

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par :

Intitulé

**Solutions périodiques de certaines classes d'équations
différentielles perturbées**

Dirigé par : TALBI Hana

Devant le jury

**PRESIDENT
RAPPORTEUR
EXAMINATEUR
EXAMINATEUR**

**BOULARES Hamid
MENACEUR Amor
BOUATTIA Yacine
SELLAMI Nabil**

**Prof
MCA
MCA
MCA**

**Univ-Guelma
Univ-Guelma
Univ-Guelma
Univ-Guelma**

Session Juin 2025

Résumé

Dans ce travail, nous étudions les cycles limites d'une classe de systèmes différentiels polynomiaux de la forme

$$\begin{cases} \dot{u} = v - \varepsilon(g_1^1(u) + f_1^1(u)v) - \varepsilon^2(g_1^2(u) + f_1^2(u)v), \\ \dot{v} = -u - \varepsilon(g_2^1(u) + f_2^1(u)v) - \varepsilon^2(g_2^2(u) + f_2^2(u)v), \end{cases}$$

où $g_1^1, g_1^2, f_1^1, f_1^2, g_2^1, g_2^2, f_2^1$ et f_2^2 sont des polynômes d'un degré donné et ε est un petit paramètre. Nous déterminons le nombre maximal de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire

$$\dot{u} = v, \quad \dot{v} = -u,$$

en utilisant la théorie de moyennisation du premier et du second ordre. Cette étude s'inscrit dans le cadre de la seconde partie du 16ème problème de Hilbert, qui reste ouvert pour de nombreux cas. Elle contribue à mieux comprendre le comportement qualitatif des systèmes polynomiaux planaires sous perturbation.

Mots clés : Systèmes différentiels polynomiaux, Systèmes de Liénard, Cycle limite, Méthode de moyennisation

Abstract

In this work, we consider the limit cycles of a class of polynomial differential systems of the form

$$\begin{cases} \dot{u} = v - \varepsilon(g_1^1(u) + f_1^1(u)v) - \varepsilon^2(g_1^2(u) + f_1^2(u)v), \\ \dot{v} = -u - \varepsilon(g_2^1(u) + f_2^1(u)v) - \varepsilon^2(g_2^2(u) + f_2^2(u)v), \end{cases}$$

where $g_1^1, g_1^2, f_1^1, f_1^2, g_2^1, g_2^2, f_2^1$ and f_2^2 are polynomials of a given degree and ε is a small parameter. We obtain the maximum number of limit cycles that bifurcate from the periodic orbits of a linear center

$$\dot{u} = v, \quad \dot{v} = -u,$$

by using the averaging theory of first and second order. This work addresses a special case of the second part of Hilbert's 16th problem, which remains unsolved in general. The results contribute to the qualitative understanding of perturbed planar polynomial systems.

Keywords : Polynomial differential systems, Liénard system, Limit cycle, Averaging theory

الملخص

في هذا العمل، ندرس الحلول الدورية المعزولة لفئة من الأنظمة التفاضلية متعددة الحدود من الشكل:

$$\frac{du}{dt} = v - \varepsilon(g_1^1(u) + f_1^1(u)v) - \varepsilon^2(g_1^2(u) + f_1^2(u)v),$$

$$\frac{dv}{dt} = -u - \varepsilon(g_2^1(u) + f_2^1(u)v) - \varepsilon^2(g_2^2(u) + f_2^2(u)v),$$

حيث $f_2^2, g_1^1, f_1^2, f_1^1, g_1^2, g_2^1, g_1^1$ كثيرات حدود من درجة معينة، و ε معامر صغيرة،

ونجد العدد الأقصى للحلول الدورية المعزولة التي تتفرّع من المدارات الدورية لمركز خطي

$$\frac{du}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -u,$$

وذلك باستخدام نظرية المتوسط من الرتبة الأولى والثانية. ويعد هذا المشكل المطروح من الحالات الخاصة

للجزء الثاني من مسألة هيلبرت السادسة عشرة، التي لا تزال غير محلولة بشكل عام، وتسهم النتائج في فهم

سلوك الأنظمة التفاضلية متعددة الحدود بعد الاضطراب.

الكلمات المفتاحية : جمل كثيرات الحدود، جملة لينارد، الحل الدوري المعزول، طريقة المتوسط.

Table des matières

1	Notions préliminaires	4
1.1	Définitions générales du système dynamique	4
1.2	Stabilité du point critique dans $\mathbb{R}^2$	5
1.3	Stabilité des points d'équilibre dans $\mathbb{R}^n$	8
1.4	Cycle limite et solutions périodiques	8
1.4.1	Quelques définitions	8
1.4.2	Existence et non-existence de cycle limite	10
1.5	Résultats auxiliaires	11
2	Méthode de moyennisation	12
2.1	Méthode de moyennisation et solution périodique	12
2.2	Méthode de moyennisation du premier ordre	13
2.3	Méthode de moyennisation du deuxième ordre	15
3	Estimation du nombre de cycles limites pour une classe de systèmes différentiels planaires	19
3.1	Présentation du problème et résultats principaux	19
3.2	Application de la méthode de moyennisation du premier ordre	21
3.2.1	Exemples	22
3.3	Application de la méthode de moyennisation du second ordre .	25
4	Conclusion	34
5	Appendice	35
5.1	Appendice A	35
5.2	Appendice B	37

Introduction

Les équations différentielles ordinaires jouent un rôle fondamental dans l'étude des systèmes dynamiques, car elles permettent de modéliser l'évolution d'un phénomène au cours du temps. Un système dynamique décrit généralement comment l'état d'un système change en fonction du temps, et ces changements sont souvent gouvernés par des équations différentielles. Grâce aux EDO, il est possible d'analyser la stabilité des équilibres, la présence de cycles limites, ou encore le comportement à long terme des trajectoires. Ces outils mathématiques sont largement utilisés dans divers domaines scientifiques tels que la physique, la biologie, l'économie ou encore l'ingénierie, où la compréhension des dynamiques sous-jacentes est essentielle pour la prédiction et le contrôle des systèmes réels.

Une solution périodique isolée d'une EDO est appelée cycle limite, un concept introduit par Henri Poincaré en 1881. Au fil du temps, plusieurs approches ont été élaborées pour identifier ces solutions périodiques, notamment le théorème de Poincaré-Bendixson, le critère de non-existence de Dulac, la bifurcation de Hopf, la méthode de Melnikov et différentes méthodes de perturbation.

L'importance de pouvoir déterminer le nombre de cycles limites constitue la seconde partie du 16^{ème} problème de Hilbert [7], qui peut être formulée ainsi :

Quel est le nombre maximal de cycles limites, noté $L(n)$, qu'un système planaire polynomial de degré n , défini par :

$$\begin{cases} du/dt = P(u, v), \\ dv/dt = Q(u, v), \end{cases}$$

Cette question demeure sans réponse plus de 125 ans après sa formulation.

En 1923, Dulac [5] a proposé une démonstration prétendant que ce nombre est fini pour tout n , mais celle-ci contenait une erreur.

La résolution du problème a été reprise et corrigée de manière indépendante par Écalle, Martinet et Moussu en 1987, Ilyashenko en 1991, et à nouveau par Écalle en 1992.

Ces travaux ont permis d'établir que tout champ de vecteurs polynomial possède un nombre fini de cycles limites, sans pour autant fournir une borne uniforme pour ce nombre.

Les chercheurs se sont alors intéressés à une classe particulière d'équations différentielles : les équations de Liénard [8], qui s'écrivent :

$$\begin{cases} du/dt = v - F(u), \\ dv/dt = -u, \end{cases} \quad (0.1)$$

où F est un polynôme de degré n et $F(0) = 0$. Donc le problème de Hilbert affaibli consiste à chercher une borne supérieure pour le nombre de cycles limites de l'équation de Liénard (0.1). Mais aucune majoration n'est actuellement connue.

En 1997, Lins, De Melo et Pugh [9] ont obtenu les résultats suivants :

Pour $F(u) = \sum_{i=1}^3 a_i u^i$ avec $a_1 a_3 < 0$, le système admet exactement un cycle limite, stable si $a_1 < 0$, sinon instable.

Pour $F(u) = \sum_{i=1}^3 a_{2i+1} u^{2i-1}$, le système admet au plus deux cycles limites.

En 2001, Perko [12] a démontré que :

Pour tout ε suffisamment petit, le système où $F(u) = \varepsilon \sum_{i=1}^{2n+1} a_i u^i$ peut avoir au plus n cycles limites.

On note $LC(k_1, k_2)$ le nombre maximal de cycles limites de faible amplitude pour le système généralisé de Liénard :

$$\begin{cases} du/dt = v, \\ dv/dt = -g(u) - f(v)u, \end{cases} \quad (0.2)$$

où f et g sont deux polynômes de degrés k_1 et k_2 , respectivement.

En 1984, Blows et Lloyd [2] ont établi les résultats suivants :

$$LC(k_1, k_2) = \begin{cases} k_2 + 1 & \text{si } g \text{ est impaire} \\ k_2 & \text{si } f \text{ est paire} \end{cases}$$

Si f est impaire, alors $LC(k_1, 2k_2 + 1) = k_2$

Si $g(u) = u + k(u)$, où $k(u)$ est impaire, alors $LC(2k_1, 2) = k_1$.

En 1998, Gasull et Torregrosa [6] ont trouvé des bornes supérieures pour $LC(7, 6)$, $LC(6, 7)$ et $LC(7, 7)$:

En 1999, Lynch et Cristopher [11] ont développé une nouvelle méthode algébrique qui permet de déterminer la constante de Liapunov du système (0.2). Ils ont donné les résultats suivant :

$$LC(k_1, k_2) = \begin{cases} \left\lceil \frac{2k_1+1}{3} \right\rceil & \text{si } k_2 = 2, \\ \left\lceil \frac{2k_2+1}{3} \right\rceil & \text{si } k_1 = 2, \\ 2\left\lceil \frac{3k_1+2}{8} \right\rceil & \text{si } 1 < k_1 \leq 50 \text{ et } k_2 = 3, \\ 2\left\lceil \frac{3k_2+2}{8} \right\rceil & \text{si } 1 < k_2 \leq 50 \text{ et } k_1 = 3. \end{cases}$$

En 2006, Yu et Han [13] ont obtenu des valeurs précises de

$$LC(k_1, k_2) = LC(k_2, k_1) \text{ pour } \begin{cases} k_2 = 4, k_1 = 10, 11, 12, 13, \\ ou \\ k_2 = 5, k_1 = 6, 7, 8, 9, \\ ou \\ k_2 = 6, k_1 = 5, 6. \end{cases}$$

Dans ce travail, nous étudions les cycles limites des systèmes différentiels non autonomes à l'aide des méthodes de moyennisation du premier et du second ordre. Nous nous intéressons particulièrement à la détermination du nombre maximal de cycles limites pouvant bifurquer des orbites périodiques du centre linéaire défini par $\dot{u} = v, \dot{v} = -u$, lorsqu'il est perturbé par une classe de systèmes différentiels polynomiaux de type Liénard. Ce mémoire est subdivisé en trois chapitres.

Le premier chapitre propose une révision des notions fondamentales de la théorie qualitative des systèmes dynamiques. Il y sera présenté des définitions de base telles que : le système dynamique, les points d'équilibre et leur classification, la linéarisation, la stabilité autour d'un point d'équilibre, ainsi que la notion de cycle limite, accompagnée de théorèmes concernant leur existence ou leur absence.

Dans le deuxième chapitre, nous exposons la méthode de moyennisation d'ordre un et deux, accompagnée d'exemples illustratifs.

Le chapitre 3 concerne l'étude du nombre maximal des cycles limites qui bifurquent d'un centre linéaire perturbé par une classe généralisée de systèmes différentiels de Liénard, en utilisant la méthode de moyennisation du premier et du second ordre.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions générales et préliminaires pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques et des équations différentielles ordinaires. Ensuite, nous introduisons la notion d'un cycle limite et l'amplitude d'un cycle limite d'un système planaire.

1.1 Définitions générales du système dynamique

Définition 1.1 : Un système dynamique sur $\mathbb{R}^n$ est une application

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Définie sur tout $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$; telle que

$U(., u) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.

$U(t, .) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.

$U(t + h, u) = U(t, U(h, u))$ pour $t, h \in \mathbb{R}^+$; $u \in \mathbb{R}^n$

Exemple 1.1 : soit le système linéaire

$$\begin{cases} \dot{u} = Bu, \\ u(0) = u_0, \end{cases} ; t \in \mathbb{R}^+; u \in \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

où B la matrice constante, la solution de (1.1) est

$$u(t) = e^{tB}u_0,$$

1.2. STABILITÉ DU POINT CRITIQUE DANS $\mathbb{R}^2$

Le système (1.1) engendre un système dynamique, car l'application

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

qui à tout $t \in \mathbb{R}^n$; $u \in \mathbb{R}^n$ associe :

$$U(t, u) = e^{tB}u_0,$$

vérifie les quatre propriétés précédentes

Définition 1.2 Soit le système non linéaire :

$$\dot{u} = f(u), \quad u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n), \quad f = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_n) \quad (1.2)$$

On appelle point critique (ou point d'équilibre) du système (1.2) tout point $u_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$f(u_0) = 0,$$

Définition 1.3 Considérons le système (1.2)

Le système

$$\dot{u} = Bu,$$

où

$$B = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(u_0) = Df(u_0), \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

est une matrice $(n \times n)$, est appelé Linéarisation de (1.2) en u_0 .

1.2 Stabilité du point critique dans $\mathbb{R}^2$

Soit donnée un système de deux équations différentielles linéaires homogènes à coefficient constants

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = a_{11}u + a_{12}v, \\ \frac{dv}{dt} = a_{21}u + a_{22}v, \end{cases} \quad (1.3)$$

et

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (1.4)$$

Le point $u = 0, v = 0$, en lequel s'annulent les second membres des équations du système (1.3), s'appelle point critique du système (1.3), pour étudier le point critique du système (1.3) il faut établir l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (1.5)$$

et chercher ses racines λ_1 et λ_2 . Les cas suivants peuvent se présenter :

1- Les racines λ_1, λ_2 de l'équation caractéristique (1.5) sont réelles et distincts :

a) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$. le point critique est asymptotiquement stable (**noeud stable**)

b) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$. le point critique est instable (**noeud instable**)

c) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$. le point critique est instable (**point selle**)

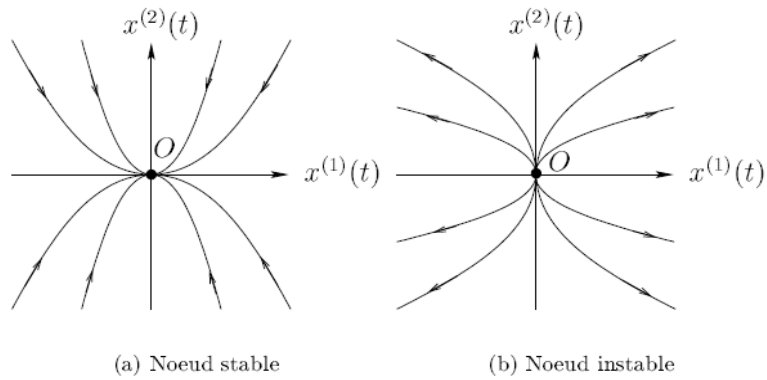


Figure 1

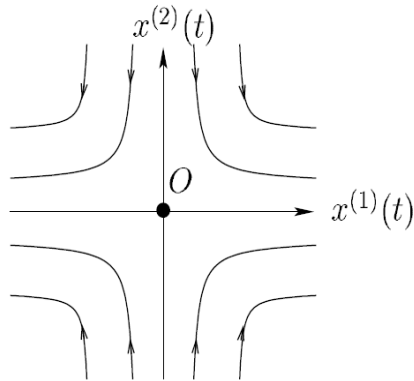


Figure 2. point selle

2- Les racines de l'équation caractéristique (1.5) sont complexes

1.2. STABILITÉ DU POINT CRITIQUE DANS $\mathbb{R}^2$

$\lambda_1 = p + iq, \lambda_2 = p - iq :$

- a) $p < 0, q \neq 0$. le point critique est asymptotiquement stable (**foyer stable**)
- b) $p > 0, q \neq 0$. le point critique est instable (**foyer instable**)
- c) $p = 0, q \neq 0$. le point critique est stable (**centre**)

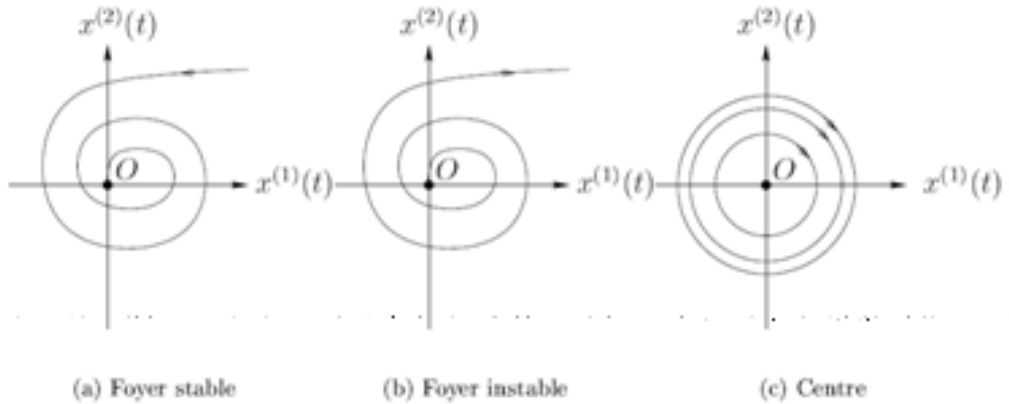


Figure 3

3- Les racines $\lambda_1 = \lambda_2$ sont multiples :

- a) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ le point critique est asymptotiquement stable (**noued stable**)
- b) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ le point critique est instable (**noued instable**)

Exemple 1.3

On étudie la nature du point critique $(0, 0)$ du système

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 5u - v \\ \frac{dv}{dt} = 2u + v \end{cases}$$

écrivons l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & -1 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

donc $\lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0$, ses racines $\lambda_1 = 3 + \sqrt{2} > 0$, $\lambda_2 = 3 - \sqrt{2} > 0$ sont réelles distinctes et positives par suite, le point critique $(0, 0)$ est un noued instable.

1.3 Stabilité des points d'équilibre dans $\mathbb{R}^n$

L'étude de la stabilité d'un point d'équilibre nous amène à connaître le comportement des trajectoires voisines de ce point d'équilibre.

Définition 1.5 Soit le système

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), u \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \quad (1.6)$$

. Supposons que f satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité de la solution et soit $\phi(t)$ la solution du système (1,6). On dit qu'un point d'équilibre p est stable si $\forall \varepsilon \geq 0, \exists \delta \geq 0$ tel que si $\|\phi(t_0) - p\| < \delta \implies \|\phi(t) - p\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$.

S'il existe de plus un voisinage de p tel que pour tout u dans ce voisinage $\lim \phi(t) = p$ alors le point d'équilibre p est dit asymptotiquement stable.

Théorème 1.1 Soit u_0 un point d'équilibre pour le système (1,6).

i) Si toutes les valeurs propre de la matrice Jacobienne Df_{u_0} ont des parties réelles négatives, alors le point d'équilibre u_0 est asymptotiquement stable.

ii) S'il existe au moins une valeur propre de Df_{u_0} avec une partie réelle positive, alors le point d'équilibre u_0 est instable.

iii) Si Df_{u_0} a des valeurs propres avec des parties réelles négatives et d'autres avec des parties réelles nulles, alors on ne peut rien dire sur la stabilité du point d'équilibre

1.4 Cycle limite et solutions périodiques

1.4.1 Quelques définitions

Définition 1.6 On dit que $(u(t), v(t))$ est une solution du système

$$\begin{cases} \dot{x} = P(u, v) \\ \dot{y} = Q(u, v) \end{cases} \quad (1.7)$$

si le champs de vecteurs $V = (P, Q)$ est toujours tangent à la trajectoire représentant cette solution dans le plan de phase, autrement dit

$$\forall t \in J : P(u(t), v(t))u + Q(u(t), v(t))v = 0$$

1.4. CYCLE LIMITE ET SOLUTIONS PÉRIODIQUES

Définition 1.7 On appelle *solution périodique* du système (1.7), toute solution $(u(t), v(t))$ pour laquelle il existe un réel $T > 0$ tel que $\forall t \in [0, T[: u(t + T) = u(t)$ et $v(t + T) = v(t)$. Le plus petit nombre T qui convient s'appelle alors *période* de cette solution.

Donnons d'abord la définition des cycles limites par

Définition 1.8 On appelle *cycle limite* du système (1.7), toute solution périodique isolée dans l'ensemble de toutes les solutions périodiques de ce système.

Exemple 1.2 Soit le systeme

$$\begin{cases} \dot{u} = \beta u - v - \beta(u^2 + v^2), \\ \dot{v} = u + \beta v - \beta(u^2 + v^2), \end{cases} \quad (1.8)$$

tel que β est un paramètre. En coordonnées polaires $u = \rho \cos \phi$ et $v = \rho \sin \phi$, le systeme (1.8) devient

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \beta\rho(1 - \rho^2), \\ \dot{\phi} = 1, \end{cases}$$

Posons

$$h(\rho) = \dot{\rho} = \beta\rho(1 - \rho^2),$$

alors si $\beta \neq 0$

$$h(\rho) = 0 \implies \rho = 0 \text{ ou } \rho = 1,$$

on a donc un point d'équilibre $(0, 0)$ et un cycle limite d'amplitude $\rho = 1$,

$$(u(t), v(t)) = (\cos(t + \phi_0), \sin(t + \phi_0)),$$

1. Pour $\beta > 0$, on a deux cas :

a) Si $\rho < 1$, alors $h(\rho) > 0$, d'où $\rho(\nearrow)$.

b) Si $\rho > 1$, alors $h(\rho) < 0$, d'où $\rho(\searrow)$.

Donc le cycle limite d'amplitude $r = 1$ est stable.

2. Pour $\beta < 0$:

a) Si $\rho < 1$, $h(\rho) < 0$, d'où $\rho(\searrow)$.

b) Si $\rho > 1$, alors $h(\rho) > 0$, d'où $\rho(\nearrow)$.

Donc le cycle limite d'amplitude $r = 1$ est instable.

3. Si $\beta = 0$, le système a une infinité d'orbites périodique, et il n'y a pas de cycle limite.

Exemple 1.4 (Un exemple classique pour $\beta = 1$)

L'exemple repris par beaucoup d'auteurs est le suivant

$$\begin{cases} \dot{u} = -v + u(1 - u^2 - v^2), \\ \dot{v} = u + v(1 - u^2 - v^2), \end{cases} \quad (1.9)$$

Après passage en coordonnées polaire (ρ, ϕ) , ce système se découple en

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(1 - \rho^2), \\ \dot{\phi} = 1, \end{cases}$$

Ce qui donne visiblement une seule solution périodique $\rho(t) = 1, \phi(t) = \phi_0 + t$. Dans le plan de phase, c'est le cercle d'équation $u^2 + v^2 = 1$ et c'est un cycle limite unique. Les autres solutions s'obtiennent par intégration du système. Lorsque $t \mapsto \infty$, toutes ces solutions s'approchent du cycle limite.

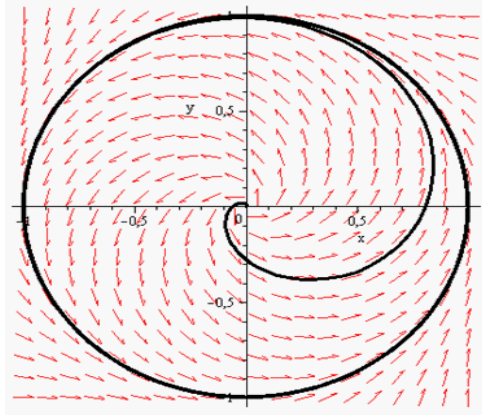


Figure 4. Un cycle limite du système
1.9

1.4.2 Existence et non-existence de cycle limite

Une condition suffisante de non-existence de solution périodique (et donc de cycle limite) est donnée par :

Théorème 1.2

Il n'existe aucune trajectoire fermée dans un domaine simplement connexe Ω du plan de phase si la divergence $\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v}$ conserve un signe constant.

Théorème 1.3

Si toutes les trajectoires du système (1.7) pénètrent transversalement dans un domaine fermé et borné D , ne contenant aucun point d'équilibre du système, et ne ressortent pas de ce domaine, alors ce domaine renferme au moins une trajectoire périodique.

1.5 Résultats auxiliaires

Definition 1.9 Soient $f \in C^\circ(D)$ une fonction non dégénérée, le degré topologique de f par rapport à l'ensemble D et à 0 est l'entier $d(f, D, 0)$ tel que

$$d_B(f, D, 0) = \begin{cases} \sum_{u \in A_f} \text{sign}(J_{f(u_0)}) & \text{Si } A_f \neq \emptyset, \\ 0 & \text{Si } A_f = \emptyset, \end{cases}$$

où A_f est l'ensemble des racines de f .

Propriétés

(1) Si $f(u) = u$, $u \in D$ alors

$$d(f, D, 0) = \begin{cases} 1 & \text{Si } 0 \in D, \\ 0 & \text{Si } 0 \notin D, \end{cases}$$

(2) Si $f \in C^\circ(D)$ et telle que $f(u) \neq 0$, $u \in \partial D$ et $d(f, D, 0) \neq 0$ alors il existe un point $u_0 \in D$ tel que $f(u_0) = 0$.

Lemme Pour $l, k \in \mathbb{N}$, On définit

$$I_{k,l} = \int_0^{2\pi} \cos^k(\phi) \sin^l(\phi) d\phi,$$

alors

$$I_{k,l} = \frac{k-1}{k+l} I_{k-2,l}, I_{k,l} = \frac{l-1}{k+l} I_{k,l-2},$$

Ces intégrales sont utilisées jusqu'à ce qu'on arrive à

$$I_{0,0} = 2\pi \text{ ou } I_{0,1} = I_{1,0} = I_{1,1} = 0,$$

Notons que $I_{k,l} \neq 0$ si et seulement si k et l sont paires.

Chapitre 2

Méthode de moyennisation

2.1 Méthode de moyennisation et solution périodique

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la méthode de moyennisation qui est appliquée aux systèmes de la forme

$$\dot{u} = \varepsilon f(u, t, \varepsilon), \quad (2.1)$$

où $t \in I \subset \mathbb{R}$. $u \in \mathbb{R}^n$. ε un paramètre petit et f est T -périodique en t . L'équation moyennée à (2.1) s'écrit :

$$\dot{u} = \varepsilon f^0(u), \quad (2.2)$$

où

$$f^0(u) = \frac{1}{T} \int_0^T f(u, t, 0) dt. \quad (2.3)$$

La recherche des racines positives du (2.3) réduit le problème de la détermination des solutions T -périodique de (2.1) qui est en général un problème difficile.

La méthode de moyennisation figure parmi les approches perturbatives les plus significatives actuellement utilisées dans l'analyse des cycles limites des systèmes dynamiques. Elle possède une histoire riche, remontant aux travaux fondateurs de Lagrange et Laplace en 1788, qui en ont proposé une première interprétation intuitive. La formalisation initiale de cette théorie a été réalisée par Fatou en 1928. Par la suite, elle a été développée par Krylov et Bogoliubov

en 1937, puis par Bogoliubov et Mitropolskii en 1961. D'autres contributions notables incluent celles de Verhulst (1991), Marsden et McCracken (1976), Sanders et Verhulst (1985), Malkin (1956), Roseau (1966), ainsi que Llibre et Buică (2004). Au fil des années, diverses variantes et théorèmes liés à la méthode de moyennisation ont été établis, accompagnés d'une abondante littérature consacrée à ses applications.

2.2 Méthode de moyennisation du premier ordre

Théorème 2.2.1 Considérons le système suivant :

$$\dot{u}(t) = \frac{du}{dt} = \varepsilon S_1(t, u) + \varepsilon^2 R(t, u, \varepsilon), \quad (2.4)$$

où $S_1 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[\rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues, T -périodiques en la première variable avec D un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

On définit alors la fonction $F_{10} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$F_{10}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T S_1(s, z) ds, \quad (2.5)$$

On suppose que :

(i) Les fonctions S_1 et R sont localement lipschitziennes par rapport à la variable u .

(ii) Il existe $a \in D$ tel que $F_{10}(z) \neq 0$ pour tout $z \in V \setminus \{a\}$ et que le degré de Brouwer $d_B(F_{10}(a_\varepsilon), V, 0) \neq 0$, où V est un voisinage de a_ε .

Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution $\phi(., \varepsilon) \rightarrow a$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Démonstration. (Voir[3]).

Remarque 2.2.1 Les hypothèses de ce théorème sont plus faibles que celles du Théorème 2.2.1 de [4], où

À la place de (i) il suppose que :

(j) $S_1, R, D_u S_1, D_u^2 S_1$ et $D_u R$ sont définies continues et bornées par une constante M (indépendante de ε) dans $[0, +\infty[\times D, -\varepsilon_f < \varepsilon < \varepsilon_f$.

À la place de (ii) suppose que :

(jj) pour $a \in D$ avec $F_{10}(a) = 0$, on a $J_{F_{10}}(a) \neq 0$, ou $D_u F$ désigne la matrice jacobienne de F par rapport à u . $D_u^2 F$ la matrice hessienne de F et $J_f(a)$ désigne le déterminant de la jacobienne de f calculée en a

Exemple 2.2.1 Soit l'équation de Van Der Pol

$$\ddot{u} + u = \varepsilon (1 - u^2) \dot{u}, \quad (2.6)$$

qui est équivalente au système différentiel suivant

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -u + \varepsilon (1 - u^2) v \end{cases} \quad (2.7)$$

En coordonnées polaires $u = \rho \cos(\phi)$, $v = \rho \sin(\phi)$, le système perturbé (2.7), s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \varepsilon \rho \sin^2 \phi (1 - \rho^2 \cos^2 \phi) \\ \dot{\phi} = -1 + \varepsilon \cos \phi \sin \phi (1 - \rho^2 \cos^2 \phi). \end{cases} \quad (2.8)$$

D'on

$$\frac{d\rho}{d\phi} = \frac{\varepsilon \rho \sin^2 \phi (1 - \rho^2 \cos^2 \phi)}{-1 + \varepsilon \cos \phi \sin \phi (1 - \rho^2 \cos^2 \phi)}. \quad (2.9)$$

On sait que

$$\frac{1}{1 - u} = 1 + u + O(u^2), \quad |u| < 1. \quad (2.10)$$

D'ou

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\phi} &= -\varepsilon \rho \sin^2 \phi (1 - \rho^2 \cos^2 \phi) + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon S(\phi, \rho) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (2.11)$$

De (2.5) on obtient :

$$\begin{aligned} F_{10}(\rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\phi, \rho) d\phi \\ &= \frac{\rho}{8} (\rho^2 - 4). \end{aligned}$$

Les cycles limites possibles pour l'équation (2.4) sont donnés par les racines positives de l'équation

$$F_{10}(\rho) = \frac{\rho}{8} (\rho^2 - 4) = 0. \quad (2.12)$$

2.3. MÉTHODE DE MOYENNISATION DU DEUXIÈME ORDRE

Cette équation algébrique admet une seule solution positive $\rho^* = 2$. Alors l'équation de Ven Der Pol (2.6) a un cycle limite d'amplitude $\rho^* = 2$.

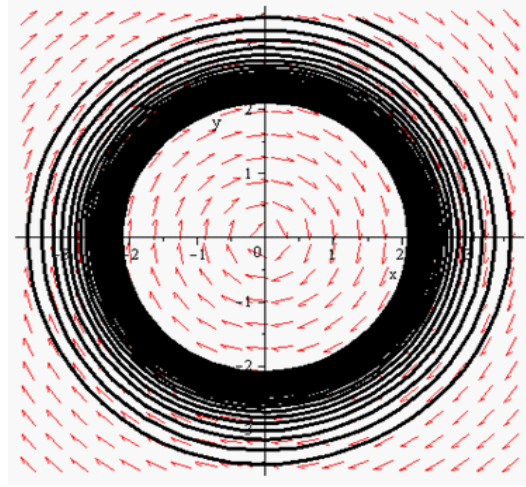


Figure 5. Un cycle limite du systme 2.7 pour $\varepsilon = 0.01$

2.3 Méthode de moyennisation du deuxième ordre

Théorème 2.3.1 *On considère le système différentielle*

$$\dot{u}(t) = \frac{du}{dt} = \varepsilon S_1(t, u) + \varepsilon^2 S_2(t, u) + \varepsilon^3 R(t, u, \varepsilon), \quad (2.13)$$

où $S_1, S_2 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[\rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues, T -périodiques en la première variable et D un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On définit $F_{10}, F_{20} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ par (2.5) et

$$F_{20}(z) = \int_0^T \left(D_z S_1(s, z) \int_0^s S_1(t, z) dt + S_2(s, z) \right) ds, \quad (2.14)$$

supposons que

(i) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $S_1 \in C_1$, S_1, S_2, R et $D_u S_1$ sont localement lipschitziennes par rapport à u . R est différentiable par rapport à ε .

(ii) Pour $V \in D$, un ensemble ouvert et borné et pour tout $\varepsilon \in]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[$, il existe $a_\varepsilon \in V$ tel que $F_{10}(a_\varepsilon) + \varepsilon F_{20}(a_\varepsilon) = 0$ et $d_B(F_{10}(a_\varepsilon) + \varepsilon F_{20}(a_\varepsilon, V, 0)) \neq 0$.

Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution T -périodique isolée $\varphi(., \varepsilon)$ de l'équation (2.13) telle que $\varphi(0, \varepsilon) = a_\varepsilon$.

Les conditions (i) et (ii) de théorème 2.3.1 peuvent être remplacées par (j) et (jj) respectivement

(j) $S_1, R, D_u S_1, D_u^2 S_1$ et $D_u R$ sont définies continues et bornées par une constante M (indépendante de ε) dans $[0, +\infty[\times D, -\varepsilon_f < \varepsilon < \varepsilon_f$.

(jj) $F_{10}(z) = 0, \forall z \in D$ et pour $a \in D$ avec $F_{20}(a) = 0$, on a $J_{F_{20}}(a) \neq 0$.

Pour la démonstration voir [4].

Exemple 2.3.1 Soit le système différentielle :

$$\begin{cases} \dot{u} = v + \varepsilon(1 - u^2 v) + \varepsilon^2(u - v^2 u) \\ \dot{v} = -u + \varepsilon u v^2 + \varepsilon^2(1 - v^2 u) v. \end{cases} \quad (2.15)$$

En écrivant le système (2.15) en coordonnées polaires (ρ, ϕ) ; on obtient :

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \varepsilon(\cos \phi + \rho^3 \cos \phi \sin \phi - 2\rho^3 \cos^3 \phi \sin \phi) \\ \quad + \varepsilon^2(\rho + 2\rho^4 \cos \phi - \rho^3 \cos^2 \phi - \rho^4 \cos^5 \phi) - \rho^4 \cos \phi + \rho^3 \cos^4 \phi \\ \dot{\phi} = -1 + \varepsilon\left(-\frac{\sin \phi}{\rho} + 2\rho^2 \cos^2 \phi - \rho^2 \cos^4 \phi\right) \\ \quad + \varepsilon^2(-\rho^2 \sin \phi \cos^3 \phi - \rho^3 \cos^2 \phi \sin \phi + \rho^2 \cos \phi \sin \phi + \rho^3 \sin \phi \cos \phi). \end{cases}$$

D'où

$$\frac{d\rho}{d\phi} = \varepsilon S_1(\phi, \rho) + \varepsilon^2 S_2(\phi, \rho),$$

où

$$S_1(\phi, \rho) = 2\rho^3 \cos^3 \phi \sin \phi - \cos \phi - \rho^3 \cos \phi \sin \phi,$$

$$\begin{aligned} S_2(\phi, \rho) &= \rho + 2\rho^4 \cos \phi - \rho^3 \cos^2 \phi - \rho^4 \cos^5 \phi - \rho^4 \cos \phi + \rho^3 \cos^4 \phi \\ &\quad + \frac{\cos \phi}{\rho} (2\rho^3 \cos^2 \phi \sin \phi - 1 - \rho^3 \sin \phi) \\ &\quad \times (-\sin \phi + 2\rho^3 \cos^2 \phi - \rho^3 \cos^4 \phi). \end{aligned}$$

2.3. MÉTHODE DE MOYENNISATION DU DEUXIÈME ORDRE

On applique le **Théorème 2.3.1**, donc nous avons :

$$F_{10}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \phi (2\rho^3 \cos^2 \phi \sin \phi - 1 - \rho^3 \sin \phi) d\phi = 0,$$

et

$$\frac{\partial S_1}{\partial \rho}(\phi, \rho) = 6\rho^2 \cos^3 \phi \sin \phi - 3\rho^2 \cos \phi \sin \phi.$$

$$\int_0^\phi S_1(\rho, s) ds = -\frac{1}{2}\rho^3 \cos^4 \phi - \sin \phi + \frac{1}{2} \cos^2 \phi.$$

Donc la fonction $F_{20}(\rho)$ est :

$$\begin{aligned} F_{20}(\rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial S_1}{\partial \rho}(\phi, \rho) \int_0^\phi S_1(s, \rho) ds + S_2(\phi, \rho) \right] d\phi \\ &= \frac{\rho}{8} (\rho^2 - 8). \end{aligned}$$

L'unique racine positive de $F_{20}(\rho) = 0$ est $\rho = 2\sqrt{2}$.

Le système différentiel (2.15) à un cycle limite instable d'amplitude

$$\rho = 2\sqrt{2},$$

car $\frac{d}{d\rho}F_{20}(2\sqrt{2}) = 2 > 0$.

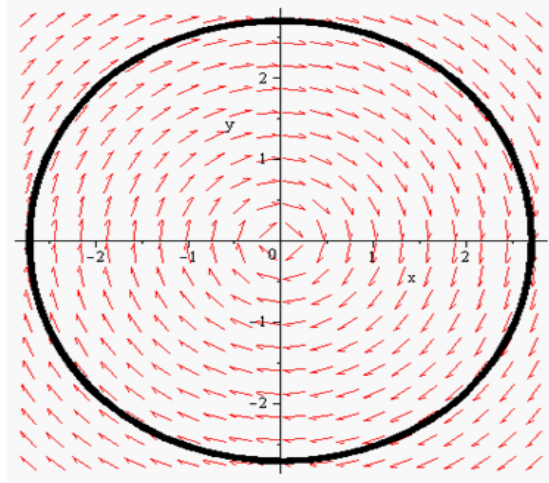


Figure 6. Cycle limite du systme 2.15 pour $\varepsilon = 0.01$

Chapitre 3

Estimation du nombre de cycles limites pour une classe de systèmes différentiels planaires

3.1 Présentation du problème et résultats principaux

La deuxième partie du seizième problème de Hilbert porte sur l'étude qualitative des trajectoires des solutions des systèmes différentiels polynomiaux dans le plan. Autrement dit, il s'agit de systèmes d'équations différentielles de la forme :

$$\begin{cases} \dot{u} = P(u, v), \\ \dot{v} = Q(u, v), \end{cases}$$

où P et Q sont des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

Le problème est donc de trouver une borne supérieure (en fonction de n) du nombre de cycles limites que peut avoir un système différentiel polynomial du plan de degré n .

Les chercheurs considèrent deux classes spéciales des équations différentielles, l'équation de Liénard et l'équation de Kukles, l'équation de Liénard polynomial (1928) s'écrit :

$$\ddot{u} + f(u)\dot{u} + g(u) = 0,$$

où $f(u)$ et $g(u)$ sont des polynômes.

CHAPITRE 3. ESTIMATION DU NOMBRE DE CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE DE SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS PLANAIRE

Cette équation peut se transformer en un système de deux équations du premier ordre en posant $\dot{u} = v$ on a

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -g(u) - f(u)v, \end{cases}$$

Les systèmes différentiels classiques de Liénard polynomiaux sont

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -u - f(u)v \end{cases} \quad (c.\grave{a}.d. g(u) = u) \quad (3.1)$$

Pour ces systèmes, Lins et al. (1977) ont formulé la conjecture suivante : si $f(u)$ est de degré $n \geq 1$, alors le système (3.1) possède au plus $[n/2]$ cycles limites.

Ils ont démontré cette conjecture pour $n = 1$. Récemment, la conjecture a également été prouvée pour $n = 3$, voir Li & Llibre (2012). Pour $n \geq 5$, Dumortier et al. (2007) et De Maesschalck & Dumortier (2011) ont montré que la conjecture est fausse. la conjecture reste ouverte uniquement pour $n = 4$.

Dans cette partie, en utilisant le théorie de moyennisation, nous étudions le nombre maximal de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{u} = v, \dot{v} = -u$ d'une classe d'équations différentielles de type

$$\begin{cases} \dot{u} = v - g_1(u) - f_1(u)v, \\ \dot{v} = -u - g_2(u) - f_2(u)v. \end{cases} \quad (3.2)$$

Remarquons que lorsque $g_1(u) = f_1(u) = 0$, le système coïncide avec les systèmes différentiels de Liénard généralisés. Cette étude a fait l'objet d'un article publié dans (Prac.R.Soc) (2012) [10].

Nous considérons tout d'abord le système suivant

$$\begin{cases} \dot{u} = v - \varepsilon(g_1^1(u) + f_1^1(u)v), \\ \dot{v} = -u - \varepsilon(g_2^1(u) + f_2^1(u)v), \end{cases} \quad (3.3)$$

où g_1^1, f_1^1, f_2^1 et g_2^1 sont des polynomes de degré respectif k, l, m et n , et ε est petit paramètre.

Théorème 3.1. *Pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit, le nombre maximal de cycles limites du système différentiel polynomial généralisé de Liénard (3.3) bifurquant à partir des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{u} = v, \dot{v} = -u$ en*

3.2. APPLICATION DE LA MÉTHODE DE MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE

utilisant la théorie de moyennisation d'ordre un est

$$\lambda_1 = \max \left\{ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{(k-1)}{2} \right\rfloor \right\}.$$

Considérons maintenant le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{u} = v - \varepsilon(g_1^1(u) + f_1^1(u)v) - \varepsilon^2(g_1^2(u) + f_1^2(u)v), \\ \dot{v} = -u - \varepsilon(g_2^1(u) + f_2^1(u)v) - \varepsilon^2(g_2^2(u) + f_2^2(u)v), \end{cases} \quad (3.4)$$

où g_1^1 et g_1^2 sont de degré k , et f_1^1 et f_1^2 sont de degré l et g_2^1 et g_2^2 sont de degré m , et f_2^1 et f_2^2 sont de degré n . De plus, ε est un petit paramètre.

Théorème 3.2. *Pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit, le nombre maximal de cycles limites du système différentiel polynomial généralisé de Liénard (3.4) bifurquant à partir des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{u} = v$, $\dot{v} = -u$ en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre d'ordre deux est*

$$\lambda_3 = \max \{ \lambda_1, \lambda_2 \},$$

avec

$$\begin{aligned} \lambda_2 = \max \{ & \mu + \left\lfloor \frac{(m-1)}{2} \right\rfloor, \mu + \left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{(n-1)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor, \\ & \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{(n-1)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(l-1)}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(l-1)}{2} \right\rfloor \}, \end{aligned}$$

où

$$\mu = \min \left\{ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{(k-1)}{2} \right\rfloor \right\}.$$

3.2 Application de la méthode de moyennisation du premier ordre

Nous allons appliquer la méthode de moyennisation du premier ordre, pour cela nous écrivons le système (3.3), en coordonnées polaires (ρ, ϕ) avec $u = \rho \cos \phi$, $v = \rho \sin \phi$, $\rho > 0$. On pose

$$f_1^1(u) = \sum_{i=0}^l a_{i,1} u^i, \quad f_2^1(u) = \sum_{i=0}^n a_{i,2} u^i,$$

$$g_1^1(u) = \sum_{i=0}^k b_{i,1} u^i \text{ et } g_2^1(u) = \sum_{i=0}^m b_{i,2} u^i,$$

**CHAPITRE 3. ESTIMATION DU NOMBRE DE CYCLES LIMITES
POUR UNE CLASSE DE SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS PLANAIRE**

le système (3.3) devient

$$\begin{cases} \dot{\rho} = -\varepsilon(\sum_{i=0}^n a_{i,2}\rho^{i+1} \cos^i \phi \sin^2 \phi + \sum_{i=0}^m b_{1,2}\rho^i \cos^i \phi \sin \phi \\ \quad + \sum_{i=0}^l a_{i,1}\rho^{i+1} \cos^{i+1} \phi \sin \phi + \sum_{i=0}^k b_{i,1}\rho^i \cos^{i+1} \phi), \\ \dot{\phi} = -1 - \frac{\varepsilon}{\rho}(\sum_{i=0}^n a_{i,2}\rho^{i+1} \cos^{i+1} \phi \sin \phi + \sum_{i=0}^m b_{i,2}\rho^i \cos^{i+1} \phi \\ \quad - \sum_{i=0}^l a_{i,1}\rho^{i+1} \cos^i \phi \sin^2 \phi - \sum_{i=0}^k b_{i,1}\rho^i \cos^i \phi \sin \phi), \end{cases}$$

Considérons maintenant ϕ comme une variable indépendante, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\phi} &= \varepsilon(\sum_{i=0}^n a_{i,2}\rho^{i+1} \cos^i \phi \sin^2 \phi + \sum_{i=0}^m b_{i,2}\rho^i \cos^i \phi \sin \phi \\ &\quad + \sum_{i=0}^l a_{i,1}\rho^{i+1} \cos^{i+1} \phi \sin \phi + \sum_{i=0}^k b_{i,1}\rho^i \cos^{i+1} \phi + O(\varepsilon^2)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F_{10}(\rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sum_{i=0}^n a_{i,2}\rho^{i+1} \cos^i \phi \sin^2 \phi + \sum_{i=0}^m b_{i,2}\rho^i \cos^i \phi \sin \phi \\ &\quad + \sum_{i=0}^l a_{i,1}\rho^{i+1} \cos^{i+1} \phi \sin \phi + \sum_{i=0}^k b_{i,1}\rho^i \cos^{i+1} \phi) d\phi, \end{aligned}$$

pour calculer l'expression exacte de F_{10} , nous utilisons les expressions des intégrales de l'annexe A.

Nous obtenons

$$\begin{aligned} F_{10}(\rho) &= \rho \sum_{i=0}^{[n/2]} \frac{a_{2,i}\alpha_i}{2^{i+1}(i+1)!} \rho^{2i} + \rho \sum_{i=0}^{[(k-1)/2]} \frac{b_{2i+1,1}\alpha_{i+1}}{2^{i+1}(i+1)!} \rho^{2i} \quad (3.5) \\ &= \rho \left(\sum_{i=0}^{[n/2]} \frac{a_{2,i}\alpha_i}{2^{i+1}(i+1)!} \rho^{2i} + \sum_{i=0}^{[(k-1)/2]} \frac{b_{2i+1,1}(2i+1)\alpha_i}{2^{i+1}(i+1)!} \rho^{2i} \right) \end{aligned}$$

Donc le polynôme $F_{10}(\rho)$ a au plus $\lambda_1 = \max \left\{ \left[\frac{n}{2} \right], \left[\frac{(k-1)}{2} \right] \right\}$ racines positives.

3.2.1 Exemples

Exemple 3.1

On considère le système :

$$\begin{cases} \dot{u} = v - \varepsilon(g_1^1(u) + f_1^1(u)v), \\ \dot{v} = -u - \varepsilon(g_2^1(u) + f_2^1(u)v), \end{cases} \quad (3.6)$$

3.2. APPLICATION DE LA MÉTHODE DE MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE

où

$$\begin{aligned} f_1^1(u) &= \sum_{i=0}^2 a_{i,1} u^i = a_{0,1} + a_{1,1} u + a_{2,1} u^2, \\ f_2^1(u) &= \sum_{i=0}^2 a_{i,2} u^i = a_{0,2} + a_{1,2} u + a_{2,2} u^2, \\ g_1^1(u) &= \sum_{i=0}^3 b_{i,1} u^i = b_{0,1} + b_{1,1} u + b_{2,1} u^2 + b_{3,1} u^3, \end{aligned}$$

et

$$g_2^1(u) = \sum_{i=0}^1 b_{i,2} u^i = b_{0,2} + b_{1,2} u,$$

En utilisant le théorème de moyennisation du premier ordre. De l'équation (3, 5) nous obtenons

$$\begin{aligned} F_{10}(\rho) &= \rho \left(\sum_{i=0}^1 \frac{a_{2,i} \alpha_i}{2^{i+1} (i+1)!} \rho^{2i} + \sum_{i=0}^1 \frac{b_{2i+1,1} (2i+1) \alpha_i}{2^{i+1} (i+1)!} \rho^{2i} \right) \\ &= \rho \left[\left(\frac{a_{2,0} \alpha_0}{2} + \frac{b_{1,1} \alpha_0}{2} \right) + \left(\frac{a_{2,1} \alpha_1}{8} + \frac{3b_{3,1} \alpha_1}{8} \right) \rho^2 \right] \end{aligned}$$

Donc

$$F_{10}(\rho) = \frac{\rho}{8} [4(a_{2,0} + b_{1,1}) + (a_{2,1} + 3b_{3,1}) \rho^2]$$

Alors le polynôme $F_{10}(\rho)$ peut avoir au plus un racines positives. Par conséquent, le système différentiel (3.7) peut avoir au plus un cycles limites.

Maintenant, si nous fixons

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= -5, \quad a_{1,2} = 2, \quad a_{2,1} = 4, \quad a_{2,2} = 1, \\ b_{1,1} &= -1, \quad b_{1,2} = -6, \quad b_{2,1} = 1, \quad b_{3,1} = 2, \end{aligned}$$

C,à d

$$\begin{aligned} g_1^1(u) &= 2u^3 + u^2 - u, \quad f_1^1(u) = 4u^2 - 5u \\ f_2^1(u) &= u^2 + 2u \quad \text{et} \quad g_2^1(u) = -6u \end{aligned}$$

Dans ce cas

$$F_{10}(\rho) = \frac{\rho}{8} [-4 + 10\rho^2] = 0,$$

*CHAPITRE 3. ESTIMATION DU NOMBRE DE CYCLES LIMITES
POUR UNE CLASSE DE SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS PLANAIRES*

Il ya un cycle limite de l'implytude $\rho = \sqrt{\frac{2}{5}}$.

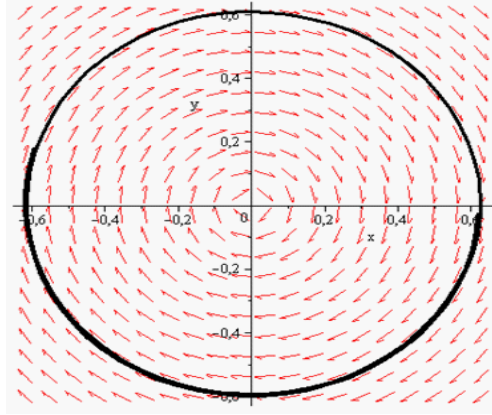


Figure 7. Un cycle limite du systme
3.6 pour $\varepsilon = 0.01$

Exemple 3.2

On considère le système :

$$\begin{cases} \dot{u} = v - \varepsilon(g_1^1(u) + f_1^1(u)v), \\ \dot{v} = -u - \varepsilon(g_2^1(u) + f_2^1(u)v), \end{cases} \quad (3.7)$$

où

$$\begin{aligned} f_1^1(u) &= \sum_{i=0}^4 a_{i,1} u^i = a_{0,1} + a_{1,1}u + a_{2,1}u^2 + a_{3,1}u^3 + a_{4,1}u^4, \\ f_2^1(u) &= \sum_{i=0}^4 a_{i,2} u^i = a_{0,2} + a_{1,2}u + a_{2,2}u^2 + a_{3,2}u^3 + a_{4,2}u^4, \\ g_1^1(u) &= \sum_{i=0}^4 b_{i,1} u^i = b_{0,1} + b_{1,1}u + b_{2,1}u^2 + b_{3,1}u^3 + b_{4,1}u^4, \\ g_2^1(u) &= \sum_{i=0}^1 b_{i,2} u^i = b_{0,2} + b_{1,2}u, \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de moyennisation du premier ordre. De l'équation (3, 5) nous obtenons

$$\begin{aligned} F_{10}(\rho) &= \rho \left(\sum_{i=0}^2 \frac{a_{2,i}\alpha_i}{2^{i+1}(i+1)!} \rho^{2i} + \sum_{i=0}^1 \frac{b_{2i+1,1}(2i+1)\alpha_i}{2^{i+1}(i+1)!} \rho^{2i} \right) \\ &= \rho \left[\left(\frac{a_{2,0}\alpha_0}{2} + \frac{b_{1,1}\alpha_0}{2} \right) + \left(\frac{a_{2,1}\alpha_1}{8} + \frac{3b_{3,1}\alpha_1}{8} \right) \rho^2 + \frac{a_{2,2}\alpha_2}{48} \rho^4 \right] \end{aligned}$$

3.3. APPLICATION DE LA MÉTHODE DE MOYENNISATION DU SECOND ORDRE

Donc

$$F_{10}(\rho) = \frac{\rho}{16} [8(a_{2,0} + b_{1,1}) + 2(a_{2,1} + 3b_{3,1})\rho^2 + a_{2,2}^4\rho]$$

Alors le pôynomiale $F_{10}(\rho)$ peut avoir au plus deux racines positives. Par conséquent, le système différentiel (3.7) peut avoir au plus deux cycles limites.

Maintenant, si nous fixons

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= 1, \quad a_{4,1} = 3, \quad a_{3,2} = -1, \quad a_{2,2} = 4, \\ b_{1,1} &= 1, \quad b_{2,1} = -5, \quad b_{3,1} = -2 \text{ et } b_{1,2} = -6 \end{aligned}$$

C,à,d :

$$\begin{aligned} g_1^1(u) &= -2u^3 - 5u^2 + u, \quad f_1^1(u) = 3u^4 + u \\ f_2^1(u) &= -u^3 + 4u^2 \text{ et } g_2^1(u) = -6u \end{aligned}$$

Dans ce cas

$$\begin{aligned} F_{10}(\rho) &= \frac{\rho}{16} [8(0 + 1) + 2(0 + 3 \times -2)\rho^2 + 4\rho^4] \\ &= \frac{\rho}{4} (2 - 3\rho^2 + \rho^4) \end{aligned}$$

Dans ce cas l'équation algébrique $F_{10}(\rho) = 0$ a deux solutions positives $\rho_1 = 1$ et $\rho_2 = \sqrt{2}$. D'après le Théorème (2.2.1), le système (3.7) a exactement deux cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{u} = v, \dot{v} = -u$.

3.3 Application de la méthode de moyennisation du second ordre

Pour démontrer le théorème 3.2, nous utilisons la méthode de moyennisation d'ordre deux . tenant compte de (3.3) et en posant :

$$\begin{aligned} f_1^1(u) &= \sum_{i=0}^l c_{i,1}u^i, \quad f_2^1(u) = \sum_{i=0}^n c_{i,2}u^i, \\ g_1^2(u) &= \sum_{i=0}^k d_{i,1}u^i \text{ et } g_2^2(u) = \sum_{i=0}^m d_{i,2}u^i. \end{aligned}$$

*CHAPITRE 3. ESTIMATION DU NOMBRE DE CYCLES LIMITES
POUR UNE CLASSE DE SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS PLANAIRES*

Le changement en coordonnées polaires (ρ, ϕ) , transforme le système (3.4) en

$$\begin{cases} \dot{\rho} = -\varepsilon \left(\sum_{i=0}^n a_{i,2} \rho^{i+1} \cos^i \phi \sin^2 \phi + \sum_{i=0}^m b_{i,2} \rho^i \cos^i \phi \sin \phi \right. \\ \quad \left. + \sum_{i=0}^l a_{i,1} \rho^{i+1} \cos^{i+1} \phi \sin \phi + \sum_{i=0}^k b_{i,1} \rho^i \cos^{i+1} \phi \right) \\ \quad - \varepsilon^2 \left(\sum_{i=0}^n c_{i,2} \rho^{i+1} \cos^i \phi \sin^2 \phi + \sum_{i=0}^m d_{i,2} \rho^i \cos^i \phi \sin \phi \right. \\ \quad \left. + \sum_{i=0}^l c_{i,1} \rho^{i+1} \cos^{i+1} \phi \sin \phi + \sum_{i=0}^k d_{i,1} \rho^i \cos^{i+1} \phi \right), \\ \dot{\phi} = -1 - \frac{\varepsilon}{\rho} \left(\sum_{i=0}^n a_{i,2} \rho^{i+1} \cos^{i+1} \phi \sin \phi + \sum_{i=0}^m b_{i,2} \rho^i \cos^{i+1} \phi \right. \\ \quad \left. - \sum_{i=0}^l a_{i,1} \rho^{i+1} \cos^i \phi \sin^2 \phi - \sum_{i=0}^k b_{i,1} \rho^i \cos^i \phi \sin \phi \right) \\ \quad - \frac{\varepsilon^2}{\rho} \left(\sum_{i=0}^n c_{i,2} \rho^{i+1} \cos^{i+1} \phi \sin \phi + \sum_{i=0}^m d_{i,2} \rho^i \cos^{i+1} \phi \right. \\ \quad \left. - \sum_{i=0}^l c_{i,1} \rho^{i+1} \cos^i \phi \sin^2 \phi - \sum_{i=0}^k d_{i,1} \rho^i \cos^i \phi \sin \phi \right). \end{cases} \quad (4.1)$$

Considérons maintenant ϕ comme une variable indépendante, on obtient

$$\frac{d\rho}{d\phi} = \varepsilon S_1(\phi, \rho) + \varepsilon^2 S_2(\phi, \rho) + O(\varepsilon^2),$$

où

$$\begin{aligned} S_1(\phi, \rho) = & \sum_{i=0}^n a_{i,2} \rho^{i+1} \cos^i \phi \sin^2 \phi + \sum_{i=0}^m b_{i,2} \rho^i \cos^i \phi \sin \phi \\ & + \sum_{i=0}^l a_{i,1} \rho^{i+1} \cos^{i+1} \phi \sin \phi + \sum_{i=0}^k b_{i,1} \rho^i \cos^{i+1} \phi \end{aligned} \quad (4.2)$$

et

$$S_2(\phi, \rho) = H(\rho, \phi) + \rho S(\rho, \phi),$$

avec

$$\begin{aligned} H(\rho, \phi) = & \sum_{i=0}^n c_{i,2} \rho^{i+1} \cos^i \phi \sin^2 \phi + \sum_{i=0}^m d_{i,2} \rho^i \cos^i \phi \sin \phi \\ & + \sum_{i=0}^l c_{i,1} \rho^{i+1} \cos^{i+1} \phi \sin \phi + \sum_{i=0}^k d_{i,1} \rho^i \cos^{i+1} \phi \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S(\rho, \phi) = & - \left(\sum_{i=0}^n a_{i,2} \rho^i \cos^i \phi \sin^2 \phi + \sum_{i=0}^m b_{i,2} \rho^{i-1} \cos^i \phi \sin \phi \right. \\ & \left. + \sum_{i=0}^l a_{i,1} \rho^i \cos^{i+1} \phi \sin \phi + \sum_{i=0}^k b_{i,1} \rho^{i-1} \cos^{i+1} \phi \right) \\ & \times \left(\sum_{i=0}^n a_{i,2} \rho^i \cos^{i+1} \phi \sin \phi + \sum_{i=0}^m b_{i,2} \rho^{i-1} \cos^{i+1} \phi \right. \\ & \left. - \sum_{i=0}^l a_{i,1} \rho^i \cos^i \phi \sin^2 \phi - \sum_{i=0}^k b_{i,1} \rho^{i-1} \cos^i \phi \sin \phi \right). \end{aligned}$$

3.3. APPLICATION DE LA MÉTHODE DE MOYENNISATION DU SECOND ORDRE

Déterminons la fonction F_{20} correspondante. Pour cela, posons $F_{10}(\rho) = 0$ qui équivaut à

$$\begin{cases} b_{2i+1,1} = -\frac{a_{2i,2}}{2i+1}, & i = 0, 1, \dots, \mu, \\ b_{2i+1,1} = a_{2i,2} = 0, & i = \mu + 1, \dots, \lambda_1, \end{cases} \quad (4.3)$$

où

$$\mu = \min \left\{ \left[\frac{n}{2} \right], \left[\frac{(k-1)}{2} \right] \right\}.$$

Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} S_1(\phi, \rho) &= \sum_{i=0}^n (i+1) a_{i,2} \rho^i \cos^i \phi \sin^2 \phi \\ &\quad + \sum_{i=0}^m i b_{i,2} \rho^{i-1} \cos^i \phi \sin \phi \\ &\quad + \sum_{i=0}^l (i+1) a_{i,1} \rho^i \cos^{i+1} \phi \sin \phi + \sum_{i=0}^k i b_{i,1} \rho^{i-1} \cos^{i+1} \phi, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} S_1(\phi, \rho) &= \sum_{i=0}^{\mu} a_{2i,2} \rho^{2i} \cos^{2i} \phi \left((2i+1) \sin^2 \phi - \cos^2 \phi \right) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{[(n-1)/2]} (2i+2) a_{2i+1,2} \rho^{2i+1} \cos^{2i+1} \phi \sin^2 \phi \\ &\quad + \sum_{i=0}^m i b_{i,2} \rho^{i-1} \cos^i \phi \sin \phi + \sum_{i=0}^m i b_{i,2} \rho^{i-1} \cos^i \phi \sin \phi \\ &\quad + \sum_{i=0}^l (i+1) a_{i,1} \rho^i \cos^{i+1} \phi \sin \phi + \sum_{i=0}^{[k/2]} 2i b_{2i,1} \rho^{2i-1} \cos^{2i+1} \phi, \end{aligned}$$

et

$$y_1(\phi, \rho) = \int_0^{\phi} S_1(\psi, \rho) d\psi,$$

avec

$$\begin{aligned} S_1(\phi, \rho) &= \sum_{i=0}^{[(n-1)/2]} a_{2i+1} \rho^{2i+2} \cos^{2i+1} \phi - \sum_{i=0}^{[(n-1)/2]} a_{2i+1,2} \rho^{2i+2} \cos^{2i+3} \phi \\ &\quad + \sum_{i=0}^{[n/2]} a_{2i,2} \rho^{2i+1} \cos^{2i} \phi - \sum_{i=0}^{[n/2]} a_{2i,2} \rho^{2i+1} \cos^{2i+2} \phi \\ &\quad + \sum_{i=0}^m b_{i,2} \rho^i \cos^i \phi \sin \phi + \sum_{i=0}^l a_{i,1} \rho^{i+1} \cos^{i+1} \phi \sin \phi \\ &\quad + \sum_{i=0}^{[(k-1)/2]} b_{2i+1,1} \rho^{2i+1} \cos^{2i+2} \phi + \sum_{i=0}^{[k/2]} b_{2i,1} \rho^{2i} \cos^{2i+1} \phi \end{aligned}$$

*CHAPITRE 3. ESTIMATION DU NOMBRE DE CYCLES LIMITES
POUR UNE CLASSE DE SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS PLANAIRE*

donc

$$\begin{aligned}
 F_1(\phi, \rho) = & \sum_{i=0}^{[(n-1)/2]} a_{2i+1,2} \rho^{2i+2} \cos^{2i+1} \phi - \sum_{i=0}^{[(n-1)/2]} a_{2i+1,2} \rho^{2i+2} \cos^{2i+3} \phi \\
 & + \sum_{i=0}^{\mu} a_{2i,2} \rho^{2i+1} \cos^{2i} \phi - \sum_{i=0}^{\mu} \frac{2i+2}{2i+2} a_{2i,2} \rho^{2i+1} \cos^{2i+2} \phi \\
 & + \sum_{i=0}^m b_{i,2} \rho^i \cos^i \phi \sin \phi + \sum_{i=0}^l a_{i,1} \rho^{i+1} \cos^{i+1} \phi \sin \phi \\
 & + \sum_{i=0}^{[k/2]} b_{2i,1} \rho^{2i} \cos^{2i+1} \phi
 \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que

$$\frac{1}{2^{2i}} \binom{2i}{i} \phi - \frac{2i+2}{2i+1} \frac{1}{2^{2i+2}} \binom{2i+2}{i+1} \phi = 0,$$

ensuite, en utilisant les intégrales de l'annexe A, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 y_1(\phi, \rho) = & \sum_{i=0}^{[(n-1)/2]} a_{2i+1} \rho^{2i+2} \sum_{l=0}^{i-1} \tilde{\gamma}_{i,l} \sin((2l+1)\phi) + \sum_{i=0}^{\mu} a_{2i,2} \rho^{2i+1} \sum_{l=0}^{i+1} \tilde{\beta}_{i,l} \sin(2l\phi) \\
 & + \sum_{i=0}^m \frac{b_{i,2}}{i+1} \rho^i (1 - \cos^{i+2} \phi) + \sum_{i=0}^l \frac{a_{i,1}}{i+2} \rho^{i+1} (1 - \cos^{i+2} \phi) \\
 & + \sum_{i=0}^{[k/2]} b_{2i,1} \rho^{2i} \sum_{i=0}^i \gamma_{i,l} \sin((2i+1)\phi)
 \end{aligned}$$

où

$$\tilde{\gamma}_{i,l} = \begin{cases} \gamma_{i,l} - \gamma_{i+1,l}, & 0 \leq l \leq i, \\ -\gamma_{i+1,i+1}, & l = i+1, \end{cases}$$

et

$$\tilde{\beta}_{i,l} = \begin{cases} \frac{\beta_{i,l} - 2(i+1)\beta_{i+1,l}}{(2i+1)}, & 0 \leq l \leq i, \\ \frac{-2(i+1)\beta_{i+1,i+1}}{(2i+1)}, & l = i+1. \end{cases}$$

on a

$$W = \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\rho} S_1(\phi, \rho) y_1(\phi, \rho) d\phi = \rho P_1(\rho^2),$$

où

$$P_1(\rho^2) = \sum_{i=0}^{\mu} \sum_{j=0}^{[(m-1)/2]} A_{i,j} (\rho^2)^{i+j} + \sum_{i=0}^{\mu} \sum_{j=0}^{[l/2]} B_{i,j} (\rho^2)^{i+j}$$

3.3. APPLICATION DE LA MÉTHODE DE MOYENNISATION DU SECOND ORDRE

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=0}^{[(n-1)/2]} \sum_{j=0}^{[m/2]} C_{i,j} (\rho^2)^{i+j} + \sum_{i=0}^{[(n-1)/2]} \sum_{j=0}^{[(l-1)/2]} D_{i,j} (\rho^2)^{i+j+1} \\
& + \sum_{i=0}^{[k/2]} \sum_{j=0}^{[m/2]} E_{i,j} (\rho^2)^{i+j-1} + \sum_{i=0}^{[k/2]} \sum_{j=0}^{[(l-1)/2]} F_{i,j} (\rho^2)^{i+j} \\
& + \sum_{i=0}^{[m/2]} \sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} G_{i,j} (\rho^2)^{i+j} + \sum_{i=0}^{[(m-1)/2]} \sum_{j=0}^{\mu} H_{i,j} (\rho^2)^{i+j} \\
& + \sum_{i=0}^{[m/2]} \sum_{j=0}^{[k/2]} I_{i,j} (\rho^2)^{i+j-1} + \sum_{i=0}^{[(l-1)/2]} \sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} J_{i,j} (\rho^2)^{i+j+1} \\
& + \sum_{i=0}^{[l/2]} \sum_{j=0}^{\mu} K_{i,j} (\rho^2)^{i+j} + \sum_{i=0}^{[(l-1)/2]} \sum_{j=0}^{[k/2]} L_{i,j} (\rho^2)^{i+j},
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
A_{i,j} &= \frac{\pi a_{2i,2} b_{2j+1,2} \alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1} (i+j+2)!}, B_{i,j} = \frac{\pi a_{2i,2} a_{2j,1} \alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1} (i+j+2)!}, \\
C_{i,j} &= -\frac{\pi (2i+2) a_{2i+1,2} b_{2j,2} \alpha_{i+j+1}}{(2j+1) 2^{i+j+1} (i+j+2)!},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{i,j} &= -\frac{\pi (2i+2) a_{2i+1,2} a_{2j+1,1} \alpha_{i+j+2}}{(2j+3) 2^{i+j+2} (i+j+3)!}, \\
E_{i,j} &= \frac{\pi 2i b_{2i,1} b_{2j,2} \alpha_{i+j+1}}{(2j+1) 2^{i+j} (i+j+1)!}, F_{i,j} = \frac{\pi 2i b_{2i,1} a_{2j+1,1} \alpha_{i+j+2}}{(2j+3) 2^{i+j+1} (i+j+2)!},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{i,j} &= \pi \sum_{s=0}^{j+1} 2i b_{2i,2} a_{2j+1,2} \tilde{\gamma}_{j,s} C_{i,s}, \\
H_{i,j} &= \pi \sum_{s=1}^{j+1} (2i+1) b_{2i+1,2} a_{2j,2} \tilde{\beta}_{j,s} K_{i,s},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{i,j} &= \pi \sum_{s=0}^j 2i b_{2i,2} b_{2j,1} \gamma_{j,s} C_{i,s} \\
, J_{i,j} &= \pi \sum_{s=0}^{j+1} (2i+2) a_{2i+1,1} a_{2j+1,2} \tilde{\gamma}_{j,s} C_{i,s}, \\
K_{i,j} &= \pi \sum_{s=1}^{j+1} (2i+1) a_{2i,1} a_{2j,2} \tilde{\beta}_{j,s} K_{i,s}
\end{aligned}$$

et

$$L_{i,j} = \pi \sum_{s=0}^j (2i+2) a_{2i+1,1} b_{2j,1} \gamma_{j,s} C_{i,s}.$$

*CHAPITRE 3. ESTIMATION DU NOMBRE DE CYCLES LIMITES
POUR UNE CLASSE DE SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS PLANAIRES*

$P_1(\rho^2)$ est un polynôme de la variable ρ^2 de degré

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} H(\rho, \phi) d\phi &= \sum_{i=0}^{[n/2]} c_{2i,2} \rho^{2i+1} \int_0^{2\pi} \cos^{2i} \phi \sin^2 \phi d\phi \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{[(k-1)/2]} d_{2i+1,1} \rho^{2i+1} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+2} \phi d\phi \\
 &= \pi \rho \sum_{i=0}^{[n/2]} \frac{c_{2i,2} \alpha_i}{2^i (i+1)!} \rho^{2i} + \pi \rho \sum_{i=0}^{[(k-1)/2]} \frac{d_{2i+1,1} \alpha_i (2i+1)}{2^i (i+1)!} \rho^{2i} \\
 &= \rho P_2(\rho^2),
 \end{aligned}$$

où P_2 est un polynôme de la variable ρ^2 de degré λ_1 .

En outre,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} S(\rho, \phi) d\phi &= -2 \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{i,2} b_{j,2} \rho^{i+j+1} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+1} \phi \sin^2 \phi d\phi \\
 &\quad + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^l a_{i,2} a_{j,1} \rho^{i+j} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j} \phi \sin^4 \phi d\phi \\
 &\quad + \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^k b_{i,2} b_{j,1} \rho^{i+j-2} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j} \phi \sin^2 \phi d\phi \\
 &\quad - \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^n a_{i,1} a_{j,2} \rho^{i+j} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+2} \phi \sin^2 \phi d\phi \\
 &\quad + 2 \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^k a_{i,1} b_{j,1} \rho^{i+j-1} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+1} \phi \sin^2 \phi d\phi \\
 &\quad - \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^m b_{i,1} b_{j,2} \rho^{i+j-2} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+2} \phi d\phi.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

3.3. APPLICATION DE LA MÉTHODE DE MOYENNISATION DU SECOND ORDRE

En utilisant la relation (4.3) , nous optenons

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} S(\rho, \phi) d\phi = & -2 \sum_{i=0}^{\mu} \sum_{j=0}^{[(m-1)/2]} a_{2i,2} b_{2j+1,2} \rho^{2i+2j} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+2j+2} \phi \sin^2 \phi d\phi \\
& -2 \sum_{i=0}^{[(n-1)/2]} \sum_{j=0}^{[m/2]} a_{2i+1,2} b_{2j,2} \rho^{2i+2j} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+2j+2} \phi \sin^2 \phi d\phi \\
& - \sum_{i=0}^{\mu} \sum_{j=0}^{[l/2]} a_{2i,2} a_{2j,1} \rho^{2i+2j} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+2j} \phi \sin^2 \phi \cos(2\phi) d\phi \\
& - \sum_{i=0}^{[(n-1)/2]} \sum_{j=0}^{[(l-1)/2]} a_{2i+1,2} a_{2j+1,1} \rho^{2i+2j+2} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+2j+2} \phi \sin^2 \phi \cos(2\phi) d\phi \\
& - \sum_{i=0}^{[m/2]} \sum_{j=0}^{[k/2]} b_{2i,2} b_{2j,1} \rho^{2i+2j-2} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+2j} \phi \cos(2\phi) d\phi \\
& - \sum_{i=0}^{[(m-1)/2]} \sum_{j=0}^{[(k-1)/2]} b_{2i+1,2} b_{2j+1,1} \rho^{2i+2j} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+2j+2} \phi \cos(2\phi) d\phi \\
& -2 \sum_{i=0}^{[l/2]} \sum_{j=0}^{\mu} a_{2i,1} \frac{a_{2j,2}}{2j+1} \rho^{2i+2j} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+2j+2} \phi \sin^2 \phi d\phi \\
& +2 \sum_{i=0}^{[(l-1)/2]} \sum_{j=0}^{[k/2]} a_{2i+1,1} b_{2j,1} \rho^{2i+2j} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+2j+2} \phi \sin^2 \phi d\phi,
\end{aligned}$$

où les troisième et quatrième lignes (respectivement, les cinquième et sixième) proviennent de la combinaison des deuxième et quatrième (respectivement, troisième et sixième) lignes de (4.4). Nous écrivons

$$\int_0^{2\pi} S(\rho, \phi) d\phi = P_3(\rho^2),$$

*CHAPITRE 3. ESTIMATION DU NOMBRE DE CYCLES LIMITES
POUR UNE CLASSE DE SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS PLANAIRES*

où P_3 est égale à

$$\begin{aligned} P_3(\rho^2) = & \sum_{i=0}^{\mu} \sum_{j=0}^{[(m-1)/2]} \tilde{A}_{i,j}(\rho^2)^{i+j} + \sum_{i=0}^{[(n-1)/2]} \sum_{j=0}^{[m/2]} \tilde{B}_{i,j}(\rho^2)^{i+j} \\ & + \sum_{i=0}^{\mu} \sum_{j=0}^{[l/2]} \tilde{C}_{i,j}(\rho^2)^{i+j} + \sum_{i=0}^{[(n-1)/2]} \sum_{j=0}^{[(l-1)/2]} \tilde{D}_{i,j}(\rho^2)^{i+j+1} \\ & + \sum_{i=0}^{[m/2]} \sum_{j=0}^{[k/2]} \tilde{E}_{i,j}(\rho^2)^{i+j-1} + \sum_{i=0}^{[(l-1)/2]} \sum_{j=0}^{[k/2]} \tilde{F}_{i,j}(\rho^2)^{i+j}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{i,j} &= \frac{\pi a_{2i,2} b_{2j+1} \alpha_{i+j+1}}{2^{i+j} (i+j+2)!} \left(-1 + \frac{i+j+1}{2i+1} \right), \tilde{B}_{i,j} = -\frac{\pi a_{2i+1,2} b_{2j,2} \alpha_{i+j+1}}{2^{i+j} (i+j+2)!} \\ \tilde{C}_{i,j} &= -\frac{\pi a_{2i,2} a_{2j,1} \alpha_{i+j}}{2^{i+j} (i+j+2)!} \left(i+j-1 + \frac{2(i+j)+1}{2i+1} \right), \\ \tilde{D}_{i,j} &= -\frac{\pi (i+j) a_{2i+1,2} a_{2j+1,1} \alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1} (i+j+3)!}, \tilde{E}_{i,j} = -\frac{\pi (i+j) b_{2i,2} b_{2j,1} \alpha_{i+j}}{2^{i+j-1} (i+j+1)!} \\ \text{et } \tilde{F} &= \frac{\pi a_{2i+1,1} b_{2j,1} \alpha_{i+j+1}}{2^{i+j} (i+j+2)!}. \end{aligned}$$

Alors

$$F_{20} = \frac{\rho}{2\pi} (P_1(\rho^2) + P_2(\rho^2) + P_3(\rho^2)).$$

$P_3(\rho^2)$ est un polynôme en la variable ρ^2 de degré

$$\begin{aligned} \lambda_2 = & \max \left\{ \mu + \left\lceil \frac{(m-1)}{2} \right\rceil, \mu + \left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{(n-1)}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil, \right. \\ & \left. \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil - 1, \left\lceil \frac{(n-1)}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{(l-1)}{2} \right\rceil + 1, \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{(l-1)}{2} \right\rceil \right\}, \end{aligned}$$

où

$$\mu = \min \left\{ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{(k-1)}{2} \right\rceil \right\}.$$

3.3. APPLICATION DE LA MÉTHODE DE MOYENNISATION DU SECOND ORDRE

Ensuite, pour trouver les racines réelles positives de F_{20} , il faut déterminer les zéros d'un polynôme en ρ^2 de degré $\lambda_3 = \max \{\lambda_1, \lambda_2\}$. Il en résulte que F_{20} possède au plus λ_3 racines positives. De plus, on peut choisir les coefficients $a_{i,1}$, $a_{i,2}$, $b_{i,1}$, $b_{i,2}$, $c_{i,1}$, $c_{i,2}$, $d_{i,1}$ et $d_{i,2}$ de manière à ce que F_{20} ait exactement λ_3 racines positives. Par conséquent, le théorème est démontré.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié les cycles limites d'une classe de systèmes différentiels planaires en utilisant la méthode de moyennisation du premier et du second ordre. Cette approche nous a permis d'estimer le nombre maximal de cycles limites pouvant bifurquer d'un centre linéaire perturbé. Les résultats obtenus confirment l'efficacité des méthodes analytiques dans l'étude qualitative des systèmes dynamiques non linéaires.

Nous continuons à travailler sur la recherche des cycles limites des équations différentielles ordinaires. On se propose d'étudier les cycles limites pour une classe de systèmes différentiels de Liénard de la forme

$$\begin{cases} \dot{u} = v - \sum_{i=1}^3 \varepsilon^i (g_1^i(u) + f_1^i(u) v^{i-1}), \\ \dot{v} = -u - \sum_{i=1}^3 \varepsilon^i (g_2^i(u) + f_2^i(u) v^{i-1}), \end{cases}$$

où $g_1^i(u)$, $f_1^i(u)$, $g_2^i(u)$ and $f_2^i(u)$ sont des polynômes d'un degré donné et ε est un petit paramètre.

Appendice

5.1 Appendice A

Pour $i \geq 0$, nous avons

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2i+1} \phi \sin^2 \phi d\phi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos^i \phi \sin \phi d\phi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos^{2i+1} \phi d\phi = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2i} \phi d\phi = \frac{\pi \alpha_i}{2^{i-1} i!}, \quad \int_0^{2\pi} \cos^{2i} \phi \sin^2 \phi d\phi = \frac{\pi \alpha_i}{2^i (i+1)!},$$

$$\text{où } \alpha_k = 1.3.5 \dots (2k-1), \quad \alpha_0 = \alpha_1 = 1$$

$$\begin{aligned} \int_0^\phi \cos^{2i} \phi d\phi &= \frac{1}{2^{2i}} \binom{2i}{i} \phi + \frac{1}{2^{2i}} \sum_{l=0}^i \binom{2i}{i+l} \frac{1}{l} \sin(2l\phi) \\ &= \frac{1}{2^{2i}} \binom{2i}{i} \phi + \sum_{l=1}^i \beta_{i,l} \sin(2l\phi), \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2i} \phi \cos(2\phi) d\phi = \frac{\pi i \alpha_i}{2^{i-1} (i+1)!},$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2i} \phi \sin^2 \phi \cos(2\phi) d\phi = \frac{\pi (i-1) \alpha_i}{2^i (i+2)!},$$

$$\begin{aligned} \int_0^\phi \cos^{2i+1} \phi d\phi &= \frac{1}{2^{2i}} \sum_{l=0}^i \binom{2i+1}{i-l} \frac{1}{2l+1} \sin((2l+1)\phi) \\ &= \sum_{l=0}^i \gamma_{i,l} \sin((2l+1)\phi), \end{aligned}$$

$$\int_0^\phi \cos^i \phi \sin \phi d\phi = \frac{1}{i+1} (1 - \cos^{i+1} \phi),$$

$$\int_0^\phi \cos^{2i+1} \phi \sin \phi \sin((2l+1)\phi) d\phi = \int_0^\phi \cos^{2i} \phi \sin \phi \sin(2l\phi) d\phi = 0, \quad l \geq 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \phi \sin((2l+1)\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} \cos^i \phi \sin(2l\phi) d\phi = 0, \quad l \geq 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \phi \sin^2 \phi \sin((2l+1)\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} \cos^i \phi \sin^2 \phi \sin(2l\phi) d\phi = 0, \quad l \geq 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2i} \phi \sin \phi \sin((2l+1)\phi) d\phi = \pi C_{i,l}, \quad l \geq 0,$$

et

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2i+1} \phi \sin \phi \sin(2l\phi) d\phi = \pi K_{i,l}, \quad l \geq 1,$$

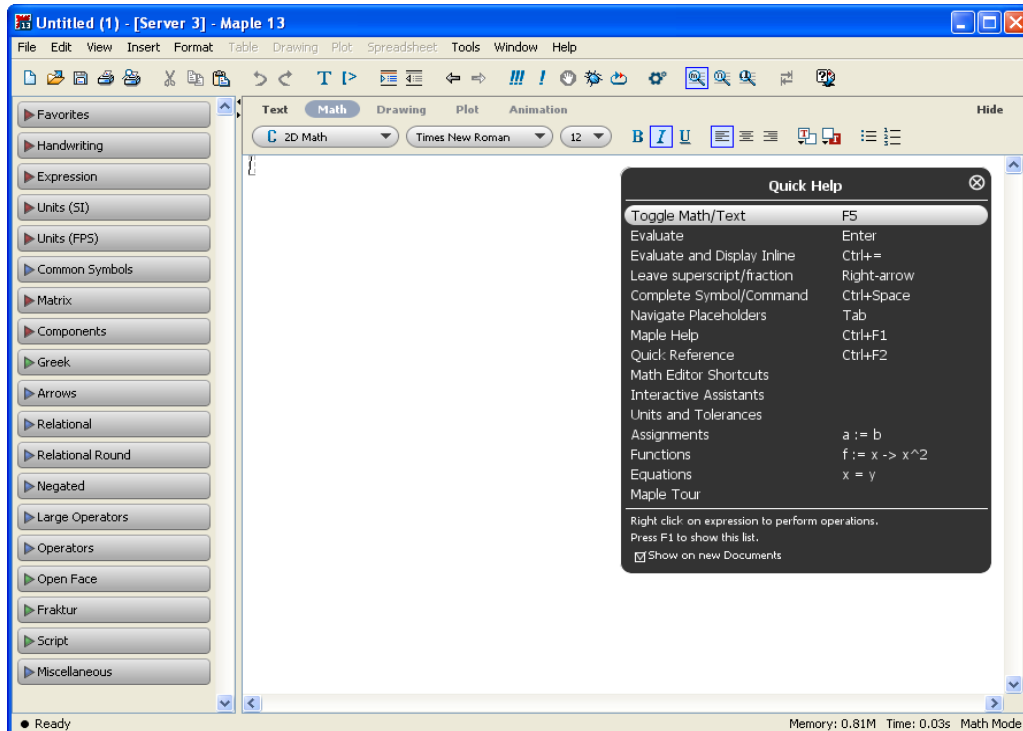
où $C_{i,l}$ et $K_{i,l}$ sont des constantes non nulles. Pour plus de détails, voir [1], Abramowitz & Stegun (1964).

5.2 Appendice B

Dans ce travail, j'ai utilisé le logiciel Maple 13, un environnement puissant de calcul symbolique et numérique, largement employé dans les domaines des mathématiques appliquées et de l'ingénierie. Ce programme m'a permis de traiter efficacement l'étude des solutions périodiques isolées des systèmes d'équations différentielles.

J'ai utilisé les fonctionnalités de tracé de phase, de représentation en deux dimensions, ainsi que les options d'animation proposées par le logiciel, afin de mettre en évidence les trajectoires correspondant aux solutions périodiques isolées. Cela m'a permis d'analyser visuellement la stabilité de ces solutions et de mieux comprendre la nature du phénomène étudié.

Ainsi, Maple 13 s'est révélé être un outil essentiel dans ce travail, en me fournissant les moyens nécessaires pour compléter et illustrer l'analyse théorique de manière claire et rigoureuse.



```

○ restart;
○ with(DEtools);
[AreSimilar, DENormal, DEplot, DEplot3d, DEplot_polygon, DFactor, DFactorLCLM,
DFactorsols, Dchangevar, FunctionDecomposition, GCRD, Gosper, Heunsols,
Homomorphisms, IVPsol, IsHyperexponential, LCLM, MeijerGsols,
MultiplicativeDecomposition, ODEInvariants, PDEchangecoords, PolynomialNormalForm,
RationalCanonicalForm, ReduceHyperexp, RiemannPsols, Xchange, Xcommutator, Xgauge,
Zeilberger, abelsol, adjoint, autonomous, bernoullisol, buildsol, buildsym, canoni, caseplot,
casesplit, checkrank, chinisol, clairautsol, constcoeffsols, convertAlg, convertsys,
dalembertsol, dcoeffs, de2diffop, dfieldplot, diff_table, diffop2de, dperiodic_sols, dpolyform,
dsols, eigenring, endomorphism_charpoly, equinv, eta_k, eulersols, exactsol, expsols,
exterior_power, firint, firtest, formal_sol, gen_exp, generate_ic, genhomosol, gensys,
hamilton_eqs, hypergeomsols, hyperode, indicialeq, infgen, initialdata, integrate_sols,
intfactor, invariants, kovacicssols, leftdivision, liesol, line_int, linearsol, matrixDE,
matrix_riccati, maxdimsystems, moser_reduce, muchange, mult, mutest, newton_polygon,
normalG2, ode_int_y, ode_y1, odeadvisor, odepde, parametricsol, particularsol,
phaseportrait, poincare, polysols, power_equivalent, rational_equivalent, ratsols, redode,
reduceOrder, reduce_order, regular_parts, regularsp, remove_RootOf, riccati_system,
riccatisol, rifread, rifsimp, rightdivision, rtaylor, separablesol, singularities, solve_group,
super_reduce, symgen, symmetric_power, symmetric_product, symtest, transinv, translate,
untranslate, varparam, zoom ]

```

(1)

```

○ ODE12 d [diff(x(t), t) = y(t), diff(y(t), t) = t x(t) C 0.01 (1 K x(t)$$2) $y(t) ];
ODE12 := [ d/dt x(t) = y(t), d/dt y(t) = t x(t) C 0.01 (1 K x(t)^2) y(t) ]

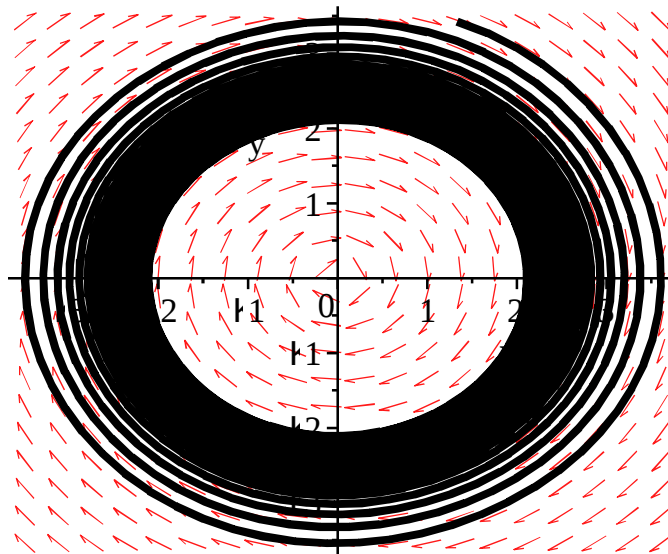
```

(2)

```

○ DEplot(ODE12, [x(t), y(t)], t = t100 ..100, [[x(0) = 0, y(0) = 2.3]], stepsize = 0.1, method
= classical[rk2], linecolor = black);

```

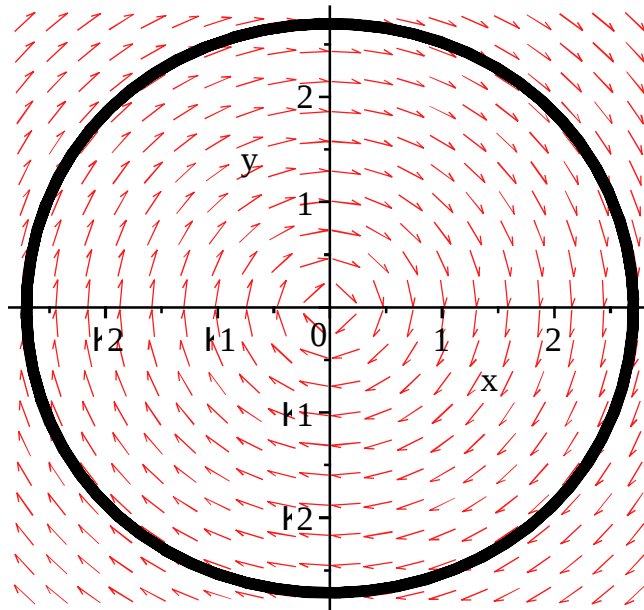


$\bullet$ `ODE16 d [diff(x(t), t) = y(t) C 0.01 (1 K (x(t))$y(t)) C (0.01$y(t))$x(t) K (y(t))$x(t)), diff(y(t), t) = -x(t) C 0.01 x(t)$y(t) C (0.01$y(t))$x(t) K (y(t))$x(t)];`

$\bullet$ `ODE16 := [ d/dt x(t) = y(t) C 0.01 K 0.01 x(t)^2 y(t) C 0.0001 x(t) K 0.0001 y(t)^2 x(t),` (3)

$\bullet$ `d/dt y(t) = -x(t) C 0.01 y(t)^2 x(t) C 0.0001 (1 K y(t)^2 x(t)) y(t) ]`

$\bullet$ `DEplot(ODE16, [x(t), y(t)], t = 100..100, [[x(0) = 1, y(0) = 2.5]], stepsize = 0.1, method = classical[rk2], linecolor = black);`



Bibliographie

- [1] M. Abramowitz and I. Stegun. 1964 Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, no. 55. Washington, DC : US Government Printing Office.
- [2] T. R. Blows and N. G. Lloyd. The number of small-amplitude limit cycles of Liénard equations. Maths. Proc. Camb. Phil. Soc. 95 : (1984), 359-366.
- [3] A. Buica and J. Llibre. Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree, *Bull.Sci. Math.*, **128** : 7-22, 2004.
- [4] A. Buica, J.P. Françoise and J. Llibre, Periodic Solutions of Nonlinear periodic Differential Systems with a Small Parameter. Comm. On Pure and Appl.Anal, 6 :103-111,2007.
- [5] H. Dulac. Sur les cycles limites. Bull. Soc. Math. France 5,2 : (1923), 45-188.
- [6] A. Gasull and J. Torregrosa. Small-amplitude limit cycles in Liénard systems via multiplicity. J. Diff. Eqs, 159 : (1998), 1015-1039.
- [7] D. Hilbert. Mathematish probleme. Lecture, Second Internat, Congr, Math, (Paris, 1900), Nachn. Ges. Wiss. G" Hingen Math. Phys. kl. (1900), 253-297. English transl, Bull. Amer. Math. Soc. 8 : (1902), 437-479.
- [8] A. Liénard. Etude des oscillations entretenues. Revue Générale de l'Elictricité. 23 : (1928), 946-954.
- [9] A. Lins, W. De Melo and C. C. Pugh. On Liénard's equation. Lecture Notes in math. Springer, 597 : (1977), 335-357.
- [10] B. J. Llibre and C. Valls. On the number of limit cycles of a class of polynomial differential systems. Proc. R. Soc. A. (2012), 14 pages, doi :10.1098/rspa.2011.0741

- [11] S. Lynch and C. J. Christopher. Limit cycles in highly non-linear differential equations. *J. Sound Vib.* 224 : (1999), 505-517.
- [12] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems. Texts in Applied Mathematics 7*, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [13] P. Yu and M. Han. Limit cycles in generalized Liénard systems. *Chaos solutons fractals.* 30 (2006), 1048-1068.