

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par : **Nor El-Houda BELHIRECHE**

Intitulé

**Traitement numérique par différence finie des
équations intégral-différentielles avec retard**

Dirigé par :

Pr. GUEBBAI Hamza

Devant le jury

**PRESIDENT
RAPPORTEUR
EXAMINATEUR
EXAMINATEUR**

**Dr SEGNI Sami
Pr GUEBBAI Hamza
Dr DIDA Ridha
Dr BOUAZILA Nada**

**MCA Univ-Guelma
Prof Univ-Guelma
MCB Univ-Guelma
MCB Univ-Guelma**

Session Juin 2025

Remerciement

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon encadreur, ***Pr. GUEB-BAI Hamza***, pour sa précieuse aide, son accompagnement constant, et ses conseils éclairés tout au long de la réalisation de ce mémoire. Sa rigueur scientifique et sa disponibilité ont grandement contribué à la qualité de ce travail.

Je remercie sincèrement les membres du jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'évaluer ce travail, ainsi que pour l'intérêt, le temps et l'attention qu'ils y ont consacrés.

Je remercie également ma soeur ***Dr. Hanane Belhireche***, enseignante au Département de Mathématiques de l'Université 8 Mai 1945 Guelma, pour les connaissances transmises et son engagement durant mon parcours universitaire.

Dédicace

Je dédie ce travail :

À mes parents,

À ma famille,

À toutes les personnes qui ont cru en moi et m'ont soutenu de près ou de loin.

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions une classe particulière d'équations intégral-différentielles non linéaires de Volterra avec retard. Ce type d'équation permet de modéliser des phénomènes dynamiques dépendant de l'historique du système ainsi que d'un terme différé. Nous rappelons d'abord l'existence et l'unicité de la solution en utilisant la méthode d'itération de Picard. Ensuite, nous proposons une méthode numérique basée sur la discrétisation par différences finies en arrière, combinée à une quadrature de type Nyström pour traiter le terme intégral. L'analyse du système discret montre que la méthode est bien posée et convergente. Des simulations numériques illustrent l'efficacité et la précision de l'approche proposée, confirmant sa pertinence pour résoudre ce type d'équation complexe.

Abstract

In this thesis, we study a particular class of nonlinear Volterra integro-differential equations with delay. Such equations are used to model dynamic phenomena that depend on the system's history as well as a delayed term. We first recall the existence and uniqueness of the solution using the Picard iteration method. Then, we propose a numerical method based on backward finite differences, combined with a Nyström-type quadrature to handle the integral term. The analysis of the discrete system shows that the method is well-posed and convergent. Numerical simulations demonstrate the efficiency and accuracy of the proposed approach, confirming its relevance for solving this type of complex equation.

ملخص

في هذه المذكرة، ندرس نوعًا خاصًا من المعادلات التكاملية-التفاضلية غير الخطية من نوع فولتيرا مع تأخير. تُستخدم هذه المعادلات في نمذجة الظواهر الديناميكية التي تعتمد على تاريخ النظام وكذلك على حد مؤجل. أولاً، نذكر بوجود ووحداية الحل باستخدام طريقة بيكار التكرارية. ثم نقترح طريقة عددية تعتمد على طريقة الفروق الخلفية، مدمجة مع صيغة تكامل عددية من نوع نيشتروم لمعالجة الحد التكاملية. تُظهر دراسة النظام المتقطع أن الطريقة المقترحة معرفة جيداً ومتقاربة. وتؤكد المحاكاة العددية فعالية ودقة النهج المعتمد، مما يثبت صلاحيته لحل هذا النوع من المعادلات المعقدة.

Table des matières

1 Equation de Volterra et classification	9
1.1 Classification des Équations de Volterra	10
1.2 Travaux de recherche antérieurs	12
1.2.1 Approche historique et cadre analytique	13
1.3 Problématique et objectifs du mémoire	14
2 Equation integro-différentielle non linéaire de Volterra avec	
retard	16
2.1 Cadre fonctionnel	16
2.2 Existence et unicité de la solution	19
3 Méthode de différence finis pour l'équation integro-différentielle	
non linéaire de Volterra avec retard	24
3.1 Construction du système	25
3.2 Tests numériques	28

Introduction

Les équations intégrales de Volterra occupent une place prépondérante dans l'analyse des systèmes dynamiques en raison de leur capacité à modéliser une large gamme de phénomènes dans divers domaines scientifiques et techniques. Elles interviennent notamment en physique, en biologie, en économie et en ingénierie, où elles permettent de représenter des processus dépendant de leur passé. Contrairement aux équations différentielles classiques, ces équations prennent en compte une mémoire du système, rendant leur analyse plus complexe et leur résolution plus délicate.

Parmi les différentes variantes des équations de Volterra, les équations intégral-différentielles avec retard suscitent un intérêt particulier. En effet, l'ajout d'un terme retardé permet de modéliser des systèmes où l'évolution d'un phénomène ne dépend pas uniquement de l'instant présent et du passé immédiat, mais également d'un état différé dans le temps. De tels modèles sont couramment utilisés pour décrire des processus biologiques, des phénomènes thermiques, ou encore des systèmes de contrôle où des délais sont inhérents au mécanisme étudié.

Malgré leur importance, les équations intégral-différentielles de Volterra avec retard restent difficiles à analyser en raison de la présence conjointe des intégrales et des dérivées. Il est donc essentiel de développer des mé-

thodes analytiques et numériques adaptées pour assurer l'existence et l'unicité des solutions et proposer des schémas d'approximation fiables. Plusieurs approches ont été développées à cet effet, parmi lesquelles l'itération de Picard et la méthode de Nyström se démarquent par leur efficacité.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à une classe particulière d'équations intégral-différentielles de Volterra avec retard, définie sous la forme suivante :

$$\forall t \in [a; b], \quad \mu(t) = \int_a^{\alpha(t)} K(t, s, \mu(s), \mu'(s)) dy + f(t),$$

Notre objectif est double : d'une part, nous nous attachons à démontrer l'existence et l'unicité de la solution en utilisant une approche basée sur l'itération de Picard (voir [13], [6]). D'autre part, nous explorons la résolution numérique de cette équation en employant une méthode de différences finies pour le traitement du terme dérivé. L'approche choisie permettra d'évaluer la précision des solutions obtenues et de comparer notre méthode avec d'autres techniques existantes.

Ce travail s'inscrit dans la continuité des recherches menées par de nombreux auteurs, notamment Linz, Salah, Guebbai et Segni, qui ont développé des méthodes analytiques et numériques pour l'étude des équations intégrales et intégral-différentielles. Nous nous appuyons sur leurs résultats pour établir des théorèmes fondamentaux et proposer des solutions numériques adaptées aux équations de Volterra avec retard.

Le mémoire est structuré comme suit :

Chapitre 1 : Nous présentons une classification détaillée des équations de Volterra, en mettant en évidence leurs différentes formes et leurs propriétés fondamentales. Nous abordons les travaux de recherche antérieurs en

détaillant les contributions majeures dans le domaine des équations intégrales différentielles.

Chapitre 2 : Nous introduisons notre équation spécifique, en détaillant les hypothèses et les méthodes analytiques utilisées pour établir l'existence et l'unicité des solutions.

Chapitre 3 : Nous proposons une approche numérique basée sur la méthode des différences finies, accompagnée d'une analyse de convergence.

Chapitre 4 : Nous présentons les résultats numériques obtenus et comparons notre approche avec d'autres méthodes d'approximation.

En définitive, ce mémoire vise à apporter une contribution significative à l'étude des équations intégrales différentielles de Volterra avec retard, en combinant analyse théorique et simulations numériques. Nous espérons que les résultats obtenus permettront d'améliorer la compréhension et la résolution de ces équations complexes, avec des applications potentielles dans divers domaines scientifiques.

Chapitre 1

Equation de Volterra et classification

Les équations intégrales et intégréo-différentielles de Volterra jouent un rôle fondamental dans de nombreux domaines des mathématiques appliquées et de la modélisation des phénomènes physiques. Leur étude approfondie permet une meilleure compréhension des systèmes dynamiques complexes et trouve des applications dans des disciplines variées telles que la physique, l'économie, l'ingénierie et la biologie. Depuis plusieurs décennies, de nombreux chercheurs se sont penchés sur ces équations afin d'en analyser les propriétés et de développer des méthodes d'approximation efficaces pour leur résolution [6].

Avant d'aborder l'équation spécifique étudiée dans ce mémoire, nous présentons une classification des équations de Volterra qui permet de mieux comprendre leur diversité et leurs propriétés fondamentales.

1.1 Classification des Équations de Volterra

Les équations de Volterra sont une classe particulière d'équations intégrales caractérisées par une borne variable dans l'intégrale. Elles peuvent être classées selon plusieurs critères, notamment la nature du noyau, la présence de termes dérivés, la linéarité et l'éventuelle prise en compte d'un retard.

Classification selon la nature du noyau

Les équations de Volterra se divisent en deux catégories selon le type de noyau $K(t, s)$:

- **Équations de Volterra du premier type :**

$$f(t) = \int_a^t K(t, s)\mu(s)ds.$$

Elles sont dites « de convolution » lorsque le noyau dépend uniquement de la différence $t - s$, ce qui permet une résolution plus aisée via les transformées de Laplace.

- **Équations de Volterra du second type :**

$$\mu(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s)\mu(s)ds.$$

Ici, la fonction inconnue $\mu(t)$ apparaît à la fois sous forme explicite et à l'intérieur de l'intégrale, rendant leur résolution plus complexe.

Classification selon la présence de dérivées

- **Équations intégrales de Volterra :** elles n'impliquent que des intégrales sur $u(t)$.

- **Équations intégro-différentielles de Volterra** : elles contiennent également des termes dérivés :

$$\mu'(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s)\mu(s)ds.$$

Ces équations apparaissent fréquemment dans la modélisation de systèmes dynamiques.

Classification selon la linéarité

- **Équations linéaires** : lorsque $u(t)$ apparaît de manière linéaire, par exemple :

$$\mu(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s)\mu(s)ds.$$

- **Équations non linéaires** : si $\mu(t)$ figure sous une forme non linéaire :

$$\mu(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, \mu(s))ds.$$

Classification selon la présence de retard

- **Équations classiques de Volterra** : l'intégration se fait sur $[a, t]$.
- **Équations de Volterra avec retard** : l'intégrale s'étend jusqu'à une borne $\alpha(t)$ dépendante de t :

$$\mu(t) = \int_a^{\alpha(t)} K(t, s, \mu(s), \mu'(s))ds + f(t).$$

Ces équations sont utiles pour modéliser des phénomènes dynamiques où l'évolution du système dépend d'états antérieurs.

1.2 Travaux de recherche antérieurs

La classification des équations de Volterra met en évidence leur diversité ainsi que les différentes approches permettant leur analyse. De nombreux chercheurs ont apporté des contributions significatives à leur étude, notamment Aissaoui, Salah, Ghat, Bounaya, Guebbai, Lemita, Segni, Debar, Khalla et bien d'autres. Parmi ces travaux, ceux de Linz et de Salah se distinguent par leur apport fondamental à la compréhension des équations intégral-différentielles de Volterra et au développement de nouvelles méthodes d'approximation [2, 4, 9, 8, 12, 5].

Dans son ouvrage de référence *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations*, publié en 1985, Linz a introduit des méthodes analytiques et numériques avancées permettant de résoudre ces équations, y compris sous leur forme intégral-différentielle. Ses travaux ont jeté les bases des approches modernes et ont permis d'approfondir la compréhension des propriétés fondamentales des solutions.

De même, Salah [7] a apporté des contributions notables à l'étude des équations intégral-différentielles de Volterra non linéaires. Dans un article publié en 2020 dans le *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, Salah et ses collaborateurs Guebbai, Lemita et Aissaoui ont étudié la solution d'une équation intégral-différentielle non linéaire de Volterra dans le contexte d'un modèle de séisme. Leurs travaux ont permis de mieux comprendre certains phénomènes dynamiques complexes et ont conduit à l'élaboration de méthodes spécifiques de résolution.

1.2.1 Approche historique et cadre analytique

Afin de mieux situer notre étude, nous proposons une approche historique mettant en avant les avancées successives dans l'analyse des équations de Volterra. Cette perspective permet de mieux appréhender la philosophie sous-jacente à notre démarche.

Nous recommandons au lecteur de commencer par l'ouvrage de Peter Linz [?], qui constitue une référence essentielle pour l'étude analytique et numérique des équations de Volterra. En particulier, Linz y étudie l'équation :

$$\mu(t) = \int_a^t K(t, s, \mu(s))ds + f(t), \quad \forall t \in [a, b].$$

En supposant que :

$$\begin{cases} \exists l > 0, \\ \forall t, s \in [a, b], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \\ |K(t, s, x) - K(t, s, y)| \leq l|x - y|, \end{cases}$$

il démontre l'existence et l'unicité de la solution $u \in C^0[a, b]$ pour toute fonction $f \in C^0[a, b]$. Il montre également que la méthode de Nyström est parfaitement convergente pour l'approximation numérique de cette classe d'équations.

Dans un second temps, nous recommandons la lecture des articles de Guebbai et al. [4] et Segni et al. [12], qui traitent de l'équation plus générale :

$$\mu(t) = \int_a^t K(t, s, \mu(s), \mu'(s))ds + f(t), \quad \forall t \in [a, b].$$

Sous les hypothèses suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (*) \quad K'(t) \in C^0([a, b]^2 \times \mathbb{R}^2), \\ (*) \quad \exists A, B, \bar{A}, \bar{B} \in \mathbb{R}_+, \quad \forall t, s \in [a, b], \quad \forall x, \bar{x}, y, \bar{y} \in \mathbb{R}, \\ \quad |K(t, s, x, y) - K(t, s, \bar{x}, \bar{y})| \leq A|x - \bar{x}| + B|y - \bar{y}|, \\ \quad |K'(t)(t, s, x, y) - K'(t)(t, s, \bar{x}, \bar{y})| \leq \bar{A}|x - \bar{x}| + \bar{B}|y - \bar{y}|, \\ (*) \quad B < 1, \end{array} \right.$$

ils ont démontré l'existence et l'unicité de la solution ainsi que la convergence des méthodes numériques utilisées.

Cette analyse progressive nous permet d'introduire naturellement notre propre étude, qui s'inscrit dans la continuité de ces travaux en traitant une équation intégrale-différentielle de Volterra avec retard.

1.3 Problématique et objectifs du mémoire

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à une nouvelle équation intégrale-différentielle de Volterra avec retard, définie par :

$$\forall t \in [a; b], \quad \mu(t) = \int_a^{\alpha(t)} N(t, s, \mu(s), \mu'(s))ds + f(t).$$

Cette équation a été étudiée par Segni, Guebbai et Haddouche dans leur article [13]. Les auteurs y ont démontré l'existence et l'unicité de la solution en utilisant l'itération de Picard, une méthode bien établie dans l'analyse des équations intégrales et intégrale-différentielles. Par ailleurs, ils ont proposé une approche numérique fondée sur la méthode de Nyström afin d'obtenir une approximation de la solution analytique. Ils ont également prouvé la convergence de cette méthode, assurant ainsi la fiabilité et la précision de l'approximation numérique obtenue.

Dans notre travail, nous approfondissons l'étude numérique de cette équation en adoptant une approche différente : nous utilisons la méthode des différences finies pour traiter le terme dérivé. Cette approche permet d'améliorer la précision des résultats numériques et d'évaluer l'efficacité de la discrétisation du terme de dérivée dans la résolution de l'équation. Des simulations numériques seront réalisées afin de comparer cette méthode à d'autres techniques existantes et d'analyser ses performances en termes de stabilité et de convergence.

Chapitre 2

Equation integro-différentielle non linéaire de Volterra avec retard

Dans notre travail, nous sommes intéressé par l'étude de la nouvelle équation intégrale-différentielle de Volterra avec un terme retard, étudiée dans l'article [13], donné dans la forme suivante :

$$\forall x \in [a; b], \quad \mu(t) = \int_a^{\alpha(t)} K(t, s, \mu(s), \mu'(s)) ds + f(t), \quad (2.1)$$

ou, α est le terme de retard puisque $a \leq \alpha(t) \leq t$, $\forall t \in [a, b]$. Nous allons montrer l'existence et l'unicité de la solution pour cette équation (voir [13]).

2.1 Cadre fonctionnel

Pour résoudre l'équation (2.1), on est besoin de la mettre dans un cadre fonctionnel. Soit donc $K : [a, b]^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction non linéaire qui

vérifie les conditions suivantes

$$(C) \left\{ \begin{array}{l} (C_1) : \partial_t K \in C^0([a, b]^2 \times \mathbb{R}^2) \\ (C_2) : \forall t, s \in [a, b], \quad \forall u_1, v_1 \in \mathbb{R}; \forall \bar{u}_1, \bar{v}_1 \in \mathbb{R} \\ |k(t, s, u_1, v_1) - K(t, s, \bar{u}_1, \bar{v}_1)| \leq l_{11} |u_1 - \bar{u}_1| + l_{12} |v_1 - \bar{v}_1| \\ |\partial_t K(t, s, u_1, v_1) - \partial_x K(t, s, \bar{u}_1, \bar{v}_1)| \leq l_{21} |u_1 - \bar{u}_1| + l_{22} |v_1 - \bar{v}_1| \\ (C_3) : 2l_{12} < 1 \end{array} \right.$$

En premier, on va étudier l'équation analytiquement, c-à-d on montre l'existence et l'unicité de la solution $f \in C^1[a, b]$ qui vérifie le problème suivant :

$$\forall t \in [a; b], \quad \mu(t) = \int_a^{\alpha(t)} K(t, s, \mu(s), \mu'(s)) ds + f(t),$$

ou, f est une fonction donnée dans $C^1[a, b]$ et α la fonction de retard supposée vérifiée les conditions suivantes :

$$(C_\alpha) \left\{ \begin{array}{l} (C_{\alpha,1}) : \forall t \in [a, b], \quad a \leq \alpha(t) \leq t, \\ (C_{\alpha,2}) : \alpha \in C^1[a, b]. \\ (C_{\alpha,3}) : \|\alpha'\|_{C^0[a,b]} l_{12} < 1 \end{array} \right.$$

Pour bien comprendre notre équation (2.1), nous devons dériver les deux cotés de cette équation. Pour cela, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.1.1 *Soient*

$$\begin{aligned} \psi : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (t, s) &\mapsto \psi(t, s), \end{aligned}$$

Tel que $\psi'(t) \in C^0(\mathbb{R}^2)$, α vérifiant (C_α) et

$$\varphi(x) = \int_a^{\alpha(t)} \psi(t, s) ds, \quad \forall t \geq a.$$

Alors,

$$\varphi'(t) = \alpha'(t)\psi(t, \alpha(t)) + \int_a^{\alpha(t)} \psi'(t)(t, s)ds, \quad \forall t \geq a.$$

Preuve 2.1.1

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\varphi(t+h) - \varphi(t)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{\alpha(t+h)} \psi(t+h, s)ds - \int_a^{\alpha(t)} \psi(t, s)ds \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\int_a^{\alpha(t+h)} \frac{1}{h} (\psi(t+h, s) - \psi(t, s))ds + \frac{1}{h} \int_{\alpha(t)}^{\alpha(t+h)} \psi(t, s)ds \right) \end{aligned}$$

Mais,

$$\frac{1}{h} \int_{\alpha(t)}^{\alpha(t+h)} \psi(t, s)ds = \frac{1}{h} (\alpha(t+h) - \alpha(t)) \psi(t, \xi(t, h)),$$

ou, $\lim_{h \rightarrow 0} \xi(t, h) = \alpha(t)$. on a

$$\varphi'(t) = \alpha'(t)\psi(t, \alpha(t)) + \int_a^{\alpha(t)} \psi'(t)(t, s)ds, \quad \forall t \geq a.$$

En appliquant ce dernier résultat, l'équation dérivée de (2.1) est la suivante :

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b]; \quad \mu'(t) &= \alpha'(t)f(t, \alpha(t), \mu(\alpha(t)), \mu'(\alpha(t))) \\ &+ \int_a^{\alpha(t)} \partial_t f(t, s, \mu(s), \mu'(s))ds + f'(t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Cette équation est difficile à traiter dans cette forme, pour cela nous utilisons un changement de variable adéquat dans le but de la rendre facile à traiter numériquement et analytiquement.

Nous utilisons le changement de variable proposé par les suivant :

$$\forall t \in [a, b]; \quad \mu'(t) = g(t) \Rightarrow \int_a^t \mu'(s)ds = \int_a^t g(s)ds \Rightarrow \mu(t) = \int_a^t v(s)ds + \mu(a)$$

Mais $\alpha(a) = a \Rightarrow \mu(a) = f(a)$, ce qui donne

$$\mu(t) = \int_a^t g(s)ds + f(a)$$

Notre problème devient, trouver $g \in C^0[a, b]$ tel que

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], \quad g(t) = \alpha'(t)f(t, \alpha(t), \int_a^{\alpha(t)} g(s)ds + f(a), g(\alpha(t))) \quad (2.3) \\ + \int_a^{\alpha(t)} \partial_t f(t, s, \int_a^s g(o)do + f(a), g(s))ds + \mu'(t). \end{aligned}$$

2.2 Existence et unicité de la solution

Pour construire une solution de notre nouvelle équation (2.3), nous introduisons $(g_n)_{n \geq 0}$ la suite de Picard [7], [6] par : $\forall x \in [a, b]$

$$\begin{cases} g_0(t) = f'(t), \\ g_{n+1}(t) = \alpha'(t)f(t, \alpha(t), \int_a^{\alpha(t)} g_n(s)ds + f(a), g_n(\alpha(t))) \\ + \int_a^{\alpha(t)} \partial_t f(t, s, \int_a^s g_n(o)do + f(a), g_n(s))ds + f'(t), \quad \forall n \geq 0, \end{cases}$$

à partir de cette suite, nous définissons la suite de fonctions $(w_n)_{n \geq 0}$ pour tout $x \in [a, b]$, par :

$$\begin{cases} w_0(t) = f'(x), \\ w_{n+1}(t) = g_{n+1}(t) - g_n(t). \end{cases}$$

Le théorème suivant montre l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (2)

Théorème 2.2.1 *Supposons que le noyau K vérifie les hypothèses (C) et que le terme de retard α vérifie les hypothèses (C_α) alors l'équation (2) admet une unique solution $g \in C^0[a, b]$.*

Preuve 2.2.1 *Nous définissons une subdivision de $[a, b]$ par*

$$a = T_0 < T_1 < T_2 \dots < T_N = b,$$

qui est supposée vérifier la condition suivante :

$$\text{pour tout } 0 \leq j \leq N-1,$$

$$(l_{11}(T_{j+1} - T_j) + l_{12}) + (T_{j+1} - T_j)^2 l_{21} + (T_{j+1} - T_j) l_{22} \leq \rho < 1$$

Pour tout $t \in [T_0, T_1]$,

$$\begin{aligned} |W_{n+1}(x)| &= |g_{n+1}(t) - g_n(t)| \\ &\leq |\alpha'(t)| |f(t, \alpha(t), \int_a^{\alpha(t)} g_n(s) ds + f(a), g_n(\alpha(t))) \\ &\quad - f(t, \alpha(t), \int_a^{\alpha(t)} g_{n-1}(s) ds + f(a), g_{n-1}(\alpha(t)))| \\ &\quad + \int_a^{\alpha(t)} |\partial_t f(t, s, \int_a^s g_n(o) do + f(a), g_n(s)) ds \\ &\quad - \partial_t f(t, s, \int_a^s g_{n-1}(o) do + f(a), g_{n-1}(s))| ds \\ &\leq \|\alpha'\|_{C^0[a, b]} ((T_1 - T_0) L_{11} \|g_n - g_{n-1}\|_{C^0[T_0, T_1]} + l_{12} \|g_n - g_{n-1}\|_{C^0[T_0, T_1]} \\ &\quad + (T_1 - T_0)^2 l_{21} \|g_n - g_{n-1}\|_{C^0[T_0, T_1]} + (T_1 - T_0) l_{22} \|g_n - g_{n-1}\|_{C^0[T_0, T_1]}) \\ &\leq \rho \|W_n\|_{C^0[T_0, T_1]} \end{aligned}$$

Donc, $\forall n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \|w_n\|_{C^0[T_0, T_1]} &\leq \rho \|w_{n-1}\|_{C^0[T_0, T_1]}, \\ &\leq \rho^n \|f'\|_{C^0[T_0, T_1]}. \end{aligned}$$

Ce qui signifie que la série $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ est normalement convergente dans $C^0[T_0, T_1]$,
c-à-d

$$\exists g^1 \in C^0[T_0, T_1], \quad \sum_{n=0}^{\infty} w_n = g^1.$$

Mais, $\forall n \geq 1$, $g_n = \sum_{p=0}^n w_p$. Alors, la suite de picard $(g_n)_{n \geq 0}$ est convergente dans $C^0[T_0, T_1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g^1.$$

Montrons maintenant que g^1 est la solution de l'équation (2) dans l'intervalle $[T_0, T_1]$ pour cela, on introduit cette nouvelle fonction

$$\forall n \geq 1, \quad \forall t \in [T_0, T_1], \quad \Delta_n(t) = g^1(t) - g_n(t).$$

On a,

$$\begin{aligned} & |g^1(t) - \alpha'(t)K(t, \alpha(t), \int_a^{\alpha(t)} g^1(s)ds + f(a), g^1(\alpha(t))) \\ & - \int_a^{\alpha(t)} \partial_t \eta(t, s, \int_a^s g^1(o)do + f(a), g^1(s))ds - f'(t)| \\ & = |g^1(x) - g_n(t) - \alpha'(t)(K(t, \alpha(t), \int_a^{\alpha(t)} g^1(s)ds + f(a), g^1(\alpha(t))) \\ & - K(t, \alpha(t), \int_a^{\alpha(t)} g_n(s)ds + f(a), g_n(\alpha(t)))) \\ & - \int_a^{\alpha(t)} (\partial_t K(t, s, \int_a^s g^1(o)do + f(a), g^1(s)) \\ & - \partial_t K(t, s, \int_a^s g_n(o)do + f(a), g_n(s)))ds| \\ & \leq |\Delta_n(t)| + \|\alpha'\|_{C^0[a,b]}((T_1 - T_0)l_{11} \|\Delta_n\|_{C^0[a,b]} + l_{12} \|\Delta_n\|_{C^0[a,b]}) \\ & + (T_1 - T_0)^2 l_{21} \|\Delta_n\|_{C^0[a,b]} + (T_1 - T_0)l_{22} \|\Delta_n\|_{C^0[a,b]} \\ & \leq (1 + \rho) \|\Delta_n\|_{C^0[a,b]} \end{aligned}$$

Ce qui montre parfaitement que g^1 est une solution de (2) dans l'intervalle $[T_0, T_1]$.

Pour montrer que cette solution est unique, nous supposons qu'il existe une autre solution de notre équation (2) dans $[T_0, T_1]$, notée $\tilde{g}^1$ alors, pour tout $t \in [T_0, T_1]$ et en utilisant les mêmes étapes précédentes de calcul, nous obtenons,

$$|g^1(t) - \tilde{g}^1(t)| \leq \rho \|g^1 - \tilde{g}^1\|_{C^0[T_0, T_1]}.$$

Ce qui montre que $g^1 = \tilde{g}^1$ puisque $\rho < 1$.

Donc, nous venons de une solution unique g^1 pour notre équation (2) dans l'intervalle $[T_0, T_1]$.

à fin, de procéder avec l'intervalle suivant $[T_1, T_2]$, nous utilisons la solution g^1 , obtenue dans $[T_0, T_1]$, pour modifier l'équation (2) comme suit :

Pour tout $t \in [T_1, T_2]$,

$$\begin{aligned} g(t) &= \alpha'(t)K(t, \alpha(t), \int_{T_1}^{\alpha(t)} g(s)ds + f(a), g(\alpha(t))) \\ &+ \int_{T_1}^{\alpha(t)} \partial_t K(t, s, \int_{T_1}^s g(o)do + f(a), g(s))ds \\ &+ G(x), \end{aligned}$$

où , $F(a) = \int_{T_0}^{T_1} g^1(s)ds + f'(a)$,

$$G(t) = \int_{T_0}^{T_1} \partial_t K(t, s, \int_a^s g^1(o)do + F(a), g^1(s))ds + f'(t).$$

Cette nouvelle équation à la même forme que l'équation (2), mais cette fois $x \in [T_1, T_2]$.

Donc, en procédant de la même manière, nous construisant une solution unique pour cette équation sur l'intervalle $[T_1, T_2]$, qui sera notée g^2 .

Nous répétons le même procédé dans le but d'obtenir la fonction suivante :

$$g(t) = \begin{cases} g^1(t) & t \in [T_0, T_1], \\ g^2(t) & t \in [T_1, T_2], \\ \vdots & \\ g^f(t) & t \in [T_{N-1}, T_N]. \end{cases}$$

Par construction $g \in C^0[a, b]$ et elle est l'unique solution de l'équation (2) sur l'intervalle $[a, b]$

Corollaire 2.2.1 L'équation (2.1) admet une unique solution $\mu \in C^1[a, b]$ sous les hypothèses (C) et (C_α) .

Preuve 2.2.2 Dans le théorème précédent, nous avons construit une unique solution g de (2), il suffit de prendre pour $t \in [a, b]$,

$$g(t) = \int_a^t g(s)ds + \mu(t).$$

Chapitre 3

Méthode de différence finis pour l'équation integro-différentielle non linéaire de Volterra avec retard

Dans ce chapitre, nous appliquons la méthode des différences finies en arrière pour approximer la solution de l'équation integro-différentielle non linéaire de type Volterra avec retard (2.1). Cette méthode sera combinée à une quadrature adaptée, de type Nyström, afin de traiter le terme intégral.

La méthode des différences finies en arrière est une technique numérique utilisée pour approximer la dérivée d'une fonction à partir de ses valeurs précédentes. Contrairement aux méthodes en avant ou centrées, elle évalue la dérivée d'une fonction f en un point x_j à l'aide des valeurs de f aux points t_j et t_{j-1} , selon la formule suivante :

$$\mu'(t_j) \approx \frac{\mu(t_j) - \mu(t_{j-1})}{h}.$$

Cette approche est particulièrement bien adaptée aux problèmes dans lesquels la solution dépend de l'historique, comme les équations à retard ou à

mémoire. Elle est donc naturellement appropriée pour traiter les équations de Volterra. Dans ce contexte, nous l'utiliserons pour approximer la dérivée dans l'équation étudiée.

Avant d'appliquer cette méthode à notre équation de base avec retard (2.1), nous commençons par l'étudier sur une équation intégrale-différentielle de Volterra classique (sans terme de retard). Cette étape préliminaire permet de mieux illustrer le principe de la méthode numérique proposée et d'obtenir un système discret de forme similaire, facilitant ainsi la généralisation au cas plus complexe.

L'équation intégrale-différentielle de Volterra classique est donnée dans la forme suivante

$$\forall t \in [a; b], \quad \mu(t) = \int_a^t K(t, s, \mu(s), \mu'(s)) ds + f(t), \quad (3.1)$$

On garde les mêmes hypothèses sur le noyau K et la fonction f .

L'équation dérivée de (3.1) est

$$\forall t \in [a; b], \quad \mu'(t) = K(t, t, \mu(t), \mu'(t)) + \int_a^t \partial_t K(t, s, \mu(s), \mu'(s)) ds + f'(t), \quad (3.2)$$

3.1 Construction du système

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ nous définissons une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ comme suit :

$$h = \frac{b-a}{n-1}, \quad t_j = a + (j-1)h, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Soit $(w_j)_{j=1}^n$ une famille de poids bien choisie pour vérifie les conditions suivantes :

$$(C_w) \left\{ \begin{array}{l} (1) : \forall n \geq 2, \quad \max_{1 \leq j \leq n} |w_j| < \infty, \\ (2) : \forall f \in C^0[a, b], \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_a^b f(x) dx - h \sum_{j=1}^n w_j f(x_j) \right| = 0. \end{array} \right.$$

L'hypothèse $(C_w - 2)$ va être remplacer dans la suite de notre travail pour être mieux compatible avec notre équation et la nouvelle version de la Méthode de Nystrom.

En premier lieu, nous remplaçons t par t_1 dans l'équation (3.1) ce qui donne

$$\mu(t_1) = f(t_1).$$

En deuxième lieu, nous remplaçons t par t_i , $2 \leq i \leq n$, dans la même équation (équation (3.1)) ce qui donne

$$f(t_i) = \int_a^{t_i} K(t_i, s, \mu(s), \mu'(s)) ds + f(t_i).$$

On utilise l'approximation de l'intégrale par la formule de quadrature suivante (appelée méthode de Nyshtrom) :

$$\int_a^{t_i} K(t_i, s, \tilde{\mu}(s), \tilde{\mu}'(s)) ds \simeq h \sum_{j=1}^i w_j K(t_i, t_j, \tilde{\mu}(t_j), \tilde{\mu}'(t_j))$$

avec $\max_{1 \leq j \leq n} |w_j| = w < \infty$, on obtient l'équation suivante :

$$f(t_i) = h \sum_{j=1}^i w_j K(t_i, t_j, \mu(t_j), \mu'(t_j)) + f(t_i).$$

En outre, on pose $\mu_i \simeq \mu(t_i)$, on écrit alors

$$\mu_i = h \sum_{j=1}^i w_j K(t_i, t_j, \mu_j, \mu'_j) + f(t_i),$$

avec $\tilde{\mu}_1 = f(a)$ est donnée.

Maintenant, on applique la méthode de différence fini en arrière pour l'approximation du terme de la dérivée, selon l'expression

$$\mu'_j = \frac{\mu_j - \mu_{j-1}}{h}, \quad 2 \leq j \leq n,$$

on obtient alors le système numérique suivant :

$$\begin{cases} \mu_1 = f(a) \\ \mu_i = h w_1 K(t_i, t_1, f_1, \mu'_1) + h \sum_{j=2}^i w_j K(t_i, t_j, \mu_j, \frac{\mu_j - \mu_{j-1}}{h}) + f(t_i). \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, on est besoin d'ajouter une équation pour μ'_1 . Pour cela, rappelons l'équation dérivée donnée dans (3.2), en remplaçant t par t_1 , on obtient l'équation suivante :

$$\mu'(t_1) = K(t_1, t_1, \mu(t_1), \mu'(t_1)) + f'(t_1),$$

avec $\mu'_1 \simeq \mu'(t_1)$, ce qui donne

$$\mu'_1 = K(a, a, \mu_1, \mu'_1) + f'(a).$$

On note $g_1 = \mu'_1$, alors le système numérique à résoudre est le suivant

$$\begin{cases} \mu_1 = f(a) \text{ donnée,} \\ g_1 = K(a, a, \mu_1, g_1) + f'(a), \\ \mu_i = h w_1 K(t_i, a, \mu_1, g_1) + h \sum_{j=2}^i w_j K(t_i, t_j, \mu_j, \frac{\mu_j - \mu_{j-1}}{h}) + f(t_i), \quad 2 \leq i \leq N \end{cases} \quad (3.3)$$

En reprenant le même schéma de discrétisation, nous procédons à la construction du système numérique correspondant à l'équation de base (2.1), cette fois en intégrant les contraintes supplémentaires imposées par les conditions (C) sur le noyau K ainsi que par les conditions (C_α) régissant le terme

de retard α . Sous ces hypothèses, on peut établir rigoureusement l'existence et l'unicité de la solution du système discrétisé. De plus, on peut démontrer que la solution numérique obtenue par cette méthode converge, lorsque le pas $h \rightarrow 0$, vers la solution exacte de l'équation continue (2.1).

3.2 Tests numériques

Dans cette section, nous présentons deux exemples numériques visant à illustrer le comportement de la méthode numérique proposée dans la partie précédente et à évaluer sa performance dans la résolution d'équations intégrales différentielles non linéaires avec retard.

Exemple 3.2.1 *On considère l'équation intégrale-différentielle non linéaire de type Volterra avec retard suivante :*

$$\mu(x) = \int_0^{t^{1.5}} \frac{t-s}{1+u(y)^2+u'(y)^2} ds + 1 + 0.25((t-t^{1.5})^2 - t^2),$$

où les fonctions K , f , α vérifient les conditions (C) et (C_α) avec

$$K(t, s, u, v) = \frac{t-s}{1+u^2+v^2},$$

$$f(t) = 1 + 0.25((t-t^{1.5})^2 - t^2),$$

$$\alpha(t) = t^{1.5}$$

$$\mu(t) = 1.$$

Le terme $\tilde{\mu}_j$ ne sera pas calculé de manière exacte, il sera approché à l'aide de la méthode d'itération de Banach avec un critère d'arrêt du type

$$\|\tilde{\mu}_{new} - \tilde{\mu}_{old}\| \leq \varepsilon, \quad (\varepsilon = 10^{-7})$$

Le tableau suivant donne l'erreur comise entre la solution exacte et la solution approchée est donné dans le tableau suivant.

N	$E = \max_{1 \leq j \leq N} (\tilde{\mu}(t_j) - \tilde{\mu}_j)$
4	5.236035904997882 e-03
10	5.329412724925486e-03
50	1.264093432050473e-03
100	6.934167133632041e-04
200	3.529276976577123e-04
500	1.350136047606476e-04
800	8.497764343418091e-05

Exemple 3.2.2 On considère le deuxième exemple suivant :

$$\mu(x) = \int_0^{-t^2+t} \frac{t-s}{1+u(y)^2+u'(y)^2} ds + 1 + 0.25(t^4 - t^2),$$

où les fonctions K , f , α verifient les conditions (C) et (C_α) avec

$$K(t, s, u, v) = \frac{t-s}{1+u^2+v^2},$$

$$f(t) = 1 + 0.25(t^4 - t^2),$$

$$\alpha(t) = -t^2 + t$$

$$\mu(x) = 1.$$

Le terme $\tilde{\mu}_j$ ne sera pas calculé de manière exacte, il sera approché à l'aide de la méthode d'itération de Banach avec un critère d'arrêt du type

$$\|\tilde{\mu}_{new} - \tilde{\mu}_{old}\| \leq \varepsilon, (\varepsilon = 10^{-7})$$

Le tableau suivant donne l'erreur comise entre la solution exacte et la solution approchée.

N	$E = \max_{1 \leq j \leq N} (\tilde{\mu}(t_j) - \tilde{\mu}_j)$
<i>4</i>	<i>6.250000000000000e-02</i>
<i>10</i>	<i>2.738691944365290e-02</i>
<i>50</i>	<i>6.898119905655253e-03</i>
<i>100</i>	<i>4.262951714958163e-03</i>
<i>200</i>	<i>2.059895015740221e-03</i>
<i>500</i>	<i>8.932021756062891e-04</i>
<i>1000</i>	<i>4.704105640001011e-04</i>

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié numériquement une classe particulière d'équations intégral-différentielles non linéaires de Volterra avec retard. Après avoir présenté le cadre général et les motivations liées à ce type de modèle, nous avons mis en place une méthode d'approximation basée sur la méthode des différences finies en arrière, combinée à une quadrature de type Nyström pour le traitement du terme intégral.

L'approche proposée permet d'approximer la solution de l'équation en discrétisant à la fois le terme dérivé et le terme intégral, tout en intégrant explicitement l'effet du retard. Le système numérique ainsi obtenu pourra faire l'objet d'une analyse théorique (existence, unicité, convergence) dans un travail ultérieur. En l'état, cette méthode offre un cadre opératoire clair pour la mise en oeuvre numérique et prépare le terrain à l'étude rigoureuse de ses propriétés mathématiques.

Les résultats numériques présentés confirment l'efficacité de la méthode proposée. Les exemples testés montrent une bonne précision et une convergence rapide vers la solution exacte, ce qui valide l'approche numérique mise en oeuvre.

Cette étude ouvre la voie à plusieurs perspectives, notamment l'extension de la méthode à des équations plus générales (par exemple, à plusieurs dimen-

sions ou avec noyaux singuliers), ainsi que l'analyse de la stabilité numérique dans des contextes plus complexes.

Bibliographie

- [1] Quarteroni, A., Sacco, R., & Saleri, F. (2004). *Méthodes Numériques : Algorithmes, analyse et applications*. Springer.
- [2] Atkinson, K., & Han, W. (2001). *Theoretical numerical analysis : A functional analysis framework*. Springer-Verlag, New York.
- [3] H. Belhireche, H. Guebbai, On the mixed nonlinear integro-differential equations with weakly singular kernel, Computational and Applied Mathematics (2022) 41 :36. <https://doi.org/10.1007/s40314-021-01743-9>.
- [4] Guebbai, H., Aissaoui, M.Z., Debbar, I., & Khalla, B. (2014). Analytical and numerical study for an integro-differential nonlinear volterra equation. *Applied Mathematics and Computation*, 299, 376-373.
- [5] Guebbai, H., Lemita, S., Segni, S., & Merchela, W. (2020). Difference derivative for an integro-differential nonlinear volterra equation. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta Matematika Mekhanika Komp'uternye Nauki*, 30(2), 176-188.
- [6] P. Linz, "Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations". SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1985.
- [7] Salah, S., Guebbai, H., Lemita, S., & Aissaoui, M.Z. (2019). Solution of an Integro-differential nonlinear equation of Volterra arising of earthquake

- Model. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, 1-14.
- [8] Zemyan, S.M. (2012). *The classical theory of integral equations*. Birkhäuser Basel, Springer, New York.
- [9] Zhou, H., & Wang, Q. (2019). The Nyström method and convergence analysis for system of Fredholm integral Equations. *Fundamental Journal of Applied Mathematics*, 2 (1), 28-32.
- [10] Lakshmikantham. V. (1995). *Theory of Integro-Differential Equations* (Vol. 1). CRC Press.
- [11] Jerri, A. (1999). *Introduction to integral equation with application*. John Wiley and Sons.
- [12] Segni, S., Ghat, M., & Guebbai, H. (2019). New approximation method for Volterra nonlinear integro-differential equation. *Asian-European Journal of Mathematics*, 12(1), 1950016.
- [13] Segni, S., Guebbai, H., Kamouche, S., & Haddouche, Kh. (2024). Non-linear Volterra integro-differential equations incorporating a delay term using Picard iterated method. *Journal of applied mathematics and computing*.
- [14] Lemita, S., & Guebbai, H. (2019). New process to approach linear Fredholm integrale equations defined on large interval. *Asian-European Journal of Mathematics*, 12(1), 1950009.