République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par : **TOUAILIA Lina**

Intitulé

Solutions périodiques d'une équation de Riccati généralisée

Dirigé par : BOUATTIA Yassine

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr** SELLAMI Nabil	**MCA**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr** BOUATTIA Yassine	**MCA**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr** MELLAL Romaissa	**MCB**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr** ALI Ahmed	**MCB**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2025

Remerciêments

Au nom d'Allah, le tout miséricordieux, le très miséricordieux

Ce n'est pas parce que la tradition l'exige que cette page se trouve dans ce travail, mais parce que les personnes à qui s'adressent ces remerciements le méritent vraiment.

Au terme de ce modeste travail, nous tenons à remercier sincèrement tout ce qui a contribué, de près ou de loin, à sa réalisation. Espérons qu'il sera utile pour les étudiants à venir.

Tout d'abord, je souhaite avant tout exprimer ma profonde gratitude à Monsieur **BOUATTIA Yassine**, maitre de conférence à l'université 08 mai 1945, qui m'a guidé et de m'avoir donné le privilège d'encadrer mon travail, pour la confiance qu'il m'a accordé ainsi que pour sa disponibilité et sa patience.

Je tiens à remercier les membres de jury, le président Dr **SELLAMI Nabil** et les examinateurs Dr **MELLAL Romaissa** ainsi que Dr **ALI Ahmed** pour avoir accepté d'évaluer ce travail, et d'avoir consacré une partie de leurs temps à cet effet.

Un grand merci à mes enseignants sans exception, pour leurs efforts, pour m'assurer une formation solide, qui m'a permis de devenir ce que je suis aujourd'hui.

Maintenant, je passe mon chaleureux remerciement à mes chers parents qui m'ont soutenu par leur amour inconditionnel et leur confiance. A Mon époux, ma sœur et mes frères, qui m'ont toujours encouragée tout au long de mon parcours, je dis merci au fond du cœur.

Enfin, Je remercie les quelques proches qui grâce à un bref SMS ou une parole m'ont apporté soutien et force.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à mes chers parents.

Aucune dédicace ne saurait exprimer ce que je leur dois. Par leurs prières, leur patience envers moi, ils ont tout fait pour mon bonheur et ma réussite. Qu'ils trouvent dans ce travail le fruit de leurs sacrifices illimités et la preuve de mon amour et de ma gratitude éternelle.

Que Dieu les bénisse et leur accorde une longue vie, pleine de prospérité et de bonheur.

À mes chers frères Oussama et Anis, et à ma sœur Imtinen ainsi qu'à Yassamine et Haná qui m'ont tant donné de courage pour accomplir cette mission.

À mon très cher époux Younes, à qui je souhaite tout le bonheur du monde, celui qui m'a toujours encouragée, qui a été toujours à mes côtés, et sans oublier ma princesse et mon ange, HIBET Al Rahman. À mon amie et chère Meriem, ainsi qu'à tous les étudiants de notre promotion 2024-2025.

Table des matières

0.1 Introduction 6

1 Notions préliminaires **8**

1.1 Systèmes dynamiques 8

1.2 Points d'équilibre 10

1.3 Linéarisation 10

1.4 Classification des points d'équilibres 10

1.4.1 Classification en fonction des valeurs propres 11

1.5 Plan et portrait de phase 14

1.6 Orbite périodique 14

1.7 Cycle limite 15

1.7.1 Stabilité des cycles limites 15

1.8 Stabilité de point d'équilibre 16

2 Méthode de moyennisation du premier ordre **17**

2.1 Introduction 17

2.2 Résultats auxiliaires 18

2.2.1 Formule de Binome de Newton 19

2.2.2 Applications (linéarisation) 21

2.3 Théorème de moyennisation du premier ordre 24

3 Cycles limites pour une variante d'une équation de Riccati généralisée **35**

3.1 **Fonctions Gamma et Bêta** 36

3.1.1 **Fonction Gamma d'Euler** 36

3.1.2 **Fonction Bêta** 37

3.2 Résultats principaux 37

ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو تحليل العلاقة بين ديناميكيات الحلول الدورية المعزولة في الجمل التفاضلية المستوية $\left(\dot{x} = P(x, y);\ \dot{y} = Q(x, y)\right)$ والخصائص التحليلية لمعادلات ريكاتي المعممة. وسيحاول التحليل، باستخدام نهج نوعي وتحويلي، كيف يمكن لبعض تمثيلات معادلة ريكاتي التنبؤ أو وصف وجود الحلول الدورية المعزولة في الجمل غير الخطية.

الكلمات المفتاحية

الجمل الديناميكية، الحلول الدورية المعزولة ، طريقة التشويش، معادلات ريكاتي المعممة

Résumé

L'intention de ce mémoire est d'analyser la relation entre la dynamique des cycles limites dans les systèmes différentiels planaires $(\dot{x} = P(x, y), \ \dot{y} = Q(x, y))$ et les propriétés analytiques des équations de Riccati généralisées. Elle tentera, grace à une approche qualitative et transformationnelle, d'analyser comment certaines représentations de l'équation de Riccati pourraient prédire ou décrire l'existence de cycles limites dans des systèmes non linéaires.

Mots clés

Système dynamique, cycle limite, méthode de la moyennisation, équations de Riccati généralisées.

Abstract

The intention of this memoir is to analyze the relationship between the dynamics of limit cycles in planar differential systems ($\dot{x} = P(x, y)$ $\dot{y} = Q(x, y)$) and the analytical properties of generalized Riccati equations. It will attempt, using a qualitative and transformational approach, to analyze how some representations of the Riccati equation could predict or describe the existence of limit cycles in non-linear systems.

Keywords : Dynamic system, limit cycle, averaging method, generalized Riccati equations.

0.1 Introduction

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à un aspect fondamental de la théorie qualitative des équations différentielles ordinaires : l'étude des cycles limites dans les systèmes différentiels planaires. Introduit par Henri Poincaré à la fin du XIXe siècle, le cycle limite désigne une solution périodique isolée d'un système autonome vers laquelle les trajectoires voisines convergent asymptotiquement, sans jamais l'atteindre. Ce concept, central dans la compréhension du comportement global des solutions, ne peut apparaître que dans les systèmes non linéaires, car les systèmes linéaires, soumis au principe de superposition, ne permettent pas l'existence de telles orbites isolées.

Poincaré a ouvert la voie à une approche géométrique des équations différentielles, en mettant l'accent sur l'étude qualitative des trajectoires plutôt que sur la recherche de solutions explicites. À travers des outils comme la section de Poincaré, il a démontré l'existence de cycles limites dans certains systèmes polynomiaux, tout en soulignant les limites de leur caractérisation analytique.

L'intérêt pour les cycles limites s'est renforcé au XXe siècle grâce aux travaux de Liénard, de Van der Pol et d'Andronov, qui ont montré leur apparition dans des systèmes modélisant des oscillations non linéaires. Par ailleurs, des modèles biologiques comme celui de Lotka-Volterra, bien qu'ils ne présentent pas de cycles limites en eux-mêmes, ont servi de point de départ à des généralisations où ces phénomènes apparaissent.

L'étude des cycles limites fait appel à divers outils mathématiques, notamment les fonctions de Lyapunov pour tester la stabilité, ou encore la transformation du système original en équation de Riccati généralisée. Cette dernière approche, par changement de variables, permet de simplifier certains systèmes planaires complexes afin de faciliter leur analyse qualitative.

Le contenu de ce mémoire est réparti en trois chapitres :

Le premier chapitre : "Notion préliminaire"

comporte un rappel des notions préliminaires des systèmes différentiels. On commence par définir les systèmes dynamiques, le point d'équilibre, la linéarisation des systèmes différentiels non linéaires au voisinage des points d'équilibre, le plan et le portrait de phase, les cycles limites, la stabilité des cycles limites et celle des points d'équilibre.

Le deuxième chapitre : "Méthode de la moyennisation du premier ordre"

Dans ce chapitre, on introduit un important théorème de moyennisation du premier ordre étayé par des exemples. Ce théorème est appliqué pour identifier les cycles limites.

Le troisième chapitre : "Cycles limites pour une variante d'une équation de Riccati généralisée"

étudions les solutions de l'équation de Riccati généralisée en utilisant l'intégrale d'Abel.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons des notions générales et préliminaires essentielles à l'étude qualitative des systèmes dynamiques et des équations différentielles ordinaires. Nous présentons ensuite la notion de point d'équilibre, analysons sa nature ainsi que sa stabilité, et expliquons la signification d'un cycle limite.

1.1 Systèmes dynamiques

Les systèmes dynamiques lisent des phénomènes dans différents domaines, notamment la physique, la biologie, l'économie et le génie. Un automatisme dynamique est un modèle mathématique et un système qui met en graphique dans le temps un état par rapport à un moment donné. C'est un concept associé au temps.

Les systèmes continus peuvent être formalisés à l'aide des équations différentielles, tandis que les systèmes discrets sont décrits par des relations de récurrence.

On considère maintenant le cas du temps continu.

Définition 1.1.1.

Une famille d'applications $\varphi_t : X \to X$ pour $t \geq 0$ telles que $\varphi_0 = Id$

$$\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s \text{ pour tous } t,\ s \geq 0$$

est appelée un semi-flot . Une famille d'applications $\varphi_t : X \to X$ pour $t \in \mathbb{R}$ telles que $\varphi_0 = Id$ et

$$\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s \text{ pour tous } t,\ s \in \mathbb{R}$$

est appelée un flot.

On dit aussi qu'une famille d'applications φ_t est un système dynamique à temps continu ou simplement un système dynamique si elle est un flot ou un semi-flot. Si φ_t est un flot, alors

$$\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_{-t} \circ \varphi_t = \varphi_0 = Id.$$

Donc, chaque application φ_t est inversible et a pour application réciproque $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$.

Un exemple simple d'un flot est un mouvement de translation avec vitesse constante.

Exemple 1.1.1.

Soit $y \in \mathbb{R}^n$. On considère les applications $\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définies par

$$\varphi_t(x) = x + ty \text{ pour } t \in \mathbb{R} \text{ et } x \in \mathbb{R}^n$$

on a $\varphi_0 = Id$ et

$$\begin{aligned} \varphi_{t+s}(x) &= x + (t+s)\,y \\ &= x + sy + ty = \varphi_t \circ \varphi_s(x) \end{aligned}$$

donc, la famille des applications φ_t est un flot.

On souligne que l'expression système dynamique est utilisée à la fois pour les systèmes dynamiques à temps discret et les systèmes dynamiques à temps continu. voir [1].

1.2 Points d'équilibre

Définition 1.2.1.

Un système dynamique non linéaire est souvent représenté sous la forme (voir [2])

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x). \tag{1.1}$$

Un point d'équilibre x_0 est un point où le système s'arrête, c'est-à-dire lorsque

$$f(x_0) = 0, \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

1.3 Linéarisation

Considérons le système (1.1)

Le système

$$\dot{x} = Ax \tag{1.2}$$

où

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right) = Df(x_0),\ 1 \leq i, j \leq n$$

et

$$f(x_0) = 0$$

est appelé linéarisation de (1.1) en x_0. (voir [3])

1.4 Classification des points d'équilibres

La classification des points d'équilibre repose sur l'étude de la matrice jacobienne, définie comme

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres λ_1, λ_2 de J déterminent la nature et la stabilité du point d'équilibre.

1.4.1 Classification en fonction des valeurs propres

On distingue plusieurs types de points d'équilibre :

* Noeud stable : Si λ_1, $\lambda_2 < 0$ le point est un noeud stable ou attractif. Toutes les trajectoires dans son voisinage convergent vers lui.

* Point selle : Si les valeurs propres sont réelles et de signes opposés ($\lambda_1\lambda_2 < 0$) alors le point est une selle. Ce type de point est instable.

* Noeud instable : Si $\lambda_1\lambda_2 > 0$ le point est un noeud instable ou répulsif, car toutes les trajectoires s'éloignent.

* Foyer stable : Si les valeurs propres sont complexes avec une partie réelle négative ($\Re e\,(\lambda) < 0$) le point est un foyer stable. Les trajectoires forment des spirales convergeant vers le point.

* Foyer instable : Si les valeurs propres sont complexes avec une partie réelle positive ($\Re e\,(\lambda) > 0$) le point est un foyer instable avec des trajectoires en spirale s'éloignant du point.

* Centre : Si les valeurs propres sont purement imaginaires ($\Re e\,(\lambda) = 0$) le point est un centre. Les trajectoires forment des cycles fermés indiquant un comportement oscillatoire stable mais non attractif. (voir [4])

Exemple 1.4.1.

considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -2y \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} f\,(x) = -x \\ g\,(x) = -2y \end{cases}$$

maintenant on détermine le point d'équilibre

on résout $f\,(x) = 0$ et $g\,(x) = 0 \Longrightarrow (x, y) = (0, 0)$

alors la matrice jacobienne est

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres sont simplement $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -2$. les deux sont négatives.

Puisque les valeurs propres sont réelles et négatives, le point d'équilibre est un nœud stable (attractif).

Exemple 1.4.2.

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y \\ \dot{y} = 4x - 2y \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} f(x) = 2x + 2y \\ g(x) = 4x - 2y \end{cases}$$

maintenant on détermine le point d'équilibre

on résout $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$.

* La première équation : $x + y = 0 \Longrightarrow y = -x$.

* Substituant dans la seconde équation $4x - 2(-x) = 0 \Longrightarrow 4x + 2x = 0 \Longrightarrow 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Le point d'équilibre est donc $(x, y) = (0, 0)$.

Alors la matrice jacobienne est

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix},$$

les valeurs propres de J sont obtenue en résolvant

$$\det(J - \lambda I) = 0$$

c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

alors

$$(2-\lambda)(-2-\lambda)-(2)(4)=\lambda^2-12$$

donc la solution

$$\lambda^2-12=0 \Longrightarrow \lambda=\pm\sqrt{12}$$

les valeurs propres sont réelles de signes opposés $\lambda_1=\sqrt{12}$, $\lambda_2=-\sqrt{12}$ alors le point d'équilibre est un point selle instable.

Exemple 1.4.3.

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x}=x \\ \dot{y}=y \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} f(x)=x \\ g(x)=y \end{cases}$$

maintenant on détermine le point d'équilibre

$$f(x)=0 \text{ et } g(x)=0 \Longrightarrow (x,y)=(0,0)$$

alors la matrice jacobienne est

$$J=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres sont simplement $\lambda_1=1$ et $\lambda_2=2$, les deux sont positives.

Puisque les valeurs propres sont réelles et positives, le point d'équilibre est un nœud instable (répulsif).

1.5 Plan et portrait de phase

Théorème 1.5.1.

Soit le système planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \tag{1.3}$$

où P et Q sont des polynômes en x et y.

Un portrait de phase est une représentation graphique de l'ensemble des trajectoires dans l'espace des phases d'un système dynamique.

Dans le cas d'un système autonome d'équations différentielles ordinaires à deux variables, les solutions $(x(t), y(t))$ sont représentées sous forme de courbes dans le plan (x, y) appelé orbites.

Les points critiques (ou points d'équilibre) sont les points où le champ vectoriel est nul , Ces points correspondent à des solutions constantes, et leur nature (stable, instable ou semi-stable) dépend des valeurs propres du Jacobien du système.

Le portrait de phase représente l'ensemble des orbites du système ainsi que les points critiques.

L'espace dans lequel évoluent ces trajectoires est appelé le plan des phases. (voir [3])

1.6 Orbite périodique

Définition 1.6.1.

On appelle orbite périodique toute trajectoire fermée $\varphi(t, x)$ du système (1.1) telle qu'il existe un nombre T, vérifiant :

$$\varphi(t + T) = \varphi(t), \tag{1.4}$$

le plus petit réel $T > 0$ qui vérifie cette égalité est appelé période.

1.7 Cycle limite

Définition 1.7.1.

Un cycle limite ζ du système (1.3) est une trajectoire fermée isolée dans l'espace de phases, c'est à dire qu'il existe un voisinage de ζ dans lequel il n'y a pas d'autres courbes fermées.

1.7.1 Stabilité des cycles limites

Théorème 1.7.1.

ζ étant la trajectoire d'un cycle limite, toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines de ζ telle que

soit elles s'enroulent toutes en spirales autour de ζ pour $t \to +\infty$ ou bien $t \to -\infty$.

* Si toutes les trajectoires intérieures et extérieures s'enroulent autour de ζ, pour $t \to +\infty$, le cycle limite est stable.

* Si toutes les trajectoires intérieures et extérieures s'enroulent, toutes en spirale autour de ζ pour $t \to -\infty$, le cycle limite est instable.

Proposition 1.7.1.

Supposons que le système (1.3) a une orbite périodique $(x(t), y(t))$ de période T. Soit l'exposant caractéristique donné par

$$h = \int_0^T \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) (x(t), y(t)) dt. \tag{1.5}$$

Si $h > 0$ (respectivement $h < 0$), alors l'orbite périodique $(x(t), y(t))$ est un cycle limite instable (respectivement stable).

L'orbite périodique $(x(t), y(t))$ est dite un cycle limite hyperbolique si $h \neq 0$. (voir [6])

1.8 Stabilité de point d'équilibre

Définition 1.8.1.

Soit le système

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)) \text{ et } x(t_0) = x_0 \tag{1.6}$$

où $f : R^d \to R^d$ est une fonction vérifiant au moins les conditions de Cauchy Lipschitz (ici on supposera en plus f k-lipschitzienne : ainsi la solution de (1.6) est définie sur un intervalle non borné) et x est une fonction de $[0, +\infty[$ dans R^d, solution de l'équation (1.6).

On prend m un point d'équilibre.

Notation 1.8.1.

$\phi(t, x_0)$ est la solution de (1.6) telle que $\phi(t_0, x_0) = x_0$ On appelle flot l'application $\phi : R^{d+1} \to R^d$ qui a (x_0, t) associe $\phi(t, x_0)$.

* m est dit uniformément stable si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 : \quad \| x_0 - m \| \leq \eta \Rightarrow \| \phi(t, x_0) - m \| \leq \varepsilon,\ \forall t > 0\ (\forall t > t_0)$$

* η ne dépend pas de t_0 : uniforme.

* η dépend de t_0 : classique.

* m est dit uniformément asymptotiquement stable si elle est uniformément stable et si

$$\exists \rho > 0 : \quad \| x_0 - m \| \leq \rho \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \phi(t, x_0) = m$$

* Un équilibre qui n'est pas uniformément stable est dit uniformément instable. (voir [7])

Chapitre 2

Méthode de moyennisation du premier ordre

2.1 Introduction

La méthode de moyennisation est une approche mathématique utilisée pour analyser des systèmes dynamiques où coexistent des évolutions rapides et lentes. Elle joue un rôle clé dans l'étude des cycles limites, qui représentent des trajectoires fermées vers lesquelles un système tend à évoluer de manière répétitive au fil du temps.

Développée dans le cadre des équations différentielles et des systèmes non linéaires, cette méthode a été approfondie grâce aux travaux de Henri Poincaré et de Balthasar van der Pol. Elle est aujourd'hui largement employée dans divers domaines scientifiques et techniques, notamment en physique (circuits électriques, écoulements turbulents), en biologie (rythmes biologiques) et en ingénierie (systèmes oscillants).

En éliminant les fluctuations rapides tout en conservant les caractéristiques essentielles du système, la moyennisation permet de mieux comprendre son comportement global et facilite l'étude de sa dynamique à long terme.

2.2 Résultats auxiliaires

Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + iy$, on appelle conjugué de z et on note $\overline{z} = x - iy$ le nombre complexe.

Soit $z = x + iy$, alors son module vaut : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

* Un nombre complexe sous forme exponentielle s'écrit comme suit $z = |z| \exp(i\theta)$.

* Un nombre complexe sous forme géométrique s'écrit comme suit $z = |z| (\cos\theta + i \sin\theta)$, avec

$$\begin{cases} i \text{ (comme imaginaire) tel que } i^2 = -1, \\ \theta \text{ argument.} \end{cases}$$

On a alors les propriétés fondamentales

* $z.\overline{z} = |z|^2$
* $|z.z'| = |z| . |z'|$
* $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$ si $|z| = 1$.

D'autre part on a

$$\begin{cases} z = \exp(i\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \\ \dfrac{1}{z} = \overline{z} = \exp(-i\theta) = \cos(\theta) - i\sin(\theta) \end{cases}$$

d'après la formule de Moivre on trouve

$$\begin{cases} z^n = \exp(in\theta) = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \\ \dfrac{1}{z^n} = \exp(-in\theta) = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta). \end{cases}$$

Alors, après calcules on obtient

$$\begin{cases} z + \dfrac{1}{z} = 2\cos(\theta) \Longrightarrow \cos(\theta) = \frac{1}{2}(z + \dfrac{1}{z}) \\ z - \dfrac{1}{z} = 2i\sin(\theta) \Longrightarrow \sin(\theta) = \frac{1}{2i}(z - \dfrac{1}{z}) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos(n\theta) \Longrightarrow \cos(n\theta) = \dfrac{1}{2}(z^n + \dfrac{1}{z^n}) \\ z^n - \dfrac{1}{z^n} = 2i\sin(n\theta) \Longrightarrow \sin(n\theta) = \dfrac{1}{2i}(z^n - \dfrac{1}{z^n}) \end{cases}$$

2.2.1 Formule de Binome de Newton

Soit x et y deux nombres réels quelconques, pour tout n entier naturel, la formule du binôme de Newton est comme suit

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + nxy^{n-1} + y^n$$

ou bien, on utilisant les coefficients

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!},$$

avec la notation factorielle

$$k! = k(k-1)(k-2)\times\cdots\times 2\times 1.$$

Alors, on a

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

* Les coefficients $\binom{n}{k}$ sont appelés "*les coefficients binômiaux*" et ils sont caractérisés par la relation

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

et on peut les calcules en utilisant le triangle de pascal

$n \diagdown k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Le nombre sur la ligne n et la colonne k est le coefficient binomial $\left(C_n^k\right)$.

$$\begin{aligned}
\cos^2(\theta) &= (\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}))^2 \\
&= \frac{1}{4}(z+\frac{1}{z})^2 \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{2} C_2^k z^{2-k}(\frac{1}{z})^k \\
&= \frac{1}{4}(C_2^0 z^2 + C_2^1 z(\frac{1}{z}) + C_2^2(\frac{1}{z})^2) \\
&= \frac{1}{4}(z^2+\frac{1}{z^2}+2) \\
&= \frac{1}{4}(\exp(2i\theta)+\exp(-2i\theta)+2) \\
&= \frac{1}{4}(2\cos(2\theta)+2) \\
&= \frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin^2(\theta) &= (\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}))^2 \\
&= -\frac{1}{4}(z-\frac{1}{z})^2 \\
&= -\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{2} C_2^k z^{2-k}(\frac{1}{z})^k \\
&= -\frac{1}{4}(C_2^0 z^2 - C_2^1 z\left(\frac{1}{z}\right) + C_2^2(\frac{1}{z})^2) \\
&= -\frac{1}{4}(z^2+\frac{1}{z^2}-2) \\
&= -\frac{1}{4}(\exp(2i\theta)+\exp(-2i\theta)-2) \\
&= \frac{1}{4}(2-2\cos(2\theta)) \\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\theta).
\end{aligned}$$

2.2.2 Applications (linéarisation)

$$\begin{aligned}
\cos^4(\theta) &= (\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}))^4 = \frac{1}{16}(z+\frac{1}{z})^4 \\
&= \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{4} C_4^k z^{4-k}(\frac{1}{z})^k \\
&= \frac{1}{16}\left(C_4^0 z^4 + C_4^1 z^3\frac{1}{z} + C_4^2 z^2\frac{1}{z^2} + C_4^3 z\left(\frac{1}{z}\right)^3 + C_4^4\left(\frac{1}{z}\right)^4\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(C_4^0 z^4 + C_4^1 z^2 + C_4^2 + C_4^3\left(\frac{1}{z^2}\right) + C_4^4\left(\frac{1}{z^4}\right)\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(z^4+4z^2+6+4\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(z^4+\frac{1}{z^4}+4\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+6\right) \\
&= \frac{1}{16}(z^4+\frac{1}{z^4})+\frac{1}{4}(z^2+\frac{1}{z^2})+\frac{3}{8} \\
&= \frac{1}{16}\left(2\cos 4\theta\right)+\frac{1}{4}\left(2\cos 2\theta\right)+\frac{3}{8} \\
&= \frac{1}{8}\cos 4\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin^4(\theta) &= (\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}))^4 = \frac{1}{16}(z-\frac{1}{z})^4\\
&= \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{4} C_4^k z^{4-k}(\frac{1}{z})^k\\
&= \frac{1}{16}\left(z^4+\frac{1}{z^4}-4\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+6\right)\\
&= \frac{1}{16}\left(z^4+\frac{1}{z^4}\right)-\frac{1}{4}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\frac{3}{8}\\
&= \frac{1}{8}\cos(4\theta)-\frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

Lemme 2.2.1.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit

$$\cos^n(\theta) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{\frac{n}{2}} + \frac{2}{2^n}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{k}\cos((n-2k)\theta)$$

$$\sin^n(\theta) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{\frac{n}{2}} + \frac{2}{2^n}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}(-1)^{\frac{n}{2}-k}\binom{n}{k}\cos((n-2k)\theta)$$

Exemple 2.2.1. On a

$$\begin{aligned}
\cos^6(\theta) &= \frac{1}{2^6}\binom{6}{\frac{6}{2}} + \frac{2}{2^6}\sum_{k=0}^{\frac{6}{2}-1}\binom{6}{k}\cos((6-2k)\theta)\\
&= \frac{1}{64}C_6^3 + \frac{2}{64}\sum_{k=0}^{2} C_6^k\cos((6-2k)\theta)\\
&= \frac{20}{64}+\frac{2}{64}\left(C_6^0\cos 6\theta + C_6^1\cos 4\theta + C_6^2\cos 2\theta\right)\\
&= \frac{5}{16}+\frac{1}{32}\cos 6\theta+\frac{3}{16}\cos 4\theta+\frac{15}{32}\cos 2\theta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sin^6(\theta) &= \frac{1}{2^6}\binom{6}{\frac{6}{2}} + \frac{2}{2^6}\sum_{k=0}^{\frac{6}{2}-1}(-1)^{\frac{6}{2}-k}\binom{6}{k}\cos((6-2k)\theta) \\
&= \frac{1}{64}C_6^3 + \frac{2}{64}\sum_{k=0}^{2}(-1)^{3-k}C_6^k\cos((6-2k)\theta) \\
&= \frac{20}{64} + \frac{2}{64}\left(-C_6^0\cos 6\theta + C_6^1\cos 4\theta - C_6^2\cos 2\theta\right) \\
&= \frac{5}{16} - \frac{1}{32}\cos 6\theta + \frac{3}{16}\cos 4\theta - \frac{15}{32}\cos 2\theta.
\end{aligned}
$$

Lemme 2.2.2.

Pour calculer les intégrales triangulaires on pose

$$
I_{m,n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^m\theta\sin^n\theta d\theta, \text{ où } n, m \in \mathbb{N}
$$

alors, dans cette section, nous allons présenter une série d'exemples qui nous serviront plus tard pour résoudre des systèmes différentiels en utilisant une méthode technique de moyennisation. Ces exemples illustreront différentes situations où cette approche peut être appliquée efficacement.

* $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{2}$
* $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = \frac{1}{2}$
* $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^4\theta d\theta = \frac{3}{8}$
* $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\sin^2\theta d\theta = \frac{1}{8}$
* $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^4\theta d\theta = \frac{3}{8}$
* $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^6\theta d\theta = \frac{5}{16}$

* $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \cos^4\theta \sin^2\theta d\theta = \frac{1}{16}$
* $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin^4\theta d\theta = \frac{1}{16}$
* $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \sin^6\theta d\theta = \frac{5}{16}$

2.3 Théorème de moyennisation du premier ordre

Nous allons maintenant énoncer le théorème de moyennisation. Pour cela, considérons le système différentiel à valeur initiale suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \varepsilon F(t,x) + \varepsilon^2 G(t,x,\varepsilon) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

avec $x \in D \subset R^n$, D un domaine borné et $t \geq 0$. On suppose que $F(t,x)$ et $G(t,x,\varepsilon)$ sont T-périodiques en t.

Le système moyenné associé au système (2.1) est défini par

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \varepsilon f^0(y) \\ y(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

où

$$f^0(y) = \frac{1}{T}\int_0^T F(t,y)dt.$$

Forme générale

Soit le système différentiel suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon p_n(x,y) \\ \dot{y} = -x + \varepsilon q_n(x,y) \end{cases} \tag{2.3}$$

avec $p_n(x,y)$ et $q_n(x,y)$ sont des polynômes de dégrées n.

D'après les calcules, l'équation (2.1) devient

$$\dot{x} = \varepsilon F(x) + \varepsilon^2 G(\varepsilon, x)$$

où

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta, r)d\theta \tag{2.4}$$

avec

$$\begin{cases} x = r\ \cos\theta \\ y = r\ \sin\theta \end{cases}$$

Exemple 2.3.1. Soit L'équation

$$\ddot{x} + \varepsilon f(x)\dot{x} + x = 0$$

qui est équivalente au système (on pose $\dot{x} = y$))

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \ddot{x} = -x - \varepsilon f(x)y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon(0) \\ \dot{y} = -x - \varepsilon f(x)y. \end{cases}$$

On pose

$$\begin{cases} x = r\ \cos\theta \\ y = r\ \sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \tan\theta \Rightarrow \theta = \arctan\frac{y}{x} \end{cases}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{r\cos\theta\ \dot{x} + r\sin\theta\ \dot{y}}{r} \\ &= \cos\theta\ \dot{x} + \sin\theta\ \dot{y} \end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta} &= \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\
&= \frac{-y}{x^2}\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\dot{x} + \frac{1}{x}\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\dot{y} \\
&= \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2+y^2} \\
&= \frac{r\cos\theta\ \dot{y} - r\sin\theta\ \dot{x}}{r^2} \\
&= \frac{1}{r}\left(\cos\theta\ \dot{y} - \sin\theta\ \dot{x}\right)
\end{aligned}
$$

alors

$$
\begin{cases}
\dot{r} = \cos\theta\ \dot{x} + \sin\theta\ \dot{y} \\
\dot{\theta} = \frac{1}{r}\left(\cos\theta\ \dot{y} - \sin\theta\ \dot{x}\right)
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{r} &= \cos\theta\ \dot{x} + \sin\theta\ \dot{y} \\
&= \cos\theta(r\sin\theta) + \sin\theta(-r\cos\theta - \varepsilon f(r\cos\theta) r\sin\theta) \\
&= r\cos\theta\sin\theta - r\cos\theta\sin\theta - \varepsilon r\sin^2\theta f(r\cos\theta) \\
&= -\varepsilon r\sin^2\theta f(r\cos\theta)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta} &= \frac{1}{r}\left(\cos\theta\ \dot{y} - \sin\theta\ \dot{x}\right) \\
&= \frac{1}{r}\left(\cos\theta\left(-r\cos\theta - \varepsilon f(r\cos\theta) r\sin\theta\right) - \sin\theta\ r\sin\theta\right) \\
&= \frac{1}{r}\left(-r\cos^2\theta - \varepsilon r\cos\theta\ \ \sin\theta\ f(r\cos\theta) - r\sin^2\theta\right) \\
&= -\cos^2\theta - \sin^2\theta - \varepsilon\cos\theta\ \ \sin\theta\ f(r\cos\theta) \\
&= -1 - \varepsilon\cos\theta\ \ \sin\theta\ f(r\cos\theta)
\end{aligned}
$$

donc

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{dr}{dt} \\ \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \end{cases} \Rightarrow \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \frac{dr}{d\theta} = \frac{-\varepsilon r \sin^2\theta f(r\cos\theta)}{-1+\varepsilon\cos\theta\sin\theta f(r\cos\theta)}.$$

Utilisant la division euclidienne on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon r \sin^2\theta f(r\cos\theta) + \varepsilon^2\left(-r\cos\theta\ \sin^3\theta\ f^2(r\cos\theta)\right) + \cdots \\ &= \varepsilon F(\theta, r) + \varepsilon^2 G(\varepsilon, \theta, r). \end{aligned}$$

Alors, la solution est sous la forme

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r\sin^2\theta f(r\cos\theta)d\theta$$

Les zéros de $f^0(r)$ sont les cycles limites (solution périodique isolé).

Théorème 2.3.1.

Considérons le système (2.1) avec x, y, $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, t, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_0 > 0$ (ε_0 est une constante arbitraire), $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Et supposons que

(1) $F, \partial F/\partial x, \partial^2 F/\partial x^2, G, \partial G/\partial x$ sont définies, continues et bornées par une constante L indépendante de ε dans $[0, \infty) \times D$ et $\varepsilon \in (0.\varepsilon_0]$.

(2) T est une constante indépendante de ε.

(3) La solution $y(t)$ appartient à D pendant un temps de l'ordre $\frac{1}{\varepsilon}$.

Alors les propriétés sont vérifiées.

(a) La différence $x(t) - y(t)$ est de l'ordre de ε pendant un temps de l'ordre de $1/\varepsilon$.

(b) Si p est un point d'équilibre du système moyenne (2.1), tel que

$$\det(D_x f^0(p)) \neq 0.$$

Alors pour $|\varepsilon| > 0$, suffisamment petit, il existe une solution T-périodique $x_\varepsilon(t)$ du système (2.1) telle que

$$lim_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon(0) = p$$

(c) $y = p$ est un point singulier hyperbolique du système moyenné (2.2) alors, pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit et non nul, le système (2.1) admet une unique orbite périodique $x_\varepsilon(t)$ qui est également hyperbolique et subit la même stabilité que p.

Exemple 2.3.2.

Soit le système (van der pol)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(x^2 - 1)y \end{cases}$$

En coordonnées polaires $x = r\,\cos\theta$, $y = r\,\sin\theta$

on a

$$\begin{cases} \dot{r} = \cos\theta\ \dot{x} + \sin\theta\ \dot{y} \\ \dot{\theta} = \frac{1}{r}(\cos\theta\ \dot{y} - \sin\theta\ \dot{x}) \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \cos\theta\ \dot{x} + \sin\theta\ \dot{y} \\ &= \cos\theta\,(r\sin\theta) + \sin\theta\left(-r\cos\theta + \varepsilon\left(r^2\cos^2\theta - 1\right)r\sin\theta\right) \\ &= r\cos\theta\ \sin\theta - r\cos\theta\ \sin\theta + \varepsilon(r^3\cos^2\theta\ \sin^2\theta - r\sin^2) \\ &= \varepsilon r\left(\cos^2\theta\sin^2\theta\ r^2 - \sin^2\theta\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} r\dot{\theta} &= \cos\theta\ \dot{y} - \sin\theta\ \dot{x} \\ &= \cos\theta\left(-r\cos\theta + \varepsilon\left(r^2\cos^2\theta - 1\right)r\sin\theta\right) - \sin\theta\,(r\sin\theta) \\ &= -r\cos^2\theta - r\sin^2\theta + \varepsilon r(r^2\cos^3\theta\ \sin\theta - \cos\theta\ \sin\theta) \\ &= -r + \varepsilon r(r^2\cos^3\theta\ \sin\theta - \cos\theta\ \sin\theta) \end{aligned}$$

alors

$$\dot{\theta} = -1 + \varepsilon(r^2\cos^3\theta\ \sin\theta - \cos\theta\ \sin\theta)$$

donc

$$
\begin{aligned}
\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} &= \frac{dr}{d\theta} \\
&= \frac{\varepsilon r\left(r^2\cos^2\theta\sin^2\theta\ -\sin^2\theta\right)}{-1+\varepsilon\left(r^2\cos^3\theta\ \sin\theta-\cos\theta\ \sin\theta\right)} \\
&= \underbrace{\varepsilon r\left(\sin^2\theta-r^2\ \cos^2\theta\ \sin^2\theta\right)}_{=F(r,\theta)}+\varepsilon^2G(\varepsilon,r,\theta).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f^0(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\theta,r)d\theta \\
&= r\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\ d\theta\ -r^3\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\ \sin^2\theta\ d\theta \\
&= \frac{1}{2}r-\frac{1}{8}r^3 \\
&= \frac{1}{8}r(4-r^2).
\end{aligned}
$$

Alors

$$f^0(r)=0\Rightarrow 4-r^2=0\Rightarrow r=2.$$

Donc, le système admet un seul cycle limite d'amplitude 2.

$$\left[\frac{\partial f}{\partial r}\right]_{r=2}=\left[\frac{1}{2}-\frac{3}{8}r^2]\right]_{r=2}=-1<0$$

donc le cycle limite d'amplitude 2 est stable.

Exemple 2.3.3.

Soit le système

$$
\begin{cases}
\dot{x}=y+\varepsilon(3x-4x^3) \\
\dot{y}=-x+\varepsilon(6-x^2+2x^4)y.
\end{cases}
$$

En coordonnées polaires $x=r\ \cos\theta$, $y=r\ \sin\theta$

on a

$$\begin{cases} \dot r = \cos\theta\ \dot x + \sin\theta\ \dot y \\ \dot\theta = \frac{1}{r}(\cos\theta\ \dot y - \sin\theta\ \dot x) \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} \dot r &= \cos\theta\ \dot x + \sin\theta\ \dot y \\ &= \cos\theta\,[r\sin\theta + \varepsilon(3r\cos\theta - 4r^3\cos^3\theta)] + \sin\theta\,[(-r\cos\theta + \varepsilon(6 - r^2\cos^2\theta + 2r^4\cos^4\theta)r\sin\theta] \\ &= \varepsilon\left(3r\cos^2\theta - 4r^3\cos^4\theta + 6r\sin^2\theta - r^3\cos^2\theta\ \sin^2\theta + 2r^5\cos^4\theta\ \sin^2\theta\right) \\ &= \varepsilon r\left(3\cos^2\theta + 6\sin^2\theta - (4\cos^4\theta + \cos^2\theta\ \sin^2\theta)r^2 + 2\cos^4\theta\ \sin^2\theta\ r^4\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} r\dot\theta &= \cos\theta\ \dot y - \sin\theta\ \dot x \\ &= \cos\theta\left[-r\cos\theta + \varepsilon(6 - r^2\cos^2\theta + 2r^4\cos^4\theta)r\sin\theta\right] - \sin\theta\left[r\sin\theta + \varepsilon(3r\cos\theta - 4r^3\cos^3\theta)\right] \\ &= -r + \varepsilon r\left(6\cos\theta\ \sin\theta - 3\cos\theta\ \sin\theta - r^2\left(\cos^3\theta - 4\cos^3\theta\ \right)\sin\theta + 2r^4\cos^5\theta\ \sin\theta\right) \\ &= -r + \varepsilon\left(2r^5\sin\theta\cos^5\theta + 3r^3\sin\theta\cos^3\theta + 3r\sin\theta\cos\theta\right) \end{aligned}$$

donc

$$\dot\theta = -1 + \varepsilon\left(2r^4\sin\theta\cos^5\theta + 3r^2\sin\theta\cos^3\theta + 3\sin\theta\cos\theta\right)$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\dot r}{\dot\theta} &= \frac{dr}{d\theta} \\ &= \frac{\varepsilon r\left(3\cos^2\theta + 6\sin^2\theta - (4\cos^4\theta + \cos^2\theta\ \sin^2\theta)r^2 + 2\cos^4\theta\ \sin^2\theta\ r^4\right)}{-1 + \varepsilon\left(2r^4\sin\theta\cos^5\theta + 3r^2\sin\theta\cos^3\theta + 3\sin\theta\cos\theta\right)} \\ &= \varepsilon\Bigg[\underbrace{r\left(-3\cos^2\theta - 6\sin^2\theta + (4\cos^4\theta + \cos^2\theta\ \sin^2\theta)r^2 - 2\cos^4\theta\ \sin^2\theta\ r^4\right)}_{=F(r,\theta)}\Bigg] + \varepsilon^2 G(\varepsilon, r, \theta) \end{aligned}$$

La solution donc

$$
\begin{aligned}
f^0(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta,r)d\theta \\
&= \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(-3\cos^2\theta - 6\sin^2\theta + (4\cos^4\theta + \cos^2\theta\ \sin^2\theta)r^2 - 2\cos^4\theta\ \sin^2\theta\ r^4\right) d\theta \\
&= r\left(-\frac{3}{2} - \frac{6}{2} + \frac{12}{8}r^2 + \frac{1}{8}r^2 - \frac{2}{16}r^4\right) \\
&= r\left(-\frac{9}{2} + \frac{13}{8}r^2 - \frac{1}{8}r^4\right) \\
&= -\frac{1}{8}r(r^4 - 13r^2 + 36) \\
&= -\frac{1}{8}r(r^2-4)(r^2-9).
\end{aligned}
$$

Alors

$$f^0(r) = 0 \text{ implique } r^2 - 4 = 0 \text{ ou } r^2 - 9 = 0$$

Donc le système admet deux cycles limites d'amplitude 2 et 3.

On a

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{df}{dr}\right]_{r=2} &= \left[-\frac{9}{2} + \frac{39}{8}r^2 - \frac{5}{8}r^4\right]_{r=2} \\
&= -\frac{9}{2} + \frac{39}{2} - 10 \\
&= 5 > 0
\end{aligned}
$$

donc le cycle limite d'amplitude 2 est instable.

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{df}{dr}\right]_{r=3} &= \left[-\frac{9}{2} + \frac{39}{8}r^2 - \frac{5}{8}r^4\right]_{r=3} \\
&= -\frac{9}{2} + \frac{351}{8} - \frac{405}{8} \\
&= -\frac{45}{4} < 0
\end{aligned}
$$

donc le cycle limite d'amplitude 3 est stable.

Exemple 2.3.4.

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon(-\frac{5}{2304}x - \frac{49}{288}x^5) \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(\frac{35}{288}x^2 + x^6)y \end{cases}$$

En coordonnées polaires $x = r\,\cos\theta$, $y = r\,\sin\theta$

on a

$$\begin{cases} \dot{r} = \cos\theta\ \dot{x} + \sin\theta\ \dot{y} \\ \dot{\theta} = \frac{1}{r}(\cos\theta\ \dot{y} - \sin\theta\ \dot{x}) \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \cos\theta\ \dot{x} + \sin\theta\ \dot{y} \\
&= \cos\theta \left[r\sin\theta + \varepsilon(-\frac{5}{2304} r\cos\theta - \frac{49}{288} r^5 \cos^5\theta) \right] \\
&\quad + \sin\theta \left[-r\cos\theta + \varepsilon(\frac{35}{288} r^2\cos^2\theta + r^6\cos^6\theta) r\sin\theta \right] \\
&= \varepsilon r \left(-\frac{5}{2304}\cos^2\theta + \frac{35}{288} r^2 \cos^2\theta \sin^2\theta - \frac{49}{288} r^4 \cos^6\theta + r^6\cos^6\theta\ \sin^2\theta \right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
r\dot{\theta} &= \cos\theta\ \dot{y} - \sin\theta\ \dot{x} \\
&= \cos\theta \left[-r\cos\theta + \varepsilon(\frac{35}{288} r^2\cos^2\theta + r^6\cos^6\theta) r\sin\theta \right] \\
&\quad - \sin\theta \left[r\sin\theta + \varepsilon(-\frac{5}{2304} r\cos\theta - \frac{49}{288} r^5 \cos^5\theta) \right] \\
&= -r\cos^2\theta - r\sin^2\theta + \varepsilon \begin{pmatrix} \frac{35}{288} r^3\cos^3\theta\ \sin\theta + r^7\cos^7\theta\ \sin\theta + \frac{5}{2304} r\cos\theta\ \sin\theta \\ +\frac{49}{288} r^5\cos^5\theta\ \sin\theta \end{pmatrix} \\
&= -r + \varepsilon r \left(\frac{5}{2304}\cos\theta\ \sin\theta + \frac{35}{288} r^2\cos^3\theta\ \sin\theta + \frac{49}{288} r^4 \cos^5\theta\ \sin\theta + r^6\cos^7\theta\ \sin\theta \right)
\end{aligned}$$

alors

$$\dot{\theta} = -1 + \varepsilon \left(\frac{5}{2304} \cos\theta \ \sin\theta + \frac{35}{288} r^2 \cos^3\theta \ \sin\theta + \frac{49}{288} r^4 \cos^5\theta \ \sin\theta + r^6 \cos^7\theta \ \sin\theta \right)$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} &= \frac{dr}{d\theta} \\
&= \frac{\varepsilon r \left(-\frac{5}{2304} \cos^2\theta + \frac{35}{288} r^2 \cos^2\theta \sin^2\theta - \frac{49}{288} r^4 \cos^6\theta + r^6 \cos^6\theta \ \sin^2\theta \right)}{-1 + \varepsilon \left(\frac{5}{2304} \cos\theta \ \sin\theta + \frac{35}{288} r^2 \cos^3\theta \ \sin\theta + \frac{49}{288} r^4 \cos^5\theta \ \sin\theta + r^6 \cos^7\theta \ \sin\theta \right)} \\
&= \varepsilon \left[\underbrace{r \left(\frac{5}{2304} \cos^2\theta - \frac{35}{288} r^2 \cos^2\theta \sin^2\theta + \frac{49}{288} r^4 \cos^6\theta - r^6 \cos^6\theta \ \sin^2\theta \right)}_{=F(r,\theta)} \right] + \varepsilon^2 G(\varepsilon, r, \theta).
\end{aligned}$$

La solution donc

$$\begin{aligned}
f^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta, r) d\theta \\
&= \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{2304} \cos^2\theta - \frac{35}{288} r^2 \cos^2\theta \sin^2\theta + \frac{49}{288} r^4 \cos^6\theta - r^6 \cos^6\theta \ \sin^2\theta \right) d\theta \\
&= r \left(\frac{5}{4608} - \frac{35}{2304} r^2 + \frac{245}{4608} r^4 - \frac{5}{128} r^6 \right) \\
&= -\frac{5}{128} r \left(r^6 - \frac{49}{36} r^4 + \frac{7}{18} r^2 - \frac{1}{36} \right) \\
&= -\frac{5}{128} r \left(r^2 - \frac{1}{4} \right) \left(r^2 - \frac{1}{9} \right) \left(r^2 - 1 \right).
\end{aligned}$$

Alors

$$f^0(r) = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2}, \ r = \frac{1}{3} \text{ ou } r = 1$$

donc, le système admet trois cycles limites d'amplitudes $\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3}$ et 1.

On a

$$\begin{aligned}
\left[\frac{df}{dr}\right]_{r=\frac{1}{2}} &= \left[\frac{5}{4608} - \frac{105}{2304}r^2 + \frac{1225}{4608}r^4 - \frac{35}{128}r^6\right]_{r=\frac{1}{2}} \\
&= \frac{25}{12\,288} > 0
\end{aligned}$$

donc le cycle limite d'amplitude $\frac{1}{2}$ est instable.

$$\begin{aligned}
\left[\frac{df}{dr}\right]_{r=\frac{1}{3}} &= \left[\frac{5}{4608} - \frac{105}{2304}r^2 + \frac{1225}{4608}r^4 - \frac{35}{128}r^6\right]_{r=\frac{1}{3}} \\
&= -\frac{25}{23\,328} < 0
\end{aligned}$$

donc le cycle limite d'amplitude $\frac{1}{3}$ est stable.

$$\begin{aligned}
\left[\frac{df}{dr}\right]_{r=1} &= \left[\frac{5}{4608} - \frac{105}{2304}r^2 + \frac{1225}{4608}r^4 - \frac{35}{128}r^6\right]_{r=1} \\
&= -\frac{5}{96} < 0
\end{aligned}$$

donc le cycle limite d'amplitude 1 est stable.

Chapitre 3

Cycles limites pour une variante d'une équation de Riccati généralisée

Résumé

Dans ce chapitre, nous fournissons une limite inférieure pour le nombre maximal de cycles limites entourant l'origine des systèmes $(\dot{x}, \dot{y} = \ddot{x})$ donnée par une variante de l'équation de Riccati généralisée

$$\ddot{x} + \varepsilon x^{2n+1}\dot{x} + bx^{4n+3} = 0,$$

où $b > 0, b \in \mathbb{R}$, n est un entier non négatif et ε est un petit paramètre. L'outil de démonstration de ce résultat utilise des intégrales abéliennes.

Commençons tout d'abord par définir deux types de fonctions spéciales.

3.1 Fonctions Gamma et Bêta

3.1.1 Fonction Gamma d'Euler

En mathématique, la fonction Gamma est une fonction complexe elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexe (voir [8]).

Définition 3.1.1. La fonction Gamma $\Gamma(z)$ a été introduite par Euler en 1729, elle est définie par l'intégrale

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \ (z \in \mathbb{C}, \quad Re(z) > 0).$$

Exemples 3.1.1.

1. Pour $z = 1$, on a

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \\ &= \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1. \end{aligned}$$

2. Soit $z = \frac{1}{2}$, pour calcule $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ on utilise le changement de variable $s = \sqrt{t}$, on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds \\ &= 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Lemme 3.1.1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $Re(z) > 0$, $n \in N$, on a

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma\left(n+\tfrac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}.$$

3.1.2 Fonction Bêta

Définition 3.1.2. (voir [9]**).** La fonction Bêta (ou l'intégrale d'Euler de première espèce) est définie pour tous nombres complexes p et q de parties réelles strictement positives par

$$\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt, \quad (p, q \in \mathbb{C}, \quad Re(p) > 0, \quad Re(q) > 0).$$

Proposition 3.1.1. La fonction Beta est exprimée à l'aide de la fonction Gamma par la relation suivante

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Propriétés

$\beta(p,q) = \beta(q,p)$, (Symétrique).

$\beta(p,1) = \frac{1}{p}$.

3.2 Résultats principaux

Quelques variantes de l'équation de Riccati généralisée

$$\ddot{x} + \varepsilon x^{2n+1}\dot{x} + bx^{4n+3} = 0 \tag{3.1}$$

En premier ordre les auteurs ont étudié principalement la variante suivante de l'équation (3.1)

$$\ddot{x} + (2n+3)x^{2n+1}\dot{x} + x^{4n+3} + \omega^2 x = 0$$

Montrant numériquement que cette équation différentielle présente des oscillations isochrones. Dans le deuxième, les auteurs étudient la variante de l'équation (3.1)

$$\ddot{x} + (2n+3)x^{2n+1}\dot{x} + x^{4n+3} + \omega^2 x^{2n+1} = 0$$

Et ils trouvent l'expression analytique de certaines solutions particulières.

Maintenant, nous étudierons la variante suivante de l'équation de Riccati généralisée (3.1)

$$\ddot{x} + \varepsilon x^{2n+1}\dot{x} + bx^{4n+3} + \varepsilon a(x + yq(x)) = 0 \qquad (3.2)$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b \neq 0$, n est un entier non négatif, ε est un petit paramètre et $q(x)$ est un polynôme de degré m.

L'équation (3.2) est écrite comme suit

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -bx^{4n+3} - \varepsilon(x^{2n+1}y + a(x + yq(x)) \end{cases} \qquad (3.3)$$

ou de façon équivalente sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} + \varepsilon P(x, y) \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \varepsilon Q(x, y) \end{cases} \qquad (3.4)$$

où

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = bx^{4n+3} \\ \frac{\partial H}{\partial y} = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} H(x, y) = \frac{b}{4n+4}x^{4n+4} + \varphi(y) \\ \frac{\partial H}{\partial y} = \varphi'(y) = y \Rightarrow \varphi(y) = \frac{1}{2}y^2 \end{cases}$$

donc

$$H(x, y) = \frac{b}{4n+4}x^{4n+4} + \frac{1}{2}y^2 \qquad (3.5)$$

et

$$P(x,y) = 0\ ,\ Q(x,y) = x^{2n+1}y + a(x + yq(x)).$$

Observons que pour $b > 0$ il existe une famille d'ovales $\gamma_h \subset H^{-1}(h)$ en continu dépendant d'un paramètre $h > 0$ et variant dans les composantes compactes de $H^{-1}(h)$. De plus, tous les ovales γ_h remplissent le plan $\mathbb{R}^2$ lorsque h varie sur tous les nombres réels positifs. Ces ovales sont des orbites périodiques du système hamiltonien (3.4) avec $\varepsilon = 0$.

L'objectif est de trouver le nombre maximum de valeurs de h (que nous désignerons par h^*) pour lequel il bifurque à partir de γ_h un cycle limite du système différentiel (3.4) pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit.

Théorème 3.2.1.

Pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petits il y a des systèmes (3.3) avec $b > 0$ ayant m cycles limites $\tau_{h_m^*}$ quand $\varepsilon \to 0$ tendent à des orbites périodiques $\gamma_{h_m^*}$ du système hamiltonien (3.3) avec $b > 0$ et $\varepsilon = 0$. En outre, il y a des polynômes $q(x)$ pour lesquels le système différentiel (3.3) avec $b > 0$ et $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit a exactement m cycles limites.

Théorème 3.2.2.

Supposons qu'il y ait une famille d'ovales $\gamma_h \subset H^{-1}(h)$ continu dépendant de $h \in (a,b)$.

Définir l'intégrale abélienne comme

$$I(h) = \int_{\gamma_h} P(x,y)dy - Q(x,y)dx \tag{3.6}$$

s'il existe un $h^* \in (a,b)$ tel que $I(h^*) = 0$ et $I'(h^*) \neq 0$ alors pour ε suffisamment petit, le système hamiltonien (3.4) a au plus un cycle limite τ_{h^*} qui tend à γ_{h^*} quand $\varepsilon \to 0$.

Nous écrivons d'abord le polynôme $q(x) = \sum_{j=0}^{m} q_j x^j$ Notez que le système non perturbé (3.2) (avec $\varepsilon = 0$) est hamiltonien avec le hamiltonien H donné dans (3.5). Les orbites périodiques du système non perturbé (3.2) avec $h > 0$ sont les ovales γ_h. Nous allons maintenant utiliser le théorème 3.2.2 et ainsi calculer l'intégrale abélienne $I(h)$ donnée dans (3.6). Nous avons

$$\begin{aligned}
I(h) &= \int\int_{H(x,y)\leq h} \frac{\partial}{\partial y}\left(x^{2n+1}y + a\left(x + yq\left(x\right)\right)\right) dxdy \\
&= \int\int_{H(x,y)\leq h} \left(x^{2n+1} + aq\left(x\right)\right) dxdy \\
&= \int\int_{H(x,y)\leq h} x^{2n+1} dxdy + a\int\int_{H(x,y)\leq h} q(x) dxdy \\
&= \int\int_{H(x,y)\leq h} x^{2n+1} dxdy + a\int\int_{H(x,y)\leq h} \sum_{j=0}^{m} q_j x^j dxdy \\
&= \int\int_{H(x,y)\leq h} x^{2n+1} dxdy + a\sum_{j=0}^{m} q_j \int\int_{H(x,y)\leq h} x^j dxdy.
\end{aligned}$$

On a

$$H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{b}{4n+4}x^{4n+4}.$$

On pose

$$H(x,y) = h$$

alors

$$h = \frac{1}{2}y^2 + \frac{b}{4n+4}x^{4n+4}$$

ou

$$2h = y^2 + \frac{b}{2n+2}x^{4n+4}$$

donc

$$y = \pm\sqrt{2h - \frac{b}{2\left(n+1\right)}x^{4(n+1)}}.$$

On prend

$$Y = \sqrt{2h - \frac{b}{2\left(n+1\right)}x^{4(n+1)}}$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_{-Y}^{Y} dy &= [y]_{-\sqrt{2h-\frac{b}{2(n+1)}x^{4(n+1)}}}^{\sqrt{2h-\frac{b}{2(n+1)}x^{4(n+1)}}} \\ &= \sqrt{2h - \frac{b}{2\,(n+1)}x^{4(n+1)}} + \sqrt{2h - \frac{b}{2\,(n+1)}x^{4(n+1)}} \\ &= 2\sqrt{2h - \frac{b}{2\,(n+1)}x^{4(n+1)}}\end{aligned}$$

Alors

$$I(h) = 2\int_{-\bar{x}}^{\bar{x}} x^{2n+1}\left(2h - \tfrac{b}{2(n+1)}x^{4(n+1)}\right)^{\frac{1}{2}} dx + 2a\sum_{j=0}^{m} q_j \int_{-\bar{x}}^{\bar{x}} x^j \left(2h - \tfrac{b}{2(n+1)}x^{4(n+1)}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

où

$$\bar{x} = \left(\frac{4h(n+1)}{b}\right)^{\frac{1}{4(n+1)}}.$$

Pour $y = 0$ on trouve

$$2h = \frac{b}{2\,(n+1)}x^{4(n+1)} \Rightarrow x^{4(n+1)} = \frac{4h(n+1)}{b} \Rightarrow \bar{x} = \left(\frac{4h(n+1)}{b}\right)^{\frac{1}{4(n+1)}}.$$

Donc

$$\int_{-\bar{x}}^{\bar{x}} x^j \left(2h - \frac{b}{2\,(n+1)}x^{4(n+1)}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \sqrt{2h}\int_{-\bar{x}}^{\bar{x}} x^j \left(1 - \frac{b}{4h\,(n+1)}x^{4(n+1)}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

on pose

$$t = \frac{b}{4h\,(n+1)}x^{4(n+1)} \Rightarrow x = \left(\frac{4h\,(n+1)}{b}\right)^{\frac{1}{4(n+1)}} t^{\frac{1}{4(n+1)}}$$

alors

$$dx = \left(\frac{4h\,(n+1)}{b}\right)^{\frac{1}{4(n+1)}} \frac{1}{4\,(n+1)} t^{\frac{1}{4(n+1)}-1} dt$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\int_{-\bar{x}}^{\bar{x}} x^j \left(2h - \frac{b}{2(n+1)} x^{4(n+1)}\right)^{\frac{1}{2}} dx \\
= \ & 2\sqrt{2h} \int_0^1 \left(\frac{4h(n+1)}{b}\right)^{\frac{j}{4(n+1)}} t^{\frac{j}{4(n+1)}} (1-t)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{4h(n+1)}{b}\right)^{\frac{1}{4(n+1)}} \frac{1}{4(n+1)} t^{\frac{1}{4(n+1)}-1} dt \\
= \ & 2\sqrt{2h} \int_0^1 \left(\frac{4h(n+1)}{b}\right)^{\frac{j}{4(n+1)}} t^{\frac{j+1}{4(n+1)}-1} (1-t)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{4h(n+1)}{b}\right)^{\frac{1}{4(n+1)}} \frac{1}{4(n+1)} dt \\
= \ & 2\sqrt{2h} \left(\frac{4h(n+1)}{b}\right)^{\frac{j+1}{4(n+1)}} \frac{1}{4(n+1)} \int_0^1 t^{\frac{j+1}{4(n+1)}-1} (1-t)^{\frac{1}{2}} dt.
\end{aligned}$$

D'autre part on a la fonction β définit comme suit

$$\beta(a,b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt$$

alors

$$\int_0^1 t^{\frac{j+1}{4(n+1)}-1} (1-t)^{\frac{1}{2}} dt = \beta\left(\frac{j+1}{4(n+1)}, \frac{3}{2}\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_{-\bar{x}}^{\bar{x}} x^j \left(2h - \frac{b}{2(n+1)} x^{4(n+1)}\right)^{\frac{1}{2}} dx &= 2^{\frac{3}{2}} h^{\frac{1}{2}} \frac{(4(n+1))^{\frac{j+1}{4(n+1)}}}{b^{\frac{j+1}{4(n+1)}}} h^{\frac{j+1}{4(n+1)}} (4(n+1))^{-1} \beta\left(\frac{j+1}{4(n+1)}, \frac{3}{2}\right) \\
&= 2^{\frac{3}{2}} \frac{(4(n+1))^{\frac{j+1}{4(n+1)}-1}}{b^{\frac{j+1}{4(n+1)}}} h^{\frac{j+1}{4(n+1)}+\frac{1}{2}} \beta\left(\frac{j+1}{4(n+1)}, \frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

En outre on a la fonction Γ définit comme suit

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$$

et

$$\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Alors

$$\beta\left(\frac{j+1}{4\left(n+1\right)},\frac{3}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{j+1}{4(n+1)}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{j+1}{4(n+1)}+\frac{3}{2}\right)}$$

on a

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \left(\frac{3}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}-1\right)\\ &= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{j+1}{4\left(n+1\right)}+\frac{3}{2}\right) &= \left(\frac{j+1}{4\left(n+1\right)}+\frac{3}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{j+1}{4\left(n+1\right)}+\frac{3}{2}-1\right)\\ &= \left(\frac{j+1}{4\left(n+1\right)}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{j+1}{4\left(n+1\right)}+\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\beta\left(\frac{j+1}{4\left(n+1\right)},\frac{3}{2}\right) &= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{j+1}{4(n+1)}\right)}{\left(\frac{j+1}{4(n+1)}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{j+1}{4(n+1)}+\frac{1}{2}\right)}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{2n+2}{j+2n+3}\frac{\Gamma\left(\frac{j+1}{4(n+1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{j+1}{4(n+1)}+\frac{1}{2}\right)}\\ &= \sqrt{\pi}\frac{2n+2}{j+2n+3}\frac{\Gamma\left(\frac{j+1}{4(n+1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{j+2n+3}{4n+4}\right)}\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\int_{-\bar{x}}^{\bar{x}} x^j \left(2h - \frac{b}{2(n+1)} x^{4(n+1)}\right)^{\frac{1}{2}} dx &= 2^{\frac{3}{2}} \frac{(4(n+1))^{\frac{j+1}{4(n+1)}-1}}{b^{\frac{j+1}{4(n+1)}}} h^{\frac{j+1}{4(n+1)}+\frac{1}{2}} \sqrt{\pi} \frac{2n+2}{j+2n+3} \frac{\Gamma\left(\frac{j+1}{4(n+1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{j+2n+3}{4n+4}\right)} \\
&= 2^{\frac{j+n+2}{2n+2}} \sqrt{\pi}(n+1)^{\frac{j+1}{4n+4}} b^{-\frac{j+1}{4n+4}} h^{\frac{j+2n+3}{4n+4}} \frac{1}{j+2n+3} \frac{\Gamma\left(\frac{j+1}{4(n+1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{j+2n+3}{4n+4}\right)}
\end{aligned}$$

Posons

$$B_{j,n} = \frac{2^{\frac{j+n+2}{2n+2}} \sqrt{\pi}(n+1)^{\frac{j+1}{4n+4}} b^{-\frac{j+1}{4n+4}} \Gamma\left(\frac{j+1}{4n+4}\right)}{(j+2n+3)\Gamma\left(\frac{j+2n+3}{4n+4}\right)}$$

donc

$$\begin{aligned}
I(h) &= 2a \sum_{j=0}^{m} q_j B_{j,n} h^{\frac{j+2n+3}{4n+4}} \\
&= 2a \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} q_{2k} B_{2k,n} h^{\frac{2k+2n+3}{4n+4}}.
\end{aligned}$$

On pose

$$\overline{h} = h^{\frac{1}{4n+4}}$$

Alors

$$J(h) = I(h) = 2a \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} q_{2k} B_{2k,n} \left(\overline{h}\right)^{2k+2n+3}$$

Posons encore

$$\overline{h}^2 = r$$

donc

$$J\left(\overline{h}\right) = \hat{J}(r) = 2ar^{n+\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} q_{2k} B_{2k,n} r^k.$$

Comme les coefficients q_i sont arbitraires, nous pouvons choisir une perturbation $q(x)$ de telle sorte que $J(h)$ a exactement $\left[\frac{m}{2}\right]$ zéros positifs simples, et par conséquent il existe des systèmes différentiels (3.3) à $\left[\frac{m}{2}\right]$ cycles limites. Ceci conclut la preuve du théorème.

Exemple 3.2.1.

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon \left(\sum_{l=1}^{5} \left(\sum_{i=0}^{l} a_{i,l} x^i y^{l-i} \right) \right) \\ \dot{y} = -x^7 + \varepsilon \left(\sum_{l=1}^{3} \left(\sum_{i=0}^{l} b_{i,l} x^i y^{l-i} \right) \right) \end{cases}$$

Ou bien de façon équivalente

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} + \varepsilon P(x,y) \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \varepsilon Q(x,y) \end{cases}$$

posons $\varepsilon = 0$ alors

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = x^7 \\ \frac{\partial H}{\partial y} = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} H(x,y) = \frac{1}{8} x^8 + \varphi(y) \\ \frac{\partial H}{\partial y} = \varphi'(y) = y \Rightarrow \varphi(y) = \frac{1}{2} y^2 \end{cases}$$

donc

$$H(x,y) = \frac{1}{8} x^8 + \frac{1}{2} y^2$$

et on a

$$P(x,y) = \sum_{l=1}^{5} \left(\sum_{i=0}^{l} a_{i,l} x^i y^{l-i} \right), \ Q(x,y) = \sum_{l=1}^{3} \left(\sum_{i=0}^{l} b_{i,l} x^i y^{l-i} \right).$$

D'après l'intégrale abélienne on a

$$\begin{aligned}
I(h) &= \int_{\gamma_h} P(x,y)dy - Q(x,y)dx \\
&= \int\int_{H(x,y)\leq h} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy \\
&= \int\int_{H(x,y)\leq h} \left(\left[\sum_{l=1}^{5}\left(\sum_{i=0}^{l} a_{i,l}\frac{\partial\left(x^i y^{l-i}\right)}{\partial x}\right)\right] + \left[\sum_{l=1}^{3}\left(\sum_{i=0}^{l} b_{i,l}\frac{\partial\left(x^i y^{l-i}\right)}{\partial y}\right)\right]\right) dxdy \\
&= \int\int_{H(x,y)\leq h} \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{1} a_{i,1}\frac{\partial\left(x^i y^{1-i}\right)}{\partial x} + \sum_{i=0}^{2} a_{i,2}\frac{\partial\left(x^i y^{2-i}\right)}{\partial x} \\ + \sum_{i=0}^{3} a_{i,3}\frac{\partial\left(x^i y^{3-i}\right)}{\partial x} + \sum_{i=0}^{4} a_{i,4}\frac{\partial\left(x^i y^{4-i}\right)}{\partial x} \\ + \sum_{i=0}^{5} a_{i,5}\frac{\partial\left(x^i y^{5-i}\right)}{\partial x} + \sum_{i=0}^{1} b_{i,1}\frac{\partial\left(x^i y^{1-i}\right)}{\partial y} \\ + \sum_{i=0}^{2} b_{i,2}\frac{\partial\left(x^i y^{2-i}\right)}{\partial y} + \sum_{i=0}^{3} b_{i,3}\frac{\partial\left(x^i y^{3-i}\right)}{\partial y} \end{pmatrix} dxdy \\
&= \int\int_{H(x,y)\leq h} \begin{pmatrix} a_{0,1}(0) + a_{1,1}(1) + a_{0,2}(0) + a_{1,2}(y) + a_{2,2}(2x) + a_{0,3}(0) \\ +a_{1,3}(y^2) + a_{2,3}(2xy) + a_{3,3}(3x^2) + a_{0,4}(0) \\ +a_{1,4}(y^3) + a_{2,4}(2xy^2) + a_{3,4}(3x^2y) + a_{4,4}(4x^3) \\ +a_{0,5}(0) + a_{1,5}(y^4) + a_{2,5}(2xy^3) + a_{3,5}(3x^2y^2) \\ +a_{4,5}(4x^3y) + a_{5,5}(5x^4) + b_{0,1}(1) + b_{1,1}(0) \\ +b_{0,2}(2y) + b_{1,2}(x) + b_{2,2}(0) + b_{0,3}(3y^2) + b_{1,3}(2xy) \\ +b_{2,3}(x^2) + b_{3,3}(0) \end{pmatrix} dxdy
\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$H(x,y) = \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{2}y^2$$

on pose

$$H(x,y) = h$$

alors

$$h = \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{2}y^2$$

donc

$$y = \pm\sqrt{2h - \frac{1}{4}x^8}$$

Si $y = 0$ on trouve

$$\frac{1}{4}x^8 = 2h \Rightarrow x^8 = 8h \Rightarrow \bar{x} = (8h)^{\frac{1}{8}}$$

donc

$$\begin{aligned}
I(h) &= 4\int_0^{\bar{x}} \left[\int_0^{\sqrt{2h-\frac{1}{4}x^8}} \left(\begin{array}{c} a_{1,1} + a_{1,3}y^2 + 3a_{3,3}x^2 + a_{1,5}y^4 + 3a_{3,5}x^2y^2 \\ +5a_{5,5}x^4 + b_{0,1} + 3b_{0,3}y^2 + b_{2,3}x^2 + \end{array} \right) dy \right] dx \\
&= 4\int_0^{\bar{x}} \left[\begin{array}{c} \left(a_{1,1} + b_{0,1} + \left(3a_{3,3} + b_{2,3}\right)x^2 + 5a_{5,5}x^4\right) y \\ +\frac{1}{3}\left(a_{1,3} + 3b_{0,3} + 3a_{3,5}x^2\right) y^3 + \frac{1}{5}a_{1,5}y^5 \end{array} \right]_0^{\sqrt{2h-\frac{1}{4}x^8}} dx \\
&= 4\int_0^{\bar{x}} \left[\begin{array}{l} \left(a_{1,1} + b_{0,1} + (3a_{3,3} + b_{2,3})x^2 + 5a_{5,5}x^4\right)\left(2h - \frac{1}{4}x^8\right)^{\frac{1}{2}} \\ +\frac{1}{3}\left(a_{1,3} + 3b_{0,3} + 3a_{3,5}x^2\right)\left(2h - \frac{1}{4}x^8\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}a_{1,5}(2h - \frac{1}{4}x^8)^{\frac{5}{2}} \end{array} \right] dx \\
&= \begin{array}{l} 4\int_0^{\bar{x}} \left(a_{1,1} + b_{0,1} + (3a_{3,3} + b_{2,3})x^2 + 5a_{5,5}x^4\right) 2^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{8h}x^8\right)^{\frac{1}{2}} dx \\ +\frac{4}{3}\int_0^{\bar{x}} \left(a_{1,3} + 3b_{0,3} + 3a_{3,5}x^2\right) 2^{\frac{3}{2}} h^{\frac{3}{2}} (1 - \frac{1}{8h}x^8)^{\frac{3}{2}} dx + \frac{4}{5}a_{1,5}\int_0^{\bar{x}} 2^{\frac{5}{2}} h^{\frac{5}{2}} (1 - \frac{1}{8h}x^8)^{\frac{5}{2}} dx \end{array}
\end{aligned}$$

on pose

$$t = \frac{x^8}{8h} \Rightarrow x = (8ht)^{\frac{1}{8}} = 2^{\frac{3}{8}} h^{\frac{1}{8}} t^{\frac{1}{8}}$$

alors

$$dx = 2^{\frac{-21}{8}} h^{\frac{1}{8}} t^{\frac{-7}{8}} dt$$

si on prend

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \bar{x} \Rightarrow t = 1 \end{cases}$$

d'où

$$I(h) = 2^{\frac{-1}{8}} h^{\frac{5}{8}} \left(\begin{array}{l} (a_{1,1} + b_{0,1}) \int_0^1 t^{\frac{-7}{8}} (1-t)^{\frac{1}{2}} \, dt \\ +2^{\frac{3}{4}} h^{\frac{1}{4}} (3a_{3,3} + b_{2,3}) \int_0^1 t^{\frac{-5}{8}} (1-t)^{\frac{1}{2}} \, dt \\ + (5)\, 2^{\frac{3}{2}} h^{\frac{1}{2}} a_{5,5} \int_0^1 t^{\frac{-3}{8}} (1-t)^{\frac{1}{2}} \, dt \end{array} \right)$$
$$+ \frac{1}{3} 2^{\frac{7}{8}} h^{\frac{13}{8}} \left(\begin{array}{l} (a_{1,3} + 3b_{0,3}) \int_0^1 t^{\frac{-7}{8}} (1-t)^{\frac{3}{2}} dt \\ + (3)\, 2^{\frac{3}{4}} h^{\frac{1}{4}} a_{3,5} \int_0^1 t^{\frac{-5}{8}} (1-t)^{\frac{3}{2}} dt \end{array} \right)$$
$$+ \frac{1}{5} 2^{\frac{15}{8}} h^{\frac{21}{8}} a_{1,5} \int_0^1 t^{\frac{-7}{8}} (1-t)^{\frac{5}{2}} dt$$

$$\begin{array}{rcl} I(h) & = & \left[\begin{array}{l} 2^{\frac{5}{2}} h^{\frac{3}{2}} \int_0^1 \left[a_{1,1} + b_{0,1} + (3a_{3,3} + b_{2,3}) 2^{\frac{3}{4}} h^{\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{4}} + 5a_{5,5} 2^{\frac{3}{2}} h^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} \right] (1-t)^{\frac{1}{2}}\, 2^{\frac{-21}{8}} h^{\frac{1}{8}} t^{\frac{-7}{8}} dt + \\ \frac{1}{3} 2^{\frac{7}{2}} h^{\frac{3}{2}} \int_0^1 \left(a_{1,3} + 3a_{3,5}^2 2^{\frac{3}{4}} h^{\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{4}} + 3b_{0,3} \right) (1-t)^{\frac{3}{2}} 2^{\frac{-21}{8}} h^{\frac{1}{8}} t^{\frac{-7}{8}} dt \\ + \frac{1}{5} 2^{\frac{9}{2}} h^{\frac{5}{2}} a_{1,5} \int_0^1 (1-t)^{\frac{5}{2}} 2^{\frac{-21}{8}} h^{\frac{1}{8}} t^{\frac{-7}{8}} dt \end{array} \right] \\ & = & \begin{array}{l} 2^{\frac{-1}{8}} h^{\frac{5}{8}} \left[\begin{array}{l} (a_{1,1} + b_{0,1}) \int_0^1 t^{\frac{-7}{8}} (1-t)^{\frac{1}{2}} \, dt + 2^{\frac{3}{4}} h^{\frac{1}{4}} (3a_{3,3} + b_{2,3}) \int_0^1 t^{\frac{-5}{8}} (1-t)^{\frac{1}{2}} \, dt \\ + (5)\, 2^{\frac{3}{2}} h^{\frac{1}{2}} a_{5,5} \int_0^1 t^{\frac{-3}{8}} (1-t)^{\frac{1}{2}} \, dt \end{array} \right] \\ + \frac{1}{3} 2^{\frac{7}{8}} h^{\frac{13}{8}} \left[\begin{array}{l} (a_{1,3} + 3b_{0,3}) \int_0^1 t^{\frac{-7}{8}} (1-t)^{\frac{3}{2}} \, dt \\ + (3)\, 2^{\frac{3}{4}} a_{5,5} h^{\frac{1}{4}} \int_0^1 t^{\frac{-5}{8}} (1-t)^{\frac{3}{2}} \, dt \end{array} \right] \\ + \frac{1}{5} 2^{\frac{15}{8}} h^{\frac{21}{8}} a_{1,5} \int_0^1 t^{\frac{-7}{8}} (1-t)^{\frac{5}{2}} dt \end{array} \end{array}$$

D'après la fonction β on obtient

$$\begin{aligned}
I(h) &= \begin{array}{l} 2^{\frac{-1}{8}}h^{\frac{5}{8}}\left(a_{1,1}+b_{0,1}\right)\beta\left(\frac{1}{8},\frac{3}{2}\right)+2^{\frac{5}{8}}h^{\frac{7}{8}}(3a_{3,3}+b_{2,3})\beta\left(\frac{3}{8},\frac{3}{2}\right)\\ +5h^{\frac{9}{8}}2^{\frac{11}{8}}a_{5,5}\beta\left(\frac{5}{8},\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{3}2^{\frac{7}{8}}h^{\frac{13}{8}}\left(a_{1,3}+3b_{0,3}\right)\beta\left(\frac{1}{8},\frac{5}{2}\right)\\ +2^{\frac{13}{8}}h^{\frac{15}{8}}a_{3,5}\beta\left(\frac{3}{8},\frac{5}{2}\right)+\frac{1}{5}2^{\frac{15}{8}}h^{\frac{21}{8}}a_{1,5}\beta\left(\frac{1}{8},\frac{7}{2}\right)\end{array}\\
&= \begin{array}{l} 2^{\frac{-1}{8}}h^{\frac{5}{8}}\left(a_{1,1}+b_{0,1}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{2}\right)}+2^{\frac{5}{8}}h^{\frac{7}{8}}\left(3a_{3,3}+b_{2,3}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{3}{8}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{2}\right)}\\ +5h^{\frac{9}{8}}2^{\frac{11}{8}}a_{5,5}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{8}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{8}+\frac{3}{2}\right)}+\frac{1}{3}2^{\frac{7}{8}}h^{\frac{13}{8}}\left(a_{1,3}+3b_{0,3}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{8}+\frac{5}{2}\right)}\\ +2^{\frac{13}{8}}h^{\frac{15}{8}}a_{3,5}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{8}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{8}+\frac{5}{2}\right)}+\frac{1}{5}2^{\frac{15}{8}}h^{\frac{21}{8}}a_{1,5}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{8}+\frac{7}{2}\right)}\end{array}\\
&= \begin{array}{l} 2^{\frac{-1}{8}}h^{\frac{5}{8}}\left(a_{1,1}+b_{0,1}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{13}{8}\right)}+2^{\frac{5}{8}}h^{\frac{7}{8}}\left(3a_{3,3}+b_{2,3}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{3}{8}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{15}{8}\right)}\\ +5h^{\frac{9}{8}}2^{\frac{11}{8}}a_{5,5}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{8}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{17}{8}\right)}+\frac{1}{3}2^{\frac{7}{8}}h^{\frac{13}{8}}\left(a_{1,3}+3b_{0,3}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{21}{8}\right)}\\ +2^{\frac{13}{8}}h^{\frac{15}{8}}a_{3,5}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{8}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{23}{8}\right)}+\frac{1}{5}2^{\frac{15}{8}}h^{\frac{21}{8}}a_{1,5}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{29}{8}\right)}\end{array}\\
&= \sqrt{\pi}\left(\begin{array}{l} \frac{1}{5}2^{\frac{15}{8}}h^{\frac{5}{8}}\left(a_{1,1}+b_{0,1}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{8}\right)}+\frac{1}{7}2^{\frac{21}{8}}h^{\frac{7}{8}}\left(3a_{3,3}+b_{2,3}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{3}{8}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{8}\right)}\\ +\frac{5}{9}2^{\frac{51}{8}}h^{\frac{9}{8}}a_{5,5}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{8}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)}+\frac{1}{65}2^{\frac{39}{8}}h^{\frac{13}{8}}\left(a_{1,3}+3b_{0,3}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{8}\right)}\\ +\frac{1}{35}2^{\frac{45}{8}}h^{\frac{15}{8}}a_{3,5}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{8}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{8}\right)}+\frac{1}{455}2^{\frac{63}{8}}h^{\frac{21}{8}}a_{1,5}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{8}\right)}.\end{array}\right)
\end{aligned}$$

Pour obtenir les solutions suivantes

$$h_1=1,\ h_2=(1.1)^8,\ h_3=(1.2)^8,\ h_4=(1.3)^8\ \text{ et } h_5=(1.4)^8$$

on pose

$$a_{1,1}=20,\ a_{1,3}=-30,\ a_{3,3}=-80,\ \text{et } b_{0,1}=30,$$

donc nous trouvons

$$a_{1,5}=-0.317\,16,\ a_{3,5}=20.466,\ a_{5,5}=51.629,\ b_{0,3}=-13.896,\ \text{et } b_{2,3}=-40.57$$

alors

$$I(H) = H^5 \left(-1.523\,2H^{16} + 111.27H^{10} - 301.26H^8 + 803.43H^4 - 953.37H^2 + 341.45\right)$$

où

$$H = h^{\frac{1}{8}}.$$

Conclusion

Dans le cas des centres non linéaires, la recherche de solutions périodiques repose généralement sur l'étude des systèmes conservatifs et l'utilisation des intégrales abéliennes. Ces centres apparaissent dans des systèmes où les trajectoires sont des courbes fermées, même si le champ vectoriel n'est pas linéarisable autour du point d'équilibre. Lorsqu'on introduit une petite perturbation dans un tel système, l'existence de cycles limites peut être étudiée en analysant une intégrale de la forme :

$$\int_{\gamma_h} P(x,y)dy - Q(x,y)dx$$

définie sur les orbites fermées γ_h du système non perturbé. Les zéros simples de cette intégrale indiquent l'apparition de solutions périodiques isolées, c'est-à-dire des cycles limites, dans le système perturbé.

Bibliographie

[1] **BARREIRA, Luís, VALLS, Claudia, CHOULLI, Mourad, etal**. Théorie des systèmes dynamiques : une introduction. EDP sciences, 2013.

[2] **JEAN, Frédéric**. Stabilité et commande des systèmes dynamiques.2017.

[3] **BRAHMIA.Aziza**. Memoire master. "non existence des solutions périodique pour les systemes differentiels planaires". université 8 Mai 1945 Guelma. (2016)

[4] **TOUATI. Fatima**. These de doctorat. "Cycles limites pour la classe des équations différentielles du second ordre et l'équation de Duffing". Université Badji Mokhtar Annaba. (2015).

[5] **BERREHAIL, Chems Eddine**. These de doctorat. "Cycles limites de trois classes d'équations différentielles ordinaires perturbées". Université Badji Mokhtar Annaba. (2014)

[6] **CARO, Florian et POPIER, Alexandre**. Stabilité des équilibres.Exemples.

[7] **GODEFROY, Maurice**. La fonction gamma. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, 1852, vol. 35, p. 320.

[8] **LAURENT, Michel**. Approximation diophantienne de valeurs de la fonction bêta aux points rationnels. In : Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques. 1980. p. 53-65.

[9] **Jaume Llibre, Claudia Valls.** Limit cycles for a variant of a generalized Riccati equation. Applied Mathematics Letters. Volume 68, June 2017, Pages 76-79.

[10] **Christopher C., Li C.** Limit cycles of differential equations. Advances Courses in Mathematics, CRM, Barcelona, Birkhäuser, Basel (2002).