

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université 8 Mai 1945 Guelma



Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Génie Mécanique

## THÈSE

En Vue De L'obtention Du Diplôme De  
Doctorat En Sciences

Filière : Génie mécanique

Présentée par

**HADJAB Abdelhakim**

*Intitulée*

### Étude Cyclique Et Dynamique Des Structures Composites

Thèse soutenue le : 30 Octobre 2025

Devant le Jury composé de :

<b>DJAMAA Mohamed Cherif</b>	Prof.	Université 8 Mai 1945 Guelma, Guelma	Président
<b>FATMI Louendi</b>	Prof.	Université 8 Mai 1945 Guelma, Guelma	Rapporteur
<b>ROUILI Ahmed</b>	Prof.	Université Echahid Cheikh Larbi Tebessi, Tébessa	Examinateur
<b>GUEDRI Abdelmoumene</b>	Prof.	Université Mohamed Chérif Messaadia, Souk Ahras	Examinateur
<b>OUELAO Nouredine</b>	Prof.	Université 8 Mai 1945 Guelma, Guelma	Invité

Année Universitaire : 2024/2025

# *Dédicace*

*A la mémoire de mes chers parents, à ma famille, pour leur soutien  
indefectible tout au long de ce parcours.*

*Et à tous ceux qui aspirent à la connaissance, car la curiosité est le  
véritable moteur de notre avenir.*

# *Remerciements*

Un grand merci à toutes les personnes qui ont contribué à cette thèse, qui a été réalisée au Laboratoire de Mécanique des Structures de l'Université 8 Mai 1945 Guelma.

En premier lieu, je souhaite exprimer ma profonde gratitude envers le professeur **L. FATMI**, directeur de thèse, pour son soutien constant, sa disponibilité et ses précieux conseils qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers le professeur **N. OUELA**A pour m'avoir accueilli au laboratoire LMS.

Mes remerciements vont également à **DJAMAA Mohamed Cherif**, président du jury, pour avoir orchestré cette soutenance avec bienveillance et expertise.

Je souhaite également remercier le Professeur **ROUILI Ahmed** et le Professeur **GUEDRI Abdelmoumene** en raison de leur dévouement à superviser mon travail de thèse.

Je suis reconnaissant envers le maître de conférences **R. YOUNES**, et le professeur **S. BELHADI**, pour l'aide qu'ils m'ont apportée au Laboratoire de Mécanique des Structures.

**ABSTRACT:** This research's objective is to examine the mechanical behavior of sandwich composite materials when exposed to static and dynamic loads.

At the beginning of this research, we provide a global overview of composite materials and structures.

A study to comprehend the mechanical behavior of sandwich constructions makes up the second section. This section evaluates the displacement, stress, and strain in the situation of three-point bending using a sandwich method that integrates the core shear effect and applies the laminate theory. This theory's specifics are given in Appendix A.

Then, static, fatigue and modal tests are performed on sandwich specimens of different foam densities, in order to characterize these materials and to follow their degradation during fatigue cycles.

Finally, the results are presented and discussed. It can be seen that the foam density and the applied load levels have an important influence on the mechanical characteristics of these composites. AIREX C70.55 foam sandwiches ( $60 \text{ kg/m}^3$ ) experienced a significant decrease in overall fatigue parameters by over 32% after 10,000 cycles. In contrast, the values for the AIREX C70.75 foam sandwich ( $80 \text{ kg/m}^3$ ) show only a marginal variation of about 4%. Material degradation depends on the core density and the intensity of the applied loads. High density (H80) slows damage propagation, unlike H60, which is more vulnerable to rapid deterioration. Critical loads (70-80% of the maximum capacity) amplify damage, especially for H60.

In modal analysis, experimental and numerical results coincide thanks to the inclusion of shear/torsion effects in simulation. The applied theory underestimates these effects, explaining the discrepancies with realistic models.

**Key Words:** sandwich structure, foam density, dissipated energy, modal analysis, load loss, fatigue, damage.

**ملخص:** الهدف من هذه الدراسة هو تحليل السلوك الميكانيكي للمواد المركبة الساندوبيتشية عند تعرضها للأحمال الساكنة والдинاميكية.

في بداية هذه الدراسة، نقدم نظرة عامة شاملة على المواد والهيكل المركبة. ينكون الجزء الثاني من الدراسة فهم السلوك الميكانيكي للهيكل الساندوبيتشية. في هذا القسم، يتم استخدام نهج الساندوبيتش الذي يستخدم نظرية الصفائح من خلال إدراج تأثير القص الأساسي لتقدير الإزاحة والإجهاد والانفعال في حالة الانحناء ثلاثي النقاط. يتم تقديم تفاصيل هذه النظرية في الملحق أ.

بعد ذلك، يتم إجراء اختبارات ثابتة وإجهاد واختبارات نمطية على عينات الساندوبيتش بكثافات رغوة مختلفة، من أجل توصيف هذه المواد ومتابعة تدهورها أثناء دورات التعب.

وأخيراً، يتم تقديم النتائج ومناقشتها. ويمكن ملاحظة أن كثافة الرغوة ومستويات الحمولات المطبقة لها تأثير مهم على المميزات الميكانيكية لهذه المواد. على وجه الخصوص، بعد مرور 10000 دورة، تكشف معلمات التعب الكلية لشطائر الرغوة AIREX 80 (C70.55 كغ/م<sup>3</sup>) عن انخفاض ملحوظ يزيد عن 32%. في المقابل، تظهر قيم شطائر الرغوة C70.75 (60 كغ/م<sup>3</sup>) اختلافاً هاماً بنحو 4%

يعتمد تدهور المادة على كثافة النواة وشدة الأحمال المطبقة. تؤدي الكثافة العالية (H80) إلى إبطاء انتشار الضرر، على عكس H60، الذي يكون أكثر عرضة للتدهور السريع. تؤدي الأحمال الحرجة (70-80% من السعة القصوى) إلى تضخيم الضرر، وخاصة بالنسبة لـ H60.

في التحليل النطقي، تتوافق النتائج التجريبية والعددية بفضل مراعاة تأثيرات القص/الالتواء في المحاكاة. تقلل النظرية المطبقة من شأن هذه التأثيرات، وتشرح بذلك الفروقات مع النماذج الواقعية.

**الكلمات المفتاحية:** البنية الساندوبيتشية، كثافة الرغوة، الطاقة الضائعة، التحليل النموذجي، فقدان الحمولة، التعب، التلف.

**Résumé :** L'objet de cette recherche consiste à examiner le comportement mécanique des composites sandwiches lorsqu'ils sont soumis à des charges statiques et dynamiques. Au début de cette recherche, nous proposons une vision globale des matériaux et structures composites.

La deuxième partie consiste en une étude visant à appréhender le comportement mécanique des matériaux sandwiches. Dans cette section, un procédé de calcul des sandwiches qui utilise la théorie des stratifiés en tenant compte de l'effet de cisaillement du noyau est employé pour estimer les déplacements, les contraintes et les déformations en cas de flexion trois points. Le détail de cette théorie est fourni dans l'annexe A.

Des tests statiques, de fatigue et dynamiques ont ensuite été réalisés sur des échantillons sandwiches présentant deux densités de mousse, afin d'estimer leurs performances et de suivre leur dégradation durant les cycles de fatigue.

Finalement, les résultats sont présentés et discutés. On peut observer que la densité de la mousse ainsi que les niveaux de charge appliqués ont un impact significatif sur les propriétés mécaniques de ces composites, en particulier, après 10 000 cycles, les paramètres globaux de fatigue des sandwiches en mousse AIREX C70.55 ( $60 \text{ kg/m}^3$ ) révèlent une réduction notable de plus de 32%. En revanche, les valeurs pour les sandwiches en mousse AIREX C70.75 ( $80 \text{ kg/m}^3$ ) ne montrent qu'une variation marginale d'environ 4%. La dégradation du matériau dépend de la densité de l'âme et de l'intensité des charges appliquées. Une densité élevée (H80) freine la propagation des dommages, contrairement au H60, plus vulnérable à une altération rapide. Des charges critiques (70-80% de la capacité maximale) amplifient l'endommagement, surtout pour le H60.

En analyse modale, les résultats expérimentaux et numériques coïncident grâce à la prise en compte des effets de cisaillement/torsion en simulation. La théorie appliquée sous-estime ces effets, expliquant les écarts avec les modèles réalistes.

**Mots clés :** structure sandwiche, densité de mousse, énergie dissipée, analyse modale, perte de charge, fatigue, endommagement.

# ***Table des matières***

<i>Dédicace</i> .....	2
<i>Remerciements</i> .....	3
<i>Tableaux</i> .....	12
<i>Figures</i> .....	13
<i>Symboles</i> .....	15
<i>Introduction générale</i> .....	1
<b>CHAPITRE 1 :</b> .....	3
<b>LES COMPOSITES. PRINCIPES ET APPLICATIONS</b> .....	3
<b>1</b> <i>Les composites. Principes et applications</i> .....	4
<b>1.1</b> <i>Introduction</i> .....	4
<b>1.2</b> <i>Les composites. Une brève typologie</i> .....	4
<b>1.3</b> <i>Les fibres</i> .....	5
<b>1.3.1</b> <i>De la silice aux fibres de verre</i> .....	5
<b>1.3.2</b> <i>Des fibres à base de carbone</i> .....	5
<b>1.3.3</b> <i>Fibres d'aramide. Du polymère au Kevlar haute résistance</i> .....	6
<b>1.3.4</b> <i>Bore. Fibres hautes performances</i> .....	7
<b>1.4</b> <i>Pli unidirectionnel</i> .....	7
<b>1.4.1</b> <i>Proportions volumiques</i> .....	8
<b>1.4.2</b> <i>Étude de la mécanique des composites structuraux</i> .....	8
<b>1.4.3</b> <i>Influence de la nature de renforcement sur les propriétés structurelles des composites. Analyse comparative</i> .....	10
<b>1.5</b> <i>Textiles structuraux pour les composites</i> .....	11
<b>1.6</b> <i>Structures stratifiées</i> .....	12
<b>1.6.1</b> <i>Composite à fibres unidirectionnelles</i> .....	13

1.6.2	Stratifié à plis angulaires .....	13
1.6.3	Composite a plis croisés.....	13
1.6.4	Stratifié symétrique .....	14
1.6.5	Stratifié à plis angulaires symétriques .....	15
1.6.6	Stratifié symétrique à plis croisés .....	15
1.6.7	Stratifié hybride .....	15
1.6.8	Stratifiés à séquence d'empilement antisymétrique .....	15
1.6.9	Stratifiés à configuration d'empilement asymétrique .....	15
<b>1.7</b>	<b>Matrice et fibres. Une synergie vitale dans les matériaux composites.....</b>	<b>16</b>
1.7.1	Composites à matrice polymère .....	16
1.7.2	Matrice à graphite .....	17
<b>1.8</b>	<b>Composites sandwiches. Principes et utilisations .....</b>	<b>17</b>
1.8.1	Composants Constitutifs des panneaux Sandwiches.....	18
1.8.2	Catégories de noyaux de structures sandwiches.....	19
<b>1.9</b>	<b>Présentation des procédés d'élaboration des composites.....</b>	<b>22</b>
1.9.1	Stratification manuelle en contact.....	23
1.9.2	La procédure de pulvérisation en simultané des polymères .....	24
1.9.3	Technologie du moulage composite par infusion sous vide .....	26
1.9.4	Enroulement filamentaire.....	26
1.9.5	Procédé de pultrusion.....	27
1.9.6	Moulage par compression de pré-imprégnés .....	28
<b>1.10</b>	<b>Domaines d'usage des composites.....</b>	<b>29</b>
<b>CHAPITRE 2 :</b>	<b>.....</b>	<b>31</b>
<i>COMPORTEMENT STRUCTURAL ET DEGRADATION DES COMPOSITES .....</i>		31
<b>2</b>	<b>Comportement structural et dégradation des composites.....</b>	<b>32</b>
<b>2.1</b>	<b>Introduction.....</b>	<b>32</b>
<b>2.2</b>	<b>Exploration des modes de dégradation des stratifiés unidirectionnels .....</b>	<b>32</b>
2.2.1	Rupture interfaciale et décollement dans les matériaux stratifiés.....	33

2.2.2	Fissuration matricielle. Amorçage et propagation.....	34
2.2.3	Processus de dégradation des fibres de renforcement .....	35
<b>2.3</b>	<b>Estimation des critères de rupture et prédition de la défaillance des matériaux sandwiches.</b>	<b>36</b>
2.3.1	Analyse de la défaillance des peaux sous chargement axial.....	36
2.3.2	Mécanismes de rupture par cisaillement dans les noyaux composites.....	37
2.3.3	Plissement des faces .....	38
2.3.4	Flambement général et localisé.....	38
2.3.5	Sertissage par cisaillement .....	39
2.3.6	Indentation du noyau .....	40
<b>2.4</b>	<b>Comportement en fatigue des matériaux sandwiches .....</b>	<b>40</b>
<b>2.5</b>	<b>Paramètres contrôlant la durabilité en fatigue des composites.....</b>	<b>43</b>
2.5.1	Variation ou intervalle de contrainte.....	43
2.5.2	Fréquence .....	44
2.5.3	La contrainte moyenne.....	45
2.5.4	Le ratio de contrainte .....	45
<b>2.6</b>	<b>Etude des propriétés mécaniques des poutres sandwiches symétriques. ....</b>	<b>45</b>
2.6.1	Introduction .....	45
2.6.2	Analyse de cisaillement du premier ordre des poutres sandwiches .....	46
<b>2.7</b>	<b>Modélisation de la flexion trois points d'un stratifié sandwich .....</b>	<b>49</b>
<b>2.8</b>	<b>Dynamique vibratoire des poutres en flexion.....</b>	<b>52</b>
2.8.1	Formulation de Timoshenko pour l'analyse des poutres.....	52
2.8.2	Approche d'Euler pour l'analyse des poutres .....	53
<b>CHAPITRE 3 :</b>		<b>57</b>
<i>INVESTIGATION DES MATERIAUX ET PROCEDES EXPERIMENTAUX</i>		57
<b>3</b>	<i>Investigation des matériaux et procédés expérimentaux .....</i>	<b>58</b>
<b>3.1</b>	<b>Matériaux d'essai et dispositifs techniques .....</b>	<b>58</b>
<b>3.2</b>	<b>Essai de traction statique uni axiale des peaux.....</b>	<b>59</b>
3.2.1	Protocole.....	60

<b>3.3</b>	<b>Test statique de flexion trois points .....</b>	<b>60</b>
3.3.1	Module d'Élasticité équivalent en flexion .....	61
<b>3.4</b>	<b>Analyse modale expérimentale .....</b>	<b>62</b>
3.4.1	Introduction .....	62
3.4.2	Matériaux de l'étude .....	62
3.4.3	Préparation des échantillons en structure sandwich.....	63
<b>3.5</b>	<b>Fatigue cyclique en flexion trois points .....</b>	<b>64</b>
<b>3.6</b>	<b>Énergie dissipée .....</b>	<b>65</b>
<b>3.7</b>	<b>Dommage du sandwich .....</b>	<b>66</b>
<i>CHAPITRE 4 :.....</i>		68
<i>RESULTATS ET INTERPRETATIONS.....</i>		68
<b>4</b>	<b>Résultats et interprétations .....</b>	<b>69</b>
<b>4.1</b>	<b>Comportement des peaux sous contrainte de traction .....</b>	<b>69</b>
4.1.1	Interprétation des résultats de la traction des peaux .....	70
<b>4.2</b>	<b>Module de flexion équivalent des structures sandwiches .....</b>	<b>71</b>
4.2.1	Interprétation des résultats de la flexion statique : .....	73
<b>4.3</b>	<b>Caractérisation de la résistance à la fatigue des poutres sandwiches .....</b>	<b>74</b>
<b>4.4</b>	<b>Interprétation des résultats de flexion cyclique.....</b>	<b>75</b>
4.4.1	Boucles d'hystérésis .....	75
4.4.2	Énergie dissipée .....	76
4.4.3	Module de flexion équivalent en fatigue.....	77
4.4.4	Diminution progressive de charge .....	79
a)	<b>Comportement du matériau H60, Figure 4-9(a) .....</b>	<b>80</b>
b)	<b>Comportement du matériau H80 Figure 4-9(b) .....</b>	<b>80</b>
c)	<b>Comparaison des matériaux.....</b>	<b>80</b>
<b>4.5</b>	<b>Imagerie et quantification des dommages cycliques dans les composites sandwiches .....</b>	<b>81</b>
4.5.1	Interprétation des résultats .....	84
Conclusion .....		86

<b>4.6</b>	<b>Fréquences naturelles théoriques, expérimentales et numériques :.....</b>	<b>86</b>
4.6.1	Fréquences naturelles théoriques des poutres sandwiches étudiés .....	86
4.6.2	Résultats expérimentaux des fréquences naturelles.....	88
4.6.3	Conclusion.....	89
4.6.4	Analyse modale par éléments finis : résultats et interprétation .....	90
4.6.5	Comparaison des résultats des trois méthodes : théorique, expérimentales et numérique .....	92
	<b>CONCLUSION GENERALE.....</b>	<b>95</b>
	<i>Références bibliographiques.....</i>	<b>99</b>
	<i>Annexe.....</i>	<b>101</b>

# **Tableaux**

Tableau 1-1 Performances mécaniques des renforts composites [14] .....	7
Tableau 1-2 Comparaison des performances mécaniques des composites en fonction des renforts utilisés [2], [23].....	11
Tableau 1-3 Propriétés typiques de la matrice [30]. .....	16
Tableau 1-4 Propriétés de certains composites thermodurcissables et thermoplastiques [43].....	19
Tableau 1-5 : Propriétés physiques et mécaniques des mousses AIREX C70.....	20
Tableau 3-1 : Propriétés du noyau en mousse AIREX C70 [15] .....	59
Tableau 3-2 : Les paramètres géométriques du spécimen sandwiche.....	61
Tableau 4-1 : Caractérisation en traction des faces des sandwiches.....	70
Tableau 4-2 : Caractérisation en flexion des structures sandwiches. ....	72
Tableau 4-3 : Impact de l'intensité de la charge et du nombre de cycles sur la détérioration des composites sandwiches soumis à des chargements cycliques.....	83
Tableau 4-4 : Évolution des dommages (largeur Dx et profondeur Dy) sous chargement cyclique dans les structures H60 et H80.....	84
Tableau 4-5 : Les premières racines de l'équation des fréquences.....	86
Tableau 4-6 : Les caractéristiques de masse et la rigidité structurale des deux poutres à structure sandwiche ....	87
Tableau 4-7 : fréquences naturelles théoriques .....	87
Tableau 4-8 I : identification des cinq premiers modes propres expérimentaux. ....	89
Tableau 4-9 : Résultats de l'analyse modale par éléments finis (ANSYS) .....	91

# **Figures**

Figure 1-1 : Recensement organisé des composites .....	5
Figure 1-2 : Orientation des fibres dans un pli.....	8
Figure 1-3 : Modèles de détermination des constantes élastiques par « l'approche mécanique des matériaux ». ....	9
Figure 1-4 : Classification des motifs de tissage : (a) toile, (b) sergée, (c) satin et (d) unidirectionnel.....	12
Figure 1-5 : Caractérisation statique des constituants et du composite [3], [11], [26].....	13
Figure 1-6 : Séquence d'empilage des stratifiés : (a) unidirectionnel, (b) à plis angulaires et (c) à plis angulaires	14
Figure 1-7 : Panneaux à âme légère : innovations entre (a) mousse et (b) géométrie alvéolaire .....	18
Figure 1-8 : Diagramme à bulles du Module de traction E et de la densité $\rho$ . Les familles occupent des zones discrètes du diagramme [45].....	21
Figure 1-9 : Technologies de conception des composites polymères.....	23
Figure 1-10 : Mécanismes de la stratification manuelle.....	24
Figure 1-11 : Fabrication de composites via la pulvérisation [51]......	25
Figure 1-12 : Moulage sous vide [54].....	26
Figure 1-13 : Schéma du processus d'enroulement filamentaire [40].....	27
Figure 1-14 : Schéma représentative de la méthode de pultrusion. [13]. .....	28
Figure 1-15 : Procédé de moulage par compression de pré-imprégnés [60]. .....	29
Figure 1-16 : Utilisation de composites à diverses applications dans les avions commerciaux [63]. .....	30
Figure 2-1 : Illustration simplifiée de la détérioration d'un composite consolidé par des fibres. .....	33
Figure 2-2 : (a) Décohésions fibres-matrice se forment et (b) Une fusion se produit au niveau des fissures transverses plus longues [71]. .....	34
Figure 2-3 : Représentation schématique de l'arrachement des fibres : (a) dans un composite à fibres-continues, (b) dans un composite aluminium/bore [65]. .....	35
Figure 2-4 : Les différentes formes de défaillance des structures sandwiches [3]. .....	36
Figure 2-5 Paramètres de fatigue .....	44
Figure 2-6 : Flexion d'une poutre sandwiche symétrique .....	47

Figure 2-7 : Modélisation de la flexion trois points d'un stratifié sandwich.....	49
Figure 2-8 Elément infinitésimal de poutre sollicité en vibration flexionnelle .....	54
Figure 3-1 : (a) Machine de coupe à lame circulaire diamantée et (b) Spécimens sandwiches composites .....	58
Figure 3-2: Mousse PVC (a) AIREX C70.75 et (b) AIREX C70.55 .....	59
Figure 3-3 : Essais de traction statique uni axiale.....	60
Figure 3-4 : Banc d'essai "Zwick Roell " (a), paramètres géométriques de l'éprouvette (b), chargement (c). ....	61
Figure 3-5 : Dimensions caractéristiques des poutres sandwiches .....	63
Figure 3-6 : Excitation d'une éprouvette par pot vibrant pour déterminer les fonctions de transfert .....	64
Figure 3-7 : Charges impulsionales appliquées aux poutres sandwiches .....	65
Figure 3-8 : Dissipation hystérétique de l'énergie .....	66
Figure 3-9 : Microscope binoculaire (Visual Gage 250) équipé d'un logiciel (Visual Gage 2.2.0).....	67
Figure 4-1: Des échantillons de peau se rompent de manière aléatoire sous l'effet de contraintes de traction. ....	69
Figure 4-2 Comportement mécanique des couches externes sous sollicitation de traction.....	70
Figure 4-3 : Flexion trois points contrainte-déformation pour les poutres sandwiches composites : (a) H60, (b) H80. ....	72
Figure 4-4 : Endommagement des structures sandwiches sous sollicitation statique.....	73
Figure 4-5 : Évolution des boucles énergétiques sous charges répétitives à un taux de charge de 70% : cas des structures (a) H60 et (b) H80.....	75
Figure 4-6 : Corrélation entre densité de la mousse et performances en dissipation d'énergie .....	77
Figure 4-7 : Relation entre densité du noyau et rigidité élastique dans les matériaux sandwiches à 70% de leur sollicitation maximale.....	77
Figure 4-8 : Évolution des propriétés d'élasticité des poutres H60 sous chargements cycliques à différents niveaux de sollicitation.....	78
Figure 4-9 : Dégradation progressive du rapport $F_{max}/F_{max0}$ dans les structures H60/H80 soumises à une fatigue à 70% de la charge statique .....	80
Figure 4-10 : Microscope binoculaire (a), observations macroscopiques et microscopiques (b), schéma (c)et (d) du mode d'endommagement des panneaux sandwiches.....	82
Figure 4-11: Croissance des dommages ( $D_x, D_y$ ) dans les âmes sandwichs H60 et H80 sous chargement répété.	84
Figure 4-12 : La fonction de réponse des l'éprouvettes H60 et H80 .....	89

# Symboles

$A$  : Aire de la section transversale

$[A]$  : Matrice de rigidité membranaire

$A$  : Surface de l'indentation du noyau

$A_{ij}$  : Rigidité structurale en traction-compression

$b$  : Largeur de l'éprouvette

$[B]$  : Matrice de couplage Membrane-Flexion

$B_{ij}, C_{ij}$  : Rigidité structurale de couplage

$C(w_i)$  : Charge maximale en phase de chargement pour un déplacement  $w_i$ .

$d$  : Distance entre les centres des peaux,

$D(w_i)$  : Charge minimale en phase de déchargement pour un déplacement  $w_i$ .

$[D]$ : Matrice de rigidité en flexion/torsion

$D_{ij}$  : Rigidité structurale en flexion

$D_f$  : Rigidité structurale en flexion des faces

$D_x, D_y$  : Rigidités en flexions de la structure sandwiche dans les directions x et y.

$Dx, Dy$  : Dimensions du dommage

$d$  : diamètre de la fibre

$d_{11}$  : Souplesse flexionnelle de la poutre

$E$  : Module de traction

$E_{cx}, E_{cy}$  : Modules d'élasticités du noyau dans les directions x et y

$E_f, E_p$  : Module d'Young de la peau

$E_c$  : Module d'Young de l'âme

$E_d$  : Énergie dissipée

$E_{fx}, E_{fy}$  : Modules d'élasticités des peaux dans les directions x et y

$E_L, E_1$  : Module de traction longitudinal

$E_T, E_2$  : Module de traction transversal

$EI_{eq}$  : Rigidité équivalente

$F_i$ : Force appliquée

$[F]$  : Matrice de rigidité au cisaillement transverse

$f$  : Fréquence

$f_n$  : Fréquence naturelle

$F_{ij}$  : Rigidité structurale au cisaillement

$f_x, f_y, f_z$  : Forces par unité de volume

$G$  : Module de glissement

$G_{LT}$  : Module de cisaillement du composite

$G_f$  : Module de cisaillement des fibres

$G_m$  : Module de cisaillement de la matrice

$G_{cx}, G_{cy}$  : Modules de cisaillements dans les directions x et y

$h$ : Épaisseur du spécimen

$h_1, h_2, h_c$  : Épaisseurs respectivement des inférieure, supérieure et du noyau

$I$  : Moment quadratique

$\kappa$  : Courbure

$K$  : Coefficient de forme

$l$ : Écartement des appuis

$L$  : Longueur de l'éprouvette

$m_{eq}$  : Masse équivalente

$M$  : Moment de flexion

$M_x, M_y$  : Moments de flexions appliqués dans les directions x et y

$N$  : Effort dans le plan

$\nu_f$  : Coefficient de Poisson de la peau

$P$  : charge appliquée de l'indentation du noyau

$P_{cr}$  : La charge de flambement critique

$P_b$  : L'effort de flambage d'Euler en compression axiale

$P_s$  : La charge critique de flambage par cisaillement pur

$Q_x, Q_y$  : Efforts tranchants

$Q_{ij}$  : Constantes de rigidité structurale réduites d'un composite unidirectionnel sur ses directions principales

$\bar{Q}_{ij}$  : Constantes de Rigidité structurale réduites

$r$  : Rayon du cercle inscrit

$R$  : Taux de contraintes

$S$  : La rigidité au cisaillement du noyau

$t$  : Temps

$t_f, t_p$  : Épaisseur de la peau

$t_c$  : Épaisseur de l'âme

$\{u\}$  : Vecteur de déplacement

$u$  : Déplacement le long de l'axe des x

$v$  : Déplacement le long de l'axe des y

$V_c$  : Volume de la structure composite

$V_f$  : Volume occupé par les fibres

$V_m$  : Volume de la phase matrice

$v_f$  : Proportion volumique des fibres

$v_m$  : Proportion volumique de la matrice

$w$  : Déplacement le long de l'axe des z

$W_d$  : Energie maximale requise pour le décollement

$X_t, Y_t$ : Résistances à la traction du composite dans ses directions principales

$X_c, Y_c$ : Résistances à la compression du composite dans ses directions principales

$x$  : Longueur de Délamination de la fibre

$y$  : Déviation latérale

$z$  : La distance entre l'axe neutre de la structure sandwiche et le point où la contrainte est évaluée.

$\beta$  : Valeur associée aux conditions de frontières

$\beta$  : Le facteur de longueur effective

$\beta L$  : La longueur effective de flambage

$\sigma_a$  : L'amplitude de la contrainte

$\sigma_{cz}, \sigma_{cy}$  : Résistances du noyau à la rupture en compression dans les directions z et y

$\sigma_f$  : Contrainte critique de flambement

$\sigma_f$ : Contrainte de flexion

$\bar{\sigma}_{fx}, \bar{\sigma}_{fy}$  : Contraintes critiques dans les directions x et y

$\hat{\sigma}_{fx}, \hat{\sigma}_{fy}$  : Contraintes admissibles ou la contraintes critiques dans les directions x et y

$\sigma_m$  : Contrainte moyenne de cycle

$\sigma_{\max}$  : Contrainte maximale

$\sigma_{\min}$  : Contrainte minimale

$\sigma_{Tf}$  : Contrainte transversale des fibres

$\sigma_{Tm}$  : Contrainte transversale de la matrice

$\sigma_T$  : Contrainte transversale du composite

$\sigma_{Lf}$  : Contrainte longitudinale des fibres

$\sigma_{Lm}$  : Contrainte longitudinale de la matrice

$\sigma_L$  : Contrainte longitudinale du composite

$\sigma_{fu}$  : Contrainte de traction ultime des fibres

$\delta$  : Amplitude de déplacement dans poutre

$\Delta t$  : Allongement transversal du composite

$\Delta t_f$  : Allongement transversal des fibres

$\Delta t_m$  : Allongement transversal de la matrice

$\varepsilon_f$  : Déformation flexionnelle

$\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$  : Déformations médianes

$\varepsilon_{Tf}$  : Déformation transversale des fibres

$\varepsilon_{Tm}$  : Déformation transversale de la matrice

$\varepsilon_T$  : Déformation transversale du composite

$\varepsilon_{Lf}$  : Déformation longitudinale des fibres

$\varepsilon_{Lm}$  : Déformation longitudinale de la matrice

$\varepsilon_L$  : Déformation longitudinale du composite

$\varphi_x$  : Déformation de cisaillement

$\phi$  : Angle de rotation dû à la flexion

$\gamma_{xy}$  : Déformation par cisaillement

$\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$  : Courbures médians du noyau

$\psi_x, \psi_y$  : Rotations des sections transversales

$\nu$  : Rapport de Poisson

$\rho$  : Masse par unité de volume

$\rho_s$  : Masse par unité de surface

$\rho_f$  : Densité des fibres

$\rho_c$  : Densité de l'âme

$\rho_r$  : Densité de la résine

$\tau$  : Contrainte de glissement

$\tau_f$  :  $\tau_m$  : contraintes tangentielles des fibres et matrice

$\tau_L$  : contrainte tangentielle du composite

$\bar{\tau}_{cxz}, \bar{\tau}_{cyz}$  : Contraintes critiques de cisaillements

$\tau_{cz}, \tau_{cy}$  : Résistances du noyau à la rupture par cisaillement dans les directions z et y

$\theta$  : Angle d'orientation des fibres

$u_0, v_0$  et  $w_0$  : Déplacement généralisé au plan neutre de l'âme

$u, v$  et  $w$  : Champ de déplacement du noyau

$u_1, v_1$  et  $w_1$  : Déplacements de la peau inférieure

$u_2, v_2$  et  $w_2$  : Déplacements de la peau supérieure

$w_i$ : Déflexion

# **INTRODUCTION GENERALE**

## INTRODUCTION GENERALE

Les composites remplissent un rôle vital dans le champ du progrès technologique en raison de leur capacité à offrir une combinaison unique de résistance/poids supérieure et de performances améliorées par rapport aux matériaux traditionnels. Ces propriétés font des composites des produits particulièrement adaptés à des applications dans des domaines exigeants tels que la navigation spatiale, la voiture, l'aviation et la construction civile, où les performances sous charges cycliques et dans des conditions dynamiques revêtent une importance cruciale. Le comportement cyclique et dynamique des structures composites est un sujet d'une importance capitale en raison de leur utilisation répandue dans des applications critiques. Il est crucial de comprendre la réaction des composites aux cycles de chargement répétés et aux forces dynamiques afin de garantir leur longévité et leur intégrité pendant toute leur durée d'exploitation. D'autre part, les progrès effectués dans les procédés d'élaboration des composites ont donné lieu à la création de configurations complexes qui intègrent diverses formes et divers matériaux. Cette évolution nécessite une analyse approfondie de leurs propriétés cycliques et dynamiques. Cette thèse de doctorat vise à approfondir la compréhension du comportement cyclique et dynamique des structures composites à travers une approche englobante combinant des investigations expérimentales, des modélisations analytiques et des simulations numériques. En explorant systématiquement les effets du chargement cyclique et la réponse dynamique dans diverses conditions de chargement. L'objectif de la présente recherche est d'analyser l'effet de la masse volumique de l'âme et du taux de chargement sur les performances mécaniques des matériaux sandwiches exposées à des charges périodiques. Les résultats obtenus permettront d'obtenir des informations cruciales en vue d'optimiser l'élaboration de ces matériaux. La structure de la thèse se présente comme suit :

Le chapitre initial offre une perspective générale sur les composites, leurs performances et les

procédés de fabrication utilisées.

Le second chapitre se focalise sur la revue de la littérature existante concernant les études sur le chargement cyclique et dynamique des composites.

Le troisième chapitre expose les différentes techniques expérimentales employées pour analyser le comportement statique, cyclique et dynamique, ainsi que les procédures de préparation des spécimens, les protocoles des essais et les dispositifs utilisés.

Le chapitre 4 de la thèse présente en détail les résultats obtenus à l'issue des expériences menées, accompagnés d'une analyse approfondie. Les conclusions majeures relatives aux propriétés du comportement dynamique et la progression des dommages y sont également exposées.

En conclusion, une synthèse générale récapitule les résultats de l'étude et propose des pistes pour des recherches à venir.

# **CHAPITRE 1 :**

## **LES COMPOSITES. PRINCIPES ET APPLICATIONS**

## 1 Les composites. Principes et applications

### 1.1 Introduction

Les composites sont des substances générées par la fusion à une échelle importante de divers constituants, et se caractérisent par des caractéristiques techniques fondamentales, notamment une faible densité, une rigidité structurelle, une durabilité à l'usure, une résistance à la corrosion, une endurance à la fatigue, en plus de l'efficacité thermique [1–3]. La majorité des composites synthétiques sont composés de renforts fibreux et d'une matrice, les fibres servant de renforcement principal tandis que la matrice joue le rôle de composant de base[4].

### 1.2 Les composites. Une brève typologie

On classe généralement les composites en trois types : les composites à renfort fibreux, les composites structurels et les composites consolidés par des particules [3]. Les fibres sont catégorisées en fibres continues et discontinues, regroupées en orientations unidirectionnelles et bidirectionnelles, alignées ou orientées de façon aléatoire [5].

Alors que les composites structurels sont classés en stratifiés et panneaux sandwiches et renforcés par des particules en composites renforcés par dispersion et larges particules. Une brève classification de trois catégories de structures composites est présentée dans la Figure 1-1.

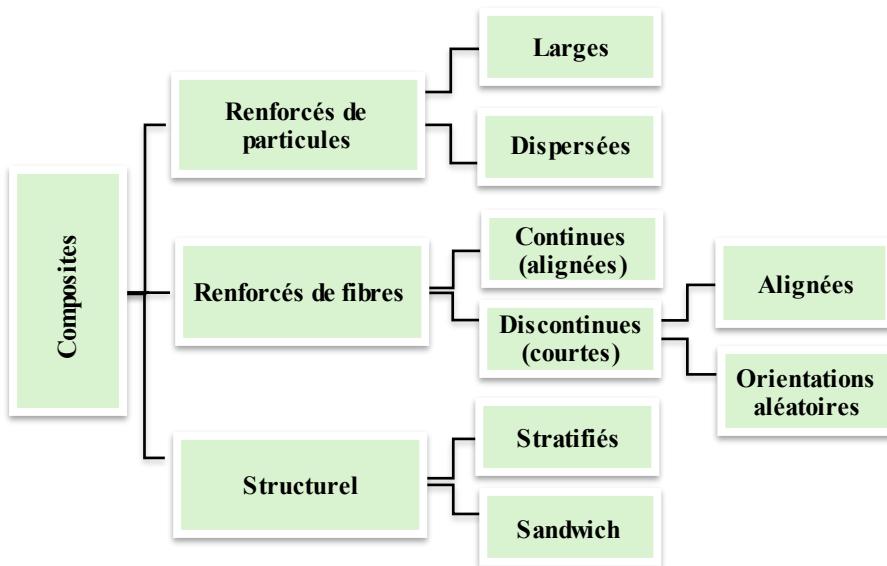


Figure 1-1 : Recensement organisé des composites.

## 1.3 Les fibres

### 1.3.1 De la silice aux fibres de verre

Le processus de fabrication des fibres de verre repose sur l'utilisation de verre brut, un matériau amorphe élaboré à partir d'un mélange de sable, de calcaire et d'autres composés oxydés. Il est pertinent de rappeler que la silice ( $\text{SiO}_2$ ) est l'élément chimique clé dans la composition des fibres de verre, représentant entre 46 et 75% de leur composition [2].

En régulant la composition chimique et le procédé de production, On peut envisager la création d'une large gamme de fibres de verre pour diverses applications, tout en maintenant les caractéristiques fondamentales du verre, telles que sa dureté et sa résistance à la corrosion. En outre, elles se distinguent par leur souplesse, leur légèreté et leur coût réduit. L'utilisation de ces fibres est la plus fréquente dans les applications industrielles à moindre coût en raison de leurs propriétés [6].

### 1.3.2 Des fibres à base de carbone

Si l'on prend en compte les renforts largement utilisés, en dépit de son coût élevé, la fibre de

carbone est reconnue pour sa rigidité spécifique exceptionnelle [7]. Elle est fabriquée en carbonisant un filament/une fibre d'un matériau précurseur dans des conditions contrôlées. Le polyacrylonitrile (PAN) est le matériau de base le plus fréquemment employé pour produire des fibres de carbone présentes sur le marché. Après leur fabrication, ces fibres subissent un traitement d'enduction destiné à les protéger et à améliorer leur liaison avec la matrice. Cette méthode de production génère des fibres de carbone dont les diamètres varient entre 5 et 7 µm, proposées en plusieurs qualités qui sont classées en fonction du module de la fibre, avec un coût croissant à mesure que le module augmente.

Les fibres à module standard sont appelées haute résistance (HS) ; il existe ensuite des fibres à module intermédiaire (IM), à module élevé (HM) et à module ultra élevé (UHM). Bien que les fibres de carbone offrent une excellente performance à la traction, elles résistent moins aux chocs et ayant un module plus élevé, elles peuvent être susceptibles de se casser. Contrairement aux alliages métalliques, chaque matériau conserve ses propriétés chimiques, physiques et mécaniques distinctes.

### **1.3.3 Fibres d'aramide. Du polymère au Kevlar haute résistance**

Le Kevlar est une fibre synthétique para-aramide à module élevé. Classée parmi les polyamides aromatiques, cette fibre organique affiche un coût de production important, dû au prix élevé du processus de fabrication et à l'équipement nécessaire [8], [9].

Cependant, les fibres de Kevlar, également appelées fibres poly-aramides, se distinguent par leur rigidité et leur résistance, pouvant être jusqu'à 100 fois supérieures à celles du polymère en vrac. Elles présentent des propriétés spécifiques comparables, voire supérieures, à celles des fibres de verre et de carbone [3], [10].

Les fibres aramides sont employées de façon similaire aux fibres de verre et aux fibres de carbone au sein d'une matrice en résine époxy [3], [11]. Les fibres d'aramide sont largement employées comme renfort dans de nombreuses applications marines et aérospatiales en

raison de leur légèreté, de leur résistance à la traction et de leur résistance aux chocs élevées [12].

Les composites en aramide sont désavantagés par leur performance à la compression relativement basse et leur usinage difficile.

#### 1.3.4 Bore. Fibres hautes performances

Ces fibres, typiquement très performantes en traction/compression, sont élaborées grâce au procédé de dépôt chimique en phase vapeur. Leur diamètre de fibre, supérieur à celui des autres fibres, leur confère une résistance accrue aux charges de flambage. Ces fibres sont relativement chères comparées aux fibres de verre et de carbone [11], [13]. Le Tableau 1-1 résume les performances mécaniques des fibres de renforcement.

Tableau 1-1 Performances mécaniques des renforts composites [14].

Fibres	Densité (Mg/m <sup>3</sup> )	Résistance à la traction (MPa)	Module élastique (GPa)	Déformation à la rupture (%)
Nylon	1,14	990	5,6	18
Aramid (faible module)	1,44	2900	60	3,6
Aramid (haut module)	1,45	2900	120	1,9
Polyéthylène (faible module)	0,97	2700	89	3,5
Polyéthylène (haut module)	0,97	3200	99	3,7
Verre E	2,60	3500	72	4,8
Verre S	2,50	4600	86	5,2
Carbone (haute résistance)	1,78	3400	240	1,4
Carbone (haut module)	1,85	2300	390	0,5
Poly paraphénylène benzobisthiazole	1,58	5800	365	>1,6

#### 1.4 Pli unidirectionnel

Considérons le pli composite unidirectionnel renforcé par des fibres, illustré par la Figure 1-2.

Les axes 1-2-3 font référence au système de coordonnées employé pour décrire les propriétés

du pli. Dans ce cas, on définit l'axe 1 comme parallèle aux fibres de degré 0, l'axe 2 comme perpendiculaire aux fibres de degré 0 et l'axe 3 comme normal au plan du pli. Le système de coordonnées 1-2-3 est désigné comme le système de coordonnées principal du matériau. Lorsque la plaque est soumise à une charge parallèle aux fibres, le module d'élasticité  $E_{11}$  tend à s'aligner avec celui de la fibre orientée à  $0^\circ$  [15].

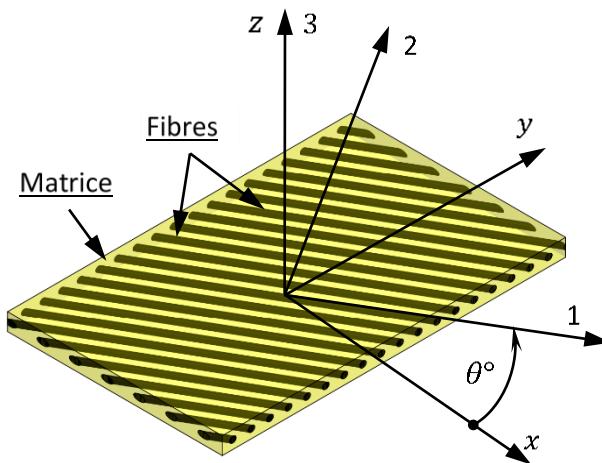


Figure 1-2 : Orientation des fibres dans un pli.

#### 1.4.1 Proportions volumiques

Analysons un volume de matériau composite, noté  $V_c$ , qui inclut un volume de fibres  $V_f$  ainsi qu'un volume de matrice  $V_m$ . Par la suite, nous utiliserons les indices  $c, f$  et  $m$  pour désigner les propriétés des composites et de leurs constituants fibres et matrice [16].

La proportion volumique des fibres est de :

$$v_f = \frac{V_f}{V_c} \quad (1.1)$$

La matrice a une proportion volumique qui s'exprime par :

$$v_m = \frac{V_m}{V_c} \quad (1.2)$$

Avec

$$v_m = 1 - v_f \quad (1.3)$$

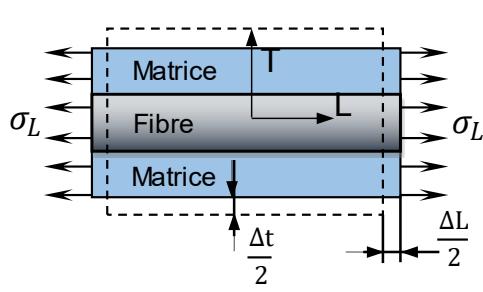
Puisque

$$V_c = V_f + V_m \quad (1.4)$$

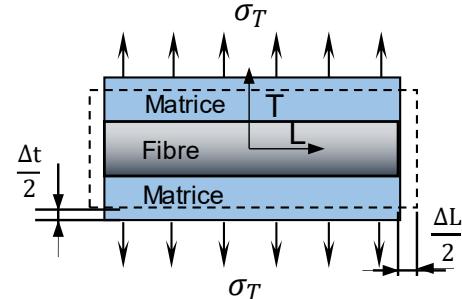
#### 1.4.2 Étude de la mécanique des composites structuraux

Une particularité de la mécanique des matériaux est de formuler des hypothèses simplifiées pour analyser le comportement des composites. Figure 1-3(a) illustre l'hypothèse selon laquelle, sous contrainte axiale, la fibre et la matrice présentent une déformation axiale

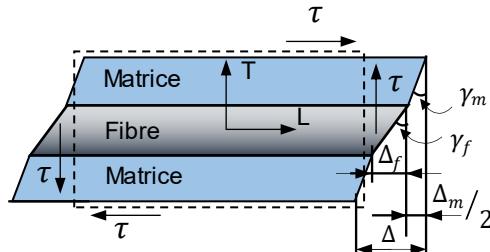
identique [17]. Lorsqu'un matériau représentatif est soumis à une contrainte transversale ou à un cisaillement pur, conformément aux schémas de la Figure 1-3(b) et (c), Il est supposé que cette contrainte agisse de manière simultanée sur les deux éléments, la matrice et la fibre [3]. À partir de ces hypothèses, on peut en déduire la rigidité structurale élastique d'un matériau composite unidirectionnel renforcé de fibres.



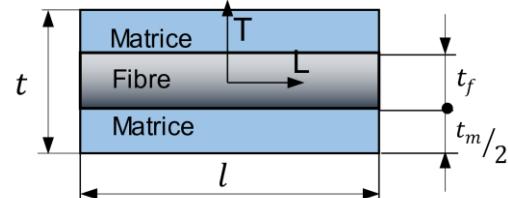
(a) Évaluation de  $E_L$ , sous l'hypothèse d'égales déformations :  $\varepsilon_L = \varepsilon_{Lf} = \varepsilon_{Lm}$ ,



(b) Évaluation de  $E_T$ , sous l'hypothèse d'égales contraintes normales :  $\sigma_T = \sigma_{Tf} = \sigma_{Tm}$



(c) Évaluation de  $G_{LT}$ , sous l'hypothèse d'égales contraintes tangentielles :  $\tau_L = \tau_f = \tau_m$



(d) Paramètres géométriques dans le plan L, T

Figure 1-3 : Modèles de détermination des constantes élastiques par l'approche de la mécanique des matériaux.

### Module de traction dans la direction longitudinale

Considérons l'hypothèse donnée dans la Figure 1-3(a), la force longitudinale qui en résulte sur l'élément conduit à :

$$\begin{aligned} \sigma_L t &= \sigma_{Lf} t_f + \sigma_{Lm} t_m \\ \Rightarrow E_L \varepsilon_L &= E_{Lf} \varepsilon_{Lf} \frac{t_f}{t} + E_{Lm} \varepsilon_{Lm} \frac{t_m}{t} \\ \Rightarrow E_L &= E_{Lf} v_f + E_{Lm} v_m \end{aligned} \quad (1.5)$$

## Module de traction transversale

Selon l'hypothèse illustrée à la Figure 1-3(b), l'allongement transversal résulte en :

$$\begin{aligned} \varepsilon_T t &= \varepsilon_{Tf} t_f + \varepsilon_{Tm} t_m \\ \Rightarrow \frac{\sigma_T}{E_T} &= \frac{\sigma_{Tf}}{E_f} \frac{t_f}{t} + \frac{\sigma_{Tm}}{E_m} \frac{t_m}{t} \Rightarrow \frac{1}{E_T} = \frac{v_f}{E_f} + \frac{v_m}{E_m} \end{aligned} \quad (1.6)$$

## Coefficient de Poisson

Considérons l'hypothèse donnée dans la Figure 1-3(c), la contraction dans le sens transversal conduit à :

$$\begin{aligned} \Delta t &= \Delta t_f + \Delta t_m \Rightarrow \\ -(v_{LT} \varepsilon_L) t &= -(\nu_f \varepsilon_{Lf}) t_f - (\nu_m \varepsilon_{Lm}) t_m \Rightarrow \nu_{LT} = \nu_f v_f + \nu_m v_m, \end{aligned} \quad (1.7)$$

## Rigidité au cisaillement

Considérons l'hypothèse donnée dans la Figure 1-3(c), la déformation par cisaillement dans le sens longitudinal conduit à :

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta_f + \Delta_m \Rightarrow \gamma t = \gamma_f t_f + \gamma_m t_m \Rightarrow \\ \frac{\tau}{G_{LT}} &= \frac{\gamma_f t_f}{G_f t} + \frac{\gamma_m t_m}{G_m t} \Rightarrow \frac{1}{G_{LT}} = \frac{\nu_f}{G_f} + \frac{\nu_m}{G_m} \end{aligned} \quad (1.8)$$

### 1.4.3 Influence de la nature de renforcement sur les propriétés structurelles des composites. Analyse comparative

Les renforts à base de fibres-époxy jouent un rôle majeur dans la performance des composites, leur impact étant modulé par leurs caractéristiques spécifiques et le domaine d'application visé. Les composites en verre-époxy présentent une résistance à la traction et à la flexion remarquable, les rendant ainsi appropriés pour des applications exigeant un rapport optimal entre résistance et poids [18]. Cependant, leur rigidité structurale est généralement moindre par rapport à d'autres types de renforts. En revanche, le composite bore-époxy se caractérise par une rigidité et une résistance supérieure, ce qui le rend souvent préféré dans les applications aéronautiques visant à limiter la déformation structurelle [19]. Les composites

en graphite-époxy se caractérisent par une rigidité structurale exceptionnellement élevée et un module de traction significatif, les rendant particulièrement adaptés à la fabrication de structures légères et rigides telles que les cadres d'aéronefs ou de satellites [20]. Les renforts en Kevlar-époxy sont réputés pour leur remarquable ténacité et leur résistance à l'impact, malgré une rigidité structurale moindre par rapport aux renforts en graphite [21]. Les variations observées sont dues à la fois à la composition chimique des matériaux et à l'organisation des fibres. Ces facteurs ayant un impact sur la réponse du matériau lorsqu'il est soumis à des contraintes [22].

Le Tableau 1-2 détaille les performances mécaniques des composites unidirectionnels renforcés. On y trouve les résistances à la traction et à la compression dans la direction  $x$  ( $X_t$ ) et ( $X_c$ ) et dans la direction  $y$  ( $Y_t$  et  $Y_c$ ), ainsi que la résistance au cisaillement ( $S$ ) [18].

Tableau 1-2 Comparaison des performances mécaniques des composites en fonction des renforts utilisés [2], [23].

Propriétés	Matériau composite renforcé unidirectionnel			
	Bore-Époxy (GPa)	Kevlar-Époxy (GPa)	Verre-Époxy (GPa)	Graphite-Époxy (GPa)
$E_L$	207	76	54	207
$E_T$	21	5,5	18	5
$G_{LT}$	7	2,1	9	2,6
$X_t$	1,38	1,38	1,035	1,035
$Y_t$	0,083	0,028	0,028	0,041
$S$	0,124	0,044	0,041	0,069
$X_c$	2,760	0,276	1,035	0,689
$Y_c$	0,276	0,138	0,138	0,117

## 1.5 Textiles structuraux pour les composites

La structure des tissus est formée par des fibres disposées dans deux directions perpendiculaires : l'une est appelée direction chaîne (direction de la longueur du rouleau de tissu) et l'autre est appelée direction trame.

La structure de tissage d'un textile, définie par le motif d'entrecroisement des fils de chaîne et de trame, est obtenue en faisant passer les fils de trame alternativement au-dessus et en dessous des fils de chaîne [11], [24]. Les tissages de la Figure 1-4 sont ordonnés selon une

progression croissante en termes d'adaptabilité aux surfaces complexes, de résistance, de rigidité structurale et de coût.

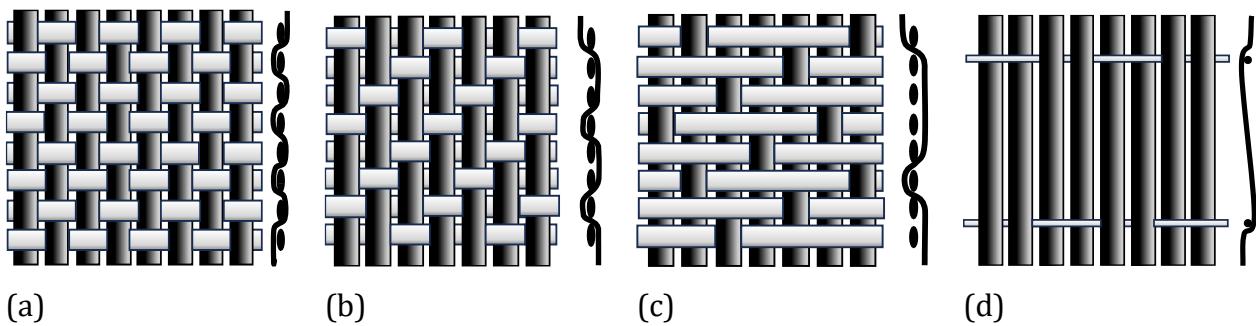


Figure 1-4 : Classification des motifs de tissage : (a) toile, (b) sergée, (c) satin et (d) unidirectionnel.

## 1.6 Structures stratifiées

Le terme "stratifié" est utilisé pour décrire la disposition des plis selon différentes orientations. Typiquement, les composites à fibres continues sont mis en œuvre sous forme de stratifiés, dont les couches sont orientées de façon à maximiser la résistance selon la direction principale. Orientés à  $0^\circ$ , les stratifiés unidirectionnels offrent des niveaux élevés de résistance et de rigidité structurale dans cette même direction. Néanmoins, la résistance de ces composites diminue de façon notable dans la direction orthogonale aux fibres, car la charge est surtout transmise à la matrice polymère, qui est moins résistante [15]. Dans la Figure 1-5, on peut observer le comportement statique du composite et de ses constituants. En général, les fibres affichent une résistance à la rupture est plus élevée à celle de la matrice [11]. Par contre, la matrice est plus ductile, ce qui entraîne une déformation à la rupture plus importante comparée à celle de la fibre.

Les fibres sont le principal composant de résistance aux charges axiales. La matrice, en revanche, distribue et stabilise ces charges entre les fibres, évitant ainsi leur déformation [25]. La matrice joue également un rôle essentiel dans le transfert des charges de cisaillement entre les plis et pour la tension perpendiculaire aux fibres. La matrice joue un rôle essentiel dans le transfert de charge pour le cisaillement entre les plis et lors de la tension transversale.

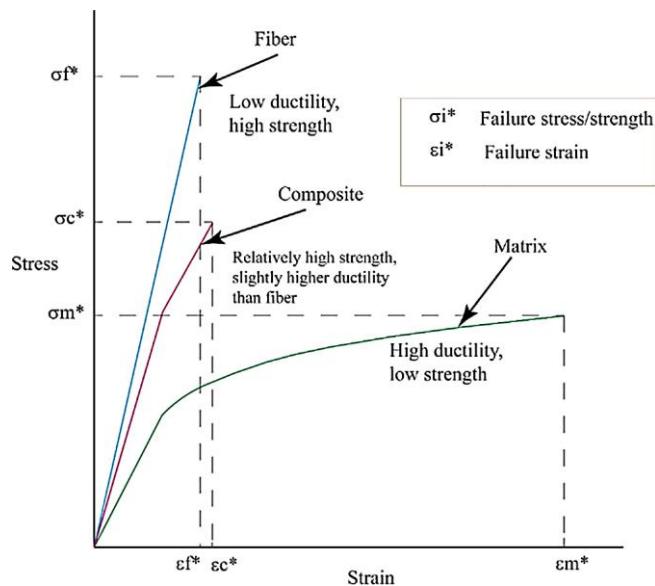


Figure 1-5 : Caractérisation statique des constituants et du composite [26].

Selon l'équilibre des fibres dans les directions chaîne et trame d'un composite stratifié, une configuration symétrique de type  $[0^\circ/90^\circ]_s$  a été utilisée, et la caractérisation du composite a été réalisée uniquement dans le sens de la chaîne [27].

Les exemples ci-dessous illustrent quelques types spécifiques de stratifiés ainsi que leurs codes de stratification standard [12].

### 1.6.1 Composite à fibres unidirectionnelles

Les angles d'orientation des fibres sont identiques dans toutes les couches d'un stratifié unidirectionnel, Figure 1-6(a).

### 1.6.2 Stratifié à plis angulaires

Selon la Figure 1-6(b), dans un stratifié à plis angulaires, les angles d'orientation des fibres dans les différentes couches varient, par exemple  $[0^\circ/+45^\circ/90^\circ/-45^\circ]$ .

### 1.6.3 Composite à plis croisés

Selon la Figure 1-6(c), dans un stratifié à plis croisés, les angles d'orientation des fibres dans les différentes couches sont alternés, comme par exemple  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ .

### 1.6.4 Stratifié symétrique

Un stratifié est dit symétrique si le matériau, l'angle et l'épaisseur des plis sont identiques au-dessus et au-dessous du plan médian. Un exemple de stratifié symétrique est :  $[0^\circ/30^\circ/\overline{60^\circ}]_s$

Donc, afin d'obtenir un stratifié symétrique, il faut que  $\theta(z) = \theta(-z)$ , où  $z$  est la distance par rapport au plan médian du stratifié.

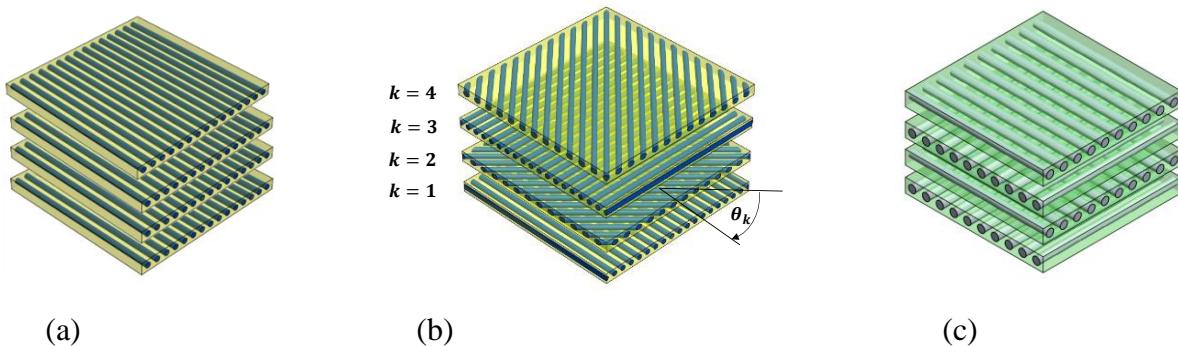


Figure 1-6 : Séquence d'empilage des stratifiés : (a) unidirectionnel, (b) à plis angulaires et (c) à plis croisés

Quelques exemples de stratifiés symétriques et leurs codes sont répertoriés [12].

$$1) [0^\circ/+45^\circ/90^\circ/90^\circ+45^\circ/0^\circ] \text{ Code : } [0^\circ/45^\circ/90^\circ]_s$$

L'indice S dans le code indique une symétrie par rapport au plan médian.

$$2) [0^\circ/+45^\circ/90^\circ/+45^\circ/0^\circ] \text{ Code : } [0^\circ/45^\circ/\overline{90^\circ}]_s$$

Une barre sur le nombre  $\overline{90^\circ}$  signifie que le plan de symétrie traverse le milieu de l'épaisseur du pli orientées à  $90^\circ$ .

$$3) [0^\circ/+45^\circ/-45^\circ/90^\circ/-45^\circ/+45^\circ/0^\circ] \text{ Code : } [0^\circ/\pm45^\circ/\overline{90^\circ}]_s$$

Les couches adjacentes  $+45^\circ$  et  $-45^\circ$  sont regroupées en  $\pm45^\circ$

$$4) [0^\circ/90^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ/30^\circ/30^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ] \text{ Code : } [0^\circ/90^\circ/0^\circ_3/30^\circ]_s$$

Trois plis adjacents à  $0^\circ$  sont regroupés sous la forme  $0^\circ_3$ .

$$5) [0^\circ/30^\circ/-30^\circ/+30^\circ/-30^\circ/+30^\circ/-30^\circ/+30^\circ/0^\circ] \text{ Code : } [0^\circ/(\pm30^\circ)_2]_s$$

Deux plis adjacents de  $\pm45^\circ$  sont regroupés comme  $(\pm45^\circ)_2$ .

6)  $[\theta/-\theta/\theta/-\theta/-\theta/\theta/-\theta/\theta]$  Code : $[\pm\theta]_{2S}$

Deux plis  $\pm\theta$  adjacents de chaque côté du plan de symétrie sont désignés par l'indice 2S.

### 1.6.5 Stratifié à plis angulaires symétriques

$[\theta/-\theta/\theta/-\theta/\theta/-\theta/\theta]$  Code : $[\pm\theta/\theta/-\bar{\theta}]_S$

Les stratifiés à plis angulaires symétriques contiennent un nombre impair de plis [12].

### 1.6.6 Stratifié symétrique à plis croisés

$[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  Code : $[(0^\circ/90^\circ)_2/\overline{0^\circ}]_S$

Notez que les stratifiés symétriques à plis croisés contiennent un nombre impair de plis.

### 1.6.7 Stratifié hybride

$[90^\circ_C/90^\circ_C/45^\circ_B/-45^\circ_B/0^\circ_G/0^\circ_G/-45^\circ_B/45^\circ_B/90^\circ_C/90^\circ_C]$  Code : $[90^\circ_{2C}/(\pm45^\circ)_B/0^\circ_G]_S$

Ici, C, B et G font référence aux fibres de carbone, de bore et de verre, dans cet ordre [2], [12].

### 1.6.8 Stratifiés à séquence d'empilement antisymétrique

Dans les stratifiés antisymétriques, le pli est orienté de manière antisymétrique par rapport à la ligne médiane du stratifié. Cela signifie que pour chaque couche d'angle d'orientation de fibre  $\theta$  au-dessus du plan médian, il y a une couche d'angle d'orientation de fibre  $-\theta$  avec un matériau et une épaisseur identique à une distance égale en dessous du plan médian. Donc, en ce qui concerne un stratifié antisymétrique,  $\theta(z) = -\theta(-z)$ .

Par exemple,  $\theta/-\theta/\theta/-\theta$  est un stratifié antisymétrique. En revanche,  $\theta/-\theta/-\theta/\theta$  est symétrique.

### 1.6.9 Stratifiés à configuration d'empilement asymétrique

Dans les stratifiés asymétriques, il n'y a ni symétrie ni antisymétrie.

Exemples :  $[0^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ]$  et  $[0^\circ/\theta/-\theta/90^\circ]$ .

## 1.7 Matrice et fibres. Une synergie vitale dans les matériaux composites

La matrice joue un rôle crucial en tant que matériau qui renforce et protège les fibres du composite. De plus, elle permet le transfert des charges lorsque les fibres se rompent. En contrepartie, la matrice possède des performances physiques et mécaniques moindres que celles des fibres [28].

Les matériaux polymères sont souvent définis par des propriétés viscoélastiques ou viscoplastiques, ce qui implique que leur structure est sensible aux variations de temps, de température et d'humidité [29]. En effet, ces changements ont un impact sur le comportement mécanique des polymères. Un tableau récapitulatif des propriétés des matrices polymères typiques est inclus dans le Tableau 1-3.

Tableau 1-3 Propriétés typiques de la matrice [30].

Matériaux	Densité (kg/m <sup>3</sup> )	$E_t$ (GPa)	$E_c$ (GPa)	$\sigma_t$ (MPa)	$\sigma_c$ (MPa)	$\nu$	$\alpha$ (10 <sup>-6</sup> /°C)
Polyester	1200	2,5-4,0	—	45-90	100-250	0,37	100-200
	1400					0,40	
Époxy	1100	3,0-5,5	—	40-100	100-200	0,38	45-65
	1350					0,40	
NARMCO 2387 (époxy)	1210	3,38	3,86	29	158	—	—
PVC	1400	2,8	—	58	—	—	50
Nylon	1140	2,8	—	70	—	—	100
Polyéthylènes	960	1,2	—	32	—	—	120

### 1.7.1 Composites à matrice polymère

Généralement, ces composites se distinguent par leur faible densité, leur nature viscoélastique et leur rigidité limitée [31]. L'intégration de fibres comme renfort est fondamentale pour l'augmentation de la durabilité et la performance des matrices [3]. Les polymères thermodurcissables et thermoplastiques sont les matrices les plus courantes, les thermodurcissables sont privilégiés pour les applications structurales en raison de leurs propriétés. Les thermodurcissables ont une résistance supérieure aux milieux corrosifs et aux

solvants par rapport aux thermoplastiques [32]. Le choix de la résine est déterminé par des facteurs tels que le coût, les contraintes de conception et les considérations liées à la production.

### **1.7.2 Matrice à graphite**

Les composites à matrice de carbone les plus courants sont les composites carbone-carbone [11], où la matrice et le renfort sont tous deux composés de carbone (graphite). Le carbone, en raison de ses propriétés remarquables, est utilisé dans une variété de matériaux, incluant les diamants, les fibres de renfort et les produits lubrifiants [2]. Les techniques d'élaboration de composites carbone-carbone donnent lieu à la formation de matrices en carbone, lesquelles se caractérisent par leur fragilité et leur sensibilité à la rupture [1], [3]. La conductivité thermique est variable et dépend des paramètres de production et de la nature des matériaux constitutifs.

## **1.8 Composites sandwiches. Principes et utilisations**

Les sandwiches sont généralement décrits dans la littérature comme étant composées de deux peaux minces (supérieure et inférieure) avec des propriétés mécaniques élevées, séparées par le noyau (isotrope, anisotrope ou orthotrope), un matériau léger avec des propriétés mécaniques relativement faibles [33–36]. Les trois couches sont fermement liées ensemble et le matériau de la face est beaucoup plus rigide que le matériau du noyau, Figure 1-7. On suppose que les matériaux de la face et du noyau sont tous deux isotropes [37].

Les sandwiches à âme en nid d'abeille constituent un matériau majeur dans plusieurs domaines de construction. Ces structures ont prouvé leur efficacité lors des charges dynamiques dans les applications spatiales et militaires [37–40].

### 1.8.1 Composants Constitutifs des panneaux Sandwiches

Les panneaux sandwichs sont composés de différents matériaux pour l'âme et les faces en dépendance de l'application prévue, des conditions de chargement, de l'accessibilité et du prix [11]. Dans le domaine aérospatial, Les revêtements sont généralement réalisés en verre-époxy ou en verre Vinyl Ester, tandis que le noyau est formé de matériaux alvéolaires, de balsa ou de mousses. Dans le domaine du génie civil, la mousse à cellules fermées ou ouvertes est couramment utilisée. Les matériaux phénoliques, de nature cellulaire, incluent le polystyrène, qui se caractérise par une certaine inflammabilité [41]. Ces matériaux sont utilisés dans la fabrication du fuselage, des ailes et des petits composants des aéronefs qui sont conçus à partir de polyuréthane, incluant les profils aérodynamiques [1], [2]. Par la suite, on retrouve le chlorure de polyvinyle (PVC), qui offre une grande résistance à la compression et une grande durabilité, ainsi qu'une résistance au feu [42].

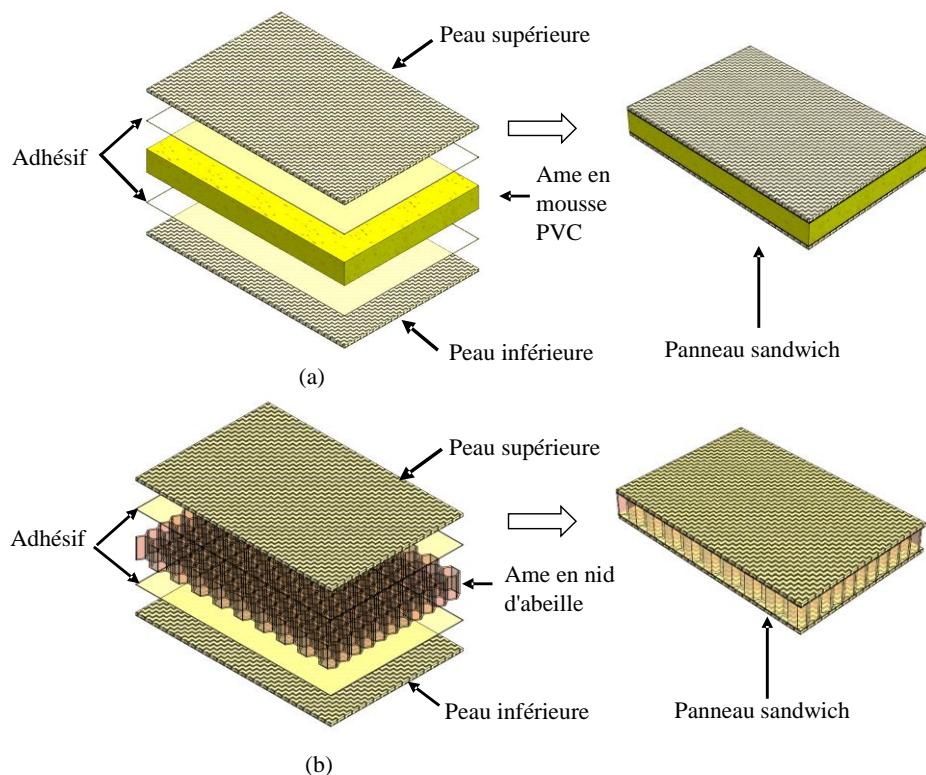


Figure 1-7 : Panneaux à âme légère, innovations entre (a) mousse et (b) géométrie alvéolaire

Différentes variantes de matériaux d'âmes ont été développées et adaptées pour diverses applications, généralement en adoptant une structure cellulaire hexagonale afin d'optimiser leur efficacité.

Le coût élevé des noyaux en nid d'abeille a limité leur utilisation, principalement dans le domaine de l'aérospatiale.

### 1.8.2 Catégories de noyaux de structures sandwiches

#### Noyaux en mousses

Les noyaux en PVC et en polyuréthane ont fait leur apparition dans les années 1950 et 1960, et sont aujourd'hui répandus dans des applications à coût modéré ou faible. Les matériaux en PVC, employées dans les âmes des structures sandwiches, sont disponibles sous forme thermodurcissable ou thermoplastique. Le Tableau 1-4 résume les propriétés de certains composites thermodurcissables et thermoplastiques.

Tableau 1-4 : Propriétés de certains composites thermodurcissables et thermoplastiques [43].

		Densité ( $g/cm^3$ )	Module ( $GPa$ )	Résistance à la traction ( $MPa$ )	Allongement à la rupture (%)	Conductivité thermique ( $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ )	Coefficient de dilatation thermique ( $ppm/K$ )
Thermodurcissable	Époxy	1,2 à 1,5	3, 1-6, 2	35,5-99	1,5 à 6,5	0,2	56
	Polyester thermodurcissable	1,2 à 1,5	3-4,5	40-92	3	0,4	100-250
Thermoplastique	Polypropylène	1,05	1 à 4,5	25-38	>300	0,3	61
	Nylon 6-6	1,14	1,4 à 2,8	60-75	40-80	0,3	110
	Poly éther imide	1,27	3, 3	110	60	-	90
	Poly sulfone	1,25	2, 2	76	50-100	-	70
	Polycarbonate	1,06- 1,20	2,2 à 2,5	45-70	50-100	0,3	62
	Sulfure de poly phénylène	1,36	3,95	(65)	4	-	63
	Polyéther éther cétone	1,26- 1,32	3,55	94	51	-	54
	Polyamide imide	1,4	4,90	190	17	-	47

La mousse PVC AIREX C70 est l'une des mousses à usage commercial les plus couramment utilisées. Il s'agit d'une mousse à base de polymères, réticulée et composée de cellules fermées qui présente une combinaison remarquable de rigidité, de rapport résistance/poids élevé et de ténacité supérieure. De plus, cette mousse est exempte de CFC, possède une absorption d'eau négligeable et offre une excellente résistance aux produits chimiques. Une structure à cellules fines offre une excellente surface de liaison.

Le Tableau 1-5 présente, de manière synthétique, les caractéristiques mécaniques et physiques des mousses AIREX C70 en accord avec la plupart des résines et des techniques de production [11].

Tableau 1-5 : Propriétés physiques et mécaniques des mousses AIREX C70

Propriétés physiques et mécaniques	AIREX C70, 90 (MPa)	AIREX C70, 75 (MPa)	AIREX C70, 55 (MPa)	AIREX C70, 48 (MPa)	Normes
Densité	100 kg/cm <sup>3</sup> 90 – 115 kg/m <sup>3</sup>	80 kg/m <sup>3</sup> 72 – 92 kg/m <sup>3</sup>	60 kg/m <sup>3</sup> 54 – 69 kg/m <sup>3</sup>	48 kg/m <sup>3</sup> 43 – 55 kg/m <sup>3</sup>	ISO 845 ISO 845
Resistance a la traction	>2,2 2,7	≥ 1,6 2	≥ 1 1,3	≥ 0,8 0,95	ISO 5271-2 ISO 527 1-2
Allongement a la rupture	> 12% 23%	> 10% 18%	> 10% 16%	> 8% 10%	ISO 1922 ISO 1922
Module de traction	> 65 84	≥ 50 66	> 35 45	> 28 35	ISO 5271-2 ISO 527 1-2
Resistance a la compression	≥ 1,7 2	≥ 1,1 1,45	≥ 0,75 0,9	> 0,5 0,6	ISO 844 ISO 844
Module de compression	>110 130	≥ 80 104	> 55 69	> 35 48	DIN 53421 DIN 53421
Module de glissement	> 34 40	> 24 30	> 18 22	> 14 16	ASTM C393 ASTM C393
Resistance au cisaillement	> 1,4 1,7	≥ 1 1,2	> 0,7 0,85	> 0,5 0,55	ISO 1922 ISO 1922

AIREX C70 se révèle être un matériau de base optimal pour diverses structures sandwiches légères qui sont soumises à des charges statiques et dynamiques [44]. Dans la Figure 1-8, les diagrammes à bulles montrent les différentes applications des mousses en ingénierie.

#### a) Caractéristiques :

- Excellent rapport résistance/rigidité/poids ;
- Bonne résistance aux chocs ;

- Faible absorption de résine ;
- Haute résistance à la fatigue ;
- Résistance au feu adéquate (auto extingueable) ;
- L'isolation acoustique et thermique ;
- Une résistance élevée au styrène.

### b) Applications

- Marine : coques, ponts, cloisons, superstructures, intérieurs ;
- Route et rail : panneaux de toit, intérieurs, planchers, portes, cloisons, jupes latérales, parties avant Aéronef : intérieurs, radômes, chariots de cuisine, aviation générale (fuselage et aile) ;
- Loisirs : skis, snowboards, planches de surf, wakeboards, canoës, kayaks ;
- Industriel : outillage, réservoirs, conduits, conteneurs, couvercles.

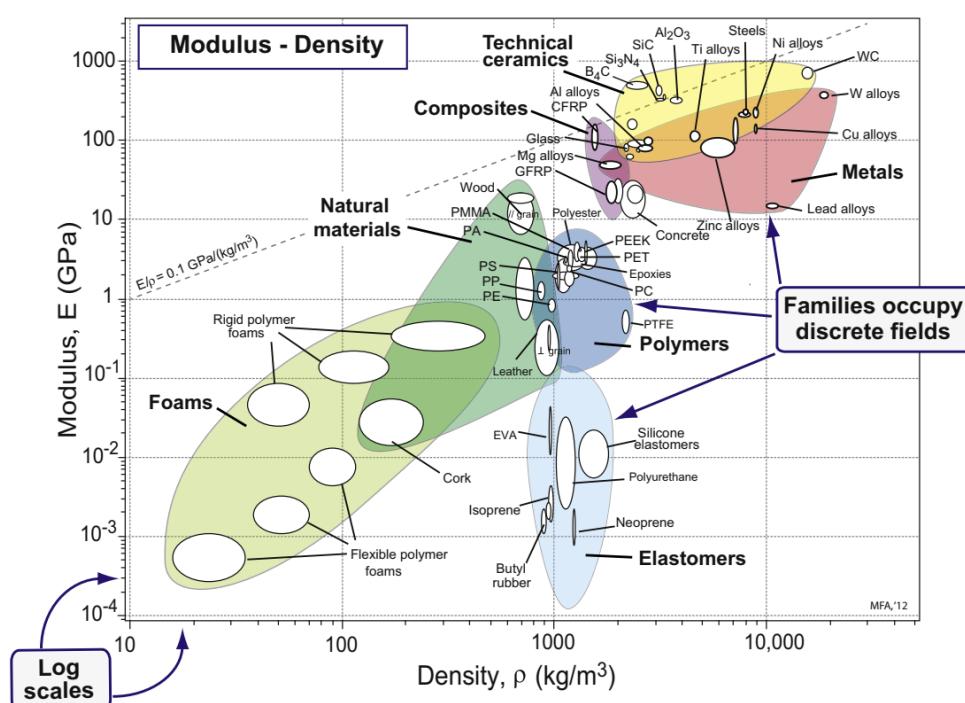


Figure 1-8 : Diagramme à bulles du Module de traction  $E$  et de la densité  $\rho$ . Les familles occupent des zones discrètes du diagramme [45].

### Ames à structures en nids d'abeilles

Les nids d'abeille constituent une classe de matériaux aux applications variées largement

utilisés dans l'ingénierie des structures sandwiches, couvrant un éventail allant des éléments en papier et en carton aux configurations à haute résistance qui permettent d'atteindre des performances de légèreté optimales pour les applications aérospatiales. Ces matériaux ont la capacité d'être transformés en structures composites planes et courbées pour se conformer à des géométries complexes sans la nécessité l'exercice d'une force mécanique ou l'application de conditions thermiques élevées.

La fabrication des structures en nid d'abeille peut se faire via l'extrusion, le découpage ou divers processus sophistiqués qui intègrent des matériaux comme le papier et l'aluminium. Ces structures peuvent être imprégnées de mousse rigide pour améliorer la zone de liaison, améliorer les caractéristiques mécaniques et fournir une isolation thermique et acoustique [46].

## 1.9 Présentation des procédés d'élaboration des composites

Il existe une multitude de procédés pour créer des composites à matrice polymère, allant des techniques manuelles faisant appel à une main-d'œuvre qualifiée aux processus entièrement automatisés [3], indiquant ainsi le début d'une évolution majeure de ces machines de production.

Chaque méthode employée dans la fabrication se caractérise par son ensemble distinct d'avantages et d'inconvénients, ce qui indique qu'aucune méthode ne peut être considérée comme meilleure à une autre. Néanmoins, l'applicabilité de chaque méthode est conditionnée par l'arduité du composant à produire [7].

Pour développer efficacement des composites à base de polymère avec fibres, il est vital d'assurer une fusion parfaite entre les composants matriciels et fibreux. Après cela, un processus exothermique contribue à consolider davantage la matrice [47].

Ce chapitre fournit un aperçu général des techniques primordiales utilisées dans le processus

de fabrication dont la classification est présentée graphiquement dans la Figure 1-9.

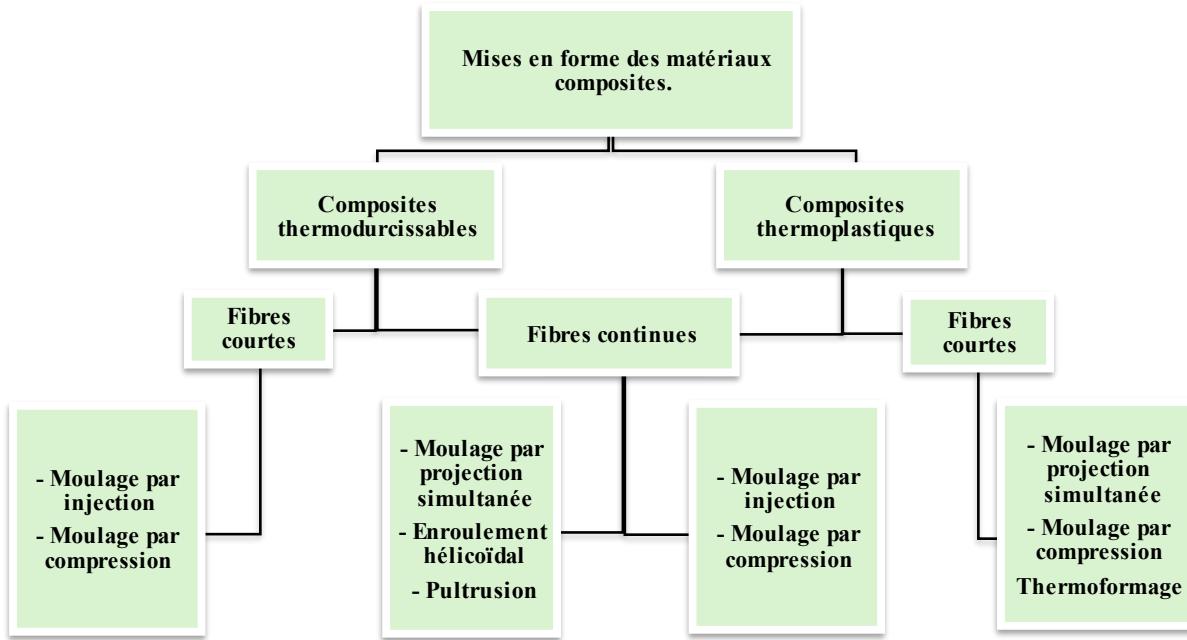


Figure 1-9 : Technologies de conception des composites polymères.

### 1.9.1 Stratification manuelle en contact

Le procédé de stratification manuelle en contact est considéré comme la technique la plus élémentaire et économique pour le traitement des composites thermodurcissables, en raison de l'équipement minimal requis. Néanmoins, la qualité des composants fabriqués est étroitement liée aux compétences de l'opérateur, ce qui en fait un processus hautement spécialisé [2], la procédure est illustrée dans la Figure 1-10. Le matériau de renforcement utilisé est principalement un textile sec. Les praticiens introduisent le renfort dans un moule, puis drapent et ajustent méticuleusement le tissu pour l'adapter aux caractéristiques géométriques de la cavité du moule [7].

La résine est appliquée à la main, soit à l'aide de rouleaux, soit de pinceaux. Lorsqu'il s'agit d'utiliser la matrice par application manuelle, il est préférable de choisir une résine à faible viscosité. Cependant, il est difficile d'assurer un mouillage adéquat des tissus denses ou des composites à forte teneur en fibres lors du processus d'installation manuelle. Les pièces

durcissent dans des conditions atmosphériques et, par conséquent, l'outillage peut être peu coûteux et de grande taille, ce qui signifie que la taille de la pièce à fabriquer n'est pas limitée par l'équipement. Les auteurs des références [48–50] éludcent l'importance d'établir et de draper des préformes sèches pour garantir un ajustement optimal du tissu dans la cavité du moule.

Le moule est généralement fabriqué à partir de composites, bien qu'il puisse également être construit en aluminium ou en acier. Le moulage par contact est une méthode populaire chez les passionnés pour produire divers éléments structurels essentiels, notamment les coques navales et les pales des turbines éoliennes [2], [11]. En complément, les techniques de moulage par contact peuvent être utilisées pour réaliser des panneaux sandwiches qui intègrent une structure interne alvéolaire lors du montage final.

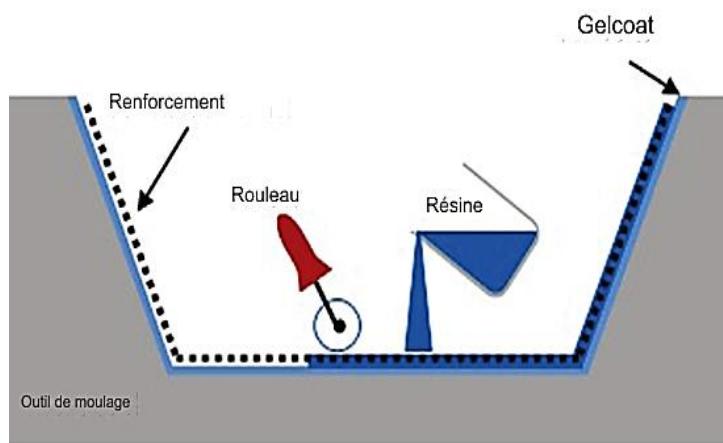


Figure 1-10 : Mécanismes de la stratification manuelle.

### 1.9.2 La procédure de pulvérisation en simultané des polymères

La méthode du moulage par pulvérisation peut être considérée comme une évolution ou un complément du moulage manuel, qui consiste à utiliser un pistolet pulvérisateur pour projeter sous pression un mélange composé de résine et de fibres courtes. Le matériau formant la matrice peut être combiné avec les renforts ou appliqué simultanément par projection [51]. Après projection, la couche de fibres imprégnées de résine est ensuite compactée. Un schéma

détaillé du processus de moulage par projection est illustré par la Figure 1-11. On utilise cette méthode afin de produire des composites à faible charge, quel que soit le volume fibreux ou les dimensions requises pour les pièces [52]. Les matériaux couramment utilisés incluent l'époxy, les esters de polyvinyle, la résine de polyuréthane et les fibres végétales naturelles [53].

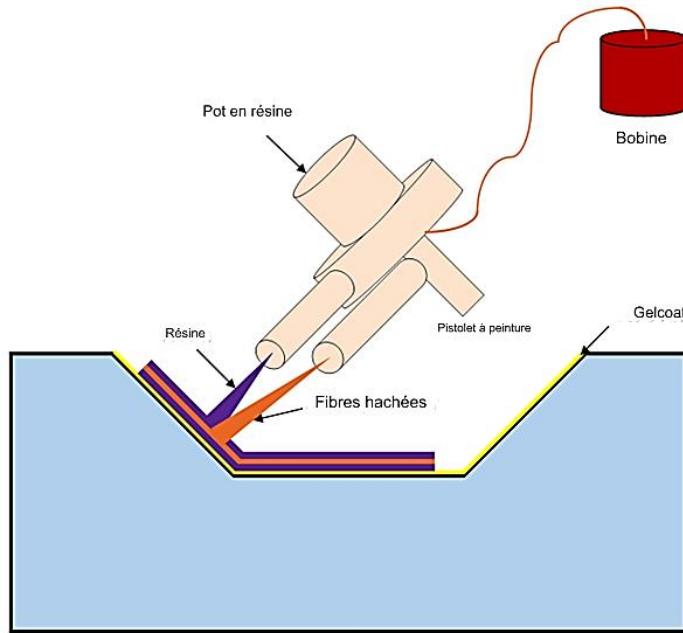


Figure 1-11 : Fabrication de composites via la pulvérisation [51].

La technique de fabrication de composites par pulvérisation est couramment utilisée aussi bien pour des productions unitaires que pour des productions sérielles. Les structures composites légères sont employées dans divers secteurs tels que la construction de carrosseries de caravanes, de capots de véhicules utilitaires et de certains petits kayaks pneumatiques [2], [11]. Parmi les autres applications, on trouve des produits industriels, des réservoirs de stockage et des coques de bateaux [1], [11].

L'application de la pulvérisation représente une méthodologie répandue et bénéfique pour la fabrication de produits caractérisés par des volumes faibles à moyens, offrant des dépenses réduites en termes de production, d'outillage et de matériaux par rapport aux techniques alternatives.

### 1.9.3 Technologie du moulage composite par infusion sous vide

L'emploi de la technique de moulage sous vide, Figure 1-12, requiert la combinaison du vide et de la pression ambiante de manière simultanée. Après l'application du gel-coat, le renfort est positionné sur un moule rigide avant que la résine ne soit coulée. Par la suite, la membrane d'étanchéité (telle qu'une feuille de caoutchouc, de nylon, etc.) est appliquée sur le contre-moule [54]. La création d'une dépression grâce à une pompe à vide, appliquée au moule et au contre-moule poreux, permet d'expulser les bulles d'air de la résine et de favoriser son expansion. Il est concevable de limiter le contre-moule à une unique membrane d'étanchéité. Ce procédé de moulage est parfaitement adapté à la production de pièces en petites ou moyennes séries. Il contribue à l'amélioration des performances mécaniques en assurant une répartition uniforme de la résine et en réduisant la génération d'interstices d'air [55]. En utilisant un contre-moule rigide, il est possible d'obtenir une qualité de surface élevée sur les deux côtés. Cependant, le rythme de production est assez bas [56].

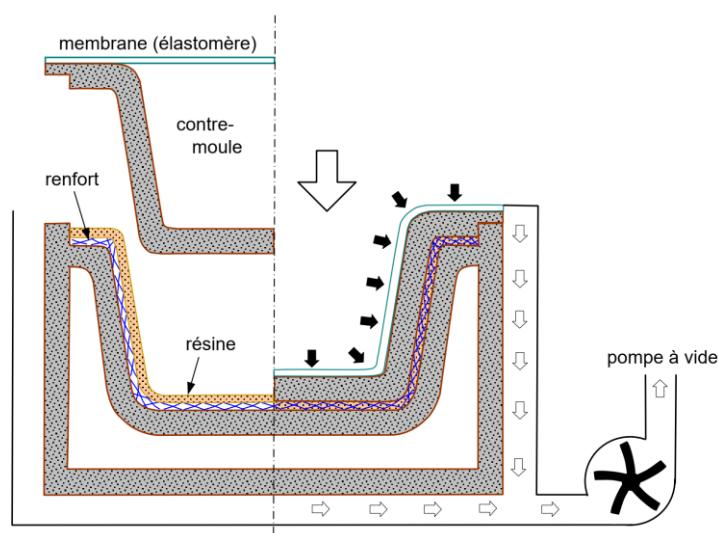


Figure 1-12 : Moulage sous vide [54].

### 1.9.4 Enroulement filamentaire

Ce procédé permet de fabriquer, par enroulement filamentaire, des pièces tubulaires et des structures spécialisées, notamment des réservoirs haute pression. Le procédé consiste à

enrouler les fibres imprégnées de résine à l'angle souhaité sur un mandrin rotatif [57]. La Figure 1-13 montre le passage des fibres dans le bain de résine. Après imprégnation, elles se déplacent par des mouvements alternatifs du guide-fils, tandis que le mandrin tourne à une vitesse spécifiée. L'angle souhaité est obtenu en contrôlant le mouvement du guide et du mandrin. Le procédé peut être automatisé pour fabriquer des pièces en grand volume de manière rentable [58].

Ce procédé est utilisé dans la production de grands réservoirs-haute pression de transport de gaz liquéfié. On rapporte que le recours aux composites dans la conception des réservoirs de gaz présente un avantage en termes de sécurité, grâce à leur haute résistance aux chocs, à leur capacité de résister à la corrosion et à leurs propriétés anti-explosion [59]. Les citernes cylindriques en composites sont principalement fabriqués à partir d'époxy-carbone en ayant recours à la technique d'enroulement filamentaire [11].

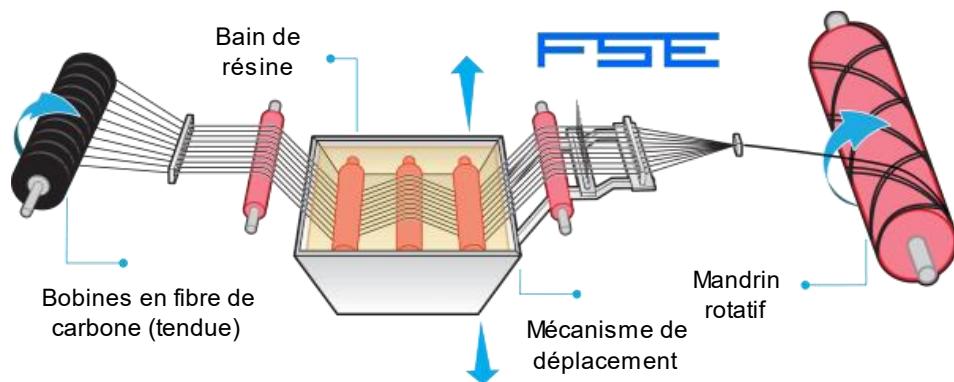


Figure 1-13 : Schéma du processus d'enroulement filamentaire [40].

### 1.9.5 Procédé de pultrusion

La pultrusion, représentée dans la Figure 1.14, est un procédé qui consiste en l'extrusion en continu d'un mixage de fibres et de résine à travers une matrice chauffée dans le but de fabriquer des éléments tels que des profilés en U et en I. Il d'une façon automatisée et continue [51]. Cette méthode est assez rapide du fait qu'elle permet d'atteindre des valeurs de résistance extrêmement élevées mais elle est restreinte aux structures de section constante.

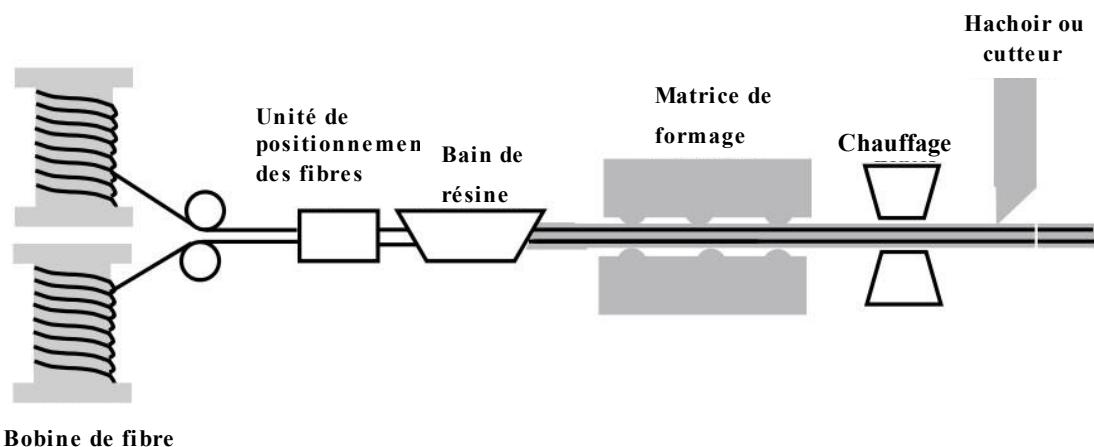


Figure 1-14 : Schéma représentative de la méthode de pultrusion. [13].

### 1.9.6 Moulage par compression de pré-imprégnés

Il est possible d'employer la technique de moulage par compression de pré-imprégnés en suivant une séquence simple impliquant l'utilisation de pré-imprégnés et de moules chauffés. [60]. Un schéma simplifié du procédé est présenté par la Figure 1-15 avec les six étapes suivantes :

- On pose les pré-imprégnés sur une plaque plate ;
- On préchauffe le stratifié dans un four jusqu'à atteindre la température de fusion.
- Le stratifié chauffé est placé dans un moule chauffé à une température supérieure à celle de transition vitreuse ;
- Le stratifié chauffé est ensuite déformé par le moule chauffé ;
- Lorsque la formation du stratifié est achevée, le moule subit un processus de refroidissement ;
- Finalement, le produit est démoulé.

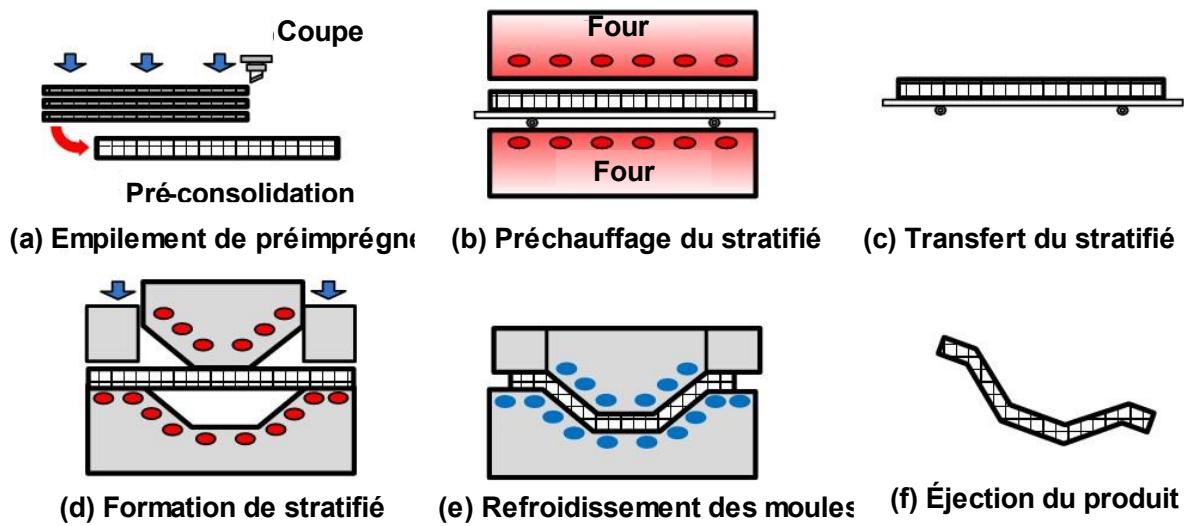


Figure 1-15 : Procédé de moulage par compression de pré-imprégnés [60].

## 1.10 Domaines d'usage des composites

Les composites sont de plus en plus employés en tant que matériaux d'ingénierie avancés offrant des performances supérieures, et ils trouvent des applications dans de nombreux domaines, notamment le génie civil, le secteur automobile, le domaine de l'électronique, la technologie aérospatiale, et autres [61]. Les composites ont été incorporés pour la première fois dans les structures des fuselages des avions dès les années 1970 afin d'améliorer leurs performances et leur longévité [62]. L'incorporation de composites dans les structures principales des avions commerciaux a débuté en 1977 dans le cadre de l'initiative Advanced Composite Structures de la NASA, avec l'intégration du stabilisateur horizontal sur le Boeing 737 [63].

La conception de BOEING intègre plus de 50% de structures composites, Figure 1-16, représentant ainsi une avancée significative dans l'application des composites dans le domaine de l'aviation commerciale [64]. En parallèle, l'avion de ligne Airbus A350 est élaboré en utilisant une proportion équivalente de composites dans sa conception.

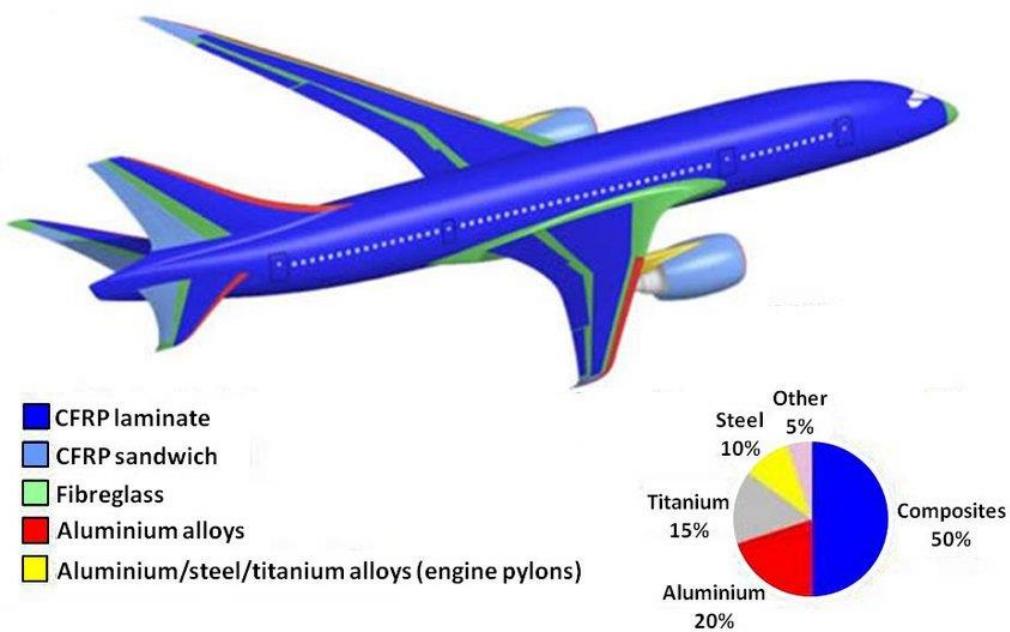


Figure 1-16 : Utilisation de composites dans les avions commerciaux.

# **CHAPITRE 2 :**

## **COMPORTEMENT STRUCTURAL ET DEGRADATION DES COMPOSITES**

## 2 Comportement structural et dégradation des composites

### 2.1 Introduction

La compréhension et l'étude des dommages subis par les composites constituent un domaine de recherche particulièrement complexe et essentiel. En effet, les processus d'endommagement des composites se démarquent nettement de ceux observés dans les matériaux caractérisés par leur homogénéité ou leur isotropie [65]. Les dégradations constatées dans les matériaux composites peuvent revêtir diverses formes, allant de la séparation microscopique entre la fibre et la matrice, à l'apparition de fissures et de délaminages macroscopiques à l'intérieur de la matrice [2], [3]. En pratique, il est crucial de prendre en considération deux catégories de charges pour le phénomène de décollement entre les fibres et la matrice : la charge normale, qui agit perpendiculairement à la surface de contact, et la charge tangente, qui influence le glissement entre les deux matériaux [66]. Le scénario de délaminage le plus intuitif est celui où la charge est exercée à 90° par rapport aux fibres.

Les composites à base de fibre de carbone présentent une adhérence limitée entre les fibres et la matrice, avec un module élastique des fibres généralement plus élevé que celui de la matrice. Cela se traduit par une amélioration de la résistance aux dommages provoqués par le détachement des fibres [67].

### 2.2 Exploration des modes de dégradation des stratifiés unidirectionnels

Dans le contexte des stratifiés unidirectionnels, une multitude de processus de détérioration peuvent interagir de façon synergique, notamment la rupture et le détachement des fibres, la formation de fissures dans la matrice et la redistribution des contraintes après la rupture des fibres [2]. Cela peut conduire à un phénomène dans lequel l'énergie de rupture globale du composite dépasse les énergies de fracture cumulées de ses composants constitutifs [68].

Mc Coll et Morley [69] ont mené une étude sur la propagation des fissures dans les composites à fibres hybrides. Leur étude a confirmé que l'intégration d'un élément fibreux supplémentaire, méticuleusement conçu pour augmenter l'énergie nécessaire à la rupture de la matrice, pouvait améliorer de manière significative la stabilité des fractures transversales dans une matrice particulièrement fragile.

Des recherches antérieures [65], [70], [54] ont élucidé l'existence de trois classes distinctes des mécanismes de dommages au sein d'un composite unidirectionnel. Les phénomènes examinés comprennent plusieurs types d'endommagement : Le décollement à l'interface par cisaillement affectant l'interface fibres-matrice, la fissuration matricielle et la fracture des éléments de renfort [3], [11]. Une représentation simplifiée de chaque type d'endommagement est fournie à la Figure 2-1.

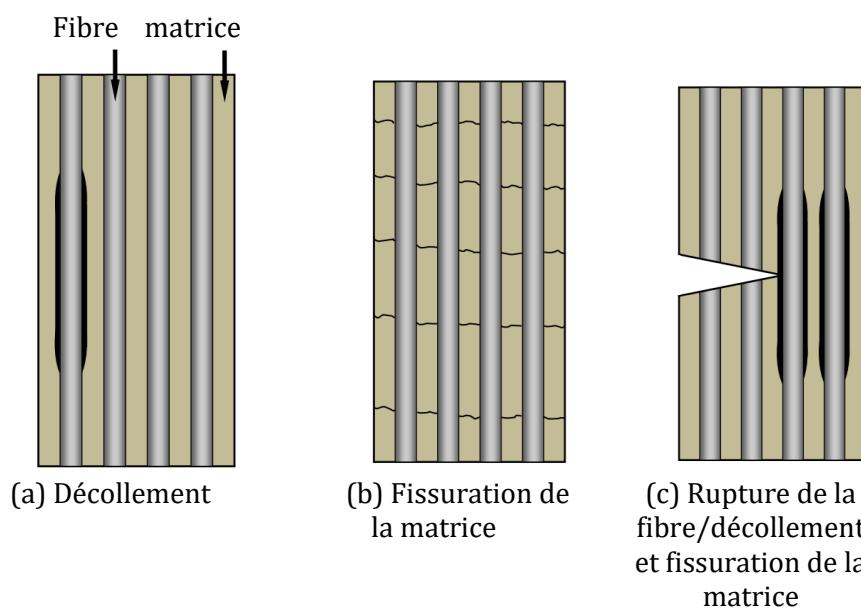


Figure 2-1 : Illustration simplifiée de la détérioration d'un composite consolidé par des fibres.

### 2.2.1 Rupture interfaciale et décollement dans les matériaux stratifiés

Une charge d'impact exercée sur un composite entraîne une déformation concentrée significative, ce phénomène engendre des répartitions transverses des contraintes tangentialles, qui peuvent être nocives, notamment en entraînant le décollement des fibres de la matrice adjacente dans la zone d'interface [1], [11].

Cela se manifeste par une propagation le long de l'interface fibre-matrice, ce qui permet d'absorber davantage d'énergie comparativement à une fracture transversale. Quand la concentration de contrainte supportée par les fibres dans la zone de décollement excède leur résistance à la traction maximale, ces fibres peuvent subir des fractures, entraînant par la suite la formation d'une fissure transversale du composite.

### 2.2.2 Fissuration matricielle. Amorçage et propagation

Les fissures se manifestent en général lorsque la matrice présente une fragilité sous des contraintes inférieures à celles requises pour la fracture des fibres [2], [11]. Lorsque des charges moins importantes sont exercées sur le composite, l'extension des fissures à l'intérieur de la matrice peut être réduite au niveau des zones d'interface. En revanche, lorsqu'elle est exposée à des charges importantes, l'accumulation de contraintes au bout de la fissure peut entraîner la rupture des fibres [3], [11]. Des tests de traction ont été menés sur des stratifiés croisés afin d'élucider les mécanismes qui conduisent à l'apparition de fissures transversales [71].

La Figure 2-2(a) montre que le premier dommage à se développer était une décohésion fibre-matrice. Au fur et à mesure que l'échantillon était davantage constraint, les décollements se sont fusionnés et ont formé une fissure transversale, Figure 2-2(b), [71].

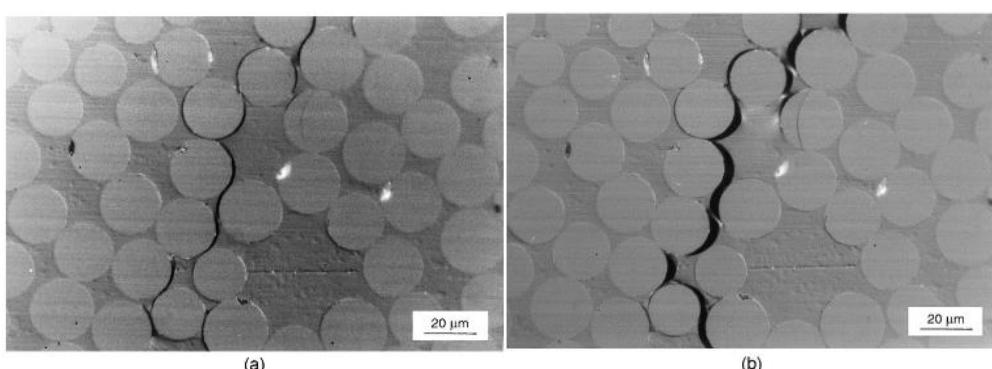


Figure 2-2 : (a) Décohésions fibres-matrice se forment et (b) Une fusion se produit au niveau des fissures transverses plus longues.

### 2.2.3 Processus de dégradation des fibres de renforcement

Une fissure présente à au sein de la matrice a la capacité de se propager sous une charge soutenue jusqu'à ce qu'elle croise une région interfaciale, dans laquelle une fibre est détériorée, ce phénomène se manifeste quand la contrainte interfaciale de cisaillement dépasse la tension maximale de la fibre altérée dans le composite [3].

Les fragments de fibres fractionnés sont retirés de leurs cavités cylindriques dans la matrice lors d'un cycle de traction ultérieur. La Figure 2-3(a) illustre de manière schématique, le processus d'arrachement des fibres dans un composite, tandis qu'une illustration réaliste de l'extraction des fibres dans une matrice de fibres de bore/aluminium est présentée à la Figure 2-3(b). Un travail est effectué tout au long de la phase de délamination ainsi que pendant l'arrachement des fibres, en opposition à la résistance d'adhérence à l'interface [2], [3]. L'énergie maximale nécessaire au détachement est définie par l'équation suivante [65].

$$W_d = \left( \frac{\pi d^2}{24} \right) \left( \frac{\sigma_{fu}^2}{E_f} \right) x, \quad (2.1)$$

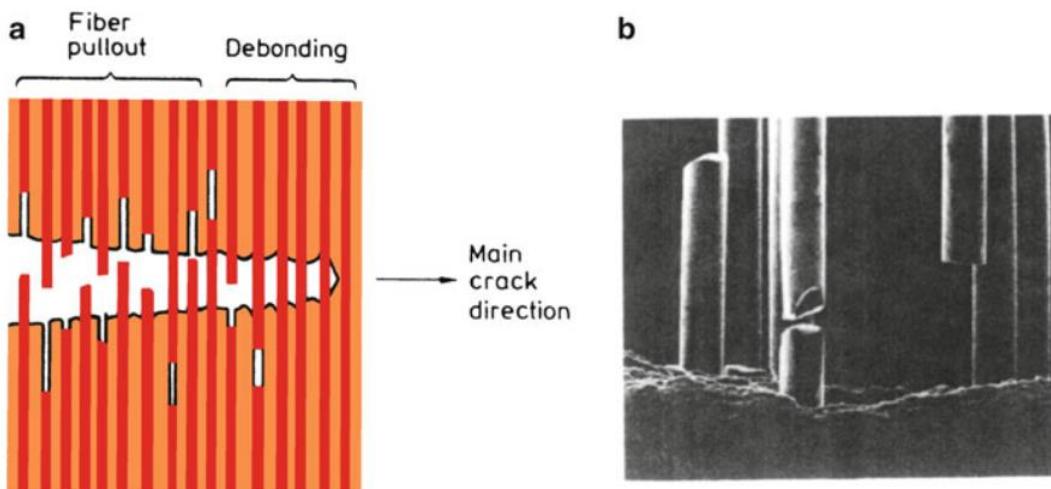


Figure 2-3 : Représentation schématique de l'arrachement des fibres : (a) dans un composite à fibres-continues, (b) dans un composite aluminium/bore [65].

## 2.3 Estimation des critères de rupture et prédition de la défaillance des matériaux sandwiches

Les structures de type sandwiches sont susceptibles de présenter différents dommages. Selon leur forme et l'ampleur des sollicitations, plusieurs processus de détérioration peuvent se produire, définissant ainsi les capacités maximales de la structure [72].

Il est crucial que les producteurs de structures sandwiches intègrent dans leur analyse tous les modes de rupture potentiels pour garantir la fiabilité et la sécurité des structures [73]. Les différentes catégories majeures de rupture sont recensées et illustrées de manière simplifiée par la Figure 2-4.

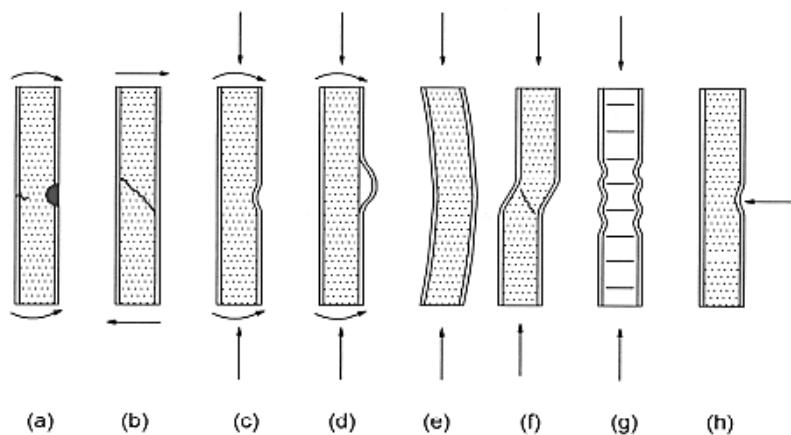


Figure 2-4 : Les différentes formes de défaillance des structures sandwiches [3].

Une multitude de critères de défaillance est applicable aux composites sandwiches, couvrant un large éventail de complexité, depuis les critères élémentaires jusqu'aux modèles très avancés. On se limitera seulement aux critères qui sont principalement utilisés par les ingénieurs lors de la phase de conception et d'analyse [2].

### 2.3.1 Analyse de la défaillance des peaux sous chargement axial

En se basant sur les matériaux employés et le critère de défaillance choisi, on considère qu'une face ou un noyau a subi une détérioration soit lorsqu'une déformation se manifeste, soit lorsque le composant est brisé, Figure 2-4(a).

Ainsi, chaque constituant du matériau présente un seuil maximal de contrainte admissible, déterminé selon qu'il corresponde à la limite d'élasticité ou à la résistance à la rupture. Le critère de défaillance est satisfait lorsque la contrainte ultime induite dans le matériau excède cette valeur critique, notée  $\bar{\sigma}_f$  [72].

$$\bar{\sigma}_f = \frac{\sigma_{fx} + \sigma_{fy}}{2} + \left[ \left( \frac{\sigma_{fx} - \sigma_{fy}}{2} \right)^2 + \tau_{fx}^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.2)$$

Puisque dans la couche de parement, nous avons que  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ . En réalité, les limites de traction dans les peaux sont généralement beaucoup plus élevées que les résistances au cisaillement observées dans le noyau et les peaux.

$$\bar{\sigma}_{fx} = \frac{M_{xz}E_{fx}}{D_x} \geq \hat{\sigma}_{fx}$$

Dans la direction y également on a : (2.3)

$$\bar{\sigma}_{fy} = \frac{M_{yz}E_{fy}}{D_y} \geq \hat{\sigma}_{fy}$$

Si la charge est une tension ou une compression dans le plan, le critère est simplement :

$$\bar{\sigma}_{fx} \geq \hat{\sigma}_{fx} \text{ et } \bar{\sigma}_{fy} \geq \hat{\sigma}_{fy} \quad (2.4)$$

### 2.3.2 Mécanismes de rupture par cisaillement dans les noyaux composites

Le matériau de l'âme est souvent exposé aux contraintes de cisaillement et supporte quasiment l'intégralité de la charge transversale, Figure 2-4(b) [3].

Néanmoins, les contraintes directes présentes dans l'âme pourraient être d'amplitude similaire aux contraintes de cisaillement dont le maximum est déterminé par :

$$\bar{\tau}_{cxz} = \left[ \left( \frac{\sigma_{cx}}{2} \right)^2 + \tau_{cxz}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{ et } \bar{\tau}_{cyz} = \left[ \left( \frac{\sigma_{cy}}{2} \right)^2 + \tau_{cyz}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.5)$$

Qui est utilisé comme critère de rupture. Cette valeur admissible pourrait désormais également être une limite d'élasticité ou une contrainte de rupture. En supposant une poutre

avec un noyau faible,  $E_c \ll E_f$  alors  $\sigma_{cx} = \sigma_{cy} = 0$  et la contrainte de cisaillement maximale peut être écrite comme :

$$\bar{\tau}_{cxz} = \frac{T_x}{d} \geq \hat{\tau}_{cxz} \text{ et } \bar{\tau}_{cyz} = \frac{T_y}{d} \geq \hat{\tau}_{cyz} \quad (2.6)$$

### 2.3.3 Plissement des faces

Le plissement des faces, tel qu'illustré par les Figures 2-4(c) et (d), peut se développer dans une structure sandwiche lorsqu'elle est soumise à une compression provoquant un flambage dans le plan, ou lorsqu'elle est en flexion accompagnée d'une contrainte de compression sur la peau, ou dans une configuration combinant ces deux cas.

Selon le critère de rupture, le processus de plissement se développe à la surface de la peau lorsque la contrainte de compression agissant sur cette peau atteint le seuil de contrainte de plissement, équation (2.7).

$$\sigma_{fx} = 0,5 \sqrt[3]{E_{fx} E_{cx} G_{cx}} \text{ et } \sigma_{fy} = 0,5 \sqrt[3]{E_{fy} E_{cy} G_{cy}} \quad (2.7)$$

### 2.3.4 Flambement général et localisé

On distingue habituellement deux types d'instabilités géométriques, à savoir le flambement global de la structure sandwiche sous compression globale, Figure 2-4(e) et le flambement local des faces, Figure 2-4(g), qui peut apparaître dans la mesure où elles subissent des contraintes de compression. D'une part, le flambement global d'un matériau sandwiche peut facilement être considéré comme le flambement classique d'une structure homogène [74]. Bien que le flambage en lui-même n'endommage parfois pas une structure, il doit néanmoins être évité car une structure qui a flambé peut avoir perdu sa capacité à remplir sa fonction [72].

La charge critique de flambage pour une poutre sandwiche est comme suit :

$$P_{cr} = \frac{\frac{2\pi^4 D_f D}{S(\beta L)^4} + \frac{\pi^2 D}{(\beta L)^2}}{1 + \frac{\pi^2 D}{S(\beta L)^2}} \quad (2.8)$$

Pour des peaux épaisses,  $\beta$  est influencé par les conditions aux limites. On peut réduire et approximer cette expression par :

$$\frac{1}{P_{cr}} = \frac{1}{P_b} + \frac{1}{P_s} \text{ où } P_b = \frac{\pi^2 D}{(\beta L)^2} \quad (2.9)$$

La valeur de  $\beta$  évolue en dépendance des conditions aux frontières de la poutre, alors que  $P_s$  représente la charge critique de flambement équivalente à la rigidité structurale au cisaillement  $S$ .

Le flambement local est une forme d'instabilité qui peut survenir dans les panneaux sandwiches à âmes en nid d'abeilles ou ondulées [75]. Pour les nids d'abeilles, il est possible d'estimer la contrainte critique dans les peaux par :

$$\sigma_f = \frac{2E_f}{1 - \nu_f^2} \left( \frac{t_f}{r} \right)^2 \quad (2.10)$$

Où  $r$  est le rayon du cercle qui peut être inscrit dans la cellule en nid d'abeille.

### 2.3.5 Sertissage par cisaillement

La défaillance due au sertissage par cisaillement illustrée par la Figure 2-4(f), qui peut résulter d'un flambage global, se déclenche si le module de glissement du noyau ou la résistance tangentielle de l'adhésif est trop faible [76]. Dans le cas de peaux de faible épaisseur, en particulier lorsque la charge critique  $P_s$  est égale à la rigidité structurale au cisaillement  $S$ , le mode de défaillance constaté est analogue à celui représenté par la Figure 2-4(g) et est attribué à une instabilité de cisaillement. Par conséquent, la contrainte critique de la peau se trouve le long de l'axe  $x$  ou  $y$ , que ce soit pour la face supérieure ou inférieure [72].

$$\sigma_f = \frac{S}{2t_f} \quad (2.11)$$

### 2.3.6 Indentation du noyau

L'indentation du noyau, Figure 2-4(h) se produit sous l'effet de charges concentrées. En pratique, on peut l'éviter en appliquant la charge sur une surface suffisamment grande [1].

Une approximation de cette surface peut être déduite à partir de :

$$A = \frac{P}{\sigma_{cz}} \quad (2.12)$$

Où  $\sigma_{cz}$  désigne la résistance à la compression de l'âme. Ce qui se manifeste pratiquement lorsque des charges ponctuelles sont appliquées est que la face va agir comme une plaque sur un support élastique. Lorsque la contrainte effective élastique subie par la peau excède sa limite en compression, celle-ci se déforme de façon indépendante par rapport à la face opposée, causant ainsi la rupture de l'âme. En pratique, il existe de nombreuses façons d'améliorer la résistance locale d'un sandwich pour éviter l'indentation.

## 2.4 Comportement en fatigue des matériaux sandwiches

Les matériaux sandwiches, qui ont un noyau à faible densité et des revêtements à haute résistance, leur adoption dans l'aéronautique et le naval s'explique par un poids réduit et une imperméabilité, mais leurs performances en fatigue et en dynamique restent une problématique critique.

Dans leurs travaux, Bednarcyk et son équipe [77] ont analysé la résistance à la fatigue des panneaux sandwiches, identifiant une alternance de défaillances (cisaillage du noyau vs traction des stratifiés) et élaborant un protocole de conception adaptatif pour ces régimes critiques.

Bansemir et son équipe de recherche [78] ont mené une étude sur les caractéristiques

d'endommagement par fatigue et de résistance statique des structures en sandwiches qui incorporent un noyau en mousse de poly-métha-crylimide dans des conditions de flexion à trois points, en juxtaposant leurs résultats à ceux dérivés d'une formule prédictive.

Une approche expérimentale combinant des tests de flexion et une évaluation technico-économique a été développée par Babu et Shivanand [79] pour optimiser les propriétés mécaniques des structures sandwiches en fonction de leurs paramètres de conception.

Dans leurs travaux, Mathieson et Fam [80] ont testé en fatigue des poutres sandwiches (stratifiés verre-époxy / mousse / raidisseurs), documentant systématiquement les types d'endommagement, la réponse mécanique en flexion et les performances de longévité.

L'étude réalisée par Kanny et Mahfuz [81] explore comment la fréquence influence la tenue en fatigue des structures sandwiches en composite (fibres de verre S2-vinylester), testées avec des noyaux en PVC de caractéristiques différentes.

Thomsen et al. [82] examinent les effets mécaniques responsables de la flexion localisée dans les structures sandwiches, présentent une revue des modèles structurels existants pour ces matériaux, et traitent de la caractérisation expérimentale ainsi que de l'évaluation de ces phénomènes. Ils analysent également la réponse globale aux charges, la rupture et la fatigue des structures sandwiches soumises à des charges hors-plan et en-plan.

Dai et Liew [5] ont introduit un modèle triparamétrique de conception de la fatigue visant à atténuer la probabilité de surestimation de la fatigue dans les matériaux sandwiches, en tenant compte à la fois de l'intensité des contraintes et de la charge maximale appliquée.

Zhao et al. [83] exposent un modèle de déformation résiduelle ainsi qu'un modèle de dommages progressifs causés par la fatigue, permettant d'étudier la détérioration des propriétés des composites soumis à la fatigue.

Dans leur recherche approfondie, Mathieson et Fam [84] se sont penchés sur le comportement en fatigue de structures sandwiches innovantes, combinant des peaux externes en polymère

renforcé de fibres de verre (PRFV) et des âmes en mousse de polyuréthane de faible densité. Leur étude expérimentale a soumis ces matériaux composites à des cycles de charge répétés, couvrant une plage d'intensité allant de 45% à 70% de leur capacité portante statique maximale, afin de simuler des conditions réalistes de sollicitation en service.

Les travaux référencés [85–87] présentent une analyse détaillée des modes de rupture observés dans les poutres sandwiches à âmes en mousse PVC soumises à des charges statiques, mettant en lumière les mécanismes dominants de dégradation structurale. Leurs travaux ont permis d'identifier quatre modes de défaillance uniques : la fracture de l'âme, le décollement de la face supérieure, le flambage de la face supérieure dû aux contraintes de compression et la rupture localisée induite par une indentation. À travers des tests de traction, Rokbi et al. [88] explorent les propriétés physico-mécaniques et les scénarios de rupture des composites à structure tissée soumis à des sollicitations statiques. En s'appuyant sur des tests de flexion, Hassan et al. [89] ont quantifié l'influence de la masse volumique du noyau sur les propriétés structurelles des panneaux à cœur en mousse d'aluminium. L'étude révèle que la densification de l'âme améliore simultanément la résistance flexionnelle et la capacité de rupture des panneaux sandwiches. L'adoption des structures sandwiches en aéronautique affiche une croissance exponentielle; toutefois, la survenue de défaillances localisées est susceptible d'entraîner des altérations structurelles considérables [90]. La principale cause de rupture par compression est attribuée à des phénomènes de flambage localisés [91]. Bien que des travaux antérieurs aient mesuré la dégradation mécanique induite par la fatigue en vue d'établir les propriétés résiduelles, tels que le module élastique et la résistance ultime [83], l'objectif est de quantifier la réduction progressive de rigidité et de résistance mécanique dans les composites sandwiches à noyau en mousse, en corrélant les dommages accumulés aux paramètres de chargement cyclique (nombre de cycles, contraintes maximales). Cette étude apporte une contribution essentielle à la compréhension des mécanismes de fatigue

dans les sandwiches à âme en mousse PVC AIREX C70, en caractérisant leur réponse mécanique sous chargement cyclique et en identifiant les paramètres critiques de dégradation [92].

## 2.5 Paramètres contrôlant la durabilité en fatigue des composites

Pour les composites structuraux, l'endurance en fatigue désigne la capacité à résister à des chargements répétitifs, exprimée en cycles avant endommagement irréversible (délaminage, fissuration) [93].

Quatre paramètres fondamentaux peuvent affecter l'endurance cyclique :

- Intervalle de contrainte,
- Taux de répétition ou fréquence,
- Contrainte moyenne de cycle,
- Taux de contraintes

### 2.5.1 Variation ou intervalle de contrainte

La Figure 2-5 présente l'évolution temporelle de la contrainte appliquée, générée par un chargement cyclique d'amplitude fixe, équation (2.19), dont les valeurs oscillent entre les seuils  $\sigma_{\min}$  et  $\sigma_{\max}$ .

Des études empiriques sur la fatigue ont démontré que la fluctuation de la contrainte constitue le principal facteur influant sur la durabilité en fatigue des entités structurales [93]. L'équation (2.14) ci-dessous définit la fluctuation de contrainte :

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_a \sin \omega t \quad (2.13)$$

$$\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} \quad (2.14)$$

$$\sigma_m = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/2 \quad (2.15)$$

$$R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max} \quad (2.16)$$

$$\sigma_a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2 \quad (2.17)$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (2.18)$$

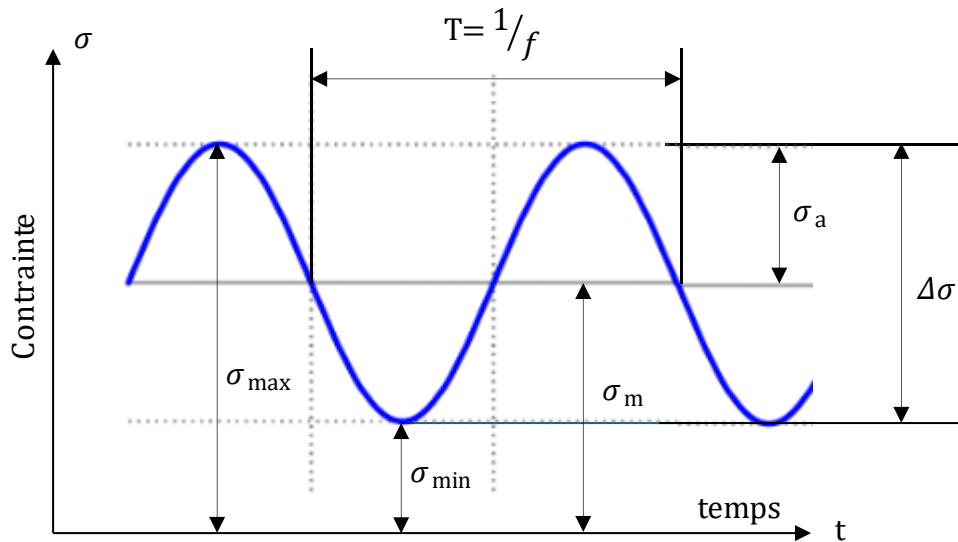


Figure 2-5 : Paramètres de fatigue

### 2.5.2 Fréquence

Les effets de la fréquence d'essai peuvent être divisés en plusieurs considérations :

- Chauffage hystérotique à hautes fréquences.
- Influences sur la vitesse d'endommagement.
- Effet de la vitesse de déformation sur les propriétés mécaniques résiduelles observées au cours du cycle final [94].

Une fréquence de déformation excessive nuit à la tenue en fatigue des composites sandwiches : la chaleur générée dans le cœur du matériau [2], [3] réduit significativement sa capacité à résister au cisaillement [95].

### 2.5.3 La contrainte moyenne

Les recherches entreprises dans [96] et [97] incluent une caractérisation en fatigue de composites renforcés de fibres courtes (SFRC), où l'influence de la contrainte moyenne a été spécifiquement analysée. Les travaux réalisés dans [27] révèlent que la durabilité en fatigue diminue proportionnellement à la hausse de la contrainte moyenne imposée au matériau.

### 2.5.4 Le ratio de contrainte

L'identification du mode de chargement (traction pure, compression, ou chargement mixte) repose sur l'analyse du ratio de contrainte cyclique  $R$ , correspondant au quotient  $(\sigma_{\min} / \sigma_{\max})$ .

Les composites se comportent différemment sous tension et sous compression car différents mécanismes sont développés lors de ces types de charges [98]. L'initiation des fissures de fatigue trouve son origine dans la réponse des fibres aux efforts de traction. Néanmoins, en présence de contraintes compressives, la durabilité du matériau dépend majoritairement de la performance de la matrice, de la régularité des renforts fibreux et de l'intégrité microstructurale globale [1–3].

## 2.6 Etude des propriétés mécaniques des poutres sandwiches symétriques.

### 2.6.1 Introduction

Les structures composites sandwiches telles que celle illustrée par la Figure 2-6 sont largement utilisées dans les applications aérospatiales et marines en raison des rapports rigidité/poids en flexion extrêmement élevés et des rapports résistance/poids en flexion qui peuvent être obtenus avec de telles structures [99]. Le comportement mécanique des structures composites sandwiches a été décrit en détail par Vinson [100]. Les rigidités

équivalentes des stratifiées et des panneaux sandwiches peuvent être trouvées directement en se basant sur la théorie conventionnelle des plaques.

Comme illustré par la Figure 2-6, les structures composites sandwiches se composent de deux feuilles de parement composites collées de chaque côté d'un noyau léger en mousse ou en nid d'abeille. Ces structures sont généralement symétriques par rapport à la surface médiane, et donc les rigidités structurales de couplage correspondantes sont nulles ( $B_{ij} = 0$ ), annexe A.

### 2.6.2 Analyse de cisaillement du premier ordre des poutres sandwiches

Bien que les poutres sandwiches soient rarement utilisées comme éléments de structure, elles constituent des éprouvettes pratiques et un tel essai peut constituer un moyen simple de déterminer les propriétés d'un panneau sandwiche. Nous allons ici considérer des éprouvettes de poutres à faces minces. Nous supposerons en outre que les faces peuvent être traitées comme des matériaux homogènes avec les rigidités  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $C_{ij}$  et  $D_{ij}$  donnés par l'équation (A.24).

À l'issue de l'analyse des poutres sandwiches soumises à la flexion, il est préconisé d'exprimer de manière synthétique les équations (A.12) sous une forme condensée. L'équation (2.19) décrit un vecteur colonne de dimensions  $6 \times 1$ , correspondant aux six résultantes de forces et de moments sur la face gauche, tandis que la matrice ABCD, de taille  $6 \times 6$ , résulte de l'assemblage des quatre sous-matrices de rigidité élémentaires  $3 \times 3$ , introduites dans l'équation (2.19).

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

$$[N] = [A][\varepsilon^0] + [B][\kappa], \quad (2.20)$$

$$[M] = [C][\varepsilon^0] + [D][\kappa], \quad (2.21)$$

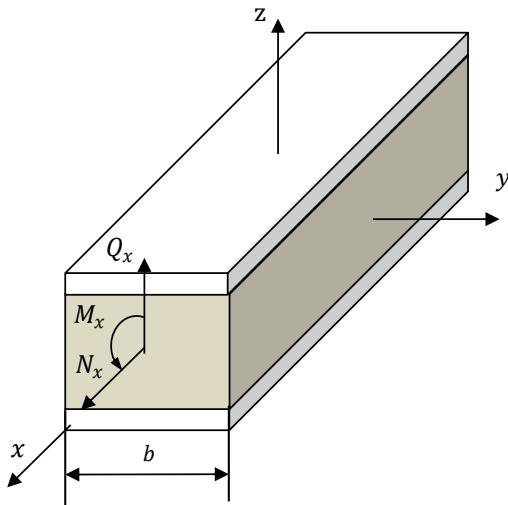


Figure 2-6 : Flexion d'une poutre sandwich symétrique

$[\varepsilon^0]$  et  $[\kappa]$  représentent le vecteur colonne  $6 \times 1$  défini par les trois déformations du plan médian et les trois courbures. Pour procéder, il est pratique d'utiliser la forme inversée des équations (2.22) :

$$[\varepsilon^0] = [a \quad b] [N] \quad (2.22)$$

Pour de la déflexion d'une poutre sous l'effet de moments  $M$ , les éléments du vecteur force et du vecteur moment de la colonne  $6 \times 1$  se présentent comme suit :

$$M_x = \frac{M}{b} \quad (2.23)$$

$$M_{xy} = M_y = N_x = N_{xy} = N_y = 0, \quad (2.24)$$

La grandeur  $b$  représente le paramètre géométrique associé à la largeur de la poutre, en cohérence avec l'illustration de la Figure 2-6.

Les courbures  $[\kappa]$ , sont obtenues à partir des équations (2.22) avec  $[N] = [0]$ .

$$[\kappa] = [d][M]. \quad (2.25)$$

En particulier, nous supposerons que les stratifiés de face sont exempts de couplage flexion/torsion de sorte que  $d_{16} = 0$ , ou  $d_{16}$  est si petit qu'il peut être négligé. Par conséquent,

l'application des moments de flexion  $M_x$  n'induira aucune torsion dans la poutre, ce qui se traduit par  $\kappa_{xy} = 0$  [3]. La courbure principale d'intérêt est  $\kappa_x$  qui est donnée par :

$$\kappa_x = d_{11}M_x \quad (2.26)$$

Le paramètre  $d_{11}$  est définie comme la compliance en flexion, une mesure quantitative de la souplesse intrinsèque du composite sandwiche sous chargement en flexion.

La courbure  $\kappa_x$ , introduite dans l'équation (A.7.a), quantifie la déformation locale associée à la flexion selon la direction  $x$ .

$$\kappa_x = \frac{d\psi_x}{dx}. \quad (2.27)$$

Les déformations transversales en flexion et en cisaillement sont présentées par :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z\kappa_x \quad (2.28)$$

$$\gamma_{xz} = \psi_x + \frac{dw}{dx} \quad (2.29)$$

Par les équations A.8(a), A.10(g) et A.25(a), l'équation (2.30) définit l'équation constitutive du cisaillement transversal :

$$Q_x = h_c G_{xz} \left( \psi_x + \frac{dw}{dx} \right) = \frac{dM_x}{dx} \quad (2.30)$$

En remplaçant les équations (2.26) et (2.27) dans l'équation (2.30), obtenue de l'équation d'équilibre du tableau A.4.4, dans le cas statique et en simplifiant les termes négligeables on obtient une équation différentielle pour la flexion :

$$\frac{d^2\psi_x}{dx^2} - \left( \psi_x + \frac{dw}{dx} \right) h_c G_{xz} d_{11} = 0 \quad (2.31)$$

Une autre équation différentielle régissant la flexion de la poutre est obtenue en combinant les équations (tableau A.4.4) et (2.30) qui donnent :

$$\frac{dw}{dx} = -\psi_x + \frac{1}{h_c G_{xz}} \frac{dM_x}{dx} \quad (2.32)$$

L'équation (2.32), où  $h_c$  et  $G_{xz}$  représentent respectivement l'épaisseur de la couche de cisaillement et le module de rigidité, est essentielle pour prédire la déflexion des poutres stratifiées lorsque  $M_x(x)$  est obtenu par intégration des efforts extérieurs.

## 2.7 Modélisation de la flexion trois points d'un stratifié sandwiche

Une poutre sandwiche symétrique (peau/âme/peau) est chargée en configuration trois points, Figure 2-7, pour caractériser sa rigidité en flexion. Les peaux sont supposées être des stratifiés composites minces symétriques et équilibrés ( $B_{ij} = A_{16} = A_{26} = 0$ ) ou elles pourraient être constituées d'un métal isotrope. De tels stratifiés peuvent contenir des termes  $D_{16}$  et  $D_{26}$  non nuls, mais nous supposerons qu'ils sont petits et ont une influence négligeable sur la réponse.

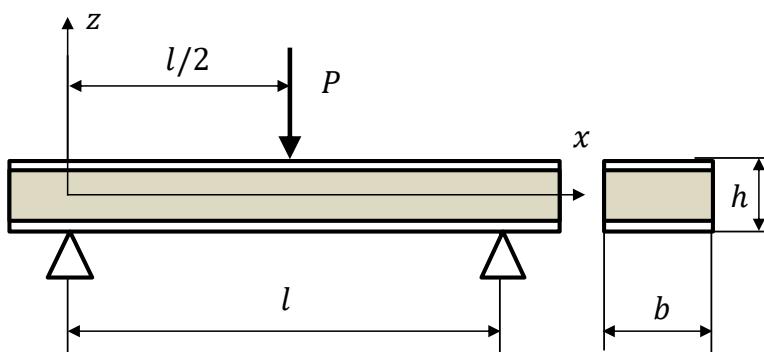


Figure 2-7 : Modélisation de la flexion trois points d'un stratifié sandwiche.

Avec le système de coordonnées  $xz$  tel qu'illustré dans la Figure 2-7 ( $x = 0$  au niveau du support gauche), L'équation gouvernant le moment de flexion par unité de largeur, pour la portion gauche de la poutre, s'établit selon :

$$M_x = \frac{-Px}{2b}, 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \quad (2.33)$$

Ceci, combiné avec les équations (2.26) et (2.27), donne :

$$\frac{d\psi_x}{dx} = \frac{-d_{11}Px}{2b} \quad (2.34)$$

qui donne après intégration

$$\psi_x(x) = \frac{-d_{11}Px^2}{4b} + C_1 \quad (2.35)$$

Pour déterminer la constante  $C_1$ , nous considérons les déplacements axiaux dans la poutre (équation (A.1a))

$$u(x) = u_0(x) + z\psi_x \quad (2.36)$$

La symétrie géométrique de la structure entraîne une symétrie des champs de déplacement, imposant une condition de déplacement axial nul et de rotation nulle au point médian  $x = \frac{l}{2}$  :

$$u\left(\frac{l}{2}\right) = u_0\left(\frac{l}{2}\right) = \psi\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \quad (2.37)$$

La condition  $\psi_x\left(\frac{l}{2}\right) = 0$  dans l'équation (2.35) fournit la constante d'intégration :

$$C_1 = \frac{Pl^2 d_{11}}{16b} \quad (2.38)$$

La substitution de l'équation (2.35) par  $C_1$  donnée par (2.38) dans (2.32) donne :

$$\frac{dw}{dx} = \frac{PL^2 d_{11}}{16b} \left( 4 \left( \frac{x}{L} \right)^2 - 1 \right) - \frac{P}{2bh_c G_{xz}} \quad (2.39)$$

Notez que la pente est non nulle au point médian de la poutre,  $x = \frac{l}{2}$

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{P}{2bh_c G_{xz}} \quad (2.40)$$

En considérant la partie droite de la poutre, la valeur de la pente au niveau de la section

médiane ( $x = \frac{l}{2}$ ) serait déterminée par :

$$\frac{dw}{dx} = \frac{P}{2bh_c G_{xz}} \quad (2.41)$$

Il est remarquable de constater que cette évolution de la pente est conforme à la discontinuité de  $Q_x$  au milieu de la poutre, validant ainsi les fondements de la théorie du cisaillement de premier ordre [1] [3]. L'intégration de l'équation (2.39) permet d'obtenir le déplacement transversal dans la poutre :

$$w(x) = \frac{Pd_{11}x^3}{12b} - \frac{Pl^2d_{11}x}{16b} - \frac{Px}{2h_c b G_{xz}} + C_2 \quad (2.42)$$

Pour remplir la condition  $w(0) = 0$ , il est nécessaire que  $C_2 = 0$  soit égal à 0. Ainsi, le déplacement de la poutre est déterminé par :

$$w(x) = \frac{P}{2b} \left[ \frac{d_{11}x^3}{6} - \frac{l^2xd_{11}}{8} - \frac{x}{h_c G_{xz}} \right] \quad (2.43)$$

Où  $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$ .

Dans de nombreuses situations, il est particulièrement intéressant de considérer l'amplitude du déplacement, qui correspond au déplacement de la poutre au niveau du point où la charge est appliquée.

$$\delta = \left| w\left(\frac{l}{2}\right) \right| = \frac{Pl^3d_{11}}{48b} + \frac{Pl}{4h_c b G_{xz}} \quad (2.44)$$

la compliance flexionnelle, notée  $d_{11}$ , est souvent substituée à la rigidité structurale  $D_x$  [2], afin de décrire de manière unifiée la flèche de la poutre via les paramètres de rigidité en flexion ( $D_x$ ) et en cisaillement, évitant ainsi le modèle mixte introduit dans l'équation précédente (2.44).

$$D_x = \frac{1}{d_{11}} \quad (2.45)$$

Cela donne :

$$\delta = \frac{Pl^3}{48bD_x} + \frac{Pl}{4hbG_{xz}} \quad (2.46)$$

Dans le domaine expérimental, cette équation est employée comme modèle de référence pour quantifier la rigidité structurale sous sollicitations de flexion ( $D_x$ ) et de cisaillement ( $4hbG_{xz}$ ) des poutres sandwiches [3].

## 2.8 Dynamique vibratoire des poutres en flexion

### 2.8.1 Formulation de Timoshenko pour l'analyse des poutres

Au cours des premières décennies du XX<sup>e</sup> siècle, Stephen Timoshenko a élaboré une théorie des poutres prenant en compte simultanément l'inertie torsionnelle et les déformations engendrées par le cisaillement, marquant une avancée significative en mécanique des structures [3]. Cette recherche s'intéresse principalement à l'analyse des propriétés mécaniques des poutres courtes et des éléments structuraux soumis à des sollicitations vibratoires haute fréquence [2].

L'accroissement de la déformation mécanique engendre un affaiblissement proportionnel de la rigidité structurale de la poutre, phénomène se manifestant par une amplification des fléchissements et un abaissement corrélatif des fréquences propres du système. Les équations qui décrivent le comportement des poutres selon la théorie de Timoshenko sont aux dérivées partielles d'ordre quatre.

Les relations constitutives caractérisant la réponse structurale des poutres, dans le cadre de la théorie de Timoshenko, peuvent être formulées comme suit :

$$-\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + KAG \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.47)$$

$$El \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + KAG \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \phi \right) - \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.48)$$

Dans l'équation (2.47), le terme  $-\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$  traduit la force d'inertie générée par la masse linéique de la poutre, tandis que  $KAG \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)$  modélise l'effort tranchant résultant, intégrant la contribution des déformations de cisaillement. Au sein de cette expression,  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  caractérise la courbure associée à la flexion pure, et  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  correspond au gradient de rotation angulaire de la section transversale. La variable  $\phi$  désigne ici l'angle de rotation induit par la flexion, distinct de la pente géométrique  $\frac{\partial y}{\partial x}$  en raison des effets de cisaillement.

Concernant l'équation (2.48), le terme  $EI \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$  rend compte du moment de flexion lié à la rigidité flexionnelle de la poutre. La composante  $KAG \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \phi \right)$  décrit quant à elle le couplage flexion-cisaillement : la différence entre la pente de la déformée  $\frac{\partial y}{\partial x}$  et la rotation  $\phi$  de la section matérialise directement la déformation de cisaillement. Enfin, le terme  $-\rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$  représente l'inertie rotationnelle des sections.

### 2.8.2 Approche d'Euler pour l'analyse des poutres

Le comportement vibratoire transversal des poutres soumises à des sollicitations en flexion est régulé par l'équation différentielle issue des hypothèses d'Euler.

Pour développer l'équation de mouvement, on considère le schéma d'un élément de poutre en flexion montré dans la Figure 2-8. Dans le modèle présenté, la variable  $M(x, t)$  caractérise le moment fléchissant, tandis que  $Q(x, t)$  correspond à l'effort tranchant. La fonction  $f(x, t)$ , quant à elle, modélise la charge extérieure distribuée par unité de longueur appliquée à la structure poutre [101].

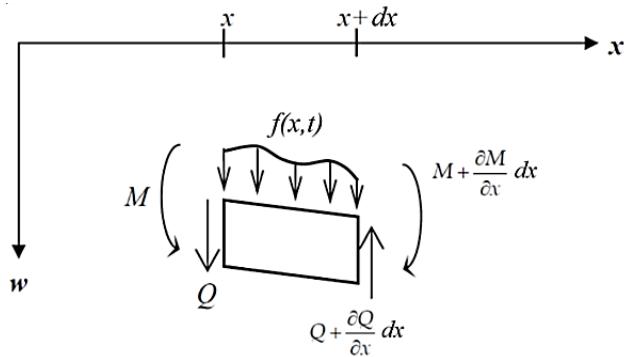


Figure 2-8 : Elément infinitésimal de poutre sollicité en vibration flexionnelle

L'état d'équilibre de l'élément poutre permet d'établir l'équation ci-dessous :

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial Q}{\partial x} = f(x, t) \quad (2.49)$$

La force de cisaillement est donnée par  $Q = EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$

Pour une poutre uniforme l'équation (2.49) est réduite à :

Pour les vibrations modales (naturelles), considérons les oscillations libres décrites par :

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.50)$$

En dissociant les composantes temporelles et spatiales [102].

$$w(x, t) = Y(x) \cdot e^{i\omega_n t} \quad (2.51)$$

La formulation mathématique décrivant l'amplitude  $Y(x)$  de la déformée modale associée à la pulsation propre  $\omega_n$  est déterminée par :

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} - k^4 \cdot Y = 0 \quad (2.52)$$

$$\text{Avec } k = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega_n^2}{EI}}$$

La solution de l'équation (2.52) [3][103] donnant l'amplitude  $Y(x)$  est :

$$Y(x) = A \cdot \sin(kx) + B \cdot \cos(kx) + C \cdot \text{sh}(kx) + D \cdot \text{ch}(kx) \quad (2.53)$$

Les conditions de bord de la poutre définissent les constantes  $A, B, C$  et  $D$ , tandis que les  $\alpha_i = k_i L$  sont les valeurs propres issues de la résolution de  $f(\alpha_i) = 0$  [102].

$$f(\alpha_i) = \cos(\alpha_i) - 1/\text{ch}(\alpha_i) = 0 \quad (2.54)$$

Pour une poutre encastrée-libre, les conditions aux limites sont :

- Pour  $x = 0$ : (encastrement)

$$\text{Déplacement nul} \quad Y(0) = 0, \quad (2.55)$$

$$\text{Pente horizontale} \quad \left. \frac{dY(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad (2.56)$$

- Pour  $x = L$  (extrémité libre)

$$\text{Moment de flexion nul} \quad \left. \frac{d^2Y(x)}{dx^2} \right|_{x=L} = 0, \quad (2.57)$$

$$\text{Force de cisaillement résultante nulle} \quad \left. \frac{d^3Y(x)}{dx^3} \right|_{x=L} = 0, \quad (2.58)$$

Les 4 conditions aux limites donnent le système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin(k_i L) & -\cos(k_i L) & \text{sh}(k_i L) & \text{ch}(k_i L) \\ -\cos(k_i L) & \sin(k_i L) & \text{ch}(k_i L) & \text{sh}(k_i L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.59)$$

Le système (2.59) peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned} D &= -B \\ \begin{bmatrix} \text{sh}(k_i L) & \text{ch}(k_i L) \\ \sin(k_i L) + \text{sh}(k_i L) & \cos(k_i L) + \text{ch}(k_i L) \\ \cos(k_i L) + \text{ch}(k_i L) & -\sin(k_i L) + \text{sh}(k_i L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Le système défini en (2.60) exige que la matrice correspondante soit singulière, impliquant ainsi un déterminant strictement nul.

Ainsi pour que les résultats ne soient pas insignifiants, il faut que :

$$\cos(k_i L) = -1/\operatorname{ch}(k_i L), \quad (2.61)$$

Ou

$$\cos(\alpha_i) = -1/\operatorname{ch}(\alpha_i),$$

L'identification des solutions repose sur la résolution graphique de l'équation  $\cos(\alpha_i) = -1/\operatorname{ch}(\alpha_i)$ .

# **CHAPITRE 3 :**

## **INVESTIGATION DES MATERIAUX ET PROCEDES EXPERIMENTAUX**

### 3 Investigation des matériaux et procédés expérimentaux

#### 3.1 Matériaux d'essai et dispositifs techniques

Cette étude met en œuvre des sandwiches à noyau en mousse pvc AIREX C70.55 et C70.75, caractérisés par des densités respectives de 60 et 80  $kg/m^3$ , associées à des peaux en composite stratifié tissé.

Le stratifié est composé de deux couches de fibres de verre tissées en armure sergé 2/2, Figure 1-4(b), disposées selon une séquence d'empilement [0°/90°] et préimprégnées de résine époxy. Les poutres sandwiches seront ci-après désignées par H60 et H80, où la valeur numérique fait référence à la densité de l'âme. Une machine de coupe à lame circulaire diamantée montrée sur la Figure 3-1 est utilisée pour découper les éprouvettes sandwiches de manière rapide, précise et sans bavure.

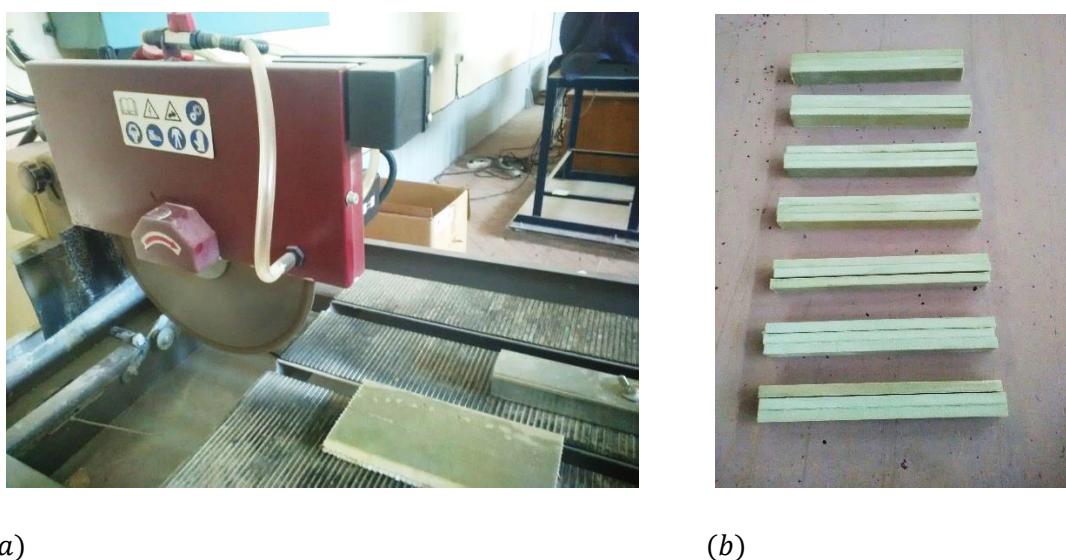


Figure 3-1 : (a) Machine de coupe à lame circulaire diamantée et (b) Spécimens sandwiches composites

L'étude intègre des tests en régime statique des faces, ainsi que des essais statiques et de fatigue des structures composites sandwiches, conduits à l'aide d'une machine d'essais universelle Zwick Roell Z005 avec une cellule de 5 kN contrôlée par ordinateur, les principales

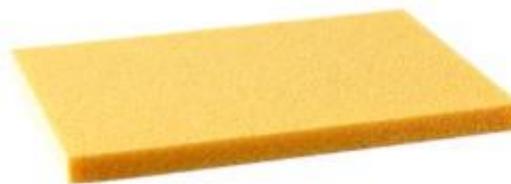
propriétés des mousses étant décrites dans le Tableau 3-1 [15] .

Tableau 3-1 : Propriétés du noyau en mousse AIREX C70 [15]

Propriétés physiques et mécaniques	AIREX C70, 75	AIREX C70, 55	Normes
Densité	80 kg/m <sup>3</sup>	60 kg/m <sup>3</sup>	ISO 845
Résistance ultime à la traction	2 MPa	1,30 MPa	ISO 527 1-2
Allongement maximal à la rupture	18%	16%	ISO 1922
Module de traction	0,066 GPa	0,045 GPa	ISO 527 1-2
Resistance à la compression	1,45 MPa	0,9 MPa	ISO 844
Module d'élasticité en compression	0,104 GPa	0,069 GPa	DIN 53421
Module d'élasticité au cisaillement	0,03 GPa	0,022 GPa	ASTM C393
Resistance au cisaillement	1,2 MPa	0,85 MPa	ISO 1922



(a)



(b)

Figure 3-2 : Mousse PVC (a) AIREX C70.75 et (b) AIREX C70.55

### 3.2 Essai de traction statique uni axiale des peaux

Dans le but de déterminer les propriétés mécaniques (module élastique, contrainte ultime et déformation à la rupture) des échantillons prélevés sur les peaux des sandwiches étudiés, cinq éprouvettes ont été soumises à des essais de traction unidirectionnelle.

Les échantillons, de géométrie rectangulaire standardisée ( $e=0,6\text{mm}$ ,  $b=15\text{ mm}$ ,  $L=250\text{mm}$ ), ont été testés avec une distance inter-mors de 138mm.

Les essais mécaniques ont été conduits selon un taux de déformation imposé de 2mm/min, sous des conditions thermiques ambiantes stabilisées à 25 °C, en stricte adéquation avec les prescriptions méthodologiques de la norme ISO 527 [105].



Figure 3-3 : Essais de traction statique uni-axiale

### 3.2.1 Protocole

Le module d'élasticité en traction longitudinale  $E_L$  est déterminé conformément à la norme [17]. Ce module est calculé entre les contraintes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  à l'aide de l'équation (3.1).

$$E_L = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \quad (3.1)$$

Où :

Les contraintes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  correspondent aux valeurs mesurées respectivement aux seuils de déformation  $\varepsilon_1 = 0,05\%$  et  $\varepsilon_2 = 0,25\%$ , définis pour caractériser le comportement élastique du matériau.

Les modules d'élasticité longitudinal ( $E_L$ ) et transversal ( $E_T$ ) présentent des valeurs équivalentes, résultant de l'homogénéité des propriétés mécaniques en traction statique des fibres de verre tissées en armure sergé 2/2, selon les deux directions orthotropes principales.

### 3.3 Test statique de flexion trois points

Les essais statiques ont été réalisés sur des éprouvettes H60 et H80, dont les caractéristiques dimensionnelles sont précisées dans la Figure 3-4(b) et le Tableau 3-2, au moyen d'une machine de traction universelle Zwick Roell Z005, Figure 3-4(a).

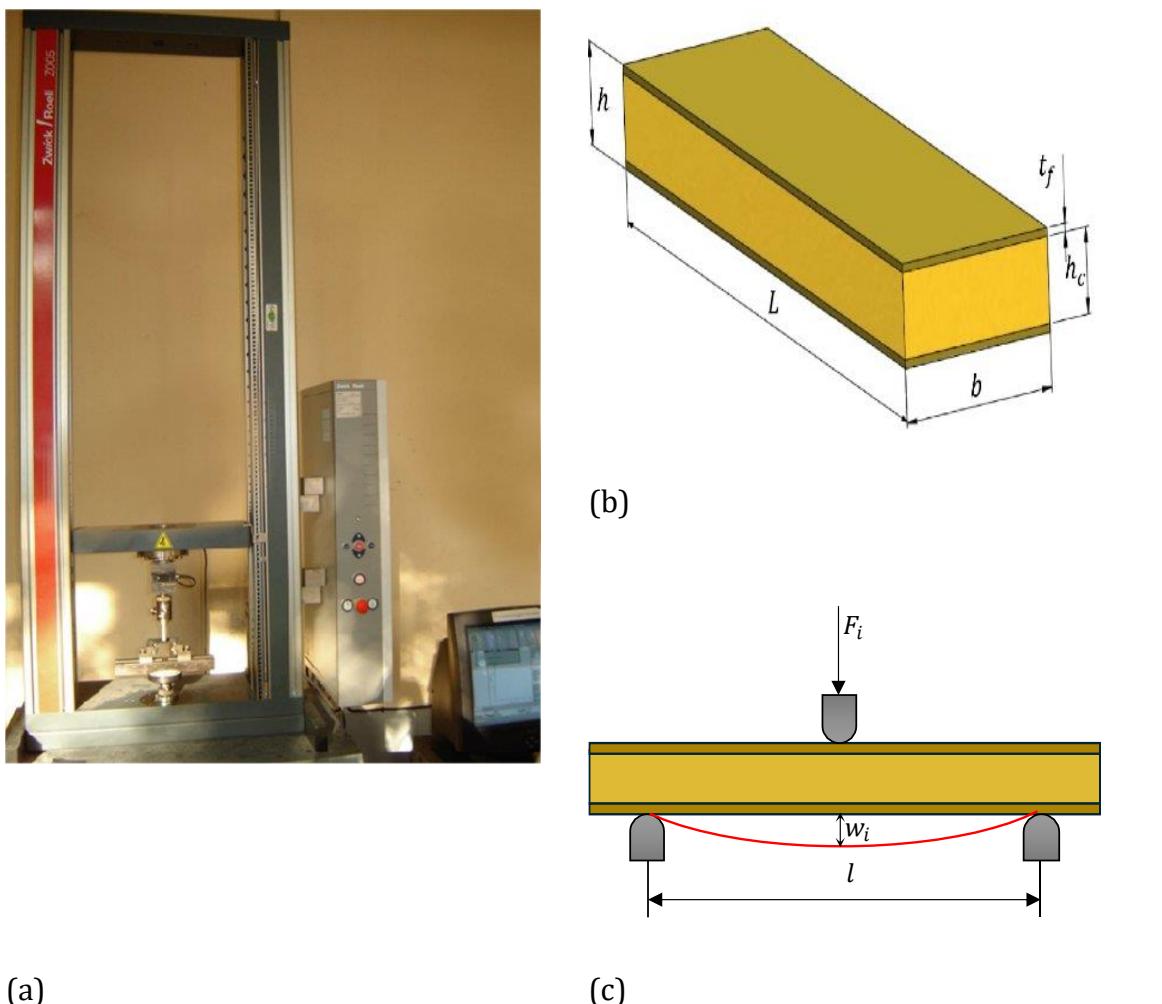


Figure 3-4 : Banc d'essai "Zwick Roell " (a), paramètres géométriques de l'éprouvette (b), chargement (c).

Tableau 3-2 : Les paramètres géométriques du spécimen sandwiche.

Épaisseur de l'échantillon $h$ (mm)	Épaisseur de la peau $t_f$ (mm)	Longueur du spécimen $L$ (mm)	Largeur du spécimen $b$ (mm)
10	0,6	200	20

### 3.3.1 Module d'Élasticité équivalent en flexion

Le module peut être calculé en effectuant la division de l'écart entre les valeurs de  $\sigma_{f2}$  et  $\sigma_{f1}$  par l'écart de déformations  $\varepsilon_{f2} = 0,0025$  et  $\varepsilon_{f1} = 0,0005$ , sur une distance entre supports  $l = 180\text{ mm}$ , Figure 3-4(c).

## 3.4 Analyse modale expérimentale

### 3.4.1 Introduction

La méthode de l'essai modal consiste à évaluer de manière non destructive les vibrations naturelles d'un élément de structure (poutre, panneau) qui est soumis à une excitation impulsionale.

Cette technique, qui peut être utilisée avec de nombreux matériaux, permet d'obtenir une estimation immédiate des caractéristiques mécaniques des produits testés et peut fournir une véritable carte d'identité mécanique de chaque pièce [106].

La prédominance des composites sandwiches dans les applications transport découle directement de leur optimisation rigidité/poids et de leurs performances mécaniques supérieures. L'interdépendance entre propriétés inertielles et caractéristiques élastiques des constituants conditionne l'émergence de résonances, phénomène critique responsable de multiples désordres vibratoires observés dans les assemblages composites.

Afin de mieux appréhender tout problème de vibration structurelle, il est nécessaire d'identifier et de quantifier les résonances d'une structure [107].

### 3.4.2 Matériau de l'étude

Les structures sandwiches étudiées intègrent un noyau en AIREX C70 et des peaux en textile de fibres de verre (sergé 2/2).

#### a) Caractérisation des peaux

Les peaux, constituées d'un composite Sergé 2/2 en fibres de verre, présentent une masse volumique de  $2000 \text{ kg/m}^3$  et une épaisseur nominale de 0,6 mm.

#### b) Caractérisation physico-mécanique des mousses PVC.

Deux catégories distinctes de sandwiches, définies par la variété spécifique de mousse de PVC utilisée, sont mises en œuvre. La première mousse est AIREX C 70 55 de couleur jaune et la

deuxième est AIREX C 70 75 de couleur verte. Les caractéristiques de ces mousses sont citées au Tableau 3-1[44].

### 3.4.3 Préparation des échantillons en structure sandwiche.

Les modèles utilisés sont des poutres sandwich encastrées d'un côté et libre de l'autre, à peaux en tissu de fibre de verre sergé 2/2 et âme en AIREX C70 55 et C70 75, dont les données géométriques illustrées dans la Figure 3-5 sont :  $L = 400$  mm,  $d = 10$  mm,  $h_p = 0,6$  mm,  $b = 40$  mm,  $h_c = 8,8$  mm. Ces éprouvettes parallélépipédiques ont été découpées à l'aide d'un disque diamanté, au sein du Laboratoire de Mécanique des Structures de l'Université 8 Mai 1945 Guelma.

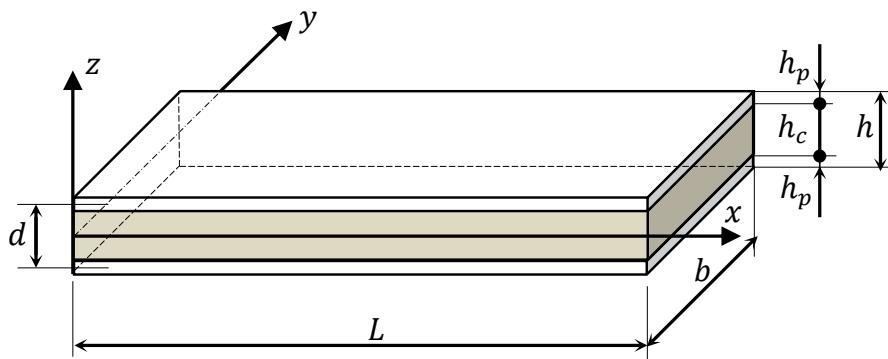


Figure 3-5 : Dimensions caractéristiques des poutres sandwiches

La Figure 3-6 présente le schéma des dispositifs expérimentaux utilisés en analyse modale pour l'étude du comportement dynamique des poutres sandwiches. La poutre encastrée (1) est excitée par un pot-vibrant suspendu (2) (type 4809), muni de tête d'impédance (3) composée d'un capteur de force et d'un accéléromètre.

L'alimentation du pot vibrant se fait à l'aide d'un amplificateur de puissance (5).

L'analyseur de spectre Brüel & Kjaer 2032 (4), donnant la fonction de réponse fréquentielle FRF connu sous le nom d'accélération est traité par le logiciel Pulse-Labshop (6).

L'excitation par pot-vibrant permet de fournir suffisamment d'énergie pour que la mesure soit

précise.

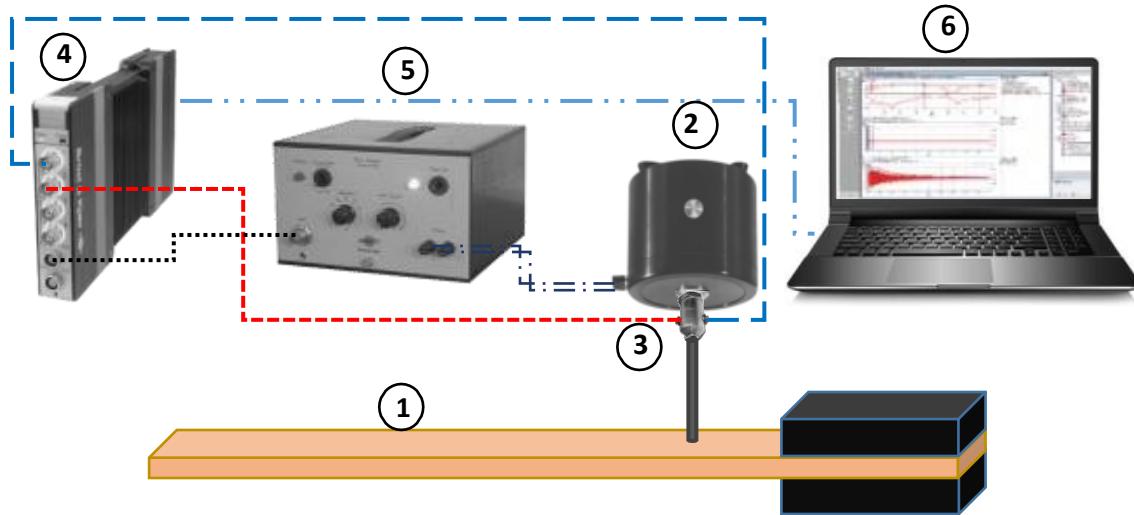


Figure 3-6 : Excitation d'une éprouvette par pot vibrant pour déterminer les fonctions de transfert

### 3.5 Fatigue cyclique en flexion trois points

La caractérisation en fatigue des composites sandwiches H60 et H80 a été réalisée par des essais de flexion trois points normalisés (ASTM D7774 [108]). Le dispositif mécanique combinait des supports bilatéraux et un nez de chargement symétrique, induisant un chargement différentiel entre les faces des éprouvettes. Les paramètres d'essai correspondaient à des niveaux de contrainte cyclique représentant 60%, 70% et 80% de la résistance maximale en flexion statique ( $\sigma_{fu}$ ), avec contrôle des efforts par une cellule de charge de 5 kN. Des sollicitations pulsatoires modélisées par un signal triangulaire (Figure 3-7) ont été appliquées aux poutres sandwiches. Le ratio de contrainte (R), défini comme le rapport entre la contrainte minimale ( $\sigma_{fmin}$ ) et la contrainte maximale ( $\sigma_{fmax}$ ), a été spécifié avec une valeur de ( $\sigma_{fmin}$ ) fixée à zéro.

Pendant l'essai de fatigue, les poutres ont été maintenues à un déplacement constant de 3 mm et la vitesse de flexion a été fixée à 45 mm/min. Les poutres sandwiches ont été soumises à des cycles à une fréquence de 0,25 Hz. Dans une étude précédente [109]. Les observations ont révélé qu'une sollicitation en flexion fixée à 60% de la charge maximale, appliquée à des

fréquences de 1 Hz et 3 Hz, n'engendrait aucune rupture complète des échantillons. En revanche, à cette même intensité de charge mais à une fréquence accrue de 9 Hz, les spécimens ont subi une défaillance structurelle imputable à un phénomène de délamination associé à une fissuration du matériau constitutif du noyau.

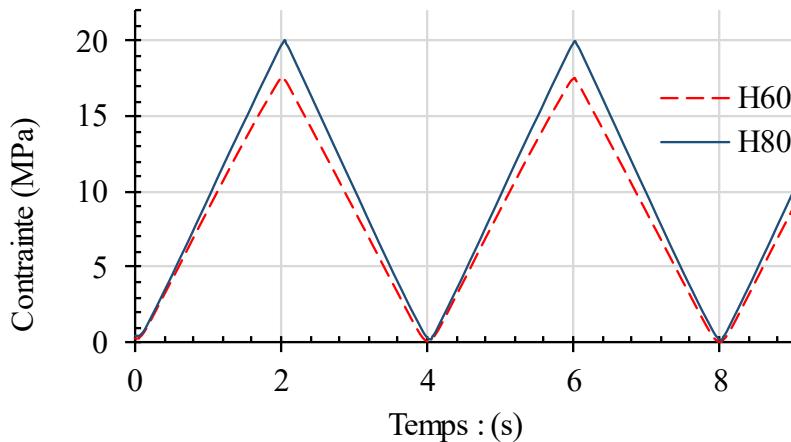


Figure 3-7 : Charges impulsionnelles appliquées aux poutres sandwiches

### 3.6 Énergie dissipée

L'énergie dissipée est une mesure précieuse pour évaluer le comportement à la fatigue des mousses cellulaires. Dans une structure sandwiche, le noyau en mousse cellulaire agit comme un absorbeur d'énergie, dissipant l'énergie lorsqu'il est soumis à un impact ou à une indentation.

Dans notre étude, des échantillons de matériau sandwiche sont soumis à une fatigue cyclique par le biais d'une charge de flexion. Lorsque l'amplitude de la charge excède un seuil critique, elle provoque une déformation plastique et un endommagement du matériau, générant une boucle d'hystérésis sur la courbe charge-déplacement. Cette boucle matérialise la dissipation d'énergie. L'aire circonscrite par cette boucle correspond à l'énergie dissipée par cycle, tandis que l'aire sous la portion supérieure (phase de chargement) caractérise l'énergie potentielle maximale accumulée au cours du cycle.

Le calcul numérique de l'énergie dissipée, est réalisé en additionnant les zones à l'aide de la

formule du trapèze, comme décrit dans l'équation (3.2).

La zone sous les boucles d'hystérésis charge-déplacement pendant le chargement représente l'énergie de déformation absorbée par le matériau. D'autre part, la surface sous la courbe de décharge représente l'énergie perdue par le matériau. Lorsque le matériau testé est chargé au-delà de sa limite élastique et entre dans la plage de plasticité, l'énergie absorbée dépasse l'énergie libérée, ce qui entraîne une dissipation de chaleur [81]. L'énergie dissipée est équivalente à la surface délimitée par la boucle d'hystérésis, comme illustré dans la Figure 3-8

$$E_d = \frac{1}{2} \sum_1^n (w_{i+1} - w_i) \{ [C_{(w_{i+1})} + C_{(w_i)}] - [D_{(w_{i+1})} + D_{(w_i)}] \} \quad (3.2)$$

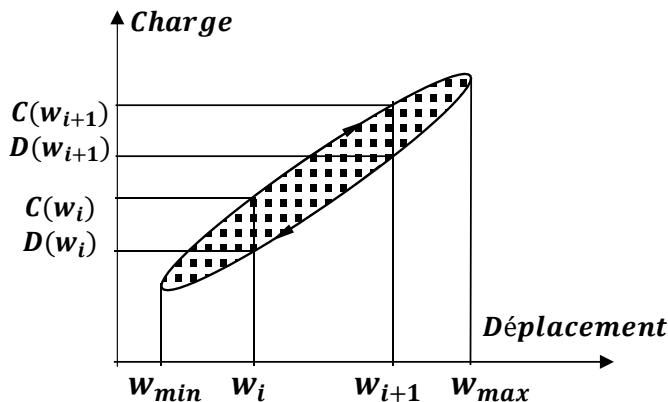


Figure 3-8 : Dissipation hystérétique de l'énergie

### 3.7 Dommage du sandwiche

Les images ont été capturées et les dommages ont été mesurés à l'aide d'un microscope binoculaire (Visual Gage 250) équipé d'un logiciel (Visual Gage 2.2.0), comme illustré dans la Figure 3-9



Figure 3-9 : Microscope binoculaire (Visual Gage 250) équipé d'un logiciel (Visual Gage 2.2.0).

# **CHAPITRE 4 :**

## **RESULTATS ET INTERPRETATIONS**

## 4 Résultats et interprétations

### 4.1 Comportement des peaux sous contrainte de traction

Les résultats exposés en Figure 4-1 mettent en évidence une répartition aléatoire des profils de rupture au sein des quatre échantillons soumis à des essais de traction mécanique. Ce comportement trouve son origine dans la structure multi-phasée inhérente au matériau composite analysé. À la différence de matériaux anisotropes conventionnels, une quasi-équivalence entre le module de traction transversale ( $E_T$ ) et le module longitudinal ( $E_L$ ) est observée. Cette caractéristique découle de l'homogénéité des propriétés mécaniques, en régime quasi-statique, des fibres de verre tissées selon une armure sergé 2/2, lesquelles présentent une réponse cohérente dans les deux directions orthogonales. Les données fondamentales issues de cette étude sont illustrées de manière visuelle par la Figure 4-2 et quantifiées de façon rigoureuse, tel que synthétisé dans le Tableau 4-1.

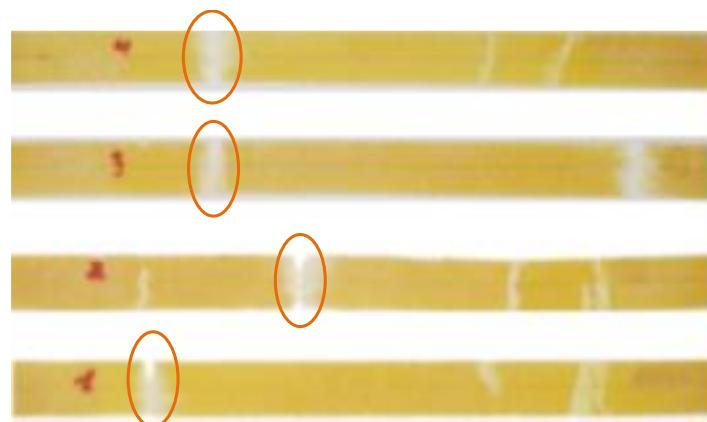


Figure 4-1: Des échantillons de peau se rompent de manière aléatoire sous l'effet de contraintes de traction.

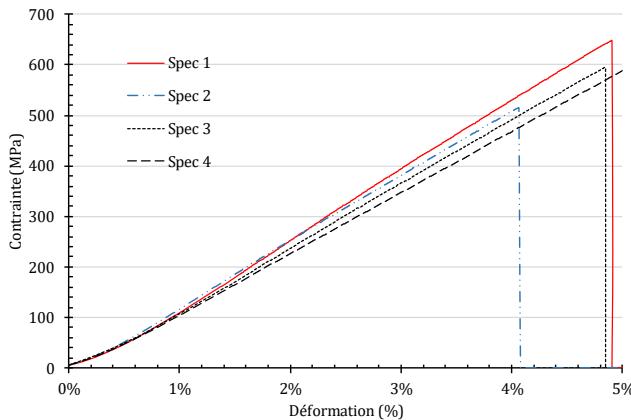


Figure 4-2 : Comportement mécanique des couches externes sous sollicitation de traction.

Tableau 4-1 : Caractérisation en traction des faces des sandwiches.

	Spécimens				Ecart type	Moyenne
	1	2	3	4		
$E_L \approx E_T$ (GPa)	7,139	5,046	8,136	7,37	1,14	6,92
Contrainte ultime (MPa)	648,15	629,62	594,44	620,37	19,36	623,15
Déformation ultime (%)	4,91	4,848	4,85	5,28	0,18	4,97

#### 4.1.1 Interprétation des résultats de la traction des peaux

La quasi-équivalence entre le module longitudinal ( $E_L=6,92$  GPa) et transversal ( $E_T$ ) résulte du tissage sergé 2/2, qui répartit symétriquement les fibres de verre dans les directions chaîne et trame. Cette configuration confère une réponse mécanique cohérente dans les deux axes, une caractéristique rare pour les composites traditionnellement anisotropes.

##### a) Variabilité des propriétés :

- **Dispersion des modules** ( $E_L$  variant de 5,05 GPa à 8,14 GPa) : Attribuée à des hétérogénéités de fabrication (ex : porosité, distribution inégale des fibres).
- **Contrainte ultime** (623,15 MPa $\pm$ 19,36 MPa) : Indique une résistance mécanique élevée, typique des composites verre/époxy bien consolidés.
- **Déformation ultime** (4,97% $\pm$ 0,18%) : Réflecteur d'une ductilité homogène, liée à une adhésion fibre/matrice optimisée.

### b) Rupture aléatoire, Figure 4-1 :

Les profils de rupture non systématiques s'expliquent par :

- La nature multi-phasée du composite, générant des points de concentration de contraintes variables.
- Des défauts locaux (ex : agglomérats de fibres, zones mal imprégnées).

### c) Implications du sergé 2/2 :

- **Avantage** : Adapté aux charges multiaxiales (ex : structures navales ou aérospatiales).
- **Défi** : Sensibilité aux défauts de tissage, pouvant accroître la dispersion des résultats.

Ces résultats confirment le potentiel des peaux en sergé 2/2 pour des applications structurales exigeantes, sous réserve d'un contrôle rigoureux des paramètres de fabrication.

## 4.2 Module de flexion équivalent des structures sandwiches

La Figure 4-3 met en évidence les caractéristiques statiques de flexion en trois points des structures sandwiches H60 et H80. Ce résultat a été obtenu en employant quatre spécimens et en calculant le module de flexion équivalent  $E_{eq}$ , selon les directives de la norme ISO 178[110].

En s'appuyant sur les données des essais de flexion trois points, qui consistent en des paires de mesures force-déplacement ( $F_i, w_i$ ), les courbes contrainte-déformation sont tracées grâce à l'application des équations (4.1) et (4.2).

$$\varepsilon_{fi} = \frac{6h}{l^2} w_i \quad (4.1)$$

$$\sigma_{fi} = \frac{3l}{2bh^2} F_i \quad (4.2)$$

Le module de flexion équivalent est évalué en établissant le rapport entre la variation des contraintes ( $\sigma_{f2}$  et  $\sigma_{f1}$ ) et la variation des déformations ( $\varepsilon_1 = 0,05\%$  et  $\varepsilon_2 = 0,25\%$ ), pour une distance entre appuis de  $l = 180\text{ mm}$ .

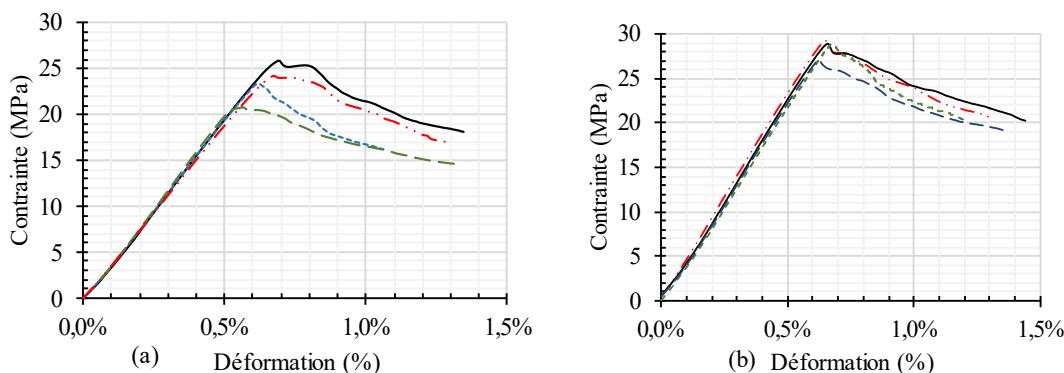


Figure 4-3 : Flexion trois points contrainte-déformation pour les poutres sandwiches composites : (a) H60, (b) H80.

Les performances des deux matériaux sandwiches, évaluées à travers des essais statiques de flexion en trois points, sont synthétisées dans le Tableau 4-2. Ce tableau présente notamment le module de flexion équivalent  $E_{eq}$ , la limite de résistance à la flexion  $\sigma_{fu}$ , et la déformation limite en flexion  $\varepsilon_{fu}$ . Par ailleurs, les mécanismes d'endommagement résultant d'une sollicitation statique sont détaillés dans la Figure 4-4, notamment la rupture par compression des peaux supérieures et le cisaillement des noyaux au milieu des poutres sandwiches.

Tableau 4-2 : Caractérisation en flexion des structures sandwiches.

		Spécimens				Écart-type	Moyenne
		1	2	3	4		
H60	$E_{eq}$ (GPa)	3,98	3,89	3,90	3,81	0,07	3,89
	$\sigma_{fu}$ (MPa)	20,78	23,83	25,87	24,21	2,12	23,67
	$\varepsilon_{fu}$ (%)	1,33%	1,06%	1,35%	1,30%	0,13%	1,26%
H80	$E_{eq}$ (GPa)	4,245	4,291	4,661	4,326	0,19	4,381
	$\sigma_{fu}$ (MPa)	28,87	27,15	29,30	28,94	0,96	28,56
	$\varepsilon_{fu}$ (%)	0,68%	0,63%	0,65%	0,66%	0,02%	0,65%

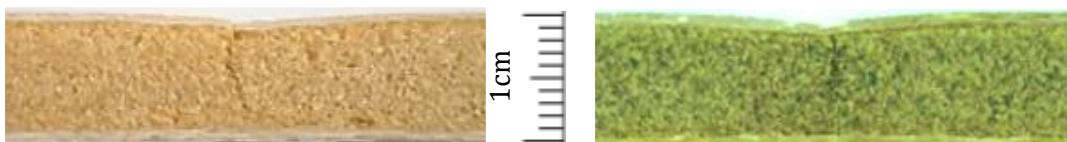


Figure 4-4 : Endommagement des structures sandwiches sous sollicitation statique.

#### 4.2.1 Interprétation des résultats de la flexion statique :

L'analyse comparative des performances en flexion des structures sandwiches H60 et H80, menée via des essais statiques conformes à la norme ISO 178, révèle les observations principales suivantes :

##### a) Module de flexion équivalent ( $E_{eq}$ ) :

- Le H80 présente un module moyen plus élevé (4,38 GPa) que le H60 (3,89 GPa), indiquant une rigidité supérieure du H80.
- L'écart-type plus faible pour le H80 (0,19 vs 0,07) suggère une meilleure homogénéité des propriétés mécaniques.

##### b) Résistance à la flexion ( $\sigma_{fu}$ ) :

- Le H80 affiche une résistance moyenne plus élevée (28,56 MPa) que le H60 (23,67 MPa), confirmant sa capacité à supporter des charges statiques plus importantes.

##### c) Déformation limite ( $\varepsilon_{fu}$ ) :

- Le H60 présente une déformation limite nettement supérieure (1,26%) au H80 (0,65%), révélant une meilleure ductilité mais une rupture plus graduelle.

##### d) Mécanismes d'endommagement, Figure 4-4 :

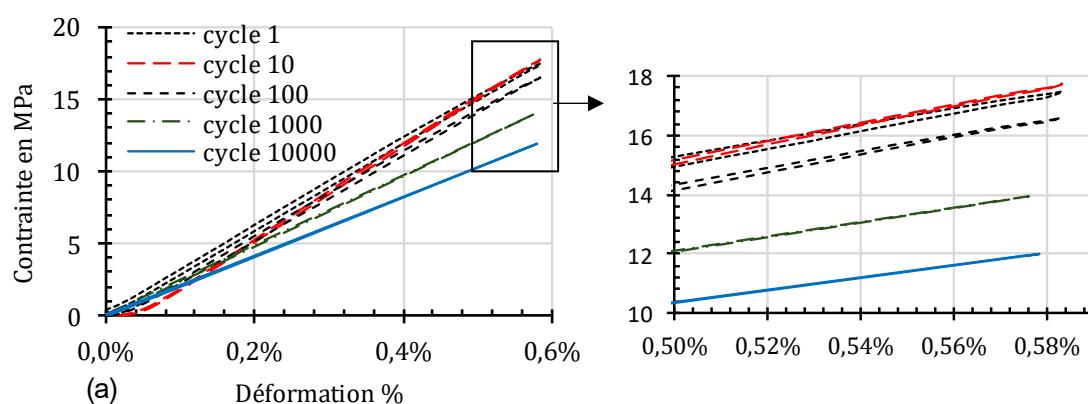
- H60 : Rupture par compression des peaux supérieures et écrasement du noyau, typique d'une absorption d'énergie localisée.
- H80 : Cisaillement du noyau au centre de la poutre, associé à une rigidité accrue mais une fragilité sous déformation critique.
- H60 : Adapté aux applications nécessitant une absorption d'énergie et une déformation tolérée (ex. structures soumises à des chocs).

- H80 : Privilégié pour des charges statiques élevées où la rigidité prime (ex. éléments porteurs).

**Conclusion :** Le choix entre H60 et H80 dépend des exigences du projet : compromis entre rigidité (H80) et ductilité (H60), avec des mécanismes de rupture distincts guidant leur utilisation.

### 4.3 Caractérisation de la résistance à la fatigue des poutres sandwiches

L'analyse des courbes contrainte-déformation permet de comprendre la réponse mécanique des matériaux sandwiches à chaque cycle de charge et de décharge. L'exploitation de ces courbes fournit des paramètres essentiels, tels que le module d'élasticité, la perte de charge et la dissipation d'énergie, qui caractérisent l'évolution cyclique de la dégradation des matériaux étudiés. La forme elliptique des cycles d'hystérésis révèle que les matériaux absorbent et dissipent de l'énergie pendant le processus de chargement, un comportement typique des structures composites. Les courbes contrainte-déformation ont été tracées (cycle 1, cycle 10, cycle 100, cycle 1000) pour les deux matériaux sandwiches, ces cycles présentaient des courbes presque elliptiques, comme illustré dans les Figure 4-5(a) et (b).



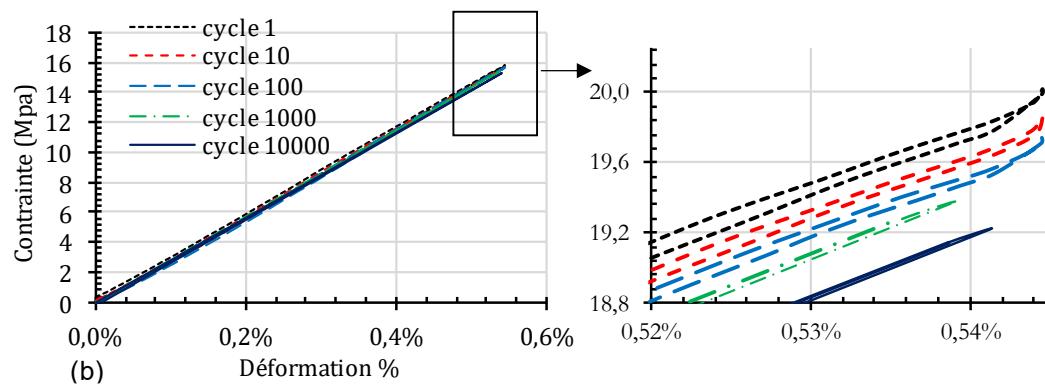


Figure 4-5 : Évolution des boucles énergétiques sous charges répétitives à un taux de charge de 70% : cas des structures (a) H60 et (b) H80.

## 4.4 Interprétation des résultats de flexion cyclique

### 4.4.1 Boucles d'hystérésis :

#### a) Comportement énergétique :

- **Les boucles d'hystérésis elliptiques**, Figure 4-5, indiquent que les deux matériaux absorbent et dissipent de l'énergie à chaque cycle, typique des composites. Cette propriété est cruciale pour les applications soumises à des charges répétitives.

#### b) Évolution des propriétés mécaniques :

- La stabilité des courbes aux cycles 1, 10, 100, 1000 et 10000 suggère une dégradation progressive plutôt qu'une rupture brutale. Cependant, des variations subtiles dans la forme ou l'aire des boucles pourraient révéler des différences de comportement entre H60 et H80 :
  - H60 : Potentiellement a une dissipation énergétique plus élevée (boucles plus larges), mais avec un risque accru d'endommagement cumulatif.
  - H80 : Possiblement une rigidité résiduelle supérieure (module d'élasticité mieux conservé), traduisant une meilleure résistance à la fatigue.

**Conclusion :** Les deux matériaux présentent des réponses à la fatigue distinctes, guidant leur utilisation selon les compromis entre dissipation énergétique (H60) et durabilité cyclique

(H80). Une analyse quantitative des paramètres (énergie dissipée, module, et perte de charge) est nécessaire pour affiner ces observations.

#### 4.4.2 Énergie dissipée

La surface associée à chaque cycle d'hystérésis correspond à l'énergie dissipée au cours d'un cycle. Les résultats révèlent l'existence de deux phases distinctes, désignées **Phase I** et **Phase II**, illustrées dans la Figure 4-6

- **Phase I** (cycles 1 à 10) : Une diminution rapide et linéaire de la dissipation énergétique est observée. Ce phénomène s'explique par l'initiation de microfissures au sein de la matrice, suivie de la rupture localisée de la peau comprimée, réduisant temporairement la capacité de stockage d'énergie élastique. Ces microfissures agissent comme des concentrateurs de contraintes, accélérant la transition vers la Phase II.
- **Phase II** (cycles 10 à 10 000) : Une réduction marquée de la dissipation d'énergie reflétant une dégradation progressive du matériau, caractérisée par la propagation des fissures, le délamination des peaux, et écrasement irréversible de l'âme.

La Figure 4-6 met également en évidence l'influence critique de la densité de la mousse : les matériaux à densité élevée présentent une capacité de dissipation supérieure grâce à une microstructure plus résistante aux déformations, une meilleure adhérence peau-âme et limite la propagation des fissures, préservant ainsi l'intégrité structurale lors du cyclage.

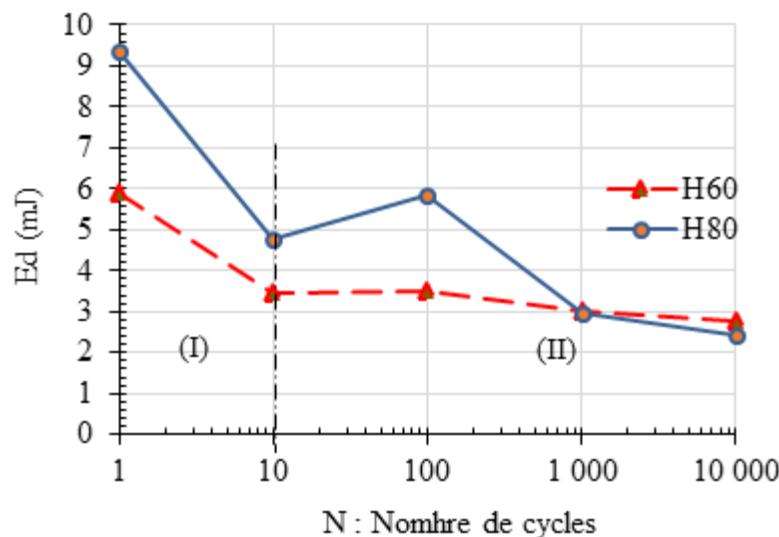


Figure 4-6 : Corrélation entre densité de la mousse et performances en dissipation d'énergie

#### 4.4.3 Module de flexion équivalent en fatigue

Conformément à la norme ASTM D790 [111], nous avons estimé le module d'élasticité équivalent ( $E_{eq}$ ) dans des conditions de fatigue de flexion sous un taux de chargement de 70%, en tenant compte du nombre de cycles et de la densité de l'âme. Dans une deuxième configuration, nous avons estimé le module de flexion en fixant la densité et en variant le niveau de chargement. Les résultats sont présentés dans les Figures 4.7 et 4.8.

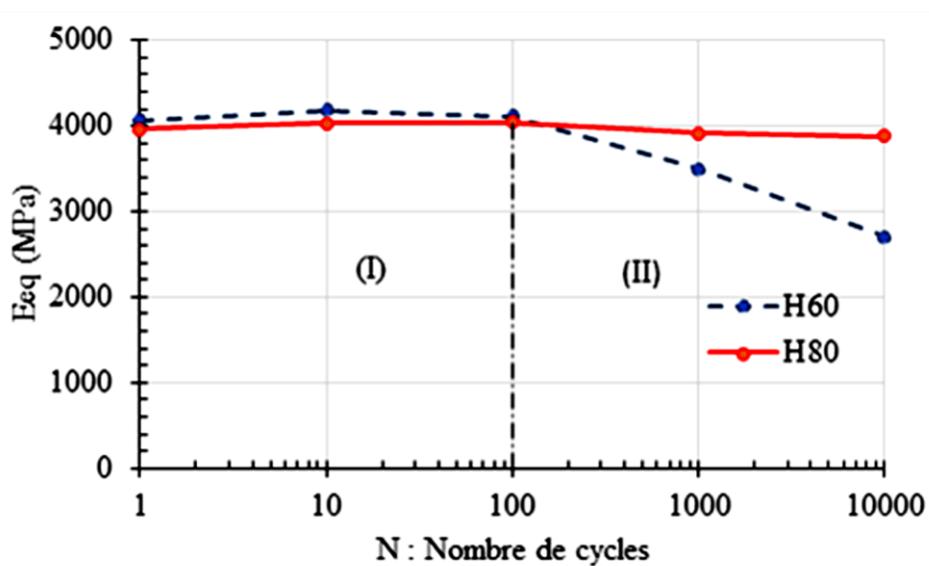


Figure 4-7 : Relation entre densité du noyau et rigidité élastique dans les matériaux sandwichés à 70% de leur sollicitation maximale.

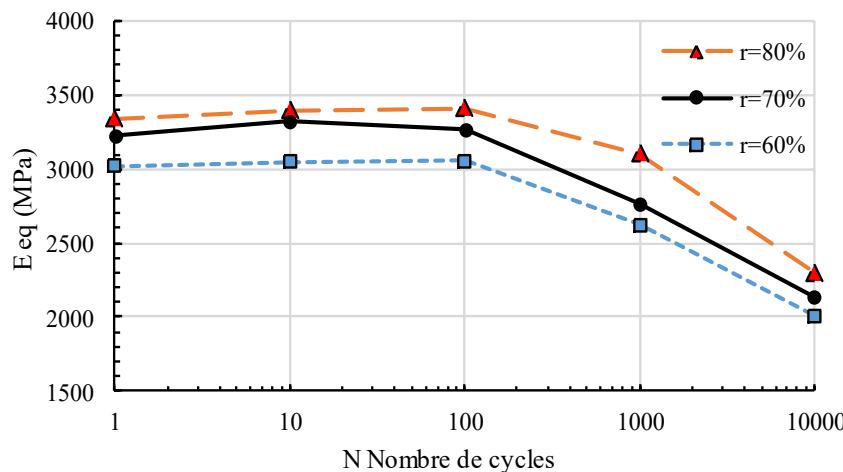


Figure 4-8 : Évolution des propriétés d'élasticité des poutres H60 sous chargements cycliques à différents niveaux de sollicitation.

## Analyse des résultats

La Figure 4-7 présente la relation entre densité du noyau et rigidité élastique

- Les sandwichs à mousse haute densité (H80) conservent une rigidité supérieure, grâce à une meilleure résistance au flambage de l'âme.
- La réduction du module d'élasticité longitudinale équivalent ( $E_{eq}$ ) du matériau H60 est liée à la propagation de microfissures dans la matrice et la perte d'adhésion peau-âme.

La Figure 4-8 présente l'évolution de  $E_{eq}$  en fonction des cycles (N) et niveaux de chargement.

- Zone I ( $N \leq 100$ ) :
  - $E_{eq}$  reste constant, indiquant un domaine élastique non endommagé.
- Zone II ( $N > 100$ ) :
  - Pour le matériau H60, la chute brutale de  $E_{eq}$  (-30% à 10 000 cycles) résulte de :
    - L'accumulation de dommages irréversibles dans la mousse.
    - La rupture progressive des fibres des peaux sous chargement cyclique.
  - Le matériau H80 montre une dégradation modérée, soulignant l'impact de la

densité sur la durabilité.

- L'augmentation du niveau de chargement accélère la dégradation de  $E_{eq}$ , en particulier pour les matériaux de faible densité (H60).

#### 4.4.4 Diminution progressive de charge

Les essais de fatigue menés sur les composites sandwiches H60 et H80 mettent en évidence une évolution caractéristique du rapport  $F_{max}/F_{max0}$  (avec  $F_{max0}$ , valeur maximale du premier cycle), marquée par des étapes de dégradation distincts précédant la rupture finale, conformément aux résultats illustrés en Figure 4-9.

La première étape de dégradation, observable dès les cycles initiaux, correspond à une chute précoce de la charge maximale ( $F_{max}$ ). Cette réduction résulte principalement de la propagation de microfissures matricielles et de la perte progressive d'adhésion aux interfaces fibre/matrice dans les stratifiés superficiels (peaux supérieures). La deuxième étape correspond à une période intermédiaire de propagation locale de microfissures et de déclaminage partiel à l'interface âme/peaux, causant une croissance de la perte de charge. L'étape subséquente se distingue par une diminution accélérée de la charge résiduelle, résultant de l'endommagement cumulatif de l'âme sandwiche. Celui-ci s'explique par la propagation de fissures de cisaillement et la compaction localisée de la mousse PVC sous chargement cyclique. L'amplification couplée de ces modes de défaillance entraîne une perte irréversible d'intégrité, culminant en une rupture complète du système sandwiche.

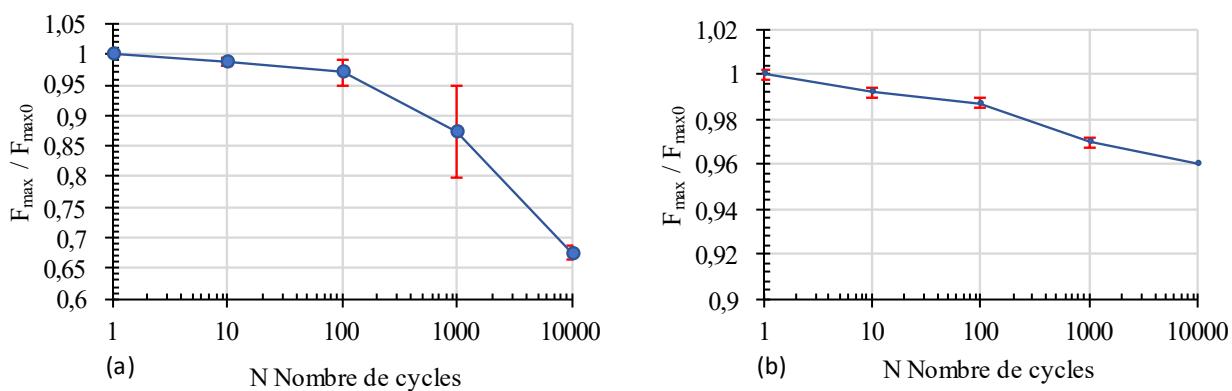


Figure 4-9 : Dégradation progressive du rapport  $F_{\max}/F_{\max 0}$  dans les structures H60/H80 soumises à une fatigue à 70% de la charge statique

#### 4.4.4.1 Interprétation des résultats

La Figure 4-9 illustre l'évolution du rapport ( $F_{\max}/F_{\max 0}$ ) pour deux matériaux, H60 (partie a) et H80 (partie b), soumis à une fatigue cyclique à 70% de leur charge statique maximale. Voici les conclusions clés :

##### a) Comportement du matériau H60, Figure 4-9(a)

- **Dégradation rapide** : Le rapport chute de 1 à 0,68 sur 10 000 cycles.
  - La chute brutale ensuite suggère une initiation et propagation rapide de fissures, menant à une rupture prématuée.
- **Faible résistance en fatigue** : La perte de 32% de la capacité de charge initiale rend le matériau inadapté aux applications à sollicitations cycliques élevées.

##### b) Comportement du matériau H80 Figure 4-9(b)

- **Dégradation lente** : Le rapport diminue modérément de 1 à 0,96 sur 10 000 cycles.
  - La stabilité relative indique une meilleure résistance à la fatigue, probablement due à une microstructure plus ductile ou à une meilleure résistance aux fissures.
- **Performance supérieure** : Seulement 4% de perte de capacité de charge, ce qui le rend adapté aux environnements soumis à des charges cycliques répétées.

##### c) Comparaison des matériaux

Critère	H60	H80
Dégradation de charge	Rapide ( $> 32\%$ )	Lente (4%)
Résistance en fatigue	Faible	Élevée
Applications	Usage statique	Chargement cyclique

**Remarque :** Pour identifier les mécanismes exacts de défaillance, des analyses complémentaires telles que des microscopies des dommages sont nécessaires.

#### 4.5 Imagerie et quantification des dommages cycliques dans les composites sandwiches

La capture d'images et la quantification des altérations ont été effectuées à l'aide d'un dispositif optique binoculaire (modèle Visual Gage 250), associé à une interface logicielle (version 2.2.0 de Visual Gage), comme matérialisé par les données de la Figure 4-10(a). Le mode d'endommagement des poutres sandwiches est illustré dans la Figure 4-10(b). Les dommages sont représentés dans une configuration 2D, où les dommages par fatigue ont été induits à l'aide d'une broche de chargement semi-cylindrique, comme illustré dans la Figure 4-10(c).

Pendant l'essai de fatigue, il a été observé qu'il n'y avait ni dommage visible ni dommages significatifs durant les dix premiers cycles. La détérioration du matériau s'accentue corrélativement à l'augmentation des charges appliquées et à l'accumulation des cycles de sollicitation, conformément aux observations reportées dans le Tableau 4-3 et aux quantifications illustrées dans le Tableau 4-4 et à la Figure 4-11.

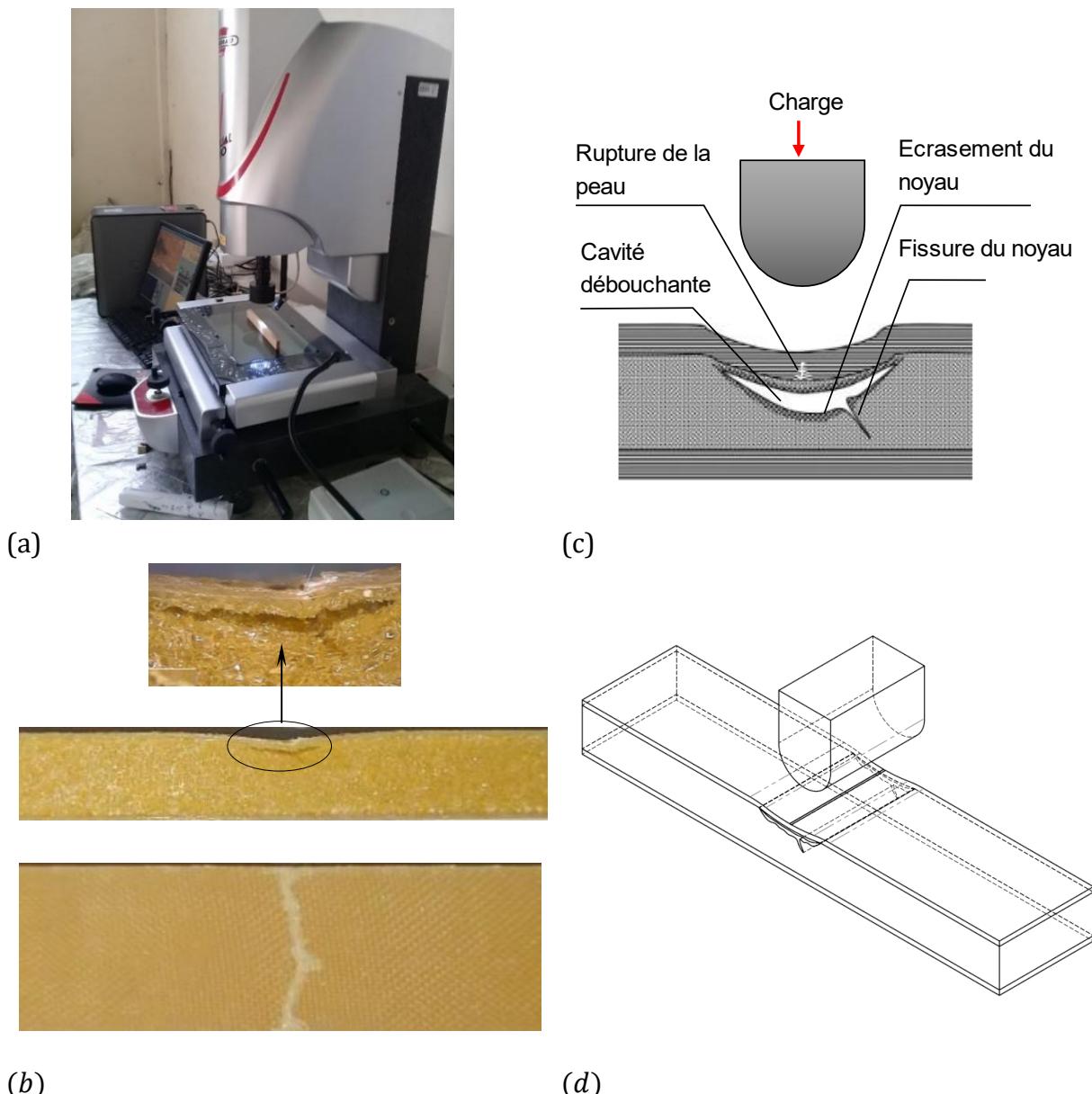


Figure 4-10 : Microscope binoculaire (a), observations macroscopiques et microscopiques (b), schéma (c)et (d) du mode d'endommagement des panneaux sandwiches.

Tableau 4-3 : Impact de l'intensité de la charge et du nombre de cycles sur la détérioration des composites sandwiches soumis à des chargements cycliques.

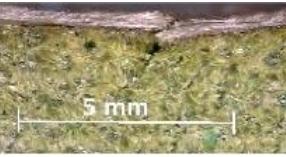
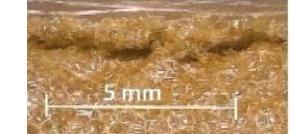
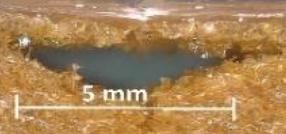
Cycles	100	1000	10000
	H80		
Niveaux de chargement	60%	70%	80%
			
			
			
	H60		
Niveaux de chargement	60%	70%	80%
			
			
			

Tableau 4-4 : Évolution des dommages (largeur Dx et profondeur Dy) sous chargement cyclique dans les structures H60 et H80

N	H80						H60					
	60%		70%		80%		60%		70%		80%	
	Dx	Dy	Dx	Dy	Dx	Dy	Dx	Dy	Dx	Dy	Dx	Dy
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
100	0	0	0	0	0	0	0	0	0,36	0	5,45	0,5
1000	0	0,66	0	0,83	0	0,46	5,92	0,33	6,3	0,41	6,9	0,53
10000	0	1,06	0	1,41	0	1,72	6,48	1,22	6,12	2,37	6,24	2,37

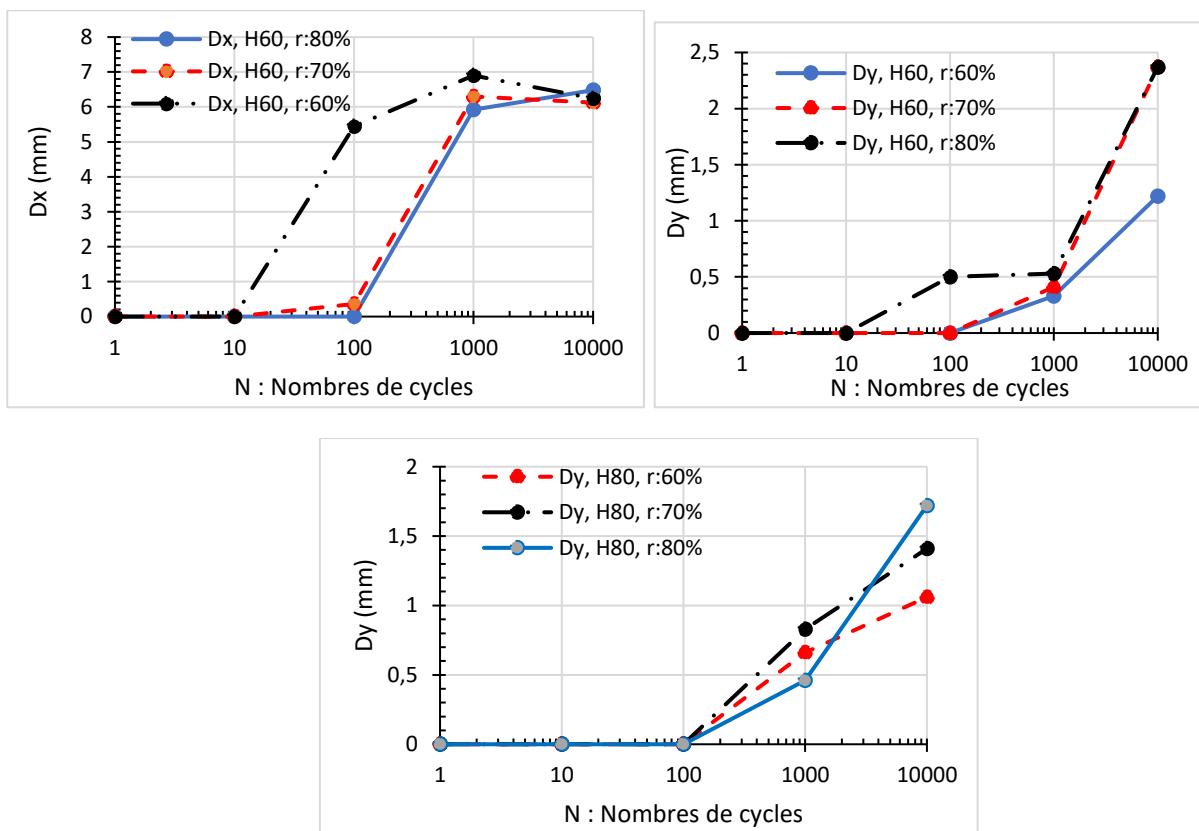


Figure 4-11: Croissance des dommages (Dx, Dy) dans les âmes sandwichs H60 et H80 sous chargement répété

#### 4.5.1 Interprétation des résultats

Le fichier présente une analyse détaillée de l'évolution des dommages (largeur Dx et profondeur Dy) dans les matériaux sandwiches H60 et H80 sous chargements cycliques, combinant imagerie microscopique et données quantitatives.

**a) Observations clés****- H60 (faible densité) :**

- **Dommages précoces et sévères** : Dès 100 cycles à 70–80% de chargement, des fissures apparaissent ( $Dx > 5$  mm,  $Dy > 0.5$  mm).
- **Propagation rapide** : À 10 000 cycles, les dommages atteignent  $Dx \approx 6.5$  mm et  $Dy \approx 2.4$  mm, avec écrasement du noyau et délaminaison peau-âme.
- **Sensibilité aux charges élevées** : Les dommages s'aggravent significativement avec l'intensité du chargement ( $80\% > 70\% > 60\%$ ).

**- H80 (haute densité) :**

- Résistance accrue : Aucun dommage visible ( $Dx = Dy \approx 0$ ) avant 100 cycles, même sous charges élevées.
- Dégradation lente : À 10 000 cycles, les dommages restent limités en largeur ( $Dx = 0$ ) mais montrent une profondeur modérée ( $Dy \approx 1.7$  mm max), liée à une compression localisée du noyau.

**b) Mécanismes d'endommagement**

- **Phase initiale** : Indentation de la peau supérieure (concentration de contraintes).
- **Phase intermédiaire** : Écrasement du noyau en mousse (H60 plus vulnérable).
- **Phase finale** : Cisaillement du noyau et rupture de la peau inférieure.

## Conclusion

- **Impact de la densité** : La haute densité (H80) retarde et réduit l'extension des dommages, tandis que le H60 subit une dégradation accélérée.
- **Effet du chargement** : Les niveaux de sollicitation élevés (70–80%) amplifient les dommages, surtout pour le H60.
- **Implications** : Pour des applications critiques, le H80 est préférable pour sa durabilité ; le H60 nécessite des limites de charge strictes. Caractérisation dynamique des modes propres des poutres sandwiches

## 4.6 Fréquences naturelles théoriques, expérimentales et numériques :

### 4.6.1 Fréquences naturelles théoriques des poutres sandwiches étudiés

Pour une poutre sandwich avec âme en PVC et peaux composites (fibres + résine), la fréquence naturelle ( $f_{n_i}$ ) du mode ( $i$ ) peut être exprimée en intégrant le ratio fibre/résine ( $v$ ) via les propriétés équivalentes de rigidité  $EI_{eq}$  et de masse  $m_{eq}$  selon l'équation (4.3)

$$f_{n_i} = \frac{1}{2\pi} \alpha_i^2 \sqrt{\frac{(EI)_{eq}}{m_{eq}L^3}} \quad i = 1,2,3 \dots n \quad (4.3)$$

$\alpha_i$  est la solution de l'équation des fréquences (4.4) dont les cinq premières solutions sont présentées dans le Tableau 4-5.

L'équation des fréquences  $f(\alpha_i) = \cos(\alpha_i) - 1/ch(\alpha_i) = 0$  (4.4)

Tableau 4-5 : Les premières racines de l'équation des fréquences.

Mode i	1	2	3	4	5
$k_i L = \alpha_i$	1,875	4,694	7,855	10,995	14,137

#### a. Rigidité équivalente $EI_{eq}$

La rigidité dépend du module d'Young des peaux ( $E_p$ ), pris des essais de traction

$$E_p = 6,92 \text{ GPa}$$

Pour une poutre sandwich symétrique (peaux identiques) la rigidité structurale équivalente est :

$$EI_{eq} = E_p \left( \frac{bt_p^3}{6} + \frac{bt_p d^2}{2} \right) + E_c \frac{bt_c^3}{12} \quad (4.5)$$

### b. Masse équivalente $m_{eq}$

La masse équivalente dépend de la densité des peaux  $\rho_p$ :

$$\begin{aligned} \rho_p &= v\rho_f + (1 - v)\rho_r \\ \rho_p &= 0,6 \cdot 2000 + (1 - 0,6)1200 = 1680 \text{ Kg/m}^3 \\ m_{eq} &= bL(2\rho_p t_p + \rho_c t_c) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Tableau 4-6 : Les caractéristiques de masse et la rigidité structurale des deux poutres à structure sandwiche

	Sandwiche H60	Sandwiche H80
$\rho_f$ Densité des fibres (Kg/m <sup>3</sup> )	2000	2000
$\rho_c$ Densité des âmes (Kg/m <sup>3</sup> )	60	80
$m_{eq}$ masses équivalentes (g)	40,68	43,52
$(EI)_{eq}$ Rigidités structurales équivalentes (N.mm <sup>2</sup> )	7449599,2	7497302,2

Tableau 4-7 : fréquences naturelles théoriques

	Fréquences naturelles $f_n$ (Hz) (théoriques)	
Modes	Sandwiche H60	Sandwiche H80
1	29,918	29,004

2	187,51	181,78
3	525,08	509,03
4	1028,8	997,34
5	1700,8	1648,8

#### 4.6.2 Résultats expérimentaux des fréquences naturelles

Les fonctions de réponse fréquentielle (FRF), en l'occurrence l'accélération, ont été extraites et analysées à partir des données expérimentales. Ces données ont été acquises à l'aide du logiciel Pulse-Labshop, un outil couramment utilisé pour la mesure et l'analyse des vibrations. L'accélération, qui représente le rapport entre l'accélération mesurée et la force excitatrice appliquée, a été calculée pour chaque point de mesure afin de caractériser le comportement dynamique des matériaux sandwich étudiée.

Les FRF obtenues, illustrées à la Figure 4-12, montrent les variations de l'accélération en fonction de la fréquence. Ces courbes permettent d'identifier les fréquences propres de la structure sandwiche, ainsi que d'évaluer son amortissement. Les pics observés sur les FRF correspondent aux résonances, où la réponse de la structure est maximale pour une fréquence donnée. Ces fréquences propres des deux sandwiches sont résumées dans le

Tableau 4-8 et ensuite été utilisées pour valider les modèles numériques et approfondir l'analyse dynamique des structures étudiées.

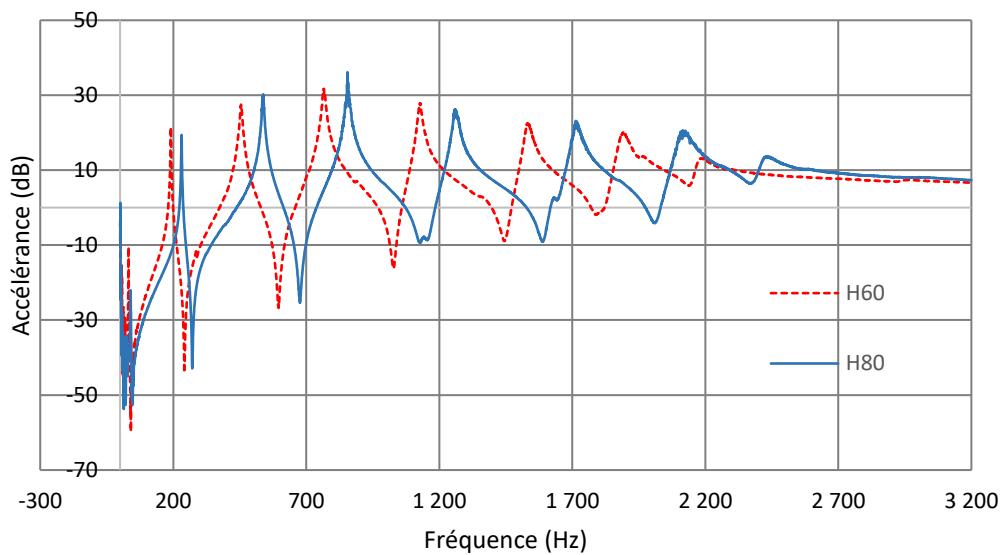


Figure 4-12 : La fonction de réponse des éprouvettes H60 et H80

Tableau 4-8 : Identification des cinq premiers modes propres expérimentaux.

	Fréquences naturelles Expérimentaux $f_n$ (Hz)	
Modes	H60	H80
1	31,80	39,7
2	191,00	231
3	455,00	537
4	765,00	861
5	1130,00	1260

#### 4.6.3 Conclusion

Les résultats montrent clairement que l'augmentation de la densité de la mousse de  $60 \text{ kg/m}^3$  à  $80 \text{ kg/m}^3$  entraîne une augmentation significative des fréquences naturelles pour tous les modes de vibration. Cet effet est plus prononcé pour les modes de vibration plus bas et diminue en importance relative pour les modes plus élevés. Ces données sont utiles pour optimiser la conception des structures sandwiches en fonction des exigences dynamiques et des contraintes de poids.

#### 4.6.4 Analyse modale par éléments finis : résultats et interprétation

##### 4.6.4.1 Étapes de l'Analyse Modale avec ANSYS Workbench

###### a) Géométrie :

En utilisant SOLIDWORKS :

- Création d'une poutre sandwich en 3D
- Définition des épaisseurs de l'âme  $t_c$  et des peaux  $t_p$ .
- Importation du modèle 3D dans l'analyse modale sous ANSYS Workbenche

###### b) Matériaux :

- Importation des matériaux de la bibliothèque d'ANSYS Workbench (âme en PVC + peaux en fibres de verre).

###### c) Maillage

- Âme en PVC : Utilisez des éléments SOLID (SOLID186) pour capturer le cisaillement transverse.
- Peaux en fibres de verre : Maillage avec des éléments SHELL (SHELL181) pour modéliser la flexion.

###### d) Conditions aux limites

- Appuis : Fixez l'extrémité (encastrement).

###### e) Paramètres de l'analyse modale

- Type d'analyse : Modal Analysis.
- Nombre de modes : Les 5-10 premiers modes.

###### f) Solveur et post-traitement : Exécution du calcul

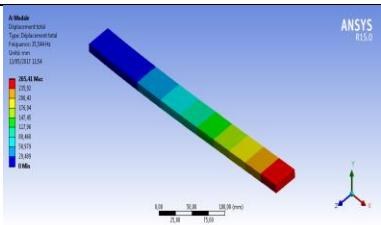
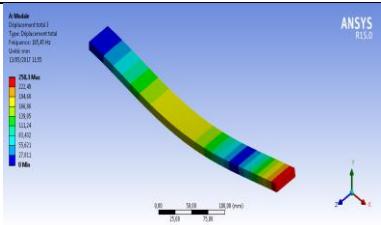
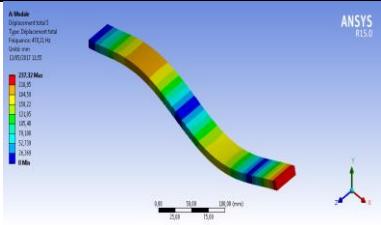
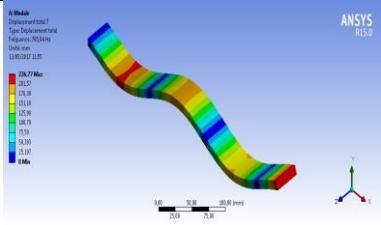
- Fréquences propres ( $f_1, f_2, \dots$ ).
- Modes de vibration : Déformées modales (flexion, torsion, cisaillement).
- Déplacements maximaux par mode.

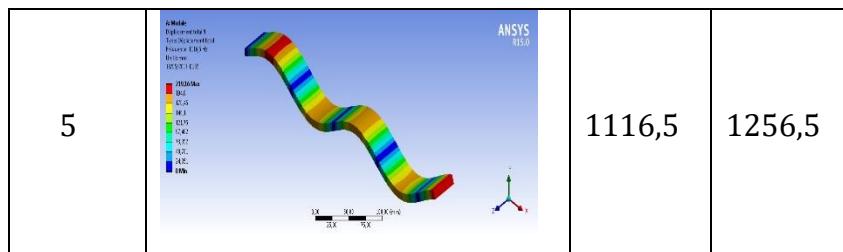
## Conclusion

L'analyse modale sous ANSYS Workbench révèle que :

- Les fréquences propres dépendent fortement du cisaillement de l'âme en PVC et de la rigidité des peaux.
- Les modes basse fréquence sont contrôlés par la flexion, tandis que les modes supérieurs mettent en évidence des mécanismes locaux (cisaillement, torsion).
- La validation expérimentale (mesures par pot vibrant) est cruciale pour confirmer les prédictions numériques.

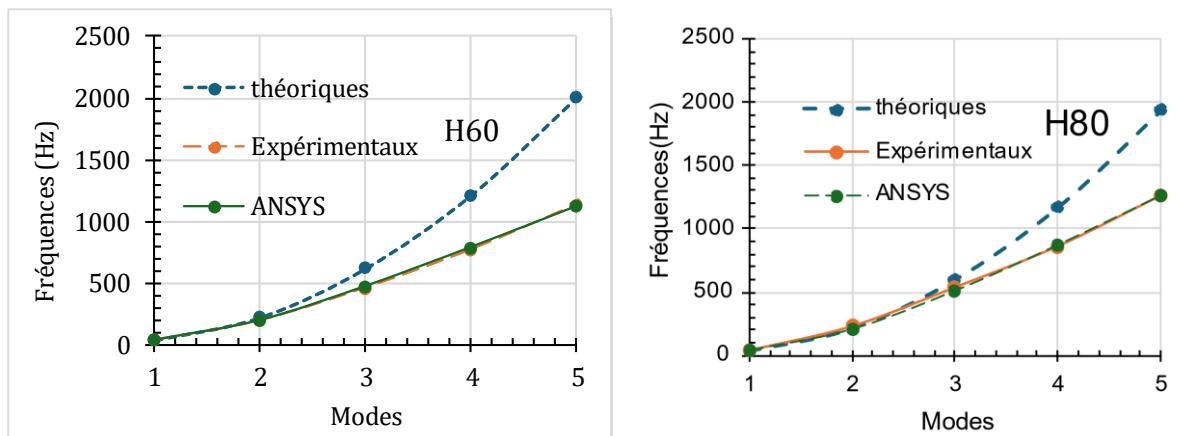
Tableau 4-9 : Résultats de l'analyse modale par éléments finis (ANSYS)

Modes	Déformées	Fréquences (Hz)	
		H60	H80
1		35,544	35,877
2		195,45	204,19
3		470,21	506,56
4		785,04	867,33



#### 4.6.5 Comparaison des résultats des trois méthodes : théorique, expérimentales et numérique

Modes	H60			H80		
	Théoriques	Expérimentaux	ANSYS	Théoriques	Expérimentaux	ANSYS
1	35,2	31,8	35,544	34,11	39,7	35,877
2	220,62	191	195,45	213,79	231	204,19
3	617,82	455	470,21	598,68	537	506,56
4	1210,5	765	785,04	1173	861	867,33
5	2001,2	1130	1116,5	1939,2	1260	1256,5



Les écarts observés entre les trois approches s'expliquent par les hypothèses et limitations inhérentes à chaque méthode :

**a) Modélisation théorique :**

La modélisation théorique des fréquences naturelles présentée dans le document repose sur une hypothèse simplificatrice issue de la théorie des poutres d'Euler, qui ne prend pas en compte :

- a. La déformation par cisaillement transverse (effet de glissement entre les peaux et l'âme).
  - b. Les déformations torsionnelles (rotation autour de l'axe longitudinal).
- Les écarts avec l'expérimentale (ex :  $\Delta \approx 10\text{-}20\%$  pour H60) révèlent ces limitations, notamment pour les modes supérieurs (ex : Mode 5 théorique H60 = 2001 Hz vs expérimental = 1130 Hz).

**b) Simulation ANSYS : Prise en compte des effets négligés par la théorie****• Cisaillement transverse et torsion :**

- La simulation ANSYS intègre ces effets via des éléments finis adaptés (SOLID186 pour l'âme, SHELL181 pour les peaux), contrairement au modèle théorique basé sur Euler.
- Exemple : Pour le Mode 5 de H60, les résultats ANSYS (1116,5 Hz) et expérimentaux (1130 Hz) sont très proches, alors que la théorie surestime largement la fréquence (2001 Hz).

**• Interactions âme/peau :**

- Le modèle numérique capture les contraintes locales à l'interface entre l'âme en PVC et les peaux composites, ce qui affine la prédiction des fréquences.

### **c) Corrélation entre les résultats expérimentaux et de simulation numérique**

Les résultats expérimentaux et de simulation numérique (ANSYS) présentent une meilleure corrélation que les prédictions théoriques, en particulier pour les modes de vibration supérieurs (Modes 3 à 5).

## **CONCLUSION GENERALE**

## Conclusion générale

L'étude examine la réponse à la fatigue de composites sandwichs à âme en mousse (de densités variables) sous chargement de flexion. Les observations recueillies soulignent que l'amplitude de chargement et la densité de l'âme conditionnent significativement les mécanismes d'endommagement. Une analyse multi-paramètres a été conduite, intégrant l'évolution du module de flexion, les pertes de charge et les phénomènes de dissipation énergétique.

Une dégradation de 32% du module de flexion équivalent et de la perte de charge a été mesurée après 10 000 cycles pour les composites sandwichs à âme de faible densité ( $60 \text{ kg/m}^3$ ). En comparaison, les échantillons à densité supérieure ( $80 \text{ kg/m}^3$ ) conservent une intégrité structurelle, une déviation n'excédant pas 4%.

De plus, deux phases distinctes ont été observées, correspondant à différents niveaux de cyclage (I et II). La phase initiale (1-100 cycles) a présenté une diminution linéaire de l'énergie dissipée, phénomène attribué à l'initiation de microfissures au sein du matériau. La deuxième phase (100-10 000 cycles) a montré une diminution rapide de la dissipation d'énergie, résultant de la dégradation progressive du matériau. L'augmentation observée des dommages s'aligne avec les paramètres calculés ( $E, E_d, F_{max_0}$ ) des matériaux étudiés, validant ainsi l'évolution des dommages dans les poutres sandwiches.

La dégradation du matériau est influencée par la densité de l'âme et des charges appliquées

- Influence de la densité : L'âme haute densité (H80) limite significativement la propagation des dommages, contrairement au matériau H60 qui présente une altération prématuée.
- Impact des charges appliquées : Des sollicitations élevées (70-80% de la capacité maximale) intensifient l'endommagement, particulièrement pour le matériau H60, révélant sa vulnérabilité accrue sous contraintes critiques.

Concernant l'analyse modale, les résultats expérimentaux et numériques convergent, car la

simulation intègre les effets de cisaillement et de torsion négligés théoriquement.

L'augmentation de la densité de l'âme améliore les fréquences propres.

## **Références bibliographiques**

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1]. *H. Djemai.* (2017), "Contribution à l ' étude de l ' endommagement dans les matériaux composites sandwiches," Thèse de doctorat, Université Mohamed Khider – Biskra Faculté.
- [2]. *M. Pinho.*(2020), "Modélisation de l ' endurance en fatigue sous chargement complexe , statique et vibratoire," Thèse de doctorat, Université Paris-Saclay. available: <https://theses.hal.science/tel-03085783v1>.
- [3]. *M. Abakar.* (2019), "Analyse des mécanismes d ' endommagement et du comportement vibratoire d ' un composite à constituants naturels dans un environnement hydrique," Thèse de doctorat, Université Le Mans. available: <https://theses.hal.science/tel-02309804v1>.
- [4]. *J. N. Reddy*, Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis, Second Edition. CRC Press, 2004.
- [5]. *S. B. Boppana, C. G. Ramachandra, K. P. Kumar, and S. Ramesh*, Structural Composite Materials. Springer, 2023.
- [6]. *Ever J. Barbero*, Introduction-to-Composite-Materials-Design, 3rd ed. CRC Press, 2018.
- [7]. *V. Goodship, B. Middleton, and R. Cherrington*, Design and Manufacture of Plastic Components for Multifunctionality: Structural Composites, Injection Molding, and 3D Printing, 1st ed. William Andrew, Elsevier, 2015.
- [8]. *E. Reashad Bin Kabir and E. Nasrin Ferdous*, "Kevlar-The Super Tough Fiber," Int. J. Text. Sci., **vol. 1**, no. 6, pp. 78–83, 2013,.
- [9]. *N. Saba and M. Jawaid*, "Epoxy resin based hybrid polymer composites," Hybrid Polym. Compos. Mater., pp. 57–82, 2017.
- [10]. *M. F. Ashby, H. Shercliff, and D. Cebon*, Materials: engineering, science, processing and design, Fourth. Butterworth-Heinemann, 2019.

- [11]. *S. Drapier*, "Mécanique des Composites Hautes Performances Versionn 33 Avril 2021," pp. 0–79, 2021.
- [12]. *P. K. Mallick*, Fiber-reinforced composites: materials, manufacturing, and design. CRC press. 2007.
- [13]. *K. K. Singh*, Materials Horizons : From Nature to Nanomaterials Impact Behavior of Fibre Reinforced Laminates Fundamentals of Low Velocity Impact. 2022.
- [14]. *P. W. R. Beaumont and C. H. Zweben*, "Comprehensive composite materials II," *Compr. Compos. Mater. II*, **vol. 2**, no. 1, pp. 1–366, 2017.,
- [15]. *Z. Hasan*, Tooling for Composite Aerospace Structures. 2020. available: <http://www.sciencedirect.com:5070/book/9780128199572/tooling-for-composite-aerospace-structures>.
- [16]. *J.-M. Berthelot and M. Cole*, "Composite materials: mechanical behavior and structural analysis," (No Title), 1999.
- [17]. *C. Hwu*, Mechanics of Laminated Composite Structures. 2024.
- [18]. *R. L. Haurath and A. V Longobardo*, "High-strength glass fibers and markets," *Fiberglass Glas. Technol. Energy-Friendly Compos. Appl.*, pp. 197–225, 2010.
- [19]. *A. Rudawska, M. Frigione, A. Sarcinella, V. Brunella, L. Di Lorenzo, and E. Olewnik-kruszkowska*, "Acid Composites," 2024.
- [20]. *A. Kausar, Z. Anwar, and B. Muhammad*, "Recent Developments in Epoxy/Graphite, Epoxy/Graphene, and Epoxy/Graphene Nanoplatelet Composites: A Comparative Review," *Polym. - Plast. Technol. Eng.*, **vol. 55**, no. 11, pp. 1192–1210, 2016.,
- [21]. *P. Ravindran, K. M. Kumar, S. Rangasamy, and K. R. V. Kumar*, "Experimental and Numerical Investigation of Ballistic Impact Analysis on Kevlar Reinforced Polymer Composites and Shape Memory Alloy Sheet Reinforced Kevlar Epoxy Polymer Composites," *Polym.*, **vol. 46**, no. 4, pp. 470–475, 2022.,
- [22]. *M. E. H. Bourahli*, "Caractérisation d'un composite verre / époxy," 2014.

- [23]. *W. C. Young and R. G. Budynas*, Roark's formulas for stress and strain, **vol. 7**. 2002.
- [24]. *D. Gay*, COMPOSITE MATERIALS: Design and Applications: THIRD EDITION. 2014.
- [25]. *C. O. Horgan and J. G. Murphy*, "A constitutive model for fibre-matrix interaction in fibre-reinforced hyperelastic materials," *Appl. Eng. Sci.*, **vol. 2**, no. July, p. 100008, 2020, available: <https://doi.org/10.1016/j.apples.2020.100008>.
- [26]. *M. K. Egbo*, "A fundamental review on composite materials and some of their applications in biomedical engineering," *J. King Saud Univ. - Eng. Sci.*, **vol. 33**, no. 8, pp. 557–568, 2021, available: <https://doi.org/10.1016/j.jksues.2020.07.007>.
- [27]. *V. Carvelli, A. Jain, and S. Lomov*, Experimental Observations of Fatigue of Short Fiber Reinforced Composites. 2017.
- [28]. *G. S. Mukherjee, A. Jain, and M. Banerjee*, "Engineering Matrix Materials for Composites: Their Variety, Scope and Applications," *Fine Chem. Eng.*, **vol. 4**, no. 1, pp. 13–45, 2023.,
- [29]. *S. P. Josyula and S. Diebels*, "Numerical Investigation of Fracture Behaviour of Polyurethane Adhesives under the Influence of Moisture," *Polymers (Basel)*., **vol. 16**, no. 18, 2024.,
- [30]. *J. R. Vinson and R. L. Sierakowski*, The behavior of structures composed of composite materials, **vol. 105**. 2008.
- [31]. *J. Fan and J. Njuguna*, An Introduction to Lightweight Composite Materials and Their Use in Transport Structures. Elsevier Ltd, 2016. available: <http://dx.doi.org/10.1016/B978-1-78242-325-6.00001-3>.
- [32]. *Y. F. Ai, L. Xia, F. Q. Pang, Y. L. Xu, H. B. Zhao, and R. K. Jian*, "Mechanically strong and flame-retardant epoxy resins with anti-corrosion performance," *Compos. Part B Eng.*, **vol. 193**, no. March, p. 108019, 2020, available: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2020.108019>.
- [33]. *M. Y. Ahmed, M. Faseeh, U. Rahman, and M. I. Ahmed*, "Design and Fabrication of corrugated sandwich panel," **vol. 6**, no. 5, pp. 60–70, 2019.

- [34]. *P. Bělský and M. Kadlec*, "Non-destructive Methods for Damage Assessment of Composite Sandwich Structures," MATEC Web Conf., **vol. 188**, 2018.
- [35]. *M. Ginot, M. d'Ottavio, O. Polit, C. Bouvet, and B. Castanié*, "Benchmark of wrinkling formulae and methods for pre-sizing of aircraft lightweight sandwich structures," Compos. Struct., **vol. 273**, p. 114387, 2021.
- [36]. *M. Ginot, C. Bouvet, B. Castanié, J. Serra, and N. Mahuet*, "Local buckling on large sandwich panels used in light aviation: Experimental setup and failure scenarios," Compos. Struct., **vol. 304**, p. 116439, 2023.
- [37]. *R. M. Ogorkiewicz*, "Analysis and design of structural sandwich panels," Howard G. Allen Pergamon Press, no. December, p. 1970, 1970.
- [38]. *X. Xue, C. Zhang, W. Chen, M. Wu, and J. Zhao*, "Study on the impact resistance of honeycomb sandwich structures under low-velocity/heavy mass," Compos. Struct., **vol. 226**, no. May, p. 111223, Oct. 2019, available:  
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111223>.
- [39]. *Y. Zhang, L. Yan, C. Zhang, and S. Guo*, "Low-velocity impact response of tube-reinforced honeycomb sandwich structure," Thin-Walled Struct., **vol. 158**, no. October 2020, p. 107188, 2021, available: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.107188>.
- [40]. *K. P. Dharmasena, H. N. G. Wadley, Z. Xue, and J. W. Hutchinson*, "Mechanical response of metallic honeycomb sandwich panel structures to high-intensity dynamic loading," Int. J. Impact Eng., **vol. 35**, no. 9, pp. 1063–1074, 2008..
- [41]. *S. Michałowski, E. Hebda, and K. Pielichowski*, "Thermal stability and flammability of polyurethane foams chemically reinforced with POSS," J. Therm. Anal. Calorim., **vol. 130**, no. 1, pp. 155–163, 2017..
- [42]. *T. J. Hause*, Sandwich structures: Theory and responses. 2021.
- [43]. *A. M. James and W. E. Harvill*, Advanced Composites., no. 17. 1985.
- [44]. *3A Composites Core Materials*, "AIREX ® C70," 2020. available:

<https://www.3accorematerials.com/uploads/documents/TDS-AIREX-C70-E-04.2020.pdf>. [Accessed: Dec. 06, 2020].

- [45]. *M. F. Ashby, H. Shercliff, and D. Cebon*, Materials: engineering, science, processing and design, Third. Butterworth-Heinemann, 2013.
- [46]. *K. Farooq, E. A Mahi, and S. Sahraoui*, "Université du Maine COMPORTEMENT MÉCANIQUE DES COMPOSITES SANDWICHES EN STATIQUE ET FATIGUE CYCLIQUE," 2003, available: <http://cyberdoc.univ-lemans.fr/theses/2003/2003LEMA1006.pdf>.
- [47]. *M. G. Tarrés*, "MANUFACTURING TECHNIQUES FOR FIBRE Assessment of virtual design and manufacturing techniques for fibre Marc Gascons i Tarrés," 2012.
- [48]. *A. C. Long, C. D. Rudd, M. Blagdon, and P. Smith*, "Characterizing the processing and performance of aligned reinforcements during preform manufacture," Compos. Part A Appl. Sci. Manuf., **vol. 27**, no. 4 PART A, pp. 247–253, 1996.,
- [49]. *C. D. Rudd, M. R. Turner, A. C. Long, and V. Middleton*, "Tow placement studies for liquid composite moulding," Compos. Part A Appl. Sci. Manuf., **vol. 30**, no. 9, pp. 1105–1121, 1999.,
- [50]. *S. G. Hancock and K. D. Potter*, "The use of kinematic drape modelling to inform the hand lay-up of complex composite components using woven reinforcements," Compos. Part A Appl. Sci. Manuf., **vol. 37**, no. 3, pp. 413–422, 2006.,
- [51]. *S. M. Rangappa, J. Parameswaranpillai, S. Siengchin, and L. Kroll*, Lightweight Polymer Composite Structures, no. 112. 2020.
- [52]. *A. C. Xu and L. M. Bao*, "Manufacture of fabric reinforced thermoplastic composites with high fiber volume fraction," Adv. Mater. Res., **vol. 796**, pp. 301–305, 2013.,
- [53]. *H. A. Sodano*, "Manufacture of fiber reinforced composite materials with isocyanate resin," 2023.
- [54]. *J.-M. Berthelot*, "Mécanique des Matériaux et Structures Composites," Inst. Supérieur des Matériaux Mécaniques Avancés, p. 667, 2010, available: [www.editions.lavoisier.fr](http://www.editions.lavoisier.fr).

- [55]. *K.-T. Hsiao and D. Heider*, Vacuum assisted resin transfer molding (VARTM) in polymer matrix composites. Woodhead Publishing Limited, 2012. available:  
<http://dx.doi.org/10.1533/9780857096258.3.310>.
- [56]. *R. J. Cano, B. W. Grimsley, B. J. Jensen, and C. B. Kellen*, "High temperature VARTM with LaRC polyimides," Int. SAMPE Tech. Conf., pp. 459–468, 2004.
- [57]. *I. Skjaerholt*, "Integration Tools for Design and Process Control of Filament Winding," Nor. Univ. Sci. Technol. Master Thesis, no. June, p. 144, 2012.
- [58]. *J. Njuguna*, Lightweight composite structures in transport: design, manufacturing, analysis and performance. Woodhead publishing, 2016.
- [59]. *K. Meyer, F. Pignagnoli, D. Potts, and G. Hunter*, "Lightweighting matters in energy storage," Reinf. Plast., **vol. 58**, no. 4, pp. 20–23, 2014.
- [60]. *J. M. Lee, C. J. Lee, B. M. Kim, and D. C. Ko*, "Design of Prepreg Compression Molding for Manufacturing of CFRTP B-pillar Reinforcement with Equivalent Mechanical Properties to Existing Steel Part," Int. J. Precis. Eng. Manuf., **vol. 21**, no. 3, pp. 545–556, 2020, available: <https://doi.org/10.1007/s12541-019-00265-z>.
- [61]. *A. Borzacchiello, M. A. Autiello, L. Russo, and L. Nicolais*, "Novel Biomimetic Design for Composite Material," Wiley Encycl. Compos., pp. 1–8, 2012,.
- [62]. *H. E. N. Bersee*, "Composite Aerospace Manufacturing Processes," Encycl. Aerosp. Eng., pp. 1–16, 2010,.
- [63]. *J. Tomblin and W. Sereviraine*, "Determining the Fatigue Life of Composite Aircraft Structures Using Life and Load-Enhancement Factors," p. 155, 2011, available:  
<http://www.tc.faa.gov/its/worldpac/techrpt/ar10-6.pdf>.
- [64]. *X. S. Yi*, Development of multifunctional composites for aerospace application. Elsevier Inc., 2015. available: <http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-323-26434-1.00011-8>.
- [65]. *K. C. Krishan*, Composite materials: science and engineering, 3ed ed. Springer, 2012.
- [66]. *S. L. Ogin, P. Brøndsted, and J. Zangenberg*, Composite materials: Constituents,

- architecture, and generic damage. Elsevier, 2016. available:  
<http://dx.doi.org/10.1016/B978-1-78242-286-0.00001-7>.
- [67]. *H. Böhrk*, “Heat flux reduction by transpiration-cooling of CMCs for space applications,” *Adv. Compos. Mater. Prop. Appl.*, pp. 468–496, 2017.,
- [68]. *S. Agrawal, K. K. Singh, and P. K. Sarkar*, “Impact damage on fibre-reinforced polymer matrix composite - A review,” *J. Compos. Mater.*, **vol. 48**, no. 3, pp. 317–332, 2014.,
- [69]. *I. R. McColl and J. G. Morley*, “Crack growth in hybrid fibrous composites,” *J. Mater. Sci.*, **vol. 12**, no. 6, pp. 1165–1175, 1977.,
- [70]. *Q. Han, L. Wang, and J. Xu*, “Experimental research on fracture behaviors of damaged CFRP tendons: Fracture mode and failure analysis,” *Constr. Build. Mater.*, **vol. 112**, pp. 1013–1024, 2016, available: <http://dx.doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2016.03.036>.
- [71]. *E. K. Gamstedt and B. A. Sjögren*, “Micromechanisms in tension-compression fatigue of composite laminates containing transverse plies,” *Compos. Sci. Technol.*, **vol. 59**, no. 2, pp. 167–178, 1999.,
- [72]. *D. Zenkert*, “An Introduction to Sandwich Structures,” p. 454, 2005.
- [73]. *B. Mallikarjun*, “Strength Evaluation in J-Nose Panel of an Aircraft Wing Under Static Load,” no. 1, pp. 2394–6210, 2015.
- [74]. *M. A. Douville and P. Le Grogne*, “Exact analytical solutions for the local and global buckling of sandwich beam-columns under various loadings,” *Int. J. Solids Struct.*, **vol. 50**, no. 16–17, pp. 2597–2609, 2013.,
- [75]. *C. B. Norris*, Short-column compressive strength of sandwich constructions as affected by size of cells of honeycomb core materials, **vol. 26**. US Department of Agriculture, Forest Service, Forest Products Laboratory, 1964.
- [76]. *HexCel*, “Honeycomb sandwich design technology,” HexWeb Honeycomb Sandw. Des. Technol., no. AGU 075b, pp. 1–28, 2000, available:  
<http://scholar.google.com/scholar?hl=en&btnG=Search&q=intitle:Honeycomb+sandwic>

h+design+technology#1.

- [77]. *B. A. Bednarcyk, P. W. Yarrington, and S. M. Arnold*, "Multiscale fatigue life prediction for composite panels," *Comput. Mater. Contin.*, **vol. 35**, no. 3, pp. 229–254, 2013.,
- [78]. *H. Bansemir*, "Lightweight Design of Composite Sandwich Structures," in *Sustainable Automotive Technologies 2014*, I. Denbratt, A. Subic, and J. Wellnitz, Eds., Cham: Springer International Publishing, 2015, pp. 171–178.
- [79]. *L. S. Babu and H. K. Shivanand*, "Mechanical Characterization of PU Based Sandwich Composites with Variation in Core Density," *Int. J. Mater. Sci. Appl.*, **vol. 4**, no. 4, pp. 277-, 2015.,
- [80]. *H. Mathieson and A. Fam*, "GFRP-polyurethane sandwich panels under reversed bending fatigue," *Adv. FRP Compos. Civ. Eng. - Proc. 5th Int. Conf. FRP Compos. Civ. Eng. CICE 2010*, pp. 164–167, 2011.,
- [81]. *K. Kanny and H. Mahfuz*, "Flexural fatigue characteristics of sandwich structures at different loading frequencies," *Compos. Struct.*, **vol. 67**, no. 4, pp. 403–410, 2005.,
- [82]. *X. X. Dai and J. Y. Richard Liew*, "Fatigue performance of lightweight steel-concrete-steel sandwich systems," *J. Constr. Steel Res.*, **vol. 66**, no. 2, pp. 256–276, 2010, available: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcsr.2009.07.009>.
- [83]. *L. Zhao, M. Shan, H. Hong, D. Qi, J. Zhang, and N. Hu*, "A residual strain model for progressive fatigue damage analysis of composite structures," *Compos. Struct.*, **vol. 169**, pp. 69–78, 2017, available: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.119>.
- [84]. *H. Mathieson and A. Fam*, "Static and Fatigue Behavior of Sandwich Panels with GFRP Skins and Governed by Soft-Core Shear Failure," *J. Compos. Constr.*, **vol. 18**, no. 2, pp. 1–9, 2014.,
- [85]. *V. Vadakke and L. A. Carlsson*, "Experimental investigation of compression failure of sandwich specimens with face/core debond," *Compos. Part B Eng.*, **vol. 35**, no. 6–8, pp. 583–590, 2004.,

- [86]. *J. Banghai, L. Zhibin, and L. Fangyun*, “Failure mechanism of sandwich beams subjected to three-point bending,” *Compos. Struct.*, **vol. 133**, pp. 739–745, 2015, available: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.07.056>.
- [87]. *I. M. Daniel, E. E. Gdoutos, K. A. Wang, and J. L. Abot*, “Failure modes of composite sandwich beams,” *Int. J. Damage Mech.*, **vol. 11**, no. 4, pp. 309–334, 2002.,
- [88]. *M. Rokbi, H. Osmani, N. Benseddiq, and A. Imad*, “On experimental investigation of failure process of woven-fabric composites,” *Compos. Sci. Technol.*, **vol. 71**, no. 11, pp. 1375–1384, 2011, available: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compscitech.2011.05.003>.
- [89]. *M. Z. Hassan, Z. W. Guan, W. J. Cantwell, G. S. Langdon, and G. N. Nurick*, “The influence of core density on the blast resistance of foam-based sandwich structures,” *Int. J. Impact Eng.*, **vol. 50**, pp. 9–16, 2012, available: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2012.06.009>.
- [90]. + *N. and P. H. Wang*, “A review of failure modes and fracture analysis of aircraft composite materials,” *Eng. Fail. Anal.*, **vol. 115**, p. 104692, 2020, available: <https://doi.org/10.1016/j.englfailanal.2020.104692>.
- [91]. *B. CASTANIÉ and S. RIVALLANT*, “Experimental Analysis of Wrinkling of Sandwich Structures,” 2023.
- [92]. *A. Hadjab, L. Fatmi, and N. Ouelaa*, “Effect of Foam Density and Load Levels on Fatigue Characteristics of Pvc Foam Core Sandwich Composites,” *UPB Sci. Bull. Ser. D Mech. Eng.*, **vol. 86**, no. 2, pp. 121–134, 2024.
- [93]. *A. Nussbaumer, L. Borges, and L. Davaine*, *Fatigue Design of Steel and Composite Structures: Eurocode 3: Design of Steel Structures, Part 1-9 - Fatigue, Eurocode 4: Design of Composite Steel and Concrete Structures: First Edition*. 2012.
- [94]. *K. . Reifsnider*, *Fatigue of Composite Materials: Volume 4 of Composite Materials Series*, **vol. V**. 1991.
- [95]. *N. Sharma, R. F. Gibson, and E. O. Ayorinde*, “Fatigue of foam and honeycomb core

- composite sandwich structures: A tutorial," *J. Sandw. Struct. Mater.*, **vol. 8**, no. 4, pp. 263–319, 2006.,
- [96]. *P. K. Mallick and Y. Zhou*, "Effect of mean stress on the stress-controlled fatigue of a short E-glass fiber reinforced polyamide-6,6," *Int. J. Fatigue*, **vol. 26**, no. 9, pp. 941–946, 2004.,
- [97]. *M. De Monte, E. Moosbrugger, and M. Quaresimin*, "Influence of temperature and thickness on the off-axis behaviour of short glass fibre reinforced polyamide 6.6 - Cyclic loading," *Compos. Part A Appl. Sci. Manuf.*, **vol. 41**, no. 10, pp. 1368–1379, 2010, available: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesa.2010.02.004>.
- [98]. *A. P. Vassilopoulos*, Fatigue life modeling and prediction methods for composite materials and structures—Past, present, and future prospects, 2nd ed. Elsevier Ltd., 2020. available: <http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-08-102575-8.00001-2>.
- [99]. *R. F. Gibson*, Principles of composite material mechanics, 4th ed. CRC press, 2018.
- [100]. *J. R. Vinson*, The Behavior of Sandwich Structures of Isotropic and Composite Materials. Routledge, 2018.
- [101]. *S. Bozkurt, M. Tarik, and B. Ozturk*, "Transverse Vibration Analysis of Euler-Bernoulli Beams Using Analytical Approximate Techniques," *Adv. Vib. Anal. Res.*, 2011.,
- [102]. *S. G. Braun, D. J. Ewins, and S. S. Rao*, Encyclopedia of vibration, **vol. 39**, no. 09. Academic Press, 2002.
- [103]. *F. Group, A. Borbely, J. F. Kreider, A. Bejan, J. S. Cundiff, and L. R. Davis*, Vibration and Shock Mechanical Engineering Series Distributed Generation : The Power Paradigm for the New Millennium Fluid Power Circuits and Controls : Fundamentals and Applications. 2005.
- [104]. *J. P. M. Cheloni, M. E. Silveira, and L. J. Da Silva*, "Effects of amount of glass fiber laminate skins in sandwich composite of filled core," *Mater. Res.*, **vol. 22**, no. 1, pp. 1–8, 2018.,
- [105]. *ISO 527-5:2009*, "Determination of tensile properties - Part 5: Test conditions for unidirectional fibre-reinforced plastic composites," *Int. Organ. Stand.*, **vol. 1**, p. 9 pp., 108

2009.

- [106]. *A. Daoui and A. Zerizer*, "Identification Des Fréquences De Résonance Et Du Module D' Élasticité Par La Méthode D' Analyse Vibratoire," October, no. Lmmc, pp. 207–213, 2009.
- [107]. *B. J. Schwarz and M. H. Richardson*, "Método de análisis modal experimental," pp. 1–12, 1999, available: <http://papers.vibetech.com/Paper28-ExperimentalModalAnalysis.pdf>.
- [108]. *ASTM D7774-12*, "Standars Test Method for Flexural Fatigue Properties of Plastics," ASTM Int., **vol. i**, p. 6, 2012.,
- [109]. *B. J. Manujesh and V. Rao*, "Fatigue Behavior and Failure Mechanism of PU Foam Core E-glass Reinforced Vinyl Ester Sandwich Composites," *Int. J. Mater. Eng.*, **vol. 3**, no. 4, pp. 66–81, 2013.,
- [110]. *BS EN ISO 178:2003*, "Plastics—Determination of flexural properties, EN ISO 178: 2003," **vol. 3**, p. 28, 2003.
- [111]. *ASTM D790-17*, "Standard Test Methods for Flexural Properties of Unreinforced and Reinforced Plastics and Electrical Insulating Materials. D790," *Annu. B. ASTM Stand.*, pp. 1–12, 2017.,
- [112]. *H. Altenbach, J. Altenbach, and W. Kissing*, Mechanics of Composite Structural Elements. 2018.
- [113]. *L. A. Carlsson and G. A. Kardomateas*, Structural and failure mechanics of sandwich composites, **vol. 121**. Springer Science \& Business Media, 2011.
- [114]. *M. W.Hyer*, Stress Analysis of Fiber-Reinforced Composite Materials, **vol. 13**, no. 1. 1998.
- [115]. *E. Reissner*, "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates," 1945.
- [116]. *R. D. Mindlin*, "Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates," *J. Appl. Mech.*, **vol. 18**, no. 1, pp. 31–38, 1951.,
- [117]. *T. S. Chow*, "On the propagation of flexural waves in an orthotropic laminated plate and

its response to an impulsive load," *J. Compos. Mater.*, **vol. 5**, no. 3, pp. 306–319, 1971.

## **ANNEXE**

## Annexe

### A.1 Comportement sous charge des structures en sandwiches

#### A.1.1 Introduction

Les composites sandwiches constituent une catégorie spécifique de composites stratifiés fréquemment employés dans les domaines de l'ingénierie [112]. Les structures sandwich intègrent deux parois externes (épaisseurs  $h_1$  et  $h_2$ , nommées *peaux*) et un noyau d'épaisseur  $h_c$ , selon la représentation graphique de la Figure A.10. Les peaux sont constituées d'un matériau à grande résistance, alors que le noyau est composé de matériaux épais et légers [113].

Les peaux et le noyau peuvent présenter des propriétés orthotropes ou isotropes, avec leurs axes principaux alignés le long des directions  $xyz$ , comme illustré dans la Figure A1. Le noyau peut adopter différentes structures telles que la mousse, le nid d'abeille ou l'ondulation et autres. Ces noyaux démontrent un comportement structurel à grand échelle qui peut être décrit comme orthotrope ou isotrope, ce qui signifie qu'ils possèdent trois plans orthogonaux [114].

En affinant le formalisme des plaques stratifiées, la théorie des plaques sandwiches introduit une description analytique des mécanismes de cisaillement transversal, indispensable pour les applications en ingénierie avancée [1] [2].

La Figure A.1 illustre que l'origine du repère  $xyz$  est située dans le plan moyen de l'âme, c'est-à-dire pour  $z = 0$ .

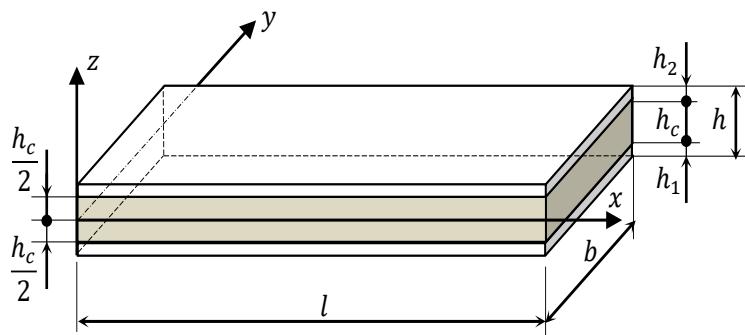


Figure A. 1: Description des nomenclatures pour les panneaux sandwiches.

## A.2 Modélisation des champs de contraintes-déformations

### A.2.1 Modélisation macro-mécanique des sandwiches : hypothèses et approche

Les fondements théoriques régissant l'approche macro-mécanique appliquée aux assemblages sandwich s'énoncent comme suit :

- Les peaux présentent une épaisseur significativement réduite comparativement à l'âme, vérifiant la condition ( $h_1, h_2 \ll h_c$ ), et évoluent sous un état de contraintes planes caractérisé par l'annulation des composantes transversales ( $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ )[3].
- Les contraintes normales ( $\sigma_x, \sigma_y$ ) et tangentielle ( $\tau_{xy}$ ) au sein des peaux sont supposées négligeables dans le modèle théorique adopté.
- Les déplacements dans le plan, désignés ( $u$ ) et ( $v$ ), présentent une distribution uniforme sur toute l'épaisseur des peaux et sont déterminés au niveau du plan médian.
- Le déplacement hors-plan ( $w$ ), orienté perpendiculairement à l'axe ( $z$ ), induit une déformation axiale nulle ( $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ ).
- En revanche, au sein de l'âme, les déplacements dans le plan, ( $u$ ) et ( $v$ ) suivent une variation linéaire selon la coordonnée d'épaisseur ( $z$ ), reflétant un comportement de cisaillement prédominant.

### A.2.2 Caractérisation des déplacements au sein des structures sandwich

Conformément aux postulats (d) et (e) du modèle constitutif, le champ de déplacement du noyau s'exprime par :

$$u = u_0(x, y) + z \psi_x(x, y), \quad (\text{A.1a})$$

$$v = v_0(x, y) + z \psi_y(x, y), \quad (\text{A.1b})$$

$$w = w_0(x, y), \quad (\text{A.1c})$$

Les variables  $u_0$ ,  $v_0$  et  $w_0$  représentent respectivement les composantes du déplacement généralisé au plan neutre de l'âme, Figure A.2, tandis que  $\psi_x$  et  $\psi_y$  décrivent les rotations des sections transversales initialement orthogonales aux axes  $x$  et  $y$ . L'application des conditions de continuité cinématique aux interfaces peaux/âme ( $z = \pm h_c/2$ ), couplée au postulat (c), conduit à une reconfiguration du champ de déplacements aux faces extrêmes selon la figure A.2.

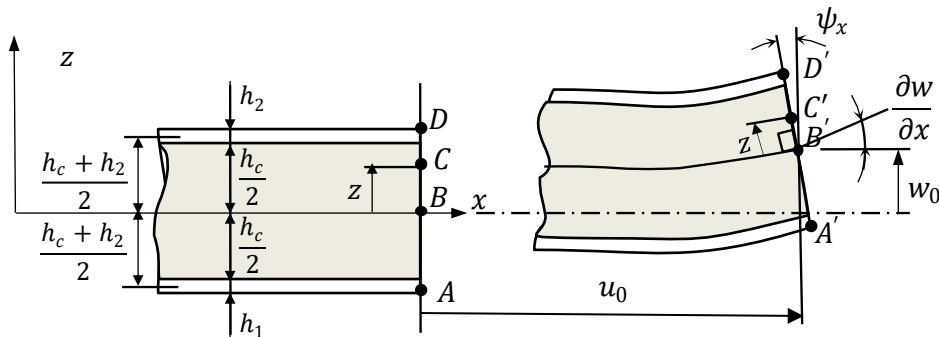


Figure A. 2 : Illustration des paramètres géométriques et des déplacements d'un élément sandwiché orienté selon l'axe x.

$$u_1 = u_0 - \frac{(h_c+h_1)}{2} \psi_x, \quad (\text{A.2a})$$

$$u_2 = u_0 + \frac{(h_c+h_2)}{2} \psi_x, \quad (\text{A.2b})$$

$$v_1 = v_0 - \frac{(h_c+h_1)}{2} \psi_y, \quad (\text{A.2c})$$

$$v_2 = v_0 + \frac{(h_c+h_2)}{2} \psi_y, \quad (\text{A.2d})$$

$$w = w_0, \quad (\text{A.2e})$$

où les indices 1 et 2 font référence respectivement aux feuilles de face inférieure et supérieure.

### A.2.3 Distribution des déformations dans un élément sandwiche

La Figure A.3 montre une section d'une plaque sandwiche coupée dans le plan  $xz$ . L'élément de noyau ACFD représente une section du noyau avec les surfaces AC et DF perpendiculaires à l'axe  $x$  avant déformation. Sous chargement mécanique, le point B subit un déplacement vertical  $w$  selon l'axe  $z$  (initialement positionné en  $z = 0$ ), se translatant vers  $B'$ . L'analyse différentielle du champ de déplacement révèle que le point adjacent E, migrant vers  $E'$ , acquiert un déplacement vertical  $w + (\partial w / \partial x)dx$ , où le terme  $\partial w / \partial x$  décrit la pente locale de la surface déformée dans la direction axiale  $x$ .

À l'instar des fondements de la théorie classique des plaques appliquée aux milieux homogènes isotropes et des théories conventionnelles des stratifiés, l'hypothèse de déformation au cisaillement de premier ordre postule la conservation de la rectitude des sections transversales initialement orthogonales au plan médian dans les structures sandwich, malgré les sollicitations mécaniques [112][1].

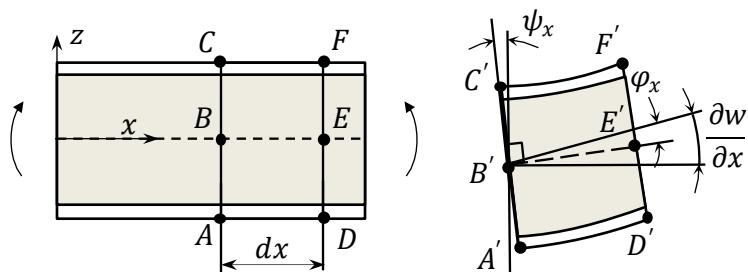


Figure A.3 : Déformation du noyau dans le plan x-z [113].

Toutefois, cette théorie stipule que les sections transversales ne conservent pas systématiquement leur orthogonalité par rapport à la surface médiane déformée du noyau,

Figure A.3. En effet, la pente de la surface médiane, définie par  $\frac{\partial w}{\partial x}$ , présente un écart avec l'angle de rotation  $|\psi_x|$  de la section transversale. Cet écart, noté  $\varphi_x$ , correspond physiquement à la déformation de cisaillement [3]. L'examen de la Figure A.3 permet d'observer que :

$$\varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x} - |\psi_x|, \quad (\text{A.3})$$

où la rotation,  $\psi_x$ , comme indiqué sur la Figure A.3 est négative ( $\psi_x < 0$ ) tandis que la pente est positive. Par conséquent, la déformation de cisaillement est

$$\gamma_{xy} = \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (\text{A.4})$$

Cette analyse, valable pour tout point de coordonnée  $x$ , conduit à une distribution uniforme de la contrainte de cisaillement sur l'épaisseur du noyau. Une approche analogue s'applique aux sections transversales orthogonales à l'axe  $y$ . Les déformations planes sont déterminées à partir des systèmes d'équations (A.2.a, b, f) et (A.1).

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z\kappa_x, \quad (\text{A.5.a})$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + z\kappa_y, \quad (\text{A.5.b})$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy}, \quad (\text{A.5.c})$$

où  $[\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0]$  sont les déformations médianes définies par

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad (\text{A.6.a})$$

$$\varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad (\text{A.6.b})$$

$$\gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \quad (\text{A.6.c})$$

et les courbures du noyau médian  $[\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}]$  sont :

$$\kappa_x = \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \quad (\text{A.7.a})$$

$$\kappa_y = \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \quad (\text{A.7.b})$$

$$\kappa_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}. \quad (\text{A.7.c})$$

Les composantes de déformation de cisaillement hors plan, notées  $\gamma_{yz}$  et  $\gamma_{xz}$ , sont explicitement définies dans les équations (A.2.d) et (A.2.e). Leur combinaison avec les relations fondamentales (A.1) permet d'établir :

$$\gamma_{xz} = \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (\text{A.8.a})$$

$$\gamma_{yz} = \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (\text{A.8.b})$$

Conformément à l'hypothèse (d), la déformation hors plan  $\varepsilon_z$  dans le noyau est considérée comme nulle. Les déformations planes des peaux, respectivement identifiées par les indices (1) pour la peau inférieure et (2) pour la peau supérieure, sont quantifiées dans le Tableau A.1.

Tableau A.1 Distribution des déformations planes dans les peaux composites

---

#### Peau inférieure

$$\varepsilon_x(1) = \varepsilon_x^0 - \frac{(h_c+h_1)}{2} \kappa_x \quad (\text{A.9.a})$$

$$\varepsilon_y(1) = \varepsilon_y^0 - \frac{(h_c+h_1)}{2} \kappa_y \quad (\text{A.9.b})$$

$$\gamma_{xy}(1) = \gamma_{xy}^0 - \frac{(h_c+h_1)}{2} \kappa_{xy} \quad (\text{A.9.c})$$

#### Peau supérieure

$$\varepsilon_x(2) = \varepsilon_x^0 + \frac{(h_c+h_2)}{2} \kappa_x \quad (\text{A.9.d})$$

$$\varepsilon_y(2) = \varepsilon_y^0 + \frac{(h_c+h_2)}{2} \kappa_y \quad (\text{A.9.e})$$

$$\gamma_{xy}(2) = \gamma_{xy}^0 + \frac{(h_c+h_2)}{2} \kappa_{xy} \quad (\text{A.9.f})$$


---

#### A.2.4 Formulation des résultantes mécaniques pour les structures sandwich

Les résultantes mécaniques (forces et moments) présentées dans le Tableau A.2, relatives à l'élément sandwich illustré sur la Figure A.4, sont déterminées par intégration des champs de contraintes sur l'épaisseur totale de la structure.

Tableau A.2 Bilan des efforts internes pour un élément sandwiche

$$N_x = \int_{-(h_c/2+h_1)}^{-h_c/2} \sigma_x(1) dz + \int_{h_c/2}^{h_c/2+h_2} \sigma_x(2) dz \quad (\text{A.10.a})$$

$$N_y = \int_{-(h_c/2+h_1)}^{-h_c/2} \sigma_y(1) dz + \int_{h_c/2}^{h_c/2+h_2} \sigma_y(2) dz \quad (\text{A.10.b})$$

$$N_{xy} = \int_{-(h_c/2+h_1)}^{-h_c/2} \tau_{xy}(1) dz + \int_{h_c/2}^{h_c/2+h_2} \tau_{xy}(2) dz \quad (\text{A.10.c})$$

$$M_x = \int_{-(h_c/2+h_1)}^{-h_c/2} \sigma_x(1) z dz + \int_{h_c/2}^{h_c/2+h_2} \sigma_x(2) z dz \quad (\text{A.10.d})$$

$$M_y = \int_{-(h_c/2+h_1)}^{-h_c/2} \sigma_y(1) z dz + \int_{h_c/2}^{h_c/2+h_2} \sigma_y(2) z dz \quad (\text{A.10.e})$$

$$M_{xy} = \int_{-(h_c/2+h_1)}^{-h_c/2} \tau_{xy}(1) z dz + \int_{h_c/2}^{h_c/2+h_2} \tau_{xy}(2) z dz \quad (\text{A.10.f})$$

$$Q_x = \int_{-h_c/2}^{h_c/2} \tau_{xz} dz \quad (\text{A.10.g})$$

$$Q_y = \int_{-h_c/2}^{h_c/2} \tau_{yz} dz \quad (\text{A.10.h})$$

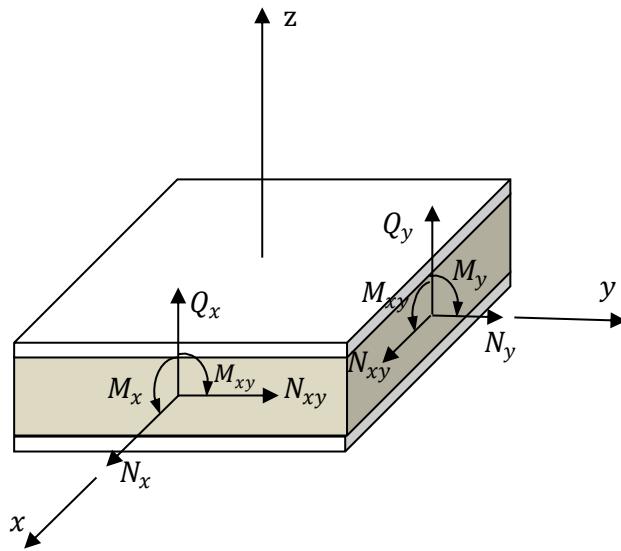


Figure A. 4 : Résultantes N, Q, M pour un élément sandwiche.

L'intégration des contraintes dans le plan, exprimées par le système (A.11),

$$\begin{bmatrix} \sigma_x(i) \\ \sigma_y(i) \\ \tau_{xy}(i) \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x(i) \\ \varepsilon_y(i) \\ \gamma_{xy}(i) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

dans les formulations des résultantes mécaniques (Tableau A.2) conduit à :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.12.a})$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.12.b})$$

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

En notation matricielle compacte :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{22} & A_{21} & A_{26} & B_{22} & B_{21} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{12} & C_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ C_{22} & C_{21} & C_{26} & D_{22} & D_{21} & D_{26} & 0 & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

Où  $A_{ij} = A_{ij}(1) + A_{ij}(2), \quad (\text{A.15.a})$

$$B_{ij} = \frac{(h_c+h_2)}{2} A_{ij}(2) - \frac{(h_c+h_1)}{2} A_{ij}(1), \quad (\text{A.15.b})$$

$$C_{ij} = C_{ij}(1) + C_{ij}(2), \quad (\text{A.15.c})$$

$$D_{ij} = \frac{(h_c+h_2)}{2} C_{ij}(2) - \frac{(h_c+h_1)}{2} C_{ij}(1), \quad (\text{A.15.d})$$

$$F_{ij} = h \bar{C}_{ij}^a, \quad (\text{A.15.e})$$

Avec

$$A_{ij}(1), C_{ij}(1) = \int_{-(h_c/2+h_1)}^{-h_c/2} \bar{Q}_{ij}(1, z) dz \quad (\text{face inférieure}), \quad (\text{A.16.a})$$

$$A_{ij}(2), C_{ij}(2) = \int_{h_c/2}^{h_c/2+h_2} \bar{Q}_{ij}(1, z) dz \quad (\text{face supérieure}), \quad (\text{A.16.b})$$

Il peut être démontré qu'une plaque sandwiche symétrique, c'est-à-dire dont les faces supérieure et inférieure sont disposées de telle sorte que le plan médian ( $z = 0$ ) du panneau sandwiche soit un plan de symétrie (miroir), satisfait les équations suivantes :

$$A_{ij}(1) = A_{ij}(2), \quad (\text{A.17.a})$$

$$C_{ij}(1) = -C_{ij}(2). \quad (\text{A.17.b})$$

En conséquence, les équations (A.17) dans (A.15) donnent

$$A_{ij} = 2A_{ij}(2), \quad (\text{A.18.a})$$

$$B_{ij} = C_{ij} = 0, \quad (\text{A.18.b})$$

$$D_{ij} = (h_c + h_f)C_{ij}(2), \quad (\text{A.18.c})$$

où  $h_f = h_1 = h_2$ , est l'épaisseur de la face.

Par conséquent, pour un tel panneau, les équations constitutives (A.12) et (A.13) se découpent et deviennent

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

L'équation (A.14) prend la forme :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{22} & A_{21} & A_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{22} & D_{21} & D_{26} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{61} & D_{62} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

Une autre simplification de l'analyse est obtenue en traitant les feuilles de parement comme des matériaux homogènes avec des rigidités moyennes

$$\bar{Q}_{ij}(1) = A_{ij}(1)/h_1, \quad (\text{A.22.a})$$

$$\bar{Q}_{ij}(2) = A_{ij}(2)/h_2. \quad (\text{A.22.b})$$

Pour ce cas, les intégrales dans les équations (A.16) deviennent

$$C_{ij}(1) = \frac{-A_{ij}(1)}{2}(h_c + h_1), \quad (\text{A.23.a})$$

$$C_{ij}(2) = \frac{A_{ij}(2)}{2} (h_c + h_2). \quad (\text{A.23.b})$$

La substitution dans les équations (A.15) donne

$$A_{ij} = A_{ij}(1) + A_{ij}(2), \quad (\text{A.24.a})$$

$$B_{ij} = \frac{(h_c+h_2)}{2} A_{ij}(2) - \frac{(h_c+h_1)}{2} A_{ij}(1), \quad (\text{A.24.b})$$

$$C_{ij} = B_{ij}, \quad (\text{A.24.c})$$

$$D_{ij} = \left(\frac{h_c+h_1}{2}\right)^2 A_{ij}(2) + \left(\frac{h_c+h_2}{2}\right)^2 A_{ij}(2). \quad (\text{A.24.d})$$

La détermination des efforts tranchants  $Q_x$  et  $Q_y$  (définis au Tableau A.2 et visualisés Fig. A.4) s'effectue par intégration des contraintes  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$  dans l'âme, exprimées en fonction des déformations de cisaillement  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$  via la loi :

$$\tau_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz}, \quad (\text{A.25.a})$$

$$\tau_{yz} = G_{yz} \gamma_{yz}, \quad (\text{A.25.b})$$

Dans cette expression,  $G_{xz}$  et  $G_{yz}$  correspondent aux caractéristiques de cisaillement transversal de l'âme sandwich, selon les directions orthogonales  $x - z$  et  $y - z$ .

Pour corriger les contraintes de cisaillement transversales dans les plaques homogènes, la théorie de déformation par cisaillement recourt à un facteur ( $k$ ), dont l'origine remonte aux travaux de [115-117]. Le plus souvent, cependant, les facteurs de correction de cisaillement ne sont pas utilisés pour les panneaux sandwiches car la contrainte de cisaillement du noyau est en effet assez constante sur toute l'épaisseur du noyau. Par ailleurs, l'hypothèse (a) stipule qu'aucune contrainte de cisaillement n'agit sur les faces de la plaque. Si l'on ne considère pas de facteur de correction de cisaillement [2], [3], alors l'intégration de la contrainte de cisaillement transversale (décrite comme constante par les équations (A.8) et (A.25)) sur l'épaisseur du noyau (Tableau A.2) conduit à :

$$Q_x = h_c G_{xz} \left( \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (\text{A.26})$$

$$Q_y = h_c G_{yz} \left( \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (\text{A.27})$$

### A.2.5 Champ des contraintes

En vertu de l'hypothèse (b), on admet que le comportement mécanique de l'âme est dominé par les contraintes transverses ( $\tau_{xz}^a, \tau_{yz}^a$ ), tandis que les contraintes normales dans le plan et de cisaillement associées ( $\sigma_x^a, \sigma_y^a, \tau_{xy}^a$ ) sont considérées comme négligeables.

$$\sigma_x^a = \sigma_y^a = \tau_{xy}^a = 0. \quad (\text{A.28})$$

L'âme transmet exclusivement les efforts de cisaillement [16]:

$$\begin{bmatrix} \tau_{yz}^a \\ \tau_{xz}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{44}^a & \bar{C}_{45}^a \\ \bar{C}_{45}^a & \bar{C}_{55}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^a \\ \gamma_{xz}^a \end{bmatrix}, \quad (\text{A.29})$$

Les coefficients  $\bar{C}_{ij}^a$  des équations (A.30) sont obtenus par une transformation des coefficients  $C_{ij}^a$ , initialement exprimés dans le repère principal de l'âme, vers un repère général.

$$\begin{aligned} \bar{C}_{44}^a &= C_{44}^a \cos^2 \theta + C_{55}^a \sin^2 \theta, \\ \bar{C}_{45}^a &= (C_{55}^a - C_{44}^a) \sin \theta \cos \theta, \\ \bar{C}_{55}^a &= C_{44}^a \sin^2 \theta + C_{55}^a \cos^2 \theta, \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

L'angle  $\theta$  représente l'orientation des axes principaux de l'âme par rapport aux axes de référence de la plaque sandwich. Les coefficients  $C_{ij}^a$ , définis dans le repère principal de l'âme, s'expriment en fonction des modules de cisaillement mesurés dans cette base orthotrope :

$$C_{44}^a = G_{yz}^a, \quad C_{55}^a = G_{xz}^a. \quad (\text{A.31})$$

Les contraintes planes au sein de chaque couche ( $k$ ) constituant les peaux sont exprimées par la relation :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x(i) \\ \sigma_y(i) \\ \tau_{xy}(i) \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x(i) \\ \varepsilon_y(i) \\ \gamma_{xy}(i) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.32})$$

Avec :

- $k$  : indice de pli, Figure 1-6(b),

- i=1 (face inférieure) et i=2 (face supérieure).

La matrice (A.32) est la matrice de rigidité en contraintes planes transformée, dont les composantes sont définies dans le tableau A.3:

Tableau A.3 3. Modélisation des constantes de rigidité hors axes pour un matériau composite orthotrope, Figure 1-2.

---

$$\overline{Q}_{11} = Q_{11}\cos^4\theta + Q_{22}\sin^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$\overline{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}(\cos^4\theta + \sin^4\theta)$$

$$\overline{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta$$

$$\overline{Q}_{22} = Q_{11}\sin^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\cos^4\theta$$

$$\overline{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta$$

$$\overline{Q}_{66} = [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})]\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}(\sin^4\theta + \cos^4\theta)$$

Le comportement élastique plan est caractérisé par la matrice de rigidité réduite  $Q_{ij}$ , dont les coefficients représentent les termes de couplage contrainte-déformation.

$$Q_{11} = \frac{E_L}{1 - \frac{E_T}{E_L}v_{LT}^2}$$

$$Q_{22} = \frac{E_T}{E_L}Q_{11}$$

$$Q_{12} = v_{LT}Q_{22}$$

$$Q_{66} = G_{LT}$$


---

### A.3 Équations gouvernantes en théorie des plaques composites

Les équations fondamentales des plaques sont obtenues en établissant les équations d'équilibres d'un élément plaque (Tableau A.4).

A.4 Tableau A.8 Les équations fondamentales des plaques

---

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}, \quad (1)$$


---

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + F_z + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (3)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2}(\tau_{1x} + \tau_{2x}) + P_x - Q_x = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{h}{2}(\tau_{1y} + \tau_{2y}) + P_y - Q_y = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}, \quad (5)$$

Avec

$$P_x, P_y = \int_{h/2}^{h/2} z (f_x, f_y) dz \quad (6) \quad \tau_{1x} = \sigma_{xz}(h/2) \quad (9)$$

$$F_x, F_y, F_z = \int_{h/2}^{h/2} (f_x, f_y, f_z) dz \quad (7) \quad \tau_{2x} = \sigma_{xz}(-h/2) \quad (10)$$

$$\tau_{1y} = \sigma_{yz}(h/2), \quad (11)$$

$$\rho_s, R, I_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho dz \quad (8) \quad \tau_{2y} = \sigma_{yz}(-h/2) \quad (12)$$

#### A.4.1 Équations fondamentales pour l'analyse des composites sandwiches

Dans le cas des matériaux sandwiches symétriques, la forme des équations fondamentales est analogue à celle des stratifiés symétriques en cisaillement transverse.

Les équations gouvernant le comportement des plaques sandwich sont établies en intégrant la relation constitutive (A.14) dans le système d'équations fondamentales fourni dans le tableau A.4. Cette opération transforme les cinq équations initiales du tableau A.4 en un nouveau système adapté aux structures sandwiches :

$$\begin{aligned} & C_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + C_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\ & + D_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \\ & + D_{26} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} - F_{55} \left( \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - F_{45} \left( \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}, \quad (A.33) \\ & C_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + C_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +D_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \\
 & + D_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} - F_{45} \left( \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - F_{44} \left( \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}. \tag{A.34}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \\
 & + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} \\
 & + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}, \tag{A.35}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \\
 & + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} \\
 & + 2B_{26} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}, \tag{A.36}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & F_{55} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + F_{45} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\
 & + F_{44} \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}, \tag{A.37}
 \end{aligned}$$