend en compte une formulation mathématique des contraintes par rapport au comportement attendu en boucle fermée.

Un des avantages considérables de la commande  $\mathcal{H}_\infty$  est sa capacité à introduire des concepts liés aussi bien à la commande classique que la commande robuste. Le mot « optimal » est fréquemment utilisé dans son sens strictement mathématique, car la commande synthétisée est celle qui minimise l'effet des entrées/sorties exogènes du système, ce qui peut être vu comme "non optimal" par les opérateurs (l'optimisation étant relative à l'objectif recherché). De plus, le mot « infini » dans le symbole  $\mathcal{H}_\infty$  signifie que ce type de commande est conçu pour imposer des restrictions de type min-max au sens de la théorie de la décision (minimiser la perte maximale possible) dans le domaine fréquentiel. Finalement, La norme  $\mathcal{H}_\infty$  d'un système dynamique est l'amplification maximale que le système peut exercer sur l'énergie du signal d'entrée. Dans le cas d'un système Multi- Input, Multi-Output *MIMO*, ceci équivaut à la valeur singulière maximale du système, ce qui, dans le cas mono variable *SISO* (*Single Input Single Output*), se traduit par la valeur maximale de l'amplitude de sa réponse fréquentielle.

Dans ce chapitre, une introduction aux techniques basées sur la théorie de la *CROE* des

systèmes multivariables linéaires sera détaillée, où un intérêt particulier est donné à la méthode de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$ . A cet effet, nous allons présenter les outils mathématiques et les principales définitions utilisées dans cette stratégie de commande comme la définition de la norme  $\mathcal{H}_\infty$  et ses propriétés, la quantification et l'évaluation des incertitudes de modélisation qui affectent le modèle de synthèse, les tracés des lieux des valeurs singulières maximales des deux sensibilités directe et complémentaire dans le plan fréquentiel. Ces derniers permettant la vérification des deux conditions de robustesse sur la stabilité robuste ainsi que sur les performances nominales du système bouclé. Ces deux conditions seront formulées sous forme d'un problème de sensibilité mixte qui sera résolu par deux versions de la méthode  $\mathcal{H}_\infty$ .

La première version est basée sur la résolution récursive de deux équations de *Riccati*. Quant à la seconde, elle est basée sur la formulation des spécifications sous forme des inégalités matricielles ou en anglais *Linear Matrix Inequalities LMI*. Ce chapitre sera achevé par une partie de simulation où les performances des deux versions précédentes de la méthode  $\mathcal{H}_\infty$  seront comparées à travers une application sur un procédé chimique modélisé par un modèle incertain à retard pur multiple. Les résultats de simulation seront comparés à ceux fournis par un contrôleur *PID* (*Proportionnel Intégral Dérivée*) pluridimensionnel, et cela dans les deux plans fréquentiel et temporel.

## 1.1. Représentation d'un système pluridimensionnel

### 1.1.1 Représentation utilisant le modèle linéaire incertain

Le modèle linéaire décrivant la dynamique réelle d'un système pluridimensionnel est celui donné par les équations d'état et de mesure suivantes [21,22]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

Avec :

- $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ : représente le vecteur d'état du système à commander.
- $u(t) \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ : représente le vecteur de commande fournies par le contrôleur.
- $y(t) \in \mathbb{R}^{q \times 1}$ : représente le vecteur de sorties (grandeurs à régler)
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ : représente la matrice d'état du système à commander.
- $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ : représente la matrice de commande.
- $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ : représente la matrice d'observation.
- $D \in \mathbb{R}^{p \times q}$ : représente la matrice de la chaîne directe.

La matrice de transfert, notée ici par  $G(s) \in \mathbb{C}^{p \times q}$ , est déterminée comme suit:

$$G(s) = C(s.I_{n \times n} - A)^{-1}B + D \quad (1.2)$$

Au regard de l'équation (1.2), il est évident que la matrice  $(s.I_{n \times n} - A) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ne sera inversible qu'à condition que son déterminant ne soit pas identiquement nul. De ce fait, la représentation matricielle d'un système *MIMO* est celle donnée par le formalisme unifié suivant:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Dans le but de mettre en évidence la correction d'un système pluridimensionnel; deux configurations possibles des systèmes fermés sont à rappeler. La configuration donnée par la figure Fig.1.1.a est utilisée dans l'étape de synthèse du contrôleur. Par contre la configuration de la figure Fig.1.1.b est utilisée si le système à commander est entaché par des erreurs d'incertitudes de modélisation [22,23].

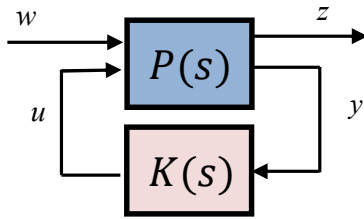


Fig.1.1. a. Configuration standard ( $P - K$ )

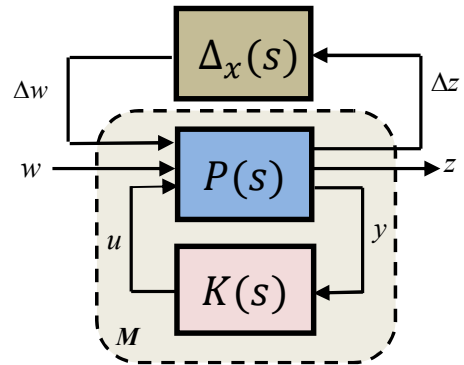


Fig.1.2.b. Configuration standard ( $M - \Delta_x$ )

Fig.1.3. Configuration standard d'un système bouclé

A partir de ces figures, les notations suivantes seront utilisées dans la suite, avec :

- $P(s)$ : est une matrice de transfert décrivant le modèle généralisé (système augmenté).
- $K(s)$ : est une matrice de transfert décrivant le contrôleur robuste à synthétiser.
- $\Delta_x(s)$ : est une matrice de transfert stable décrivant les incertitudes de modélisation.
- $w(s)$ : est un vecteur qui représente les différentes entrées exogènes à savoir: les trajectoires de références, les perturbations, les bruits de mesures, ... etc.
- $z(s)$ : est un vecteur qui représente les différentes sorties exogènes: les erreurs modérées de poursuite, les commandes modérées, ... etc.

### 1.1.2. Représentation fréquentielle

La représentation fréquentielle d'un système *LTI* multi-variable notée  $G(j\omega)$  pour  $\omega \in \mathbb{R}^{*+}$  est une matrice complexe dont le gain et la phase dépendent de la fréquence  $\omega$  et du vecteur des excitations du système (vecteur des entrées). Il est donc intéressant d'étudier certaines propriétés de cette matrice dans une plage fréquentielle donnée. Les définitions suivantes sont nécessaires pour cette étude :

### 1.1.3. La décomposition en valeurs singulières *SVD*

L'idée de la décomposition en valeurs singulières est similaire à la décomposition en valeurs propres des matrices carrées et diagonalisables, mais fonctionne pour n'importe quelle matrice  $G$  de taille  $p \times q$ : on factorise  $G$  en produit de trois matrices:

$$G = Y \cdot D \cdot V^* \quad (1.4)$$

Avec  $Y$  une matrice  $p \times p$  unitaire,  $V^*$  une matrice  $q \times q$  unitaire et  $D$  une matrice  $p \times q$  diagonale avec coefficients réels et positifs.  $D$  peut être exprimée comme suit [24]:

$$D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_q \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \text{ avec } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_q \geq 0 \quad (1.5)$$

#### 1.1.3.1. *SVD* pour les systèmes *LTI* multi-variables

Lors de la synthèse d'un contrôleur robuste, les valeurs singulières d'une matrice de transfert du système à commander, sont de plus en plus utilisées pour quantifier les énergies des signaux agissant sur le système bouclé. Ces dernières décrivent l'évolution de la dynamique du système dans le plan fréquentiel.

De ce fait, une matrice de transfert  $G(s)$  peut être décomposée en valeurs singulières maximales  $\bar{\sigma}[G(j\omega)]$  et en valeurs singulières minimales  $\underline{\sigma}[G(j\omega)]$ , on obtient les deux relations [24]:

$$\forall \omega > 0, \bar{\sigma}[G(j\omega)] \triangleq \max_i \{\sigma_i[G(j\omega)]\} \quad (1.6)$$

$$\forall \omega > 0, \underline{\sigma}[G(j\omega)] \triangleq \min_i \{\sigma_i[G(j\omega)]\} \quad (1.7)$$

Ces deux dernières relations sont équivalentes à :

$$\bar{\sigma}[G(\omega)] \triangleq \max_{\|x\|=1} \|G \cdot x\| = \sqrt{\lambda_{\max}[G^*(\omega) \cdot G(\omega)]}, \quad (1.8)$$

$$\underline{\sigma}[G(\omega)] \triangleq \min_{\|x\|=1} \|G \cdot x\| = \sqrt{\lambda_{\min}[G^*(\omega) \cdot G(\omega)]}, \quad (1.9)$$

Où  $\|\cdot\|$  représente la norme euclidienne,  $G^*$  la matrice conjuguée de  $G$  et  $\lambda_{\max}$  est la plus grande valeur propre.

### 1.1.3.2. Les normes $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$

Pour un système LTI ayant comme vecteurs d'entrées  $u(t)$ , de sortie  $y(t)$  et comme matrice de transfert  $G(s)$ , les deux normes sur la relation entrée/sortie sont définies par les équations (1.10) et (1.11).

#### a) Norme $\mathcal{H}_2$

$$\|G(j\omega)\|_2 = \text{Sup}_{u(s) \in H_2} \left( \frac{\|Y(s)\|_\infty}{\|U(s)\|_\infty} \right) = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace}[G^*(j\omega)G(j\omega)] d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.10)$$

#### b) Norme $\mathcal{H}_\infty$

C'est la norme induite par la norme des fonctions  $\mathcal{H}_2$ . De plus, cette norme mesure le gain maximal (pic de résonance) de la réponse fréquentielle de  $G(j\omega)$  :

$$\|G(j\omega)\|_\infty = \text{Sup}_{u(s) \in H_2} \left( \frac{\|Y(s)\|_2}{\|U(s)\|_2} \right) = \max_\omega \bar{\sigma}[G(j\omega)] \quad (1.11)$$

## 1.2. Modélisation des incertitudes

Dans le contexte de la commande robuste, la connaissance d'un modèle nominal utilisé pour la synthèse du contrôleur est insuffisante. Il est donc judicieux de prendre en charge tout type d'incertitudes causées par les erreurs de modélisation, les dynamiques négligées, les bruits de mesures...etc.

Les incertitudes de modélisation peuvent être décrites par les incohérences entre le modèle nominale de synthèse et le régime de fonctionnement réel du système physique. Pratiquement, il existe trois raisons pour l'existence de ces incertitudes [22]:

- Une connaissance incomplète de la dynamique réelle à modéliser.

- Le système original est parfaitement connu, mais le modèle est réduit pour contourner les difficultés imposées par la complexité du modèle complet.
- Les incertitudes sont causées par une structure inadéquate du modèle, par exemple la représentation d'un modèle non linéaire par un modèle linéaire.

Durant la phase de modélisation d'un comportement réel d'un tel système physique, les erreurs de modélisation, dites non structurées, peuvent être classées en deux formes: additive (directe ou inverse) et multiplicative (directe ou inverse). Cette dernière peut être représentée en entrée ou en sortie du modèle du système.

### 1.2.1. Incertitude additive directe ou inverse [25]

Cette incertitude présente l'erreur absolue entre le comportement réel et celui fourni par le modèle nominal  $G_N(s)$ . Elle est souvent employée pour modéliser les différentes dynamiques négligées à savoir les dynamiques non linéaires et/ou méconnues [26]. L'incertitude additive peut se décomposer en deux types qui sont : incertitude additive directe et incertitude additive inverse. En effet, pour chaque type, le système perturbé est modélisé par la matrice de transfert  $G_p(s)$  qui est donnée par :

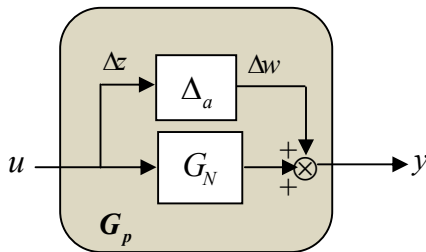


Fig. 1.2.a. Incertitude additive directe

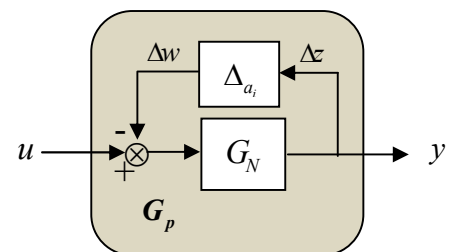


Fig. 1.2.b. Incertitude additive inverse

$$G_p(s) = G_N(s) + \Delta_a(s) \quad (1.12)$$

$$G_p(s) = [G_N^{-1}(s) + \Delta_{a_i}(s)]^{-1} \quad (1.13)$$

Fig.1.2. Incertitude additive

### 1.2.2. Incertitudes multiplicatives

La forme multiplicative représente l'écart, en terme de variation, entre le comportement fourni par le système réel et celui déterminé via le modèle nominal de synthèse. Cette forme peut être classée en multiplicative directe ou inverse soit par rapport aux entrées du modèle nominale, soit par rapport aux sorties.

Notons ici que la forme multiplicative en entrée est souvent employée pour prendre en compte les erreurs de modélisation causées par les actionneurs ou les convertisseurs installés dans la boucle de commande. La forme multiplicative en sortie est, généralement, utilisée pour modéliser les défauts causés par les capteurs ou les autres instruments de mesures installés dans la boucle de commande [26]. En effet, le système perturbé  $G_p(s)$  s'écrit, dans ces cas, comme suit :

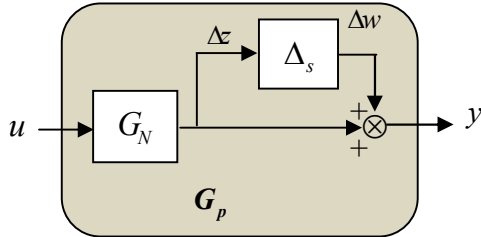


Fig. 1.3.a. Incertitudes multiplicative en sortie directe

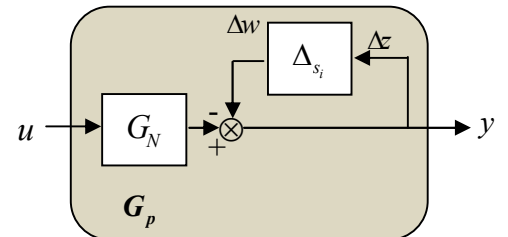


Fig. 1.3.b. Incertitudes multiplicative en sortie inverse

$$G_p(s) = [I + \Delta_s(s)].G_N(s) \quad (1.14)$$

$$G_p(s) = [I + \Delta_{s_i}(s)]^{-1}.G_N(s) \quad (1.15)$$

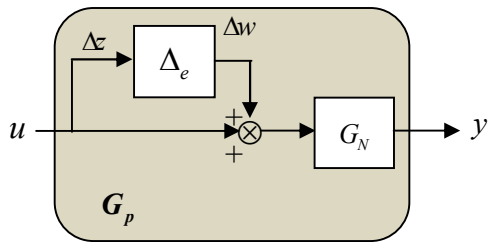


Fig. 1.3.c. Incertitudes multiplicative en entrée directe

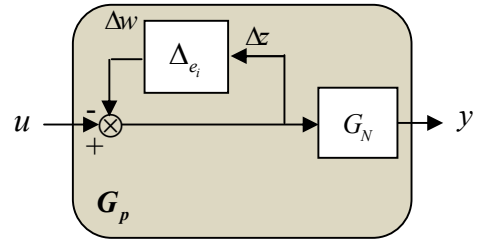


Fig. 1.3.d. Incertitudes multiplicative en entrée inverse

$$G_p(s) = G_N(s).[I + \Delta_e(s)] \quad (1.16)$$

$$G_p(s) = G_N(s).[I + \Delta_{e_i}(s)]^{-1} \quad (1.17)$$

Fig.1.3. Incertitudes multiplicative

### 1.3. Transformation linéaire fractionnaire LFT

Dans la théorie de la commande robuste, deux transformations linéaires fractionnaires sont utilisées pour la modélisation et la commande du système pluridimensionnel incertain. Ces deux transformations sont définies comme suit :

#### 1.3.1. LFT supérieure [24,25]

L'interconnexion de la matrice de transfert complexe  $M(s)$  à celle des incertitudes  $\Delta_x(s)$  permet de définir le transfert en boucle fermée  $T_{w \rightarrow z}(s)$ . Ceci est effectué par l'utilisation d'une transformation dite LFT supérieure  $F_u(M, \Delta_x)$ :

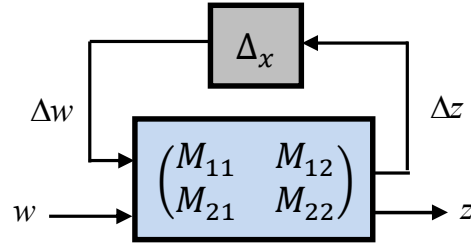


Fig.1.4.a. Schéma d'une LFT supérieure d'un système bouclé.

A partir de la Fig.1.4.a, le transfert  $T_{w \rightarrow z}(s)$  est défini comme suit:

$$z(s) = \{F_u(M, \Delta_x)\} \cdot w(s) \quad (1.19)$$

Où la LFT supérieure est définie comme suit :

$$F_u(M, \Delta_x) = M_{21} \cdot (I - \Delta_x \cdot M_{11})^{-1} \cdot \Delta_x \cdot M_{12} + M_{22}, \quad (1.20)$$

Cette transformation permet aussi de définir le système perturbé  $G_p(s)$  du système à commander, et cela pour n'importe quel type d'incertitudes citées au paragraphe §1.2.

Par conséquent, on obtient le transfert  $G_p(s) = T_{u \rightarrow y}(s)$  donné comme suit :

- Incertitude additive directe:  $G_p(s) = F_u(M, \Delta_a)$  avec  $M = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & G_N \end{bmatrix}$ .
- Incertitude additive inverse:  $G_p(s) = F_u(M, \Delta_{a_i})$  avec  $M = \begin{bmatrix} -G_N & G_N \\ -G_N & G_N \end{bmatrix}$ .
- Incertitude multiplicative directe en sortie:  $G_p(s) = F_u(M, \Delta_s)$  avec  $M = \begin{bmatrix} 0 & G_N \\ I & G_N \end{bmatrix}$ .
- Incertitude multiplicative inverse en sortie:  $G_p(s) = F_u(M, \Delta_{s_i})$  avec  $M = \begin{bmatrix} -I & G_N \\ -I & G_N \end{bmatrix}$ .
- Incertitude multiplicative directe en entrée:  $G_p(s) = F_u(M, \Delta_e)$  avec  $M = \begin{bmatrix} 0 & I \\ G_N & G_N \end{bmatrix}$ .
- Incertitude multiplicative inverse en entrée:  $G_p(s) = F_u(M, \Delta_{e_i})$  avec  $M = \begin{bmatrix} -I & I \\ -G_N & G_N \end{bmatrix}$ .

### 1.3.2. LFT inférieure [24,25]

Dans le contexte de la commande robuste, l'interconnexion de la matrice augmentée  $P(s)$  avec celle du contrôleur  $K(s)$  permet de définir le transfert en boucle fermée  $T_{w \rightarrow z}(s)$ . Ceci est effectuée à l'aide d'une transformation dite LFT inférieure  $F_\ell(P, K)$  :



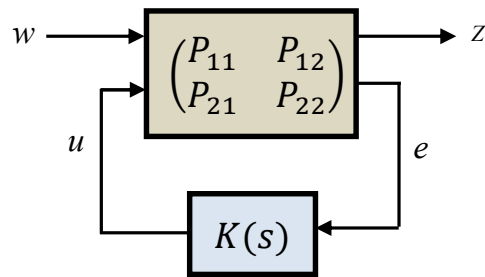


Fig.1.4.b. Schéma d'une LFT inférieure d'un système bouclé.

Dans la suite, nous verrons que la matrice de transfert du contrôleur robuste sera déterminée via la minimisation de la norme  $\mathcal{H}_\infty$  d'un critère fourni par LFT inférieure  $F_\ell(P, K)$ , ce qui donne la relation suivante :

$$z(s) = \{F_\ell(P, K)\}.w(s) \quad (1.21)$$

Où la LFT inférieure est définie comme suit :

$$F_\ell(P, K) = P_{12}.(I - K.P_{22})^{-1}.K.P_{21} + P_{11}, \quad (1.22)$$

## 1.4. Stabilité des systèmes pluridimensionnels

### 1.4.1. Stabilité nominale

La stabilité nominale d'un système pluridimensionnel est assurée si tous les pôles du transfert en boucle fermée se situent dans le demi-plan complexe gauche. Il faut noter ici que lors de la conception du contrôleur, la simplification de pôles/zéros instables entre le système nominale et le contrôleur peut faire apparaître une instabilité, cette simplification peut disparaître lors de l'implémentation du contrôleur sur le système physique réel.

### 1.4.2. Stabilité interne

Un système est en stabilité interne si en lui appliquant des signaux d'entrée bornés, on obtient des signaux de sorties bornés. Nous verrons dans la suite de ce travail que ce type de stabilité dépend de la stabilité de quatre matrices de sensibilité dont les transferts seront détaillés.

### 1.4.3. Stabilité robuste

Ce type de stabilité doit être examiné dans le cas d'un système bouclé soumis à des incertitudes de modélisation. A cet effet, la figure Fig.1.5.a schématise la structure du système bouclé pour l'analyse d'une telle stabilité.

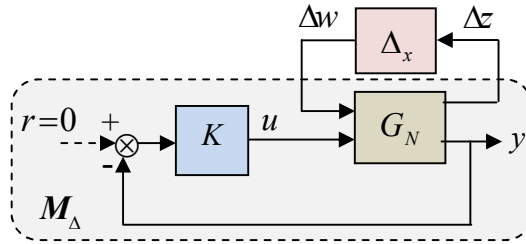


Fig.1.5.a. Structure d'un système bouclé pour l'analyse de la robustesse de stabilité

Avec  $G_N(s)$  est le modèle nominal,  $K(s)$  est le contrôleur,  $\Delta_x(s)$  est le transfert modélisant l'une d'incertitude non structurée citées précédemment [24] et, finalement,  $r$  est le vecteur des entrées de références supposées nulles.

Pour l'analyse de la robustesse de stabilité, la structure donnée par la figure Fig.1.5.a peut être reconfigurée sous la forme générale  $(M_\Delta - \Delta_x)$  ci-dessous:

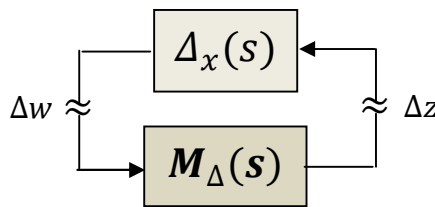


Fig.1.5.b. Structure générale d'étude de la robustesse de stabilité

A partir de la Fig.1.5.b, il est intéressant d'étudier la robustesse de stabilité d'un tel système bouclé soumis à des incertitudes de modélisation non structurées. Pour cela, on fait appel au théorème du faible gain (*Small gain theorem*).

### 1.4.3.1. Théorème du petit gain

Considérons  $\Delta_x$  une perturbation stable satisfaisant la condition :

$$\|\Delta_x\|_\infty \leq 1, \tag{1.23}$$

#### a. Théorème 1

Le système donné par la figure Fig.1.5.b est stable en présence des incertitudes  $\Delta_x(s)$ , si :

$$\|M_\Delta(s) \cdot \Delta_x(s)\|_\infty \leq 1, \forall \omega \in \mathbb{R}^{*+} \Leftrightarrow \overline{\sigma}[M_\Delta(j\omega) \cdot \Delta_x(j\omega)] < 1 \tag{1.24}$$

Une autre condition de stabilité robuste également suffisante mais plus conservatrice est la suivante :

## b. Théorème 2

Le système bouclé représenté par la **Fig.1.5.b** est robustement stable si la condition suivante est vérifiée :

$$\|M_{\Delta}(s)\|_{\infty} \cdot \|\Delta_x(s)\|_{\infty} \leq 1, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^{*+} \quad (1.25)$$

### 1.4.3.2. Condition de stabilité

L'application du théorème 2 sur le système bouclé donné par la **Fig.1.5.a**, en présence des incertitudes détaillées dans la section §1.3, donne les conditions de robustesse de stabilité suivantes :

- Incertitude additive directe  $\|K \cdot [I_{p \times p} + G_N \cdot K]^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{1}{\|\Delta_a(s)\|_{\infty}}$ .
- Incertitude additive inverse  $\|G_N \cdot [I_{q \times q} + K \cdot G_N]^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{1}{\|\Delta_{a_i}(s)\|_{\infty}}$ .
- Incertitude multiplicative directe en sortie  $\|G_N \cdot K \cdot [I_{p \times p} + G_N \cdot K]^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{1}{\|\Delta_s(s)\|_{\infty}}$ .
- Incertitude multiplicative inverse en sortie  $\|[I_{p \times p} + G_N \cdot K]^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{1}{\|\Delta_{s_i}(s)\|_{\infty}}$ .
- Incertitude multiplicative directe en entrée  $\|K \cdot G_N \cdot [I_{q \times q} + K \cdot G_N]^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{1}{\|\Delta_e(s)\|_{\infty}}$ .
- Incertitude multiplicative inverse en entrée  $\|[I_{q \times q} + K \cdot G_N]^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{1}{\|\Delta_{e_i}(s)\|_{\infty}}$ .

### 1.4.4. Analyse de robustesse en présences de diverses entrées exogènes

L'analyse de robustesse fondée sur la stabilité robuste, les performances nominales et les performances robustes, présente le sujet de nombreuses méthodes de synthèse des contrôleurs robustes et stables. Ces derniers stabilisent de manière robuste non seulement le système nominal, mais aussi le système en présence d'entrées exogènes telles que: les incertitudes de modélisations, les bruits de mesures, les perturbations...etc.

A cet effet, des conditions de robustesse sont introduites afin de satisfaire les spécifications fréquentielles imposées par un cahier de charges. Pour la formulation du problème de la synthèse d'un contrôleur robuste, on considère la configuration standard donnée par la figure **Fig.1.6 [24, 25]** :

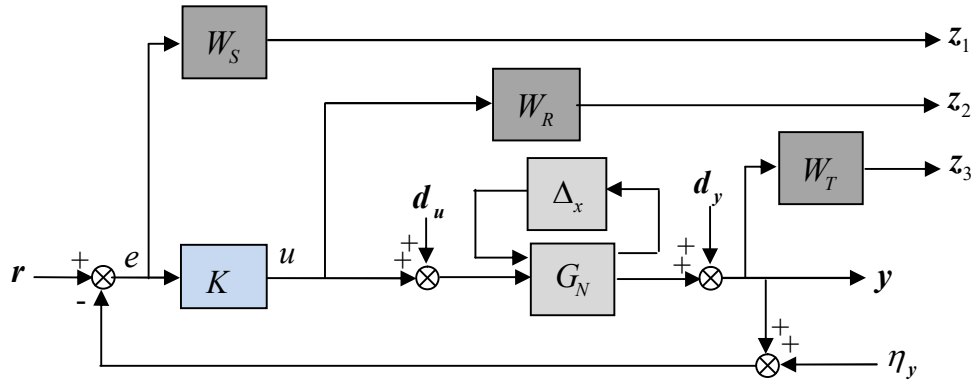


Fig.1.6. Configuration standard d'un système bouclé

Les notations suivantes seront utilisées dans la suite, avec :

- $d_u$ : représente le vecteur des perturbations à l'entrée du système.
- $d_y$ : représente le vecteur des perturbations à la sortie du système.
- $e$ : représente le vecteur des erreurs de poursuite entre les sorties mesurées et les références.
- $\eta_y$ : représente le vecteur des bruits de mesures
- $z_1, z_2$  et  $z_3$ : représentent, respectivement, les signaux modérés (filtrés) des erreurs de poursuite, des commandes et les sorties mesurées.

A partir de la configuration standard ci-dessus, on peut obtenir facilement les équations suivantes :

$$\begin{cases} e = (I_{p \times p} + G_N \cdot K)^{-1} \cdot (r - d_y - n_y) - G_N \cdot (I_{q \times q} + K \cdot G_N)^{-1} \cdot d_u \\ u = K \cdot (I_{p \times p} + G_N \cdot K)^{-1} \cdot (r - d_y - n_y) - K(s) \cdot G_N(s) \cdot (I_{q \times q} + K \cdot G_N)^{-1} \cdot d_u \\ y = G_N \cdot K \cdot (I_{p \times p} + G_N \cdot K)^{-1} \cdot (r - n_y) + (I_{p \times p} + G_N \cdot K)^{-1} \cdot d_y + G_N \cdot (I_{q \times q} + K \cdot G_N)^{-1} \cdot d_u \end{cases} \quad (1.26)$$

Où les sorties exogènes sont données par :

$$\begin{cases} z_1 = W_S \cdot e \\ z_2 = W_R \cdot u \\ z_3 = W_T \cdot y \end{cases} \quad (1.27)$$

On peut ainsi définir les quatre sensibilités suivantes :

**a. Sensibilité directe en sortie  $S_y(s)$**

Elle représente le transfert entre les sorties mesurées du système bouclé et les différents signaux d'entrées tels que, les erreurs de poursuite, perturbations de sortie et les signaux de commande, on obtient :

$$S_y(s) = [I_{p \times p} + G_N(s).K(s)]^{-1} \quad (1.28)$$

**b. Sensibilité directe en entrée  $S_u(s)$**

Elle représente le transfert entre les sorties mesurées du système bouclé et les perturbations à l'entrée. Elle est donnée par :

$$S_u(s) = [I_{q \times q} + K(s).G_N(s)]^{-1} \quad (1.29)$$

**c. Sensibilité complémentaire en sortie  $T_y(s)$**

Elle représente l'influence des bruits de mesure sur les sorties du système bouclé, ainsi que l'effet des perturbations à l'entrée sur les commandes. Elle est donnée par :

$$T_y(s) = G_N(s).K(s).[I_{p \times p} + G_N(s).K(s)]^{-1} \quad (1.30)$$

**d. Sensibilité complémentaire en entrée  $T_u(s)$**

Ce transfert relie les entrées de perturbation à l'entrée du système bouclé à celle des entrées de commande, il est donné par :

$$T_u(s) = K(s).G_N(s).[I_{q \times q} + K(s).G_N(s)]^{-1} \quad (1.31)$$

Ces sensibilités sont liées entre-elles par les relations décrites par les équations (1.32) :

$$\begin{cases} G_N(s).K(s).[I_{p \times p} + G_N(s).K(s)]^{-1} = [I_{p \times p} + G_N(s).K(s)]^{-1}.G_N(s).K(s) \\ K(s).G_N(s).[I_{q \times q} + K(s).G_N(s)]^{-1} = [I_{q \times q} + K(s).G_N(s)]^{-1}.K(s).G_N(s) \\ K(s).S_y(s) = S_u(s).K(s) \end{cases} \quad (1.32)$$

Tenant compte des deux relations :

$$\begin{cases} S_y + T_y = I_{p \times p} \\ S_u + T_u = I_{q \times q} \end{cases} \quad (1.33)$$

et en se basant sur les définitions ci-dessus, les équations données par (1.26) seront réécrites selon les équations (1.34) :

$$\begin{cases} e = S_y \cdot (r - d_y - n_y) - G_N \cdot S_u \cdot d_u \\ u = K \cdot S_y \cdot (r - d_y - n_y) - T_u \cdot d_u \\ y = T_y \cdot (r - n_y) + S_y \cdot d_y + G_N \cdot S_u \cdot d_u \end{cases} \quad (1.34)$$

Les spécifications qui doivent être assurées par le contrôleur robuste sont les suivantes :

**Spécification 1 :** Une bonne dynamique de poursuite des signaux de référence implique que  $\sigma_{max}[S_y(\omega)]$  doit être faible.

**Spécification 2 :** Une bonne atténuation de l'effet des bruits de mesure implique que  $\sigma_{max}[T_y(\omega)]$  doit être faible.

**Spécification 3 :** Une bonne rejection des perturbations en entrée du modèle implique que  $\sigma_{max}[G_N(\omega) \cdot S_y(\omega)]$  doit être minimisée.

**Spécification 4 :** Une bonne minimisation des énergies de commande implique que  $\sigma_{max}[T_u(\omega)]$  ou  $\sigma_{max}[K(\omega) \cdot S_y(\omega)]$  doivent être faibles.

**Spécification 5 :** Un compromis de robustesse entre les objectifs contradictoires *PN* et *SR* doit être assuré avec une marge élevée.

A partir des équations données par (1.34) et utilisant la norme  $\mathcal{H}_\infty$ , les indicateurs des performances des sensibilités précédentes sont définis par les équations (1.35) [24, 25]:

$$\begin{cases} M_S = \|S_y\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}^{*+}} (\sigma_{max}[S_y(\omega)]) \\ M_R = \|K \cdot S_y\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}^{*+}} (\sigma_{max}[K(\omega) \cdot S_y(\omega)]) \\ M_T = \|T_y\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}^{*+}} (\sigma_{max}[T_y(\omega)]) \\ \tilde{M}_S = \|S_u\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}^{*+}} (\sigma_{max}[S_u(\omega)]) \\ \tilde{M}_R = \|G_N \cdot S_u\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}^{*+}} (\sigma_{max}[G_N(\omega) \cdot S_u(\omega)]) \\ \tilde{M}_T = \|T_u\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}^{*+}} (\sigma_{max}[T_u(\omega)]) \end{cases} \quad (1.35)$$

Où  $M_S$ ,  $M_R$ ,  $M_T$ ,  $\tilde{M}_S$ ,  $\tilde{M}_R$  et  $\tilde{M}_T$  correspondent, respectivement, aux pics maximaux des valeurs singulières des transferts  $S_y(s)$ ,  $K(s) \cdot S_y(s)$ ,  $T_y(s)$ ,  $S_u(s)$ ,  $G_N(s) \cdot S_u(s)$  et  $T_u(s)$ .

De plus, si les valeurs de  $M_*$  et de  $\tilde{M}_*$  sont élevées, les marges de robustesse des performances et de stabilité du système bouclé devient être faibles face aux incertitudes de modélisation qui affectent le système.

### 1.5. Problème $\mathcal{H}_\infty$ standard

A partir des équations (1.34), la satisfaction des spécifications précédentes peut être effectuée via la minimisation de la norme  $\mathcal{H}_\infty$  d'un critère de performance formulé par *LFT* inférieure sur le système d'interconnexion représenté par la Fig. 1.7 :

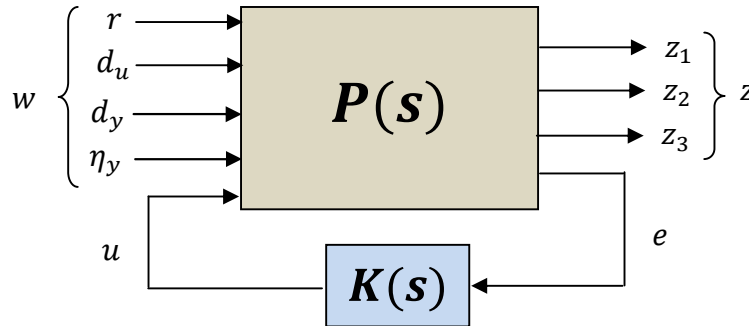


Fig.1.7. Configuration (P – K) du système bouclé

La représentation interne du système bouclé peut être mise sous la forme de l'équation (1.36) [24,25]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B_1 \cdot w(t) + B_2 \cdot u(t) \\ z(t) = C_1 \cdot x(t) + D_{11} \cdot w(t) + D_{12} \cdot u(t) , \\ y(t) = C_2 \cdot x(t) + D_{21} \cdot w(t) + D_{22} \cdot u(t) \end{cases} \quad (1.36)$$

La matrice de transfert du système augmenté  $P(s)$  est alors partitionnée selon l'équation (1.37):

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix}, \quad (1.37)$$

et la loi de commande est donnée par :  $u = K(s) \cdot e$

La synthèse du contrôleur robuste se ramène finalement à la résolution de l'un des deux problèmes à savoir : problème  $\mathcal{H}_\infty$  optimal ou problème  $\mathcal{H}_\infty$  sous-optimal.

#### 1.5.1. Problème $\mathcal{H}_\infty$ optimal [27]

La synthèse de la commande consiste à minimiser le critère de performance décrit par l'équation (1.38):

$$\min_{K(s)} \left\{ \sup_{w \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \right\} = \min_{K(s)} \{ \|LFT(P, K)\|_\infty \} \quad (1.38)$$

La minimisation de  $\|LFT(P, K)\|_\infty$  sur l'ensemble des contrôleurs  $K(s)$  stabilisant d'une manière interne le système bouclé, peut fournir un gain optimal d'atténuation noté  $\gamma_{opt}$  pour lequel toutes les spécifications, imposées par le cahier de charges, sont satisfaisantes.

### 1.5.2. Problème $\mathcal{H}_\infty$ sous optimal

Dans ce cas, le problème de la commande est remplacé par la recherche de la solution de l'inégalité représentée par l'équation (1.39) :

$$\|LFT_\ell(P, K)\|_\infty < \gamma, \quad (1.39)$$

Où  $\gamma \in \mathbb{R}^{*+}$  est le gain d'atténuation fixé à priori par l'utilisateur.

### 1.5.3. Problème de Sensibilité Mixte généralisée

Dans tout ce qui suit, le vecteur de perturbations  $d_u$  agissant sur les entrées du système est supposé nul. Le raisonnement adopté durant la synthèse du contrôleur robuste est celui basé sur les formes de  $\sigma_{max}[S_y(j\omega)]$ ,  $\sigma_{max}[K(j\omega).S_y(j\omega)]$  et  $\sigma_{max}[T_y(j\omega)]$  qui sont bornées comme suit :

$$\begin{cases} \sigma_{max}[S_y(j\omega)] \leq \ell_S(\omega) \\ \sigma_{max}[K(j\omega).S_y(j\omega)] \leq \ell_R(\omega) \\ \sigma_{max}[T_y(j\omega)] \leq \ell_T(\omega) \end{cases} \quad (1.40)$$

Où  $\ell_S$ ,  $\ell_R$  et  $\ell_T$  sont des fonctions scalaires spécifiant l'allure (gabarit) désiré. De plus, si l'on définit  $W_S = \ell_S^{-1}$ ,  $W_R = \ell_R^{-1}$  et  $W_T = \ell_T^{-1}$ , les équations données par (1.40) deviennent:

$$\|W_S.S_y\|_\infty < 1 \quad (1.41)$$

$$\|W_u.K.S_y\|_\infty < 1 \quad (1.42)$$

$$\|W_T.T_y\|_\infty < 1 \quad (1.43)$$

Les transferts  $W_S$ ,  $W_R$  et  $W_T$  sont des pondérations choisies à priori par l'utilisateur afin de limiter, respectivement, les valeurs singulières maximales des transferts  $S_y$ ,  $K.S_y$  et  $T_y$ . Notons ici que la condition sur les performances nominales du système bouclé est assurée par la satisfaction de l'inégalité (1.41), sachant que la matrice de pondération  $W_S$  est souvent choisie diagonale :



$$W_S(s) = \begin{pmatrix} W_{S_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W_{S_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & W_{S_{p \times p}} \end{pmatrix}, \text{ avec : } W_{S_{ii}}(s) = \frac{\frac{s}{M_{S_{ii}}} + \omega_{B_{ii}} \varepsilon_{S_{ii}}}{s + \omega_{B_{ii}}} \quad (1.44)$$

Où  $M_{S_{ii}}$ ,  $\omega_{B_{ii}}$  et  $\varepsilon_{S_{ii}}$  sont des paramètres sélectionnés à l'avance par l'utilisateur pour formuler la  $i^{\text{ème}}$  fonction de pondération  $W_{S_{ii}}(s)$  dont son inverse limite la  $i^{\text{ème}}$  fonction de sensibilité direct  $S_{y_{ii}}(s)$  dans la plage fréquentielle  $[\omega_{min} \quad \omega_{max}]$ .

De plus, la satisfaction de l'inégalité (1.42) permet de limiter les amplitudes des signaux de commande, sachant que la matrice de pondération  $W_R$  est souvent choisie diagonale :

$$W_R(s) = \begin{pmatrix} W_{R_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W_{R_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & W_{R_{q \times q}} \end{pmatrix}, \text{ avec : } W_{R_{ii}}(s) = \frac{s + \frac{\omega_{BC_{ii}}}{M_{R_{ii}}}}{\varepsilon_{BC_{ii}} s + \omega_{BC_{ii}}} \quad (1.45)$$

Où  $M_{R_{ii}}$ ,  $\omega_{BC_{ii}}$  et  $\varepsilon_{BC_{ii}}$  sont des paramètres choisis à priori afin de borner la sensibilité  $KS_y$  dans la plage de fréquence  $[\omega_{min} \quad \omega_{max}]$ .

Finalement, la condition sur la stabilité robuste se traduit par la satisfaction de l'inégalité (1.43), sachant que la matrice de pondération  $W_T$  est souvent choisie aussi diagonale :

$$W_T(s) = \begin{pmatrix} W_{T_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W_{T_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & W_{T_{p \times p}} \end{pmatrix}, \text{ avec : } W_{T_{ii}}(s) = \frac{\varepsilon_{T_{ii}} s + \omega_{BT_{ii}}}{s + \frac{\omega_{BT_{ii}}}{M_{T_{ii}}}} \quad (1.46)$$

Où  $M_{T_{ii}}$ ,  $\omega_{BT_{ii}}$  et  $\varepsilon_{T_{ii}}$  sont des paramètres sélectionnés à priori par l'utilisateur. L'inverse de la  $i^{\text{ème}}$  fonction de pondération  $W_{T_{ii}}(s)$  doit être choisie pour borner la  $i^{\text{ème}}$  fonction de sensibilité complémentaire en sortie directe  $T_{y_{ii}}(s)$  dans la plage fréquentielle  $[\omega_{min} \quad \omega_{max}]$ .

Notons ici que la détermination directe du contrôleur robuste  $K(s)$  satisfaisant les inégalités (1.41), (1.42) et (1.43) représente un problème d'optimisation ouvert. Cependant, ces dernières peuvent être substituées sous forme d'un problème de  $\mathcal{H}_\infty$  sous-optimal dit problème « sensibilité mixte généralisée ». Ce dernier est donné comme suit [27] :

$$\left\| \begin{array}{c} W_S(s).S_y(s) \\ W_R(s).K(s).S_y(s) \\ W_T(s).T_y(s) \end{array} \right\|_{\infty} < 1 \quad (1.47)$$

Sachant que :

$$\max\left(\|W_S S_y\|_{\infty}, \|W_R K S_y\|_{\infty}, \|W_T T_y\|_{\infty}\right) \leq \left\| \begin{array}{c} W_S S_y \\ W_R K S_y \\ W_T T_y \end{array} \right\|_{\infty} \leq \sqrt{2} \max\left(\|W_S S_y\|_{\infty}, \|W_R K S_y\|_{\infty}, \|W_T T_y\|_{\infty}\right) \quad (1.48)$$

Ou bien sous forme d'un problème  $\mathcal{H}_{\infty}$  optimal qui est formulé comme suit :

$$\min_{K(s)} \{\|\mathcal{F}_{\ell}(P, K)\|_{\infty}\} = \min_{K(s)} \left\{ \max_{\omega \in \mathbb{R}^+} \left( \bar{\sigma} \left[ \begin{array}{c} W_S(j\omega).S_y(j\omega) \\ W_R(j\omega).K(j\omega).S_y(j\omega) \\ W_T(j\omega).T_y(j\omega) \end{array} \right] \right) \right\} \quad (1.49)$$

La matrice de transfert du système augmenté peut être formulée en fonction du système nominal et des fonctions de pondérations, comme suit:

$$P(s) = \left( \begin{array}{c|c} W_S(s) & -W_S(s).G_N(s) \\ 0 & W_R(s) \\ 0 & W_T(s).G_N(s) \\ I & -G_N(s) \end{array} \right) \quad (1.50)$$

## 1.6. Résolution du problème $\mathcal{H}_{\infty}$

### 1.6.1. Résolution fondée sur les équations de *Riccati*

Considérons la représentation d'état généralisée (1.36). Nous supposons dans cette représentation que la matrice  $D_{22}$  est nulle, c'est à dire qu'il n'existe pas une transmission directe du vecteur des entrées vers celui des sorties ce qui est le cas dans les plupart des applications industrielles. La solution du problème standard est basée sur la solution algébrique de l'équation de *Riccati* [22], [27]. L'équation de *Riccati* étant donnée par :

$$X_{\infty}.E + E^T.X_{\infty} - X_{\infty}.W.X_{\infty} + Q = 0 \quad (1.51)$$

Avec  $W = W^T$  et  $Q = Q^T$ .

La solution stabilisante  $X_{\infty}$ , si elle existe, sera une matrice symétrique telle que la matrice  $(E - W.X_{\infty})$  soit stable, i.e., ses valeurs propres ont une partie réelle strictement négative. Une telle solution sera notée :

$$X_\infty = Ric \begin{bmatrix} E & -W \\ -Q & -E^T \end{bmatrix} \quad (1.52)$$

Soit :

$$R_n = D_{1*}^T D_{1*} - \begin{bmatrix} \gamma^2 I_{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{R}_n = D_{*1} D_{*1}^T D_{1*} - \begin{bmatrix} \gamma^2 I_{p_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

Où  $D_{1*} = [D_{11} \ D_{12}]$  et  $D_{*1} = \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{21} \end{bmatrix}$ .

Dans la mesure où  $R_n$  et  $\tilde{R}_n$  sont des matrices non singulières. Nous définissons les deux matrices dites *Hamiltoniennes*  $H$  et  $J$  selon les équations (1.54) et (1.55):

$$H = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C_1^T \cdot C_1 & -A^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ -C_1^T \cdot D_{1*} \end{bmatrix} R_n^{-1} [D_{1*}^T \cdot C_1 \ B^T] \quad (1.54)$$

$$J = \begin{bmatrix} A^T & 0 \\ -B_1 B_1^T & -A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^T \\ -B_1 \cdot D_{*1}^T \end{bmatrix} \cdot \tilde{R}_n^{-1} \cdot [D_{*1} \cdot B_1^T \ C] \quad (1.55)$$

En prenant  $X_\infty = Ric(H)$  et  $Y_\infty = Ric(J)$ , nous pouvons définir les deux matrices  $F$  et  $L$  comme suit :

$$F = -R_n^{-1} \cdot (D_{1*}^T \cdot C_1 + B^T \cdot X_\infty) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (1.56)$$

$$L = -(B_1 \cdot D_{*1}^T + Y_\infty \cdot C^T) \cdot \tilde{R}_n^{-1} = [L_1 \ L_2] = [L_{11} \ L_{12} \ L_2] \quad (1.57)$$

Où  $F_1, F_2, F_{11}$  et  $F_{12}$  sont formées respectivement de  $m_1, m_2, (m_1 - p_2)$  et  $p_2$  lignes et  $L_1, L_2, L_{11}$  et  $L_{12}$  sont formées respectivement de  $p_1, p_2, (p_1 - m_2)$  et  $m_2$  colonnes.

La solution du problème  $\mathcal{H}_\infty$  existe si les hypothèses suivantes sont satisfaites:

- **Hypothèses 1** :  $(A, B_2)$  est stabilisable et  $(C_2, A)$  est détectable ;
- **Hypothèses 2** :  $D_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_{m_2} \end{pmatrix}, D_{21} = [0 \ I_{p_2}]$  sont, respectivement, de rang  $m_2$  et  $p_2$  ;
- **Hypothèses 3** :  $\forall \omega \in \mathbb{R}^{*+}, rang \begin{pmatrix} A - j\omega I_n & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{pmatrix} = n + m_2$ , donc de rang complet et en plus  $P_{12}$  n'a pas de zéros sur l'axe des imaginaires ;
- **Hypothèses 4** :  $\forall \omega \in \mathbb{R}^{*+}, rang \begin{pmatrix} A - j\omega I_n & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{pmatrix} = n + p_2$  donc de rang complet et en plus  $P_{21}$  n'a pas de zéros sur l'axe des imaginaires.

En mettant  $D_{11} = \begin{pmatrix} D_{1111} & D_{1112} \\ D_{1121} & D_{1122} \end{pmatrix}$  avec  $D_{1122}$  est de dimension  $m_2 \times p_2$ , la solution sera donnée par le théorème 1.1 [22, 27]:

### 1.6.1.1. Théorème 1.1

Supposons qu'un système  $P(s)$  vérifie les hypothèses 1 à 4 décrites plus haut.

1. Il existe un correcteur  $K(s)$  stabilisant le système tel que  $\|\mathcal{F}_\ell(P, K)\|_\infty < \gamma$  si et seulement si :

- $\gamma > \max(\bar{\sigma}[D_{1111} \cdot D_{1112}], \bar{\sigma}[D_{1112} \cdot D_{1121}])$
- Il existe des solutions  $X_\infty > 0$  et  $Y_\infty > 0$  vérifiant les deux équations de *Riccati* relatives aux matrices *Hamiltonienne*  $H$  et  $J$ , et tel que la condition  $\rho(X_\infty \cdot Y_\infty) < \gamma^2$ , avec,  $\rho(\cdot)$  désigne le rayon spectral.

2. Les correcteurs stabilisant le système, et vérifiant  $\|\mathcal{F}_\ell(P, K)\|_\infty < \gamma$ , sont donnés par :

$$K(s) = \mathcal{F}_\ell(J, \phi) \quad (1.58)$$

Où  $\|\phi(s)\|_\infty < \gamma$  et  $J(s)$  est donné par la réalisation suivante

$$J = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hat{C}_1 & \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

$$\text{Avec } \hat{D}_{11} = -D_{1121} \cdot D_{1111}^T \cdot (\gamma^2 \cdot I_{m_1-p_2} - D_{1111} D_{1111}^T)^{-1} D_{1112} - D_{1122}.$$

Sachant que  $\hat{D}_{12} \in \mathbb{R}^{m_2 \times m_2}$  et  $\hat{D}_{21} \in \mathbb{R}^{p_2 \times p_2}$  sont deux matrices arbitraires vérifiant :

$$\hat{D}_{12} \cdot \hat{D}_{12}^T = I_{m_2} - D_{1121} \cdot (\gamma^2 \cdot I_{m_1-p_2} - D_{1111}^T \cdot D_{1111})^{-1} \cdot D_{1121}^T \cdot D_{1121}$$

$$\hat{D}_{21}^T \cdot \hat{D}_{21} = I_{p_2} - D_{1121}^T \cdot (\gamma^2 \cdot I_{p_2-m_2} - D_{1111} \cdot D_{1111}^T)^{-1} \cdot D_{1112}$$

- $\hat{B}_2 = Z_\infty \cdot (B_2 + L_{12}) \cdot \hat{D}_{12}$  et  $\hat{B}_1 = -Z_\infty \cdot L_2 + Z_\infty \cdot (B_2 + L_{12}) \cdot \hat{D}_{11}$
- $\hat{C}_2 = -\hat{D}_{21} \cdot (C_2 + F_{12})$  et  $\hat{C}_1 = F_2 - \hat{D}_{11} \cdot (C_2 + F_{12})$
- $Z_\infty = (I_n - \gamma^2 \cdot Y_\infty \cdot X_\infty)^{-1}$
- $\hat{A} = A + B \cdot F - \hat{B}_1 \cdot (C_2 + F_{12})$

Le correcteur calculé pour  $\phi(s) = 0$  est appelé le correcteur central, il est largement utilisé sous la forme (1.60):

$$K(s) = \begin{bmatrix} \hat{A} & \vdots & \hat{B} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \hat{C} & \vdots & \hat{D}_{11} \end{bmatrix} \quad (1.60)$$

### 1.6.2. Résolution fondée sur l'approche LMI

En dehors de l'approche fondée sur les équations algébriques de *Riccati* et des techniques utilisant des représentations d'état, il existe une approche plus récente pour la résolution du problème  $\mathcal{H}_\infty$ . En effet, cette approche utilise une formulation du problème en termes d'inégalités matricielles linéaires (LMI) pour les matrices  $X_\infty$  et  $Y_\infty$  introduites précédemment [24].

Sans entrer dans les détails de la technique, nous donnons ici quelques éléments de la théorie développée dans [27,28].

Dans le cadre  $\mathcal{H}_\infty$ , les techniques LMI utilisent le lemme fondamental suivant.

#### 1.6.2.1. Lemme 1.1

Soit un système ayant la réalisation en espace d'état donnée par le système d'équations (1.36), les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\|\mathcal{F}_\ell(P, K)\|_\infty < \gamma$  et la matrice d'état  $A$  est stable;
- Il existe une matrice symétrique  $X_\infty$  définie positive  $X_\infty > 0$  qui représente la solution de l'inégalité matricielle linéaire suivante :

$$\begin{pmatrix} A^T \cdot X_\infty - X_\infty \cdot A & X_\infty \cdot B & C^T \\ B^T \cdot X_\infty & -\gamma \cdot I & C^T \\ C & D & -\gamma \cdot I \end{pmatrix} < 0 \quad (1.61)$$

Ce résultat est connu sous la forme du Lemme de *Kalman-Popov-Yacubovich* et est démontré dans [29]. Il est facile de voir que l'ensemble des solutions de l'équation (1.61) constitue un ensemble convexe dont on peut extraire une solution par des techniques d'optimisation très performantes.

La démonstration pour le problème de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  consiste à appliquer le lemme précédent au système bouclé puis à manipuler la condition obtenue jusqu'à obtenir des conditions plus simples. On peut raisonnablement espérer obtenir des LMI puisqu'elles constituent une autre caractérisation de la norme  $\mathcal{H}_\infty$ . Ces manipulations détaillées dans [30] conduisent au résultat donné par le théorème 1.2 :

### 1.6.2.2. Théorème 1.2

Il existe un contrôleur  $K(s)$  qui représente la solution du problème  $\mathcal{H}_\infty$  sous-optimal si et seulement si il existe des matrices symétriques  $X_\infty$  et  $Y_\infty$  solution du problème *LMI* ci après :

$$\begin{pmatrix} N_x & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} [X_\infty \cdot A + A^T \cdot X_\infty & X_\infty \cdot B_1] \\ [B_1^T \cdot X_\infty & -\gamma \cdot I] \\ [C_1 & D_{11}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [C_1^T] \\ [D_{11}^T] \\ [-\gamma \cdot I] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_x & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0 \quad (1.62)$$

$$\begin{pmatrix} N_y & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} [Y_\infty \cdot A^T + A \cdot Y_\infty & Y_\infty \cdot C_1^T] \\ [C_1 Y_\infty & -\gamma \cdot I] \\ [C_1 & D_{11}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [B_1] \\ [D_{11}] \\ [-\gamma \cdot I] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_y & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0 \quad (1.63)$$

$$\begin{pmatrix} X_\infty & I \\ I & Y_\infty \end{pmatrix} > 0 \quad (1.64)$$

## 1.7. Exemple d'application et de simulation

### 1.7.1. Description du système *HVAC*

La commande du système de chauffage, de ventilation et de climatisation *HVAC* à l'intérieure d'une salle, constitue un objectif indispensable pour assurer un confort thermique avec un air sain et parfait. Ces objectifs peuvent être atteints par un contrôleur robuste garantissant un réglage optimal des températures ambiantes. Ce réglage doit être assuré non seulement en cas de présence des changements thermiques avec l'environnement extérieur, mais aussi en cas de présence d'autres grandeurs d'influences inconnues agissant sur le fonctionnement correcte des capteurs de températures. Les températures ambiantes  $T = (T_{gauche} \quad T_{droite})^T$  sont les grandeurs de sorties du système *HVAC*. Elles sont mesurées par deux capteurs de température (gauche et droit) installés en deux coins opposés à l'intérieure de la salle. La commande de ces grandeurs est assurée par le réglage de positions de deux volumes d'air variables  $\theta_{VAV} = (\theta_{VAV_{left}} \quad \theta_{VAV_{right}})^T$ . La matrice de transfert du système est donnée comme suit [31, 32]:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{K_{11} \cdot e^{-r_{11} \cdot s}}{1 + T_{11} \cdot s} & \frac{K_{12} \cdot e^{-r_{12} \cdot s}}{1 + T_{12} \cdot s} \\ \frac{K_{21} \cdot e^{-r_{21} \cdot s}}{1 + T_{21} \cdot s} & \frac{K_{22} \cdot e^{-r_{22} \cdot s}}{1 + T_{22} \cdot s} \end{bmatrix} \quad (1.65)$$

Le fonctionnement nominal du système *HVAC* est celui fourni par les données numériques suivantes :

- Les gains statiques  $K_{ij}$  avec  $K_{11} = \frac{-1}{22.4}$ ,  $K_{12} = \frac{-1}{70.6}$ ,  $K_{21} = \frac{-1}{51.5}$  et  $K_{22} = \frac{-1}{19.8}$ .
- Les constantes de temps  $T_{ij}$  (en minutes) avec  $T_{11} = 119.66$ ,  $T_{12} = 109.025$ ,  $T_{21} = 137.083$  et  $T_{22} = 96.09$ .
- Les retards purs  $r_{ij}$  (en minutes) avec  $r_{11} = r_{22} = 23.2$ ,  $r_{12} = 63.3$  et  $r_{21} = 15$ .

Ces retards multiples doivent être approximés par des transferts stables d'ordre  $n_{ij} = 1$ , en utilisant l'approximation de *Padé* suivante:

$$e^{-r_{ij}.s} = \frac{1 + \sum_{k=1}^{n_{ij}} \left\{ \left( \frac{-r_{ij}.s}{2} \right)^k \cdot \frac{1}{k!} \right\}}{1 + \sum_{k=1}^{n_{ij}} \left\{ \left( \frac{r_{ij}.s}{2} \right)^k \cdot \frac{1}{k!} \right\}} \quad (1.66)$$

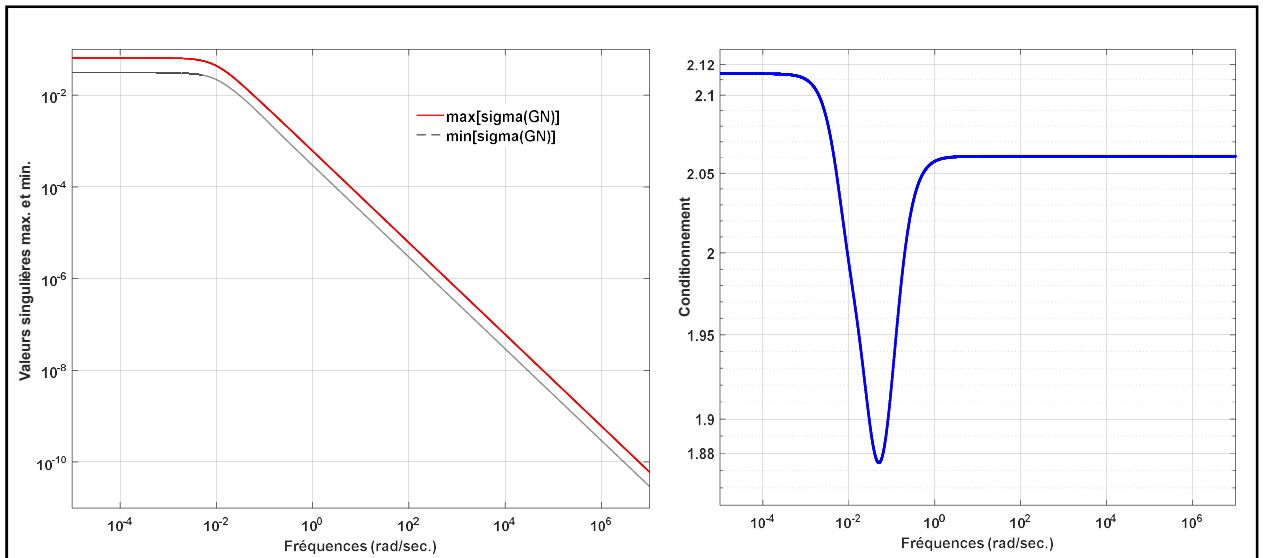
La matrice de transfert du système nominal *HVAC* devient :

$$G_N(s) = \begin{bmatrix} \frac{K_{11} \cdot \left(1 - \frac{r_{11}.s}{2}\right)}{(1+T_{11}.s) \left(1 + \frac{r_{11}.s}{2}\right)} & \frac{K_{12} \cdot \left(1 - \frac{r_{12}.s}{2}\right)}{(1+T_{12}.s) \left(1 + \frac{r_{12}.s}{2}\right)} \\ \frac{K_{21} \cdot \left(1 - \frac{r_{21}.s}{2}\right)}{(1+T_{21}.s) \left(1 + \frac{r_{21}.s}{2}\right)} & \frac{K_{22} \cdot \left(1 - \frac{r_{22}.s}{2}\right)}{(1+T_{22}.s) \left(1 + \frac{r_{22}.s}{2}\right)} \end{bmatrix} \quad (1.67)$$

La synthèse d'un contrôleur basée sur le modèle nominale précédent doit être précédée par une analyse fréquentielle et/ou temporelle du système non corrigé en boucle ouverte. Ce qui permet de quantifier la dynamique d'interaction entre les paires d'entrées/sorties du système à commander. Cette dynamique se traduit par le tracé du signal de conditionnement défini par l'expression ci-après :

$$cond = \frac{\sigma_{max}[G_N(j\omega)]}{\sigma_{min}[G_N(j\omega)]} \quad (1.68)$$

La figure **Fig. 1.8** illustre les valeurs singulières maximales et minimales du modèle nominal du système *HVAC*. Elle illustre également le lieu de conditionnement du système non corrigé en boucle ouverte.



**Fig. 1.8.** Lieux de  $\sigma_{\max}[G_N(j\omega)]$ ,  $\sigma_{\min}[G_N(j\omega)]$  et  $\frac{\sigma_{\max}[G_N(j\omega)]}{\sigma_{\min}[G_N(j\omega)]}$

D'après la figure **Fig.1.8**, on a pu constater l'existence d'un écart entre les gains principaux maximum et minimum. Cet écart se traduit par la présence d'un fort couplage des signaux d'entrées/sorties du système *HVAC*, ceci est confirmé par l'allure du conditionnement du système notamment dans la bande de fréquence  $10^{-3} \leq \omega \leq 10$  radians/secondes.

On note aussi, que le modèle du *HVAC* a été employé pour la synthèse d'un contrôleur *PID* pluridimensionnel [31]. La matrice de transfert ainsi obtenue est donnée comme suit :

$$K_0(s) = \begin{bmatrix} -43.36 - \frac{0.42}{s} + 293.21 \times s & 16.4 - \frac{0.19}{s} + 75.6 \times s \\ 11.25 - \frac{0.16}{s} + 75.44 \times s & -46.69 - \frac{0.58}{s} + 212.73 \times s \end{bmatrix} \quad (1.69)$$

Les performances obtenues par ce contrôleur seront comparées, dans les domaines temporel et fréquentiel, à celles obtenues par les deux contrôleurs robustes synthétisés par les deux versions de la méthode  $\mathcal{H}_\infty$ .

### 1.7.2. Synthèse des contrôleurs robustes par les deux versions de la méthode $\mathcal{H}_\infty$

La synthèse du contrôleur robuste pour commander le système *HVAC* nécessite tout d'abord une évaluation adéquate des incertitudes qui entachent notamment ses retards multiples. Cette évaluation a été réalisée par le choix de la forme multiplicative directe en sortie où chaque approximation par un transfert stable d'ordre différent produit un régime perturbé différent ce qui implique une génération d'une erreur relative différente.



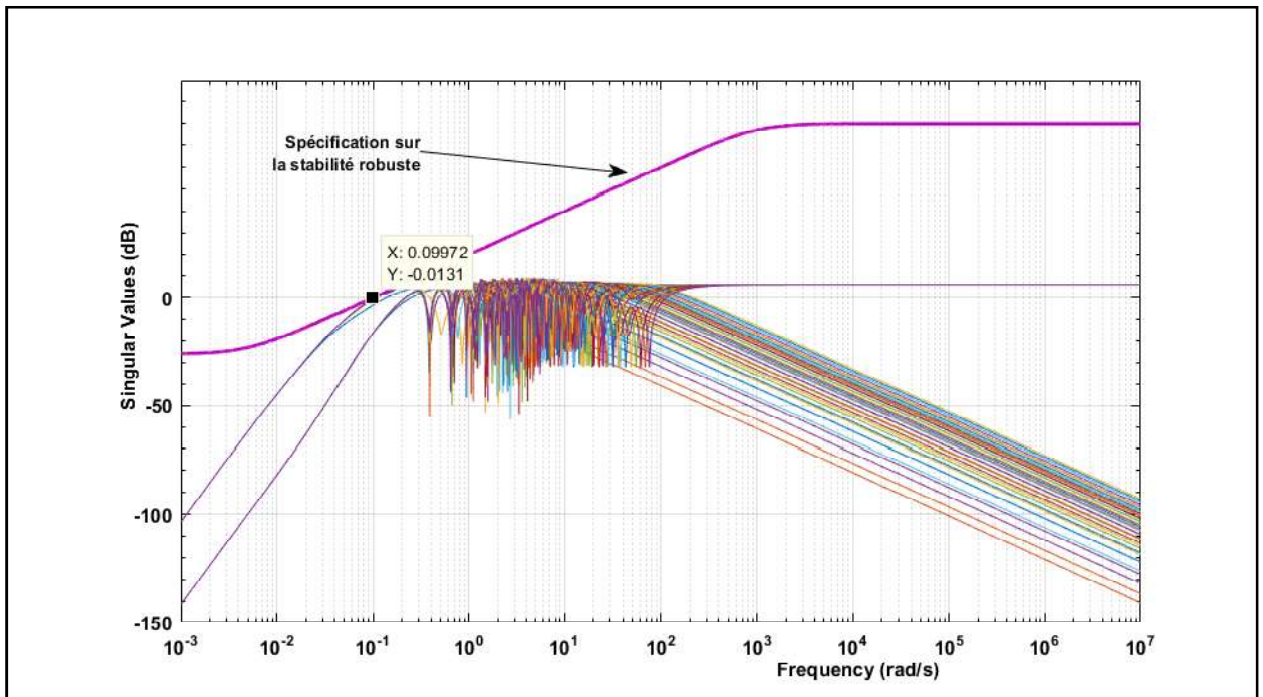
Les lieux des valeurs singulières maximales de tous les erreurs résultantes sont ensuite majorés par les lieux des valeurs singulières maximales de la matrice de pondérations  $W_T(s)$  définie par :

$$W_T(s) = \begin{pmatrix} W_{T_{11}} & 0 \\ 0 & W_{T_{22}} \end{pmatrix}, \text{ où } W_{T_{11}} = W_{T_{22}} = \frac{\varepsilon_T \cdot s + \omega_{BT}}{s + \frac{\omega_{BT}}{M_T}}, \text{ avec } M_T = 100, \omega_{BT} = 1 \text{ et } \varepsilon_T = 10^{-4}.$$

Par conséquent, cette matrice de pondération permet de définir la condition sur la stabilité robuste du système bouclé face aux incertitudes multiplicative directe en sortie. Cette robustesse est assurée par la satisfaction la condition suivante :

$$\|W_T(s) \cdot T_y(s)\|_{\infty} < 1 \Rightarrow \sigma_{\max}[T_y(j\omega)] < \frac{1}{\sigma_{\max}[W_T(j\omega)]}, \forall \omega \in \mathbb{R}^{*+} \quad (1.70)$$

La figure **Fig.1.9** présente les valeurs singulières maximales de 20 formes d'incertitudes multiplicatives directes en sortie ainsi que les lieux de  $\sigma_{\max}[W_T(j\omega)]$  majorant celles-ci.



**Fig. 1.9.** Lieux des valeurs singulières maximales de  $\Delta_s(j\omega)$  et  $W_T(j\omega)$

D'après la figure **Fig.1.9**, on constate que toutes les lieux des valeurs singulières maximales des incertitudes multiplicatives agissant sur le système deviennent faibles en basses fréquences et cela jusqu'à la pulsation  $\omega = 0.09972$  radians/secondes. Par conséquent, la condition (1.23) est toujours vérifiée ce qui permet de tirer la condition de robustesse sur la stabilité robuste à partir de l'inverse de la matrice  $W_T(s)$ . De plus, la spécification sur les performances nominales

permet d'avoir une idée sur la dynamique de rejections des perturbations multiplicative directe en sortie et sur la dynamique de poursuite des trajectoires de références. Ces deux dernières peuvent être quantifiées par la matrice de transfert  $W_S(s)$  suivante :

$$W_S(s) = \begin{pmatrix} W_{S_{11}} & 0 \\ 0 & W_{S_{22}} \end{pmatrix}, \text{ où } W_{S_{11}} = W_{S_{22}} = \frac{s}{M_S + \omega_B \cdot \varepsilon_S} \cdot \frac{1}{s + \omega_B}, \text{ avec } M_S = 4, \omega_B = 0.025 \text{ et } \varepsilon_S = 4 \times 10^{-4}.$$

Où la condition de robustesse sur les performances nominales est assurée si l'inégalité ci-dessous est vérifiée, on aura donc :

$$\|W_S(s) \cdot S_y(s)\|_{\infty} < 1 \Rightarrow \sigma_{max}[S_y(j\omega)] < \frac{1}{\sigma_{max}[W_S(j\omega)]}, \forall \omega \in \mathbb{R}^{*+} \tag{1.71}$$

Notons ici que les performances nominales en boucle fermée sont assurées si la condition (1.71) est vérifiée pour toutes les fréquences  $\omega \in [10^{-5}, 10^6]$  radians/secondes.

Les deux conditions de robustesse sur *SR* et sur *PN* du système bouclé par le contrôleur *PID* pluridimensionnel sont à vérifiées dans le domaine fréquentiel.

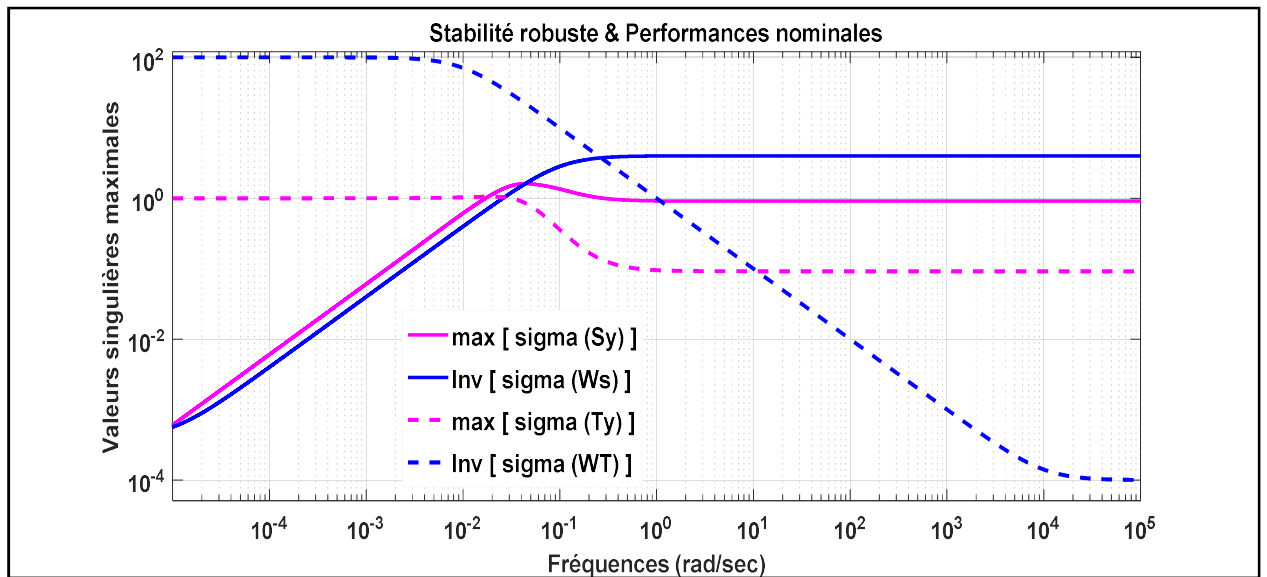


Fig. 1.10. Stabilité robuste / performances nominales fournis par le contrôleur PID pluridimensionnel

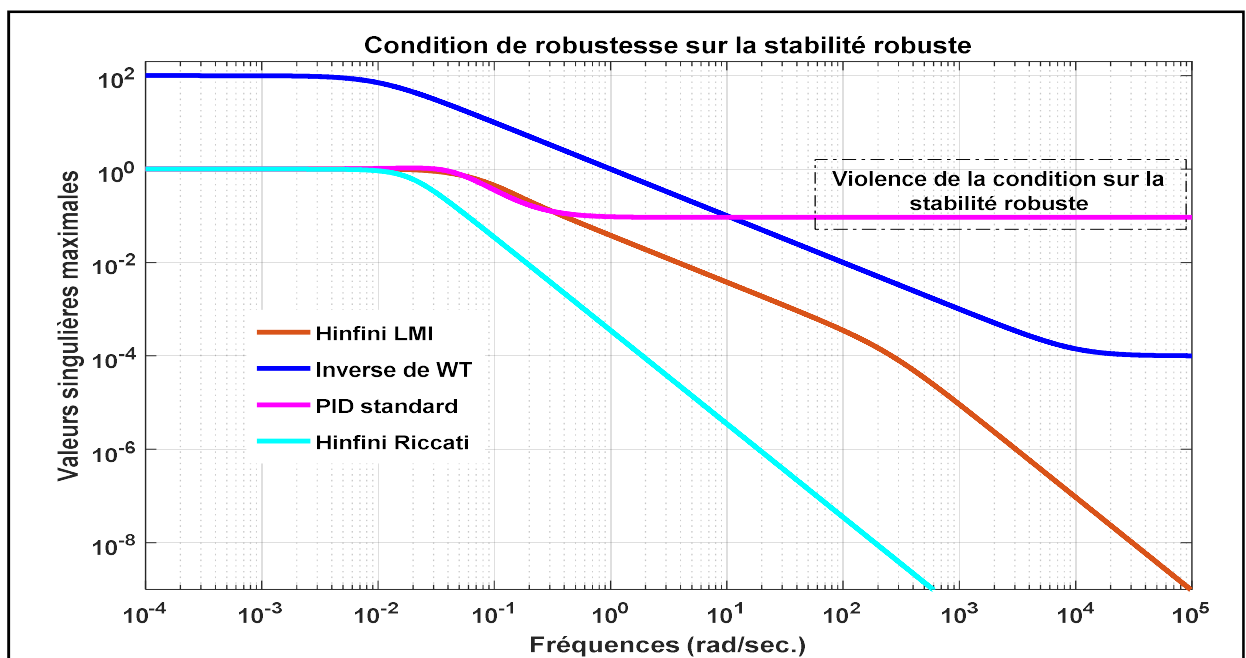
Sur la figure Fig.1.10, on observe nettement la détérioration de la condition de robustesse sur les performances nominales notamment dans la plage fréquentielle limitée par l'intervalle  $10^{-5} \leq \omega \leq 0.047$  radians/secondes. De plus, une autre violation de la condition de robustesse sur la stabilité robuste est également observée notamment dans la plage fréquentielle limitée par l'intervalle  $10.58 \leq \omega \leq 10^5$  radians/secondes. Ces résultats confirment que le

contrôleur *PID* proposé devient incapable, non seulement, d'assurer les robustesses *PN* et *SR* mais aussi d'aboutir à un compromis optimal entre eux.

Dans la suite de ce travail, l'objectif de synthèse du contrôleur robuste sera d'assurer non seulement un compromis optimal entre les robustesses *PN* et *SR*, mais aussi assurer des commandes avec des énergies très réduites. La limitation des signaux de commandes est effectuée par le choix de la pondération  $W_R$ , avec  $W_R = \begin{pmatrix} 10^{-2} & 0 \\ 0 & 10^{-2} \end{pmatrix}$ . Cette dernière est utilisée afin de modéliser les valeurs singulières maximales de la matrice de sensibilité  $K.S_y$ .

Finalement, on obtient le problème de sensibilité mixte généralisé  $S_y/K.S_y/T_y$  qui peut être présenté soit sous forme d'un problème optimal ou sous-optimal. La représentation d'état du contrôleur robuste est fournie par l'application de la méthode  $\mathcal{H}_\infty$  utilisant les équations de *Riccati* dans laquelle le gain d'atténuation  $\gamma_{opt}$  est choisi par  $\gamma_{opt} = 0.20$ . Une autre représentation du contrôleur robuste est fournie par l'application de la méthode  $\mathcal{H}_\infty$  utilisant l'approche *LMI* où sa solution optimale est achevée par un gain d'atténuation  $\gamma_{opt} = 0.5763$ .

Les performances obtenues par les trois contrôleurs précédents sont comparées en premier lieu dans le plan fréquentiel. La figure **Fig.1.11** permet de vérifier la satisfaction de la condition sur la stabilité robuste du système bouclé dans le plan fréquentiel.

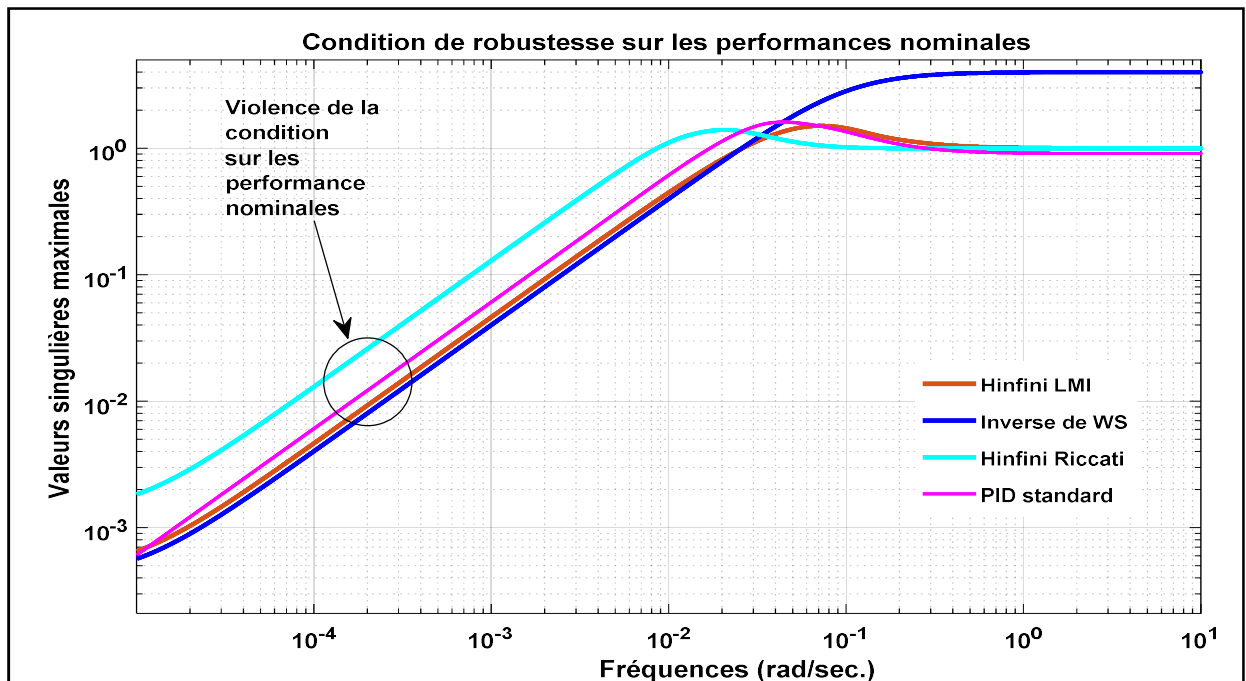


*Fig. 1.11. Examen de la stabilité robuste dans le plan fréquentiel*

D'après la figure **Fig.1.11**, on observe clairement la satisfaction de la condition sur la *SR* par la méthode  $\mathcal{H}_\infty$  utilisant l'approche *LMI* et comme celle basée sur les équations de *Riccati* avec

laquelle on obtient une meilleure marge de sécurité vis-à-vis les incertitudes multiplicatives directes en sortie. En revanche, la méthode  $\mathcal{H}_\infty$ , utilisant l'approche *LMI*, fournit une marge de sécurité faible notamment dans la plage fréquentielle  $10^0 \leq \omega \leq 10^3$  radians/secondes, dans laquelle le système bouclé devient un peu sensible aux effets des bruits de mesure dans le régime permanent. Finalement, selon la figure **Fig.1.11**, on observe clairement la violation de cette condition par la stratégie de commande basée sur le contrôleur *PID* pluridimensionnel. Ceci peut limiter l'application de cette méthode de commande sur les systèmes modélisés par les modèles linéaires incertains.

La figure **Fig.1.12** permet d'illustrer la satisfaction de la condition sur les performances nominales par les trois contrôleurs cités précédemment.



**Fig. 1.12.** Performances nominales du système bouclé par les trois contrôleurs précédents

D'après la figure **Fig.1.12**, on peut voir nettement que les trois contrôleurs précédents n'ont pas atteint l'objectif souligné. Ceci se traduit par la violation de la condition sur les performances nominales notamment dans la plage fréquentielle  $10^{-5} \leq \omega \leq 0.0335$  radians/seconde. De plus, le contrôleur synthétisé par la méthode  $\mathcal{H}_\infty$  utilisant l'approche *LMI* peut fournir des performances néanmoins acceptables en comparaison avec celles fournies par les deux autres contrôleurs.

Pour confirmer ces résultats dans le plan temporel, le logiciel *Simulink/Matlab* est utilisé pour visualiser les réponses temporelles du système bouclé par les trois contrôleurs précédents (**Fig.1.13**). Trois entrées exogènes, qui sont  $r(t)$ ,  $d_y(t)$  et  $\eta_y(t)$ , sont utilisées pour voir et

analyser les dynamiques suivantes : dynamique de poursuite des références, dynamique de rejection des perturbations en sortie, dynamique d'atténuation de l'effet des bruits de mesures et de l'effet des dynamique négligées. On obtient donc la configuration suivante :

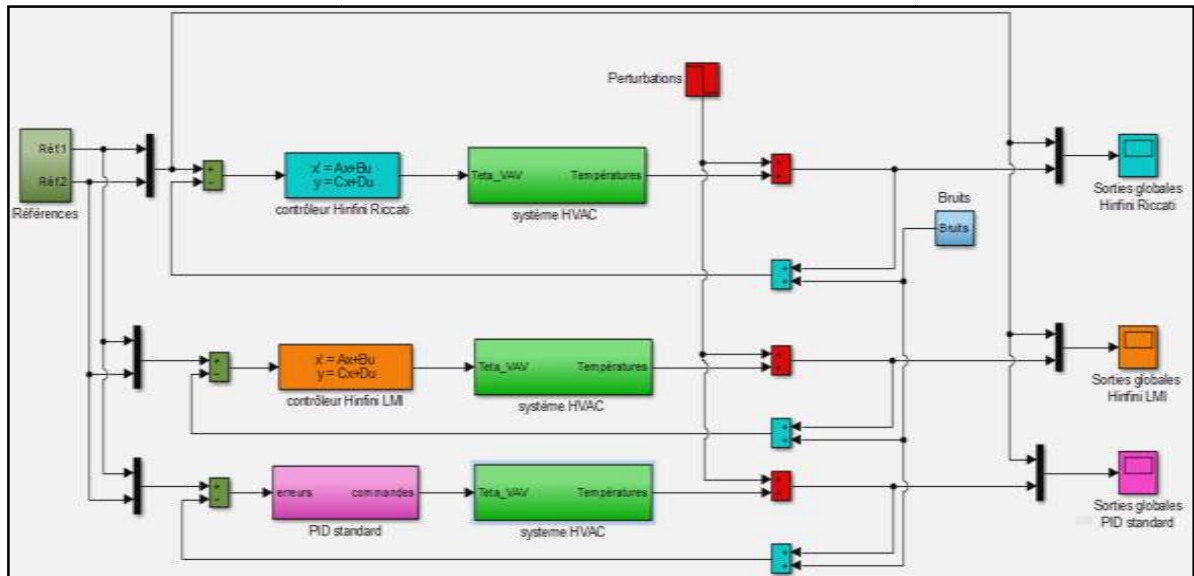


Fig. 1.13. Système bouclé constitué par le système perturbé et les trois contrôleurs précédents

A partir de cette configuration, les trois vecteurs d'entrées exogènes sont donnés comme suit :

- $r(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{pmatrix}$ , avec  $\begin{cases} r_1(t) = 1 \\ r_2(t) = 0 \end{cases}$ , pour  $t \in [0,1000]$  secondes.
- $d_y(t) = \begin{pmatrix} d_{y1}(t) \\ d_{y2}(t) \end{pmatrix}$ , avec  $d_{y1}(t) = d_{y2}(t) = \begin{cases} 0 : t \in [0, 500] \\ -0.3 : t \in ]500, 1000] \end{cases}$  secondes.
- $\eta_y(t) = \begin{pmatrix} \eta_{y1}(t) \\ \eta_{y2}(t) \end{pmatrix}$ , avec  $E(\eta_{y1}) = E(\eta_{y2}) = 0$  et  $Var(\eta_{y1}) = Var(\eta_{y2}) = 0.05$

Avec  $E(\eta_{y*})$  et  $Var(\eta_{y*})$  sont, respectivement, la moyenne et la variance du signal d'entrée( $\eta_{y*}$ ), sachant que ce dernier vecteur est appliqué pendant l'intervalle du temps  $800 \leq t \leq 1000$  secondes. La figure Fig.1.14 donne le schéma du système HVAC.

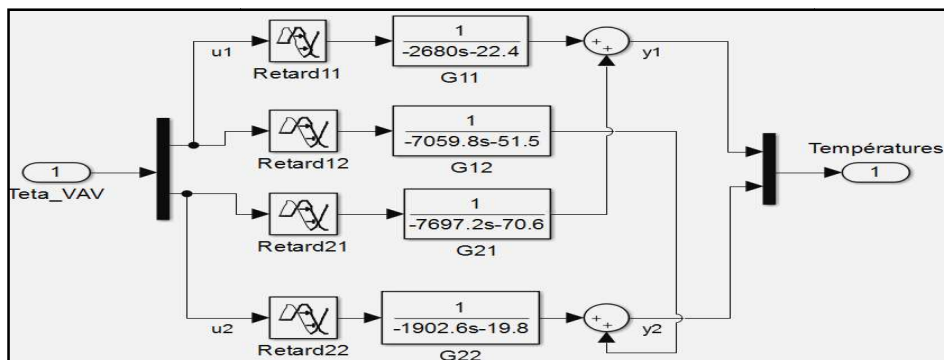


Fig. 1.14. Blocs Simulink/Matlab modélisant le système perturbé

Les sorties du système bouclé sont détaillées dans les figures Fig.1.15 à Fig.1.18.

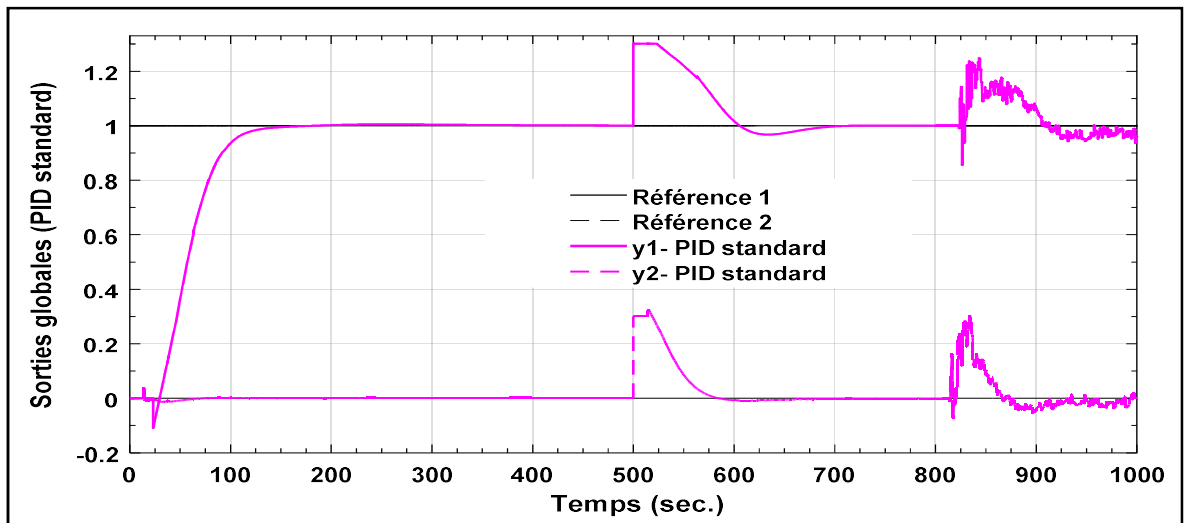


Fig. 1.15. Sorties globales du système bouclé par le contrôleur PID pluridimensionnel

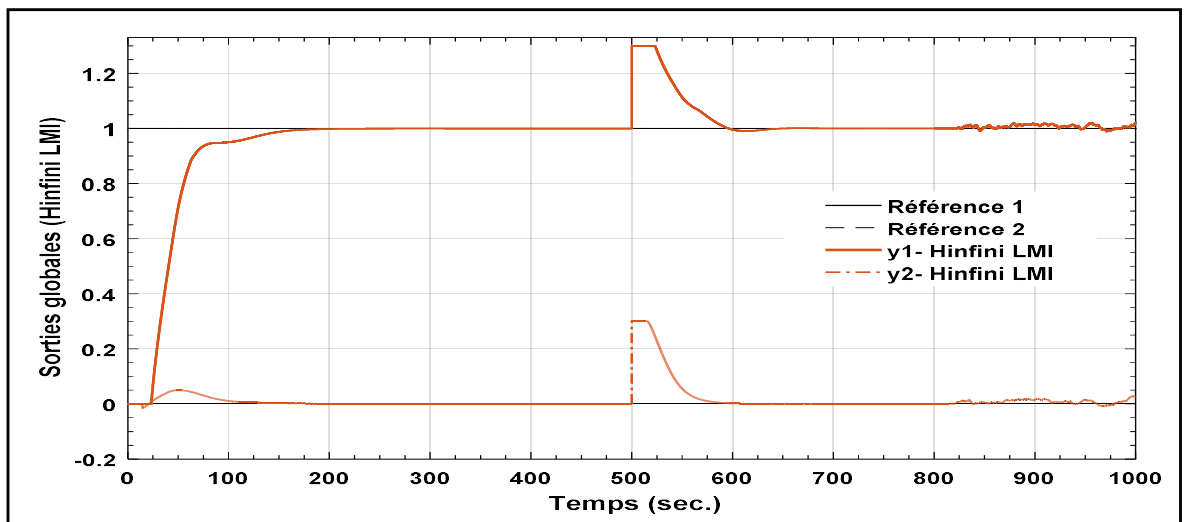


Fig. 1.16. Sorties globales du système bouclé par le contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$  utilisant l'approche LMI

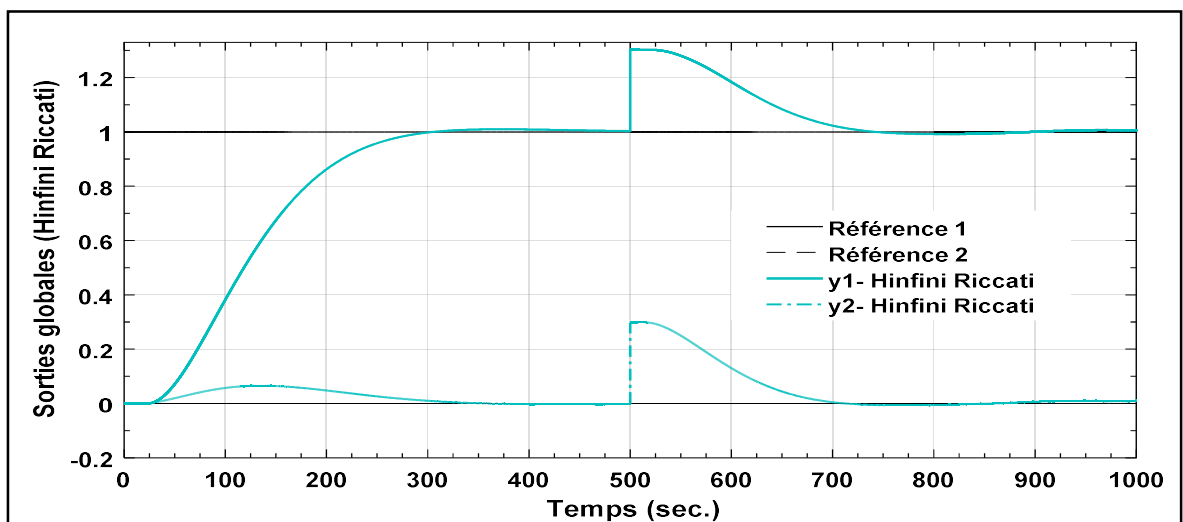


Fig. 1.17. Sorties globales du système bouclé par le contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$  utilisant les équations de Riccati

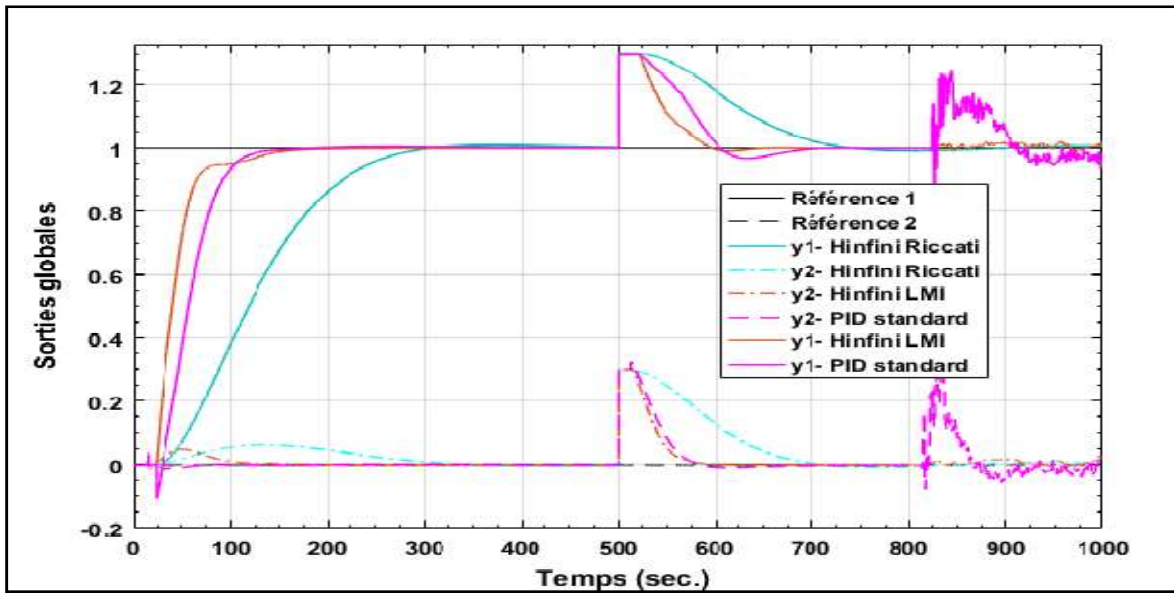


Fig. 1.18. Comparaison des sorties obtenues par les trois contrôleurs précédents

D'après les sorties présentées dans le plan temporel, nous constatons que le contrôleur robuste synthétisé par l'approche *LMI* assure les meilleures dynamiques de poursuite de références et de rejection de perturbations par rapport aux autres contrôleurs. Ceci se traduit par : l'obtention des sorties caractérisées par des temps de montées rapides en régime transitoire, la rejection des perturbations dans un intervalle du temps très court et l'atténuation des effets des bruits de mesures en régime stationnaire. Toutefois, le contrôleur *PID* pluridimensionnel peut fournir un temps d'établissement rapide, néanmoins leurs commandes deviennent très fluctuantes et très sensibles aux effets des bruits de mesure qui agissent sur le système bouclé en régime statique. Ceci est causé par la violation de la condition de robustesse sur la stabilité robuste (voir la figure Fig.1.19).

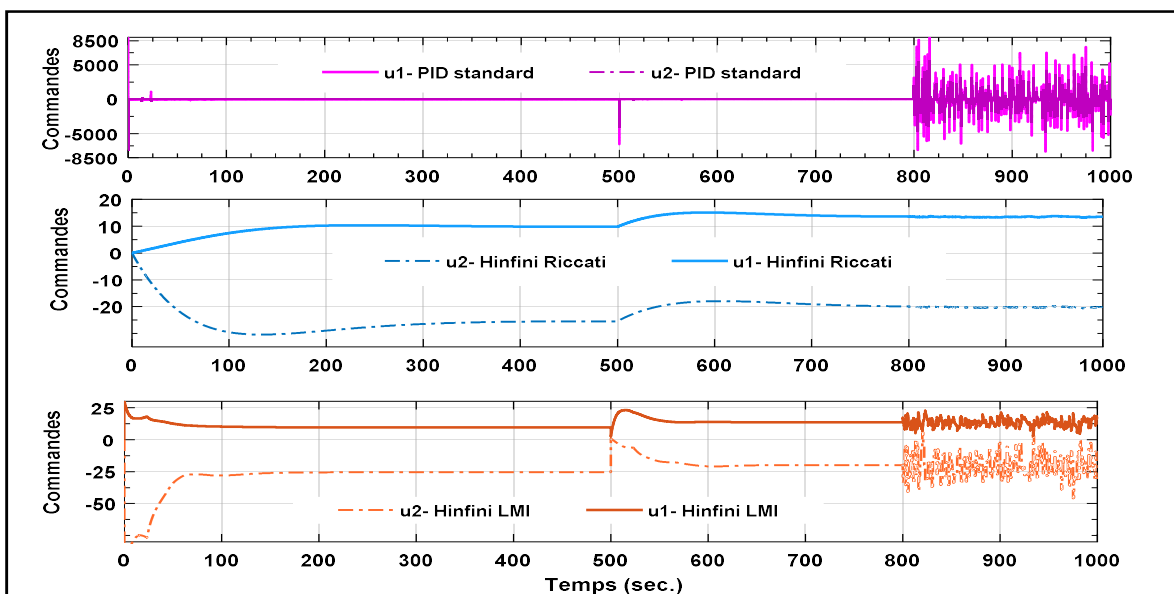


Fig. 1.19. Comparaison des commandes fournies par les trois contrôleurs précédents

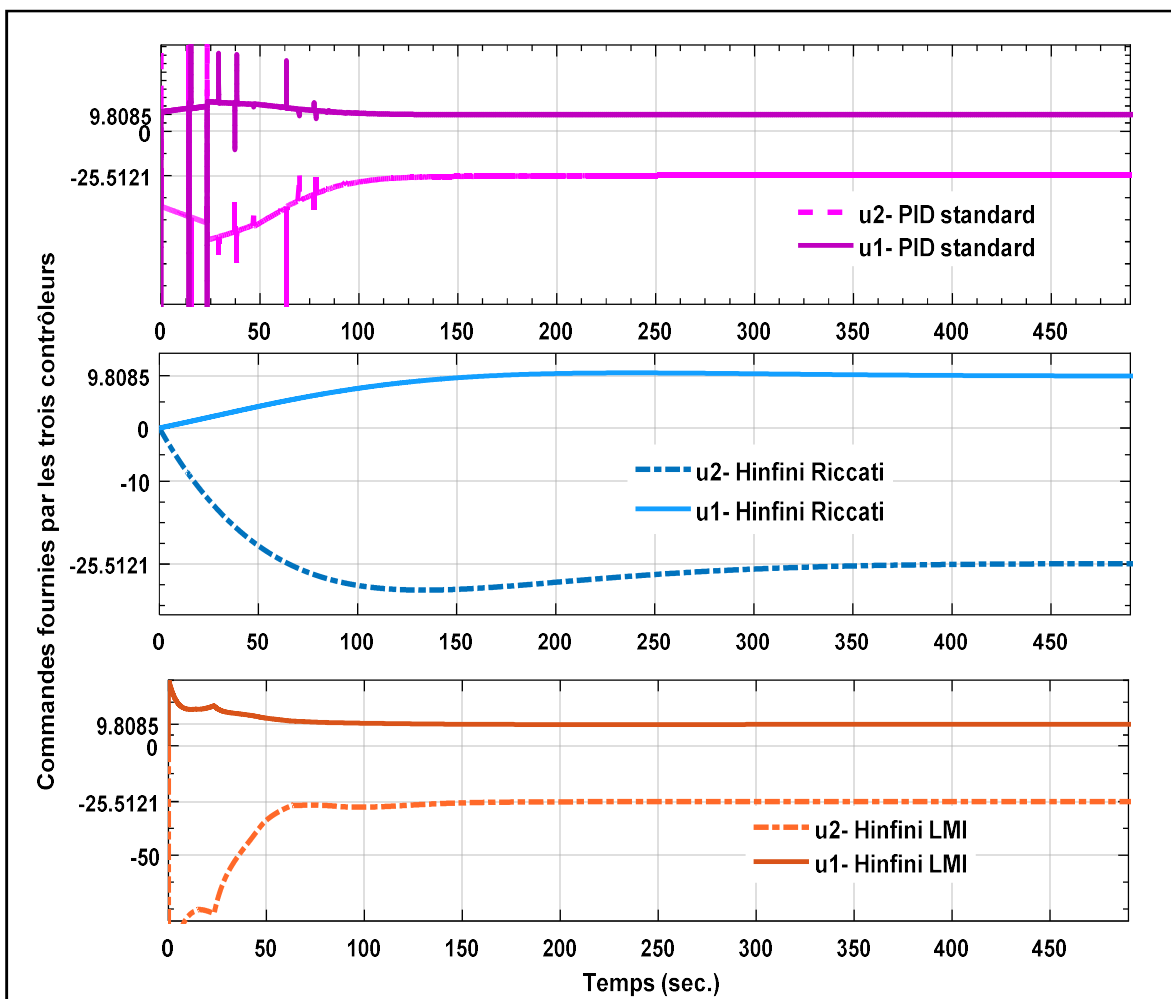
D'après la figure **Fig.1.19**, en absence des signaux de perturbations et de bruits de mesure, les commandes du système bouclé par les trois contrôleurs précédents convergent vers l'inverse des gains statiques de la matrice de transfert  $G(s)$ . Notons ici que la poursuite idéale des trajectoires de références en régime stationnaire (i.e.  $y(s) \cong r(s)$ ), est assurée par des commandes idéales satisfaisantes l'expression ci-dessous :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{u(t)\} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{s \rightarrow 0} \{s \cdot u(s)\} = \lim_{s \rightarrow 0} \{s \cdot G^{-1}(s) \cdot r(s)\}.$$

Comme le vecteur de consigne est supposé donné par  $r(s) = \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}^T$ , d'où :

$$\begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25.5121 & 7.1549 \\ 9.8085 & -22.5508 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25.5121 \\ 9.8085 \end{bmatrix}$$

La figure **Fig.1.20** confirme la convergence des signaux de commandes vers l'inverse des gains statiques de  $G(s)$  pour les trois contrôleurs précédents. On aura donc la **Fig.1.20** :



*Fig. 1.20. Convergence des commandes fournies vers l'inverse des gains statiques de  $G(s)$*



## 1.8. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons rappelé des notions théoriques de la commande robuste des systèmes pluridimensionnels modélisés par des modèles incertains. Nous avons également présenté les différents types d'incertitudes non structurées qui peuvent être utilisées pour quantifier l'effet de différentes dynamiques négligées lors de la phase de modélisation. Par conséquent, une évaluation adéquate de ces incertitudes permet de définir une matrice de pondération où son inverse permet de borner la matrice de sensibilité complémentaire du système bouclé. La condition de robustesse sur la stabilité robuste est ainsi satisfaite. Une autre condition de robustesse sur les performances nominales du système bouclé doit être vérifiée. Celle-ci dépend d'un choix adéquat d'une matrice de pondération où son inverse permet de borner la matrice de sensibilité directe du système bouclé. En agissant ainsi, la condition de robustesse sur les performances souhaitées est satisfaite. La satisfaction de deux conditions de robustesse précédentes est irréalisable dans la même plage de fréquence. A cet effet un compromis de robustesse doit être réalisé par le contrôleur robuste. Cet objectif peut être formulé par un critère de sensibilité mixte où sa minimisation est effectuée par deux versions de la méthode  $\mathcal{H}_\infty$ .

Les performances de la méthode  $\mathcal{H}_\infty$  ont été validées sur le système *HVAC* où sa dynamique a été modélisée par la forme multiplicative directe en sortie. Les résultats de simulation montrent que le choix de la méthode  $\mathcal{H}_\infty$  utilisant les équations de *Riccati* ou l'approche *LMI* est très important pour contrôler ce genre de systèmes. Ce choix dépend des marges de robustesse de stabilité et des performances nominales dans le plan fréquentiel.

Les résultats de simulation obtenus dans les plans fréquentiel et temporel montrent l'impossibilité d'atteindre un compromis de robustesse acceptable par les deux versions de la méthode  $\mathcal{H}_\infty$ , ce qui peut restreindre ses applications pour des niveaux élevés aussi bien des incertitudes ou de bruits de mesure. A cet effet, nous verrons, dans le chapitre suivant, que l'utilisation de la structure d'ordre non entier lors de la phase de synthèse du contrôleur robuste peut améliorer le niveau de robustesse du système bouclé. Les paramètres de la structure proposée seront toujours basés sur la minimisation du même problème de sensibilité mixte généralisé en utilisant un algorithme d'optimisation de type *Min-Max*. Le chapitre suivant sera donc consacré à la commande robuste d'ordre non entier (*CRONE*) des systèmes pluridimensionnels modélisés par des modèles incertains où les performances de la commande proposée seront comparées, dans les plans fréquentiel et temporel, à celles fournies par la commande robuste d'ordre entier (*CROE*).

***Chapitre 2 :***  
***Commande Robuste***  
***d'Ordre Non Entier***  
***CRONE***

## 2. Introduction

Tout système modélisé par une équation différentielle utilisant la dérivation d'ordre fractionnaire est appelé système d'ordre fractionnaire. Actuellement, beaucoup de travaux traitent des systèmes ou des phénomènes physiques qui nécessitent l'utilisation de cette théorie du calcul fractionnaire. A cet effet, des chercheurs essayent de développer de nouveaux outils mathématiques et informatiques qui permettent de manipuler et simuler les systèmes d'ordre fractionnaire. En revanche, d'autres chercheurs tentent de d'analyser leurs caractéristiques dynamiques et statiques.

Récemment, le calcul fractionnaire possède un champ d'applications très vaste [33] notamment dans plusieurs domaines, à savoir : l'automatique, l'électricité, la mécanique, la viscoélasticité, la théorie du contrôle, les équations de diffusion, l'électromagnétique, la biologie...etc. [34]. Leurs processus ont été souvent commandés par des contrôleurs robustes d'ordre non entier assurant des marges de robustesse très élevées en présence des incertitudes de modélisation et des bruits de mesures [35, 36].

Parmi les contrôleurs robustes les plus utilisés dans la pratique, le contrôleur proportionnel intégral-différentiel d'ordre fractionnaire *FOPID* a reçu une attention considérable durant ces dernières années à la fois du point de vue académique et industriel. Ses paramètres sont obtenus via une solution optimale ou sous-optimale d'un problème d'optimisation dans lequel le critère de sensibilité mixte généralisé est le plus souvent utilisé pour atteindre les objectifs imposés par un tel cahier de charges. Cette solution est généralement fournie par des méthodes d'optimisation *Min-Max* en présence de plusieurs types de contraintes, à savoir : les contraintes de bornes (contraintes de saturations), d'égalités et les contraintes d'inégalités.

Dans ce chapitre, nous allons présenter les définitions et les propriétés de base de la dérivation et l'intégration d'ordre non entier qui seront employées pour la synthèse des contrôleurs fractionnaires robustes. Ensuite, nous allons présenter les méthodes d'approximation existantes dans la littérature. Ces méthodes permettent l'approximation des opérateurs fractionnaires par des transferts d'ordre entier, ce qui offre la possibilité d'implémenter les contrôleurs d'ordre non entier dans la boucle de commande. Après, nous allons exposer les détails d'une stratégie de commande basée sur la structure d'un PID fractionnaire où ses paramètres seront déterminés via la solution optimale du problème de sensibilité mixte en utilisant l'optimisation *Min-max*. Enfin, le procédé thermique proposé dans le premier chapitre sera contrôlé par cette stratégie de commande. Une étude

comparative des performances de cette stratégie de commande avec les deux meilleures méthodes robustes d'ordre entier étudiées est réalisée dans les plans fréquentiel et temporel. Cette comparaison sera établie par le logiciel *Simulink/Matlab* dans lequel le système bouclé utilisant le fonctionnement perturbé du système *HVAC* sera excité par les mêmes entrées exogènes utilisées dans le premier chapitre et cela pour voir les différentes dynamiques, à savoir : poursuite des références, interaction des sorties, rejection des perturbations, atténuation des bruits de mesures et l'effet de la dynamique négligée sur le système bouclé.

## 2.1. Théorie de la dérivation non entière

### 2.1.1. Fonctions spécifiques pour la dérivation non entière

#### 2.1.1.1. Fonction *Gamma*

Pour tout nombre complexe  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $Re(z) > 0$ , on définit la fonction suivante, appelée fonction *gamma*, par [37] :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{(z-1)} e^{-t} dt \quad (2.1)$$

Avec  $\Gamma(0) = 1$ ,  $\Gamma(0_+) = \infty$ ,  $\Gamma(z)$  est une fonction monotone et strictement décroissante, pour  $0 < z \leq 1$ . Une propriété importante de la fonction *Gamma* est la relation de récurrence donnée par l'équation (2.2):

$$\Gamma(z + 1) = z \cdot \Gamma(z) \quad (2.2)$$

La fonction de Gamma Euler généralise la factorielle car  $\Gamma(n + 1) = n!$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

#### 2.1.1.2. Fonction *Mittag-Leffler*

En mathématiques, la fonction de *Mittag-Leffler*, notée  $E_{\alpha,\beta}$ , qui tient son nom du mathématicien *Gösta Mittag-Leffler*, est une fonction spéciale, c'est-à-dire qui ne peut être calculée à partir d'équations rationnelles, qui s'applique dans le plan complexe et dépend de deux paramètres complexes  $\alpha$  et  $\beta$ . Elle est définie pour  $(\alpha, \beta) > 0$  [37] par la relation donnée par l'équation (2.3) :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha \cdot k + \beta)} \quad (2.3)$$

Pour  $\beta = 1$ , on obtient la fonction  $E_{\alpha,1}(z)$  définie par [37] :

$$E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (2.4)$$

De l'équation (2.4), si  $\alpha = 1$ , on obtient la fonction  $e^z$  qui représente ici un cas particulier de la fonction de *Mittag-Leffler*. On obtient donc :

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (2.5)$$

## 2.2. Opérateurs d'intégration et de dérivation d'ordre non entier

Dans la théorie basée sur les calculs fractionnaires, l'opérateur fondamental intégral-différentiel est défini par  ${}_{t_0}D_t^{\alpha}$  où  $t_0$  et  $t$  sont ses limites inférieure et supérieure,  $\alpha$  est l'ordre non entier qui peut être complexe dans lequel sa partie réelle est définie par  $Re(\alpha)$ . Par conséquent, selon le signe de  $Re(\alpha)$ , on obtient la définition suivante :

$${}_{t_0}D_t^{\alpha} = \begin{cases} \frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}} & , Re(\alpha) > 0 \\ 1 & , Re(\alpha) = 0 \\ \int_{t_0}^t (d\tau)^{\alpha} & , Re(\alpha) < 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

### 2.2.1. Dérivation et intégration d'ordre non entier

La dérivation (intégration) d'ordre non entier est la généralisation de la dérivée (l'intégration) entière classique à des ordres non entiers quelconques. Cette généralisation peut être obtenue par les trois définitions suivantes :

#### 2.2.1.1. Définition au sens de *Grunwald-Letnikov* GL

Soient  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  un réel positif et  $f(t)$  une fonction continue intégrable sur l'intervalle  $[t_0, +\infty[$ . La dérivée  $\alpha^{\text{ème}}$  de la fonction  $f(t)$  au sens de *Grunwald-Letnikov* est définie par l'expression (2.7) [37, 38]:

$${}_{t_0}^{GL}D_t^{\alpha}[f(t)] = \lim_{T_e \rightarrow 0^+} \left\{ T_e^{-\alpha} \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{T_e} \rfloor} \left( (-1)^j \binom{\alpha}{j} \cdot f(t - j \cdot T_e) \right) \right\} \quad (2.7)$$

Dans ce qui précède,  $\lfloor \frac{t-t_0}{T_e} \rfloor$  étant la partie entière du nombre réel  $\left(\frac{t-t_0}{T_e}\right)$ ,  $T_e$  dénote le pas d'échantillonnage et  $\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1) \cdot \Gamma(\alpha-j+1)}$  étant le binôme de Newton généralisé.

De l'équation (2.7), si  $\alpha = 1$ , l'expression de  ${}^{GL}D_t^\alpha[f(t)]$  est alors réécrite comme suit :

$${}^{GL}D_t^{-1}[f(t)] = \lim_{T_e \rightarrow 0^+} \left\{ T_e \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{T_e} \rfloor} \left( \frac{(-1)^j \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(1)} \cdot f(t-j \cdot T_e) \right) \right\} \quad (2.8)$$

Ce qui représente l'intégral de *Gründwald-Leitnikov* où sa représentation générale est définie, pour  $\alpha = -2, -3, \dots$ , par l'expression ci-dessous :

$${}^{GL}I_t^\alpha[f(t)] = {}^{GL}D_t^{-\alpha}[f(t)] = \lim_{T_e \rightarrow 0} \left\{ T_e^{-\alpha} \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{T_e} \rfloor} \left( (-1)^j \cdot \binom{-\alpha}{j} \cdot f(t-j \cdot T_e) \right) \right\} \quad (2.9)$$

### 2.2.1.2. Définition au sens de *Riemann-Liouville* RL

Pour un ordre non entier  $\alpha$  compris entre  $n-1$  et  $n$  ( i.e.  $n-1 < \alpha < n$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  ), La dérivée  $\alpha^{\text{ème}}$  de la fonction  $f(t)$  est définie, selon *Riemann-Liouville*, par l'expression (2.10) [37]:

$${}^{RL}D_t^\alpha[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{d^n}{dt^n} \left( \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \cdot f(\tau) d\tau \right) \quad (2.10)$$

La notation  ${}^{RL}D_t^\alpha[f(t)]$  signifie la dérivée d'ordre non entier de la fonction  $f(t)$  entre  $t_0$  et  $t$  selon la définition de *Riemann-Liouville*. Par ailleurs, la définition de l'intégration d'ordre non entier est définie par l'équation (2.11):

$${}^{RL}I_t^\alpha[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \left( \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-1} \cdot f(\tau) d\tau \right) \quad (2.11)$$

Sachant que :

$${}^{RL}D_t^\alpha[f(t)] = \frac{d^n}{dt^n} \left( {}^{RL}I_t^{n-\alpha}[f(t)] \right) \quad (2.12)$$

### 2.2.1.3. Définition au sens de *Caputo*

Le calcul de la dérivée  $\alpha^{\text{ème}}$  de la fonction  $f(t)$ , pour  $\alpha$ , compris entre  $n-1$  et  $n$ , est définie, selon *Caputo* par l'expression (2.13) [37, 38]:

$${}^C D_t^\alpha[f(t)] = {}^C I_t^{n-\alpha} \left[ \frac{d^n}{dt^n} (f(t)) \right] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{d^n}{dt^n} \left( \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \cdot f^{(n)}(\tau) d\tau \right) \quad (2.13)$$

Où  $f^{(n)}(t)$  étant la dérivée  $n^{\text{ème}}$  d'ordre entier de la fonction  $f(t)$ . La notation  ${}_{t_0}^C D_t^\alpha [f(t)]$  signifie la dérivée d'ordre non entier de la fonction  $f(t)$  entre  $t_0$  et  $t$  selon la définition de *Caputo*.

De l'équation (2.13), si la borne inférieure  $t_0$  est nulle (*i.e.*  $t_0 = 0$ ), alors, les deux équations (2.7) et (2.10) sont reliées par les expressions suivantes :

$${}^{RL}D_t^\alpha [f(t)] = {}_0^C D_t^\alpha [f(t)] + \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \cdot f^{(k)}(0^+) \right) \quad (2.14)$$

$${}^{RL}D_t^\alpha \left[ f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!} \right] = {}_0^C D_t^\alpha [f(t)] \quad (2.15)$$

### 2.2.2. Quelques propriétés de la dérivation non entière

Dans cette partie, afin de simplifier la notation des opérateurs intégr-différentiels cités précédemment, on notera dans la suite  $D^\alpha$  pour  ${}^{GL;RL;C}D_t^\alpha$  et  $I^\alpha$  pour  ${}^{GL;RL;C}I_t^\alpha$ .

Les principales propriétés du calcul fractionnaire utilisant les opérateurs intégr-différentiels peuvent être ainsi résumées comme suit [39]:

- Si  $f(t)$  est une fonction analytique variée dans le temps  $t$ , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire est une fonction analytique dans laquelle sa variation dépend de deux paramètres  $t$  et  $\alpha$ .
- Pour  $\alpha = n$ , ou  $n \in \mathbb{N}$ , l'opérateur,  $D^\alpha [f(t)]$  donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre entier  $n$ , *i.e.*  $D^\alpha [f(t)] = \frac{d^n}{dt^n} f(t)$ .
- Pour  $\alpha = 0$ , l'opération  $D^\alpha [f(t)]$  est l'opérateur identité, *i.e.*  $D^0 [f(t)] = f(t)$ .
- Pour  $\varphi$  et  $\rho$  deux nombres réels positifs non nuls, la loi additive d'indice d'une dérivée d'ordre non entier est donnée par :

$$D^\varphi (D^\rho [f(t)]) = D^\rho (D^\varphi [f(t)]) = D^{\varphi+\rho} [f(t)] \quad (2.16)$$

- La différentiation et l'intégration d'ordre fractionnaire sont des opérations linéaires. Ainsi, si  $f(t)$  et  $g(t)$  sont deux fonctions continues et  $\varphi$  et  $\rho$  sont des nombres réels, on a :

$$D^\alpha [\varphi \cdot f(t) + \rho \cdot g(t)] = \varphi \cdot D^\alpha [f(t)] + \rho \cdot D^\alpha [g(t)] \quad (2.17)$$

### 2.2.3. Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire

#### 2.2.3.1. Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire

La transformée de Laplace de l'intégration d'ordre fractionnaire présentée par les trois définitions citées précédemment pour  $n - 1 < \alpha < n$  est donnée par l'expression suivante [39, 40]:

$$\mathcal{L}({}^{GL;RL;C}I_t^\alpha[f(t)]) = s^{-\alpha} \cdot F(s) \quad (2.18)$$

Cette transformation est toujours valable.

#### 2.2.3.2. Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire

La transformée de Laplace de la dérivée  $n^{\text{ème}}$  de la fonction  $f(t)$  dépendant du temps  $t$  est, en générale, donnée par l'expression suivante [39, 40]:

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right) = s^n \cdot F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}f(0)\right), \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (2.19)$$

De l'équation (2.19), deux définitions de la transformée de Laplace ont été proposées pour la dérivée  $\alpha^{\text{ème}}$  de la fonction  $f(t)$  dépendant du temps  $t$ . Ces deux définitions sont :

➤ **Selon la définition de RL**

La transformée de Laplace de la dérivée  $\alpha^{\text{ème}}$  de la fonction  $f(t)$  est donnée, selon *Riemann-Liouville*, par :

$$\mathcal{L}({}^{RL}D_t^\alpha[f(t)]) = \begin{cases} s^\alpha \cdot F(s) & : \alpha < 0 \\ F(s) & : \alpha = 0 \\ s^\alpha \cdot F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} (s^k \cdot {}^{RL}D_t^{\alpha-1-k}[f(0)]) & : \alpha > 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

Toutefois, cette transformée est bien connue dans la théorie des calculs fractionnaires [37]. Néanmoins, ses applications en pratique sont très limitées à cause de l'absence d'une interprétation physique adéquate des valeurs limitant ses dérivées lorsque le système est à l'état de repos, *i.e.* à l'instant  $t_0 = 0$ .

➤ **Selon la définition de Caputo**

La transformée de Laplace de la dérivée  $\alpha^{\text{ème}}$  de la fonction  $f(t)$  est donnée par :



$$\mathcal{L}({}_0^C D_t^\alpha [f(t)]) = \begin{cases} s^\alpha \cdot F(s) & : \alpha < 0 \\ F(s) & : \alpha = 0 \\ s^\alpha \cdot F(s) - \sum_{k=0}^n (s^{\alpha-k-1} \cdot {}_0^C D_t^k [f(0)]) & : \alpha > 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

C'est la transformée la plus utilisée en pratique à cause des valeurs initiales conventionnelles de  $f^k(0)$ , pour  $k = 0, 1, \dots, (n-1)$ . De ce fait, pour l'étude et l'analyse des systèmes fractionnaires, la définition de *Caputo* semble être la plus appropriée que les deux autres définitions précédentes. Autrement dit, si le système fractionnaire est à l'état de repos pour  $t_0 = 0$ , cette transformation se réduit à celle donnée par :

$$\mathcal{L}({}_0^{RL} D_t^\alpha [f(t)]) = \mathcal{L}({}_0^C D_t^\alpha [f(t)]) = s^\alpha \cdot F(s) \quad (2.22)$$

#### 2.2.4. Représentation d'un contrôleur fractionnaire

Un contrôleur fractionnaire est, généralement, représenté par des équations différentielles non entières. De ce fait, la dynamique réelle de celui-ci est souvent décrite par l'un des trois modèles suivants [40,41] :

- Equation différentielle généralisée.
- Représentation d'état fractionnaire.
- Matrice de transfert fractionnaire.

##### 2.2.4.1. Équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire

Le comportement réel d'un contrôleur fractionnaire pluridimensionnel est souvent représenté par l'équation différentielle fractionnaire (2.23) [40, 41]:

$$A_{K_n} \cdot D^{\alpha_n} [u(t)] + \dots + A_{K_0} \cdot D^{\alpha_0} [u(t)] = B_{K_m} \cdot D^{\mu_m} [e(t)] + \dots + B_{K_0} \cdot D^{\mu_0} [e(t)] \quad (2.23)$$

Où,  $u(t)$  et  $e(t)$  sont respectivement les vecteurs des signaux de commandes et des erreurs.  $D^{\alpha_i}$  représente l'opérateur de la dérivée d'ordre  $\alpha_i$  où  $i \in \mathbb{N}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  et  $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_0$ .  $D^{\mu_j}$  représente l'opérateur de la dérivée d'ordre  $\mu_j$  où  $j \in \mathbb{N}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  et  $\mu_m > \mu_{m-1} > \dots > \mu_0$ .  $A_{K_i}$  et  $B_{K_j}$  sont des matrices réelles à des coefficients constantes.

Quand les ordres de dérivées fractionnaires  $\alpha_i$  et  $\mu_j$  sont multiples du même nombre réel  $\alpha$  avec  $\alpha_i = i \cdot \alpha$ ,  $\mu_j = j \cdot \mu$  et  $0 \leq \alpha = \mu \leq 1$ , Alors, le contrôleur résultant est un contrôleur fractionnaire dit « commensurable ». A cet effet, l'équation (2.23) est réécrite comme suit :

$$\sum_{i=0}^n (A_{K_i} \cdot D^{i,\alpha}[u(t)]) = \sum_{i=0}^m (B_{K_i} \cdot D^{i,\alpha}[e(t)]) \quad (2.24)$$

Un contrôleur fractionnaire est dit non commensurable si la condition  $(\alpha_k, \mu_k) \neq k \cdot \alpha$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$  n'est pas remplie

#### 2.2.4.2. Représentation d'état d'un contrôleur fractionnaire commensurable

De l'équation (2.24), la représentation d'état d'un contrôleur fractionnaire commensurable est définie comme dans le cas entier, on remplace seulement la dérivée d'ordre 1 par la celle d'ordre fractionnaire  $\alpha$ . On obtient donc :

$$\begin{cases} D^\alpha[x(t)] = A_K \cdot x(t) + B_K \cdot e(t) \\ u(t) = C_K \cdot x(t) + D_K \cdot e(t) \end{cases} \quad (2.25)$$

$D^\alpha[x(t)] = [D^\alpha[x_1(t)] \quad D^\alpha[x_2(t)] \quad \cdots \quad D^\alpha[x_n(t)]]^T$  représente le vecteur de la dérivée d'ordre  $\alpha$ .

#### 2.2.5. Matrice de transfert d'un contrôleur fractionnaire commensurable

La transformée de la Laplace basée sur la définition de la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de *Caputo* est appliquée sur l'équation (2.25). On aura donc :

$$\begin{cases} s^\alpha \cdot X(s) - s^{\alpha-1} \cdot x(t_0) = A_K \cdot X(s) + B_K \cdot E(s) \\ U(s) = C_K \cdot X(s) + D_K \cdot E(s) \end{cases} \quad (2.26)$$

$$\begin{cases} X(s) = (s^\alpha I - A_K)^{-1} \cdot B_K \cdot E(s) + (s^\alpha I - A_K)^{-1} s^{\alpha-1} x(t_0) \\ U(s) = C_K \cdot X(s) + D_K \cdot E(s) \end{cases} \quad (2.27)$$

Sachant que  $E(s)$ ,  $U(s)$  et  $X(s)$  représentent respectivement la transformée de Laplace des signaux  $e(t)$ ,  $u(t)$  et  $x(t)$ . Notons ici que la définition de *Caputo* est nécessaire si nous voulons que les conditions initiales soient exprimées comme les valeurs des états à l'instant  $t_0 = 0$ . Dans le cas où ces conditions sont nulles, l'équation (2.27) est réécrite comme suit :

$$\begin{cases} X(s) = (s^\alpha I - A_K)^{-1} \cdot B_K \cdot E(s) \\ U(s) = [C_K \cdot (s^\alpha I - A_K)^{-1} \cdot B_K + D_K] \cdot E(s) \end{cases} \quad (2.28)$$

Par ailleurs, la matrice de transfert du contrôleur fractionnaire est obtenue par la relation (2.29):

$$K(s) = C_K \cdot (s^\alpha \cdot I - A_K)^{-1} \cdot B_K + D_K = \begin{bmatrix} K_{11}(s) & K_{12}(s) & \cdots & K_{1m}(s) \\ K_{21}(s) & K_{22}(s) & \cdots & K_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{m1}(s) & K_{m2}(s) & \cdots & K_{mm}(s) \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Où chaque transfert  $K_{ij}(s)$  est peut être défini par [41] :

$$K_{ij}(s) = \frac{K_{N_{ij},p_{ij}} \cdot s^{\alpha \times p_{ij}} + K_{N_{ij},(p-1)} \cdot s^{\alpha \times (p_{ij}-1)} + \cdots + K_{N_{ij},0}}{K_{D_{ij},q_{ij}} \cdot s^{\alpha \times q_{ij}} + K_{D_{ij},(q_{ij}-1)} \cdot s^{\alpha \times (q_{ij}-1)} + \cdots + K_{D_{ij},0}}, \text{ avec } \begin{cases} p_{ij}, q_{ij} \in \mathbb{N} \\ q_{ij} \geq p_{ij} \\ i, j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (2.30)$$

De l'équation (2.30), si  $\mathcal{S} = s^\alpha$ , on obtient le transfert irrationnel par rapport à la variable  $\mathcal{S}$  comme suit :

$$K_{ij}(\mathcal{S}) = \frac{\sum_{k=0}^{p_{ij}} \{K_{N_{ij},k} \cdot \mathcal{S}^k\}}{\sum_{k=0}^{q_{ij}} \{K_{D_{ij},k} \cdot \mathcal{S}^k\}} \quad (2.31)$$

### 2.3. Stabilité d'un système bouclé par un contrôleur fractionnaire pluridimensionnel

Dans la théorie de la stabilité des systèmes bouclés à dérivée d'ordre entier, nous savons bien que la stabilité est vérifiée si toutes les racines du polynôme caractéristique sont à parties réelles strictement négatives, donc situées dans la moitié gauche du plan complexe.

Par ailleurs, dans le cas d'un système bouclé par un contrôleur d'ordre non entier, la définition de la stabilité est différente de celle des systèmes d'ordre entier. En effet, les systèmes fractionnaires peuvent bien avoir des racines dans la moitié droite du plan complexe et être stables [42]. Notons ici que la stabilité des systèmes fractionnaires a été étudiée et bien détaillée notamment dans la référence [43], où des conditions nécessaires et suffisantes ont été obtenues donnant lieu au théorème suivant :

#### 2.3.1. Théorème 2.1 [43, 44]:

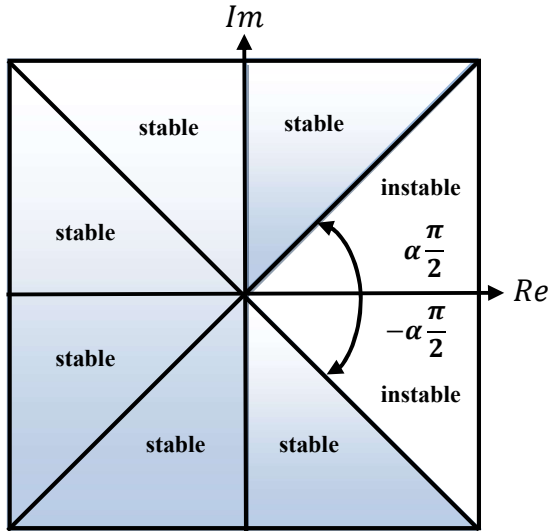
Considérons la représentation d'état suivante du système bouclé d'ordre commensurable :

$$\begin{cases} D_t^\alpha x(t) = A_F \cdot x(t) + B_F \cdot u(t) \\ y(t) = C_F \cdot x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \text{ pour } 0 < \alpha < 2 \quad (2.32)$$

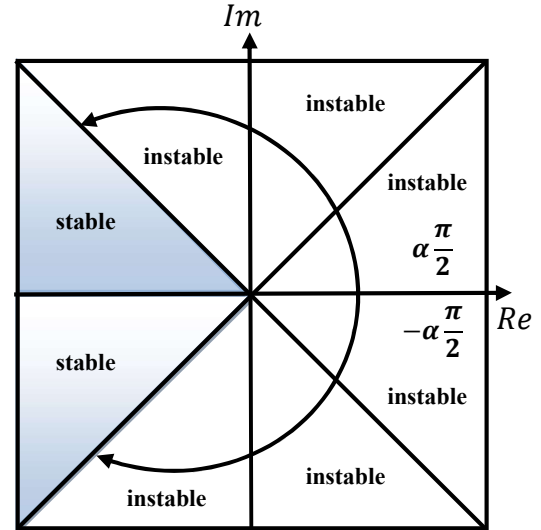
Avec  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $(u(t), e(t)) \in \mathbb{R}^n$ , sachant que  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  représentent les valeurs propres de la matrice réelle  $A_F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , d'où, le système d'équations (2.32) avec comme entrées  $u(t_0) = 0$  est stable si et seulement si la condition suivante est remplie, on obtient donc :

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}, \forall i \in \mathbb{N} \quad (2.33)$$

D'après ce théorème de stabilité, découle les différentes zones stables et instables pour un système fractionnaire bouclé. La **Fig.2.1.a** présente le cas où l'ordre entier est compris entre 0 et 1, cependant la **Fig.2.1.b** présente le cas où l'ordre entier est compris entre 1 et 2. On obtient :



**Fig.2.1.a.** Régions de stabilité pour  $0 < \alpha < 1$



**Fig.2.1.b.** Régions de stabilité pour  $1 < \alpha < 2$

**Fig.2.2.** Régions de stabilité d'un contrôleur fractionnaire

## 2.4. Approximations des opérateurs d'ordre fractionnaire

L'implémentation d'un contrôleur d'ordre non entier consiste à simuler ses éléments de base qui sont les opérateurs d'intégration ou de dérivation d'ordre fractionnaire. A cet effet, plusieurs chercheurs ont été intéressés par l'approximation de ces opérateurs par des transferts d'ordre entier. Pour cela, plusieurs techniques d'approximation ont été introduites pour la modélisation de ces opérateurs, parmi lesquelles, on peut citer :

### 2.4.1. Méthode utilisant les expansions de fraction continue CFE

La méthode utilisant la *CFE* (*Continued Fraction Expansions*) est une moyenne très efficace permettant de rapprocher le transfert d'ordre non entier  $Q(s) \in \mathbb{C}$  par le transfert irrationnel d'ordre fini  $\tilde{Q}(s) \in \mathbb{C}$ . Ce dernier peut contenir  $m_Q$  zéros et  $n_Q$  pôles répartis dans la bande de fréquence  $[\omega_b, \omega_h]$ , on obtient donc [45]:

$$\tilde{Q}(s) = CFE \{Q(s)\}_{m_Q, n_Q} = \frac{\sum_{k=0}^{m_Q} \tilde{Q}_{N_k} \cdot s^k}{\sum_{k=0}^{n_Q} \tilde{Q}_{D_k} \cdot s^k}, m_Q \leq n_Q \quad (2.34)$$

Où l'expression de  $CFE \{Q(s)\}_{m_Q, n_Q}$  peut être écrite sous la forme (2.35) :

$$CFE \{Q(s)\}_{m_Q, n_Q} = p_0(s) + \frac{q_1(s)}{p_1(s) + \frac{q_2(s)}{p_2(s) + \frac{q_3(s)}{\dots + \frac{q_{\infty}(s)}{p_{\infty}(s)}}}} \quad (2.35)$$

$p_k(s)$  et  $q_k(s)$  sont des polynômes d'ordre entier obtenus au moyen de la fonction *cfrc* du logiciel *Matlab/Symbolic/Math/Toolbox*. Plusieurs auteurs ont proposé d'autres façons d'écrire la  $CFE$  et cela pour faciliter sa représentation qui est donnée par l'équation (2.35). Parmi lesquels, on peut citer les notations suivantes :

$$CFE \{Q(s)\}_{\infty, \infty} = p_0(s) + \frac{q_1(s)}{p_1(s)} + \frac{q_2(s)}{p_2(s)} + \dots + \frac{q_{\infty}(s)}{p_{\infty}(s)} \quad (2.36)$$

$$CFE \{Q(s)\}_{\infty, \infty} = p_0(s) + \frac{q_1(s)}{p_1(s) + p_2(s)} + \dots + \frac{q_{\infty}(s)}{p_{\infty}(s)} \quad (2.37)$$

$$CFE \{Q(s)\}_{\infty, \infty} = \left[ p_0(s); \frac{q_1(s)}{p_1(s)}, \frac{q_2(s)}{p_2(s)}, \dots, \frac{q_{\infty}(s)}{p_{\infty}(s)} \right] \quad (2.38)$$

$$CFE \{Q(s)\}_{\infty, \infty} = \left[ p_0(s); \frac{q_k(s)}{p_k(s)} \right]_{k=1}^{\infty} \quad (2.39)$$

$$CFE \{Q(s)\}_{\infty, \infty} = \left[ p_0(s); \frac{q_1(s)}{p_1(s)}, \frac{q_k(s)}{p_k(s)} \right]_{k=2}^{\infty} \quad (2.40)$$

Dans ce qui suit, deux variantes basées sur la  $CFE$  sont proposées pour le rapprochement du dérivateur (ou intégrateur) d'ordre non entier  $Q_{D;I}(s) = s^{\pm\alpha}$ . Le principe de chacune d'elles peut être résumé dans ce qui suit.

#### 2.4.1.1. $CFE$ utilisant une fonction génératrice continue

##### a. Méthode d'approximation utilisant les deux $CFE$ : $CFE$ -haut et $CFE$ -bas

Dans cette méthode [45], la dérivée d'ordre non entier  $Q_D(s) = s^{\alpha}$  peut se décomposer en deux transferts rationnels où le premier transfert, qui est  $Q_{D_{high}}(s)$ , peut décrire cette dérivée en hautes fréquences, tandis que le second transfert, qui est  $Q_{D_{low}}(s)$ , peut décrire  $s^{\alpha}$  en basses fréquences. Par conséquent, les deux transferts irrationnels rapprochant la dérivée d'ordre non entier sont déterminés par l'application de la  $CFE$  comme suit :

##### a.1. Approximation utilisant la $CFE$ -haut

$$Q_{D_{high}}(s) = \omega_c^{\alpha} \cdot CFE \left\{ \left( 1 + \frac{s}{\omega_c} \right)^{\alpha} \right\}, \quad \text{si } \omega \gg \omega_c \quad (2.41)$$

Dans ce cas, le transfert rationnel  $\tilde{Q}_{D_{high}}(s)$  est obtenu par

$$\tilde{Q}_{D_{high}}(s) = \omega_c^\alpha \cdot \left[ 0; \frac{1}{1}, \frac{-\alpha \cdot \left(\frac{s}{\omega_c}\right)}{1}, \left\{ \frac{\frac{k(k+\alpha)}{(2k-1)2k} \left(\frac{s}{\omega_c}\right)}{1}, \frac{\frac{k(k-\alpha)}{(2k+1)2k} \left(\frac{s}{\omega_c}\right)}{1} \right\} \right]_{k=1}^N \quad (2.42)$$

### a.2. Approximation utilisant la CFE-bas

$$Q_{D_{low}}(s) = \omega_c^\alpha \cdot CFE \left\{ \left( 1 + \frac{\omega_c}{s} \right)^{-\alpha} \right\}, \quad \text{si } \omega \ll \omega_c \quad (2.43)$$

Dans ce cas, le transfert rationnel  $\tilde{Q}_D(s)$  est obtenu par

$$\tilde{Q}_{D_{low}}(s) = \omega_c^\alpha \cdot \left[ 0; \frac{1}{1}, \frac{\alpha \cdot \left(\frac{\omega_c}{s}\right)}{1}, \left\{ \frac{\frac{k(k-\alpha)}{(2k-1)2k} \left(\frac{\omega_c}{s}\right)}{1}, \frac{\frac{k(k+\alpha)}{(2k+1)2k} \left(\frac{\omega_c}{s}\right)}{1} \right\} \right]_{k=1}^N \quad (2.44)$$

### b. Méthode de Matsuda utilisant la CFE

Cette méthode [46] qui rapproche le dérivateur d'ordre non entier  $Q_d(s) = s^\alpha$  par le transfert rationnelle  $\tilde{Q}_d(s)$  fourni par la méthode utilisant la CFE. De ce fait, les fréquences  $\omega_0 = \omega_b, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n = \omega_h$  sont obtenues au moyen de la fonction *logspace* du Matlab, qui fournit un ensemble des fréquences espacées de manière logarithmique. Si le module de la fonction fractionnaire  $Q_d(\omega)$  est connu dans ces fréquences, la fonction irrationnelle  $\tilde{Q}_d(\omega)$  est alors calculée comme suit [46, 47]:

$$\tilde{Q}_d(\omega) = d_0(\omega) + \frac{s-\omega_0}{d_1(\omega) + \frac{s-\omega_1}{d_2(\omega) + \frac{s-\omega_2}{d_3(\omega) + \dots}}} = \left[ d_0(\omega); \frac{s-\omega_{k-1}}{d_k(\omega)} \right]_{k=1}^N \quad (2.45)$$

De l'équation (2.45), l'expression de récurrence définissant la fonction  $d_k(j\omega)$  est donnée par :

$$\begin{cases} d_0(\omega) = |Q_d(j \cdot \omega_0)| \\ d_k(\omega) = \frac{\omega - \omega_{k-1}}{d_{k-1}(\omega) - d_{k-1}(\omega_{k-1})}, \quad k = 1, \dots, N \end{cases} \quad (2.46)$$

#### 2.4.1.2. CFE utilisant la fonction génératrice discrète

Le principe de cette méthode est basé sur l'approximation du dérivateur (ou de l'intégrateur) d'ordre non entier  $Q_{D;I}(s) = s^{\pm\alpha}$  par le transfert irrationnel discret  $\tilde{Q}_{D;I}(z^{-1})$ .

De ce fait, si l'opérateur de Laplace ( $s$ ) est, a priori, transformé par l'une de ces formules ci-dessous [41] :

- Différence finie de premier ordre (*1ofd*) :  $s \approx \frac{1-z^{-1}}{T_e}$  (2.47)

- Différence finie de deuxième ordre (*2ofd*) :  $s \approx \frac{3-4.z^{-1}+z^{-2}}{2.T_e}$  (2.48)

- Différence finie de troisième ordre (*3ofd*) :  $s \approx \frac{11-18.z^{-1}+9.z^{-2}-2.z^{-3}}{6.T_e}$  (2.49)

- Transformation bilinéaire de *Tustin* :  $s \approx \frac{2}{T_e} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$  (2.50)

- Formule de *Simpson*:  $s \approx \frac{3}{T_e} \cdot \frac{1-z^{-2}}{1+4.z^{-1}+z^{-2}}$  (2.51)

L'application de la *CFE* peut alors fournir les transferts irrationnels discrets suivants :

- Différence finie de premier ordre :

$$\tilde{Q}_{D;l}(z^{-1}) = (T_e)^{\mp\alpha} \cdot CFE \left\{ (1 - z^{-1})^{\pm\alpha} \right\}_{p,q} \quad (2.52)$$

- Différence finie de deuxième ordre :

$$\tilde{Q}_{D;l}(z^{-1}) = (T_e)^{\mp\alpha} \cdot CFE \left\{ \left( \frac{3-4.z^{-1}+z^{-2}}{2} \right)^{\pm\alpha} \right\}_{p,q} \quad (2.53)$$

- Différence finie de troisième ordre :

$$\tilde{Q}_{D;l}(z^{-1}) = (T_e)^{\mp\alpha} \cdot CFE \left\{ \left( \frac{11-18.z^{-1}+9.z^{-2}-2.z^{-3}}{6} \right)^{\pm\alpha} \right\}_{p,q} \quad (2.54)$$

- Transformation bilinéaire de *Tustin* :

$$\tilde{Q}_{D;l}(z^{-1}) = (T_e)^{\mp\alpha} \cdot CFE \left\{ \left( 2 \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^{\pm\alpha} \right\}_{p,q} \quad (2.55)$$

- Formule de *Simpson*:

$$\tilde{Q}_{D;l}(z^{-1}) = (T_e)^{\mp\alpha} \cdot CFE \left\{ \left( 3 \cdot \frac{1-z^{-2}}{1+4.z^{-1}+z^{-2}} \right)^{\pm\alpha} \right\}_{p,q} \quad (2.56)$$

Sachant que  $(T_e)^{\mp\alpha} \cdot CFE \{ (*)^{\pm\alpha} \}_{p,q}$  est donnée par la forme générale (2.57) :

$$(T_e)^{\mp\alpha}.CFE\{(*)^{\pm\alpha}\}_{p,q} = \frac{\tilde{Q}_{n_{D,I}}(z^{-1})}{\tilde{Q}_{d_{D,I}}(z^{-1})} = \frac{\tilde{Q}_{n_0} + \tilde{Q}_{n_1}.z^{-1} + \dots + \tilde{Q}_{n_p}.z^{-p}}{\tilde{Q}_{d_0} + \tilde{Q}_{d_1}.z^{-1} + \dots + \tilde{Q}_{d_q}.z^{-q}} \quad (2.57)$$

Finalement, le transfert irrationnel rapprochant la dérivée (intégrateur) d'ordre non entier est obtenu par la transformée en  $z$  inverse de la fonction de transfert (2.58) :

$$\begin{cases} \tilde{Q}_D(s) = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{\tilde{Q}_{n_D}(z^{-1})}{\tilde{Q}_{d_D}(z^{-1})} \right\} \\ \tilde{Q}_I(s) = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{\tilde{Q}_{n_I}(z^{-1})}{\tilde{Q}_{d_I}(z^{-1})} \right\} \end{cases} \quad (2.58)$$

#### 2.4.2. Approximation utilisant le développement en série des expansions de *Maclaurin*

Le principe de cette méthode est basé le développement en séries de *Maclaurin* du dérivateur (ou de l'intégrateur) d'ordre non entier  $Q_{D,I}(s) = s^{\pm\alpha}$ . Le résultat de ce développement produit le transfert irrationnel discret  $\tilde{Q}_{D,I}(z^{-1})$ . De ce fait, si l'opérateur de Laplace ( $s$ ) est, a priori, transformé par l'une des formules citées précédemment par les équations (2.47) jusqu'à (2.51), le transfert  $\tilde{Q}_D(z^{-1})$  est alors défini comme suit [41] :

- Différence finie de premier ordre :

$$\tilde{Q}_D(z^{-1}) = (T_e^{-\alpha}). \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{\alpha}{k} \cdot z^{-k} \quad (2.59)$$

- Différence finie de deuxième ordre :

$$\tilde{Q}_D(z^{-1}) = \frac{[\Gamma(\alpha+1)]^2}{(2.T_e)^\alpha} \cdot \sum_{k=0}^N \left( z^{-k} \cdot \sum_{j=0}^k \left( \frac{3^{(\alpha-j)} (-1)^k}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)\Gamma(k-j+1)\Gamma(\alpha-k+j+1)} \right) \right) \quad (2.60)$$

- Différence finie de troisième ordre :

$$\tilde{Q}_D(z^{-1}) = \frac{[\Gamma(\alpha+1)]^3}{(3.T_e)^\alpha} \times \sum_{k=0}^N \left( z^{-k} \sum_{j=0}^k \left( \sum_{\ell=0}^j \left( \frac{(-1)^\ell \left( \frac{-7-\sqrt{39}}{4}i \right)^{\alpha-j+\ell} \left( \frac{-7+\sqrt{39}}{4}i \right)^{\alpha-k+j}}{\Gamma(\ell+1)\Gamma(\alpha-\ell+1)\Gamma(j-\ell+1)\Gamma(\alpha-j+\ell+1)\Gamma(k-j+1)\Gamma(\alpha-k+j+1)} \right) \right) \right) \quad (2.61)$$

- Transformation bilinéaire de *Tustin* :

$$\tilde{Q}_D(z^{-1}) = \left( \frac{2}{T_e} \right)^\alpha \Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha+1) \times \dots \sum_{k=0}^N \left( z^{-k} \sum_{j=0}^k \left( \frac{(-1)^j}{\Gamma(\alpha-j+1)\Gamma(j+1)\Gamma(k-j+1)\Gamma(-\alpha+j-k+1)} \right) \right) \quad (2.62)$$

- Formule de Simpson :



$$\tilde{Q}_D(z^{-1}) = \left(\frac{3}{T_e}\right)^\alpha (\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(-\alpha + 1))^2 \times \dots$$

$$\sum_{q=0}^N \left( z^{-q} \sum_{n=0}^{\binom{q}{2}} \sum_{p=2n}^q \left( \frac{(-1)^n (2-\sqrt{3})^{-\alpha-p+2n} (2+\sqrt{3})^{-\alpha-q+p}}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(p-2n+1)\Gamma(-\alpha-p+2n+1)\Gamma(q-p+1)\Gamma(-\alpha-q+p+1)} \right) \right) \quad (2.63)$$

### 2.4.3. Méthode de Carlson

Le principe de Carlson est fondé sur le processus itératif de *Newton-Raphson* dans lequel la détermination de la  $\alpha^{\text{ème}}$  racine de l'équation (2.64) peut rapprocher le transfert d'ordre non entier  $Q_{D,I}(s)$ , sachant que  $Q_D(s) = s^\alpha$ , et  $Q_D(s) = s^{-\alpha}$ . On aura donc [41, 47] :

$$[\mathcal{M}(s)]^{1/\alpha} - \mathcal{N}(s) = 0 \quad , \quad \mathcal{M}(s) = [\mathcal{N}(s)]^\alpha \quad (2.64)$$

Où  $\mathcal{M}(s)$  est un transfert rationnel défini par l'équation de récurrence (2.65) et  $\mathcal{N}(s)$  est un transfert rationnel qui peut prendre le terme différentiel d'ordre entier ( $s$ ), avec  $\mathcal{N}(s) = s$  ou bien le terme intégral d'ordre entier  $\frac{1}{s}$ , avec  $\mathcal{N}(s) = \frac{1}{s}$ .

Pour  $\alpha = \frac{1}{q}$ ,  $m = \frac{q}{2}$  et le transfert initial  $\mathcal{M}_0(s) = 1$ , la résolution de l'équation (2.64) est assurée par le processus itératif suivant :

$$\mathcal{M}_k(s) = \mathcal{M}_{k-1}(s) \cdot \left( \frac{(q-m) \cdot (\mathcal{M}_{k-1}(s))^2 + (q+m) \cdot \mathcal{N}(s)}{(q+m) \cdot (\mathcal{M}_{k-1}(s))^2 + (q-m) \cdot \mathcal{N}(s)} \right) \quad (2.65)$$

Si le processus (2.65) est s'itéré jusqu'à l'itération  $k_{max}$  qui est fixée à l'avance, on obtient, alors, les transferts d'ordre entier suivants :

$$\begin{cases} \tilde{Q}_D(s) = \mathcal{M}_{k_{max}}(s): & \mathcal{N}(s) = s \\ \tilde{Q}_I(s) = \mathcal{M}_{k_{max}}(s): & \mathcal{N}(s) = \frac{1}{s} \end{cases} \quad (2.66)$$

### 2.4.4. Méthode d'Oustaloup

Cette méthode s'appelle aussi « approximation CRONE (Première génération) » [48]. Elle est basée sur l'approximation, en temps continu, de l'opérateur d'ordre fractionnaire  $Q_a(s) = s^\alpha$  par un transfert rationnel. Cette approximation utilise une distribution récursive de  $N$  zéros et  $N$  pôles se trouvant dans la bande de fréquence  $[\omega_b, \omega_h]$  à l'intérieure de laquelle l'approximation est valide. De ce fait, le transfert d'ordre entier  $\tilde{Q}_a(s)$  est obtenu comme suit :

$$\tilde{Q}_d(s) = C_d \cdot \frac{\prod_{k=1}^N \left(1 + \frac{s}{\omega_{z,k}}\right)}{\prod_{k=1}^N \left(1 + \frac{s}{\omega_{p,k}}\right)} \quad (2.67)$$

Les zéros  $\omega_{z,k}$  et les pôles  $\omega_{p,k}$  de ce transfert peuvent être déterminés par :

$$\begin{cases} \omega_{z,k} = \omega_b \cdot \left(\frac{\omega_h}{\omega_b}\right)^{\frac{2k-1-\alpha}{2N}} \\ \omega_{p,k} = \omega_b \cdot \left(\frac{\omega_h}{\omega_b}\right)^{\frac{2k-1+\alpha}{2N}} \end{cases} \quad (2.68)$$

Ainsi que le rapport constant entre eux est toujours assuré comme suit :

$$\frac{\omega_{z,k+1}}{\omega_{z,k}} = \frac{\omega_{p,k+1}}{\omega_{p,k}} = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b}\right)^{\frac{1}{N}} \quad (2.69)$$

Ce rapport peut assurer un placement alterné équidistant entre les paires  $\omega_{z,k}$  et  $\omega_{p,k}$  et cela dans une échelle logarithmique de fréquences telle que celle trouvée dans un diagramme de *Bode*. De plus, le gain  $C_d$  doit être ajusté de telle sorte que la condition suivante  $|(j\omega)^\alpha|_{\omega=1} = 0 \text{ dB}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$  est toujours remplie.

#### 2.4.5. Méthode de *Charef*

Le principe de cette méthode [49] est basé sur le rapprochement de l'intégrateur fractionnaire  $Q_I(s) = s^{-\alpha}$  par le transfert d'ordre entier  $\tilde{Q}_I(s)$  qui possède  $N$  zéros et  $N + 1$  pôles répartis dans la plage de fréquence  $[\omega_b, \omega_h]$ . A cet effet, le transfert  $Q_I(s)$  peut être modelé par le Pôle à Puissance Fractionnaire (*PPF*) suivant :

$$Q_{PPF}(s) = \frac{K_\omega}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha}, \text{ avec } \omega_b < \omega_c < \omega_h \quad (2.70)$$

$K_\omega = (1/\omega_c)^\alpha$  et  $\omega_c = \sqrt{-1 + 10\left(\frac{\varepsilon}{10\alpha}\right)}$  représentent le gain et la pulsation de coupure du *PPF*.  $\varepsilon$  dénote l'erreur maximale permise entre la pente de la réponse fréquentielle de l'opérateur  $s^{-\alpha}$  et le *PPF* donné par l'équation (2.70). Le transfert d'ordre entier est donc donné comme suit :

$$\tilde{Q}_I(s) = C_I \cdot \frac{\prod_{k=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{\omega_{z,k}}\right)}{\prod_{k=0}^N \left(1 + \frac{s}{\omega_{p,k}}\right)} \quad (2.71)$$

Les pôles  $\omega_{p,k}$  et les zéros  $\omega_{z,k}$  peuvent être déterminés comme suit :

$$\begin{cases} \omega_{p,k} = \omega_c \cdot (\psi \cdot \varphi)^k \cdot \sqrt{\varphi} & , \quad k = 0, 1, \dots, N \\ \omega_{z,k} = \psi \cdot \omega_c \cdot (\psi \cdot \varphi)^k \cdot \sqrt{\varphi} & , \quad k = 0, 1, \dots, N - 1 \end{cases} \quad (2.72)$$

Avec :

$$\begin{cases} \psi = 10^{\left(\frac{\varepsilon}{10(1-\alpha)}\right)} \\ \varphi = 10^{\left(\frac{\varepsilon}{10\alpha}\right)} \\ N = \left\lceil \frac{\log\left(\frac{100 \cdot \omega_h}{p_0}\right)}{\log(\psi \cdot \varphi)} \right\rceil + 1 \end{cases} \quad (2.73)$$

où  $\left\lceil \frac{\log\left(\frac{100 \cdot \omega_h}{p_0}\right)}{\log(\psi \cdot \varphi)} \right\rceil$  dénote la partie entière du nombre réel  $\frac{\log\left(\frac{100 \cdot \omega_h}{p_0}\right)}{\log(\psi \cdot \varphi)}$ .

## 2.5. Synthèse d'un contrôleur robuste par l'optimisation *Min-Max*

La synthèse d'un correcteur robuste, qui assure une marge de sécurité élevée pour la stabilité robuste et pour les performances nominales du système bouclé, présente l'objectif principal. Cet objectif peut être atteint si le problème de sensibilité mixte généralisé est résolu conformément à certaines conditions d'optimalité. A cet effet, plusieurs algorithmes d'optimisation ont été suggérés pour aboutir à des solutions optimales de ce problème [50]. L'algorithme que nous avons utilisé est l'algorithme d'optimisation *Min-max* qui a la capacité d'assurer un bon compromis de robustesse et de satisfaire un nombre important de spécifications.

Par ailleurs, les performances de cet algorithme sont liées directement au bon choix de la structure utilisée pour la synthèse du contrôleur robuste où cette structure doit être présentée avec un nombre raisonnable de variables à optimiser. Elles sont liées également au nombre des spécifications fréquentielles qui sont imposées par le cahier de charges. Il faut mentionner ici que l'efficacité de l'algorithme se traduit, mathématiquement, par la qualité de convergence de sa solution vers l'optimum global ou vers les optima locaux.

Dans ce qui suit, le contrôleur robuste est proposé selon la structure d'ordre non entier du *PID* pluridimensionnel dans laquelle le vecteur des paramètres du contrôleur est obtenu à partir de la solution optimale du problème de sensibilité mixte généralisé en utilisant la fonction *Fminimax* du logiciel Matlab. Les opérateurs intégrro-différentiels de celui-ci sont

ensuite rapprochés par des transferts d'ordre entier en choisissant une méthode d'approximation parmi celles proposées dans le paragraphe §2.4.

### 2.5.1. Structure générale du $PID$ fractionnaire pluridimensionnel ( $PI^\lambda D^\mu$ )

La matrice de transfert du contrôleur  $PI^\lambda D^\mu$  pluridimensionnel est donnée par (2.74) [51]:

$$K_{FOPID} = \begin{bmatrix} K_{P_{11}} + K_{I_{11}} \cdot s^{-\lambda_{11}} + K_{D_{11}} \cdot s^{\mu_{11}} & \cdots & K_{P_{1m}} + K_{I_{1m}} \cdot s^{-\lambda_{1m}} + K_{D_{1m}} \cdot s^{\mu_{1m}} \\ K_{P_{21}} + K_{I_{21}} \cdot s^{-\lambda_{21}} + K_{D_{21}} \cdot s^{\mu_{21}} & \cdots & K_{P_{2m}} + K_{I_{2m}} \cdot s^{-\lambda_{2m}} + K_{D_{2m}} \cdot s^{\mu_{2m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{P_{m1}} + K_{I_{m1}} \cdot s^{-\lambda_{m1}} + K_{D_{m1}} \cdot s^{\mu_{m1}} & \cdots & K_{P_{mm}} + K_{I_{mm}} \cdot s^{-\lambda_{mm}} + K_{D_{mm}} \cdot s^{\mu_{mm}} \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

Où  $\mu_{ij} \in \mathbb{R}^+$ , et  $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}^+$  représentent respectivement les ordres fractals des actions dérivée et intégrale de la fonction de transfert  $K_{ij}(s)$ . Cette fonction est donnée par :

$$K_{ij}(s) = K_{P_{ij}} + K_{I_{ij}} \cdot s^{-\lambda_{ij}} + K_{D_{ij}} \cdot s^{\mu_{ij}} \quad (2.75)$$

Ce transfert fractionnaire sera rapproché par une fonction de transfert d'ordre entier donnée par :

$$\tilde{K}_{ij}(s) = K_{P_{ij}} + K_{I_{ij}} \cdot \tilde{Q}_{I_{ij}}(s) + K_{D_{ij}} \cdot \tilde{Q}_{D_{ij}}(s) \quad (2.76)$$

De l'équation (2.74), le vecteur à optimiser par l'algorithme *Min-Max* est celui donné par :

$$x_c \in \mathbb{R}^{5m^2} = [K_{P_{11}}, \dots, K_{P_{mm}} | K_{I_{11}}, \dots, K_{I_{mm}} | K_{D_{11}}, \dots, K_{D_{mm}} | \mu_{11}, \dots, \mu_{mm} | \lambda_{11}, \dots, \lambda_{mm}]^T \quad (2.77)$$

### 2.5.2. Problème de sensibilité mixte généralisé utilisant le contrôleur $PI^\lambda D^\mu$

La détermination des paramètres de  $PI^\lambda D^\mu$  nécessite la résolution itérative du problème de sensibilité mixte généralisé donné par l'équation (1.47). Ce problème est formulé par le système d'interconnexion en boucle fermée de  $P(s)$  par le contrôleur  $PI^\lambda D^\mu$ . On obtient donc le problème suivant :

$$\min_{x_{cmax} \leq x_c \leq x_{cmax}} \{J_\infty(x_c)\} = \min_{x_{cmax} \leq x_c \leq x_{cmax}} \{\|\mathcal{F}_\ell[P(s), K_{FOPID}(s, x_c)]\|_\infty\} \quad (2.78)$$

Pour  $\varphi$  pulsations générées au moyen de la fonction *logspace* du Matlab dans la plage de fréquence  $[\omega_{min} \quad \omega_{max}]$ , le problème ci-dessus est réécrit comme suit [27] :

$$\min_{x_c} \{J_{\infty,k}(x_c)\} = \min_{x_c} \left\{ \max_{\omega_{min} \leq \omega \leq \omega_{max}} \left( \sigma_{max} \left[ \begin{array}{c} W_S(j\omega_k) \cdot S_y(j\omega_k, x_c) \\ W_R(j\omega_k) \cdot K(j\omega_k, x_c) \cdot S_y(j\omega_k, x_c) \\ W_T(j\omega_k) \cdot T_y(j\omega_k, x_c) \end{array} \right]_{k=1, \dots, \varphi} \right) \right\} \quad (2.79)$$

Sachant que  $\omega_1 = \omega_{min}$ ,  $\omega_\varphi = \omega_{max}$  et  $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_\varphi$ . L'espace de recherche contenant la solution optimale  $x_c^*$  est celui défini par  $\Omega = (x_{c_{min}}, x_{c_{max}})$ , ses limites inférieure et supérieure sont définies par les deux vecteurs suivants :

$$x_{c_{min}} = [K_{P_{11_{min}}}, \dots, K_{P_{mm_{min}}} | K_{I_{11_{min}}}, \dots, K_{I_{mm_{min}}} | K_{D_{11_{min}}}, \dots, K_{D_{mm_{min}}} | \mu_{11_{min}}, \dots, \mu_{mm_{min}} | \lambda_{11_{min}}, \dots, \lambda_{mm_{min}}]^T \quad (2.80)$$

$$x_{c_{max}} = [K_{P_{11_{max}}}, \dots, K_{P_{mm_{max}}} | K_{I_{11_{max}}}, \dots, K_{I_{mm_{max}}} | K_{D_{11_{max}}}, \dots, K_{D_{mm_{max}}} | \mu_{11_{max}}, \dots, \mu_{mm_{max}} | \lambda_{11_{max}}, \dots, \lambda_{mm_{max}}]^T \quad (2.81)$$

$J_{\infty,k}(x_c) \in \mathbb{R}^{\varphi \times 1}$  est le vecteur portant les fonctions objectives à minimiser. Ce dernier est donné comme suit :

$$J_{\infty,k}(x_c) = [J_{\infty,0}(x_c)|_{\omega=\omega_0} \quad J_{\infty,1}(x_c)|_{\omega=\omega_1} \quad \dots \quad J_{\infty,\varphi}(x_c)|_{\omega=\omega_\varphi}]^T \quad (2.82)$$

### 2.5.3. Problème de sensibilité mixte généralisé utilisant l'estimant du contrôleur $PI^\lambda D^\mu$

La matrice de transfert du contrôleur irrationnel robuste, notée  $K_e(s)$ , qui assure les mêmes performances du contrôleur  $PI^\lambda D^\mu$  pluridimensionnel, est donnée par [51]:

$$\tilde{K}(s) = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{11}(s) & \tilde{K}_{12}(s) & \dots & \tilde{K}_{1m}(s) \\ \tilde{K}_{21}(s) & \tilde{K}_{22}(s) & \dots & \tilde{K}_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{K}_{1m}(s) & \tilde{K}_{2m}(s) & \dots & \tilde{K}_{mm}(s) \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

De l'équation (2.76), si les  $\tilde{Q}_{I,D_{ij}}(s)$  de  $\tilde{K}_{ij}(s)$  sont rapprochés par la méthode d'Oustaloup, la fonction de transfert irrationnel  $\tilde{K}_{ij}(s)$  est donc présentée par  $2.N$  pôles,  $2.N$  zéros et les trois gains  $K_{P_{ij}}$ ,  $(K_{I_{ij}} \times C_{I_{ij}})$  et  $(K_{D_{ij}} \times C_{D_{ij}})$ , On obtient :

$$\tilde{K}_{ij}(s) = K_{P_{ij}} + K_{I_{ij}} \cdot \left( C_{I_{ij}} \cdot \frac{\prod_{k=1}^N \left( 1 + \frac{s}{\omega_{I_{p,k}}}_{ij} \right)}{\prod_{k=1}^N \left( 1 + \frac{s}{\omega_{I_{z,k}}}_{ij} \right)} \right) + K_{D_{ij}} \cdot \left( C_{D_{ij}} \cdot \frac{\prod_{k=1}^N \left( 1 + \frac{s}{\omega_{D_{z,k}}}_{ij} \right)}{\prod_{k=1}^N \left( 1 + \frac{s}{\omega_{D_{p,k}}}_{ij} \right)} \right) \quad (2.84)$$

De l'équation (2.79), si le contrôleur  $K_{FOPID}$  est remplacé par son équivalent  $\tilde{K}(s)$ , l'espace de recherche paramétré par le choix de  $N$  peut donc s'augmenter à la valeur  $(4.N + 3) \times m^2$ .

Dans ce cas, le vecteur de solution présenté par l'équation (2.77) est remplacé par :

$$x_c \in \mathbb{R}^{(4.N+3).m^2} = \left[ \left[ K_{p_{11}}, (K_{I_{11}} \times C_{I_{11}}), (K_{D_{11}} \times C_{D_{11}}), \omega_{I_{p,11}}, \omega_{I_{z,11}}, \omega_{D_{z,11}}, \omega_{I_{p,11}} \right], \dots, \dots, \right]^T \quad (2.85)$$

Pratiquement, la synthèse du contrôleur robuste basée sur la structure précédente peut poser de sérieux problèmes, notamment dans le cas où le nombre des variables à optimiser est élevé. A cet effet, la solution obtenue par l'algorithme d'optimisation *Min-Max* peut être localisée dans les minima locaux ce qui peut produire des commandes déstabilisantes pour le système bouclé. Notons ici que les performances d'un tel algorithme d'optimisation peuvent être améliorées si les paramètres du contrôleur robuste à synthétiser sont très réduits. Par ailleurs, ce problème peut être remédié en choisissant comme structure du contrôleur celle donnée par l'équation (2.74) avec laquelle la taille de l'espace de recherche peut être diminuée d'une façon remarquable. Par conséquent, la structure optimale du contrôleur fractionnaire robuste est obtenue systématiquement en fonction de la solution fournie par l'algorithme d'optimisation. Cette solution peut produire une structures fractale telle que celle de  $PI^\alpha, PD^\mu, PI^\alpha D^\mu, \dots$ etc., Elle peut également produire la structure d'ordre entier telle que celle de  $PI, PD, PID, \dots$ etc, et c'est pour cette raison que l'ordre fractale dans la synthèse de contrôleur robuste est introduit.

#### 2.5.4. Résolution basée sur l'optimisation *Min-Max*

Cette partie résume les étapes à suivre pour synthétiser le contrôleur robuste  $PI^\lambda D^\mu$  pluridimensionnel. Les paramètres de celui-ci sont obtenus à partir de la solution optimale du problème de sensibilité mixte généralisé en utilisant l'algorithme d'optimisation *Min-Max*. Le contrôleur obtenu doit satisfaire un compromis de robustesse du système bouclé et non seulement pour le régime de fonctionnement nominal, mais également en cas de présence des incertitudes de modélisation et des bruits de mesure. Les étapes qu'on doit suivre pour la synthèse sont résumées comme suit [50, 52]:

##### 2.5.4.1. Algorithme d'optimisation *Min-Max*

Le modèle nominal de synthèse étant présenté par la matrice de transfert  $G_N(s)$  de dimension  $m \times m$  avec :

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \dots & G_{1m}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ G_{m1}(s) & \dots & G_{mm}(s) \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

Le contrôleur à synthétiser est supposé donné par la structure fractale de l'équation (2.74) avec laquelle le problème de sensibilité mixte généralisé (à résoudre) est posé par l'équation (2.79) ainsi que sa solution optimale qui est considérée par le vecteur donné par l'équation (2.77). La détermination de cette solution nécessite les données ci-après :

- Définition des deux contraintes de bornes données par les équations (2.80) et (2.81) ;
- Définition de la solution initiale (le vecteur de départ)  $x_{c_0}$  ;
- Définition des paramètres des matrices de transfert  $W_S(s)$ ,  $W_R(s)$  et  $W_T(s)$
- Définition du nombre maximal d'itération  $\ell_{max}$  et la précision de calcul  $J_{min}$

La fonction  $Fminimax$  du Matlab est ensuite appliquée pour minimiser le critère multi objectifs  $J_{\infty,k}(x_c)$  donné par l'équation (2.82). Sa solution est obtenue via les étapes suivantes :

#### ❖ Etape1

- Génération de ( $\varphi \in \mathbb{N}^*$ ) pulsations qui doivent être espacées d'une façon logarithmique dans la plage de fréquence  $[\omega_{min}, \omega_{max}]$ . On aura donc les pulsations  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{max}$  sachant que ( $\omega_1 = \omega_{min}$ ) et ( $\omega_\varphi = \omega_{max}$ ) ;
- Initialisation du nombre d'itération ( $\ell$ ) par ( $\ell \leftarrow 0$ ) ;
- Initialisation du nombre des critères ( $k$ ) par ( $k \leftarrow 1$ ) puis aller à l'étape 2 ;

#### ❖ Etape2

- Evaluation des matrices de transfert  $G(\omega_k)$  et  $K_{FOPID}(\omega_k, x_{c_\ell})$  ;
- Evaluation de  $S_y(j\omega_k, x_{c_\ell})$ ,  $K(j\omega_k, x_{c_\ell}) \cdot S_y(j\omega_k, x_{c_\ell})$  et  $T_y(j\omega_k, x_{c_\ell})$  ;
- Evaluation de  $W_S(j\omega_k)$ ,  $W_R(j\omega_k)$  et  $W_T(j\omega_k)$  ;
- Evaluation de ( $J_{\infty,k}(x_{c_\ell})$ ) avec  $J_{\infty,k}(x_{c_\ell}) = \sigma_{max} \begin{bmatrix} W_S(j\omega_k) \cdot S_y(j\omega_k, x_{c_\ell}) \\ W_R(j\omega_k) \cdot K(j\omega_k, x_{c_\ell}) \cdot S_y(j\omega_k, x_{c_\ell}) \\ W_T(j\omega_k) \cdot T_y(j\omega_k, x_{c_\ell}) \end{bmatrix}$  ;
- Incrémentation de ( $k$ ) par ( $k \leftarrow k + 1$ ) ;
- Test de la valeur de ( $k$ ) : si ( $k < \varphi$ ) aller à l'étape 2. Sinon, aller à l'étape 3.

#### ❖ Etape3

- Incrémentation de ( $\ell$ ) par ( $\ell \leftarrow \ell + 1$ ) ;
- Le processus de calcul est arrêté si la condition suivante ( $J_{\infty,k}(x_{c_\ell}) \leq J_{min}$ ),  $\forall k = \overline{1, 2, \dots, \varphi}$  est remplie ou si le nombre d'itération ( $\ell$ ) atteint sa valeur maximale ( $\ell_{max}$ ). Dans ce cas la solution du problème est obtenue par le vecteur ( $x_{c_\ell}$ ). Sinon :
- substituer le vecteur précédent ( $x_{c_{\ell-1}}$ ) par le nouveau vecteur ( $x_{c_\ell}$ ) minimisant le pire des critères ( $J_{\infty,max}$ ) avec  $J_{\infty,max}(x_{c_\ell}) = \max[J_{\infty,1}(x_{c_{\ell-1}}), J_{\infty,2}(x_{c_{\ell-1}}), \dots, J_{\infty,\varphi}(x_{c_{\ell-1}})]^T$  ;
- Réinitialiser le nombre ( $k$ ) par ( $k \leftarrow 1$ ) puis aller à l'étape 2 ;

Notant ici que, le principe de la fonction *Fminimax* est basé essentiellement sur l'algorithme de *SQP* (*Successive Quadratic Programming*) qui utilise la méthode *BFGS* (plus de détails sont disponible dans le *Help/Matlab*).

### 2.5.5. Structure générale de la fonction *Fminimax*

Un problème d'optimisation *Min-Max* multicritères est, en général, composé d'un vecteur des fonctions objectives à minimiser ainsi que d'un ensemble des contraintes à satisfaire. Ces contraintes peuvent être présentées par des égalités linéaires, des inégalités linéaires, des limites inférieures et supérieures (contraintes de bornes). Elles peuvent être également présentées par des fonctions non linéaires des égalités et des inégalités. La structure standard d'un problème d'optimisation *Min-Max* est donnée par le formalisme ci-dessous [50, 52]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x_c} \{J_\infty(x_c)\} = \min_{x_c} [J_{\infty,1}(x_c) \quad J_{\infty,2}(x_c) \quad \cdots \quad J_{\infty,\varphi}(x_c)]^T \\ \text{sujet à : } \begin{cases} g(x_c) \leq 0 \\ h(x_c) = 0 \\ x_{c_{min}} \leq x_c \leq x_{c_{max}} \end{cases} \end{array} \right. \quad (2.87)$$

Où  $g(x_c)$  et  $h(x_c)$  représentent respectivement les contraintes linéaires (non linéaires) des égalités et des inégalités.  $x_{c_{min}}$  et  $x_{c_{max}}$  sont les contraintes de saturations (contraintes de bornes) qui limitent la solution optimale  $x_c^*$ . Cette solution peut être déterminée par la fonction *Fminimax* avec laquelle on utilise le formalisme ci-dessous :

$$x_c^* = Fminimax(J_\infty(x_c), x_{c_0}, A_{eq}, B_{eq}, A_{ineq}, B_{ineq}, x_{c_{min}}, x_{c_{max}}, Nonlin) \quad (2.88)$$

De l'équation (2.87) et l'équation (2.88), les contraintes  $g(x_c)$  et  $h(x_c)$  peuvent être classifiées suivant le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{eq} \cdot x_c = B_{eq} \\ A_{ineq} \cdot x_c \leq B_{ineq} \\ L_B \leq x_c \leq U_B \\ C_{non\_lin\_eq}(x_c) = 0 \\ C_{non\_lin\_ineq}(x_c) \leq 0 \end{array} \right. \quad (2.89)$$

- *Nonlin* : dénote la fonction qui représente toutes les contraintes des égalités et des inégalités non linéaires. La structure générale de celle-ci est définie par le formalisme standard suivant :



$$Nonlin = [C_{non\_lin\_ineq} \quad C_{non\_lin\_eq}] \quad (2.90)$$

- $A_{eq}$ ,  $B_{eq}$  sont les matrices réelles définissant tous les contraintes linéaires des égalités.
- $A_{ineq}$ ,  $B_{ineq}$  sont les matrices réelles définissant toutes les contraintes linéaires des inégalités.
- $L_B$  et  $U_B$  sont respectivement les limites supérieures et inférieures limitant le vecteur  $x_c$ , cet ensemble englobe toutes les contraintes de bornes.
- $x_{c_0}$  dénote le vecteur initialisant l'algorithme d'optimisation.

## 2.6. Simulation

Dans cette simulation, le contrôleur robuste  $PI^\lambda D^\mu$  pluridimensionnel est appliqué sur le même procédé thermique *HVAC* cité dans le chapitre précédent dans lequel le transfert modélisant son régime de fonctionnement nominal est considéré comme modèle de synthèse de ce contrôleur fractionnaire. De plus, l'algorithme de *Min-Max* fourni par la fonction *Fminimax* du *Matlab* est utilisé pour la résolution du même problème de sensibilité mixte généralisé cité précédemment dans lequel les trois pondérations  $W_S(s)$ ,  $W_R(s)$  et  $W_T(s)$  sont conservées. La solution optimale identifiant le contrôleur  $PI^\lambda D^\mu$  pluridimensionnel est obtenue par le choix de données suivantes :

- Contraintes de bornes limitant la solution  $x_c = [K_{Pij} \quad K_{Iij} \quad K_{Dij} \quad \mu_{ij} \quad \lambda_{ij}]^T$  :
 
$$\begin{cases} -\infty \leq K_{Pij} \leq +\infty \\ -\infty \leq K_{Iij} \leq +\infty \\ -\infty \leq K_{Dij} \leq +\infty, \text{ pour } \begin{cases} i = 1, 2 \\ j = 1, 2 \end{cases} \\ 0 < \mu_{ij} < 1 \\ 0 < \lambda_{ij} < 1 \end{cases} \quad (2.91)$$

- Autres contraintes disponibles dans la fonction *Fminimax* :

$$\begin{cases} A_{eq} = [], B_{eq} = [] \\ A_{ineq} = [], B_{ineq} = [] \\ Nonlin = [] \end{cases} \quad (2.92)$$

- Choix de la solution initiale  $x_{c_0} = [K_{Pij} \quad K_{Iij} \quad K_{Dij} \quad \mu_{ij} \quad \lambda_{ij}]^T$  :

$$[K_{Pij} \quad K_{Iij} \quad K_{Dij} \quad \mu_{ij} \quad \lambda_{ij}]^T = [0.001 \quad 0.001 \quad 0.001 \quad 0.001 \quad 0.001]^T \quad (2.93)$$

- Formulation des critères multi-objectifs :

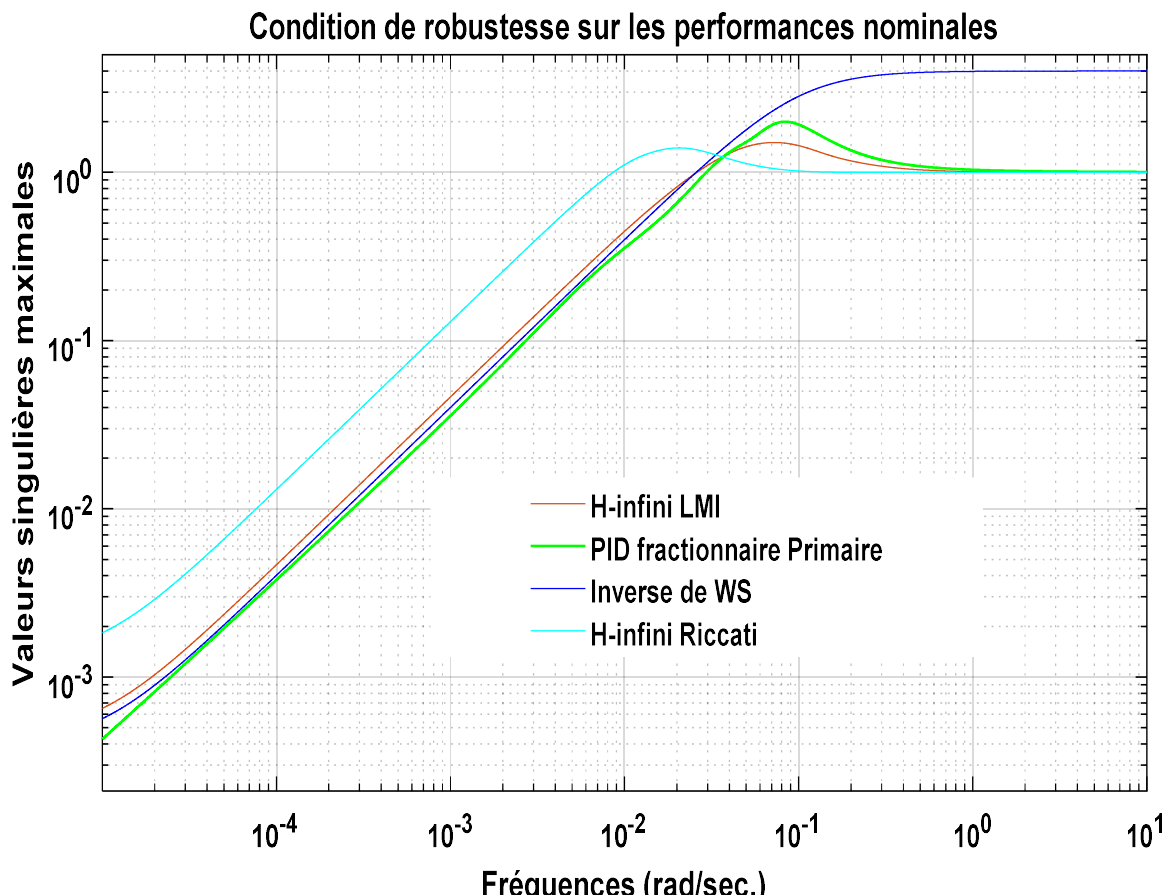
- ✓ Choix de la plage de fréquence :  $[\omega_{min}, \omega_{max}] = [10^{-4}, 10^4]$  radians/secondes.
- ✓ Nombre des fonctions à minimiser :  $\varphi = 100$

- ✓ Nombre maximal d'itération :  $\ell_{max} = 400$
- ✓ Précision de calcul :  $J_{min} = 10^{-6}$

On obtient donc la matrice de transfert du contrôleur  $PI^\lambda D^\mu$  comme suit :

$$K_{PI^\lambda D^\mu} = \begin{bmatrix} -74.74 - 0.677s^{-1} - 69.448s^{0.39} & -9.551 + 1.593s^{-0.78} - 9.61s^{0.26} \\ 0.223 + 2.939s^{-0.53} - 4.247s^{0.01} & -55.049 - 2.576s^{-0.88} - 51.943s^{0.38} \end{bmatrix}$$

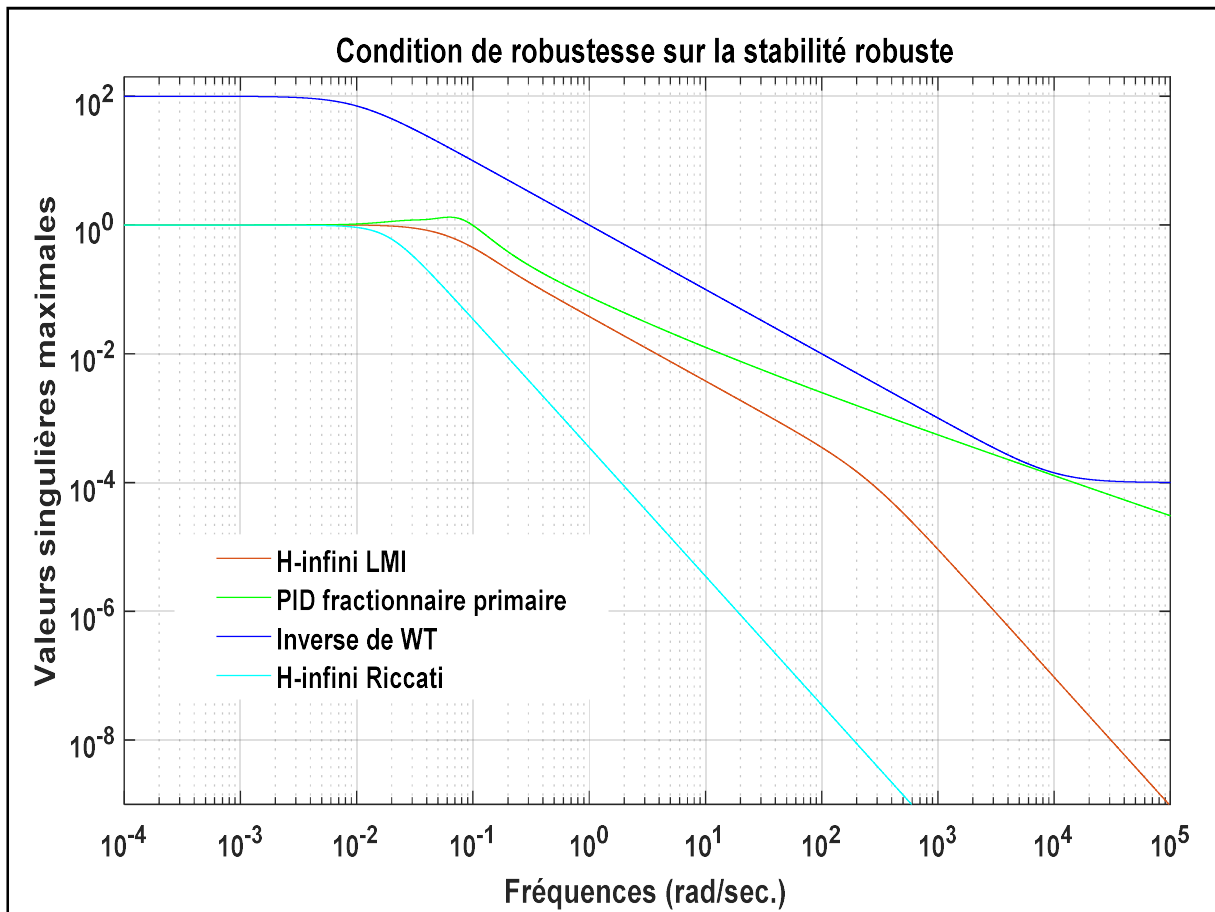
La **Fig.2.2** présente les lieux des valeurs singulières maximales des matrices de sensibilités directes fournies par les contrôleurs de la méthode  $\mathcal{H}_\infty$  ainsi que le contrôleur robuste  $PI^\lambda D^\mu$  que l'on dénommera, dans la suite de ce travail, par le contrôleur *PID* fractionnaire primaire (*CFP*). Ces lieux sont comparés par ceux obtenus via l'inverse de la matrice de pondération  $W_S(s)$  avec lesquels on peut vérifier la satisfaction de la condition de robustesse sur les performances nominales du système bouclé. On obtient la figure ci-dessous:



**Fig.2.2.** Amélioration de la robustesse des performances nominales par le contrôleur  $PI^\lambda D^\mu$

D'après la **Fig.2.2**, on peut observer la satisfaction de cette condition par le contrôleur robuste *CFP* pour toute la plage de fréquence. Par ailleurs, cette condition est totalement violée par les deux contrôleurs synthétisés par les deux versions de la méthode  $\mathcal{H}_\infty$  telles que

celle utilisant les équations de *Riccati* et l'autre basée sur la formulation *LMI*. La **Fig.2.3** présente les lieux des valeurs singulières maximales des matrices de sensibilités complémentaires fournies par les trois contrôleurs précédents. Ces lieux sont comparés à ceux obtenus via l'inverse de la matrice de pondération  $W_T(s)$  avec lesquels on peut vérifier la satisfaction de la condition de robustesse sur la stabilité robuste du système bouclé en présence des incertitudes multiplicatives directes en sortie. On obtient la figure ci-dessous :



**Fig.2.3.** Satisfaction de la condition de robustesse sur la stabilité robuste par le contrôleur  $PI^\lambda D^\mu$

D'après la **Fig.2.3**, on peut observer que le contrôleur robuste *CFP* a la capacité d'assurer la satisfaction de la condition de robustesse sur la stabilité robuste du système bouclé. Néanmoins, cette robustesse est garantie avec une marge de sécurité très réduite. Comme résultat, le compromis de robustesse entre *PN* et *SR* est achevé seulement par la stratégie basée sur le *CRONE*.

Néanmoins, l'amélioration de ce compromis représentera l'objectif principal du prochain chapitre dans lequel le contrôleur *CFP* sera robustifié par l'introduction des poids fractionnaires dans le problème de sensibilité mixte généralisé.

Pour les réponses temporelles du système bouclé par le contrôleur *CFP*, les termes intégral-différentiels de chaque transfert irrationnel du système sont rapprochés dans la plage de fréquence  $[10^{-5}, 10^2]$  radians/secondes, par des transferts irrationnels correspondants en utilisant la méthode d'*Oustaloup*. Cette dernière méthode peut assurer des bonnes approximations par rapport aux autres méthodes d'approximation citées précédemment.

Pour montrer l'efficacité d'approximation par la méthode d'*Oustaloup*, les réponses fréquentielles du contrôleur *CFP* sont comparées avec celles fournies par les trois méthodes suivantes :

### 2.6.1. Méthodes d'approximation utilisant les deux *CFEs* (*CFE-bas* et *CFE-haut*)

L'application de la méthode *CFE-bas* donne les transferts rationnels suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{K}_{11}(s) = \frac{-98.23s^5 - 1.31 \times 10^4 s^4 - 4.421 \times 10^5 s^3 - 3.678 \times 10^5 s^2 - 1.805 \times 10^4 s}{s^5 + 139.5s^4 + 5020s^3 + 1.115 \times 10^4 s^2 + 275.7s} \\ \tilde{K}_{12}(s) = \frac{-11.91s^5 - 1891s^4 - 8.665 \times 10^4 s^3 - 9.16 \times 10^5 s^2 - 1.281 \times 10^6 s}{s^5 + 189.4s^4 + 1.084 \times 10^4 s^3 + 1.79 \times 10^5 s^2 + 4.042 \times 10^5 s} \\ \tilde{K}_{21}(s) = \frac{27s^5 + 3685s^4 + 1.293 \times 10^5 s^3 + 2.445 \times 10^5 s^2 - 1.34 \times 10^4 s}{s^5 + 141.5s^4 + 5214s^3 + 1.519 \times 10^4 s^2 + 376.7s} \\ \tilde{K}_{22}(s) = \frac{-73.78s^5 - 9844s^4 - 3.286 \times 10^5 s^3 - 1.484 \times 10^4 s^2 - 165.9s}{s^5 + 133.5s^4 + 4457 s^3 + 222.7s^2 + 2.783s} \end{array} \right.$$

Par ailleurs, les transferts rationnels fournis par l'application de *CFE-haut* sont les suivants:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{K}_{11}(s) = \frac{-1.52s^5 - 62.18s^4 - 51.86s^3 - 2.327s^2 - 0.0345s - 1.723 \times 10^{-4}}{0.0475s^5 + 1.923s^4 + 0.808s^3 + 0.0263s^2 + 2.074 \times 10^{-4}s} \\ \tilde{K}_{12}(s) = \frac{-10.24s^5 + 4.89s^4 - 0.2439s^3 - 0.025s^2 - 9.853 \times 10^{-4}s - 7.992 \times 10^{-6}}{1.029s^5 + 0.455s^4 + 0.0118s^3 + 1.603 \times 10^{-3}s^2 + 2.074 \times 10^{-5}s} \\ \tilde{K}_{21}(s) = \frac{9.689s^5 - 391.6s^4 + 146.1s^3 + 8.946s^2 + 0.167s + 1.723 \times 10^{-3}}{0.611s^5 - 24.66s^4 + 7.723s^3 + 0.259s^2 + 2.074 \times 10^{-3}s} \\ \tilde{K}_{22}(s) = \frac{-2.002s^5 + 249.1s^4 - 6753s^3 - 259.4s^2 - 3.221s - 0.01724}{0.0574s^5 - 4.599s^4 + 91.91s^3 + 2.762s^2 + 0.0207s} \end{array} \right.$$

Les réponses fréquentielles de chaque transfert fractionnaire du contrôleur  $PI^\lambda D^\mu$  avec ceux d'ordre entier correspondants sont présentées par les diagrammes de *Bode* comme suit :

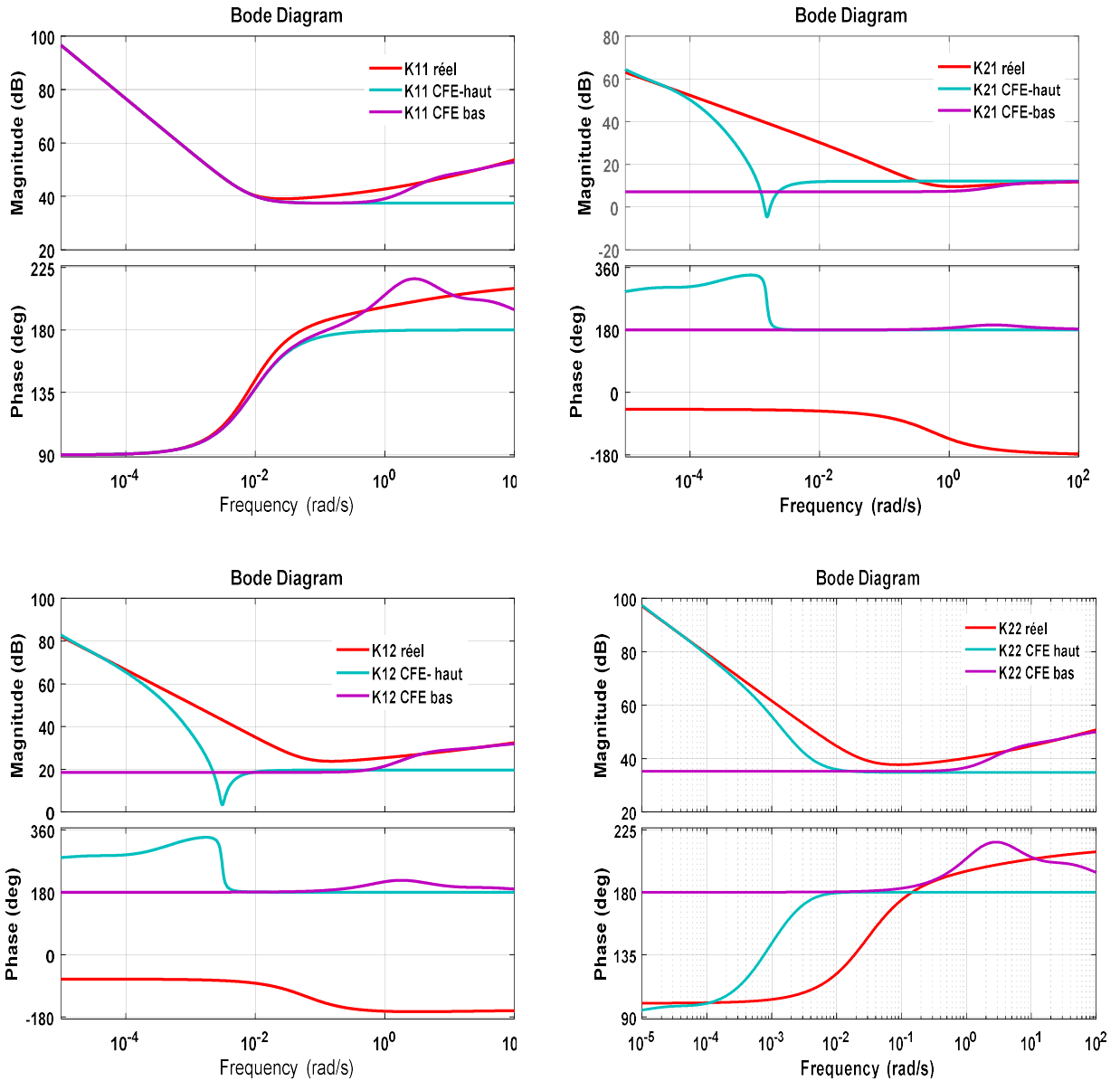


Fig.2.4. Réponses fréquentielles du contrôleur  $PI^\lambda D^\mu$  comparées avec celles fournies par les CFEs bas et haut

D'après la Fig.2.4, on peut remarquer que l'erreur d'approximation est importante notamment pour les deux modules  $K_{21}(s)$  et  $K_{22}(s)$  du transfert fractionnaire  $K(s)$ .

### 2.6.2. Méthode de Matsuda utilisant la CFE

Le rapprochement de  $PI^\lambda D^\mu$  par son équivalent d'ordre entier fourni par la méthode de Matsuda utilisant la CFE est donné comme suit :

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{K}_{11} &= \frac{109.3s^5 + 1.08 \times 10^4 s^4 + 8.017 \times 10^4 s^3 + 5.757 \times 10^4 s^2 + 1391s + 3.967}{s^5 + 119.7s^4 + 1015s^3 + 829.1s^2 + 27.32s - 0.1188} \\ \tilde{K}_{12} &= \frac{10.26s^5 + 461.3s^4 + 340s^3 + 325.8 s^2 - 241.1s - 6.514}{s^5 + 65.63s^4 + 196.8 s^3 - 62.82s^2 - 16.85 s - 0.1307} \\ \tilde{K}_{21} &= \frac{29.48s^5 + 3164s^4 + 2.504 \times 10^4 s^3 + 1.872 \times 10^4 s^2 + 166.4s + 8.771}{s^5 + 125.7s^4 + 1096s^3 + 893.3s^2 + 12.76s + 0.01877} \\ \tilde{K}_{22} &= \frac{73.85s^5 + 7601s^4 + 5.695 \times 10^4 s^3 + 3.906 \times 10^4 s^2 + 68.81s + 1.711}{s^5 + 103.1s^4 + 773.5 s^3 + 531.1s^2 + 0.9392s + 0.003089} \end{aligned} \right.$$

D'où, les comparaisons de ses réponses fréquentielles avec celles fournies par le contrôleur  $PI^\lambda D^\mu$  sont données comme suit :

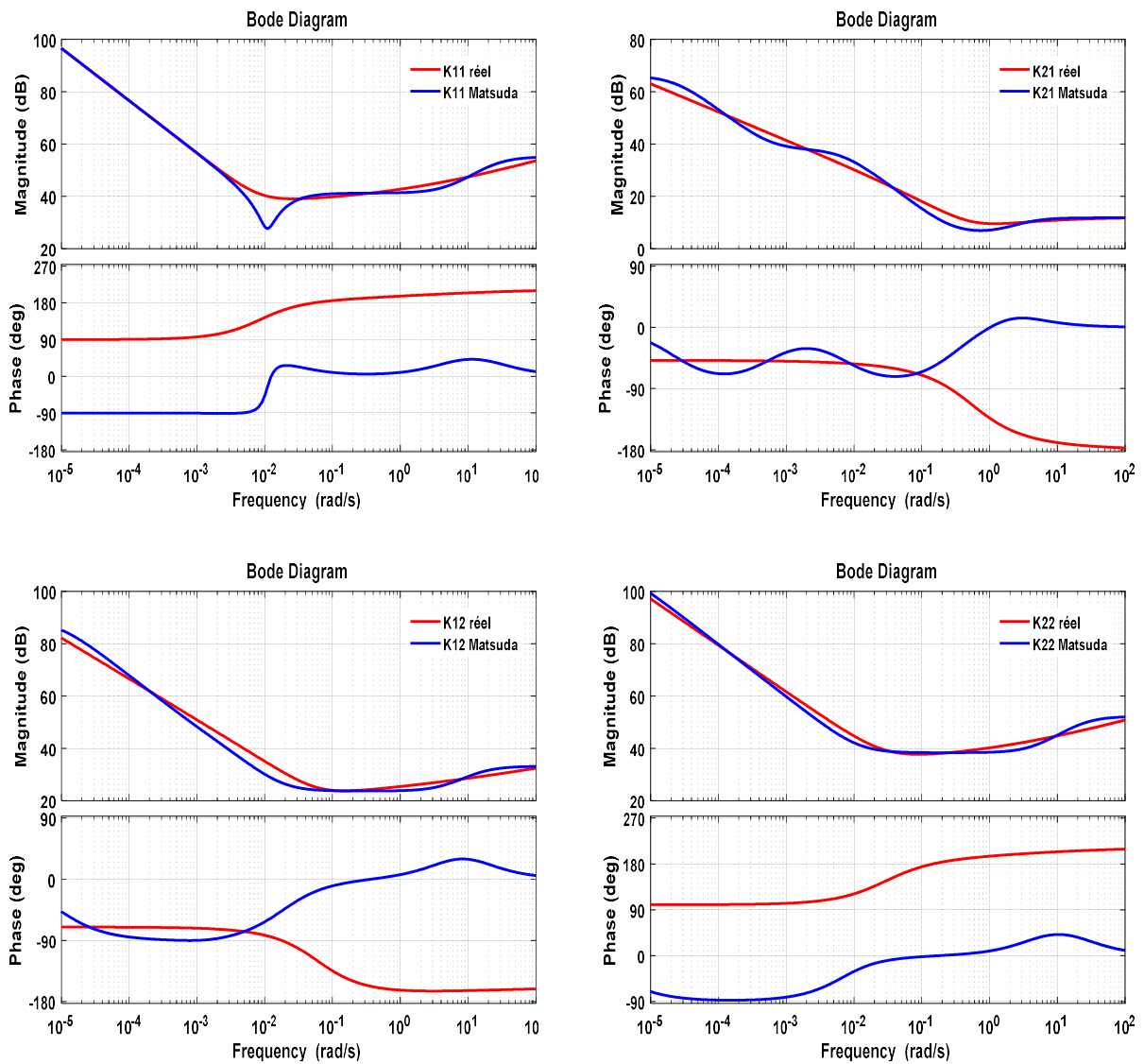


Fig.2.5. Réponses fréquentielles du  $PI^\lambda D^\mu$  comparées avec celles fournies par la méthode de Matsuda

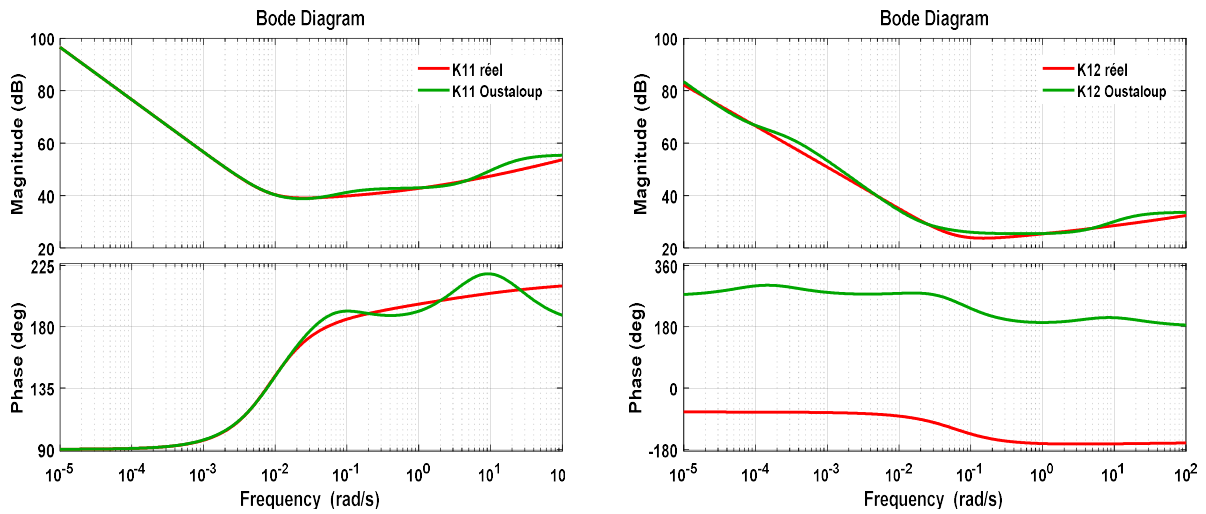
D'après la **Fig.2.5**, on peut voir nettement l'amélioration de la qualité d'approximation des modules du transfert fractionnaire par la méthode de *Matsuda* utilisant la *CFE*. Cette amélioration se traduit par l'obtention des écarts de modélisation très réduits que ceux fournis par la méthode d'approximation utilisant les deux *CFEs* haut et bas.

### 2.6.3. Méthode d'Oustaloup

Les fonctions de transferts du contrôleur  $PI^\lambda D^\mu$  sont rapprochées par la méthode d'Oustaloup comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{K}_{11}(s) = (-10^5) \frac{0.08185s^6 + 1.771s^5 + 8.171s^4 + 8.379s^3 + 1.949s^2 + 0.1162s + 0.00154}{16.6s^6 + 763s^5 + 4579s^4 + 6858s^3 + 1795s^2 + 117.3s + 1} \\ \tilde{K}_{12}(s) = (-10^4) \frac{0.04532s^6 + 1.179s^5 + 6.795s^4 + 7.219s^3 + 1.46s^2 - 0.01037s - 0.00154}{10.73s^6 + 437.8s^5 + 3054s^4 + 4521s^3 + 1384s^2 + 89.99s + 1} \\ \tilde{K}_{21}(s) = \frac{-44.81s^6 - 1334s^5 - 8137s^4 - 4159s^3 + 3493s^2 + 834.7s + 30.84}{11.86s^6 + 385.5s^5 + 2974s^4 + 3831s^3 + 13045s^2 + 74.11s + 1} \\ \tilde{K}_{22}(s) = (-10^5) \frac{0.03686s^6 + 0.8373s^5 + 4.3085s^4 + 4.712s^3 + 1.293s^2 - 0.09558s - 0.002185}{10.39s^6 + 418s^5 + 3200s^4 + 5039s^3 + 1467s^2 + 101s + 1} \end{array} \right.$$

D'où, la comparaison des réponses fréquentielles est illustrée par les figures suivantes :



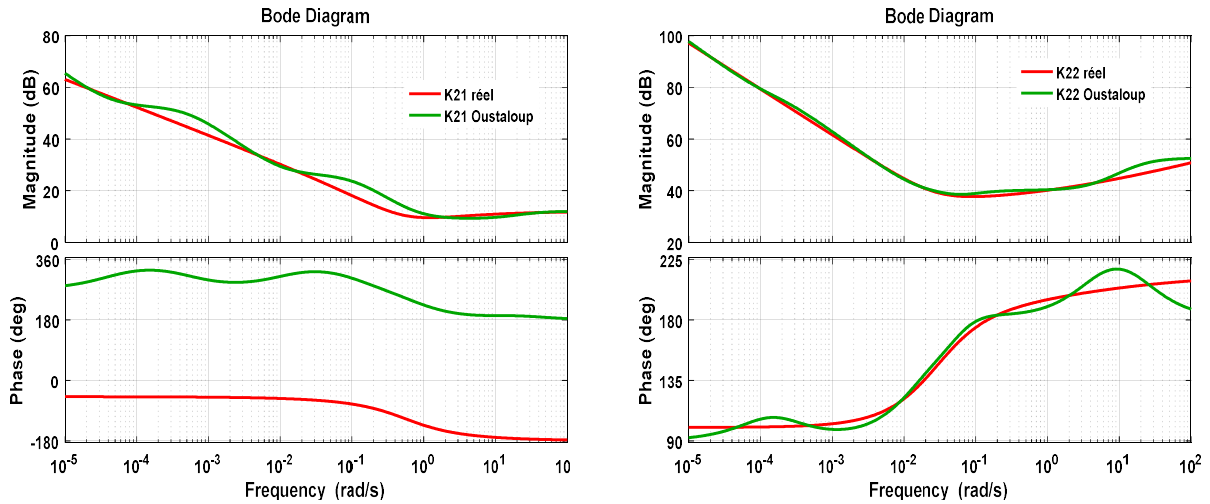


Fig.2.6. Réponses fréquentielles fournies par le CFP et celles déterminées par la méthode d'Oustaloup

D'après les figures Fig.2.6, on peut observer que la meilleure approximation de chaque module du transfert fractionnaire du CFP est celle assurée par la méthode d'Oustaloup. Ceci justifie son choix parmi celles existantes pour la phase d'implémentation du CFP dans la boucle de commande. Ensuite nous allons comparer les réponses temporelles de cette dernière méthode avec celles fournies par la méthode  $\mathcal{H}_\infty$  utilisant les équations de Riccati et celle basée sur l'approche LMI. De ce fait, la configuration de Simulink/Matlab, présentée par la Fig.2.7, est ensuite utilisée pour cette comparaison.

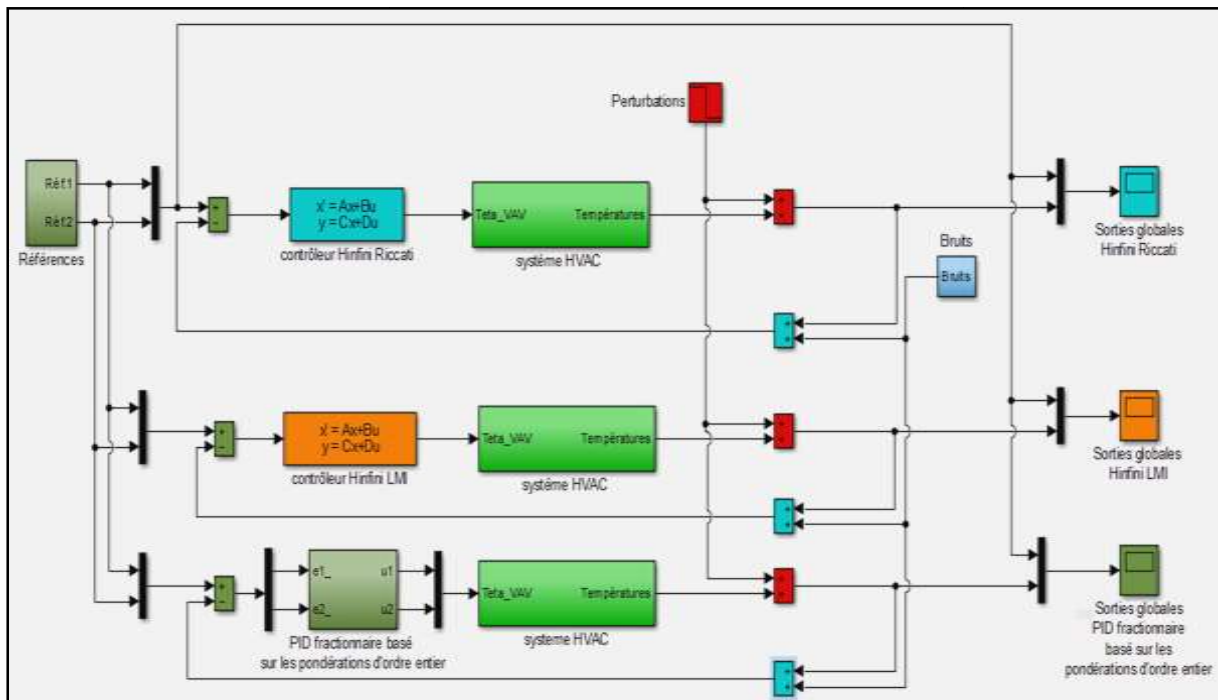


Fig.2.7. Configuration de Simulink/Matlab utilisée pour la comparaison des réponses temporelles



Tenant compte de l'application des mêmes entrées exogènes, citées dans le chapitre précédent. On obtient alors les sorties ainsi que les commandes globales représentées par les figures Fig.2.8 et Fig.2.9 respectivement.

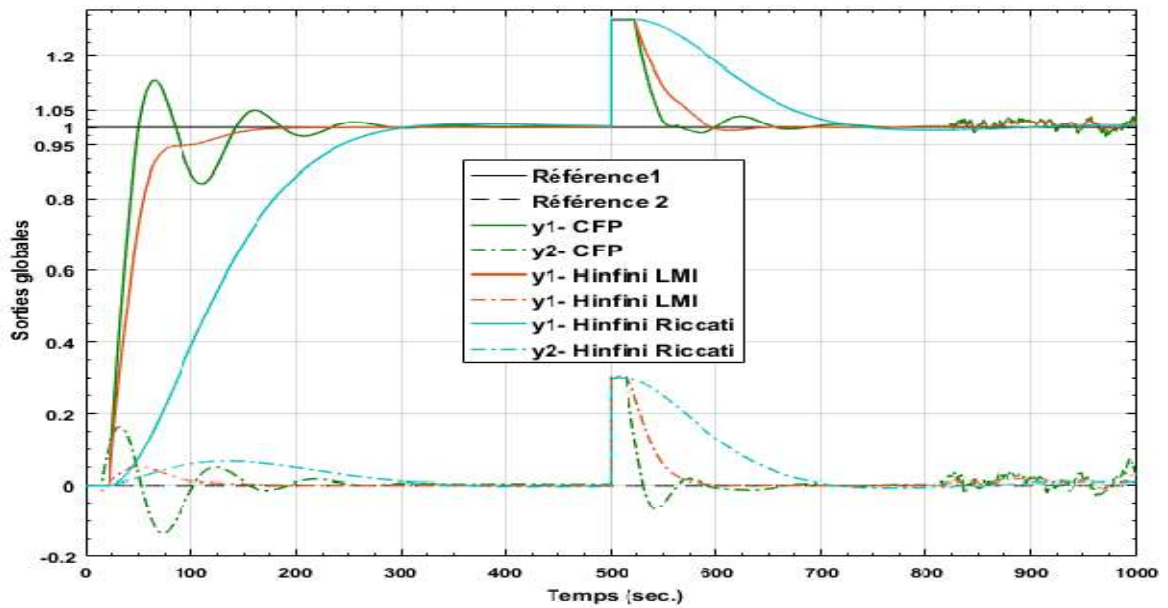


Fig.2.8. Sorties globales du système bouclé fournies par les trois contrôleurs robustes

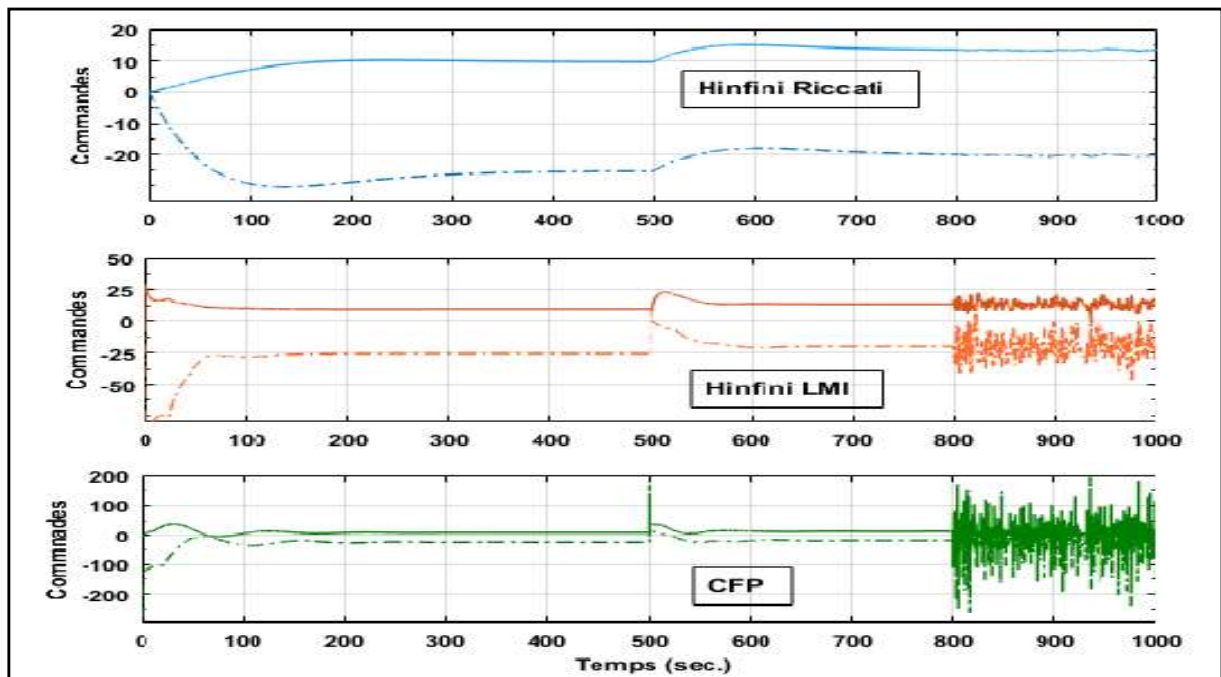


Fig.2.9. Commandes globales fournies par les trois contrôleurs robustes

D'après les réponses temporelles fournies par les trois contrôleurs robustes, on peut constater que la meilleure dynamique de rejection de perturbation est celle fournie par le système CFP avec lequel les entrées de perturbations sont rejetées dans une plage de temps très réduite. Toutefois, ce contrôleur peut fournir des sorties caractérisées par un temps de

montée rapide et un dépassement acceptable. Néanmoins, leurs commandes deviennent très fluctuantes et très sensibles aux effets des bruits de mesure qui agissent sur le système bouclé en régime statique. Ceci est causé par la faible marge de stabilité robuste fournie par le *CFP* et qui nécessite une phase de robustification qui sera effectuée dans le chapitre suivant.

## 2.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la stratégie de la commande robuste d'ordre non entier appliquée aux systèmes pluridimensionnels modélisés par des modèles incertains. A cet effet, le problème de la commande a été formulé sous forme d'un problème de sensibilité mixte généralisé dans lequel des pondérations irrationnelles d'ordre entier sont introduites afin de quantifier toutes les spécifications d'un tel cahier de charge. La solution optimale de ce problème a été assurée par un algorithme *Min-Max* qui est disponible dans la fonction du Matlab *Fminimax*. L'algorithme de cette stratégie de commande a été exposé et son efficacité a été montrée sur le même système *HVAC* déjà contrôlé précédemment par les deux versions de la méthode  $\mathcal{H}_\infty$ . Les résultats obtenus dans les plans fréquentiel et temporel nous ont confirmé que la stratégie *CRONE* peut améliorer le compromis de robustesse entre les performances nominales et la stabilité robuste où cette dernière a été garantie avec une marge de sécurité très faible produisant, par conséquent, des commandes très sensibles aux effets des bruits de mesure en régime permanent.

Pour palier à cette anomalie, une phase de robustification du *CFP* sera indispensable afin d'augmenter cette marge de robustesse tout en respectant la condition de robustesse sur les performances nominales. Cette problématique sera détaillée dans le chapitre suivant dans lequel une nouvelle stratégie de commande utilisant les pondérations fractionnaires ajustables dans le critère de sensibilité mixte sera détaillée. De plus, la structure du contrôleur fractionnaire sera aussi substituée par une autre mais avec moins de nombre de paramètres à optimiser. Finalement, l'approximation du contrôleur fractionnaire sera également améliorée par d'autres méthodes d'approximation utilisant l'approche d'identification fréquentielle.

***Chapitre 3 :***  
***Robustification du***  
***contrôleur***  
***fractionnaire primaire***  
***CFP***

### 3. Introduction

Conformément aux résultats obtenus dans les deux chapitres précédents, la réalisation d'un compromis optimal entre les  $PN$  et la  $SR$  dépend essentiellement de la sélection appropriée des matrices de pondération irrationnelles qui sont utilisées dans le problème de sensibilité mixte généralisé [18-20].

Toutefois, pour des applications simples, le choix de ces matrices de pondérations est souvent facile à atteindre après plusieurs essais et erreurs. Néanmoins, pour certaines applications industrielles nécessitant la satisfaction des spécifications rigoureuses imposées par un tel cahier de charges, la sélection optimale de ces pondérations s'avère assez difficile. A cet effet, la contribution principale de ce chapitre est d'introduire des matrices de pondération rationnelles et ajustables pour résoudre le problème de la sensibilité mixte généralisée. L'objectif envisagé est l'amélioration des marges de robustesse des  $PN$  et  $SR$  fourni par le contrôleur fractionnaire primaire  $CFP$  en tenant compte des incertitudes non structurées affectant le modèle de synthèse tout en respectant les contraintes du domaine fréquentiel. La solution optimale est assurée par la résolution itérative de ce problème en utilisant l'algorithme d'optimisation *Min-Max* (*Fminimax* du logiciel *Matlab*).

Notons ici, que la robustification suggérée est également valable pour d'autres structures de contrôleurs synthétisés, tels que : celle du  $PID$  fractionnaire pluridimensionnel et celle des gains principaux. En effet, l'avantage de cette robustification est la possibilité de synthétiser un contrôleur robuste satisfaisant un nombre important des spécifications fréquentielles et assurant l'amélioration des marges de robustesse du système bouclé face aux effets de perturbations et les bruits de mesure qui affectent les signaux de commande. L'implémentation de ce type de contrôleurs nécessite à priori l'application des méthodes d'approximation citées dans le chapitre précédent. Cette phase d'implémentation sera améliorée par l'application d'autres méthodes d'approximation basées sur l'identification fréquentielle avec lesquelles les erreurs d'approximation peuvent être diminuées de façon remarquable.

La méthode de robustification proposée s'articule, d'un côté, sur la conception d'un contrôleur fractionnaire primaire à partir des pondérations irrationnelles fixes et d'un autre côté, sur un autre contrôleur fractionnaire robustifié et synthétisé via une sélection automatique des pondérations fractionnaires ajustables en améliorant les marges fournies par le contrôleur fractionnaire primaire.

Les résultats de simulation obtenus via la commande du système *HVAC* sont comparés dans les plans fréquentiels et temporels avec ceux fournis par le contrôleur fractionnaire primaire, dans le but de valider l'efficacité de la robustification proposée.

### 3.1. Matrices des pondérations rationnelles

Pour certaines applications industrielles où le nombre de spécifications fréquentielles à satisfaire est nettement considérable, la réalisation d'un compromis de robustesse avec une marge de sécurité élevée est pratiquement assez difficile lorsque le problème de sensibilité mixte généralisé est formulé par des pondérations irrationnelles fixes. Dans cette optique, une autre stratégie basée sur des pondérations fractionnaires et ajustables est nécessaire voir obligatoire. L'objectif envisagé est d'imposer un nombre considérable de spécifications et d'attribuer plus de degré de liberté au contrôleur fractionnaire à synthétiser.

Dans la suite de ce travail, on note :

" $X_0$ " : Les variables utilisées dans la synthèse du contrôleur fractionnaire primaire *CFP*.

" $X_1$ " : Les variables utilisées dans la synthèse du contrôleur fractionnaire robustifié *CFR*.

#### 3.1.1. Pondération rationnelle limitant les sensibilités directes $S_{1;2}$

Le transfert de la pondération rationnelle, qui limite l'évolution des lieux de  $\sigma_{max}[S_1(j\omega)]$  et  $\sigma_{max}[S_2(j\omega)]$ , est proposé comme suit [4, 5] :

$$W_{S_{1;2}} = \left( \varepsilon_{S_{1;2}}^{-n_{S_{1;2}}} \right) \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_{S_{1;2}}^{High}}}{1 + \frac{s}{\omega_{S_{1;2}}^{Low}}} \right)^{n_{S_{1;2}}} \cdot I_{m \times m} \quad (3.1)$$

Avec  $[\omega_{S_{1;2}}^{low}, \omega_{S_{1;2}}^{high}] = [\omega_{B_{1;2}}^* \cdot \varepsilon_{S_{1;2}}, \omega_{B_{1;2}}^* \cdot \sqrt{M_{S_{1;2}}}]$ ,  $\sigma_{max}[S_1(j\omega)]$  et  $\sigma_{max}[S_2(j\omega)]$  sont les lieux des valeurs singulières maximales des matrices de sensibilités directes obtenues par les contrôleurs fractionnaires robustifiés *CFR<sub>1</sub>* et *CFR<sub>2</sub>* respectivement.

- $\varepsilon_{S_{1;2}}$  : dénote l'erreur maximale souhaitée de poursuite fournie en régime permanent dont une valeur faible en basses fréquences peut améliorer la précision du système bouclé.
- $\omega_{B_{1;2}}^*$  : dénote la pulsation pour laquelle l'approximation linéaire de  $W_{S_{1;2}}$  coupe l'axe des abscisses ( $0_{db}$ ). Elle est interprétée comme étant la bande passante désirée minimale fournie à l'amplitude ( $-3_{dB}$ ).

- $M_{S_{1;2}}$  : dénote la norme  $\mathcal{H}_\infty$  souhaitée en basses fréquences. Elle limite le pic de résonance fournit par les lieux de  $\sigma_{max}[S_{1;2}(j\omega)]$ , ce qui impose la condition suivante :  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \|S_{1;2}(\omega)\|_\infty < M_{S_{1;2}}$ .
- $n_{S_{1;2}}$  : dénote la puissance fractale souhaitée pour la pondération  $W_{S_{1;2}}$ . Elle impose la pente de  $(-20 \cdot n_{S_{1;2}})_{dB}$  sur les lieux de  $\sigma_{max}[S_{1;2}(j\omega)]$  en basse fréquences.

### 3.1.2. Pondération rationnelle limitant les commandes fournies par $K_{1;2}$

Le transfert de la pondération rationnelle  $W_{R_{1;2}}$ , qui limite l'évolution des lieux de  $\sigma_{max}[K_{1;2}(j\omega) \cdot S_{1;2}(j\omega)]$ , est proposé comme suit [53] :

$$W_{R_{1;2}} = \left( \frac{1}{M_{R_{1;2}}} \right) \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_{R_{1;2}}^{High}}}{1 + \frac{s}{\omega_{R_{1;2}}^{Low}}} \right)^{n_{R_{1;2}}} \cdot I_{m \times m} \quad (3.2)$$

Où  $\left[ \omega_{R_{1;2}}^{low}, \omega_{R_{1;2}}^{high} \right] = \left[ \frac{\omega_{BR_{1;2}}^*}{n_{R_{1;2}} \sqrt{M_{R_{1;2}}}}, \frac{\omega_{BR_{1;2}}^*}{\varepsilon_{R_{1;2}}} \right]$ ,  $\sigma_{max}[K_1(j\omega) \cdot S_1(j\omega)]$  et  $\sigma_{max}[K_2(j\omega) \cdot S_2(j\omega)]$  sont

les lieux des valeurs singulières maximales des matrices de sensibilités obtenues par les contrôleurs fractionnaires robustifiés  $CFR_1$  et  $CFR_2$  respectivement.

- $\varepsilon_{R_{1;2}}$  : dénote l'incertitude relative souhaitée à l'état stationnaire.
- $\omega_{BR_{1;2}}^*$  : dénote la bande passante désirée de la pondération  $W_{R_{1;2}}$  à l'amplitude  $(-3_{dB})$ . Tant que la pulsation  $\omega_{BR_{1;2}}^*$  est faible, l'effet des erreurs de modélisation devient très limité.
- $M_{R_{1;2}}$  : dénote le pic de résonance souhaité limitant les lieux de  $\sigma_{max}[K_{1;2}(j\omega) \cdot S_{1;2}(j\omega)]$  en basse fréquences. Il est choisi en fonction des contraintes imposées sur les actionneurs ainsi que des valeurs de saturation des signaux de commandes. Il doit satisfaire la condition suivante :  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \|K_{1;2}(\omega)S_{1;2}(\omega)\|_\infty < M_{R_{1;2}}$ .
- $n_{R_{1;2}}$  : dénote la puissance fractale souhaitée pour la pondération  $W_{R_{1;2}}$ . Elle impose la pente de  $(-20 \times n_{R_{1;2}})_{dB}$  sur les lieux de  $\sigma_{max}[K_{1;2}(j\omega) \cdot S_{1;2}(j\omega)]$  en haute fréquences.

### 3.1.3. Pondération rationnelle limitant les sensibilités complémentaires $T_{1,2}$

Le transfert de la pondération rationnelle, qui limite l'évolution des lieux de  $\sigma_{max}[T_{1,2}(j\omega)]$ , est proposé comme suit [53]:

$$W_{T_{1,2}}(s) = \left( \frac{1}{M_{T_{1,2}}} \right) \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_{T_{1,2}}^{High}}}{1 + \frac{s}{\omega_{T_{1,2}}^{Low}}} \right)^{n_{T_{1,2}}} \cdot I_{m \times m} \quad (3.3)$$

$$\text{Où } \left[ \omega_{T_{1,2}}^{low}, \omega_{T_{1,2}}^{high} \right] = \left[ \frac{\omega_{BT_{1,2}}^*}{n_{T_{1,2}} \sqrt{M_{T_{1,2}}}}, \frac{\omega_{BT_{1,2}}^*}{\varepsilon_{T_{1,2}}} \right].$$

- $\varepsilon_{T_{1,2}}$  : dénote l'atténuation désirée de l'effet des bruits de mesure en haute fréquences.
- $\omega_{BT_{1,2}}^*$  : dénote la bande passante désirée de la pondération  $T_{1,2}$ . Elle doit être inférieure à celle fournie par l'intersection des lieux de  $\sigma_{max}[\Delta_m(j\omega)]$  avec l'axe des abscisses ( $0_{dB}$ ).
- $M_{T_{1,2}}$  : dénote la valeur maximale limitant le pic de résonance des lieux de  $\sigma_{max}[T_{1,2}(j\omega)]$ , ce qui entraîne la condition  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \|T_{1,2}(\omega)\|_{\infty} < M_{T_{1,2}}$ .
- $n_{T_{1,2}}$  : dénote la puissance fractionnaire de la pondération  $W_{T_{1,2}}$ . Elle impose la pente de  $(-20 \times n_{T_1})_{dB}$  sur les lieux de  $\sigma_{max}[T_{1,2}(j\omega)]$  en haute fréquence.

Le choix des trois matrices de pondération  $W_{S_{1,2}}$ ,  $W_{R_{1,2}}$  et  $W_{T_{1,2}}$  données par les équations (3.1), (3.2) et (3.3), respectivement, n'est pas uniques [54-56]. Cependant, il peut être tiré, en effet, à partir de la forme souhaitée des trois matrices de sensibilité, à savoir :  $S_{1,2}$ ,  $K_{1,2} \cdot S_{1,2}$  et  $T_{1,2}$ . Dans la section suivante, on propose des règles générales qui procurent la sélection optimale et systématique des trois pondérations citées précédemment où le problème de la détermination simultanée des paramètres optimaux des deux contrôleurs fractionnaires robustifiés ainsi que ceux des pondérations rationnelles ajustables correspondantes est effectuée à partir de la solution optimale d'un nouveau problème d'optimisation que l'on abordera dans la suite de ce travail.

### 3.2. Règles d'ajustement des pondérations rationnelles

Les différentes règles de réglage qui permettent la sélection optimale et systématique des trois pondérations rationnelles  $W_{S_{1,2}}$ ,  $W_{R_{1,2}}$  et  $W_{T_{1,2}}$  sont les suivantes :

**Règle1 :**

En générale, pour améliorer la robustesse des  $PN_0$  du CFP, on doit diminuer, au maximum possible, le paramètre  $M_{S_0}$ . En revanche, la diminution de celui-ci plus que nécessaire peut détériorer la marge de la  $SR_0$ . De plus, cette marge de robustesse peut être améliorée si on diminue, autant que possible, le paramètre  $M_{T_0}$ . En revanche, la diminution de ce paramètre plus que nécessaire peut dégrader la robustesse sur les  $PN_0$  [17, 18]. Pour pallier à ces inconvénients, les trois paramètres désirés  $M_{S_{1;2}}$ ,  $M_{R_{1;2}}$  et  $M_{T_{1;2}}$  sont optimisés de tels sorte que les contraintes de bornes ci-dessous sont satisfaisantes [53]:

$$\begin{cases} \delta_{M_{S_0}} \cdot M_{S_0} < M_{S_{1;2}} \leq M_{S_0} : 0 < \delta_{M_{S_0}} \ll 1 \\ \delta_{M_{R_0}} \cdot M_{R_0} < M_{R_{1;2}} \leq M_{R_0} : 0 < \delta_{M_{R_0}} \ll 1 \\ \delta_{M_{T_0}} \cdot M_{T_0} < M_{T_{1;2}} \leq M_{T_0} : 0 < \delta_{M_{T_0}} \ll 1 \end{cases} \quad (3.4)$$

**Règle2 :**

La règle générale pour améliorer les marges de robustesse des  $PN_0$  et de  $SR_0$ , est d'augmenter les ordres fractionnaires  $n_{S_{1;2}}$  et  $n_{T_{1;2}}$  respectivement. Cependant, l'augmentation de ceux-ci plus que nécessaire peut produire la violation des conditions de robustesse sur la stabilité robuste et/ou les performances nominales. Notant ici que, la descente de la pente de  $\sigma_{max}[S_{1;2}(j\omega)]$  en basse fréquences est inversement proportionnelle à celle de la pente de  $\sigma_{max}[T_{1;2}(j\omega)]$  et  $\sigma_{max}[K_{1;2}(j\omega) \cdot S_{1;2}(j\omega)]$  en haute fréquences. A cet effet, les ordres non entier  $n_{S_{1;2}}$ ,  $n_{R_{1;2}}$  et  $n_{T_{1;2}}$  doivent satisfaire les contraintes de bornes ci-après [53] :

$$\begin{cases} n_{S_0} < n_{S_{1;2}} \leq \delta_{M_{S_0}} \cdot n_{S_0} : \delta_{n_{S_0}} > 1 \\ n_{R_0} < n_{R_{1;2}} \leq \delta_{n_{R_0}} \cdot n_{R_0} : \delta_{n_{R_0}} > 1 \\ n_{T_0} < n_{T_{1;2}} \leq \delta_{n_{T_0}} \cdot n_{T_0} : \delta_{n_{T_0}} > 1 \end{cases} \quad (3.5)$$

De l'équation (3.5), les trois pondérations rationnelles ajustables  $W_{S_{1;2}}$ ,  $W_{R_{1;2}}$  et  $W_{T_{1;2}}$  doivent assurer, respectivement, les pentes :  $(-20 \cdot n_{S_1})_{dB}$ ,  $(-20 \cdot n_{R_1})_{dB}$  et  $(-20 \cdot n_{T_1})_{dB}$ . Par conséquent, un algorithme d'optimisation s'avère indispensable pour satisfaire l'identité donnée par l'équation (1.37).

**Règle3 :**

Lorsque l'objectif de contrôle est de réduire l'effet de bruits de mesure, la règle générale est de réduire, autant que possible, la pulsation  $\omega_{BT_0}^*$ . Cependant, la diminution de celle-ci plus



que nécessaire provoque une réduction de la bande passante du système, ce qui se traduit par un mauvais rendement de suivi de performances.

**Règle4 :**

Lorsque l'objectif de contrôle est d'améliorer la marge de robustesse sur les  $PN_\theta$ , la règle générale est de maintenir les lieux de  $\sigma_{max}[S_{1,2}(j\omega, x_{c_0})]$  constants autant que possible en haute fréquences. Ce but est atteint en augmentant la pulsation  $\omega_{B_0}^*$ . Cependant, l'augmentation de cette fréquence plus que nécessaire détériore la marge de sécurité de la robustesse sur la  $SR_\theta$  en haute fréquences. Pour éviter cette anomalie, les trois pulsations  $\omega_{B_{1,2}}^*$ ,  $\omega_{BR_{1,2}}^*$  et  $\omega_{BT_{1,2}}^*$  sont optimisées de telle façon que le système des inégalités ci-dessous est satisfaisant [53]:

$$\begin{cases} \omega_{B_0}^* \leq \omega_{B_{1,2}}^* < \delta \omega_{B_0}^* : \delta \omega_{B_0}^* > 1 \\ \delta \omega_{BR_0}^* \cdot \omega_{BR_0}^* < \omega_{BR_{1,2}}^* \leq \omega_{BR_0}^* : 0 < \delta \omega_{BR_0}^* \leq 1 \\ \delta \omega_{BT_0}^* \cdot \omega_{BT_0}^* < \omega_{BT_{1,2}}^* \leq \omega_{BT_0}^* : 0 < \delta \omega_{BT_0}^* \leq 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

Selon les équations (3.4), (3.5) et (3.6), les paramètres optimaux définissant les trois pondérations rationnelles précédentes sont regroupés dans le vecteur  $x_{W_{1,2}} \in \mathbb{R}^{9m}$  comme suit :

$$x_{W_{1,2}} = \left[ \underbrace{\underbrace{M_{S_{1,2}}^1, n_{S_{1,2}}^1, \omega_{B_{1,2}}^*}_{W_{S_{1,2}}^1}, \underbrace{M_{R_{1,2}}^1, n_{R_{1,2}}^1, \omega_{R_{1,2}}^*}_{W_{R_{1,2}}^1}, \underbrace{M_{T_{1,2}}^1, n_{T_{1,2}}^1, \omega_{T_{1,2}}^*}_{W_{T_{1,2}}^1}}_{x_{W_{1,2}}^1} \dots \underbrace{\underbrace{M_{S_{1,2}}^m, n_{S_{1,2}}^m, \omega_{B_{1,2}}^*}_{W_{S_{1,2}}^m}, \underbrace{M_{R_{1,2}}^m, n_{R_{1,2}}^m, \omega_{R_{1,2}}^*}_{W_{R_{1,2}}^m}, \underbrace{M_{T_{1,2}}^m, n_{T_{1,2}}^m, \omega_{T_{1,2}}^*}_{W_{T_{1,2}}^m}}_{x_{W_{1,2}}^m} \right]^T \quad (3.7)$$

dans lequel les limites inférieure et supérieure sont respectivement choisies comme suit:

$$\begin{cases} \delta_{M_{S_0}} \cdot M_{S_0} \leq M_{S_{1,2}} \leq M_{S_0} : 0 < \delta_{M_{S_0}} \ll 1 \\ n_{S_0} \leq n_{S_{1,2}} \leq \delta_{n_{S_0}} \cdot n_{S_0} : 1 < \delta_{n_{S_0}} \\ \omega_{B_0}^* \leq \omega_{B_{1,2}}^* \leq \delta_{\omega_{B_0}^*} \cdot \omega_{B_0}^* : 1 < \delta_{\omega_{B_0}^*} \\ \delta_{M_{R_0}} \cdot M_{R_0} \leq M_{R_{1,2}} \leq M_{R_0} : 0 < \delta_{M_{R_0}} \ll 1 \\ n_{R_0} \leq n_{R_{1,2}} \leq \delta_{n_{R_0}} \cdot n_{R_0} : 1 < \delta_{n_{R_0}} \\ \delta_{\omega_{BR_0}^*} \cdot \omega_{BR_0}^* \leq \omega_{BR_{1,2}}^* \leq \omega_{BR_0}^* : 0 < \delta_{\omega_{BR_0}^*} \ll 1 \\ \delta_{M_{T_0}} \cdot M_{T_0} \leq M_{T_{1,2}} \leq M_{T_0} : 0 < \delta_{M_{T_0}} \ll 1 \\ n_{T_0} \leq n_{T_{1,2}} \leq \delta_{n_{T_0}} \cdot n_{T_0} : 1 < \delta_{n_{T_0}} \\ \delta_{\omega_{BT_0}^*} \cdot \omega_{BT_0}^* \leq \omega_{BT_{1,2}}^* \leq \omega_{BT_0}^* : 0 < \delta_{\omega_{BT_0}^*} \ll 1 \end{cases} \quad (3.8)$$

### 3.3. Comparaison entre les pondérations rationnelles et irrationnelles

Selon les règles générales suggérées précédemment, les lieux des valeurs singulières maximales des transferts irrationnels définissant les pondérations désirées sont présentés comme suit [53]:

#### 3.3.1. Comparaison entre $\sigma_{max}[W_{S_0}^{-1}(j\omega)]$ et $\sigma_{max}[W_{S_{1;2}}^{-1}(j\omega)]$

La Fig.3.1 présente la comparaison entre les lieux de  $\sigma_{max}[W_{S_0}^{-1}(j\omega)]$  et de  $\sigma_{max}[W_{S_{1;2}}^{-1}(j\omega)]$  dans le plan fréquentiel, on obtient donc :

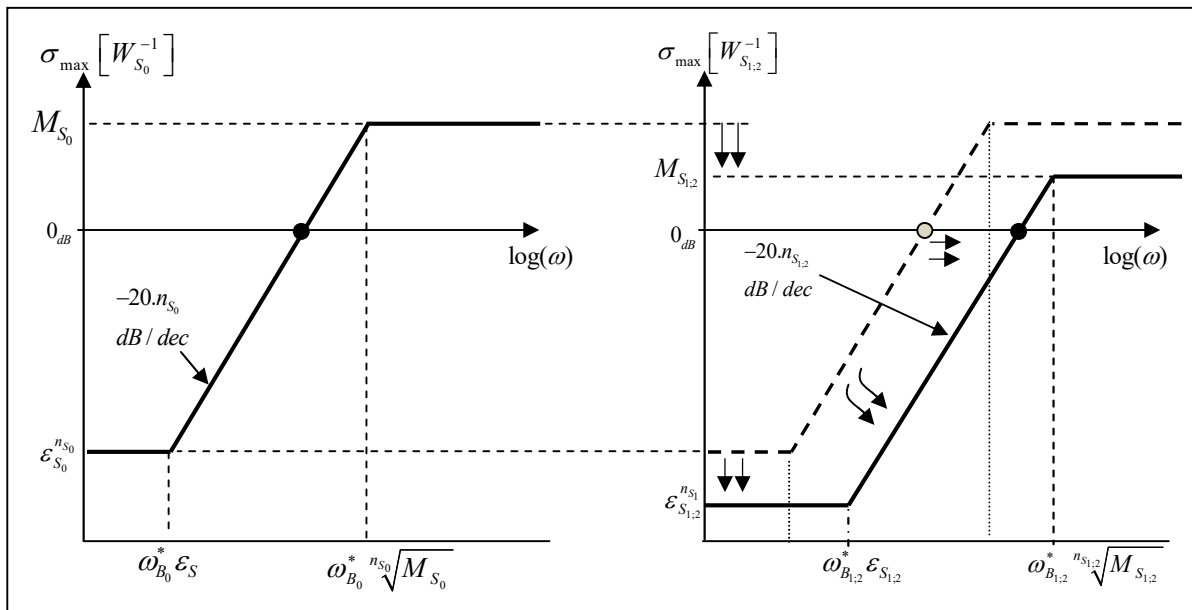


Fig.3.1. Comparaison entre les lieux de  $\sigma_{max}[W_{S_0}^{-1}(j\omega)]$  et de  $\sigma_{max}[W_{S_{1;2}}^{-1}(j\omega)]$

#### 3.3.2. Comparaison entre $\sigma_{max}[W_{R_0}^{-1}(j\omega)]$ et $\sigma_{max}[W_{R_{1;2}}^{-1}(j\omega)]$

La Fig.3.2 présente la comparaison entre les lieux de  $\sigma_{max}[W_{R_0}^{-1}(j\omega)]$  et de  $\sigma_{max}[W_{R_{1;2}}^{-1}(j\omega)]$  dans le plan fréquentiel, on obtient donc :

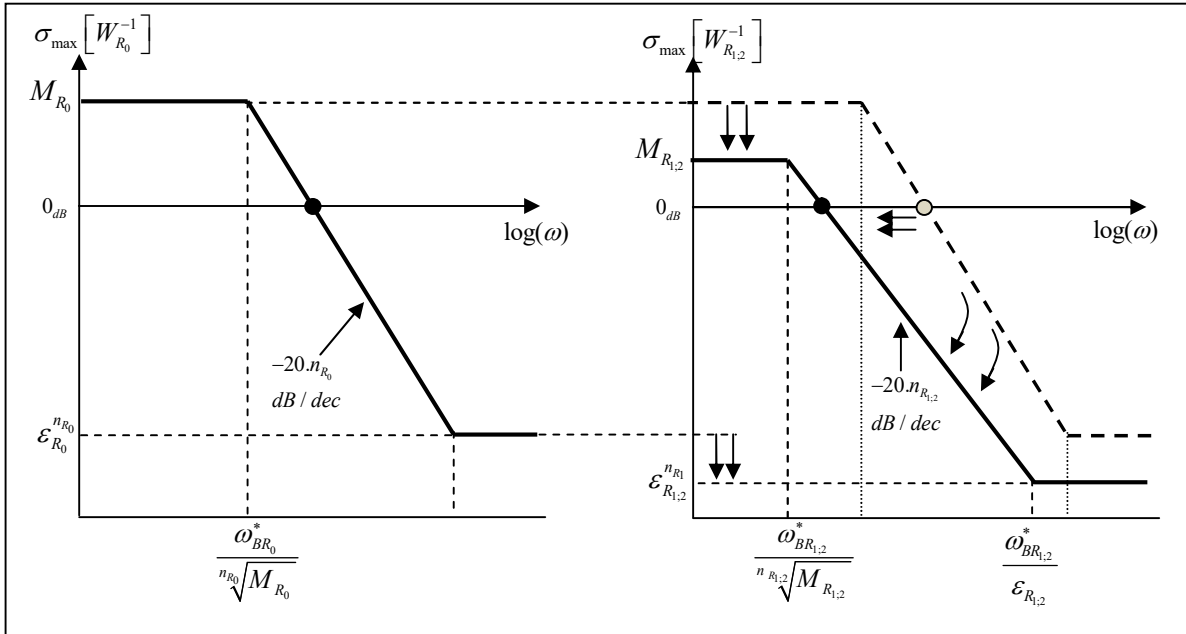


Fig.3.2. Comparaison entre les courbes de  $\sigma_{max}[W_{R_0}^{-1}(j\omega)]$  et  $\sigma_{max}[W_{R_{1,2}}^{-1}(j\omega)]$

### 3.3.3. Comparaison entre $\sigma_{max}[W_{T_0}^{-1}(j\omega)]$ et $\sigma_{max}[W_{T_{1,2}}^{-1}(j\omega)]$

La Fig.3.3 présente la comparaison entre les lieux de  $\sigma_{max}[W_{T_0}^{-1}(j\omega)]$  et de  $\sigma_{max}[W_{T_{1,2}}^{-1}(j\omega)]$  dans le plan fréquentiel, on obtient donc :

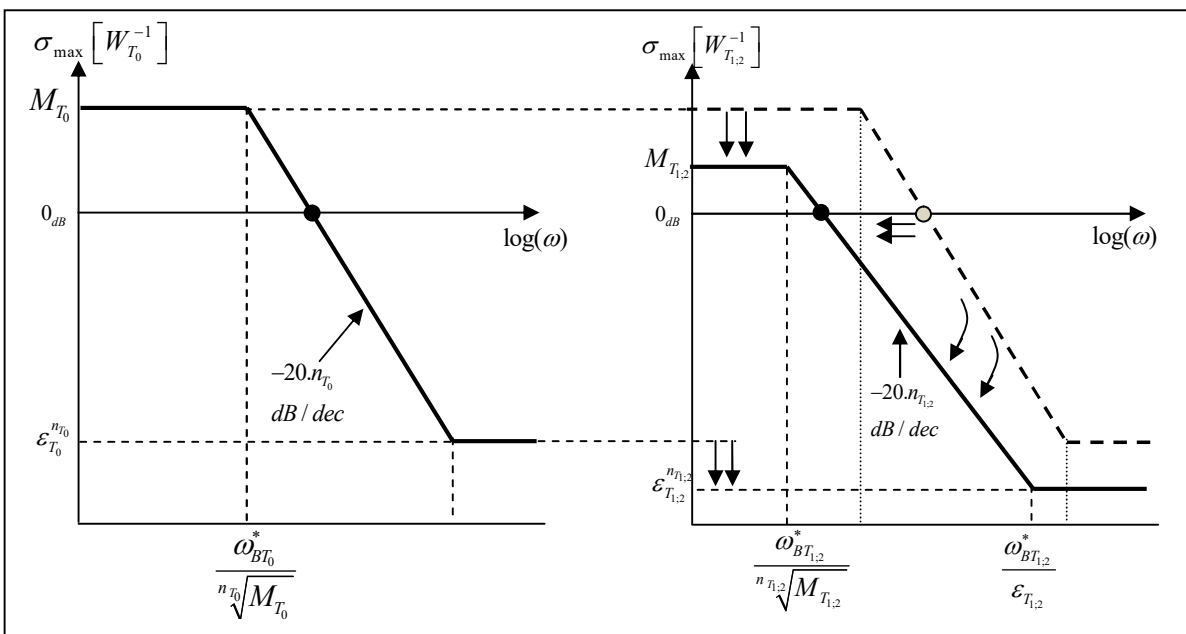


Fig.3.3. Comparaison entre les courbes de  $\sigma_{max}[W_{T_0}^{-1}(j\omega)]$  et  $\sigma_{max}[W_{T_{1,2}}^{-1}(j\omega)]$ .

### 3.4. Problème de sensibilité mixte généralisé basé sur le $CFR_I$

Dans cette partie, la détermination des paramètres optimaux du contrôleur fractionnaire robustifié  $CFR_I$  ainsi que ceux des transferts rationnels ajustables correspondants est obtenu par la résolution itérative d'un autre problème de sensibilité mixte généralisé dans lequel le nouveau vecteur à optimiser est celui donné par :

$$x_{c_1} \in \mathbb{R}^{m(5m+9)} = [x_{c_0}, x_{W_1}] = [x_{c_0} | x_{W_1}^1 | \dots | x_{W_1}^m]^T \quad (3.9)$$

Sachant que  $x_{c_0}$  est le vecteur donné, dans le chapitre précédent, par l'équation (2.77) comme suit :

$$x_{c_0} \in \mathbb{R}^{5m^2} = [K_{P_{11}}, \dots, K_{P_{mm}} | K_{I_{11}}, \dots, K_{I_{mm}} | K_{D_{11}}, \dots, K_{D_{mm}} | \mu_{11}, \dots, \mu_{mm} | \lambda_{11}, \dots, \lambda_{mm}]^T$$

Le nouveau problème de sensibilité mixte généralisée utilisant les trois pondérations rationnelles ajustables précédentes est formulé comme suit [3-7] :

$$\left\| \begin{array}{c} W_{S_1}(s, x_{c_1}) \cdot S_1(s, x_{c_1}) \\ W_{R_1}(s, x_{c_1}) \cdot K(s, x_{c_1}) \cdot S_1(s, x_{c_1}) \\ W_{T_1}(s, x_{c_1}) \cdot T_1(s, x_{c_1}) \end{array} \right\|_{\infty} < \gamma_1 \quad (3.10)$$

Où  $\gamma_1$  étant le niveau désiré des performances à atteindre par l'algorithme *Min-Max*.

#### 3.4.1. Solution du problème par la fonction *Fminimax*

Dans le but de résoudre le problème précédent par l'algorithme disponible dans la fonction *Fminimax* du Matlab, l'inégalité donnée par l'équation (3.10) est reformulée sous la forme suivante:

$$\min_{x_{c_{1min}} \leq x_{c_1} \leq x_{c_{1max}}} \left( \max_{\omega \in \{\Omega_P \cup \Omega_Q\}} \left\{ \sigma_{max} \left[ \begin{array}{c} W_{S_1}(j\omega, x_{c_1}) \cdot S_1(j\omega, x_{c_1}) \\ W_{R_1}(j\omega, x_{c_1}) \cdot K(j\omega, x_{c_1}) \cdot S_1(j\omega, x_{c_1}) \\ W_{T_1}(j\omega, x_{c_1}) \cdot T_1(j\omega, x_{c_1}) \end{array} \right] \right\} \right) \quad (3.11)$$

De l'équation (3.11), l'ensemble des contraintes de bornes limitant la solution optimale  $x_{c_1}^*$  est celui donné par les limites inférieures et supérieures ci-dessous :

$$x_{c_{1min}} \leq x_{c_1} \leq x_{c_{1max}} \quad (3.12)$$

Sachant que le vecteur  $x_{c_0}$  est limité par les contraintes de bornes  $x_{c_{0min}} \leq x_{c_0} \leq x_{c_{0max}}$  et que le vecteur  $x_{w_0}$  est limité par les contraintes de bornes  $x_{w_{0min}} \leq x_{w_0} \leq x_{w_{0max}}$

### **Remarque 3.1**

*La mesure du compromis de robustesse entre les PN et la SR dépend fortement, dans le domaine fréquentiel, par la satisfaction d'un niveau maximal des règles de réglage suggérées précédemment ainsi que les spécifications fréquentielles imposées par un tel cahier de charges. Toutefois, cela dépend aussi, dans le domaine temporel, par l'amélioration simultanée des performances temporelles, telles que : i) la bonne dynamique de poursuite des trajectoires de références qui doit assurer un temps de montée rapide, une erreur statique très réduite, un dépassement faible en régime transitoire, ...etc. ii) la rejection des perturbations qui doit être assurée dans une plage du temps très courte. iii) l'insensibilité des signaux de commandes aux effets des bruits de mesure.*

Dans certaines applications industrielles où le processus à commander nécessite un modèle incertain d'ordre très élevé, l'efficacité de cette stratégie de commande dépend étroitement de la qualité de convergence de l'algorithme utilisé par la fonction *Fminimax* du *Matlab*. Notant ici, que l'introduction de l'ordre fractionnaire dans le problème de sensibilité mixte généralisée augmente considérablement son espace de recherche avec lequel sa solution peut être piégée par des minima locaux ce qui produit des convergences indésirables pour certains problèmes d'optimisation d'ordre élevé. C'est pour cette raison qu'on doit faire recours à d'autres structures du contrôleur permettant de réduire la taille de l'espace de recherche du problème d'optimisation. Pour atteindre cet objectif, nous allons proposer une autre structure fractale inspirée de la structure du *PID* cascade pluridimensionnel avec laquelle le nouveau problème de sensibilité mixte généralisée est déroulé par un nombre des inconnus très réduit ce qui peut améliorer la qualité de convergence de l'algorithme d'optimisation utilisé de façon considérable. Notant ici que la structure fractale proposée peut diminuer l'espace de recherche du problème original de  $\mathbb{R}^{m(5m+9)}$  jusqu'à  $\mathbb{R}^{m(2m+1)+1}$  ce qui représente la clé de succès de notre proposition.

### **3.5. Problème de sensibilité mixte généralisée basée sur le *CFR*<sub>2</sub>**

La structure fractale proposée, pour cette partie de ce travail, est celle donnée par la forme cascade de trois gains suivants : le gain proportionnel, intégral d'ordre non entier et le gain de dérivée non entière. On aura donc le transfert suivant [13-15]:

$$K_1(s, x_{c_2}) = \underbrace{K_1 \cdot G_N^{-1}(0)}_{K_p(0, x_{c_2})} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{s^{\lambda_{11}}} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{s^{\lambda_{mm}}} \end{bmatrix}}_{K_i(s, x_{c_2})} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 + \beta_{11} \cdot s^{\mu_{11}} & \beta_{12} \cdot s^{\mu_{12}} & \dots & \beta_{1m} \cdot s^{\mu_{1m}} \\ \beta_{21} \cdot s^{\mu_{21}} & 1 + \beta_{22} \cdot s^{\mu_{22}} & \dots & \beta_{2m} \cdot s^{\mu_{2m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} \cdot s^{\mu_{m1}} & \beta_{m2} \cdot s^{\mu_{m2}} & \dots & 1 + \beta_{mm} \cdot s^{\mu_{mm}} \end{bmatrix}}_{K_d(s, x_{c_2})} \quad (3.13)$$

De l'équation (3.13), le formalisme unifié de la structure fractale proposée est donné par :

$$K_1(s, x_{c_2}) = K_p(0, x_{c_2}) \cdot K_i(s, x_{c_2}) \cdot K_d(s, x_{c_2}) \quad (3.14)$$

Dans lequel on peut distinguer les trois actions suivantes :

#### a. Action proportionnelle du $CFR_2$

La matrice réelle définissant le gain proportionnel du contrôleur robustifié est définie comme suit :

$$K_p(0, x_{c_2}) = K_1 \cdot G_N^{-1}(0) \quad (3.15)$$

Avec :

- $K_1 \in \mathbb{R}$ : est un paramètre utilisé pour ajuster la bande passante des lieux des valeurs singulières maximales des deux matrices de sensibilité directe et de sensibilité complémentaire. Ce paramètre qui est déterminé par l'algorithme d'optimisation *Min-Max* doit satisfaire la contrainte de borne suivante :

$$K_{1_{min}} < K_1 < K_{1_{max}} \quad (3.16)$$

Où  $K_{1_{min}}$  et  $K_{1_{max}}$  sont des limites fixées a priori par l'utilisateur.

- $G_N^{-1}(0) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  : est une matrice réelle non singulière dont ses éléments sont déterminés via l'inversion de la matrice des gains statiques du modèle de synthèse. Cette matrice présente un rôle important dans le transfert du contrôleur fractionnaire, elle découple, d'un côté, les sorties du système bouclé en régime stationnaire. D'un autre côté, elle peut réduire les valeurs singulières de la matrice sensibilité directe du système bouclé. Notant ici, que la détermination de  $G_N^{-1}(0)$  pour un transfert non carré est effectuée par le pseudo inverse suivant [13, 14] :

$$G_N^{-1}(0) = [G_N^T(0) \cdot G_N(0)]^{-1} \cdot G_N^T(0) \quad (3.17)$$

### b. Action intégrale du $CFR_2$

Le transfert définissant l'action intégrale d'ordre non entier du contrôleur fractionnaire robustifié est celui donné par :

$$K_i(s, x_{c_2}) \in \mathbb{C}^{m \times m} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{\lambda_{11}}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^{\lambda_{22}}} & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{s^{\lambda_{mm}}} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Ce transfert est introduit dans la structure fractale proposée afin d'éliminer toute erreur statique commise dans chaque voie du système bouclé. De plus, les termes d'ordre entier  $\lambda_{ii} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  sont obtenus par l'algorithme d'optimisation *Min-Max*, en satisfaisant les contraintes de bornes ci-dessous :

$$\begin{cases} \lambda_{11_{min}} < \lambda_{11} < \lambda_{11_{max}} \\ \vdots \\ \lambda_{mm_{min}} < \lambda_{mm} < \lambda_{mm_{max}} \end{cases} \quad (3.19)$$

Notant ici que, si l'ordre non entier  $\lambda_{ii}$  est compris entre deux valeurs entières  $n_{ii}$  et  $n_{ii} + 1$  avec  $n_{ii} \in \mathbb{N}^*$ . Dans ce cas, l'ordre fractionnaire précédent doit être décomposé en deux termes, à savoir :  $n_{ii}$  et  $\gamma_{\lambda_{ii}}$  avec  $0 < \gamma_{\lambda_{ii}} < 1$  et  $\lambda_{ii} = n_{ii} + \gamma_{\lambda_{ii}}$ . Dans ce cas, on peut voir la présence d'un intégrateur d'ordre entier donné par le terme  $s^{-n_{\lambda_{ii}}}$  et d'autre intégrateur d'ordre non entier présenté par le terme  $s^{-\gamma_{\lambda_{ii}}}$ .

### c. Action dérivée du $CFR_2$

Le transfert définissant l'action dérivée non entière du contrôleur fractionnaire robustifié est celui donné par [13-15]:

$$K_d(s, x_{c_2}) \in \mathbb{C}^{m \times m} = \begin{bmatrix} 1 + \beta_{11} \cdot s^{\mu_{11}} & \beta_{12} \cdot s^{\mu_{12}} & \dots & \beta_{1m} \cdot s^{\mu_{1m}} \\ \beta_{21} \cdot s^{\mu_{21}} & 1 + \beta_{22} \cdot s^{\mu_{22}} & \dots & \beta_{2m} \cdot s^{\mu_{2m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} \cdot s^{\mu_{m1}} & \beta_{m2} \cdot s^{\mu_{m2}} & \dots & 1 + \beta_{mm} \cdot s^{\mu_{mm}} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Où chaque transfert rationnel  $K_{d_{ij}}(s, x_{c_2})$  comportant deux paramètres à optimiser. Le premier paramètre représente l'ordre fractal  $\mu_{ij} \in \mathbb{R}^+$  de la dérivée fractionnaire, tandis que le second paramètre représente sa constante de temps donnée par  $\beta_{ij} \in \mathbb{R}^+$ . De plus, les

valeurs optimales de ces deux paramètres doivent satisfaire les deux ensembles des contraintes de bornes ci-dessous :

$$\begin{cases} \mu_{11_{min}} < \mu_{11} < \mu_{11_{max}} \\ \vdots \\ \mu_{mm_{min}} < \mu_{mm} < \mu_{mm_{max}} \end{cases}, \text{ et } \begin{cases} \beta_{11_{min}} < \beta_{11} < \beta_{11_{max}} \\ \vdots \\ \beta_{mm_{min}} < \beta_{mm} < \beta_{mm_{max}} \end{cases} \quad (3.21)$$

Dans l'objectif d'assurer la causalité du contrôleur fractionnaire robustifié, le choix de l'ordre fractionnaire de son terme intégral doit être supérieur ou égal à celui de sa dérivée fractionnaire et cela dans chaque voie du système bouclé.

### 3.5.1. Reformulation du problème de sensibilité mixte généralisée basée sur le $CFR_2$

Selon les équations (3.16), (3.19) et (3.21), le vecteur des paramètres de décision qu'on a présenté ici par  $x_{c_2}$  sera déterminé par la minimisation d'un critère multi-objectives, en utilisant toujours la méthode d'optimisation *Min-Max*. Ce vecteur est défini comme suit :

$$x_{c_2} \in \mathbb{R}^{m(2m+1)+1} = \left( K_1 \left| \underbrace{\lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{mm}}_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \right| \left| \underbrace{\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{mm}}_{\beta \in \mathbb{R}^{m^2}} \right| \left| \underbrace{\mu_{11}, \mu_{12}, \dots, \mu_{mm}}_{\mu \in \mathbb{R}^{m^2}} \right| \right)^T \quad (3.22)$$

Dans le cas de la robustification du contrôleur fractionnaire primaire, le vecteur précédent doit être augmenté par celui définissant les paramètres optimaux des pondérations rationnelles ajustables. On aura donc :

$$x_{c_2}^* = [x_{c_2}, x_{W_2}] = \left[ K_1 \left| \underbrace{\lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{mm}}_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \right| \left| \underbrace{\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{mm}}_{\beta \in \mathbb{R}^{m^2}} \right| \left| \underbrace{\mu_{11}, \mu_{12}, \dots, \mu_{mm}}_{\mu \in \mathbb{R}^{m^2}} \right| \left| x_{W_2}^1 \right| \dots \left| x_{W_2}^m \right| \right]^T \quad (3.23)$$

Par ailleurs, le problème de synthèse du  $CFR_2$  est exposé comme suit : étant donné le niveau de performances à atteindre  $\gamma_2$ , cherchons un contrôleur fractionnaire robustifiant le contrôleur fractionnaire primaire et satisfaisant les règles de réglages suggérées précédemment qui assurent la sélection optimale des pondérations rationnelles ajustables. Ce contrôleur doit remplir l'inégalité suivante [57-59] :

$$\left\| \begin{array}{c} W_{S_2}(s, x_{c_2}^*) S_2(s, x_{c_2}^*) \\ W_{R_2}(s, x_{c_2}^*) K_2(s, x_{c_2}^*) S_1(s, x_{c_2}^*) \\ W_{T_2}(s, x_{c_2}^*) T_2(s, x_{c_2}^*) \end{array} \right\|_{\infty} < \gamma_2 \quad (3.24)$$



Notant ici que, l'implémentation de cette nouvelle structure proposée nécessite, à priori, l'application de l'une des méthodes d'approximation citées dans le chapitre précédent. En revanche, l'approximation séparée de l'opérateur d'intégré-différentiel peut augmenter considérablement l'ordre du transfert irrationnel qui estime le contrôleur fractionnaire. Pour résoudre ce problème, nous proposons d'autres méthodes d'approximation avec lesquelles le bloc du transfert fractionnaire est rapproché par un transfert irrationnel d'ordre très réduit.

L'idée principale de ces méthodes proposées est basée sur l'interpolation fréquentielle du transfert fractionnaire en utilisant les approches d'identifications disponibles dans la littérature.

### 3.5.2. Méthodes d'approximation du $CFR_2$

#### 3.5.2.1. Identification fréquentielle utilisant la fonction de *Hartley*

Cette fonction est disponible dans la bibliothèque *ninteger* qui est librement accessible. Elle est basée sur l'algorithme développé par Hartley et Lorenzo (2003) avec lequel le modèle fourni peut être rationnel ou irrationnel selon le choix de l'utilisateur. Le modèle peut être décrit comme suit [60]:

$$\tilde{K}_{2ij}(s) = \frac{1}{c_n s^{nQ} + c_{n-1} s^{(n-1)Q} + \dots + c_2 s^{2Q} + c_1 s^Q + c_0} \quad (3.25)$$

#### 3.5.2.2. Identification fréquentielle utilisant la fonction de *Levy*

Cette fonction trouve un modèle rationnel ou irrationnel pour un système à partir de son comportement en fréquence  $K_{2ij}(j\omega)$ , en utilisant une variante de la méthode d'identification fréquentielle de *Levy*. Le modèle résultant est de la forme [61]:

$$\tilde{K}_{2ij}(s) = \frac{b_m s^{mQ} + b_{m-1} s^{(m-1)Q} + b_{m-2} s^{(m-2)Q} + \dots + b_1 s^Q + b_0}{a_n s^{nQ} + a_{n-1} s^{(n-1)Q} + a_{n-2} s^{(n-2)Q} + \dots + a_1 s^Q + 1} \quad (3.26)$$

De l'équation (3.26), les paramètres optimaux de  $\tilde{K}_{2ij}(s)$  doivent minimiser la norme  $\mathcal{H}_2$  de l'erreur de modélisation ci-dessous:

$$E = K_{2ij}(j\omega)[a_n(j\omega)^{nQ} + \dots + a_1(j\omega)^Q + 1] - [b_m(j\omega)^{mQ} + \dots + b_1(j\omega)^Q + b_0] \quad (3.27)$$

### 3.5.2.3. Identification fréquentielle utilisant la fonction de *Vinagre*

Le principe de cette méthode est basé sur l'identification par la fonction de *Levy*. Seulement les paramètres optimaux de  $\tilde{K}_{2ij}(s)$  doivent minimiser la norme  $\mathcal{H}_2$  de l'erreur de modélisation pondérée par le vecteur  $v$  comme suit [61]:

$$E' = v^T \cdot \left\{ K_{2ij}(j\omega) [a_n(j\omega)^{nQ} + \dots + a_1(j\omega)^Q + 1] - [b_m(j\omega)^{mQ} + \dots + b_1(j\omega)^Q + b_0] \right\} \quad (3.28)$$

Les composants de ce vecteur dépendent des pulsations  $\omega_i$ , sachant que  $i = \overline{1; 2; \dots; f}$ . On obtient donc :

$$v_i = \begin{cases} \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_1^2} & \text{si } i = 1 \\ \frac{\omega_{i+1} - \omega_{i-1}}{2\omega_i^2} & \text{si } 1 < i < f \\ \frac{\omega_f - \omega_{f-1}}{2\omega_f^2} & \text{si } = f \end{cases} \quad (3.29)$$

Les pondérations sont destinées à améliorer la qualité de l'approximation pour les basses fréquences.

### 3.5.2.4. Identification fréquentielle utilisant la fonction *fitfrd*

En général, la méthode d'identification fréquentielle est la plus souvent utilisée pour approximer un bloc de transfert d'ordre non entier dont sa réponse fréquentielle est proche en module et en phase de celle du transfert irrationnelle originale. Le principe de cette méthode consiste par l'évaluation du transfert fractionnaire  $K_{2ij}(\omega)$  dans les fréquences  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots$  qui doivent être réparties de façon logarithmique sur la bande fréquentielle  $[\omega_b, \omega_h]$ . Cette évaluation est effectuée par la commande *frd* du *Matlab*. Ensuite, les données d'entrée/sortie fournies par cette commande sont exploitées par la commande *fitfrd* en ressortissant une représentation d'état d'ordre entier qui modélise le transfert  $K_{2ij}(s)$ . L'ordre optimal de celle-ci est ensuite ajusté par l'utilisateur afin d'aboutir une erreur de modélisation  $\xi_m$  très réduite satisfaisant la condition suivante :

$$\left\| \tilde{K}_{2ij}(j\omega) - K_{2ij}(j\omega) \right\|_2 \leq \xi_m \quad (3.30)$$

Comparativement aux méthodes d'approximations suscitées, la méthode basée sur la fonction *fitfrd* procure une bonne minimisation de l'écart entre le transfert rationnel et celui d'ordre entier. C'est pour cette raison qu'on l'a adoptée pour la suite de ce travail.

### 3.6. Etude en Simulation

Durant cette étude en simulation, le contrôleur fractionnaire robustifié est appliqué pour la commande du même procédé thermique *HVAC*. L'algorithme de *Min-Max* fourni par la fonction *Fminimax* du Matlab est utilisé pour produire les paramètres optimaux de ce contrôleur ainsi que ceux des pondérations rationnelles ajustables correspondantes. En effet, deux structures sont proposées pour robustifier le contrôleur fractionnaire primaire, à savoir : *CFR* basé sur la structure du *PID* fractionnaire et celui basé sur la nouvelle structure fractale suggérée.

Notant ici que le transfert du contrôleur fractionnaire primaire (à robustifier) est décrit comme suit :

$$K_0(s, x_{c_0}^*) = \begin{bmatrix} -74.74 - 0.677s^{-1} - 69.448s^{0.39} & -9.551 + 1.593s^{-0.78} - 9.61s^{0.26} \\ 0.223 + 2.939s^{-0.53} - 4.247s^{0.01} & -55.049 + -2.576s^{-0.88} - 51.943s^{0.38} \end{bmatrix}.$$

L'amélioration des performances du système bouclé par le *CFP* est effectuée par la robustification utilisant les données ci-dessous :

- Choix des contraintes de bornes qui limitent la solution  $x_{c_1}^*$  et  $x_{c_2}^*$  :
- ✓ Pour les paramètres des deux contrôleurs  $CFR_1$  et  $CFR_2$ , on a :
 
$$CFR_1: \begin{cases} -\infty \leq K_{Pij} \leq +\infty \\ -\infty \leq K_{Iij} \leq +\infty \\ -\infty \leq K_{Dij} \leq +\infty \\ 0 < \mu_{ij} < 1 \\ 0 < \lambda_{ij} < 1 \end{cases} \quad CFR_2: \begin{cases} 0 < K_1 \leq +\infty \\ 0 < \lambda_{ij} < 1 \\ 0 \leq \beta_{ij} \leq +\infty \\ 0 < \mu_{ij} < 1 \end{cases}$$
- ✓ Pour la pondération rationnelle ajustable  $W_{S_{1,2}}(j\omega, x_{c_{1,2}})$ , on a :
 
$$\begin{cases} 2 \leq M_{S_{1,2}} \leq 4 \\ 1 \leq n_{S_{1,2}} \leq 1.3 \\ 0.025 \leq \omega_{B_{1,2}} \leq 0.035 \end{cases}$$
- ✓ La pondération  $W_{R_{1,2}}(j\omega, x_{c_{1,2}})$  est considérée comme étant fixe.
- ✓ Pour la pondération rationnelle ajustable  $W_{T_{1,2}}(j\omega, x_{c_{1,2}})$ , on a :
 
$$\begin{cases} 20 \leq M_{T_{1,2}} \leq 100 \\ 1 \leq n_{T_{1,2}} \leq 1.3 \\ 0.5 \leq \omega_{BT_{1,2}} \leq 1 \end{cases}$$
- Autres contraintes disponibles dans la fonction *Fminimax* :
 
$$\begin{cases} A_{eq} = [ \quad ], B_{eq} = [ \quad ] \\ A_{ineq} = [ \quad ], B_{ineq} = [ \quad ] \\ Nonlin = [ \quad ] \end{cases}$$
- Initialisation de l'algorithme *Min-Max* :

$$x_{c_{10}} = \left[ x_{c_0}^* \left| \begin{array}{c} M_{S_0} \quad n_{S_0} \quad \omega_{B_0}^* \\ \hline W_{S_0} \end{array} \right| \begin{array}{c} M_{T_0} \quad n_{T_0} \quad \omega_{BT_0}^* \\ \hline W_{T_0} \end{array} \right]^T = \left[ x_{c_0}^* \left| \begin{array}{c} 4 \quad 1 \quad 0.025 \\ \hline W_{S_0} \end{array} \right| \begin{array}{c} 100 \quad 1 \quad 1 \\ \hline W_{T_0} \end{array} \right]^T$$

- Formulation des critères multi-objectifs :

- ✓ Choix de la plage de fréquence :  $[\omega_{min}, \omega_{max}] = [10^{-4}, 10^4]$  radians/secondes.
- ✓ Nombre des fonctions à minimiser :  $\varphi = 100$
- ✓ Nombre maximal d'itération :  $\ell_{max} = 400$
- ✓ Précision de calcul :  $J_{min} = 10^{-6}$

La solution optimale fournie par l'algorithme *Min-Max* permet de déterminer le transfert du  $CFR_1$  comme suit :

$$K_1(s, x_{c_1}^*) = \begin{bmatrix} -31.978 - 0.834s^{-0.98} - 43.591.s^{0.09} & -9.946 + 11.516s^{-0.262} - 1.222.s^{0.103} \\ 15.845 + 0.491s^{-0.96} + 6.392.s^{0.121} & -34.831 - 0.617s^{-0.91} - 38.771.s^{0.011} \end{bmatrix}$$

et les deux pondérations rationnelles ajustables correspondantes :

$$\begin{aligned} \bullet W_{S_1}(s, x_{c_1}^*) &= \frac{1}{1.65 \times 10^{-4}} \left( \frac{1 + \frac{s}{0.0615}}{1 + \frac{s}{10^{-5}}} \right)^{1.112} \times I_{2 \times 2} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} M_{S_1} = 2.80 < M_{S_0} = 4 \\ n_{S_1} = 1.12 > n_{S_0} = 1 \\ \omega_{B_1}^* = 0.03 > \omega_{B_0}^* = 0.025 \end{cases} \\ \bullet W_{T_1}(s, x_{c_1}^*) &= \frac{1}{25.586} \left( \frac{1 + \frac{s}{7472}}{1 + \frac{s}{35.396}} \right)^{1.201} \times I_{2 \times 2} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} M_{T_1} = 25.697 < M_{T_0} = 100 \\ n_{T_1} = 1.201 > n_{T_0} = 1 \\ \omega_{BT_1}^* = 0.7472 < \omega_{BT_0}^* = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

La solution optimale fournie par l'algorithme *Min-Max* permet de déterminer le transfert du  $CFR_2$  comme suit :

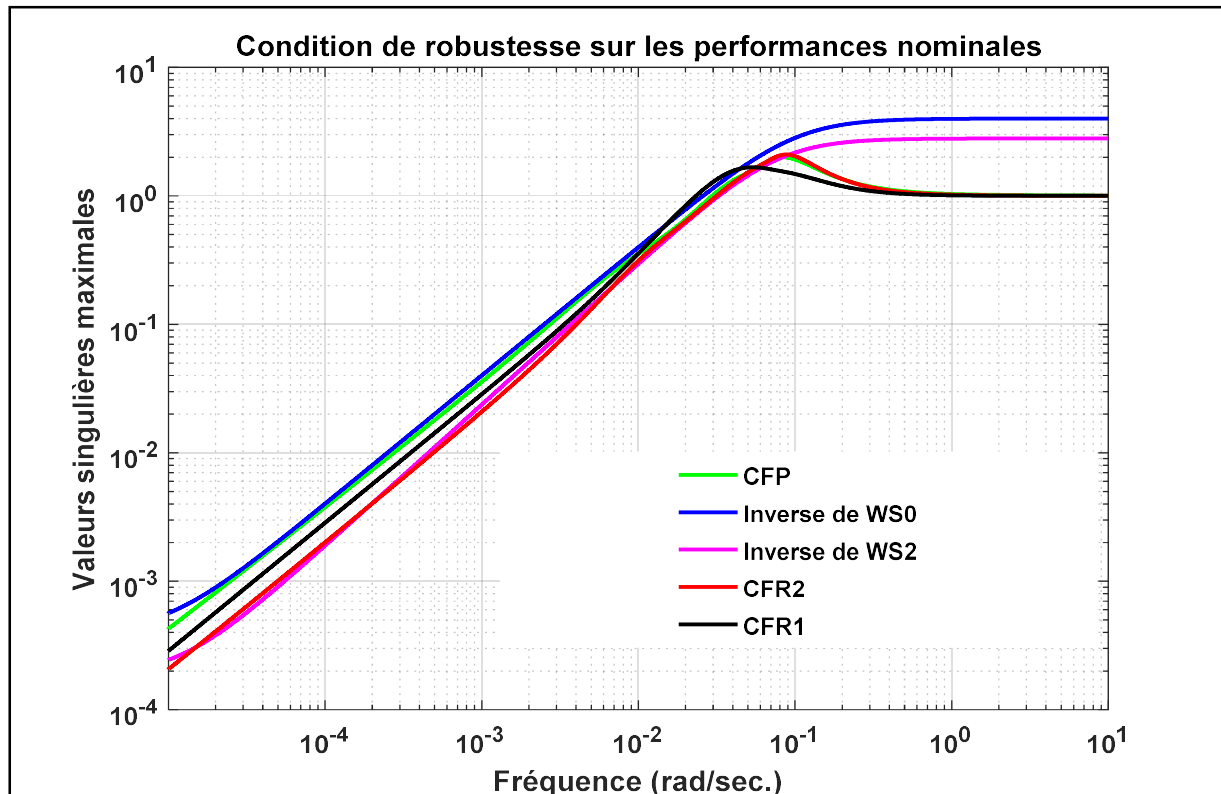
$$K_2(s, x_{c_2}^*) = 0.0357 \begin{bmatrix} -25.546 & 7.183 \\ 9.813 & -22.561 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{0.981}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^{0.991}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + 89.78.s^{0.993} & 0 \\ 0.8297s^{0.902} & 1 + 84.56.s^{0.905} \end{bmatrix}$$

et les deux nouvelles pondérations rationnelles ajustables correspondantes :

$$\begin{aligned} \bullet W_{S_2}(s, x_{c_2}^*) &= \frac{1}{1.446 \times 10^{-4}} \left( \frac{1 + \frac{s}{0.0735}}{1 + \frac{s}{0.016 \times 10^{-3}}} \right)^{1.13} \cdot I_{2 \times 2}, \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} M_{S_2} = 1.98 < M_{S_1} = 2.80 < M_{S_0} = 4 \\ n_{S_0} = 1 < n_{S_1} = 1.12 < n_{S_2} = 1.13 \\ \omega_{B_0}^* = 0.025 < \omega_{B_1}^* = 0.03 < \omega_{B_2}^* = 0.04 \end{cases} \\ \bullet W_{T_2}(s, x_{c_2}^*) &= \frac{1}{16.66} \left( \frac{1 + \frac{s}{7500}}{1 + \frac{s}{0.1078}} \right)^{1.45} \cdot I_{2 \times 2}, \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} M_{T_2} = 16.66 < M_{T_1} = 25.697 < M_{T_0} = 100 \\ n_{T_0} = 1 < n_{T_1} = 1.201 < n_{T_2} = 1.45 \\ \omega_{BT_1}^* = 0.7472 < \omega_{BT_2}^* = 0.750 < \omega_{BT_0}^* = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

A l'aide des trois matrices de transferts des trois contrôleurs, à savoir :  $CFP$ ,  $CFR_1$  et  $CFR_2$ , les caractéristiques fréquentielles du système bouclé peuvent être analysées par le tracé des lieux des valeurs singulières maximales des matrices de sensibilité directe et de sensibilité complémentaire afin de vérifier la satisfaction des deux conditions de robustesse sur la  $SR$  et les  $PN$ .

La **Fig.3.4** présente l'amélioration de la marge de robustesse sur les  $PN$  en utilisant la robustification basée sur les deux structures fractales citées précédemment, on obtient :



**Fig.3.4.** Satisfaction de la nouvelle condition sur les  $PN$  par les deux contrôleurs robustifiés

D'après la **Fig.3.4**, on peut observer l'amélioration de la marge de robustesse sur la  $PN$  du système bouclé par les deux contrôleurs fractionnaires robustifiés dont la meilleure marge est celle fournie par le  $CFR_2$ . Maintenant, pour l'amélioration de la marge de robustesses sur les  $PN$ , la **Fig.3.5** présente l'amélioration de la marge de robustesse sur la  $SR$  en utilisant la robustification basée sur les deux structures fractales citées précédemment, on obtient :

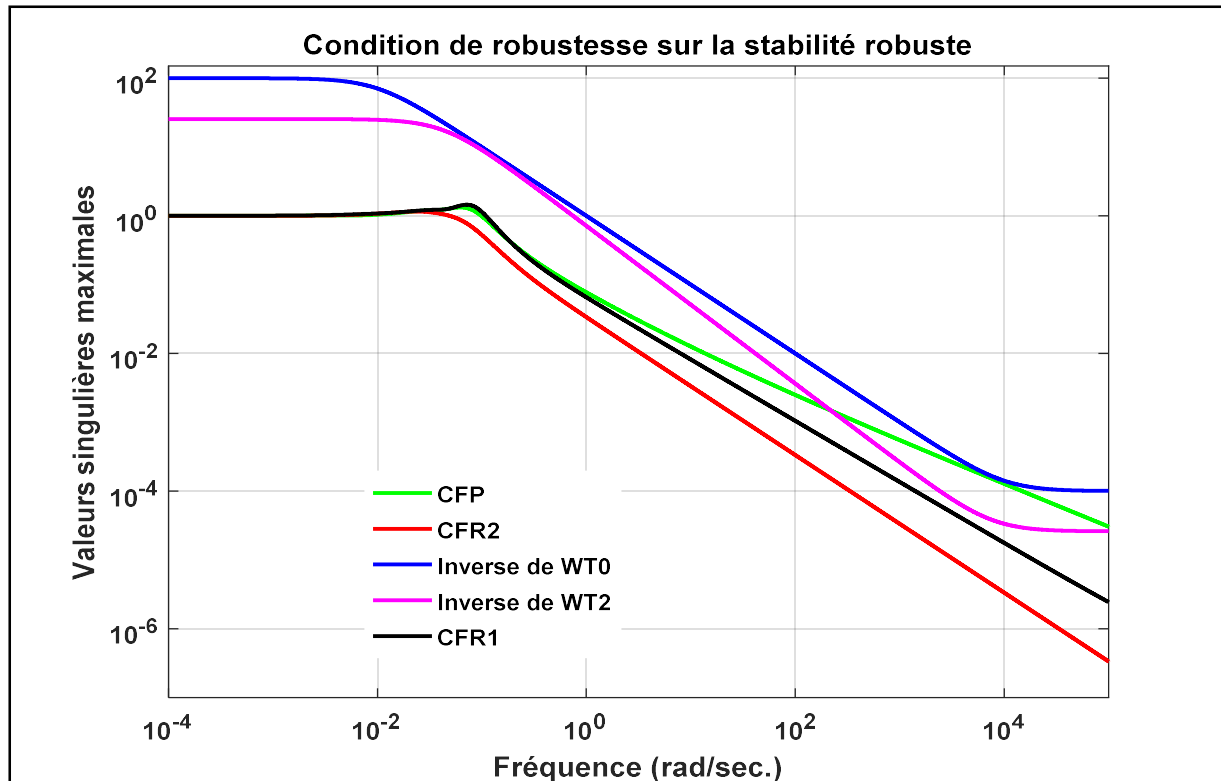


Fig.3.5. Amélioration de la marge de robustesse sur la SR par les deux contrôleurs robustifiés

D'après la Fig.3.5, on peut observer nettement l'amélioration de la marge de robustesse sur les SR du système bouclé par les deux contrôleurs fractionnaires robustifiés dont la meilleure marge est celle fournie par le  $CFR_2$ . En revanche, cette robustesse est assurée par le  $CFR_1$  mais avec marge de sécurité très faible. Maintenant, pour les tracés des réponses temporelles du système bouclé par les trois contrôleurs précédents, les fonctions de transfert rationnelles du  $CFR_1$  sont approximées par celles fournies par la méthode d'Oustaloup dans laquelle on utilise les mêmes données d'approximation citées dans le chapitre précédent; on obtient donc :

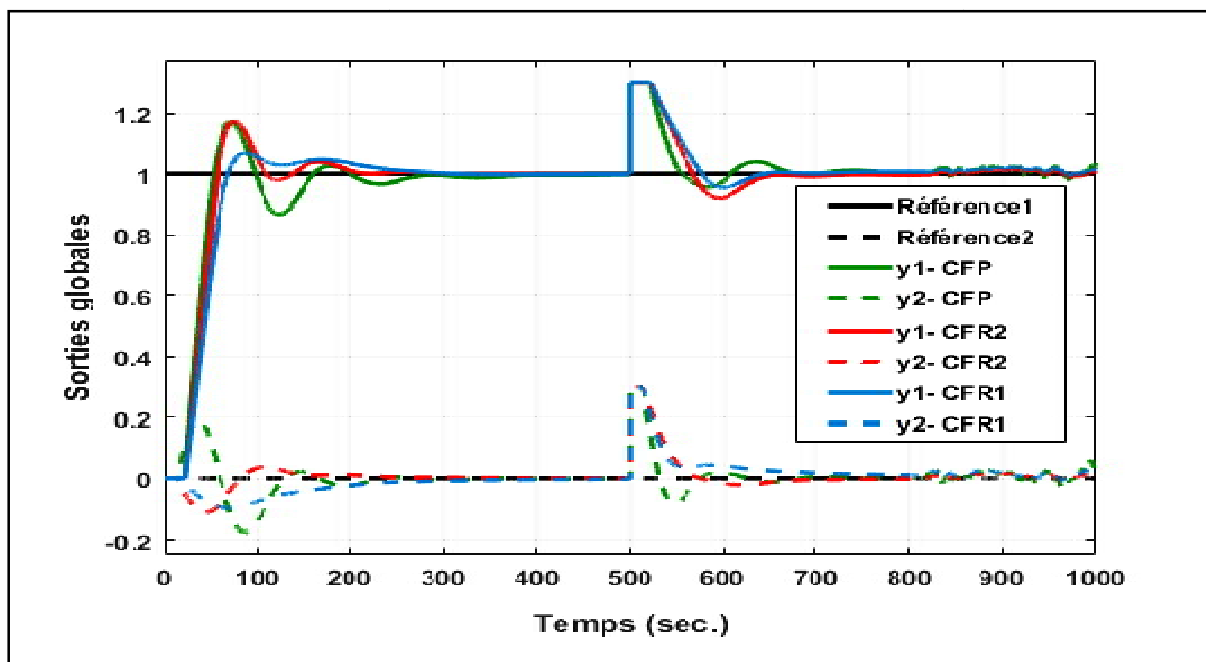
$$\tilde{K}_{CF\ 1} : \left\{ \begin{array}{l} \tilde{K}_{CF\ 111} = \frac{-3.307 \times 10^4 s^4 - 4.124 \times 10^9 s^3 - 6.689 \times 10^{11} s^2 - 3.418 \times 10^{12} s - 1.624 \times 10^{10}}{s^4 + 1.898 \times 10^6 s^3 + 1.902 \times 10^9 s^2 + 2.403 \times 10^{10} s - 630.4} \\ \tilde{K}_{CFR_{112}} = \frac{-558.2 s^4 - 3.503 \times 10^7 s^3 - 1.472 \times 10^9 s^2 + 1.283 \times 10^8 s + 4.337 \times 10^6}{s^4 + 5.573 \times 10^5 s^3 + 5.85 \times 10^7 s^2 + 2.524 \times 10^7 s + 164.8} \\ \tilde{K}_{CFR_{121}} = \frac{-4.002 s^4 - 203.8 s^3 - 117.4 s^2 + 99.89 s + 0.04071}{s^4 + 58.08 s^3 + 118.5 s^2 + 1.285 s + 2.49 \times 10^{-5}} \\ \tilde{K}_{CFR_{122}} = \frac{-2.097 s^4 - 2.434 \times 10^9 s^3 - 3.539 \times 10^{11} s^2 - 1.674 \times 10^{12} s - 1.303 \times 10^{10}}{s^4 + 1.749 \times 10^6 s^3 + 1.437 \times 10^9 s^2 + 1.602 \times 10^{10} s + 4.654 \times 10^4} \end{array} \right.$$

Par ailleurs, les fonctions de transfert rationnelles du  $CFR_2$  sont approximées par celles fournies par la méthode d'identification fréquentielle basée sur la fonction *Fitfrd* du *Matlab*. On obtient donc :

$$\tilde{K}_{CFR_2} : \left\{ \begin{array}{l} \tilde{K}_{CFR_{211}} = \frac{82.72 s^5 - 5.708 \times 10^5 s^4 - 4.666 \times 10^4 s^3 - 5.708 \times 10^7 s^2 - 5.299 \times 10^5 s + 435.9}{s^5 + 6969 s^4 + 509.4 s^3 + 6.971 \times 10^5 s^2 - 488.4 s - 6.798 \times 10^{-6}} \\ \tilde{K}_{CFR_{221}} = \frac{21.62 s^2 + 0.2605 s + 6.578 \times 10^{-5}}{s^2 + 0.0002601 s + 3.824 \times 10^{-12}} \\ \tilde{K}_{CFR_{221}} = \frac{31.19 s^2 + 5.42 \times 10^4 s + 602.5}{s^2 + 1756 s + 8.25 \times 10^{-5}} \\ \tilde{K}_{CFR_{222}} = \frac{-68.13 s^4 - 1365 s^3 - 2.044 \times 10^4 s^2 - 245.7 s - 0.05765}{s^4 + 20.02 s^3 + 299.8 s^2 + 0.07233 s + 1.055 \times 10^{-9}} \end{array} \right.$$

Tenant en compte l'application des mêmes entrées exogènes, citées dans les deux chapitres précédents, on obtient les sorties ainsi que les commandes globales comme suit :

La figure **Fig.3.6** présente les réponses temporelles du système bouclé fournies par *CFP*, *CFR<sub>1</sub>* et *CFR<sub>2</sub>*. De plus, les figures **Fig.3.7**, **Fig.3.8** et **Fig.3.9** présentent les commandes fournies par les trois contrôleurs *CFP*, *CFR<sub>1</sub>* et *CFR<sub>2</sub>* respectivement. Enfin, la figure **Fig.3.10** présente la comparaison des commandes fournies par les deux contrôleurs robustifiés *CFR<sub>1</sub>* et *CFR<sub>2</sub>*.



*Fig.3.6. Sorties globales du système bouclé fournies par les trois contrôleurs robustes précédents*

D'après la **Fig.3.6**, on peut remarquer que le contrôleur *CFR<sub>2</sub>* peut assurer un meilleur comportement de poursuite et d'interaction des signaux de références pour chaque voie du système bouclé. Ceci se traduit par l'obtention des sorties caractérisées par des meilleurs temps de réponses en régime transitoire ainsi que par des dépassements acceptables en régime

transitoire. De plus, ce contrôleur peut fournir des meilleures dynamiques de rejet de perturbations et suppression des effets causés par les entrées des bruits de mesures.

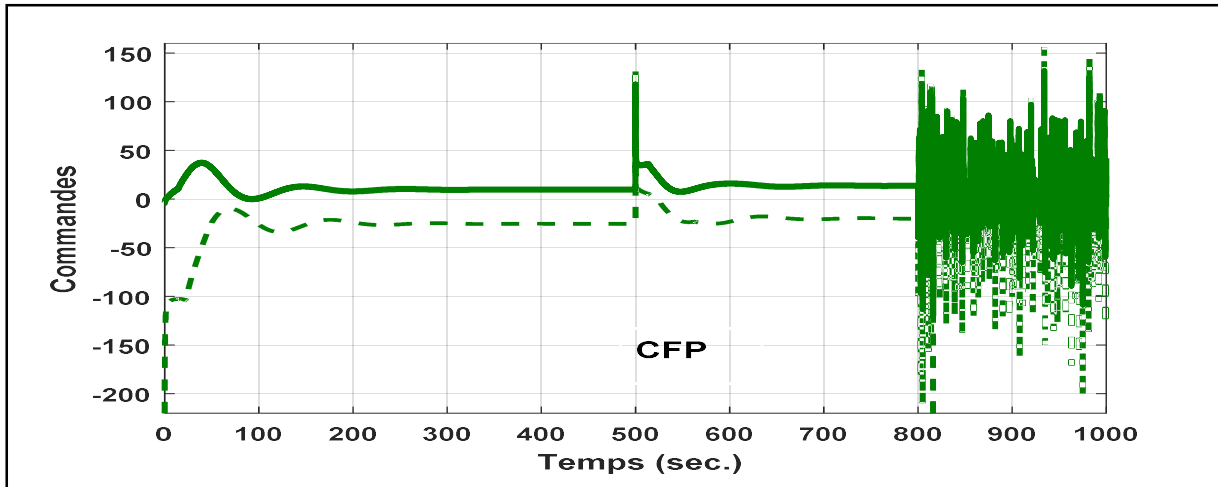


Fig.3.7. Commandes fournies par le CFP

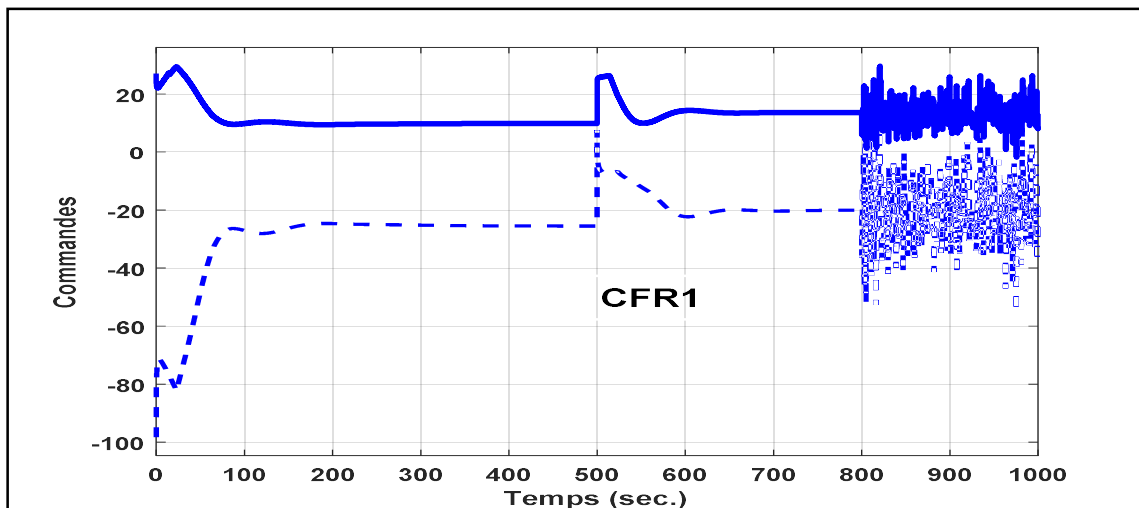


Fig.3.8. Commandes fournies par le CFR<sub>1</sub>

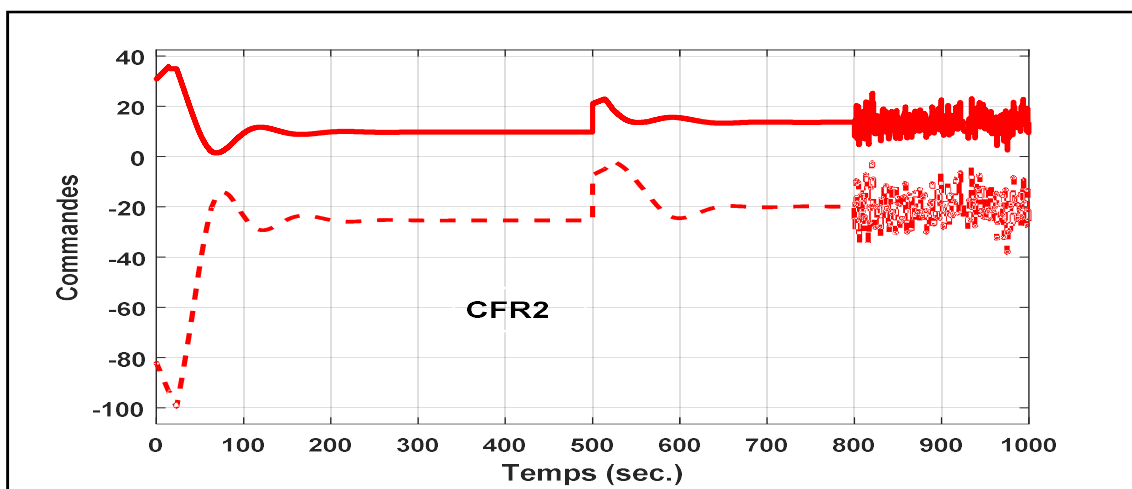


Fig.3.9. Commandes fournies par le CFR<sub>2</sub>



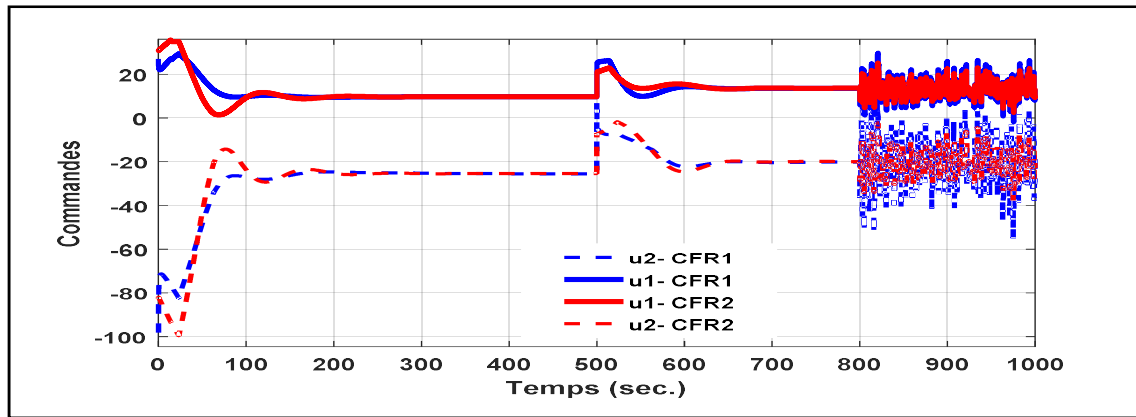


Fig.3.10. Comparaison des commandes fournies par  $CFR_1$  et  $CFR_2$

D'après les figures **Fig.3.7** jusqu'à **Fig.3.10**, on peut observer que le  $CFR_2$  a la capacité de fournir des commandes moins sensibles aux effets des bruits de mesures en régime stationnaire. Ces commandes deviennent moins fluctuantes en comparaison à celles obtenues par les deux contrôleurs  $CFP$  et  $CFR_1$ .

### 3.7. Conclusion

L'objectif de ce chapitre est d'introduire des pondérations rationnelles ajustables dans le problème de sensibilité mixte ce qui a permis d'améliorer considérablement le compromis de robustesse du système bouclé entre les  $PN$  et la  $SR$ . Cette robustification fournit les deux contrôleurs fractionnaires robustifiés, à savoir :  $CFR_1$  et  $CFR_2$ . Les paramètres optimaux de ces deux contrôleurs ainsi que ceux des pondérations rationnelles sont déterminés simultanément via la résolution d'un nouveau problème de sensibilité mixte dans lequel les spécifications imposées ainsi que les règles de réglage suggérées sont assurées par un algorithme d'optimisation *Min-Max*.

Les performances des deux stratégies de robustification qui sont basées sur les deux différentes structures fractales sont comparées dans les plans fréquentiel et temporel. Les résultats de simulation ont montré l'efficacité de la structure fractale suggérée ainsi que la méthode d'approximation proposée ce qui se traduit par l'amélioration explicite des deux marges de robustesse fournies par le contrôleur fractionnaire primaire. Enfin, la validation de cette robustification sur d'autres systèmes pluridimensionnels sera abordée dans le chapitre suivant.

***Chapitre 4 :***  
***Application sur***  
***système la MADA***

## 4. Introduction

Le développement durable et les énergies éoliennes suscitent aujourd'hui l'intérêt de plusieurs laboratoires de recherches et plusieurs pays industrialisés. Ainsi, le développement des éoliennes représente un grand investissement dans le domaine de la recherche technologique. En effet, de nombreux travaux de recherche sur le contrôle et la commande d'éoliennes ont été menés. Grâce à ces recherches, les dernières générations d'éoliennes fonctionnent à une vitesse variable avec une grande efficacité.

À présent, la plupart des éoliennes utilisent les génératrices asynchrones à double alimentation *GADA*. Cette génératrice permet une production d'électricité à vitesse variable. Elle donne l'occasion, alors, de mieux contrôler les ressources éoliennes pour différentes conditions de vent. Pour cette raison, nous devons utiliser un contrôleur robuste pour commander ce type de procédés. Pratiquement, la commande robuste de la *GADA* par l'approche  $\mathcal{H}_\infty LMI$  offre un contrôleur d'ordre très élevé chose qui peut compliquer son implémentation dans la boucle de commande. En effet, les signaux de commande d'une éolienne doivent être appliqués au niveau de sa partie électrique, ce qui nous a incités à chercher des structures d'un contrôleur simples et flexibles que celles synthétisées par la commande  $\mathcal{H}_\infty LMI$ .

L'objectif principal de ce chapitre est de valider le nouveau formalisme de notre approche proposée dans le chapitre 3 sur un système multi-variable incertain. A cet effet, nous avons mis en œuvre une loi de commande robuste appliquée à une Génératrice Asynchrone à Double Alimentation *GADA* montée sur une éolienne à vitesse variable.

### 4.1. Les systèmes éoliens

Ces dernières années, l'intérêt d'utilisation d'énergies renouvelables ne cesse d'augmenter, car l'être humain est de plus en plus concerné par les problèmes environnementaux. Parmi ces énergies, on trouve l'énergie éolienne. Les caractéristiques mécaniques de l'éolienne, l'efficacité de la conversion de l'énergie mécanique en énergie électrique est très importante. Là encore, de nombreux dispositifs existent et, pour la plupart, ils utilisent des machines synchrones ou asynchrones. Les stratégies de commande de ces machines et leurs éventuelles interfaces de connexion au réseau doivent permettre de capter

un maximum d'énergie sur une plage de variation de vitesse de vent la plus large possible, ceci dans le but d'améliorer la rentabilité des installations éoliennes [62].

#### 4.1.1. Principe de fonctionnement d'une éolienne

Pour convertir l'énergie disponible dans le vent en énergie électrique, les turbines éoliennes doivent être composées d'une partie mécanique et d'une partie électrique. La partie mécanique sert à capter l'énergie cinétique disponible dans le vent et à la transformer en énergie mécanique rotative. Cette dernière est transmise via un système d'entraînement, habituellement composé d'une boîte de vitesse, à une génératrice électrique. La conversion d'énergie mécanique en énergie électrique est effectuée via la génératrice électrique [63].

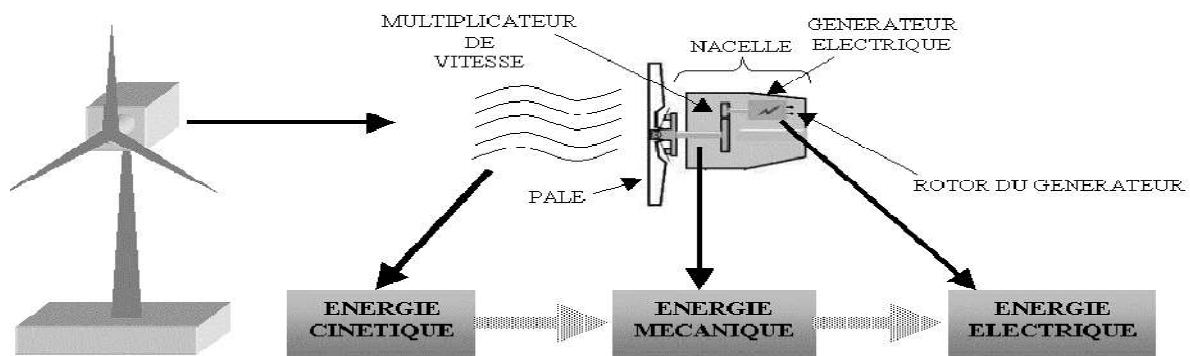


Fig. 4.1. Conversion de l'énergie cinétique du vent

## 4.2. Types d'aérogénérateurs

Du point de vue conception, les éoliennes peuvent être divisées en deux familles selon l'orientation de leur axe de rotation par rapport à la direction du vent. On note : les éoliennes à axe vertical *VAWT* et les éoliennes à axe horizontal *HAWT* [64, 65].

### 4.2.1. Aérogénérateurs à axe vertical *VAWT*

Les aérogénérateurs à axe vertical ont été les premières structures adoptées pour la production de l'énergie électrique. Plusieurs prototypes ont vu le jour mais peu sont ceux qui sont parvenu au stade de l'industrialisation [66].

L'axe de rotation d'une *VAWT* est vertical par rapport au sol et perpendiculaire à la direction du vent. Ce type de turbine peut recevoir le vent de n'importe quelle direction, ce qui rend inutile tout dispositif d'orientation. Le générateur et la boîte d'engrenages (multiplicateur) sont disposés au niveau du sol, ce qui est plus simple et donc économique

[67]. La maintenance du système est également simplifiée dans la mesure où elle se fait au sol. Ces turbines ne disposent pas de commande d'angle de pale comme dans le cas de *HAWT* (aérogénérateurs à axe horizontal). Ils sont classés selon leurs caractéristiques aérodynamiques en deux familles :

- Les aérogénérateurs conçus sur la base de la portance : Aérogénérateurs à rotor de Darrieus : conçu par l'ingénieur français *George Darrieus*.
- Les aérogénérateurs conçus sur la base de la traînée : Aérogénérateurs à rotor de *Savonius* : inventé par le finlandais *Sigvard Savonius* en 1924 [62].

#### ➤ Avantages et inconvénients des aérogénérateurs à axe vertical

Les avantages théoriques d'une éolienne à axe vertical sont les suivants :

- Permet de placer la génératrice, le multiplicateur, à terre (il n'y pas besoin de munir la machine d'une tour).
- Un mécanisme d'orientation n'est pas nécessaire pour orienter le rotor dans la direction du vent.

Les principaux inconvénients sont les suivants :

- ✓ Les vents sont plus faibles à proximité de la surface du sol.
- ✓ Un inconvénient, pour certaines VAWT, est de nécessiter un dispositif auxiliaire de démarrage.

#### 4.2.2. Aérogénérateurs à axe horizontal

L'éolienne à axe horizontale, également appelée *HAWT* (*Horizontal Axis Wind Turbine*) fonctionne globalement selon le même principe que les éoliennes à grandes capacités que l'on peut voir dans les parcs éoliens. Actuellement, ces turbines sont les plus utilisées dans la production des éoliennes comparativement à celles à axe vertical parce qu'elles sont caractérisées par un coût moins important, avec un bon rendement en plus elles sont moins exposées aux contraintes mécaniques [68]. Elles sont constituées de plusieurs pales (bipale, tripale...) pour générer un couple moteur entraînant la rotation de générateur électrique. Le nombre des pales varie entre 1 et 3, récemment le rotor tripale est le plus utilisé car il constitue un compromis entre le coefficient de puissance, la vitesse spécifique et la vitesse de rotation du capteur éolien [69].

### 4.3. La chaîne de transformation énergétique

La transformation de l'énergie du vent en énergie électrique se fait en plusieurs étapes, qui sont les suivantes :

#### 4.3.1. La transformation de l'énergie par les pales

Les pales fonctionnent sur le principe d'une aile d'avion. La différence de pression entre les deux faces de la pale crée une force aérodynamique, mettant en mouvement le rotor par la transformation de l'énergie cinétique du vent en énergie mécanique.

#### 4.3.2. L'accélération du mouvement de rotation grâce au multiplicateur

Les pales tournent à une vitesse relativement lente, de l'ordre de 5 à 15 tours par minute, d'autant plus lente que l'éolienne est grande. La plupart des générateurs ont besoin de tourner à très grande vitesse (de 1000 à 2000 tours par minute) pour produire de l'électricité. C'est pourquoi le mouvement lent du rotor est accéléré par un multiplicateur. Certains types d'éoliennes n'en sont pas équipés, leur générateur est alors beaucoup plus gros et beaucoup plus lourd.

#### 4.3.3. La production d'électricité par le générateur

L'énergie mécanique transmise par le multiplicateur est transformée en énergie électrique par le générateur. Le rotor du générateur tourne à grande vitesse et produit de l'électricité [69].

#### 4.3.4. Le traitement de l'électricité par le convertisseur et le transformateur

Cette électricité ne peut pas être utilisée directement ; elle est traitée grâce à un convertisseur, puis sa tension est augmentée à 20 000 Volts par un transformateur. L'électricité est alors acheminée à travers un câble enterré jusqu'à un poste de transformation, pour être injectée sur le réseau électrique, puis distribuée aux consommateurs les plus proches [69].

### 4.4. Topologies de génératrices éoliennes à vitesse variable

Les trois types de topologies indéniables pour des éoliennes à vitesses variables sont : la Machine Asynchrone *MAS* avec deux convertisseurs sont alors dimensionner pour la pleine

puissance avec un multiplicateur de vitesse (voir Fig.4.2), la Machine Asynchrone Double Alimentation *MADA* (voir Fig.4.3) et la Machine Synchrone *MS* avec et sans réducteur de vitesse représentée dans la Fig.4.4.

#### 4.4.1. Système utilisant une génératrice asynchrone

L'éolienne dans cette configuration entraîne une génératrice asynchrone connectée au réseau par l'intermédiaire d'un convertisseur de puissance situé sur le circuit statorique. Contrairement à une éolienne à vitesse fixe, les tensions et les fréquences à la sortie de la génératrice ne sont plus imposées par le réseau, ce qui permet de réguler la vitesse de l'éolienne. La commande de l'onduleur permet de garder constante la tension du bus continu

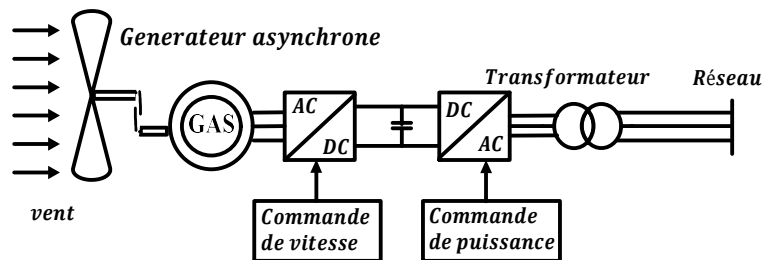


Fig. 4.2. Éolienne à vitesse variable basée sur une machine asynchrone

##### ➤ Avantages et inconvénients

- ✓ Puissance extraite optimisée pour les vents faibles et moyens.
- ✓ Électronique de puissance dimensionnée au moins à 100% de la puissance nominale.

#### 4.4.2. Système utilisant la génératrice asynchrone à double alimentation

La Machine Asynchrone Doublement Alimentée *MADA* a suscité un intérêt particulier surtout en tant que génératrice dans le domaine de l'énergie éolienne. En effet, à travers cette section la structure de cette machine, les différents modes de fonctionnement et les configurations les plus utilisés seront présentés. Pour les éoliennes utilisant la *MADA*, le stator de celle-ci est directement couplé au réseau alors que son rotor est connecté au réseau à travers une interface composée de deux convertisseurs statiques (convertisseur côté *MADA* et convertisseur côté réseau), voir Fig.4.3.

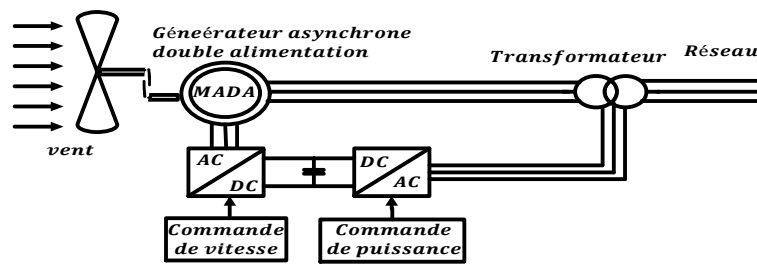
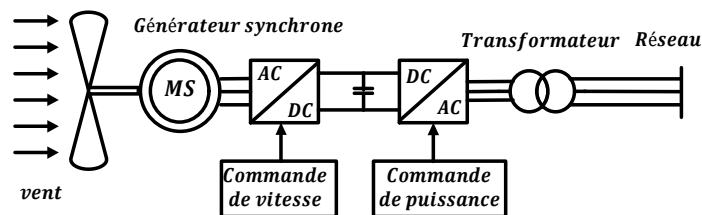


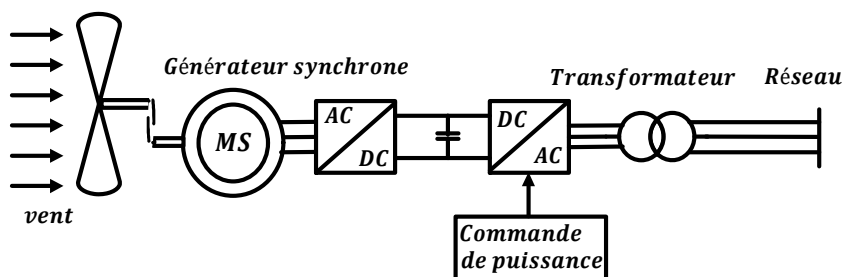
Fig.4.3. Éolienne à vitesse variable basée sur une MADA

#### 4.4.3. Système utilisant une génératrice synchrone

Dans le cas des entraînements directs (sans multiplicateur mécanique), on utilise des machines synchrones. Leurs performances, notamment en termes de couple massique, sont très intéressantes lorsqu'elles ont un très grand nombre de pôles. Leur fréquence étant alors incompatible avec celle du réseau, le convertisseur de fréquence s'impose naturellement. C'est pourquoi les machines à entraînement direct sont toutes à vitesse variable.



a. Éolienne à vitesse variable basée sur une machine synchrone directement couplée à la turbine



b. Éolienne à vitesse variable basée sur une machine synchrone couplée à la turbine via un multiplicateur et redresseur à diodes

Fig. 4.4. Éolienne à vitesse variable basée sur une machine synchrone

#### ➤ Avantages et inconvénients

- Puissance extraite optimisée pour les vents faibles et moyens.



- Absence de boîte de vitesse.
- Fonctionnement a vitesse variable sur toute la plage de vitesse.

## 4.5. Etat de l'art sur la machine asynchrone à double alimentation

### 4.5.1. Introduction

La littérature atteste du grand intérêt accordé à la machine asynchrone doublement alimentée. En tant que génératrice, dans le domaine des énergies renouvelables, la *MADA* présente bien des avantages : le convertisseur lié à l'armature rotorique pourra être, et sera, dimensionné au tiers de la puissance nominale du rotor, les pertes dans les semi-conducteurs sont faibles [22].

La double alimentation l'une des solutions associant le convertisseur statique et la machine pour obtenir des vitesses variables est la machine asynchrone double alimentée (machine à induction double alimentée), (de l'anglais, *DFIM* : *Doubly Fed Induction Machine*), où le stator est connecté au réseau (50 HZ) et le rotor est alimenté à travers un convertisseur de fréquence. Elle apparaît comme une solution intéressante. Le système est réversible en vitesse et en couple, dans tous les cas, les vitesses hypo-synchrones et hyper-synchrones sont possibles et le système peut être utilisé dans le fonctionnement moteur et générateur. Ces caractéristiques favorisent l'utilisation de cette machine dans les processus industriels spéciaux demandant une haute performance dynamique. Elle a été déjà utilisée en tant que génératrice pour les énergies renouvelables (**Fig.4.5**) ou en tant que moteur pour certaines applications industrielles comme le laminage, la traction ferroviaire ou encore la propulsion maritime (**Fig.4.6**).

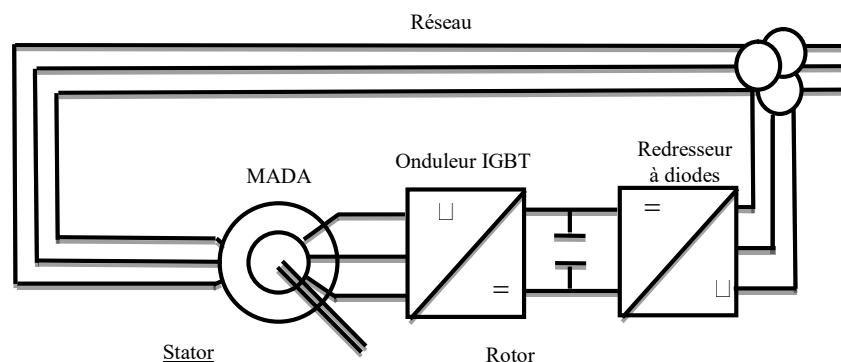


Fig. 4.5. Schéma de l'alimentation de la MADA pour une application génératrice

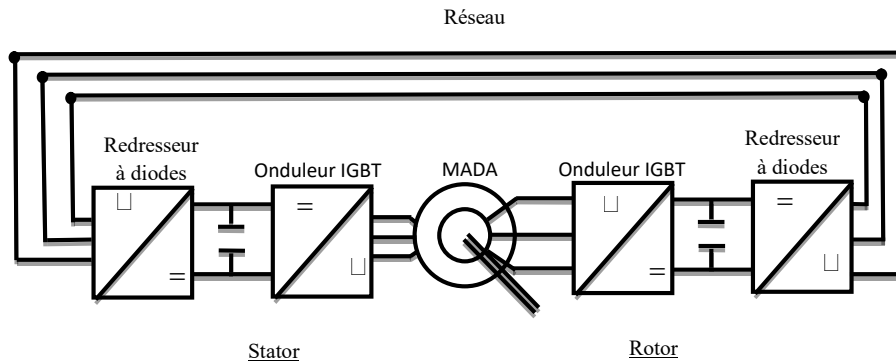


Fig.4.6. Schéma de l'alimentation de la MADA pour une application moteur

#### 4.5.2. Structure de la MADA

Elle possède un stator identique à celui d'une machine asynchrone classique ou d'une machine synchrone. La différence réside dans le rotor composé d'enroulements triphasés disposés de la même manière que les enroulements statoriques et connectés en étoile. Leurs extrémités sont reliées à des bagues conductrices sur lesquelles viennent frotter des balais (Fig.4.7), ce qui permet d'accéder aux grandeurs rotoriques [70].

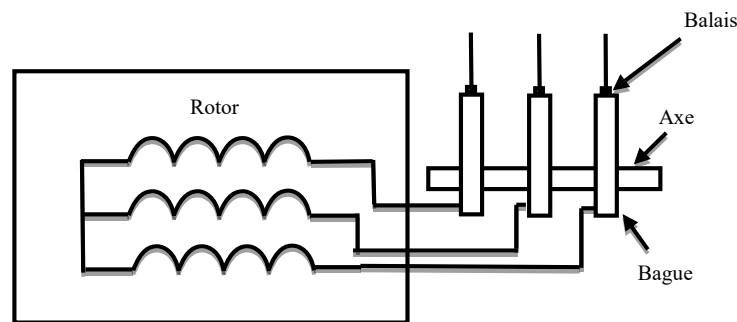


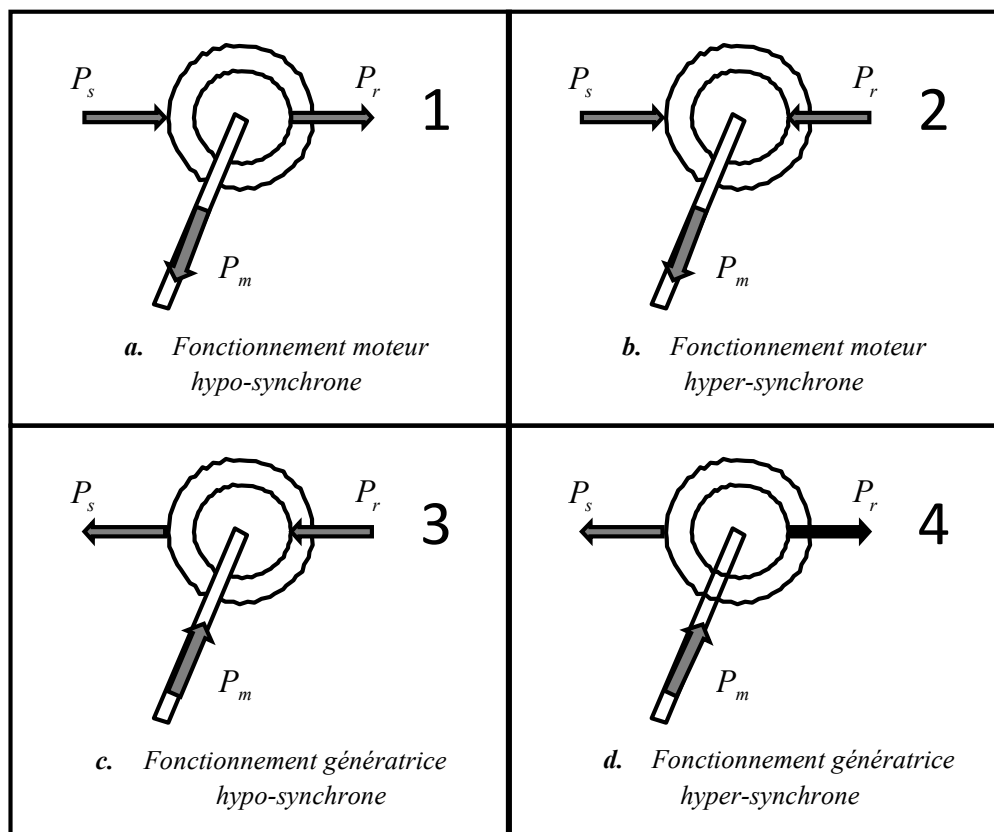
Fig. 4.7. Structure du rotor de la MADA.

#### 4.5.3. Modes de fonctionnement de la MADA

La machine asynchrone classique fonctionne en moteur en dessous de la vitesse de synchronisme et ne peut fonctionner en génératrice qu'au-dessus de celle-ci. Par contre, la MADA offre la possibilité de fonctionner dans les quatre quadrants. C'est-à-dire que ce n'est plus la vitesse de rotation qui définit le mode de fonctionnement en moteur ou en générateur.

Lors du fonctionnement de la MADA en moteur, la puissance  $P_s$  est fournie par le réseau au stator de cette dernière. Durant le mode hypo-synchrone (Fig.4.8.a), où la vitesse de rotation est inférieure à celle du synchronisme, la puissance de glissement  $P_r$  transite à travers les deux convertisseurs pour être réinjectée au réseau. Pendant le mode hyper-synchrone (Fig.4.8.b), le réseau fournit la puissance au stator et au rotor de la MADA. La

puissance de glissement transite par les deux convertisseurs pour être absorbée par le rotor de la *MADA* entraînant par ceci un fonctionnement du moteur au-dessus de la vitesse de synchronisme et le champ tournant induit par les enroulements rotoriques est alors en opposition de phase avec celui du stator. Les quadrants 3 et 4 sont intéressants pour une utilisation dans un système éolien. En effet, lorsque la *MADA* fonctionne en génératrice, la turbine fournit une puissance mécanique  $P_m$  à la machine. En mode hypo-synchrone (**Fig.4.8.c**), une partie de la puissance transitant par le stator est réabsorbée par le rotor. Par contre, en mode hyper-synchrone (**Fig.4.8.d**), la totalité de la puissance mécanique fournie à la machine est transmise au réseau aux pertes près. Une partie de cette puissance correspondant à  $\frac{s}{1-s}P_m$  est transmise par l'intermédiaire du rotor [70].



**Fig. 4.8.** Modes de fonctionnement de la MADA.

#### 4.5.4. Application de la machine asynchrone à double alimentation

Actuellement la machine asynchrone à double alimentation occupe une large place dans les applications industrielles, grâce à ces nombreux avantages. En effet, la *MADA* est très utilisée en mode générateur dans les applications d'énergie

renouvelable notamment dans les systèmes éoliens [71]. De plus, le fonctionnement en générateur présente la *MADA* comme une alternative sérieuse aux machines synchrones classiques dans de nombreux systèmes de production d'énergie décentralisée telles que [68] :

- Les générateurs des réseaux de bord des navires ou des avions ;
- Les centrales hydrauliques à débit et vitesse variable ;
- Les groupes électrogènes pour lesquels la réduction de vitesse pendant les périodes de faible consommation permet de réduire sensiblement la consommation de carburant.

La *MADA* peut être utilisée aussi dans d'autres applications importantes nécessitant un fort couple de démarrage, telles que [72] :

- La métallurgie avec les enrouleuses et les dérouleuses de bobines ;
- La traction, avec notamment des applications de type transport urbain ou propulsion maritime ;
- Et enfin, l'application de levage, les ascenseurs, les monte charges.

#### 4.5.5. Avantages et inconvénients de la *MADA*

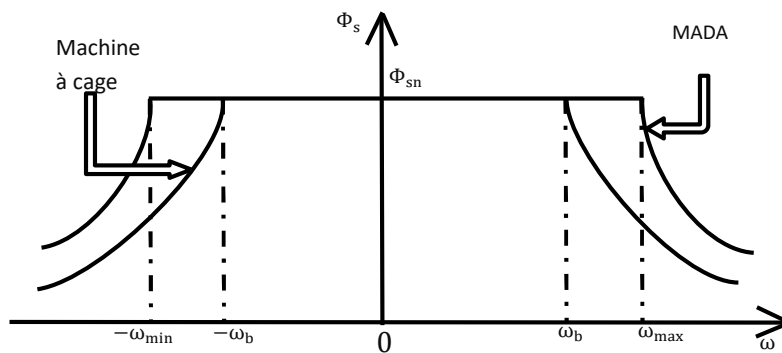
Dans ce paragraphe, on mentionne les avantages et les quelques inconvénients de la *MADA* lors de son fonctionnement à vitesse variable [22].

##### ➤ Avantages de la *MADA*

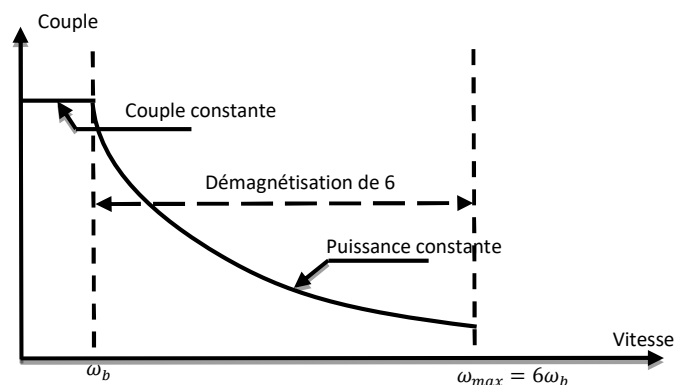
Parmi ses nombreux avantages, on cite :

- La mesure des courants au stator et rotor, contrairement à la machine à cage, donnant ainsi une plus grande flexibilité et précision au contrôle du flux et du couple électromagnétique.
- Le partage des fréquences entre le stator et le rotor : en effet, dans le cas d'une double alimentation, il est possible et recommandé de partager la fréquence de rotation du rotor entre les deux convertisseurs alimentant la machine, réduisant ainsi les pertes fer de la machine et augmentant son rendement. Une loi de répartition des fréquences est donnée dans [73, 74]. De plus, l'alimentation de la machine par deux onduleurs va nous permettre de travailler autour de l'arrêt à des fréquences relativement élevées évitant ainsi un déclassement des convertisseurs tout en maintenant un couple à l'arrêt. Cette même propriété nous assure un contrôle quasi insensible aux variations résistives de la machine.

- La solution avec deux convertisseurs alimentant la machine nous permet d'assurer un partage du courant magnétisant entre les deux armatures ainsi que la puissance mécanique fournie à la charge.
- La *MADA* présente une puissance massique légèrement plus élevée que les autres machines à grandes puissances.
- La possibilité de fonctionner à couple constant au-delà de la vitesse nominale.
- La *MADA* se comporte comme une machine synchrone et l'on peut pratiquer des rapports de démagnétisation très importants (de l'ordre de 1 à 6).
- Un fonctionnement en régime dégradé, si l'un des deux onduleurs tombe en panne, plus souple que la machine à simple alimentation.



*Fig. 4.9. Comparaison de Zone de fonctionnement en survitesse sans démagnétisation : machine à cage et MADA*



*Fig. 4.10. Représentation d'un fonctionnement avec démagnétisation d'une MADA.*

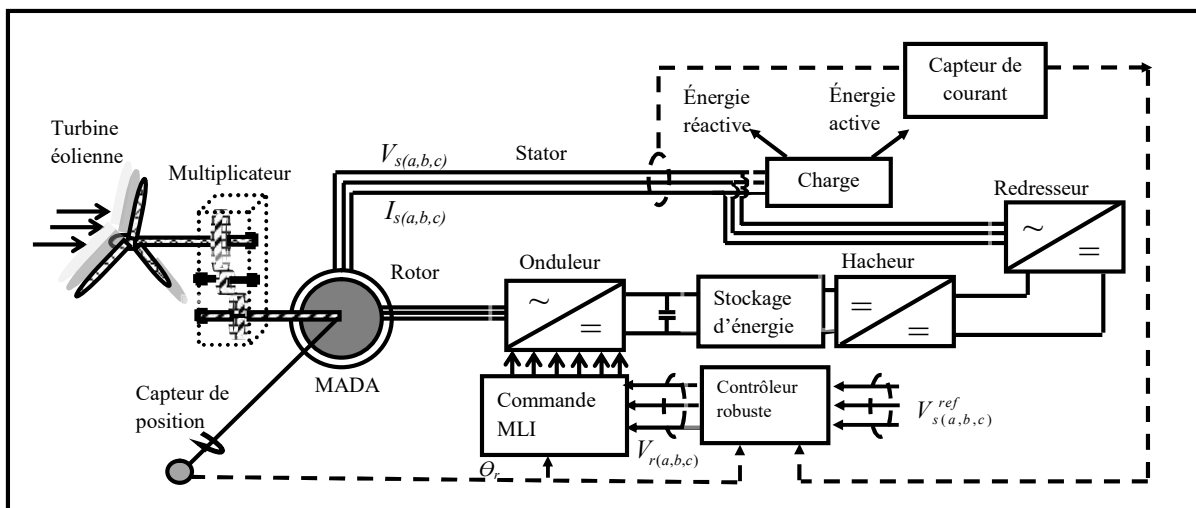
#### ➤ Inconvénients de la *MADA*

- Machine plus volumineuse que celle à cage, généralement elle est plus longue à causes des balais.

- On utilise un nombre de convertisseurs (deux redresseurs et deux onduleurs ou un redresseur et deux onduleurs) plus importants que pour la machine à cage (un redresseur et un onduleur).
- Le coût total de la machine asservie est plus important que celui de la machine à cage. On souligne que des études récentes, tenant compte de la chute du prix du silicium, donnent maintenant un petit avantage à la *MADA* [22].

#### 4.5.6. Modélisation de la machine asynchrone à double alimentation

La figure **Fig.4.11** représente un schéma simplifié d'un aérogénérateur éolienne couplé avec la *MADA* [75, 76].



**Fig. 4.11.** Schéma d'une éolienne à vitesse variable basée sur une *MADA*.

La production de l'énergie éolienne se base sur le principe de la conversion de l'énergie du vent en énergie mécanique de rotation. Cela se fait grâce à la turbine à axe horizontal. La conversion de l'énergie mécanique en électrique implique la présence d'une génératrice (*MADA*) couplée à la turbine, l'énergie éolienne produite par la turbine pour faire tourner la machine asynchrone à double alimentation qui agit comme un générateur, la puissance produite à la sortie doit avoir la même qualité quand elle entre dans le réseau électrique, (220Volts, 60 ou 50Hz) [77; 22]. La dynamique du système à commander est décrite par les équations différentielles suivantes [75, 76] :

- ✓ Les équations des composantes du vecteur de tension statorique:

$$\begin{cases} V_{ds} = R_s \cdot I_{ds} + \frac{d\phi_{ds}}{dt} - \omega_s \cdot \phi_{qs} \\ V_{qs} = R_s \cdot I_{qs} + \frac{d\phi_{qs}}{dt} - \omega_s \cdot \phi_{ds} \end{cases} \quad (4.1)$$

✓ Les équations des composantes du vecteur tension rotorique :

$$\begin{cases} V_{dr} = R_r \cdot I_{dr} + \frac{d\phi_{dr}}{dt} - \omega_r \cdot \phi_{qr} \\ V_{qr} = R_r \cdot I_{qr} + \frac{d\phi_{qr}}{dt} - \omega_r \cdot \phi_{dr} \end{cases} \quad (4.2)$$

✓ Les équations des composantes du vecteur flux statorique :

$$\begin{cases} \phi_{ds} = L_s \cdot I_{ds} + M \cdot I_{dr} \\ \phi_{qs} = L_s \cdot I_{qs} + M \cdot I_{qr} \end{cases} \quad (4.3)$$

✓ Les équations des composantes du vecteur flux rotorique :

$$\begin{cases} \phi_{dr} = L_r \cdot I_{dr} + M \cdot I_{ds} \\ \phi_{qr} = L_r \cdot I_{qr} + M \cdot I_{qs} \end{cases} \quad (4.4)$$

✓ L'équation du couple électromagnétique :

$$C_e = p \cdot \frac{M}{L_s} (\phi_{ds} \cdot I_{qr} - \phi_{qs} \cdot I_{dr}) \quad (4.5)$$

✓ L'équation mécanique :

$$C_e = C_r + J \cdot \frac{d\psi}{dt} + f \cdot \psi \quad (4.6)$$

Avec :

$u = [I_r = (I_{dr} \quad I_{qr})^T, V_r = (V_{dr} \quad V_{qr})^T]^T$  : les entrées du modèle de la MADA.

Toutefois, les entrées inconnues (perturbations) de charge présentent les puissances active et réactive consommées uniquement dans le réseau électrique. Ils dépendent implicitement du vecteur du courant statorique absorbé, qui est défini par  $I_s = [I_{ds} \quad I_{qs}]^T$ .

Notant que, dans le plan  $(d - q)$ , les deux composantes des courant  $I_{ds}$  et  $I_{qs}$  sont considérées constantes à l'état stationnaire. Par conséquent, leurs dérivés sont égales à zéro [2; 78]. Ainsi, le vecteur de tension de rotor  $V_r = [V_{dr} \quad V_{qr}]^T$  est considéré comme un vecteur de commande (de consigne) fourni par un contrôleur fractionnaire proposé. En outre,

considérons  $y = [V_{ds} \ V_{qs}]^T$  le vecteur de sortie et  $x_s = [\phi_{dr} \ \phi_{qr}]^T$  le vecteur des variables état du modèle de la MADA. En utilisant les valeurs numériques données dans le **Tab.1 [2; 78]**, la représentation de l'espace d'état est déterminé par application de la fonction Matlab® *Linmod2* sur le système dans Simulink, qui est établi à partir des équations (4.1),(4.2), (4.3) et (4.4). La matrice de transfert du modèle nominal est déterminée par :

$$G_N(s) = C_s \cdot (s \cdot I - A_s)^{-1} \cdot B_s + D_s \tag{4.7}$$

Paramètres	Valeurs
$R_s$	5.0000 $\Omega$
$R_r$	1.0113 $\Omega$
$M$	0.1346 H
$L_s$	0.3409 H
$L_r$	0.0605H
$w_r$	146.6 rad/sec
$w_s$	$2\pi \cdot (50)$ rad/sec

Tab.1. Les valeurs numériques de la MADA

#### 4.6. Résultats de simulation et discussions

Nous aboutissons au schéma bloc présenté dans la **Fig.4.12** sur lequel on distingue bien les trois boucles de régulation :

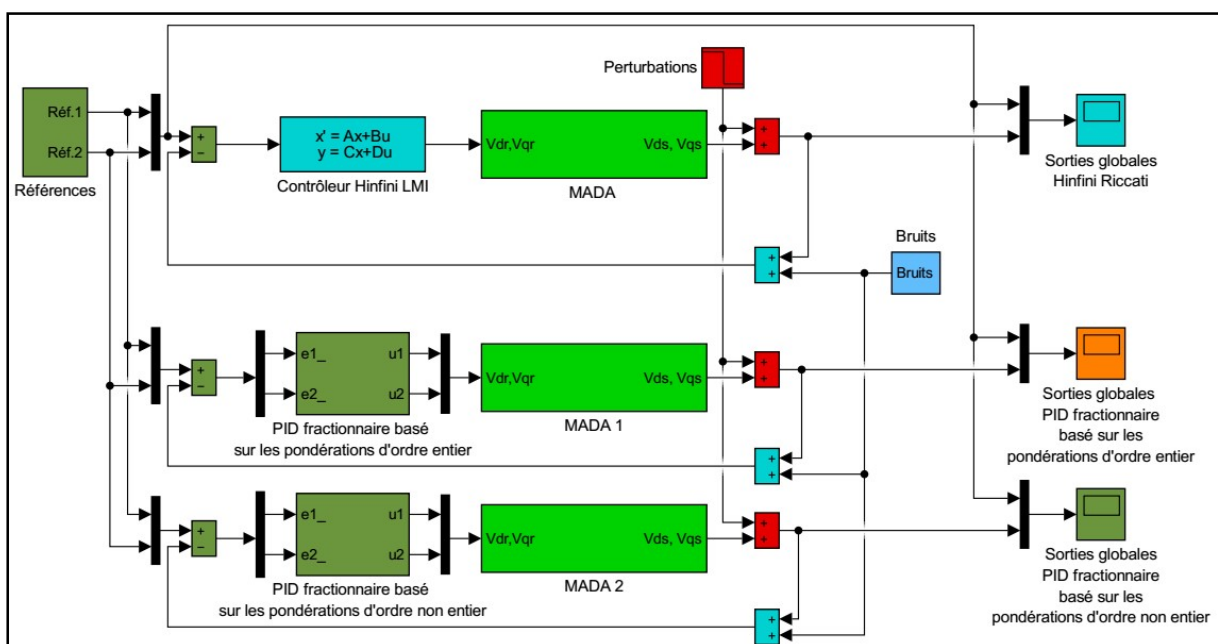


Fig.4.12. Schéma bloc pour commander une MADA par les trois contrôleurs CCOE, CFP et CFR



Dans cette partie, nous allons présenter la régulation indépendante des puissances active et réactive de la MADA en utilisant la stratégie de commande basée sur le contrôleur fractionnaire robuste :

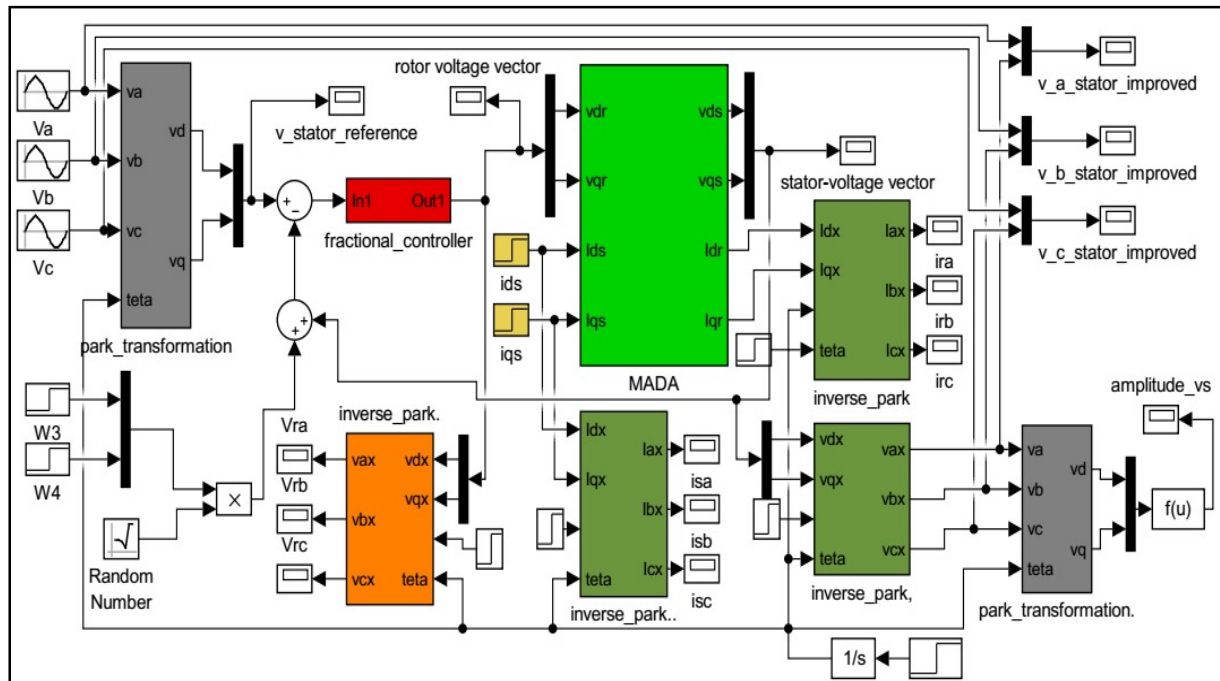


Fig.4.13. Schéma de simulation d'une éolienne à vitesse variable basée sur une MADA

#### 4.6.1. Contrôleur conventionnel d'ordre entier CCOE

Dans cette partie, nous allons essayer de satisfaire les deux conditions de robustesse sur les performances nominales  $PN$  et sur la stabilité robuste  $SR$  du système bouclé en utilisant le contrôleur conventionnel d'ordre entier. La représentation d'état de celui-ci est fournie par la résolution du problème de sensibilité mixte généralisé dans lequel les pondérations irrationnelles fixes sont employées. La solution optimale fournissant cette représentation d'état est assurée par la fonction  $Hinf\text{mi}$  du logiciel Matlab avec laquelle la matrice de transfert du CCOE est déterminée par la relation donnée par l'équation (4.10). On aura donc :

$$K_{H_\infty}(s) = C_{H_\infty}(s.I - A_{H_\infty})^{-1}B_{H_\infty} + D_{H_\infty} \quad (4.10)$$

Où

$$A_{H_\infty} = \begin{bmatrix} -0.0015 & 314.1575 & 5.5802 & 7.5504 & 5.9021 & -7.8995 \\ -314.1575 & -0.0015 & -7.5508 & 5.5799 & -7.9000 & -5.9017 \\ 0.0000 & 0.0413 & -0.0007 & 0.0010 & 0.0008 & -0.0010 \\ -0.0412 & 0.0000 & -0.0010 & -0.0007 & -0.0010 & -0.0008 \\ 0.0396 & 0.0312 & -135.7438 & -0.4670 & -202.9581 & -0.0255 \\ 0.0312 & -0.0396 & -0.4670 & 135.7439 & 0.0255 & -202.9655 \end{bmatrix}$$

$$B_{H_\infty} = \begin{bmatrix} -0.5159 & -0.0515 \\ 0.0515 & -0.5159 \\ -1.2715 & -0.1800 \\ 0.1800 & -1.2715 \\ 11.7287 & 1.7014 \\ 1.7015 & -11.7293 \end{bmatrix}, C_{H_\infty} = \begin{bmatrix} -167.5570 & -16.7152 \\ 16.7152 & -167.5570 \\ -7.7243 & -1.0932 \\ 1.0931 & -7.7238 \\ -8.1119 & -1.1786 \\ -1.1786 & 8.1114 \end{bmatrix} \text{ et } D_{H_\infty} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les résultats des simulations confirmeront plus tard qu'un compromis entre les performances nominales  $PN$  et la stabilité robuste  $SR$  ne peuvent être atteintes par le contrôleur conventionnel d'ordre entier  $CCOE$  où les deux pondérations entières fixes sont utilisées dans le problème de sensibilité mixte. Pour résoudre ce problème, la synthèse de la commande basée sur le contrôleur fractionnaire primaire  $CFP$  sera indispensable pour atteindre l'objectif cité précédemment.

#### 4.6.2. Contrôleur Fractionnaire Primaire $CFP$

Le but de la conception du contrôleur fractionnaire primaire  $CFP$  basé sur les pondérations d'ordre entier du système de contrôle de la  $MADA$  est de déterminer un contrôleur robuste qui assure les conditions de stabilité robuste  $SR$  et les performances nominales  $PN$  où les incertitudes de modélisation sont négligées, et les bruits de mesures sont prises en compte.

Notant que, les spécifications des performances nominales et la stabilité robuste sont définies comme suit :

1. Les spécifications des performances nominales :

$$W_{s_0}(s) = \frac{1}{4 \times 10^{-4}} \left( \frac{1 + \frac{s}{7.353}}{1 + \frac{s}{14.706 \times 10^{-4}}} \right) \cdot I_{2 \times 2} \quad (4.8)$$

D'après l'équation (4.8), on obtient

$$\begin{cases} M_{s_0} = 2 \\ n_{s_0} = 1 \\ \omega_{B_0}^* = 3.6765 \\ \varepsilon_{s_0} = 4 \times 10^{-4} \end{cases}$$

2. Les spécifications de stabilité robuste :

$$W_{T_0}(s) = \frac{1}{1.5385} \left( \frac{1 + \frac{s}{45.9338}}{1 + \frac{s}{29.8577 \times 10^4}} \right) \cdot I_{2 \times 2} \quad (4.9)$$

D'après l'équation (4.9), on obtient

$$\begin{cases} M_{T_0} = 1.5385 \\ n_{T_0} = 1 \\ \omega_{BT_0}^* = 70.6692 \\ \varepsilon_{T_0} = 23.6692 \times 10^{-5} \end{cases}$$

Le transfert du contrôleur fractionnaire primaire *CFP* est celui donné par l'équation (3.13) dont ses paramètres sont obtenus à partir de la solution optimale  $x_{c_0}^*$  en utilisant les données ci-dessous :

- Contraintes de bornes limitant la solution  $x_{c_0}^* = [K_1, \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21}, \beta_{22}, \mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{21}, \mu_{22}, \lambda_{11}, \lambda_{22}]^T$

$$\begin{cases} 0 < K_1 < 10 \\ 0 < (\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21}, \beta_{22}) < 5 \\ 0 < (\mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{21}, \mu_{22}) < 1 \\ 0 < (\lambda_{11}, \lambda_{22}) < 1.5 \end{cases} \quad (4.11)$$

- Autres contraintes utilisées dans la fonction *Fminimax* :

$$\begin{cases} A_{eq} = [ \quad ], B_{eq} = [ \quad ] \\ A_{ineq} = [ \quad ], B_{ineq} = [ \quad ] \\ Nonlin = [ \quad ] \end{cases} \quad (4.12)$$

- Initialisation de l'algorithme *Min-Max*:

$$x_{c_{0i}}^{*(0)} = [10^{-4}, 10^{-4}, 10^{-4}, 10^{-4}, 10^{-4}, 10^{-4}, 10^{-4}, 10^{-4}, 10^{-4}, 10^{-4}, 10^{-4}]^T \quad (4.13)$$

- Formulation des critères multi-objectifs :

- ✓ Choix de la plage de fréquence :  $[\omega_{min}, \omega_{max}] = [10^{-7}, 10^{+7}]$  radians/secondes.
- ✓ Nombre des fonctions à minimiser :  $\psi = 2000$
- ✓ Nombre maximal d'itération :  $\ell_{max} = 400$
- ✓ Précision de calcul :  $J_{min} = 10^{-6}$

On obtient donc la matrice de transfert du contrôleur fractionnaire primaire *CFP* comme suit [78]:

$$K_0(s, x_{c_0}^*) = 3.8357 \begin{bmatrix} 0.2097 & 0.0239 \\ -0.0239 & 0.2097 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{1.147}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^{1.205}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + 1.396s^{0.0012} & 0.001s^{0.1209} \\ 0.0408s^{0.0015} & 1 + 2.0009s^{0.0157} \end{bmatrix}$$

Toutefois, les résultats de simulation confirment, plus tard, que le contrôleur fractionnaire primaire  $CFP$  a la capacité d'assurer un compromis de robustesse très acceptable. Néanmoins, la marge de sécurité de ce compromis est très faible. C'est pour cette raison l'amélioration de cette marge présente l'objectif principal d'une phase de robustification. Cette dernière fournit simultanément les transferts rationnels du contrôleur fractionnaire robustifié ainsi que les pondérations fractionnaires ajustables correspondantes.

#### 4.6.3. Contrôleur Fractionnaire Robustifié $CFR_2$

Dans la partie suivante, l'objectif est d'améliorer les performances obtenues par le contrôleur fractionnaire primaire en utilisant les fonctions de pondération d'ordre non-entier avec les exigences suivantes:

- Pour la bande passante  $\omega_{BT_0}^*$  doit être réduite afin d'augmenter la marge sécurisée de la stabilité robuste  $SR$  en fonction de la variation des paramètres.
- L'ordre des fonctions de pondérations  $n_{S_0}$  et  $n_{T_0}$  devraient être augmentés pour renforcer la robustesse de compromis obtenu par le contrôleur fractionnaire primaire  $CFP$ .

A partir de ces deux règles précédentes, le vecteur des paramètres du contrôleur fractionnaire robustifié  $CFR_2$  est celui donné comme suit:

$$x_{c_1}^* = (x_{c_0}^*, n_{S_1}, n_{T_1}, \omega_{BT_1}^*) \quad (4.14)$$

La détermination de la solution optimale précédente nécessite les données ci-dessous :

- Choix des contraintes de bornes :

$$\begin{cases} x_{c_0min}^* \leq x_{c_0}^* \leq x_{c_0max}^* \\ 1 \leq (n_{S_1}, n_{T_1}) < 2 \\ 10 \leq \omega_{BT_0}^* \leq 70.6692 \end{cases} \quad (4.15)$$

- Initialisation du nouveau problème de sensibilité mixte généralisée :

$$[x_{c_0}^*, n_{S_1}^{(0)}, n_{T_1}^{(0)}, \omega_{BT_1}^{(0)}]^T = [x_{c_0}^*, 1.5, 1.2, 20]^T \quad (4.16)$$

L'application de la fonction  $Fminimax$  permet de définir le transfert du contrôleur robustifié comme suit :

$$K_1(s, x_{c_1}^*) = 6.512 \begin{bmatrix} 0.2097 & 0.0239 \\ -0.0239 & 0.2097 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{1.48}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^{1.49}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + 3.638s^{0.073} & 0.021s^{0.244} \\ 0.017s^{0.028} & 1 + 3.674s^{0.073} \end{bmatrix}$$

Elle permet également de définir les deux pondérations rationnelles ajustables comme suit :

$$W_{S_1}(s, x_{c_1}^*) = \frac{1}{2.0345 \times 10^{-6}} \left( \frac{1 + \frac{s}{5.561}}{1 + \frac{s}{14.706 \times 10^{-4}}} \right)^{1.675} \cdot I_{2 \times 2} \quad (4.17)$$

$$W_{T_1}(s, x_{c_1}^*) = \frac{1}{1.5385} \left( \frac{1 + \frac{s}{24.270}}{1 + \frac{s}{10.689 \times 10^{-4}}} \right)^{1.150} \cdot I_{2 \times 2} \quad (4.18)$$

Selon les équations (4.17) et (4.18), il est facile de confirmer la satisfaction de toutes les règles de réglage citées précédemment, d'où :

$$\begin{cases} n_{S_1} = 1.675 > n_{S_0} = 1 \\ n_{T_1} = 1.150 > n_{T_0} = 1 \\ \omega_{BT_1}^* = 35.299 < \omega_{BT_0}^* = 70.6692 \end{cases}$$

A l'aide des trois matrices de transferts des contrôleurs (*CCOE*, *CFP* et *CFR<sub>2</sub>*), on peut obtenir les caractéristiques fréquentielles du système bouclé, par le tracer des lieux des valeurs singulières maximales des fonctions de sensibilité directe et de la sensibilité complémentaire, pour vérifier les deux conditions de robustesses. Les figures (Fig.4.14 et Fig.4.15), représentent la comparaison des fonctions de sensibilité directe et de sensibilité complémentaire obtenues par les contrôleurs *CCOE* et *CFP* et la commande proposée *CFR<sub>2</sub>*.

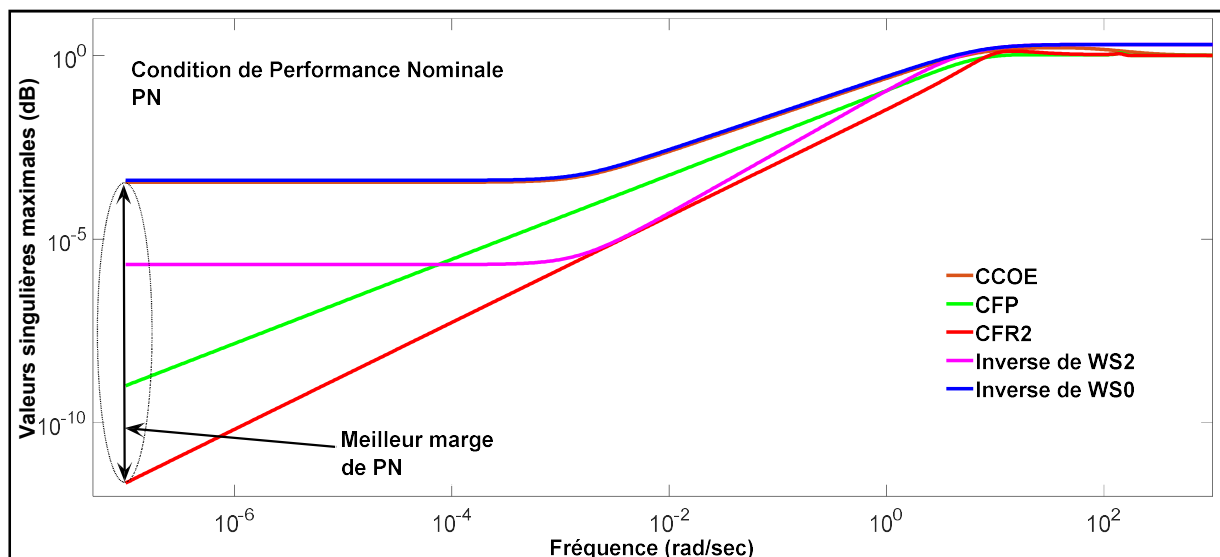


Fig. 4.14. Amélioration de la marge de robustesse en performances du système bouclé

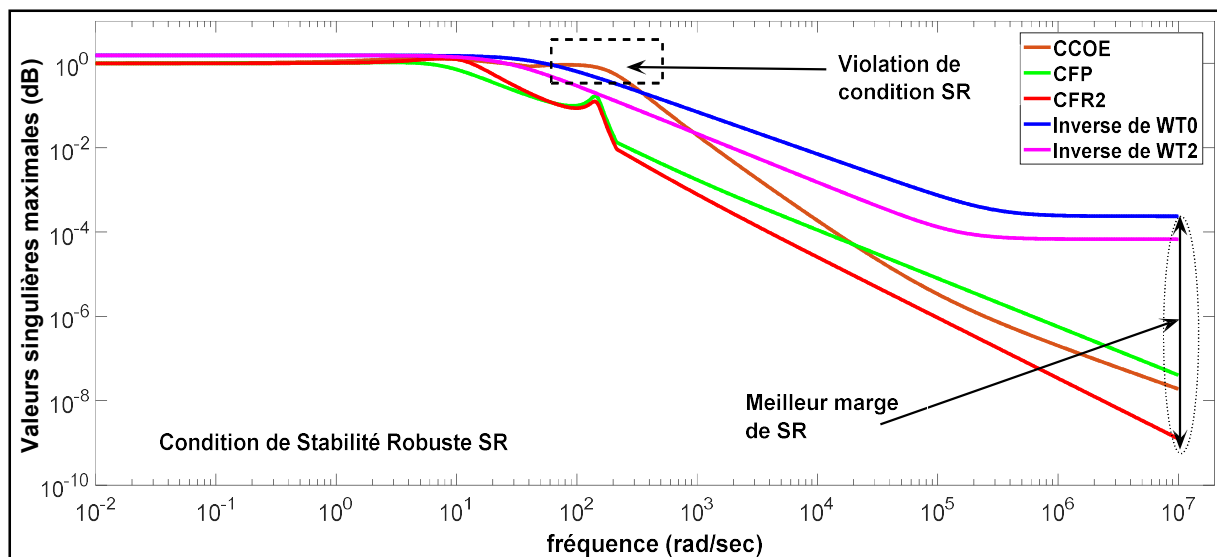


Fig.4.15. Amélioration de la marge de Robustesse de stabilité du système bouclé

Selon la Fig.4.14, on peut voir que la meilleure marge de performance nominale est donnée lorsque les valeurs singulières maximales de la matrice de sensibilité directe sont petites pour les basses fréquences.

Les marges des performances nominales  $PN$  pour  $\omega = 10^{-7} rad/sec$ , sont les suivantes:

$$\begin{cases} CFR : |\sigma_{max}[S_1(j \cdot 10^{-7}, x_{c_1}^*)] - \sigma_{max}[W_{S_0}^{-1}(j \cdot 10^{-7})]| = 164.84 \text{ dB} \\ CFP : |\sigma_{max}[S_0(j \cdot 10^{-7}, x_{c_0}^*)] - \sigma_{max}[W_{S_0}^{-1}(j \cdot 10^{-7})]| = 111.84 \text{ dB} \\ CCOE : |\sigma_{max}[S_{H_\infty}(j \cdot 10^{-7})] - \sigma_{max}[W_{S_0}^{-1}(j \cdot 10^{-7})]| = 1.04 \text{ dB} \end{cases}$$

Selon ces résultats, le contrôleur fractionnaire robustifié  $CFR_2$  proposé garantit une meilleure marge des performances nominales  $PN$  comparativement à ceux donnés par les deux autres contrôleurs  $CFP$  et  $CCOE$ . En outre, en bande de basse fréquence  $\omega \in [10^{-7}, 10^{+7}] rad/sec$ , la courbe de  $\sigma_{max}[S_1(j\omega, x_{c_1}^*)]$  est inférieure à  $(-80)_{dB}$ , ce qui signifie que les perturbations de charge sont atténuées plus de 10000 fois à la sortie de l'installation. En plus, selon la Fig.4.15, on peut voir que la meilleure marge de stabilité robuste est obtenue lorsque les valeurs singulières maximales de la matrice de sensibilité complémentaire sont de plus petite taille possible dans la plage de haute fréquence.

Les marges de stabilité robuste calculées pour  $\omega = 10^{+7} rad/sec$ , sont données par :

$$\begin{cases} CFR : |\sigma_{max}[T_1(j \cdot 10^{+7}, x_{c_1}^*)] - \sigma_{max}[W_{T_0}^{-1}(j \cdot 10^{+7})]| = 105.49 \text{ dB} \\ CFP : |\sigma_{max}[T_0(j \cdot 10^{+7}, x_{c_0}^*)] - \sigma_{max}[W_{T_0}^{-1}(j \cdot 10^{+7})]| = 75.29 \text{ dB} \\ CCOE : |\sigma_{max}[T_{H_\infty}(j \cdot 10^{+7})] - \sigma_{max}[W_{T_0}^{-1}(j \cdot 10^{+7})]| = 81.89 \text{ dB} \end{cases}$$

Par conséquent, le contrôleur fractionnaire robustifié  $CFR_2$  proposé garantit aussi une meilleure marge de stabilité robuste  $SR$ . La **Fig.4.15** montre aussi, que  $\sigma_{max}[T_{H_\infty}(j\omega)]$  dépassent sa limite supérieure  $\frac{1}{\sigma_{max}[W_{T_0}(j\omega)]}$  pour certaines fréquences, à savoir  $\omega \in [50,350]rad/sec$ . Ceci peut être expliqué dans le domaine temporel par une plus grande sensibilité aux bruits de mesure. En outre, pour les fréquences supérieures à  $\omega = 10^{+3}$  (rad/sec),  $\sigma_{max}[T_1(j\omega, x_{c_1}^*)]$  est inférieur à -60 dB, rappelons que, les bruits de mesures dans cette bande de fréquences sont atténués plus de 1000 fois à la sortie de l'installation.

D'après les résultats obtenus, les meilleures propriétés de robustesse sont assurées par le contrôleur fractionnaire robustifié  $CFR_2$ . Afin de confirmer les résultats dans le domaine temporel, le modèle linéaire est fourni par la fonction *linmod2*, utilisé pour un système en boucle fermée à trois entrées appliquées qui sont:

- La première entrée représente le vecteur de référence de consigne  $r = (1,0)^T$ .
- La seconde entrée est le vecteur de perturbation  $d_y$  de charge, influant sur la sortie de l'installation. Il est supposé comme une fonction d'unité de l'étape avec un gain égal à 0,3 (soit 30% de dépassement). Les perturbations sont injectées à partir de l'instant  $t = 3 sec$  pour chaque canal du processus.
- La dernière entrée est le vecteur de bruit de mesure  $\eta$ , qui est modélisé par un signal aléatoire gaussien avec une moyenne nulle  $\bar{\eta} = 0$  et une variance  $VAR_\eta$  égale à 0.2 à l'instant  $t = 5sec$  (secondes).

La **Fig.4.16** montre les réponses temporelles obtenues par les différents contrôleurs utilisés  $CCOE$ ,  $CFP$  et  $CFR_2$ . La **Fig.4.17** représente la première phase pour vérifier la poursuite dynamique des deux sorties. Tandis que, le suivi de la consigne de référence est agrandi en **Fig.4.17**, la **Fig.4.18** montre un agrandissement des atténuations des perturbations de charge. La dynamique de suppression des bruits de mesures obtenue est représentée à la **Fig.4.19**.

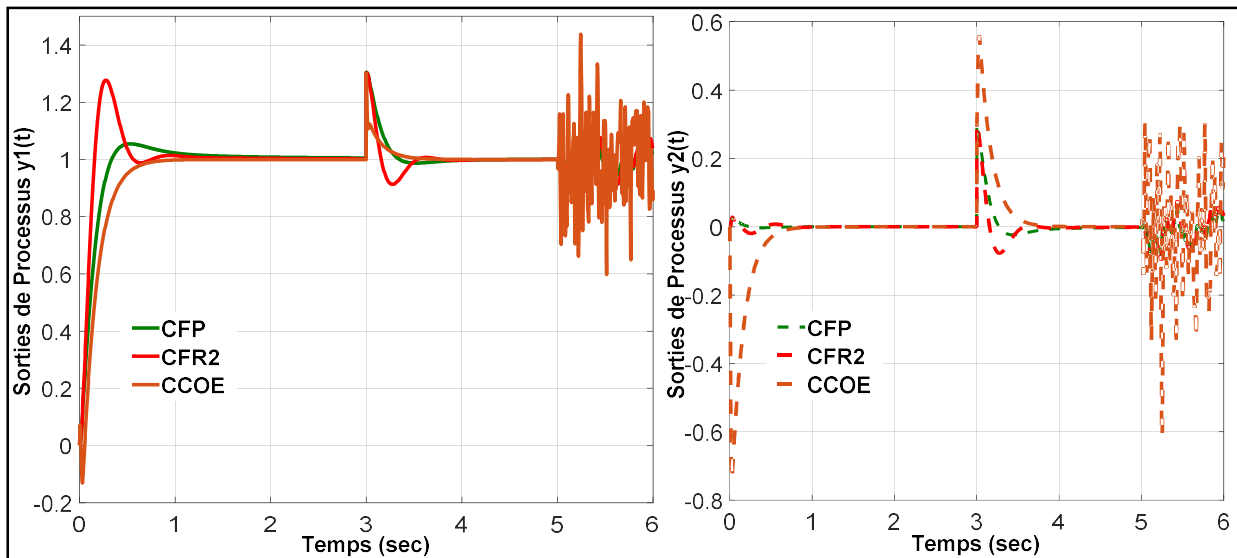


Fig. 4.16. Les sorties de processus obtenues par les trois contrôleurs CCOE, CFP et CFR<sub>2</sub>.

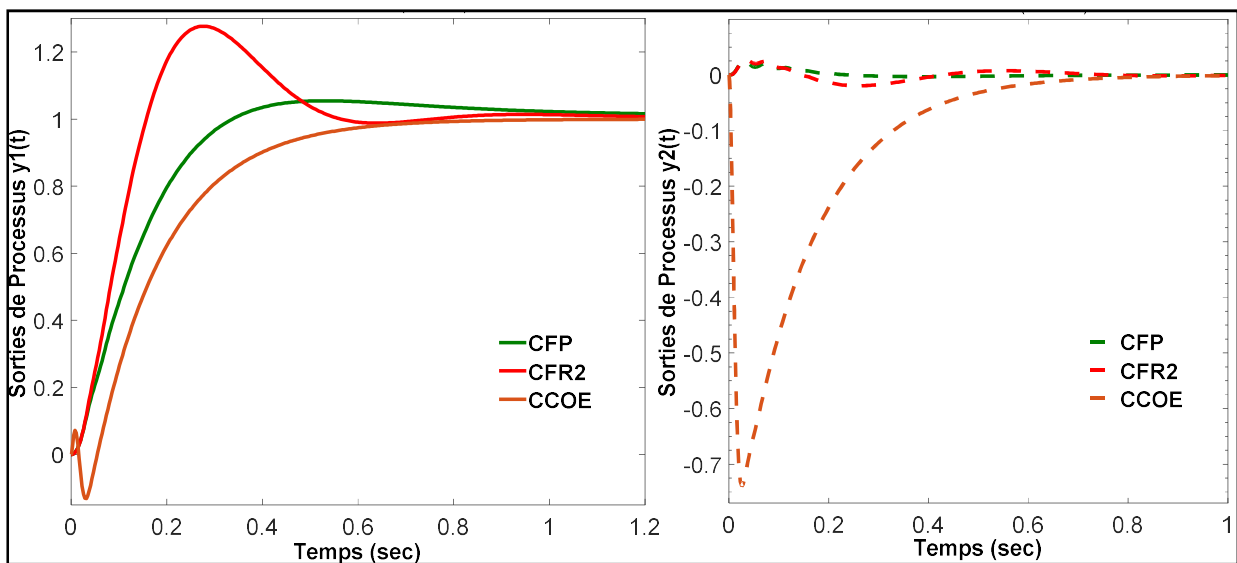


Fig. 4.17. Suivi de consigne références données par les trois contrôleurs CCOE, CFP et CFR<sub>2</sub> (zoom1).



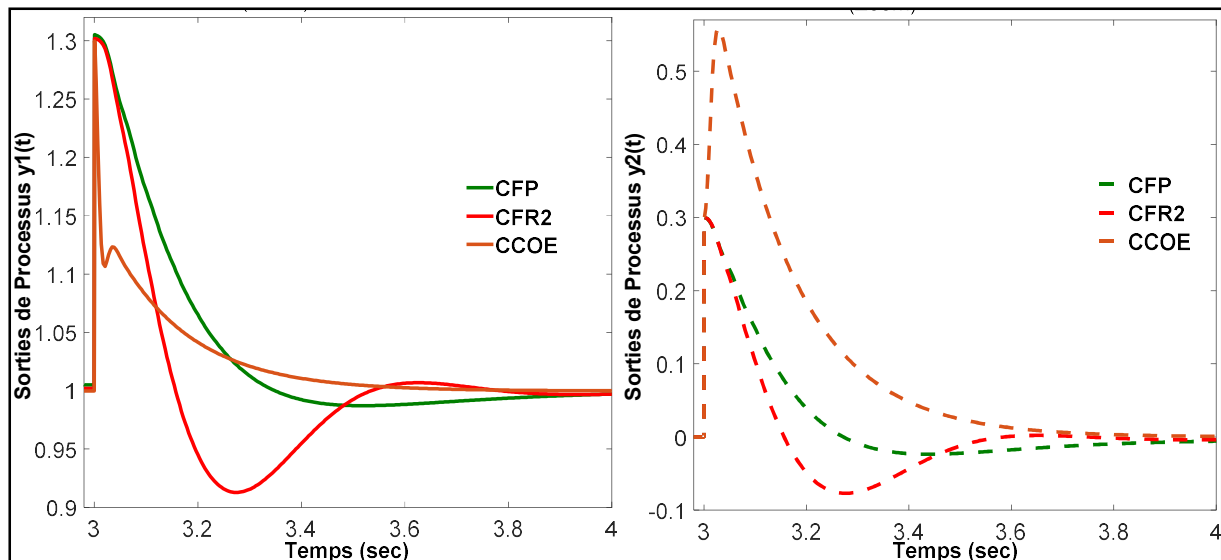


Fig. 4.18. Rejection de perturbations par les trois contrôleurs CCOE, CFP et  $CFR_2$  (zoom2).

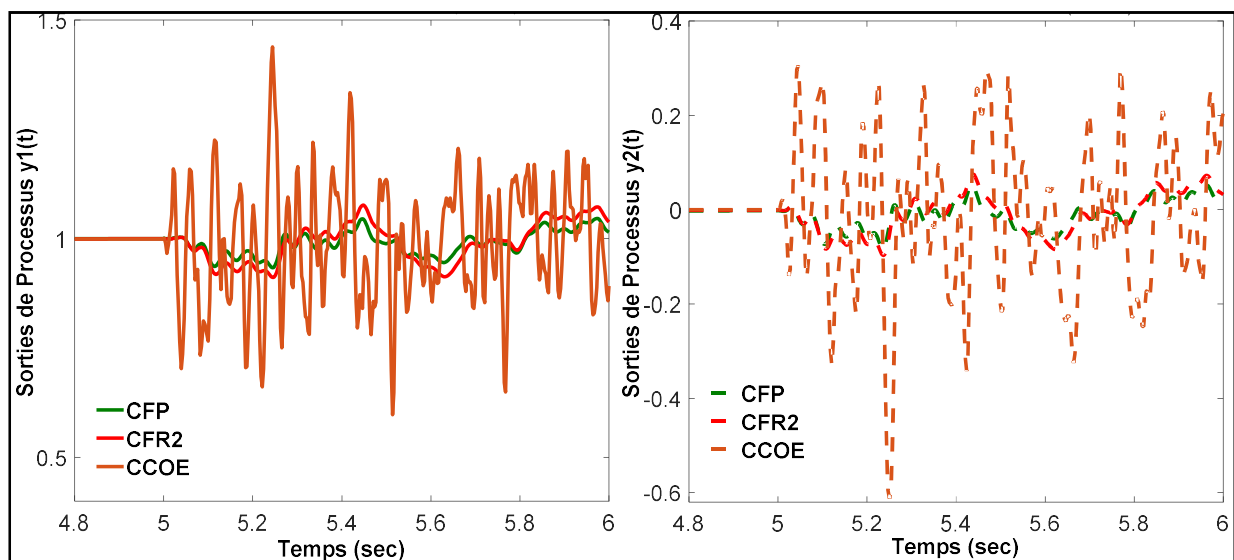


Fig.4.19. Minimisation de l'effet de bruits par les trois contrôleurs CCOE, CFP et  $CFR_2$  (zoom3).

Selon la Fig.4.16, les réponses temporelles obtenues avec le contrôleur fractionnaire robustifié  $CFR_2$  sont significativement mieux que celles des deux autres contrôleurs. Pour mieux vérifier la poursuite dynamique des deux sorties obtenues, cette dernière est représentée dans un intervalle de temps  $0 \leq t \leq 1.2 \text{ sec}$  (voir Fig.4.17). En outre, le  $CFR_2$  donne une bonne atténuation des perturbations de charge, comme le montre la Fig.4.18. Enfin, l'atténuation des bruits de mesure qui est illustrée sur la Fig.4.19 est très satisfaisante.

Ensuite, les blocs de simulation qui définissent le comportement dynamique réel du système MADA sont utilisés en boucle fermée où toutes les non-linéarités sont prises en compte. Par

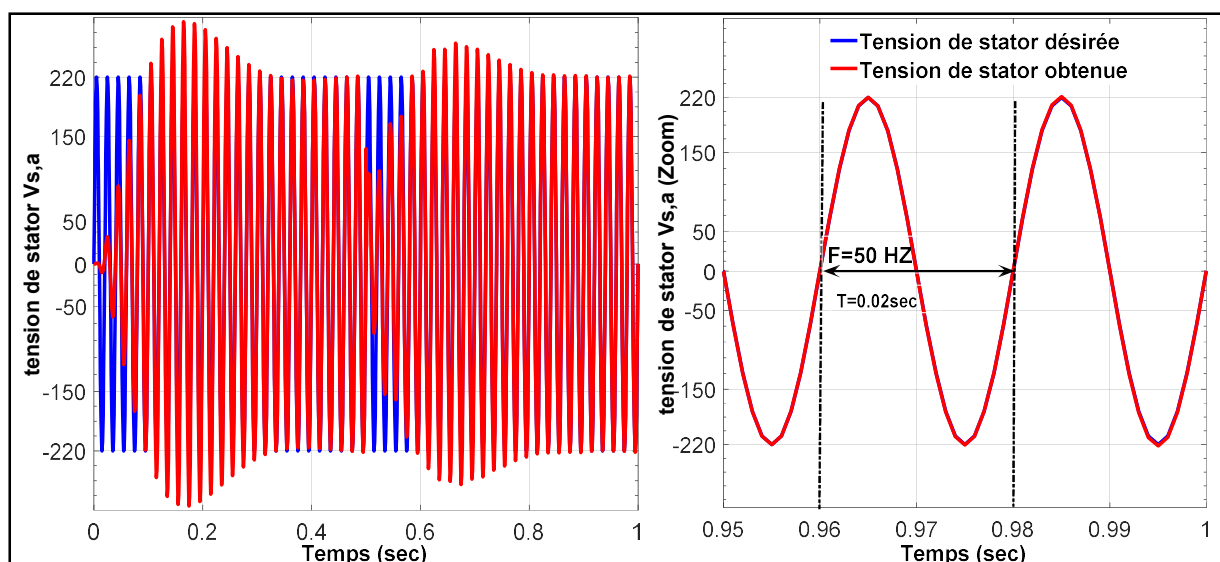
conséquent, les tensions statoriques du système *MADA* et les tensions rotoriques du contrôleur fractionnaire robuste *CFR<sub>2</sub>* obtenus sont données pour les trois entrées suivantes, à savoir:

- Le vecteur des tensions statoriques désiré pour une fréquence  $f = 50 \text{ Hz}$  et définit par :

$$V_s^{ref} = \begin{pmatrix} V_{s,a}^{ref} = 220 \sin\left(2\pi ft - \frac{2\pi}{3}\right) \\ V_{s,b}^{ref} = 220 \sin(2\pi ft) \\ V_{s,c}^{ref} = 220 \sin\left(2\pi ft + \frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix}_{f=50}$$

- Le vecteur de perturbation de charge  $I_s$ , qui est porté sur la sortie du système est considérée comme une fonction échelon égale à  $I_s = \begin{pmatrix} I_{ds} = 5A \\ I_{qs} = 10A \end{pmatrix}$  à injectée à l'instant  $t = 0.5 \text{ sec}$  avec un temps de démarrage pour chaque chaîne de régulation.
- Le vecteur de bruit de mesure  $\eta$ , à la sortie du système, est supposé être un signal aléatoire d'une moyenne nulle et une distribution Gaussienne d'une variance égale 50 à l'instant  $t = 0.8 \text{ sec}$  pour chaque boucle de régulation étudié.

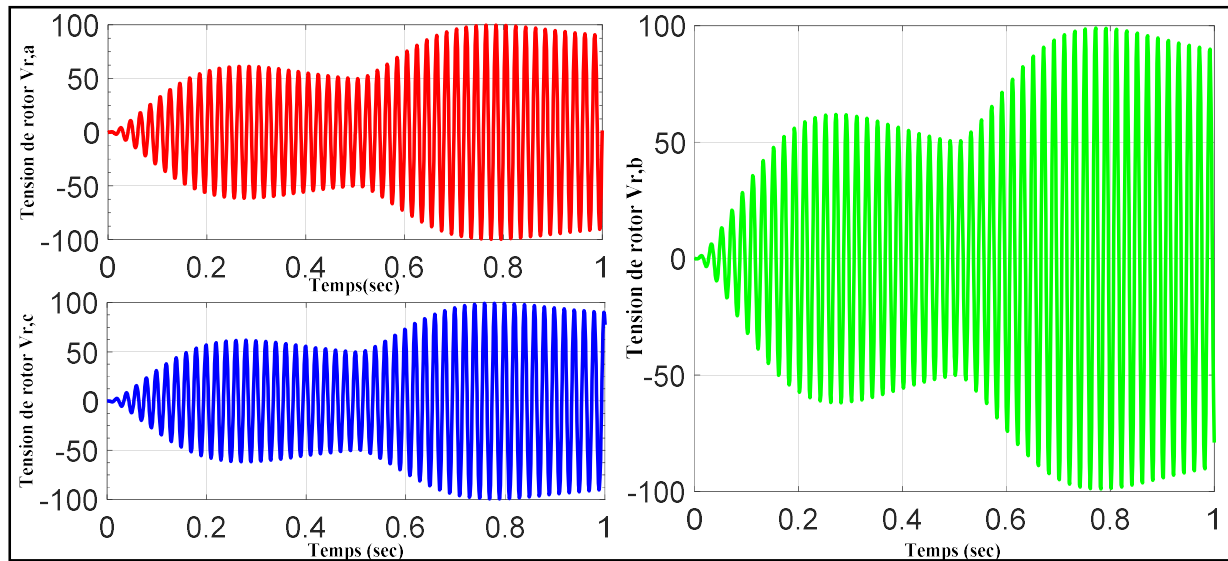
La **Fig.4.20** montre simultanément les tensions statorique de référence et obtenues  $V_{s,a}$  et  $V_{s,a}^{ref}$ . Cependant, la **Fig.4.21** montre les efforts de contrôle  $V_{r,(a,b,c)}$  à savoir les tensions rotoriques fournies par le *CFR<sub>2</sub>*. En effet, d'après ces résultats, nous remarquons :



**Fig. 4.20.** Suivi dynamique de la tension de référence donnée par la *CFR<sub>2</sub>*

D'après la **Fig.4.20**, le contrôleur fractionnaire robuste *CFR<sub>2</sub>* assure une tension de stator constante d'amplitude égale à 220 volts à une fréquence constante égale à 50 Hz où les effets de l'intensité des courants statoriques et des bruits de mesures sont ainsi atténués après

une courte durée. Ces performances du contrôleur sont garanties par les tensions rotoriques optimales illustrées dans la **Fig.4.21**.



**Fig. 4.21.** Les tensions rotoriques obtenus  $V_{r,a}(t)$ ,  $V_{r,b}(t)$  et  $V_{r,c}(t)$  par la  $CFR_2$

#### 4.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode de robustification pour améliorer la marge de robustesse des performances nominales  $PN$  et la stabilité robuste  $SR$  du contrôleur fractionnaire primaire  $CFP$  où les perturbations sont rejetées et les bruits de mesure sont atténués. Ce nouveau contrôleur est basé sur les fonctions des pondérations d'ordre non entier pour le critère de la sensibilité mixte optimisé.

Le nouveau formalisme de la méthode proposée offre l'avantage de la simplicité d'implémentation du contrôleur fractionnaire, ainsi que la rapidité de calcul des commandes, qui assurent une bonne dynamique de poursuite des sorties de la *MADA* avec une bonne marge de robustesse en stabilité et en performances du système bouclé. Cependant, il est également clair que de nouvelles améliorations dans la robustification au terme des performances nominales et de stabilité robuste proposé nécessite la connaissance nette des limites inférieures et supérieures des paramètres du contrôleur dans la perspective d'améliorer la convergence de l'algorithme d'optimisation.

*Conclusion générale  
et perspectives*

## Conclusion générale

Le travail que nous avons présenté dans ce mémoire s'articule sur la robustification du contrôleur robuste d'ordre non entier pour la commande des systèmes pluridimensionnels dont ses dynamiques ont été modélisées par des modèles linéaires incertains.

Durant ce présent travail, deux propositions ont été suggérées pour améliorer les performances de notre stratégie de commande. La première consiste à substituer la structure classique du contrôleur *PID* pluridimensionnel d'ordre non entier par celle qui contient un nombre d'inconnues très réduit. A cet effet, la dimension de l'espace de recherche est diminuée de façon remarquable ce qui améliore la convergence de l'algorithme d'optimisation *Min-Max*. La seconde proposition consiste à remplacer les méthodes conventionnelles d'approximation rapprochant les termes fractionnaires par d'autres approches basées sur l'identification fréquentielle. Cette proposition assure l'amélioration des performances de la phase d'implémentation du contrôleur robustifié.

Pour valider les performances des deux propositions précédentes, les notions théoriques de bases de la commande robuste d'ordre entier *CROE* ont été exposées dans le premier chapitre où ces dernières ont été concrétisées par une application de trois méthodes de commande sur le système *HVAC* (chauffage, ventilation et climatisation). Les performances fournies par les trois contrôleurs ont été analysées dans les deux plans fréquentiel et temporel et les résultats obtenus ont permis de découvrir les anomalies de la stratégie *CROE*, chose qui a conduit à l'éclaircissement de la problématique de la suite de ce travail.

Par ailleurs, la stratégie *CRONE* a été suggérée, dans le deuxième chapitre, comme une solution alternative pour la commande des systèmes pluridimensionnels incertains et ce dans le but de palier les inconvénients de la stratégie précédente. A cet effet, nous avons exposé les notions fondamentales qui permettent la synthèse du contrôleur *PID* robuste d'ordre non entier. Les paramètres de celui-ci sont obtenus par la solution optimale fournie par l'algorithme *Min-Max* qui est disponible dans la fonction *Fminimax* du logiciel Matlab. De plus, pour l'implémentation de ce contrôleur, plusieurs méthodes d'approximation ont été détaillées dans ce chapitre où la méthode d'*Oustaloup* est choisie, parmi celles proposées, pour implémenter le transfert irrationnel du contrôleur primaire dans la boucle de commande. Ce chapitre se termine par une validation de cette stratégie de commande sur le même système *HVAC* précédent. Toutefois, la comparaison des performances obtenues avec celles fournies par les deux contrôleurs robuste de la stratégie *CROE* a montré l'amélioration du

compromis de robustesse du système bouclé par le contrôleur fractionnaire primaire. Néanmoins, l'obtention d'une marge faible du compromis de robustesse peut poser des sérieux problèmes notamment la sensibilité énorme des signaux de commandes aux effets de bruits de mesure dans le régime stationnaire.

Dans le troisième chapitre, nous avons proposé une méthode de robustification du contrôleur fractionnaire primaire et cela pour améliorer la marge de la robustesse des performances nominales et la stabilité robuste. L'objectif de cette méthode de robustification consiste à introduire des pondérations irrationnelles ajustables dans le problème de sensibilité mixte généralisé. Les paramètres du contrôleur à synthétiser ainsi que les coefficients optimaux des pondérations proposées sont obtenus par la résolution de ce problème d'optimisation en utilisant toujours la même fonction du logiciel *Matlab*.

Toutefois, cette robustification proposée peut fournir des meilleures performances. Néanmoins, pour un nombre élevé des spécifications à satisfaire, la convergence de l'algorithme d'optimisation risque de ne pas être assurée et c'est pour cette raison qu'on a proposé une autre structure fractale permettant de réduire l'espace de recherche contenant les coefficients optimaux du contrôleur robustifié et les pondérations irrationnelles ajustables proposées. Les performances de cette stratégie de commande sont encore améliorées notamment dans la phase d'implémentation du contrôleur robustifié dans laquelle le transfert fractionnaire de ce contrôleur est rapproché par celui d'ordre entier en utilisant l'identification fréquentielle. Ce chapitre se termine par la commande du système *HVAC* par les versions du contrôleur fractionnaire robustifié et les résultats obtenus sont comparés, dans les plans fréquentiel et temporel, à ceux fournis par le contrôleur fractionnaire primaire.

Dans le quatrième chapitre, la stratégie *CRONE* basée sur notre proposition a été validée à travers une application sur un système d'énergie renouvelable constitué par une génératrice asynchrone à double alimentation simulant le fonctionnement d'une éolienne. Les performances obtenues sont comparées par les deux stratégies *CROE* et *CRONE* non robustifié et les résultats obtenus sont très encourageants.

## Perspectives

Les perspectives à proposer pour la robustification du contrôleur primaire, qui doit satisfaire un niveau très élevé des spécifications et doit stabiliser les systèmes pluridimensionnels modélisés par des modèles linéaires incertains, peuvent se résumer comme suit :

- Robustification du contrôleur fractionnaire primaire tenant compte des incertitudes structurées de modélisation;
- Robustification des contrôleurs primaires de deux degrés de liberté (*2-DOF controller*) ;
- Application de la méthode  $\mathcal{H}_\infty$  utilisant les équations de Riccati ou l'approche LMI pour la résolution du problème de sensibilité mixte généralisé basé sur les pondérations irrationnelles ajustables ;
- Proposition d'autres méthodes d'approximation assurant un bon rapprochement du transfert fractionnaire.
- Proposition d'autres structures fractales assurant la résolution du problème précédent avec un nombre de paramètres très réduit.
- Synthèse du contrôleur fractionnaire robustifié par l'optimisation mon-critère sous contraintes.

*Références*  
*Bibliographiques*



### Références bibliographiques

- [1] RG. Almeida, JA. Peças and JAL. Barreiros, “Improving power system dynamic behavior through doubly-fed induction machine controlled by static converter using fuzzy control”, *IEEE Transactions Power Systems*, 19: 1942–1950,2004.
- [2] C. Belfedal, S. Gherbi, M. Sedraoui, S. Moreau, G. Champenois, T. Allaoui and MA. Denai, “Robust Control of Doubly Fed Induction Generator for Stand-Alone Applications”, *Electrical Power System Research*, 80: 230 –239, 2010.
- [3] M. Sedraoui and D. Boudjehem, “Robust fractional order controller based on improved PSO algorithm for the wind turbine equipped with a doubly fed asynchronous machine”, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I*, 226: 1274 – 1286,2012.
- [4] K. Glover and JC. Doyle, “State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an  $H_\infty$  norm bound and relations to risk sensitivity”, *System Control Letters*, 11: 167-172, 1988.
- [5] P. Gahinet and P. Apkarian, “A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control“, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4: 421-44,1994.
- [6] MG. Safonov and RY. Chiang, “A schur method for balanced model reduction”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2: 729-733, 1989.
- [7] MG. Safonov, RY. Chiang and DJN. Limebeer, “Optimal hankel model reduction for non-minimal systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35: 496-502, 1990.
- [8] P. Apkarian and HD. Tuan, “Robust control via concave minimization-local and global algorithm”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45: 299-305, 2000.
- [9] P. Apkarian and D. Noll, “Non-smooth  $H_\infty$  Synthesis”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51: 71-86,2006.
- [10] D. Kressner and C. Tobler, “Preconditioned low-rank methods for high-dimensional elliptic PDE eigenvalue problems”, *Computational Methods in Applied Mathematics*, 11: 363–381, 2011.
- [11] SP. Kanade and AT. Mathew, “2-DOF H-Infinity Loop Shaping Robust Control for Rocket Attitude Stabilization”, *International Journal of Aerospace Sciences*, 2: 71-91, 2013.
- [12] SC. Thomsen, H. Niemann and NK. Poulsen, “Robust stability in constrained predictive control through the Youla parameterizations”, *International Journal of Control*, 84: 653-664, 2011.

- [13] KO. Khelifa, B. Noureddine and N. Lazhari, “Improved Robustness of Generalized Predictive Control for Uncertain Systems”, *Journal of Electrical Engineering*, 65: 349-355, 2015.
- [14] M. Aidoud, M. Sedraoui, A. Lachouri, and A. Boualleg, “Robustified GPC controller based on  $H_\infty$  robust control for an hydraulic actuator”, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 1-8, 2015.
- [15] I. Podlubny, “Fractional order systems and  $PI^\lambda D^\mu$  controllers”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44: 208–214, 1999.
- [16] A. Oustaloup, F. Levron, B. Mathieu and F. Nanot, “Frequency-band complex non-integer differentiator: characterization and synthesis”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems Fundamental Theory and Applications*, 47: 25–39, 2000.
- [17] P. Lundström, S. Skogestad and ZQ. Wang, “Performance weight selection for  $H_\infty$  and  $\mu$ -control methods”, *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 13: 241-252, 1991.
- [18] H. Oloomi and B. Shafai, “Weight selection in mixed sensitivity robust control for improving the sinusoidal tracking performance”, *Conference on Decision and Control, 42nd IEEE*, 1: 300-305, 2003.
- [19] MG. Ortega and FR. Rubio, “Systematic design of weighting matrices for the  $H_\infty$  mixed sensitivity problem”, *Journal of Process Control*, 14: 89-98, 2004.
- [20] SN. Sarath, “Automatic weight selection algorithm for designing  $H_\infty$  controller for active magnetic bearing”, *International Journal of Engineering Science and Technology*, 3: 122-138, 2011.
- [21] P. Borne, F. Rotella, I. Zambettakis, and J.P. Richard. “*Modélisation et identification des processus*”, Vol. 1. Editions Technip, 1992.
- [22] G. Salloum, “*Contribution à la commande robuste de la machine asynchrone à double alimentation*”, Thèse de doctorat. Toulouse, INPT, 2007.
- [23] H. Moradi, G. Vossoughi, “Robust control of the variable speed wind turbines in the presence of uncertainties: A comparison between  $H_\infty$  and PID controllers”, *Energy, Elsevier*, 90: 1508-1521, 2015.
- [24] S. Skogestad and I. Postlethwaite, “Multivariable feedback control: analysis and design”, Vol. 2. New York: Wiley, 2007.

- [25] J.C. Doyle, B.A. Francis, and A. Tannenbaum, “Feedback control theory”, Courier Corporation, 2013.
- [26] M. Sedraoui, “*Apport des principales méthodes d’optimisation dans la commande prédictive généralisée multivariable sous contraintes*”, Thèse doctorat, Université Mentouri Constantine, 2008.
- [27] P. Apkarian, “*Éléments de la théorie de la commande robuste*”, 2012. URL [pierre.apkarian.free.fr/COURS/polysae.pdf](http://pierre.apkarian.free.fr/COURS/polysae.pdf).
- [28] P. Gahinet, “Explicit controller formulas for LMI-based  $\mathcal{H}_\infty$  synthesis”, *Proc. of the 32nd*, 500: 656-661, 1994.
- [29] C. Scherer, "The Riccati inequality and state-space  $\mathcal{H}_\infty$ -optimal control." *Univ. Wnrzburg, Germany*, 1990.
- [30] E.T. Jeung, D.C. Oh, J.H. Kim, and H.B. Park, “Robust controller design for uncertain systems with time delays: LMI approach”, *Automatica*, 32(8):1229–1231, 1996.
- [31] S. Chenikher, S. Abdelmalek. and M. Sedraoui, “Control of uncertainly multivariable system with fractional PID”, *16th IEEE inter. conf (MELECON)*.1079-1082, 2012.
- [32] Q.G. Wang, C. Hang, Y. Zhang and Q. Bi., “Multivariable Controller Auto Tinning With Its Application In HVAC Systems”, *American Control Conference, 1999. Proceedings of the 1999*. Vol. 6. IEEE, 1999.
- [33] R. Hilfer, “*Applications of Fractional Calculus in Physics*”, World Scientific, Singapore, 2000.
- [34] A. McBride, J. Sabatier, O.P. Agrawal, and J.T. Machado, “*Advances in fractional calculus: theoretical developments and applications in physics and engineering*”, Springer, 2008.
- [35] T. HOUMOR, “*Analyse du chaos dans un Système d’Équations Différentielles Fractionnaires*”, Thèse de doctorat, Université de Constantine 1, 2014.
- [36] A. DJARI, “*Contribution à la commande adaptative d’ordre fractionnaire des systèmes dynamiques*”, Thèse de doctorat, Université de Jijel, 2016.
- [37] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, and J.J. Trujillo, “Theory and Applications of Fractional Differential Equations”, *Elsevier*, 2006.
- [38] I. Podlubny, “Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation”, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 5:367–386, 2002.

- [39] A. Si Amour, “Contribution à la commande par modes glissantes d’ordre fractionnaire”, Thèse de doctorat, Université de Tizi-Ouzou, 2011.
- [40] H. Nezzari, “Contribution à l’analyse des systèmes d’ordre fractionnaire”, Thèse de doctorat, Université de Constantine 1, 2013.
- [41] CA. Monje, Y. Chen, BM. Vinagre, D. Xue and V. Feliu. “*Fractional-order Systems and Controls Fundamentals and Applications*”, Springer Science and Business Media, 2010.
- [42] I. N’DOYE, “Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires”, Thèse de doctorat, Université de Nancy 1, 2011.
- [43] D. Matignon, “Stability results for fractional differential equations with applications to control processing”, *Computational engineering in systems applications*. Vol. 2. Lille, France: IMACS, IEEE-SMC, 1996.
- [44] J. Sabatier, M. Moze, and C. Farges, “On stability of fractional order systems”, *Third IFAC workshop on fractional differentiation and its applications FDA’08*. 2008.
- [45] C. Kraaikamp, C. "A new class of continued fraction expansions." *Acta Arithmetica*, 57(1) : 1-39. 1991.
- [46] K. Matsuda and H. Fujii, “H(infinity) optimized wave-absorbing control - Analytical and experimental results”, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 16(6) : 1146-1153, 1993.
- [47] BM. Vinagre, I. Podlubny, A. Hernández,; V. Feliu, “Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications”, *Fractional calculus and applied analysis*, 3, 231-248, 2000.
- [48] A. Oustaloup, “ La commande CRONE : Commande robuste d'ordre non entier ”, Hermès, Paris, 1991.
- [49] A. Charef, H. Sun, Y. Sao and B. Onaral, “Fractal system as represented by singularity function”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37 (9), 1465–1470, 1992.
- [50] S. S. Rao , and S. R. Singiresu, “*Engineering optimization: theory and practice*”. John Wiley and Sons, 2009.
- [51] M. Moradi, “A genetic-multivariable fractional order PID control to multi-input multi-output processes”, *Journal of Process Control*, Elsevier, 24 : 336–343, 2014.
- [52] T. Coleman, A. B. Mary and G. Andrew, "Optimization toolbox" *For Use with MATLAB. User’s Guide for MATLAB 5, Version 2, Release II*, 1999.

- [53] M. Sedraoui, T. Amieur, R. Bachir Bouiadjra and M. Sahnoune, “Robustified fractional-order controller based on adjustable fractional weights for a doubly fed induction generator”, *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, DOI: 10.1177/0142331215617236.
- [54] T. Amieur, M. Sedraoui, “A Robust Fractional Controller Based on Weighted Mixed Sensitivity Optimization Problem for Permanent Magnet Synchronous Motor”, *Proceedings of Engineering and Technology - PET*, 11, Special issue : 91-97, 2016.
- [55] A. Ahuja, S. K. Aggarwal, “Design of fractional order PID controller for DC motor using evolutionary optimization techniques”. *Wseas Transactions on Systems and Control*, Vol. 9, pp.171-182, 2014.
- [56] T. Amieur, A. Younsi, M. Aidoud, M. Sedraoui, “Design of Robust Fractional Order PID Controller Using Fractional Weights in the Mixed Sensitivity Problem”, *14th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices*, Marrakech, Morocco, 2017.
- [57] WS. Levine (Ed.), “*The control handbook*”, Edition CRC press, 1996.
- [58] MG. Ortega and FR. Rubio, “Systematic design of weighting matrices for the  $H_\infty$  mixed sensitivity problem”, *Journal of Process Control*, 14: 89-98. 2004.
- [59] L. Zhan and K. Zhou, “Synchronous disturbance attenuation in a power magnetically levitated spindle based on parameter-scheduled  $H_\infty$  control”, *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 37: 1-16, 2014.
- [60] Hartley, Richard, and Andrew Zisserman. *Multiple view geometry in computer vision*. Cambridge university press, 2003.
- [61] O. Válerio, *Fractional control toolbox for Matlab*, Beta release, Université Technique de Lisbonne, 2005.
- [62] N. Hamdi, “*Modélisation et commande des génératrices éoliennes*”, mémoire de magister, Université de Constantine, 2008.
- [63] G. Dominique, “*Asservissement d'une éolienne à vitesse variable et à pas fixe dans le cadre d'un système de jumelage éolien-diesel à haute pénétration*”, thèse de doctorat, l'université du Québec à Rimouski, 2010.
- [64] B. Multon, X. Roboam, B. Dakyo, “Aérogénérateurs électriques”, *Techniques de l'ingénieur. Génie électrique*, 7(D3960), 2004.

- [65] B. Paluch, “Introduction à l'énergie éolienne: L'Energie éolienne”, *REE. Revue de l'électricité et de l'électronique*, 5: 35-50, 2005.
- [66] B. BELTRAN, “Contribution à la commande robuste des éoliennes à base de génératrices asynchrones double alimentation: du mode glissant classique au mode glissant d'ordre supérieur”, Thèse de doctorat. Université de Bretagne occidentale-Brest, 2010.
- [67] S. Mathew, “Wind energy: fundamentals, resource analysis and economics”, Vol. 1. Heidelberg: Springer, 2006.
- [68] P. Frédéric, “Etude et commande de génératrices asynchrones pour l'utilisation de l'énergie éolienne-machine asynchrone à cage autonome-machine asynchrone à double alimentation reliée au réseau”, Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2003.
- [69] A. Mirecki, “Etude comparative de chaînes de conversion d'énergie dédiées à une éolienne de petite puissance”, Thèse de doctorat. Institut National Polytechnique de Toulouse. 2005.
- [70] T. Ghennam, “Supervision d'une ferme éolienne pour son intégration dans la gestion d'un réseau électrique, Apports des convertisseurs multi niveaux au réglage des éoliennes à base de machine asynchrone à double alimentation”, Thèse de doctorat, Ecole Militaire Polytechnique d'Alger et Ecole Centrale de Lille, 2011.
- [71] V. Akhmatov, “Variable-speed wind turbines with doubly-fed induction generators Part I: Modelling in dynamic simulation tools”, *Wind engineering*, 26(2), 85-108, 2002.
- [72] CA. Monje, BM. Vinagre, V. Feliu, and YQ. Chen, “Tuning and auto-tuning of fractional order controllers for industry applications”, *Control Engineering Practice*, 16(7):798–812, 2008.
- [73] R. Ghosn, “Contrôle Vectoriel de la Machine Asynchrone à Rotor Bobiné à Double Alimentation”, Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2001.
- [74] D. Ramuz, “Machine Généralisée Alimentée par Deux Convertisseurs”, Thèse de Doctorat, UFR des Sciences Techniques et Gestion de l'Industrie, Université de Franche-Comté, 2000.
- [75] F. Khatounian, E. Monmasson, F. Berthereau, , E. Delaleau and J. P. Louis, J. P. November). Control of a doubly fed induction generator for aircraft application. In *Industrial Electronics Society, 2003. IECON'03. The 29th Annual Conference of the IEEE*, 3: 2711-2716). 2003.

- [76] YB. Qu and HH. Song, “Energy-based coordinated control of wind energy conversion system with DFIG”, *International Journal of Systems Science*, 84: 2035–2045, 2011.
- [77] T.K.A. Brekken and N. Mohan, “Control of a doubly fed induction wind generator under unbalanced grid voltage conditions”, *Energy Conversion, IEEE Transactions on*, 22(1):129–135, 2007.
- [78] M. Sedraoui and D. Boudjehem, “Robust fractional order controller based on improved PSO algorithm for the wind turbine equipped with a doubly fed asynchronous machine”, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I* 226: 1274 – 1286, 2012.