Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche

Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté de Mathématiques et de l'Informatique

et des Sciences de la Matière

Département de Mathématiques

POLYCOPIE DE COURS PEDAGOGIQUE :

Logique Mathématiques

Destiné aux étudiants de 2ème année Licence Mathématique

Elaboré par : Dr. BAHLOUL Tarek

Année : 2024

Contents

1 Introduction

Parlant de contradiction, elle conduit en quelque sorte à la perception de l'autre côté, ce qui signifie que la contradiction des deux côtés en même temps rapproche le concept de paradoxe. En combinant ce qu'elle croit être vrai, elle prouve exactement ses mensonges, et ses mensonges renforcent sa sincérité (mais ne voyez pas toutes les contradictions comme un paradoxe).

Quand on pense à l'un des paradoxes, cela fait de vous un de ceux qui veulent trouver une séparation entre les deux contradictions. Naviguer d'une question à l'autre impose plus de questions comme (est-il vraiment contradictoire?) et plus de temps.

Pour résoudre certains des paradoxes, il a fallu de nombreuses années, mais d'autres sont toujours en attente.

Dans ce travail, nous avons mentionné quelques paradoxes célèbres (et moins célèbres ou moins profond) qui se réfèrent à la logique mathématique.

Il y a des paradoxes tels que les paradoxes du barbier, le paradoxe du menteur, le paradoxe de Richardas et le paradoxe Grelling-Nelsonwell, et d'autres paradoxes comme par exemple Bertrand Russell, le paradoxe du grand cardinal et le paradoxe de Skolem, sont ceux qui méritent une attention particulière, parce qu'ils sont utiles dans reconnaître la véritable application de certaines règles dans la logique (la discipline régnante au sein des mathématiques) mathématique (s'applique au raisonnement mathématique).

Les textes présentés dans ce travail se limitent aux sources et aux citations, et n'incluent pas de textes différents sur les paradoxes. Son objectif est une présentation pour les étudiants qui comprend des positions intéressantes qui peuvent être considérées comme un défaut en mathématiques.

Le travail ne présente pas et n'analyse pas les paradoxes, mais donne un aperçu de articles.

Beaucoup de gens considèrent que la logique soutient la grande structure des mathématiques. Nous devons apprendre la logique mathématique à sa place, au cœur des mathématiques, pour ne pas travailler dans un cercle vicieux. La logique est une tentative de description, mais n'en est pas une extérieure au monde mathématique, mais bien la réalité qui est la mathématique elle-même.

Dans la section suivante de la section Paradoxes, nous parlons de ce qu'un débutant étudiant devrait savoir sur les principes de la logique mathématique.

Tout d'abord, nous trouvons la position appropriée des noms et du vocabulaire qui nous permet de construire une formule adaptée pour permettre à l'étudiant de progresser dans la compréhension.

Afin de pouvoir faire autant de travail que possible dans les autres sections, dans la quatrième section nous donnons des concepts sur des définitions précises des formules et leurs démonstrations . Afin d'éliminer la confusion, nous avons inséré des définitions (termes et les formules) et règles de terminologie, de formules et de langage d'une manière simple et liée à la prédémarrage pour entrer dans la logique de première ordre.

Nous présentons dans la cinquième section la déduction naturelle. Plus précisément nous donnons les définitions et résultats de base. La déduction naturelle est un ensemble de règles de réécriture, et en plus est un système au plein sens du terme qui permet de représenter le type de raisonnement qui se développe conditionnellement à partir d'hypothèses.

Nous avons utilisé la sixième section pour examiner la logique prédictive. Un langage, un domaine et un codomaine, et accès au lien indubitable de ces trois concepts, c'est ce que le concept de prédiction veut être mis en évidence presque. La logique prédictive nous permet de représenter les relations formelles, entre les langues, ontologie et la sémantique.

Dans la septième section, nous représentons les quantificateurs. La logique propositionnelle ne permet de décrire que des constructions simples du langages (insuffisante pour la représentation des connaissances et le raisonnement pratique), le logique des prédicats, ou logique du premier ordre est plus expressive, et permet de représenter des types complexes grâce les quantificateurs $\forall$ et $\exists$. Le quantificateur universel nous indique qu'une ou plusieurs variables d'un prédicat peuvent être saturées par tous les objets du domaine. Lorsqu'une variable d'un prédicat sera quantifiée, nous dirons qu'il s'agit d'une variable liée.

Dans la huitième section, nous l'étendrons au système de logique de premier ordre, qui est essentiellement suffisant pour exprimer des énoncés communs ou mathématiques et fournit donc un cadre adéquat pour le raisonnement logique. C'est pourquoi il est généralement considéré comme la langue des mathématiques.

Les concepts de homomorphismes, isomorphismes, monomorphisme et automorphisme sont importants pour les enquêtes mathématiques et logiques, de sorte qu'ils sont inclus dans la dernière section.

2 Paradoxe

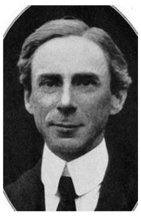
Précisons d'ailleurs que nous emploierons le mot **paradoxe** dans le sens qui convient à ces exemples. Cela veut dire qu'un paradoxe est quelque chose qui, au premier abord, semble faux, mais qui en réalité est vrai; ou qui semble vrai, mais est en réalité faux; ou qui est simplement contradictoire.

De tous les problèmes dont on s'occupe en mathématiques, les paradoxes sont les plus attrayants et les plus instructifs. Il est difficile d'analyser en quelques mots la nature de cet attrait, mais il réside probablement dans le fait qu'une contradiction surgit d'une manière tout à fait inattendue, alors que l'on considère généralement les ma- thématiques comme la seule science exacte. Un paradoxe, d'autre part, est toujours instructif, car, pour mettre en évidence l'erreur commise dans la marche d'un raisonnement, il faut étudier de près les principes fondamentaux qui entrent en jeu.

Les paradoxes sont amusants. Dans la plupart des cas, ils sont faciles à énoncer et incitent immédiatement à essayer de les résoudre.

La voie des paradoxes est la voie de la vérité. Pour tester la réalité, nous devons la voir sur la corde raide. Lorsque les vérités deviennent des acrobates, nous pouvons les juger.

2.1 Le paradoxe de Russel (Bertrand Russell)



Bertrand Russell né le 18 mai 1872 à Trellech , et mort le 2 février 1970, est un mathématicien, logicien, philosophe, épistémologue, homme politique et moraliste britannique. Russell est, l'un des fondateurs de la logique contemporaine.

Définition 2.1

On dit qu'une collection $A(x)$ correspond à un ensemble (ou même, par abus de langage, est un ensemble) s'il existe un ensemble a tel que

$$\forall x \, [x \in a \Leftrightarrow A(x)] \, .$$

Remarque 2.1

Il y a des collections qui ne correspondent à aucun ensemble.

Exemple 2.1

La collection

$$x \notin x;$$

en effet, si

$$\forall x \, (x \notin x \Leftrightarrow x \in a)$$

alors, en particulier

$$a \notin a \Leftrightarrow a \in a,$$

ce qui est faux. Ce résultat est connu sous le nom de paradoxe de Russell.

La théorie des ensembles telle que formulée par Cantor n'était pas assez précise. Bertrand Russell l'a mis en évidence en soulignant qu'elle donnait lieu au paradoxe suivant. On considère l'ensemble

de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-m$\hat{e}$me.

En formule, c'est

$$A = \{x \mid x \notin x\}.$$

L'ensemble A des x tels que x n'appartient pas dans x.
La question qui se pose est de savoir si

$$A \in A \quad où \quad A \notin A.$$

Hors on constate (avec **Russel**) que

$$A \in A \quad implique \quad A \notin A,$$

et réciproquement ! C'est là le paradoxe. Attention, on considère ici la notion d'ensemble à la Cantor.
Cette construction n'est pas possible dans les versions modernes de la théorie des ensembles. En effet,pour remédier au paradoxe de **Russel**, on a échafaudé plusieurs axiomatiques précises pour la théorie des ensemble. L'une des plus connue est celle dite de Zermelo-Fraenkel présentée schématiquement à l'appendice B. C'est dans de tels contextes que les mathématiciens travaillent maintenant.

Remarque 2.2

L'ensemble de tous les ensembles est un ensemble illégitime, l'argument du paradoxe de Russell a été inspiré par la preuve de Cantor.

2.2 Le paradoxe du coiffeur

Voici un exemple un p eu plus compliqué qui renvoie directement à la théorie des ensembles :

$$Dans\ le\ petit\ village\ de\ Thiercelieux,\ il\ y\ a\ un\ barbier.$$

$$Ce\ barbier\ rase\ tous\ les\ villageois\ qui\ ne\ se\ rasent\ pas\ eux-mêmes$$

$$et\ il\ ne\ rase\ que\ ceux\ là.$$

$$Le\ barbier\ se\ rase-t-il?$$

illustre la difficulté d'appréhender l'implication logique.

2.3 Le paradoxe du menteur

Le paradoxe logique le plus connu du menteur est probablement celui qui dit

$$Je\ suis\ trian\ de\ mentir.$$

Si la phrase est vraie, alors elle prétend vraiment qu'elle est fausse et, si elle est fausse, elle l'affirme faussement; donc ce doit être vrai.

Le philosophe crétois Épiménide a dit: Tous les Crétois sont des menteurs. Épiménide a-t-il dit la vérité?

Le paradoxe du menteur (ou paradoxe d'epiménide (le Crétois)) est un paradoxe classique, sous sa forme la plus répandue, le paradoxe du menteur correspond à l'énoncé

$$Je\ mens/\ Je\ suis\ trian\ de\ mentir. \quad (a)$$

On peut, et c'est ce qui constitue à proprement parler le paradoxe, expliciter cet énoncé de la façon suivante :

$$Si\ (a)\ est\ vria,\ alors\ (a)\ est\ faux. \quad (a_1)$$

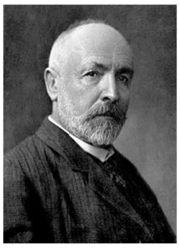
$$Si\ (a)\ est\ faux,\ alors\ (a)\ est\ vria. \quad (a_1)$$

On a souvent considéré que le paradoxe du menteur tient au caractère sui-référentiel de l'énoncé: (a) parle de (a). La solution classique consiste à faire appel à la théorie des types qui. très grossièrement, permet de distinguer le niveau du langage (celui de l'énoncé) ci celui du métalangage (celui où l'on parle de l'énoncé).

Remarque 2.3

Un homme déclare **Je mens** . Si c'est vrai, c'est faux. Si c'est faux, c'est vrai. On peut y voir deux interprétations :
En tant qu'énonce, cette phrase dit : Cette phrase est fausse.
En tant que propos, il faut comprendre : Je mens maintenant.

2.4 Le paradoxe de Cantor (paradoxe du plus grand cardinal)



Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor est un mathématicien allemand, né le 3 mars 1845 à Saint-Pétersbourg (Empire russe) et mort le 6 janvier 1918 à Halle (Empire allemand). Il est connu pour être le créateur de la théorie des ensembles.

L'ensemble de tous les ensembles, S, devrait sûrement être le plus grand ensemble d'ensembles qui soit. Mais l'ensemble de puissance de l'ensemble de tous les ensembles est plus grand que S.

Cantor, mathématicien allemand, qui, en 1873, trouva le moyen de comparer des ordres de grandeur dans l'infini. C'est de son œuvre qu'est sortie cette branche des mathématiques qu'on nomme **théorie des ensembles** théorie qui conduit aux résultats les plus extraordinaires.

exprime ce que son second nom impliquerait: qu'il n'y a pas de cardinal plus grand que tous les autres cardinaux.

Théorème de Cantor (G. F. Cantor, 1845-1918) 2.1

Pour tout ensemble E, on a

$$Card(E) < Card(\mathcal{P}(E)).$$

Le théorème de Cantor permet de construire des ensembles infinis de plus en plus grands; il permet aussi d'affirmer qu'il existe des ensembles infinis non dénombrables; en effet, on a

$$\aleph_0 = Card(\mathbb{N}) < Card(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = 2^{\aleph_0}.$$

Remarque 2.4

Un ensemble E équipotent à $\mathbb{N}$ est dit infini dénombrable et on note

$$Card(E) = \aleph_0.$$

On a, si n désigne un entier naturel non nul quelconque:

•)
$$Card(\mathbb{N}^n) = Card(\mathbb{Z}^n) = Card(\mathbb{Q}^n) = \aleph_0;$$

•)
$$Card(\mathbb{R}^n) = Card(\mathbb{C}^n) = Card(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = 2^{\aleph_0} = (\aleph_1 > \aleph_0);$$

$2^{\aleph_0}$ est appelé la puissance du continu.

•)
$$Card(\mathcal{P}(\mathbb{R})) = Card(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}) = 2^{2^{\aleph_0}} = (2^{\aleph_1} > \aleph_1);$$

Remarque 2.5

Pour tout ordinal α, on a
$$2^{\aleph_\alpha} \geq \aleph_{\alpha+1}.$$

Théorème de Cantor (G. F. Cantor, (1874)) 2.2

L'ensemble de réels est incalculable.

Théorème de Cantor (G. F. Cantor, (1891)) 2.3

L'ensemble de pouvoir(puissance) d'un ensemble est toujours de plus grand(super) Cardinal que l'ensemble lui-même

Remarque 2.6

•) Card (E): puissance de E ou cardinal.

Le paradoxe énonce que l'existence d'un plus grand cardinal conduit à une contradiction.

On dit qu'on emploie un **argument de diagonalisation**; c'est un tel argument qu'a utilise **Cantor** pour montrer qu'il n'existe pas de bijection entre un ensemble et l'ensemble de ses parties.

La méthode diagonale du Cantor est élégante, et simple. Cela a été la source de théorèmes fondamentaux et fructueux aussi bien que dévastateur, et en fin de compte, paradoxes fructueux.

Comptage 2.1

opération qui devrait nous être assez familière.

Question 2.1

comment conclure que deux ensembles comprennent le même nombre d'objets, ?

Réponse 2.1

il est seulement nécessaire de trouver une méthode systématique quelconque pour établir une correspondance biunivoque entre leurs éléments.

L'idée de Cantor était d'étendre la notion de suite de nombres finis,

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots\}$$

à celle de suite de nombres transfinis, qu'on pourrait désigner par

$$A_1, A_2, A_3, A_4, \cdots .$$

Le plus simple et le plus fondamental de tous les ensembles infinis semble être l'ensemble des nombres naturels. Par conséquent nous désignons par A_1 le nombre de tout ensemble qu'on peut mettre en correspondance biunivoque avec cet ensemble particulier.

Nous avons démontré que le tout est égal à une de ses parties! Ce résultat contredit directement la notion familière que le tout est égal à la somme de ses parties et est donc plus grand qu'une quelconque d'entre elles.

En fait, le principe qui est à la base de la démonstration n'est ni plus compliqué, ni plus mystérieux que le principe sur lequel repose l'action .de compter au sens ordinaire, car tous deux sont identiques.

Qu'un ensemble infini était un ensemble qu'on ne peut épuiser en comptant pendant un temps fini. Nous pouvons maintenant, avec Cantor, définir Un ensemble infini comme **un ensemble qui peut être mis en correspondance biunivoque avec une de ses parties** .

Les nombres rationnels présentent l'importante propriété d'être **denses** . Cela veut dire qu'entre deux nombres rationnels quelconques il y a un nombre infini d'autres nombres rationnels.

A cause de cet te propriété, nous pourrions nous attendre à ce que le nombre transfini de l'ensemble des nombres rationnels soit plus grand que

A_1. Cantor a montré que ce n'était pas vrai.

La seule chose qui importe est de trouver un procédé systématique pour grouper deux à deux les éléments respectifs des deux ensembles.

A tout nombre rationnel correspond un nombre naturel, et un seul, et à tout nombre naturel correspond un nombre naturel, et un. seul. La correspondance est donc biunivoque, et nous avons démontré que l'ensemble des nombres rationnels positifs a le nombre transfini

Notre premier essai pour trouver un ensemble infini dont le nombre soit supérieur à A_1 a été vain. Quelques-uns d'entre nous commencent sans doute à penser que tous les ensembles infinis ont le même nombre A_1 C'est encore Cantor qui a montré combien nous pouvons nous tromper en essayant de deviner - par intuition -, car il est parvenu à démontrer que le nombre transfini de l'ensemble de tous les nombres réels est supérieur à A_1.

Et voici maintenant la démonstration de Cantor. Son principe est le suivant. Nous allons supposer que nous ayons établi une correspondance biunivoque entre les nombres naturels et les nombres réels compris entre 0 et 1. Puis, nous allons découvrir un nombre, également compris entre 0 et 1, qu'il n'est pas possible d'inclure dans l'opération en d'autres terme un nombre réel auquel ne correspond pas de nombre naturel.

Dans la correspondance supposée, désignons les chiffres successifs du premier nombre réel, mis sous la forme décimale illimitée, par a_1, a_2, a_3, a_4, $\cdots$, ceux du second nombre par b_1, b_2, b_3, b_4, $\cdots$, et ainsi de suite. La correspondance entre les nombres se présentera alors comme sur la figure

$$
\begin{array}{ll}
1 & .a_1a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7\ a_8\ a_9\cdots \\
2 & .b_1b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_6\ b_7\ b_8\ b_9\cdots \\
3 & .c_1c_2\ c_3\ c_4\ c_5\ c_6\ c_7\ c_8\ c_9\cdots \\
4 & .d_1d_2\ d_3\ d_4\ d_5\ d_6\ d_7\ d_8\ d_9\cdots \\
5 & .e_1e_2\ e_3\ e_4\ e_5\ e_6\ e_7\ e_8\ e_9\cdots \\
6 & .f_1f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7\ f_8\ f_9\cdots \\
7 & .g_1g_2\ g_3\ c_4\ g_5\ g_6\ g_7\ g_8\ g_9\cdots \\
. & \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots \\
. & \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots \\
. & \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots
\end{array}
$$

Rappelez-vous que nous supposons que tous les nombres réels entre 0 et 1 figurent sur les lettres en noires du tableau. Nous allons maintenant fabriquer un nombre, désigné par $0.z_1z_2z_3z_4\cdots$ de la manière suivante. En suivant la diagonale de la figure, nous prenons z_1 différent de a_1, z_2 différent de b_2, z_3 différent de c_3, et ainsi de suite.

Ce nombre, évidemment, est compris entre 0 et 1. De plus, il ne figure pas dans le tableau, puisqu'il diffère du premier nombre par , la première décimale, du deuxième nombre par la deuxième décimale, du troisième nombre par la troisième décimale, et ainsi de suite. Par conséquent, aucun des nombres naturels de la colonne de gauche ne correspond à ce nombre.

Il en résulte que notre supposition du début concernant la correspondance biunivoque est fausse, et que le nombre transfini de l'ensemble de tous les nombres réels compris entre 0 et 1 est plus grand que A_1. Nous désignerons ce nouveau nombre transfini par le symbole C. Nous pourrions être tentés de l'identifier avec A_2 . Il est possible que C ne soit autre que A_2 mais, jusqu'à présent, personne n'a pu le démontrer. En d'autres termes, il existe peut-être un nombre transfini supérieur à A_1 et en même temps inférieur à C. La question reste ouverte.

Cantor a démontré qu'il n'existe pas de nombre transfini plus grand que tous les autres.

Cantor avait démontré que, de même qu'il n'existe pas de nombre naturel plus grand que tous les autres, il n'existe pas de nombre transfini plus grand que tous les autres. Sa démonstration repose essentiellement sur une des propriétés des nombres transfinis.

2.5 Le paradoxe de Richard

Jules Antoine Richard est un mathématicien français (12 août 1862 - 14 octobre 1956), connu avant tout pour un paradoxe logico-mathématique dont il est l'auteur : le paradoxe de Richard.

Le paradoxe de Richard est une version plus formelle du paradoxe de l'auto référence publié en 1905 par le mathématicien français **Jules Richard**. En fait ce paradoxe est une supercherie assez subtile mais qui a son intérêt car elle émet l'idée de *projeter* un langage dans N (c'est à dire de numéroter les phrases) ; cette idée est un point crucial de la démonstration du théorème de Gödel.
Voici une esquisse du paradoxe de Richard.

1) On suppose qu'on dispose d'un langage (comme le français) dans lequel on puisse formuler et définir des concepts arithmétiques des entiers naturels (par exemple être un nombre premier, être un carré parfait$\cdots$).

2) Il existe différentes propriétés arithmétiques qui peuvent s'exprimer dans ce langage (à partir de concepts primitifs dont on admettra qu'ils sont compris : l'addition, la multiplication, la divisibilité$\cdots$).

Exemple 2.2

-) être premier $\prec$ qui n'est divisible que par lui-même et par un $\succ$.

-) être pair $\prec$ qui est divisible par 2 $\succ$.

3) Il est clair que chacune de ces propriétés sera exprimée à l'aide d'un nombre fini de lettres. On peut donc les classer par taille puis au sein des propriétés de même taille par ordre alphabétique. Ce classement nous permet alors de numéroter ces propriétés.

4) Imaginons que la propriété 17 soit $\prec$ qui n'est divisible que par lui-même et par un $\succ$; on remarque que 17 vérifie la propriété dont il est le numéro. Au contraire, si 15 est le numéro de $\prec$ qui est le produit de 3 et 3 $\succ$ alors 15 ne vérifie pas la propriété 15.
On dira que 15 est **richardien** et que 17 n'est pas **richardien**.

5) $\prec$ qui est richardien $\succ$ est une propriété sur les nombres entiers. Elle possède donc un numéro d'après le classement décrit en 3.

6) n_0 est-il richardien ?
En fait, comme nous l'avons dit, cet énoncé contient une erreur. Pour la détecter soyons un peu formalistes.
Soit E l'ensemble des phrases; A le sous-ensemble des phrases décrivant une propriété arithmétique à l'aide de concepts connus et B son complémentaire: par exemple $\prec$ qui est divisible par deux $\succ$ est dans A mais $\prec$ qui est richardien $\succ$ est dans B car on ne sait pas encore ce que signifie richardien ; comme E est dénombrable on peut considérer que A et B sont des sous-ensembles de N ; ainsi n_0 est dans B.
On définit alors sur $E \times A$ la relation suivante : $n\ V\ er\ m$ ssi n $\prec$ vérifie $\succ$ la propriété m ; il est clair que cette relation ne peut être définie sur un ensemble plus grand.
On a alors deux possibilités pour définir la propriété d'$\prec$ être richardien $\succ$:

- •) $n \in A$ est richardien ssi $\overline{n\ V\ er\ n}$ mais alors n_0 n'appartient pas au domaine de définition de $\prec$ qui est richardien $\succ$donc la question 6 n'a aucun sens.
- •) $n \in A$ est anti-richardien ssi $n\ V\ er\ n$; $n \in E$ est richardien ssi $n \in A$ et $n \in A \Rightarrow$ (n n'est pas anti-richardien). Ainsi la réponse à la question 6 est trivialement non.

2.6 Le paradoxe de Grelling-Nelson (linguistique)

Grelling-Nelson Le paradoxe de Grelling-Nelson est un paradoxe sémantique formulé en 1908 par Kurt Grelling et Leonard Nelson.
Kurt Grelling: Date/Lieu de naissance : 2 mars 1886, Berlin, Allemagne Date de décès : septembre 1942 Pologne Enseignement : Université de Gottingue

Kurt Grelling né le 11 juillet 1882 à Berlin et mort le 29 octobre 1927 à Gottingen, est un mathématicien, philosophe et socialiste allemand. Il a conçu le paradoxe Grelling–Nelson avec Kurt Grelling.

On qualifie d'hétérologique un mot qui décrit son contraire. Par exemple :$*$ long $*$ est un mot hétérologique en ceci qu'il n'est pas $*$ long $*$; de même pour $*$ monosyllabique $*$.
Au contraire, Ainsi, $*$ court $*$ ou $*$ pentasyllabique$*$ sont autologiques ($*$ court $*$ est court et $*$ pentasyllabique $*$ compte bien 5 syllabes);

Exemple 2.3

Mon enfant, ma sœur = pentasyllabe

$$(mon/en/fant/ma/s\oe ur)$$

$$*hétérolgique * est - il \quad hétérolgique \quad ?$$

Cet exemple nous permet la remarque suivante. Je me donne une propriété et je cherche à classer les objets en deux tas, ceux qui vérifient la propriété et ceux qui vérifient sa négation.
Alors il se crée automatiquement quatre classes (certaines peuvent être vides):

- •) La classe des éléments qui vérifient la propriété ($*$ court $*$ est autologique)

•) La classe des éléments qui vérifient la négation de la propriété (∗ long ∗ est hétérologique)

•) La classe des éléments pour lesquels on ne peut répondre pour des raisons syntaxiques (∗ aspirateur ∗ est un mot qui ne peut décrire un mot)

•) La classe des éléments pour lesquels on ne peut répondre pour des raisons sémantiques (∗ hétérologique ∗)

3 Le calcul propositionnel

3.1 Introduction au calcul propositionnel

On note
$$A, B, C \cdots$$
des **propositions élémentaires** qui prennent la valeur 0 (**faux**) ou 1 (**vrai**) et l'on forme de nouvelles propositions à partir des connecteurs suivants :
$$non, et, ou, implique, \acute{e}quivaut.$$
On leur affecte alors une vérité d'après les tables de vérité ci-après et la valeur prise par les propositions intervenant dans la proposition étudiée .

•) Négation.

•) Conjonction.

•) Disjonction.

•) Implication.

•) Équivalence.

Dans la logique propositionnelle, on étudie les relations entre des énoncés.

Le proposition logique 3.1.1

Énoncé mathématiques In-formellement, un énoncé (mathématiques) est une phrase qui affirme un certain fait (mathématique).

Définition 3.1

Le proposition logique est un énoncé pouvant être vrai ou faux. indépendamment de tout context de lieu, de temps, ou de personne qui le prononce.

Remarques 3.1

•) On dit proposition ou assertion ou affirmation. Le mot proposition est clair : on propose quelque chose, mais cela reste à démontrer.

•) On dit alors que les deux valeurs de vérité d'une proposition sont **vrai** et **faux** .

•) Un énoncé qui est à la fois vrai et faux n'est pas une proposition.

Exemple 3.1

.) Tout nombre premier est impair.

.) Tout carré de réel est un réel positif.

.) Un androgyne n'est ni homme ni une femme.

.) Si $(a, b) = (a', b')$ alors $a = a'$ et $b = b'$.

.) Le nombre 17 est premier

.) Le triangle ABC est isocèle.

.) 2 et 5 sont premiers entre eux.

.) $\sqrt{2}$ n'est pas une assertion car $\sqrt{2}$ n'est même pas une phrase. ($\sqrt{2} < 0$) est une assertion fausse.

Remarque 3.2

En mathématiques,une proposition est dite vraie si elle est démontrable.

Le tableau de vérité

On considère un ensemble $\{0, 1\}$ à deux éléments dits valeurs de vérité, respectivement le vrai 1 et le faux 0. Apparaître les différentes valeurs de vérité possibles, On utilise ce qu'on appelle des tables de vérité pour réaliser l'interprétation. Si p et q sont des propositions (elle repose essentiellement sur un calcul des valeurs de vérité), on a :

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

et l'on pourrait aussi bien considérer l'ensemble $\{V, F\}$.

3.2 Les principaux connecteurs binaires

Les connecteurs binaires opèrent eux sur deux assertions: ils permettent d'associer à deux assertions P et Q . de nouvelles assertions.

La conjonction

Le connecteur de conjonction (et) noté par le symbole $\wedge$ qui fournit l'assertion

$$P \wedge Q,$$

appelée **P et Q** (ou conjonction de P et Q).
$P \wedge Q$ est vraie si et seulement si P et Q sont toutes deux vraies; le (et) est donc pris au sens ordinaire.

Exemples 3.2

1. La Terre est la troisième planète du système solaire et elle a un diamètre de 12 756 km.

2. La neige est blanche et la pelouse est verte.

La disjonction

le connecteur $\vee$ de disjonction (inclusive) qui fournit l'assertion

$$P \vee Q,$$

appelée **P ou Q** (ou disjonction de P et Q).
$P \vee Q$ est vraie si et seulement si l'une (au moins) des deux assertions est vraie (si l'une des deux assertions est fausse alors l'autre est vraie); le (ou) n'est donc pas utilisé au sens exclusif: il n'a pas la signification de (ou bien).
On notera encore que $P \vee Q$ est fausse si et seulement si P et Q sont toutes deux fausses.

Exemple 3.3

1. Soit $x \in \mathbb{Z}$. Montrons que l'assertion (x impair ou x^2 pair) est vraie.

2. Catherine ou Jean assisteront à la présentation.

3. Je m'inscrirai au cours d'introduction aux probabilités ou au cours d'introduction aux statistiques.

Démonstration

•) Supposons l'assertion x impair fausse (x est donc pair).

•) Montrons que x^2 est pair.

L'implication

le connecteur $\Rightarrow$ d'implication qui fournit l'assertion

$$P \Rightarrow Q,$$

appelée **P implication Q**, ou encore assertion (P implique Q).
$(P \Rightarrow Q)$ est fausse si et seulement si P est vraie et Q fausse; remarquons également que si P est fausse alors $(P \Rightarrow Q)$ est vraie.

Remarque 3.3

Pour exprimer que $(P \Rightarrow Q)$ est vraie, on peut, selon l'usage, utiliser l'une des expressions suivantes :

- •) $P \Rightarrow Q$
- •) P **implique** Q
- •) P **entraîne** Q
- •) Si on a P, **alors** on a Q
- •) Q est **conséquence** de P
- •) Q est une **condition nécessaire** pour qu'on ait P
- •) Pour qu'on ait P, **il faut** (il est nécessaire) qu'on ait Q
- •) P est une **condition suffisante** pour qu'on ait Q
- •) Pour qu'on ait Q,**il suffit** (il est suffisant) qu'on ait P.

La l'équivalence

le connecteur $\Leftrightarrow$ d'équivalence (logique) qui fournit l'assertion

$$P \Leftrightarrow Q,$$

appelée **P équivalence Q**, ou encore assertion (p équivalente à Q).
Une équivalence signifie deux implications simultanément vraies et simultanément fausses.
$(P \Leftrightarrow Q)$ est vraie si et seulement si P et a sont équivalentes.

Remarque 3.4

pour exprimer que $(P \Leftrightarrow Q)$ est vraie, on peut utiliser l'une des expressions suivantes:

•) $P \Leftrightarrow Q$

•) P **équivaut à** Q

•) on a P, **si et seulement si** on a Q

•)P est une **condition nécessaire et suffisante** pour qu'on ait Q.

Chacun des connecteurs précédents est défini au moyen de sa table de vérité qui se trouve dans le tableau suivant:

p	q	p $\wedge$ q	p $\vee$ q	p $\Rightarrow$ q	p $\Leftrightarrow$ q
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Par exemple, les colonnes 1, 2 et 5 constituent la table de vérité de l'implication.

Exemple 3.5

Dans quelle monde la formule

$$(p \Rightarrow (q \wedge r))$$

est-elle vraie ?

p	q	r	q $\wedge$ r	p$\Rightarrow$ (q $\wedge$ r)
1	1	1	1	**1**
1	1	0	0	0
1	0	1	0	0
0	1	1	1	**1**
0	0	1	0	**1**
0	1	0	0	**1**
1	0	0	0	0
0	0	0	0	**1**

$(p \Rightarrow (q \wedge r))$ est vrai quand p,q et r sont tous les trois vrais ou quand p est faux quelles que soient les valeurs de q et r.

3.3 La négation

Définition (de o et de 1) 3.2

Nous allons maintenant définir et introduire dans le calcul logique deux termes particuliers que nous désignerons par o et 1, en raison des analogies formelles qu'ils présentent avec le zéro et l'unité arithmétiques.

-) 0 désigne la proposition qui implique toute proposition : c'est le faux ou l'absurde (car elle implique notamment tous les couples de propositions contradictoires),

-) 1 désigne la proposition qui est impliquée dans toute proposition : c'est le vrai (car le faux peut impliquer le vrai, tandis que le vrai n'implique que le vrai).

La définition des termes 0 et 1 va nous permettre de définir la négation: c'est une opération **uni-naire**, qui transforme un seul terme en un autre terme qu'on appelle sa négation. Soit P une proposition. La négation de P est l'assertion notée $\overline{P}$ ou **non** P; elle est vraie si et seulement si P est fausse, comme le montre la table de vérité du connecteur $\overline{()}$

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

$\overline{p}$ qui est vrai si et seulement si p est faux,

Exemples 3.6

•)

p	$\overline{p}$
$\overline{e}$	e
$e \wedge f$	$\overline{e} \vee \overline{f}$
$e \vee f$	$\overline{e} \wedge \overline{f}$
$\forall x \quad p(x)$	$\exists x \quad \overline{p(x)}$
$\exists x \quad p(x)$	$\forall x \quad \overline{p(x)}$
$x > 4$	$x \leqslant 4$
$x \in \mathbb{N}$	$x \notin \mathbb{N}$
A, B, C alignés	ABC triangle
(D), et (D')	$(D)//(D')$ secantes

•) Négation d'une implication: Soient P et Q deux propositions

$$\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}$$

Démonstration:

$$\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow \overline{\overline{P} \vee Q} \Leftrightarrow \overline{\overline{P}} \wedge \overline{Q} \Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}$$

•) La négation de (ce chat est blanc) est, ce chat n'est pas blanc.

•) La négation de (f est la fonction nulle) est, (f n'est pas la fonction nulle) ou encore (f ne s'annule pas en au moins un point).

•) La négation de (la terre est plate) est, (la terre est sphérique).

3.4 La tautologie

Définition 3.3

On appelle tautologie toute proposition qui ne prend que la valeur 1 quelle que soit la valeur des propositions élémentaires qu'elle contient(**une proposition toujours vraie**).

Proposition 3.1

•) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow p))$ est une tautologie.

•) $\overline{(p \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q})$ est une tautologie.

•) $p \vee \overline{p}$ est une tautologie (principe du tiers exclu).

•) $\overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$ est une tautologie.

•) $\overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$ est une tautologie.

•) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ est une tautologie (principe de contra-position).

•) $((r \Rightarrow s) \wedge (s \Rightarrow t)) \Rightarrow (r \Rightarrow t)$ est une tautologie (principe de transitivité de l'implication).

D'autres exemples classiques de tautologies (très utiles), concernent la distributivité de $\wedge$ sur $\vee$ (resp. de $\vee$ sur $\wedge$:

•) $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$.

•) $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$.

Remarque importante 3.5

Dire que $p \Leftrightarrow q$ est une tautologie signifie exactement que p et q ont même table de vérité. Dans la pratique, on dit souvent que deux propositions qui ont même table de vérité sont équivalentes. Plusieurs des tautologies mentionnées ci-dessus peuvent ainsi être reformulées en utilisant ce langage. Par exemple, $(p \wedge (q \vee r))$ est équivalent à $((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$. De même, $(p \Rightarrow q)$ est équivalent à $(\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$, etc. Dans une formule propositionnelle, on peut remplacer une proposition par une proposition équivalente.

Notation 3.1

φ étant une formule du calcul propositionnel , on écrit:

$$\models$$

pour dire que φ est une tautologie.

Remarque 3.6

On appelle **antilogie** toute proposition φtelle que la proposition $\overline{\varphi}$ soit une tautologie.

3.5 La contradiction

Définition 3.4

Une formule dont la valeur est toujours (faux) est appelée contradiction (ou **antilogie**).

Exemple 3.7

Considérons la table de vérité commune des formules suivantes, toutes écrites avec une seule variable.

p	$\overline{p}$	$\overline{\overline{p}}$	$p \vee \overline{p}$	$p \wedge \overline{p}$	$p \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow p$
1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1
$*$		$*$	a	b	a	a

$p \wedge p$	$p \Leftrightarrow (p \wedge p)$	$p \vee p$	$p \Leftrightarrow (p \vee p)$
1	1	1	1
0	1	0	1
$*$	a	$*$	a

On voit apparaître des formules dont la valeur est toujours (**vrai**) (colonnes a), d'autres dont la valeur est toujours (**faux**) (colonnes b).

Et on voit aussi des formules qui ont la même table (par exemple, colonnes $*$).

Théorème 3.1

Une formule F est une tautologie ssi $\overline{F}$ est une contradiction.

Remarque 3.7

Table de vérité. Une première méthode pour montrer qu'une formule est une tautologie consiste à dresser la table de vérité pour vérifier que sa valeur est bien toujours (vrai), quelle que soit l'interprétation.

Exemple 3.8

$$F : (p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$$

F prend la valeur (vrai) pour toutes les interprétations. C'est une **tautologie**.

Notation 3.2

Pour indiquer que φ est une contradiction, on écrit :

$$\models \overline{\varphi}.$$

3.6 Forme normale d'une formule logique

Les formes normales d'une formule bien formée permettent d'écrire la formule de départ sous une forme donnée.

Quelques définitions 3.5

•) Un littéral est un atome ou la négation d'un atome.

•) Une fbf (formule bien formée) est mise sous forme normale conjonctive (fnc) si et seulement si elle est de la forme :

$$F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge \cdots \wedge F_n,$$

où chaque F_i est une disjonction de littéraux.

•) Une fbf est mise sous forme normale disjonctive (fnd) si et seulement si elle est de la forme :

$$F_1 \vee F_2 \vee F_3 \vee \cdots \vee F_n,$$

où chaque F_i est une conjonction de littéraux.

Exemple 3.9

•) $(A \vee B) \wedge (\overline{C} \vee D) \wedge E$ est une forme normale conjonctive.

•) $(A \vee B \vee \overline{C}) \vee D$ est une forme normale disjonctive.

Pour toute formule F du calcul des propositions il existe une forme normale conjonctive FNC et une forme normale disjonctive FND telles que

$$\models F \Leftrightarrow FNC \quad et \qquad \models F \Leftrightarrow FND$$

Question 3.1

Comment faire pour transformer une fbf en forme normale conjonctive ou disjonctive ?
Pour mettre une fbf sous forme normale conjonctive (respectivement disjonctive)

1) On élimine les connecteurs $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ en utilisant les théorèmes sur l'implication matérielle et l'équivalence matérielle,

2) On développe le $\overline{F}$ en utilisant les lois de de Morgan et on élimine les $\overline{\overline{F}}$ par l'involution,

3) On regroupe les $\vee$ (respectivement les $\wedge$) par distributivité.

Exemple 3.10

$$(A \wedge \overline{(B \vee \overline{C})} \Rightarrow (\overline{B} \Rightarrow (A \wedge B))$$

1) On élimine les $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$

$$\cong \overline{((A \wedge \overline{(B \vee \overline{C})})} \vee \overline{\overline{B}} \vee (A \wedge B)$$

2) On développe le $\overline{F}$ et on élimine les $\overline{\overline{F}}$

$$\cong \overline{A} \vee (\overline{\overline{B \vee \overline{C}}}) \vee (\overline{\overline{B}} \vee (A \wedge B))$$

$$\cong \overline{A} \vee (B \vee \overline{C}) \vee (B \vee (A \wedge B))$$

3) On regroupe les $\vee$

$$\cong \overline{A} \vee B \vee \overline{C} \vee B \vee (A \wedge B)$$

$$\cong (\overline{A} \vee B \vee \overline{C} \vee B \vee A) \wedge (\overline{A} \vee B \vee \overline{C} \vee B \vee B).$$

On obtient une forme normale conjonctive équivalente à la formule bien formée de départ.

4 Test

République algérienne démocratique et populaire
Ministre de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des mathématiques, de l'informatique et des sciences de la matière

Département des mathématiques

Module :**logique mathématiques**. Niveau $2^{ème}$ LMD

1- Question de cours:

a) Rappelez-vous quatre **paradoxes**,

b) Expliquez brièvement l'un d'eux.

2- Exercice 01:

a) Soit $x \in \mathbb{Z}$. Montrons que l'assertion (x impair ou x^2 pair) est vraie.

b) Dans quelle monde la formule
$(p \Rightarrow (q \wedge r))$ est-elle vraie ?

c) Complétez selon l'exemple

p	$\overline{p}$
$\overline{e}$	e
$e \wedge f$	
$e \vee f$	
$\forall x \quad p(x)$	
$\exists x \quad p(x)$	
	$x \leqslant 4$
	$x \notin \mathbb{N}$
A, B, C alignés	

3- Exercice 02:

a) Comment faire pour transformer une **FBF** en forme normale conjonctive ou disjonctive ,

b) Donnez **FNC** équivalente à la **FBF**:
$(A \wedge \overline{(B \vee \overline{C})} \Rightarrow (\overline{B} \Rightarrow (A \wedge B)).$

4- Exercice 03:

Soient A et B deux ensembles, montrer

a)$\complement(A \cup B) = \complement(A) \cap \complement(B)$

b)$\complement(A \cap B) = \complement(A) \cup \complement(B)$

c) Soient E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$. Démontrer que : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$
$(A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset (f(B))$

5- Exercice 04:

En utilisant les **tables de vérité**, démontrer que

a) $((A \Rightarrow B) \quad et \quad (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

b)$\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$

c) $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$

6- Exercice 05:

A l'aide de la méthode des tables de vérité, dites si les formules suivantes sont des **tautologies**.

a) $A \vee \overline{A}$

b)$(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$

c) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$

5 La formule logique

1. En algèbre, on pourra écrire des formules pour exprimer que deux éléments commutent, qu'un sous-espace vectoriel est de dimension 3, etc.

2. En analyse, on écrira des formules pour exprimer la continuité d'une fonction, la convergence d'une suite, etc.

3. En théorie des ensembles, les formules pourront exprimer l'inclusion de deux ensembles, l'appartenance d'un élément à un ensemble, $\cdots$

5.1 Les formules

Elles représentent les propriétés des objets que l'on étudie.

Les formules propositionnelles sont les énoncés considérés comme correctement écrits dans le langage de la logique propositionnelle.
La définition des formules propositionnelles est donnée d'une manière inductive par la définition suivante :

Définition

1) Les variables propositionnelles

$$p, q, u, v, \cdots$$

sont des formules propositionnelles.

2) Si p est une forme propositionnelle alors $\overline{p}$ est une formule propositionnelle.

3) Si p, q sont des formules propositionnelles alors

$$p \wedge q, \quad p \vee q \quad et \quad p \Rightarrow q$$

sont des formules propositionnelles.

4) Les formules propositionnelles sont définies par les clauses 1), 2) et 3).

Exemple

$$((p \wedge q) \Rightarrow (\overline{(p \vee q)}))$$

est une formule propositionnelle à partir du fait que les variables p et q sont des variables propositionnelles. On déduit par les clauses 1) et 2) que $p \wedge q$ et $\overline{(p \vee q)})$ sont des formules propositionnelles et finalement

$$((p \wedge q) \Rightarrow (\overline{(p \vee q)}))$$

est une formule propositionnelle par la clause 3).

5.2 Le langage (signature ou vocabulaire)

Définition

Un langage (du premier ordre) est la donnée d'une famille (pas nécessairement finie) de symboles. On en distingue trois sortes :

1. les symboles de constante;
2. les symboles de fonction. À chaque symbole est associé un entier strictement positif qu'on appelle son arité : c'est le nombre d'arguments de la fonction. Si Parité est 1 (resp. 2, $\cdots$, n), on dit que la fonction est unaire (resp. binaire, $\cdots$, n-aire) ;
3. les symboles de **prédicat** (relation). De la même manière, à chaque symbole est associé un entier positif ou nul (son arité) qui correspond à son nombre d'arguments et on parle de relation unaire, binaire, ..., n-aire.

Exemple

- Le langage $\mathcal{L}_1$ de la théorie des groupes contient les symboles :
  - constantes : e (pour représenter l'élément neutre)
- Le langage $\mathcal{L}_2$ de la théorie des corps ordonnés contient les symboles :
  - constantes : 0, 1
- Le langage $\mathcal{L}_3$ de la théorie des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. contient les symboles :
  - constantes : 0

- Le langage $\mathcal{L}_4$ de la théorie des ensembles contient les symboles :
  - constantes : ϕ
- Le langage $\mathcal{L}_5$ de l'analyse réelle contient les symboles :
- constantes : $0, 1, \cdots, e, \pi, \cdots$

Exemple

Le langage $\mathcal{L}_i$	fonctions	relation
$\mathcal{L}_1$	$*$ (binaire, pour l'opération du groupe), $.^{-1}$ (unaire, pour l'inverse)	$=$
$\mathcal{L}_2$	$+, \times, -, .^{-1}.$	$=, \leq$
$\mathcal{L}_3$	$+, (f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$	$=$
$\mathcal{L}_4$	$\cup, \cap, .^c$	$=, \in, \subset$
$\mathcal{L}_5$	$+, \times, \mid . \mid, sin, ln, ...$	$=, \leq, \cdots$

5.3 Les termes

Les variables seront notées :$x, y, z, \cdots$ (éventuellement indexées : $x_1, \cdots$).

Définition

Soit $\mathcal{L}$ un langage.

1. L'ensemble $\mathcal{T}$ des termes sur $\mathcal{L}$ est plus petit ensemble contenant les variables, les constantes et stable par l'application des symboles de fonctions de $\mathcal{L}$ à des termes.

2. Un terme **clos** est un terme qui ne contient pas de variables.

3. Pour obtenir une définition plus formelle, on peut écrire :
   $\mathcal{T}_0 = \{t/t$ est une variable ou un symbole de constante$\}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
   $$\mathcal{T}_{k+1} = \mathcal{T}_k \cup \{f(t_1, t_2, \cdots, t_n)/t_i \in \mathcal{T}_k\}$$
   et f symbole de fonction d'arité n. On pose alors
   $$\mathcal{T} = \cup_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{T}_k$$

4. On appellera hauteur d'un terme t le plus petit k tel que $t \in \mathcal{T}_k$

Un élément de l'ensemble $\mathcal{T}$ que l'on est en train de définir est soit un élément de $\mathcal{V}$, soit un élément de S_C, soit l'application d'un élément $f \in S_F$ d'arité n à n éléments de $\mathcal{T}$.
l'ensemble $\mathcal{T}$ des termes est défini par

$$\mathcal{T} = \mathcal{V} \mid S_C \mid S_F(\mathcal{T}, \cdots, \mathcal{T})$$

S_C	L'ensemble des symboles de constantes
S_F	l'ensemble des symboles de fonctions du langage.

Exemple

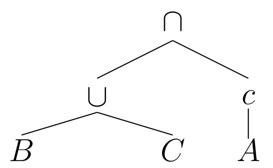
Le langage $\mathcal{L}_i$	terme	terme clos
$\mathcal{L}_1$	$x * y^{-1}$	$e^{-1} * e$
$\mathcal{L}_2$	$(x - (1 + (x^{-1})^{-1})) \times (0 + y^{-1})$	$(0 \times (0+1)^{-1}) + ((1 \times 0) + 0)$
$\mathcal{L}_3$	$(f_{sin(1)})(f_{-2}(x+y) + f_{\frac{1}{2}}(y + f_{ln7}(x))$	$f_\pi(0) + f_{\sqrt{2}}(0)$
$\mathcal{L}_4$	$(x \cup y)^c$	$\phi \cap (\phi^c \cup \phi)^c$
$\mathcal{L}_5$	$sin(ln(x) \times cos(\mid y + e \mid))$	$ln(\mid cos(e) - sin(e) \mid)$

Exemple: Un terme comme un arbre

Le terme

$$(B \cup C) \cap A^c$$

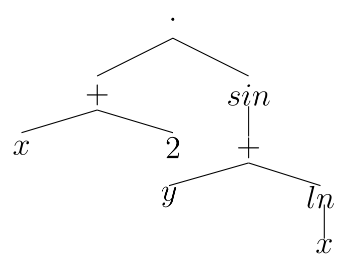
est représenté par l'arbre



Le terme

$$(x+2).sin(y + ln(x))$$

est représenté par l'arbre



5.4 Les formules

Les formules sont construites à partir des formules dites **atomiques**.

Définition

Soit $\mathcal{L}$ un langage.
Les formules atomiques de $\mathcal{L}$ sont les formules de la forme:

$$R(t_1, \cdots, t_n)$$

où R est un symbole de relation n-aire de $\mathcal{L}$ et $t_1, \cdots, t_n$ sont des termes de $\mathcal{L}$.

Définition

$$Atom = S_R(\mathcal{T}, \cdots, \mathcal{T})$$

- $Atom$ l'ensemble des formules atomiques.
- S_R l'ensemble des symboles de relation.

Définition

L'ensemble $\mathcal{F}$ des formules (de la logique du premier ordre) de $\mathcal{L}$ est défini par

$$\mathcal{F} = Atom \mid \mathcal{F} \vee \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F} \mid \overline{\mathcal{F}} \mid \exists x\mathcal{F} \mid \forall x\mathcal{F}$$

Exemple

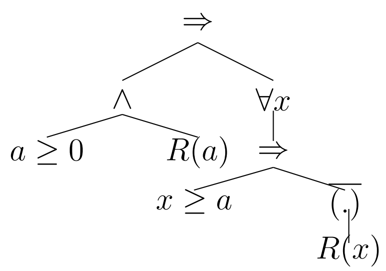
Le langage $\mathcal{L}_1$	formule
1	$\forall x \exists y((x * y = e) \wedge (\overline{(x * y = e)}))$
2	$\forall x((x = e) \vee \forall y((\overline{y = e})) \wedge (y * x = e)))$

Exemple: Une formule comme un arbre

La formule

$$(a \geq 0 \wedge R(a)) \Rightarrow \forall x(x \geq a \Rightarrow \overline{R(x)})$$

est représentée par l'arbre :



L'opérateur principal

L'opérateur principal (on dit aussi le connecteur principal) d'une formule est défini par :

Si A	atomique	elle n'a pas d'opérateur principal.
Si A	$\overline{B}$	$\overline{(.)}$ est l'opérateur principal de A.
Si A	$B \oplus C$ où $\oplus \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$	$\oplus$ est l'opérateur principal de A.
Si A	QxB où $Q \in \{\forall, \exists\}$	Q est l'opérateur principal de A.

5.5 La taille

La longueur d'un terme t (notée $\tau(t)$) est le nombre de symboles de fonction apparaissant dans t. Formellement :

- $\tau(x) = \tau(c) = 0$ si x est une variable et c est une constante;
- $\tau(f(t_1, \cdots, t_n)) = 1 + \Sigma_{1 \leq i \leq n} \tau(t_i)$.

La taille (ou la longueur) d'une formule F (notée $\tau(F)$) est le nombre de connecteurs ou de quantificateurs apparaissant dans F. Formellement :

- $\tau(F) = 0$ si F est une formule atomique ;
- $\tau(F_1 \oplus F_2) = 1 + \tau(F_1) + \tau(F_2)$ où $\oplus \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$.
- $\tau(\overline{F_1}) = \tau(QxF_1) = 1 + \tau(F_1)$ avec $Q \in \{\forall, \exists\}$.

Exercice

Soient a et b des symboles de constante, f (resp. R) un symbole de fonction (resp. de relation) **unaire** et g (resp. S) un symbole de fonction (resp. de relation) **binaire**. Les expressions suivantes sont-elles des termes? des formules? Si oui, quelle en est la taille ?

1. $(\forall x g(x, x) = b) \wedge (\exists x f(x) = b)$

2. $f(g(f(x), g(a, f(b))))$

3. $\forall x \exists y \{S(x, a) \land R(b) \Rightarrow S(f(b), y)\}$

4. $g(a, f(b))$

Solution:

terme	la taille
$g(a, f(b))$	2
$f(g(f(x), g(a, f(b))))$	5

formule	la taille
$(\forall x g(x, x) = b) \land (\exists x f(x) = b)$	3
$\forall x \exists y \{S(x, a) \land R(b) \Rightarrow S(f(b), y)\}$	4

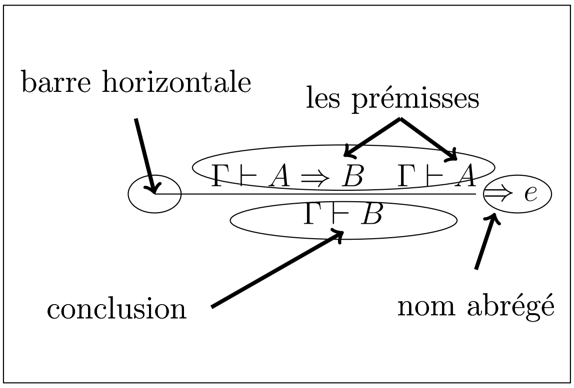
6 Déduction

Les séquents

Un **séquent** est un couple (noté $\Gamma \vdash F$) où :

- Γ est un ensemble fini de formules. Γ représente les hypothèses que l'on peut utiliser. Cet ensemble s'appelle aussi **le contexte du séquent**.
- F est une formule. C'est la formule que l'on veut montrer. On dira que cette formule est **la conclusion du séquent**.

Le signe $\vdash$ se lit thèse ou démontre.
Une règle se compose :



Les règles de démonstration

1. **Axiome**
   Si la conclusion du séquent est l'une des hypothèses, alors le séquent est prouvable.

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ \text{ax}$$

Exemple

remplacé	par
Γ	$\overline{A}$

$$\frac{}{\overline{A}, A \vdash A}\ \text{ax}$$

remplacé	par
Γ	$\overline{A}$

$$\frac{}{\overline{A}, A \vdash \overline{A}}\ \text{ax}$$

Exemple

remplacé	par
Γ	$A \Rightarrow \perp, A$

$$\frac{}{A \Rightarrow \perp, A \vdash A}\ \text{ax}$$

remplacé	par
Γ	$A \Rightarrow \perp, A$

$$\frac{}{A \Rightarrow \perp, A \vdash A \Rightarrow \perp}\ \text{ax}$$

2. **Affaiblissement** De haut en bas : si on peut démontrer A sous les hypothèses Γ alors, en ajoutant des hypothèses supplémentaires, on peut encore démontrer A.
   De bas en haut : il y a des hypothèses qui peuvent ne pas servir.

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\ \text{aff}$$

3. **Introduction de l'implication**
   De bas en haut : pour montrer $A \Rightarrow B$, on suppose A (c'est-à-dire qu'on l'ajoute aux hypothèses) et on démontre B.

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ \Rightarrow \text{i}$$

Exemple

remplacé	par
Γ	$\overline{A}$
Γ, A	Γ'
B	$\perp$

$$\dfrac{\Gamma' \vdash \perp}{\overline{A} \vdash A \Rightarrow \perp}{\Rightarrow_{\text{i}}}$$

4. **Élimination de l'implication (modus ponens)**
   De bas en haut : pour démontrer B, si on connaît un théorème de la forme $A \Rightarrow B$ ou si on peut démontrer le lemme $A \Rightarrow B$, il suffit de démontrer A.

   $$\dfrac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}{\Rightarrow_{\text{e}}}$$

   Exemple

remplacé	par
Γ	l'ensemble vide
A	$f(x) = f(y)$
B	$x = y$

   $$\dfrac{\vdash f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \quad \vdash f(x) = f(y)}{\vdash x = y}{\Rightarrow_{\text{e}}}$$

   Si on a prouvé les deux prémisses $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$ et $\Gamma \vdash A$, alors on a aussi prouvé la conclusion $\Gamma \vdash B$.

5. **Introduction de la conjonction**
   De bas en haut : pour montrer $A \wedge B$, il suffit de montrer A et de montrer B.

   $$\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}{\wedge_i}$$

Exemple

remplacé	par
Γ	l'ensemble vide
A	$\overline{A} \Rightarrow (A \Rightarrow \perp)$
B	$(A \Rightarrow \perp) \Rightarrow \overline{A}$

$$\frac{\vdash \overline{A} \Rightarrow (A \Rightarrow \perp) \quad \vdash (A \Rightarrow \perp) \Rightarrow \overline{A}}{\vdash \overline{A} \Rightarrow (A \Rightarrow \perp) \wedge (A \Rightarrow \perp) \Rightarrow \overline{A}} \wedge_i$$

$$\frac{\vdash \overline{A} \Rightarrow (A \Rightarrow \perp) \quad \vdash (A \Rightarrow \perp) \Rightarrow \overline{A}}{\vdash \overline{A} \Leftrightarrow (A \Rightarrow \perp)} \wedge_i$$

6. **Élimination de la conjonction**
De haut en bas : de $A \wedge B$, on peut déduire A (élimination gauche) et B (élimination droite).

(a) -

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \wedge_e^d$$

Exemple

remplacé	par
Γ	$x_1 = x_2 \wedge x_2 = x_3$
A	$x_1 = x_2$
B	$x_2 = x_3$

$$\frac{x_1 = x_2 \wedge x_2 = x_3 \vdash x_1 = x_2 \wedge x_2 = x_3}{x_1 = x_2 \wedge x_2 = x_3 \vdash x_2 = x_3} \wedge_e^d$$

(b) -

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \wedge_e^g$$

Exemple

remplacé	par
Γ	$x_1 = x_2 \wedge x_2 = x_3$
A	$x_1 = x_2$
B	$x_2 = x_3$

$$\frac{x_1 = x_2 \wedge x_2 = x_3 \vdash x_1 = x_2 \wedge x_2 = x_3}{x_1 = x_2 \wedge x_2 = x_3 \vdash x_1 = x_2} \wedge_e^g$$

7. **Introduction de la disjonction**
De bas en haut : pour démontrer $A \vee B$, il suffit de démontrer A ou de démontrer B.

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i^d$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i^g$$

8. **Élimination de la disjonction**
De bas en haut : si on veut montrer C et qu'on sait qu'on a $A \vee B$, il suffit de le montrer, d'une part en supposant A, d'autre part en supposant B.

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} \vee_e$$

9. **Introduction de la négation**
De bas en haut : pour montrer $\overline{A}$, on suppose A et on démontre **l'absurde**.

$$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \overline{A}} \overline{(.)}_i$$

Exemple

remplacé	par
Γ	$A \Rightarrow \perp$

$$\frac{A \Rightarrow \perp, A \vdash \perp}{A \Rightarrow \perp \quad \vdash \overline{A}} \overline{(.)}_i$$

10. **Élimination de la négation**
De haut en bas : si on a montré $\overline{A}$ et A, alors on a montré **l'absurde**.

$$\frac{\Gamma \vdash \overline{A} \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \perp} \overline{(.)}_e$$

Exemple

remplacé	par
Γ	$\overline{A}, A$

$$\dfrac{\overline{A}, A \vdash \overline{A} \qquad \overline{A}, A \vdash A}{\overline{A}, A \vdash \perp}\,\overline{(\cdot)}_e$$

6.1 Application:

Démontrer la formule

$$\overline{A} \Leftrightarrow (A \Rightarrow \perp)$$

1.a -

$$\dfrac{}{\overline{A}, A \vdash A}\,\mathrm{ax}$$

2.a -

$$\dfrac{}{\overline{A}, A \vdash \overline{A}}\,\mathrm{ax}$$

3.a -

$$\dfrac{\dfrac{}{\overline{A}, A \vdash A}\,\mathrm{ax} \qquad \dfrac{}{\overline{A}, A \vdash \overline{A}}\,\mathrm{ax}}{\overline{A}, A \vdash \perp}\,\overline{e}$$

4.a -

$$\dfrac{\overline{A}, A \vdash \perp}{\overline{A} \vdash A \Rightarrow \perp}\Rightarrow \mathrm{i}$$

5.a -

$$\dfrac{\overline{A} \vdash A \Rightarrow \perp}{\vdash \overline{A} \Rightarrow (A \Rightarrow \perp)}\Rightarrow \mathrm{i}$$

1.b -

$$\dfrac{}{A \Rightarrow \perp, A \vdash A}\,\mathrm{ax}$$

2.b -

$$\dfrac{}{A \Rightarrow \perp, A \vdash A \Rightarrow \perp}\,\mathrm{ax}$$

3.b -

$$\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow \perp, A \vdash A}\,\mathrm{ax} \qquad \dfrac{}{A \Rightarrow \perp, A \vdash A \Rightarrow \perp}\,\mathrm{ax}}{A \Rightarrow \perp, A \vdash \perp}\Rightarrow \mathrm{e}$$

4.b -

$$\frac{A \Rightarrow \perp, A \vdash \perp}{A \Rightarrow \perp \quad \vdash \overline{A}}\ \overline{i}$$

5.b -

$$\frac{A \Rightarrow \perp \quad \vdash \overline{A}}{\vdash (A \Rightarrow \perp) \Rightarrow \overline{A}} \Rightarrow \mathrm{i}$$

5.a-5.b -

$$\frac{\vdash \overline{A} \Rightarrow (A \Rightarrow \perp) \quad \vdash (A \Rightarrow \perp) \Rightarrow \overline{A}}{\vdash \overline{A} \Leftrightarrow (A \Rightarrow \perp)}\ \wedge_i$$

11. **Absurdité classique**
    De bas en haut : pour démontrer A, il suffit de démontrer l'absurde en supposant $\overline{A}$.

$$\frac{\Gamma, \overline{A} \vdash \perp}{\Gamma \vdash A}\ \perp_c$$

12. **Introduction du quantificateur universel**
    De bas en haut : pour démontrer $\forall x \quad A$, il suffit de montrer A en ne faisant aucune hypothèse sur x.

$$\frac{\Gamma \vdash A \ \text{{\tiny x n'est pas libre dans les formules de Γ}}}{\Gamma \vdash \forall x \quad A}\ \forall_i$$

Exemple

remplacé	par
Γ	l'ensemble vide
A	$x_1 = x_2 \Rightarrow x_2 = x_1$
x	x_1

$$\frac{\vdash x_1 = x_2 \Rightarrow x_2 = x_1}{\vdash \forall x_1 \quad x_1 = x_2 \Rightarrow x_2 = x_1}\ \forall_i$$

Exemple

remplacé	par
Γ	l'ensemble vide
A	$x_1 = x_2 \Rightarrow x_2 = x_1$
x	x_2

$$\frac{\vdash x_1 = x_2 \Rightarrow x_2 = x_1}{\vdash \forall x_2 \quad x_1 = x_2 \Rightarrow x_2 = x_1}\,\forall_i$$

13. **Élimination du quantificateur universel**
De haut en bas : de $\forall x \quad A$, on peut déduire $A[x := t]$pour n'importe quel terme t

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x \quad A}{\Gamma \vdash A[x := t]}\,\forall_e$$

14. **Introduction du quantificateur existentiel**
De bas en haut : pour démontrer $\exists x \quad A$, il suffit de trouver un objet (i.e. un terme) t pour lequel on sait montrer $A[x := t]$.

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x \quad A}\,\exists_i$$

15. **Élimination du quantificateur existentiel**
De bas en haut : quand on a une hypothèse de la forme $\exists x \quad A$, on peut utiliser cette hypothèse en **prenant** un x qui satisfait A. Formellement, **prendre** signifie qu'on lui donne un nom.

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x \quad A \quad \Gamma\, A \vdash C \quad {\scriptstyle x \text{ n'est libre ni dans les formules de } \Gamma, \text{ ni dans } C}}{\Gamma \vdash C}\,\exists_e$$

16. **Introduction de l'égalité**
On peut toujours montrer $t = t$. Cette règle signifie que l'égalité est réflexive.

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t}\,=_i$$

Exemple

remplacé	par
Γ	$x_1 = x_2$
t	x_1

$$\frac{}{x_1 = x_2 \vdash x_1 = x_1}{=_i}$$

17. **Élimination de l'égalité**
De haut en bas : si l'on a démontré $A[x := t]$ et $t = u$, alors on a démontré $A[x := u]$.

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t] \quad \Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash A[x := u]}{=_e}$$

Exemple

remplacé	par
Γ	$x_1 = x_2$
t	x_1
u	x_2
$A[x]$	$x = x_1$

$$\frac{x_1 = x_2 \vdash x_1 = x_1 \quad x_1 = x_2 \vdash x_1 = x_2}{x_1 = x_2 \vdash x_2 = x_1}{=_e}$$

6.2 Application:

Prouvez que l'égalité est symétrique.

1 -

$$\frac{}{x_1 = x_2 \vdash x_1 = x_2}\text{ax}$$

2 -

$$\frac{}{x_1 = x_2 \vdash x_1 = x_1}\text{=i}$$

3 -

$$\frac{\dfrac{}{x_1 = x_2 \vdash x_1 = x_2}\text{ax} \qquad \dfrac{}{x_1 = x_2 \vdash x_1 = x_1}\text{=i}}{x_1 = x_2 \vdash x_2 = x_1}{=_e}$$

4 -

$$\frac{x_1 = x_2 \vdash x_2 = x_1}{\vdash (x_1 = x_2) \Rightarrow (x_2 = x_1)} \Rightarrow \mathrm{i}$$

5.a -

$$\frac{\vdash (x_1 = x_2) \Rightarrow (x_2 = x_1)}{\vdash \forall x_1 \quad (x_1 = x_2) \Rightarrow (x_2 = x_1)} \forall_i$$

5.b -

$$\frac{\vdash (x_1 = x_2) \Rightarrow (x_2 = x_1)}{\vdash \forall x_2 \quad (x_1 = x_2) \Rightarrow (x_2 = x_1)} \forall_i$$

6 -

$$\frac{\vdash (x_1 = x_2) \Rightarrow (x_2 = x_1)}{\vdash \forall x_1, x_2 \quad \{(x_1 = x_2) \Rightarrow (x_2 = x_1)\}} \forall_i \times 2$$

6.3 Sans séquents

Dans la présentation avec séquents, on copie l'ensemble des hypothèses à chaque utilisation d'une règle de démonstration. Dans le système qu'on présente ici, on note une fois pour toutes l'ensemble des hypothèses et on applique les règles uniquement sur la conclusion.
Les règles logiques sont données ci-dessous :

Les règles logiques	Les formes
Axiome	$\dfrac{A}{A}\ \mathrm{ax}$
Affaiblissement	$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A \quad B\end{matrix}}{A}\ \mathrm{aff}$
Introduction de l'implication	$\dfrac{\begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow \mathrm{i}$

Exemple

Remplacé	Par	Application
A	$\overline{A} \wedge \overline{B}$	
B	$\overline{A \vee B}$	$\dfrac{\begin{matrix}[\overline{A} \wedge \overline{B}\ ] \\ \vdots \\ \overline{A \vee B}\end{matrix}}{\overline{A} \wedge \overline{B} \Rightarrow \overline{A \vee B}} \Rightarrow_i$

Élimination de l'implication	$\dfrac{\begin{matrix}\vdots & \vdots \\ A \Rightarrow B & A\end{matrix}}{B} \Rightarrow_{\mathrm{e}}$

Introduction de la conjonction	$\dfrac{\begin{matrix}\vdots & \vdots \\ A & B\end{matrix}}{A \wedge B} \wedge_i$

Élimination de la conjonction	$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A \wedge B\end{matrix}}{B} \wedge_e^d$

Exemple

Remplacé	Par	Application
A	$\overline{A}$	
B	$\overline{B}$	$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ [\overline{A} \wedge \overline{B}]\end{matrix}}{\overline{B}} \wedge_e^d$

Élimination de la conjonction	$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A \wedge B\end{array}}{A}\wedge_e^g$$

Exemple

Remplacé	Par	Application
$A \wedge B$	$[\overline{A} \wedge \overline{B}]$	$\dfrac{[\overline{A} \wedge \overline{B}]}{\overline{A}}\wedge_e^g$

Introduction de la disjonction	$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ B\end{array}}{A \vee B}\vee_i^d$$

Introduction de la disjonction	$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A\end{array}}{A \vee B}\vee_i^g$$

Élimination de la disjonction	$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A \vee B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}\vee_e$$

Exemple

Remplacé	Par	Application
$A \vee B$	$[A \vee B]$	
C	$\perp$	$\dfrac{A \vee B \quad \perp \quad \perp}{\perp}\vee_e$

Introduction de la négation	$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\overline{A}}\,\overline{(i)}$

Exemple

Remplacé	Par	Application
A	$[A \vee B]$	$\dfrac{\begin{matrix}[A \vee B]\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\overline{A \vee B}}\,\overline{(i)}$

Élimination de la négation	$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \overline{A}\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots \\ A\end{matrix}}{\bot}\,\overline{(e)}$

Exemple

Remplacé	Par	Application
$\overline{A}$	$[\overline{A \vee B}]$	
A	$A \vee B$	$\dfrac{[\overline{A \vee B}] \qquad A \vee B}{\bot}\,\overline{(e)}$

6.4 Exercice

Démontrer la formule

$$\vdash \overline{(A \vee B)} \Leftrightarrow (\overline{A} \wedge \overline{B})$$

Solution

1.a -

$$\dfrac{[\overline{A} \wedge \overline{B}]}{\overline{B}}\,\wedge_e^d$$

1.b -

$$\dfrac{[\overline{A} \wedge \overline{B}]}{\overline{A}}\ \wedge_e^g$$

2.a -

$$\dfrac{\dfrac{[\overline{A} \wedge \overline{B}]}{\overline{B}}\ \wedge_e^d \qquad [B]}{\perp}\ \overline{(e)}$$

2.b -

$$\dfrac{\dfrac{[\overline{A} \wedge \overline{B}]}{\overline{A}}\ \wedge_e^g \qquad [A]}{\perp}\ \overline{(e)}$$

3 -

$$\dfrac{[A \wedge B] \qquad \dfrac{\dfrac{[\overline{A} \wedge \overline{B}]}{\overline{A}}\ \wedge_e^g \qquad [A]}{\perp}\ \overline{(e)} \qquad \dfrac{\dfrac{[\overline{A} \wedge \overline{B}]}{\overline{B}}\ \wedge_e^d \qquad [B]}{\perp}\ \overline{(e)}}{\perp}\ \vee_e$$

4 -

$$\dfrac{\dfrac{[A \wedge B] \qquad \dfrac{\dfrac{[\overline{A} \wedge \overline{B}]}{\overline{A}}\ \wedge_e^g \qquad [A]}{\perp}\ \overline{(e)} \qquad \dfrac{\dfrac{[\overline{A} \wedge \overline{B}]}{\overline{B}}\ \wedge_e^d \qquad [B]}{\perp}\ \overline{(e)}}{\perp}\ \vee_e}{\overline{(A \vee B)}}\ \overline{(i)}$$

5.a -

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B] \qquad \dfrac{\dfrac{[\overline{A} \wedge \overline{B}]}{\overline{A}}\ \wedge_e^g \qquad [A]}{\perp}\ \overline{(e)} \qquad \dfrac{\dfrac{[\overline{A} \wedge \overline{B}]}{\overline{B}}\ \wedge_e^d \qquad [B]}{\perp}\ \overline{(e)}}{\perp}\ \vee_e}{\overline{(A \vee B)}}\ \overline{(i)}}{(\overline{A} \wedge \overline{B}) \Rightarrow \overline{(A \vee B)}}\ \Rightarrow i$$

6 -

$$\dfrac{[B]}{A \vee B}\ \vee_i^d$$

7.a -

$$\dfrac{[\overline{(A \vee B)}] \quad \dfrac{[B]}{A \vee B}\vee_i^d}{\bot}\overline{(e)}$$

7.b -

$$\dfrac{[\overline{(A \vee B)}] \quad \dfrac{[A]}{A \vee B}\vee_i^g}{\bot}\overline{(e)}$$

8.a -

$$\dfrac{\dfrac{[\overline{(A \vee B)}] \quad \dfrac{[B]}{A \vee B}\vee_i^d}{\bot}\overline{(e)}}{\overline{B}}\overline{(i)}$$

8.b -

$$\dfrac{\dfrac{[\overline{(A \vee B)}] \quad \dfrac{[A]}{A \vee B}\vee_i^g}{\bot}\overline{(e)}}{\overline{A}}\overline{(i)}$$

9 -

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\overline{(A \vee B)}] \quad \dfrac{[A]}{A \vee B}\vee_i^g}{\bot}\overline{(e)}}{\overline{A}}\overline{(i)} \quad \dfrac{\dfrac{[\overline{(A \vee B)}] \quad \dfrac{[B]}{A \vee B}\vee_i^d}{\bot}\overline{(e)}}{\overline{B}}\overline{(i)}}{\overline{A} \wedge \overline{B}}\wedge_i$$

5.b -

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\overline{(A \vee B)}] \quad \dfrac{[A]}{A \vee B}\vee_i^g}{\bot}\overline{(e)}}{\overline{A}}\overline{(i)} \quad \dfrac{\dfrac{[\overline{(A \vee B)}] \quad \dfrac{[B]}{A \vee B}\vee_i^d}{\bot}\overline{(e)}}{\overline{B}}\overline{(i)}}{\overline{A} \wedge \overline{B}}\wedge_i}{\overline{(A \vee B)} \Rightarrow (\overline{A} \wedge \overline{B})}\Rightarrow i$$

5.a-5.b -

$$\vdash \overline{(A \vee B)} \Leftrightarrow (\overline{A} \wedge \overline{B})$$

Absurdité classique	$\dfrac{\begin{matrix}[\overline{A}] \\ \vdots \\ \perp\end{matrix}}{A} \perp_c$

Introduction du quantificateur universel	$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A\end{matrix}}{\forall x \quad A} \forall_i$ x n'est pas libre dans les hypothèses de la dérivation de A.

Élimination du quantificateur universel	$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \forall x\ A\end{matrix}}{A[x := t]} \forall_e$

Exemple

Remplacé	Par	Application
$\forall x\ A$	$[\forall x\ \overline{A}]$	
$A[x := t]$	$\overline{A}$	$\dfrac{[\forall x\ \overline{A}]}{\overline{A}} \forall_e$

Introduction du quantificateur existentiel	$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A[x := t]\end{matrix}}{\exists x\ A} \exists_i$

Exemple

Remplacé	Par	Application
$A[x := t]$	$[A]$	$\dfrac{[A]}{\exists x\ A}\ \exists_i$

Exemple

Remplacé	Par	Application
$A[x := t]$	$\overline{A}$	$\dfrac{\overline{A}}{\exists x\ \overline{A}}\ \exists_i$

Élimination du quantificateur existentiel	$\dfrac{\begin{array}{cc} & [A] \\ \vdots & \vdots \\ \exists x\ A & C \end{array}}{C}\ \exists_e$ x n'est pas libre dans les hypothèses des dérivations de $\exists x\ A$ et de C sous l'hypothèse A.

Exemple

Remplacé	Par	Application
$\exists x\ A$	$[\exists x\ A]$	
C	$\perp$	$\dfrac{\exists x\ A \qquad \perp}{\perp}\ \exists_e$

6.5 Application

Démontrer la formule

$$\vdash \overline{(\exists A)} \Leftrightarrow \forall(\overline{A})$$

Solution

1 -

$$\dfrac{[A]}{\exists x \quad A}\ \exists_i$$

2 -

$$\dfrac{[\overline{(\exists x \quad A)}] \qquad \dfrac{[A]}{\exists x \quad A}\,\exists_i}{\bot}\,\overline{(e)}$$

3.a -

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\overline{A}}\,\overline{(i)}$$

3.b -

$$\dfrac{\dfrac{[\overline{(\exists x \quad A)}] \qquad \dfrac{[A]}{\exists x \quad A}\,\exists_i}{\bot}\,\overline{(e)}}{\overline{A}}\,\overline{(i)}$$

4.a -

$$\dfrac{\overline{A}}{\forall x\ \overline{A}}\,\exists_i$$

4.b -

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\overline{(\exists x \quad A)}] \qquad \dfrac{[A]}{\exists x \quad A}\,\exists_i}{\bot}\,\overline{(e)}}{\overline{A}}\,\overline{(i)}}{\forall x\ \overline{A}}\,\exists_i$$

5.a -

$$\dfrac{\begin{matrix}[\overline{(\exists x\ A)}]\\ \vdots \\ \forall x\ \overline{A}\end{matrix}}{\overline{(\exists x\ A)} \Rightarrow \forall x\ \overline{A}}\,\Rightarrow i$$

5.b -

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\overline{(\exists x \quad A)}] \qquad \dfrac{[A]}{\exists x \quad A}\,\exists_i}{\bot}\,\overline{(e)}}{\overline{A}}\,\overline{(i)}}{\forall x\ \overline{A}}\,\exists_i}{\overline{(\exists x\ A)} \Rightarrow \forall x\ \overline{A}}\,\Rightarrow i$$

6 -

$$\dfrac{[\forall x\, \overline{A}]}{\overline{A}}\ {\scriptstyle \forall_e}$$

7 -

$$\dfrac{A \qquad \dfrac{[\forall x\, \overline{A}]}{\overline{A}}\ {\scriptstyle \forall_e}}{\perp}\ {\scriptstyle \overline{e}}$$

8 -

$$\dfrac{[\exists x\, A] \qquad \dfrac{A \qquad \dfrac{[\forall x\, \overline{A}]}{\overline{A}}\ {\scriptstyle \forall_e}}{\perp}\ {\scriptstyle \overline{e}}}{\perp}\ {\scriptstyle \exists_e}$$

9.a -

$$\dfrac{\begin{matrix}[\exists x\, A] \\ \vdots \\ \perp\end{matrix}}{\overline{(\exists x\, A)}}\ {\scriptstyle \overline{(i)}}$$

9.b -

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x\, A] \qquad \dfrac{A \qquad \dfrac{[\forall x\, \overline{A}]}{\overline{A}}\ {\scriptstyle \forall_e}}{\perp}\ {\scriptstyle \overline{e}}}{\perp}\ {\scriptstyle \exists_e}}{\overline{(\exists x\, A)}}\ {\scriptstyle \overline{(i)}}$$

10.a -

$$\dfrac{\begin{matrix}[\forall x\, \overline{A}] \\ \vdots \\ \overline{(\exists x\, A)}\end{matrix}}{\forall x\, \overline{A} \Rightarrow \overline{(\exists x\, A)}}\ {\scriptstyle \Rightarrow_i}$$

10.b -

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists x\ A] \qquad \dfrac{A \qquad \dfrac{[\forall x\ \overline{A}]}{\overline{A}}\ \forall_e}{\bot}\ \overline{e}}{\bot}\ \exists_e}{\overline{(\exists x\ A)}}\ \overline{(i)}}{\forall x\ \overline{A} \Rightarrow \overline{(\exists x\ A)}}\ \Rightarrow i$$

5.b-10.b

$$\vdash \overline{(\exists A)} \Leftrightarrow \forall(\overline{A})$$

Introduction de l'égalité	$\dfrac{[t = t]}{t = t}\ {=}\ i$ $t = t$ est déchargée puisqu'on a besoin de rien pour le prouver.

Élimination de l'égalité	$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A[x := t]\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ t = u\end{matrix}}{A[x := u]}\ {=}\ e$

7 Prédicat

Définition

Un prédicat est une fonction propositionnelle dont le domaine est un ensemble non vide d'objets, et le codomaine, un ensemble de valeurs de vérité.

Le langage	L'ensemble des formes propositionnelles prédicatives, saturées ou non.
Le domaine	L'ensemble des objets que le langage décrit.
Le codomaine	Le résultat de son interprétation

7.1 Exemple introductif

Considérez

$$\begin{array}{ll} \text{f:}\mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{N} \\ \text{x} & \longrightarrow x+1 \end{array}$$

Cette fonction peut être considérée comme incomplète dans la mesure où tant que la variable x n'est pas saturée (ou remplacée), à l'aide d'un nombre naturel, l'expression $x+1$ ne peut pas être associée à un nombre.
Une fois saturée, la fonction peut se lire

$$\text{f(3)} : \{3\} \longrightarrow \{4\}.$$

Une fonction propositionnelle se comporte exactement de la même manière, à la différence toutefois qu'elle met ses objets en relation avec des valeurs de vérité. Considérons une fonction propositionnelle $\Lambda(x)$. On a ainsi formellement :

$$\Lambda(x) : \{a, b, c, \cdots\} \longrightarrow \{vrai, faux\}.$$

Imaginons que $\Lambda(x)$ prenne en l'occurrence les valeurs suivantes pour les trois premiers objets du domaine :

$$\begin{array}{rcc} \Lambda(a) : \{a\} & \longrightarrow & \{vrai\}. \\ \Lambda(b) : \{b\} & \longrightarrow & \{vrai\}. \\ \Lambda(c) : \{c\} & \longrightarrow & \{faux\}. \end{array}$$

On aurait ainsi trois énoncés, soit $\Lambda(a)$, $\Lambda(b)$ et $\Lambda(c)$, possédant une valeur de vérité.

Exemple

Abstrayez un prédicat dans chaque énoncé.

1. Mercure est une planète tellurique.
   Px : x est une planète tellurique
   a : Mercure.

2. Saskatoon est à l'ouest de Winnipeg.
   Pxy : $x$est à l'ouest de y
   a: Saskatoon
   b : Winnipeg

3. Guillaume aime davantage lire Kafka que Dostoïevski.
   $Pxyz$: x aime davantage lire y que z
   a: Guillaume
   b : Kafka
   c : Dostoïevski

4. Pierre ressemble à Jean comme Catherine ressemble à Marie.
   $Pxywz$: x ressemble à y comme w ressemble à z
   a : Pierre
   b : Jean
   c : Catherine
   d : Marie

Par convention, nous utiliserons une lettre majuscule suivie de variables pour symboliser un prédicat. Ainsi,

$$Px, Qxy\ et\ Rxyz$$

sont des prédicats.
Les variables $x, y, z, \ldots$, serviront à marquer les places dans une relation prédicative.
La liste $a, b, \ldots$, désignera les constantes d'individu.
Les listes de prédicats, de variables et de constantes sont par conséquent :

Prédicats	$P, Q, R, \ldots$
Variables d'individu :	$x, y, z, \ldots$
Constantes d'individu	$a, b, c, \ldots$

Relation

Ce sont les prédicats d'arité supérieure, ou prédicats polyadiques.

Propriétés

Ce sont les prédicats d'arité 1, ou prédicats monadiques.

Insaturé

Un prédicat qui comporte une ou plusieurs variables est dit insaturé.

8 Quantificateur

Nous allons utiliser un opérateur désignant tous les objets d'un domaine, soit $\forall$, le quantificateur universel.
Le quantificateur universel nous indique qu'une ou plusieurs variables d'un prédicat peuvent être saturées par tous les objets du domaine.

Remarque:

1. L'écriture du quantificateur précède L'écriture du prédicat et que le quantificateur est flanqué de la variable du prédicat.

   $$\forall x P x$$

   Dans l'expression précédente, le quantificateur universel signifie que pour tous les x (objets du domaine), le quantificateur universel signifie que pour tous les x (objets du domaine), x est P.

2. Lorsqu'une variable d'un prédicat sera quantifiée, nous dirons qu'il s'agit d'une **variable liée**.

8.1 Variables libres et variables liées

Définition: Variables libres

Une variable d'un prédicat est libre lorsqu'elle n'est pas liée à un quantificateur.

Exemple

Formule	L'ensemble des variables libres
$\forall x(x.y = y.x)$	$\{y\}$
$\{\forall x \exists y(x.z = z.y)\} \wedge \{x = z.z\}$	$\{x, z\}$
$\forall x(y = 0)$	$\{y\}$

Définition: variables liées (muette)

Une variable d'un prédicat est liée lorsqu'elle tombe sous la portée d'un quantificateur.

Exemple

y est liée dans $\forall y(x.y = y.x)$.

Définition:

- **Une forme** propositionnelle est **close** (premier ordre) lorsque toutes ses variables sont liées.
- Une formule sans variables liées s'appelle une formule ouverte.

Remarque:

Lorsqu'une forme propositionnelle ne comporte que des variables liées par $\forall$, on dit que cette forme propositionnelle est **close universellement** .

Dualité

Le quantificateur $\forall$ peut être considéré comme une conjonction généralisée

$$\forall x Px = Pa_1 \wedge Pa_2 \wedge \ldots Pa_n = \wedge_{i=1}^{n} Pa_i.$$

La signification de

$$\overline{\forall x Px}$$

sera par conséquent qu'il existe au moins un x tel que

$$\overline{Px}$$

Le quantificateur $\exists$ **(quantificateur existentiel)** peut être considéré comme une disjonction généralisée :

$$\exists x Px = Pa_1 \vee Pa_2 \vee \ldots Pa_n = \vee_{i=1}^{n} Pa_i.$$

n	Le cardinale du domaine
Px	Un prédicat quelconque
x	La variable
a_i	Les constantes

Équivalences

Conjonction	$\equiv$
$\forall x Px$	$\overline{\exists x \overline{Px}}$
$\overline{\forall x Px}$	$\exists x \overline{Px}$

Disjonction	$\equiv$
$\exists x Px$	$\overline{\forall x \overline{Px}}$
$\overline{\exists x Px}$	$\forall x \overline{Px}$

Commutativité	$\equiv$
$\forall x \forall y Pxy$	$\forall y \forall x Pxy$
$\exists x \exists y Pxy$	$\exists y \exists x Pxy$

Distributivité	$\equiv$
$\forall x(Px \wedge Qx)$	$(\forall x Px \wedge \forall x Qx)$
$\exists x(Px \vee Qx)$	$(\exists x Px \vee \exists x Qx)$

La transformation d'une forme non prénexe à la forme prénexe	$\equiv$
$(\varphi \wedge \forall x \psi x)$	$\forall x(\varphi \wedge \psi x)$
$(\varphi \vee \forall x \psi x)$	$\forall x(\varphi \vee \psi x)$
$(\varphi \Rightarrow \forall x \psi x)$	$\forall x(\varphi \Rightarrow \psi x)$
$(\forall x \psi x \Rightarrow \varphi)$	$\exists x(\psi x \Rightarrow \varphi)$
$(\exists x \psi x \Rightarrow \varphi)$	$\forall x(\psi x \Rightarrow \varphi)$
$(\varphi \wedge \exists x \psi x)$	$\exists x(\varphi \wedge \psi x)$
$(\varphi \vee \exists x \psi x)$	$\exists x(\varphi \vee \psi x)$
$(\varphi \Rightarrow \exists x \psi x)$	$\exists x(\varphi \Rightarrow \psi x)$

En prenant φ pour une expression du premier ordre quelconque dans laquelle x n'est pas libre et ψ pour un prédicat quelconque.

Remarque

Les $\forall$ et les $\exists$ ne sont pas commutables entre eux.

8.2 Définition (forme propositionnelle)

Une forme propositionnelle est une expression comportant au moins un prédicat avec une variable.

Remarque

ces formes propositionnelles sont importantes puisqu'elles permettent d'exprimer de la généralité

Exemple

Tous les hommes sont mortels peut être traduite symboliquement par

$$\forall x(Hx \Rightarrow Mx).$$

Le quantificateur universel exprime ici l'idée que tous les objets du domaine satisfont une certaine structure propositionnelle.

Définition (énoncé)

Un énoncé est le résultat d'une instanciation (remplacer les variables des prédicats par des constantes) d'une forme propositionnelle.

Exemple

Instanciez les prédicats de l'ensemble de formules

$$\{\forall x(Px \wedge Qx), \exists x\overline{Px}\}$$

à l'aide des objets du domaine

$$\{a, b, c\}$$

$$\begin{aligned} \forall x(Px \wedge Qx) &= (Pa \wedge Qa) \wedge (Pb \wedge Qb) \wedge (Pc \wedge Qc) \\ \exists x\overline{Px} &= \overline{Pa} \vee \overline{Pb} \vee \overline{Pc} \end{aligned}$$

L'ensemble d'énoncés Λ résultant de l'instanciation des formes propositionnelles est par conséquent :

$$\Lambda = \{(Pa \wedge Qa), (Pb \wedge Qb), (Pc \wedge Qc), \left(\overline{Pa} \vee \overline{Pb}\right) \vee \overline{Pc}\}$$

Exemple

Instanciez les prédicats de l'ensemble de formules

$$\{\forall x\forall yPxy, \forall x\exists yQxy, \exists x\forall yRxy, \exists x\exists ySxy\}$$

à l'aide des objets du domaine

$$\{a, b\}$$

Traitons maintenant les formules :

$$\forall x\forall yPxy = \overbrace{\forall yPay \wedge \forall yPby}^{instances\,de\,\forall x} = \overbrace{(Paa \wedge Pab) \wedge (Pba \wedge Pbb)}^{instances\,de\,\forall y}$$

$$\forall x \exists y Qxy = \overbrace{\exists y Qay \wedge \exists y Qby}^{instances\, de\, \forall x} = \overbrace{(Qaa \vee Qab) \wedge (Qba \vee Qbb)}^{instances\, de\, \exists y}$$

$$\exists x \forall y Rxy = \overbrace{\forall y Ray \vee \forall y Rby}^{instances\, de\, \exists x} = \overbrace{(Raa \wedge Rab) \vee (Rba \wedge Rbb)}^{instances\, de\, \forall y}$$

$$\exists x \exists y Sxy = \overbrace{\exists y Say \vee \exists y Sby}^{instances\, de\, \exists x} = \overbrace{(Saa \vee Sab) \vee (Sba \vee Sbb)}^{instances\, de\, \exists y}.$$

Par conséquent :

$\Lambda = \{Paa \wedge Pab, Pba \wedge Pbb, Qaa \vee Qab, Qba \vee Qbb, (Raa \wedge Rab) \vee (Rba \wedge Rbb)\,,$

$(Saa \vee Sab) \vee (Sba \vee Sbb)\}$

Forme prénexe

Sous forme prénexe	N'est pas sous forme prénexe	le préfixe	la matrice
$\forall x \exists y(Px \wedge Py)$	$\forall x(Px \wedge \exists y Py)$	$\forall x \exists y$	$(Px \wedge Py)$

Formellement, on a

$$\underbrace{\Lambda_1 x_1 \Lambda_2 x_2 \ldots \Lambda_n x_n \psi}_{forme\, prénexe},$$

où

Λ_i	$\forall$ ou $\exists$
ψ	La partie de l'expression
$\Lambda_1 x_1 \Lambda_2 x_2 \ldots \Lambda_n x_n$	Le préfixe
ψ	La matrice

Remarque

- Dans une forme prénexe, aucun quantificateur ne tombe sous la portée d'un connecteur logique.
- ψ est la partie de l'expression ne contenant aucun quantificateur ni aucune variable libre.

Exemple

Convertissez sous forme normale prénexe disjonctive l'expression

$$\forall x \Big((Px \vee \forall x Qx) \Rightarrow \overline{(Px \Rightarrow \exists x Qx)} \Big)$$

On doit traduire:

$$
\begin{array}{ll}
\forall x \Big(\overline{(Px \vee \forall x Qx)} \vee \overline{(\overline{Px} \vee \exists x Qx)} \Big) & \text{l'implication matérielle en termes de disjonction et de négation} \\
\forall x \big((\overline{Px} \wedge \overline{\forall x Qx}) \vee (Px \wedge \overline{\exists x Qx}) \big) & \text{lois de De Morgan} \\
\forall x \big((\overline{Px} \wedge \exists x \overline{Qx}) \vee (Px \wedge \forall x \overline{Qx}) \big) & \text{lois de négation} \\
\forall x \big((\overline{Px} \wedge \exists y \overline{Qy}) \vee (Px \wedge \forall z \overline{Qz}) \big) & \text{changement de variables} \\
\forall x \big(\exists y (\overline{Px} \wedge \overline{Qy}) \vee \forall z (Px \wedge \overline{Qz}) \big) & \text{les quantificateurs en fonction des équivalences} \\
\forall x \exists y \forall z \big((\overline{Px} \wedge \overline{Qy}) \vee (Px \wedge \overline{Qz}) \big) &
\end{array}
$$

Nous devons procéder à un changement de variables afin d'éviter toute ambiguïté dans la portée des quantificateurs :

8.3 Propriétés des relations

En théorie des ensembles, une relation R entre un ensemble S et un ensemble T est un sous-ensemble de $S \times T$ (produit cartésien).

Exemple

Soit $E = \{a, b\}$ alors

$$E \times E = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}.$$

Définissons une relation R avec les éléments suivants,

$$R = \{(a, b), (b, a), (b, b)\}.$$

On peut aisément vérifier que

$$R \subseteq E \times E$$

à l'aide d'une matrice booléenne

La matrice booléenne A de R est

$$A_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \overbrace{(a,a)}^{\notin R} & \overbrace{(a,b)}^{\in R} \\ \underbrace{(b,a)}_{\in R} & \underbrace{(b,b)}_{\in R} \end{pmatrix}$$

Du point de vue de la logique prédicative, R prend ici la forme d'un ensemble d'énoncés pour un prédicat

$$R = \{Rab, Rba, Rbb\}$$

Propriétés d'une relation binaire

En logique prédicative, on définit les propriétés d'une relation binaire R au moyen des conditions suivantes :

Propriété	*Condition*
Réflexive	$\forall x Rxx$
Irréflexive	$\forall x \overline{Rxx}$
Symétrique	$\forall x \forall y\,(Rxy \Rightarrow Ryx)$
Antisymétrique	$\forall x \forall y((Rxy \Rightarrow Ryx)) \Rightarrow x = y$

Propriété	*Condition*
Transitive	$\forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz)$
Dense	$\forall x \forall y \forall z(Rxy \Rightarrow (Rxz \wedge Rzy))$
Comparable	$\forall x \forall y(Rxy \vee Ryx)$

Propriété	Condition
Sérielle	$\forall x \exists y Rxy$
Euclidienne	$\forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Rxz) \Rightarrow Ryz)$

9 Langage du premier ordre

On définit le premier ordre par un rapport prédicatif direct aux objets du domaine du langage.
Un prédicat d'ordre supérieur est un prédicat qui a pour argument un autre prédicat, c'est-à-dire qu'il exprime une qualité de relation entre un autre prédicat et son argument propre :

$$\underbrace{\overbrace{P_n \ldots P_2}^{prédicats\,d'ordre\,supérieur} \; \underbrace{\overbrace{P_1 x}^{ordre\,1}}_{}}_{ordre\,n}$$

$$P_n \ldots \underbrace{P_2 \; P_1 x}_{ordre\,2}$$

Définition

Une expression bien formée (*ebf*) pour un langage $\mathcal{L}$ est une expression conforme à la grammaire de $\mathcal{L}$.
Dans le cas de notre $\mathcal{L}^1$ (langage du premier ordre), nous avons les règles grammaticales suivantes :

Si	alors $\cdots$ ebf
P est un prédicat d'arité n	$Pa_1a_2\ldots a_n$
P est un prédicat d'arité n	$\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n P x_1 x_2 \cdots x_n$
P est un prédicat d'arité n	$\exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n P x_1 x_2 \cdots x_n$
ψ est une ebf	$\overline{\psi}$
ψ et φ est une ebf	$\psi \wedge \varphi$
ψ et φ est une ebf	$\psi \vee \varphi$
ψ et φ est une ebf	$\psi \Rightarrow \varphi$
ψ et φ est une ebf	$\psi \equiv \varphi$

Ainsi, tout énoncé, comme Pa, est une ebf. Par contre, un simple prédicat comme Px n'est pas une ebf, seulement les expressions prédicatives avec clôture universelle ou existentielle, comme $\forall x Px$ et $\exists x Px$, sont autorisées.

9.1 Interprétation

Une interprétation Λ est une perspective sémantique sur un domaine d'objets et de relations.

Définition

Une interprétation Λ est une structure

$$\langle \mathcal{L}, \mathcal{D}, \mathcal{V} \rangle$$

où

$\mathcal{L}$	un langage
$\mathcal{D}$	un domaine non vide
$\mathcal{V}$	une fonction de valuation,

soit $\mathcal{V} : \mathcal{L} \longmapsto \mathcal{D}$ qui associe les constantes et les prédicats du langage aux objets du domaine.
On notera $val(a_i, o_j)$ la valuation de a_i dans $\mathcal{D}$ sous Λ. $\mid \psi \mid_\Lambda$ (la valeur sémantique d'une expression quelconque ψ sous Λ.
Aussi, en ce qui concerne l'interprétation de $\mathcal{L}$, soit Λ, elle stipule les conditions suivantes :

1. Le domaine (non vide) $\mathcal{D}$ (domaine d'objets, ou domaine d'interprétation).

2. Pour chaque constante a_i, $\mid a_i \mid_\Lambda \in \mathcal{D}$. Pour chacune des constantes de $\mathcal{L}$, on retrouve dans la structure Λ une paire $\langle a_i, o_j \rangle$, ce qui signifie que $\mid a_i \mid_\Lambda \in \mathcal{D}$.

3. Pour tout prédicat P d'arité n,

$$\mid Pa_1a_2 \cdots a_n/x_1x_2 \cdots x_n \mid_\Lambda \subseteq \mathcal{D}^n,$$

(que l'on peut écrire $\mid Pa_1a_2 \cdots a_n \mid_\Lambda$).

4. $\mid Pa_1a_2 \cdots a_n \mid_\Lambda = V$ (valeurs de vérité) si et seulement si les objets de $\mathcal{D}$ dénotés par les constantes $a_1a_2 \cdots a_n$ sont en relation P dans $\mathcal{D}$ Autrement,

$$\mid Pa_1a_2 \cdots a_n \mid_\Lambda = F.$$

5. $\mid \forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n P x_1 x_2 \cdots x_n \mid_\Lambda = V$ si et seulement si $\mid Pa_1a_2 \cdots a_n \mid_\Lambda = V$ pour toute valuation possible de chaque constante de P, soit
$val_i(a_1, o_i), \cdots, val_i(a_n, o_i)$ pour tout $o \in \mathcal{D}$. Pour les formules closes.

6. $\mid \exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n P x_1 x_2 \cdots x_n \mid_\Lambda = V$ si et seulement si $\mid Pa_1a_2 \cdots a_n \mid_\Lambda = V$ pour au moins une valuation de chaque constante de P, soit
$val_i(a_1, o_i), \cdots, val_i(a_n, o_i)$ pour au moins un $o \in \mathcal{D}$. Pour les formules closes.

7. $\mid \overline{\psi} \mid_\Lambda = V$ si et seulement si $\mid \psi \mid_\Lambda = F$.

8. $\mid \varphi \wedge \psi \mid_\Lambda = V$ si et seulement si $\mid \psi \mid_\Lambda = V$ et $\mid \varphi \mid_\Lambda = V$.

9. $\mid \varphi \vee \psi \mid_\Lambda = V$ si et seulement si $\mid \psi \mid_\Lambda = V$ ou $\mid \varphi \mid_\Lambda = V$.

10. $\mid \varphi \Rightarrow \psi \mid_\Lambda = V$ si et seulement si $\mid \varphi \mid_\Lambda = F$ ou $\mid \psi \mid_\Lambda = V$.

11. $\mid \varphi \equiv \psi \mid_\Lambda = V$ si et seulement si $\mid \varphi \mid_\Lambda = \mid \psi \mid_\Lambda = F$ ou $\mid \psi \mid_\Lambda = \mid \varphi \mid_\Lambda = V$.

Les conditions 1 à 3 permettent de comprendre comment les constantes d'individu et les prédicats du premier ordre peuvent être interprétés.

9.2 Autres notions:

Définition

Une interprétation Λ satisfait un ensemble d'expressions Υ, où $\Upsilon \subseteq \mathcal{D}$, si et seulement si la valuation de Λ fait en sorte que pour toute expression $\psi \in \Upsilon$, on a $\mid \psi \mid_\Lambda = V$.

9.3 Modèle

Un modèle est une interprétation qui satisfait un ensemble d'expressions.

Remarque

Pour signifier qu'une interprétation Λ est un modèle $\mathcal{M}$ pour un ensemble d'expressions Υ, on peut écrire : pour toute formule $\psi \in \Upsilon$, on a $\models_\Lambda \psi$, ou encore, on a $\mathcal{M} \models \psi$. Lorsqu'il existe un modèle pour un tel ensemble Υ, on dit que Υ est $satisfiable$.

9.4 Validité

Définition

Une expression ψ est valide si et seulement si toute interprétation de ψ est un modèle.
Pour exprimer la validité d'une expression du premier ordre, on écrit simplement $\models \psi$.
Cette écriture est analogue à celle utilisée en logique propositionnelle pour exprimer le caractère tautologique d'une formule ou le caractère de validité d'une inférence (logique du premier ordre est une extension de la logique propositionnelle).

Exemple

La formule en logique propositionnelle	Logique du premier ordre
$\models ((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$	$\models \forall x\, ((Px \Rightarrow Qx) \wedge Px) \Rightarrow Qx$

10 Application

10.1 Homomorphismes et isomorphismes

Définition

Soient Λ_1 et Λ_2 deux interprétations d'un langage $\mathcal{L}$:

1. Un $\mathcal{L}-$morphisme ou ($\mathcal{L}-$homomorphisme de Λ_1 dans Λ_2 est une fonction
$$\Phi : \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2$$
   - Pour chaque symbole de constante c on a:
   $$\Phi(c_{\Lambda_1}) = c_{\Lambda_2}.$$
   - Pour chaque symbole de fonction $n-$aire f et pour $a_1, \cdots, a_n \in \mathcal{D}_1$ on a
   $$\Phi\left(f_{\Lambda_1}(a_1, \cdots, a_n)\right) = f_{\Lambda_2}\left(\Phi(a_1), \cdots, \Phi(a_n)\right).$$
   - Pour chaque symbole de relation $n-$aire R et pour $a_1, \cdots, a_n \in \mathcal{D}_1$ on a
   $$(a_1, \cdots, a_n) \in R_{\Lambda_1} \, si\, et\, seulement\, si \; (\Phi(a_1), \cdots, \Phi(a_n)) \in R_{\Lambda_2}.$$
2. Un $\mathcal{L}-$isomorphisme est un $\mathcal{L}-$morphisme bijectif.
3. Λ_1 et Λ_2 sont $\mathcal{L}-$-isomorphes s'il existe un $\mathcal{L}-$isomorphisme de Λ_1 dans Λ_2.

10.2 Monomorphisme:

Définition

Un monomorphisme de Λ_1 dans Λ_2 est un morphisme de Λ_1 dans Λ_2 qui a la propriété suivante:
Pour chaque entier naturel $k \geq 1$, pour chaque symbole de relation $k-$aire R et pour $a_1, \cdots, a_k \in \mathcal{D}_1$ on a
$$(a_1, \cdots, a_k) \in R_{\Lambda_1} \, si\, et\, seulement\, si \; (\Phi(a_1), \cdots, \Phi(a_k)) \in R_{\Lambda_2}.$$

10.3 Automorphisme:

Définition

Un automorphisme est un isomorphisme de Λ_1 dans Λ_1.

Exemple

1. Il est facile de vérifier que si $\mathcal{L} = \{c, f, S\}$ et Λ_1 et Λ_2 sont définis par :

    - $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}$, $c_{\Lambda_1} = 0$, $f_{\Lambda_1}(a, b) = a + b$, et $S_{\Lambda_1} = \{(a, b)/a \leq b\}$.
    - $\mathcal{D}_2 =]0, \infty[$, $c_{\Lambda_2} = 1$, $f_{\Lambda_1}(a, b) = a + b$, et $S_{\Lambda_1} = \{(a, b)/a \leq b\}$.

    la fonction $x \longmapsto e^x$ est un isomorphisme de Λ_1 dans Λ_2.

Remarque

S'il y a un isomorphisme entre deux structures, on dit qu'elles sont isomorphes.

Exemple

1. Lorsque la langue se compose d'un symbole constant c et d'un symbole de fonction binaire g, la fonction

    $$n \longmapsto (-1)^n$$

    est un homomorphisme de la structure $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ dans la structure $\langle \{-1, 1\}, 1, \times \rangle$.

2. Dans la langage dont le seul symbole est le symbole de relation binaire R, Les structures $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ et $\langle (0, 1), \leq \rangle$ sont isomorphes grâce à

    $$x \mapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctan x$$

    de $\mathbb{R}$ dans $(0, 1)$.

References

[1] Bouchard, Yves. (2015). Calcul en logique du premier ordre. Québec: Presses de l'Université du Québec.

[2] M. Danesi., (2004), The Liar Paradox and the Towers of Hanoi: The 10 Greatest Math Puzzles of All Time. John Wiley - Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.

[3] M de L.,(1897) Paradoxes. Tome premier. Source gallica.bnf.fr Bibliothèque nationale de France. .

[4] Piotr Łukowski., (2011) . Paradoxes. Springer Dordrecht Heidelberg London .New York.

[5] R. M. Sainsbury., (2009). Paradoxes. Cambridge University Press. New York.

[6] Wolfgang. Rautenberg., (2009). A Concise Introduction to Mathematical Logic. Springer. New York.

[7] Jean-Louis Rouget, (2007). Logique.

[8] Willem Conradie., Valentin Goranko.,(2015) Logic and discrete Mathematics. Laserwords Private Limited. Chennai, India.

[9] George Tourlakis., (2003). Lectures in Logic and Set Theory Volume 1.Cambridge University Press. New York.

[10] Louis Couturat.,(1905). L'Algèbre de la Logique. Librairie scientifique et technique. Paris.

[11] Antoine Chambert-Loir. Logique du premier ordre.

[12] John Woods., (2003). Paradox and Paraconsistency. Cambridge University Press. New York.

[13] René Cori. Daniel Lascar., (2000). Mathematical Logic A Course with Exercises. Oxford University Press Inc., New York.

[14] Michael Clark., (2002). Paradoxes from A to Z . Taylor - Francis.

[15] Jean-Luc Valein . Jean-Claude Dupin., (1997). Initiation au raisonnement mathématique - Logique et théorie des ensembles: Logique et théorie des ensembles. Armand Colin Éditeur, Paris.

[16] E. P. Northrop., (1953).Fantaisies et paradoxes mathématiques. Dunod. Paris.

[17] René David., .,Karim Nour .,Christophe Raffalli ., (2004). Introduction à la logique. Théorie de la démonstration. Dunod, Paris.

[18] S. Devismes, P. Lafourcade, M. Lévy., (2012). Logique et démonstration automatique : Une introduction à la logique propositionnelle et à la logique du premier ordre.

[19] J. Champavère., (2007). Logique des propositions et logique des prédicats Notes de cours.

[20] T. Gérard,D. Jacques, *TikZ pour l'impatient*,(2017).

[21] http://math.et.info.free.fr/TikZ/bdd/TikZ-Impatient.pdf,30/12/2018:15:16

[22] https://fr.wikipedia.org/wiki/Bertrand-Russell

[23] https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/Tables,12:23,31/12/2018.

[24] https://fr.wikipedia.org/wiki/Autologisme

[25] https://www.developpez.net/forums/d1592510/autres-langages/autres-langages/latex/tableaux-graphiques-images-flottants/tikz-tracer-portion-courbe/,15:50,01/01/2019.

[26] https://stringfixer.com/fr/Kurt-Grelling

[27] https://fr.wikipedia.org/wiki/Leonard-Nelson

[28] https://fr.wikipedia.org/wiki/Georg-Cantor

[29] https://fr.wikipedia.org/wiki/Jules-Richard-(math/C3/A9maticien)