

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Équations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par : Abdelmamoune Menasria

Intitulé

**L'étude de l'existence et la discipline des états
fondamentaux de condensats de Bose-Einstein**

Dirigé par : Dr. AISSAOUI Narimane

Devant le jury

PRÉSIDENT
Rapporteur
Examineur
Examineur

Dr. BOUAFIA Mousaab
Dr. AISSAOUI NARIMANE
Dr. GRARA Kamila
Dr. LARIBI Naima

PR
MCB
MCB
MCA

Univ-Guelma
Univ-Guelma
Univ-Guelma
Univ-Guelma

Session Juin 2025

Remerciements

Je rends grâce à Allah, le Tout-Puissant, pour m'avoir guidé, soutenu et accordé la force nécessaire à l'aboutissement de ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon encadreuse, Dr. Narimane Aissaoui, pour sa disponibilité constante, ses conseils éclairés, sa rigueur scientifique et son accompagnement bienveillant tout au long de cette recherche.

Je remercie sincèrement les membres du jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'évaluer ce travail, ainsi que pour leurs remarques pertinentes et constructives qui ont enrichi ma réflexion. Je tiens à adresser mes remerciements tout particuliers à :

- *Dr. Bouafia Mousaab, président du jury,*
- *Dr. Grara Kamila, examinatrice,*
- *Dr. Laribi Naima, examinatrice.*

Je n'oublie pas d'exprimer ma reconnaissance à mes collègues pour leurs échanges, leur entraide et leur convivialité tout au long de ce parcours. Mes remerciements vont plus spécialement à Hicham, pour son soutien constant, sa camaraderie et les discussions enrichissantes que nous avons partagées.

Dédicace

Avant tout, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mes parents, pour leur amour inconditionnel, leur soutien moral et leurs encouragements constants tout au long de mon parcours. Leur confiance en moi a été une source de motivation précieuse dans les moments de doute.

Je remercie également ma famille dans son ensemble, pour leur patience, leur compréhension et leur bienveillance. Leur présence, même discrète, m'a toujours été d'un grand réconfort.

À mes amis, et en particulier à Amar, je suis infiniment reconnaissant pour son amitié sincère, ses encouragements, son écoute et les moments de légèreté partagés qui m'ont aidé à garder le cap durant cette période exigeante.

Je tiens aussi à remercier mes collègues, en particulier Hichem, pour son soutien professionnel, ses conseils, ses discussions enrichissantes, et pour avoir su rendre notre collaboration agréable et stimulante.

Mes sincères remerciements vont à mes enseignants, pour la qualité de leur enseignement, leur disponibilité, et leur accompagnement tout au long de ma formation. Leur rigueur et leur passion ont nourri mon intérêt pour la recherche et m'ont guidé dans la réalisation de ce travail.

Enfin, à toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à la réussite de ce projet, je vous adresse mes remerciements les plus sincères.

Abstract

This thesis is concerned with the existence and mass concentration behavior of minimizers for rotating Bose-Einstein condensations (BECs) with attractive interactions in a bounded domain $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. It is shown that, there exists a finite constant a^ , denoting mainly the critical number of bosons in the system, such that the least energy $e(a)$ admits minimizers if and only if $0 < a < a^*$, no matter the trapping potential $V(x)$ rotates at any velocity $\Omega \geq 0$. This is quite different from the rotating BECs in the whole plane case, where the existence conclusions depend on the value of Ω . Moreover, by establishing the refined estimates of the rotation term and the least energy, we also analyze the mass concentration behavior of minimizers in a harmonic potential as $a \nearrow a^*$.*

Keywords: *Bose-Einstein condensation, Rotational velocity, Mass Concentration, Bounded domain.*

MSC(2020) : *35J15, 35J20, 35Q40, 46N50.*

Résumé

Ce mémoire porte sur l'existence et le comportement de concentration massique des minimiseurs pour des condensats de Bose-Einstein (CBE) en rotation, avec interactions attractives, dans un domaine borné $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Il est démontré qu'il existe une constante finie a^ , représentant principalement le nombre critique de bosons dans le système, telle que l'énergie minimale $e(a)$ admette des minimiseurs si et seulement si $0 < a < a^*$, indépendamment du potentiel de piégeage $V(x)$ et de la vitesse de rotation $\Omega \geq 0$. Ce résultat contraste nettement avec le cas des CBE en rotation dans tout le plan, où les conclusions concernant l'existence de minimiseurs dépendent de la valeur de Ω . Par ailleurs, en établissant des estimations précises du terme de rotation et de l'énergie minimale, nous analysons également le comportement de concentration massique des minimiseurs dans un potentiel harmonique lorsque $a \nearrow a^*$.*

Mots-clés : *Condensation de Bose-Einstein, Vitesse de rotation, Concentration de masse, Domaine borné.*

MSC(2020) : *35J15, 35J20, 35Q40, 46N50.*

Introduction générale

La condensation de Bose-Einstein (CBE) est un phénomène quantique remarquable, observé lorsque des bosons sont refroidis à des températures extrêmement basses, conduisant à la formation d'un état cohérent macroscopique. L'étude des états de condensation dans le cadre du modèle de Gross-Pitaevskii est devenue centrale pour comprendre les propriétés de ce phénomène, notamment lorsqu'il est confiné dans des domaines bornés.

Le modèle de Gross-Pitaevskii décrit l'évolution dynamique des condensats de Bose-Einstein en utilisant une équation non linéaire qui représente l'interaction entre les particules. Ce modèle permet de modéliser des situations physiques variées, allant des pièges optiques aux cristaux de réseau. Dans ce cadre, la recherche d'états d'énergie minimale, ou minimiseurs, est essentielle pour comprendre la stabilité et le comportement asymptotique de ces systèmes.

L'analyse de l'existence et du comportement asymptotique des minimiseurs dans le modèle de Gross-Pitaevskii, en particulier dans des domaines bornés, présente des défis à la fois mathématiques et physiques. La non-linéarité des équations régissant le système complique l'étude des solutions et des propriétés asymptotiques. Des travaux récents ont mis en lumière des résultats significatifs concernant la structure des minimiseurs et leur comportement à différentes échelles, en tenant compte des effets de confinement et d'interaction.

Sommaire

目录

<i>Introduction</i>	5
<i>Chapitre 1</i>	
<i>Les condensats de Bose-Einstein en rotation dans des domaines bornés</i>	7
<i>Chapitre 2</i>	
<i>L'existence et la non-existence des minimiseurs pour le problème de minimisation</i>	10
<i>Chapitre 3</i>	
<i>La discipline des minimiseurs lorsque a s'approche de a^*</i>	17
<i>Conclusion</i>	36
<i>Références</i>	37

Chapitre 1

Les condensats de Bose-Einstein en rotation dans des domaines bornés

Les condensats de Bose-Einstein (CBE) en rotation offrent un cadre fascinant où la mécanique quantique rencontre des phénomènes caractéristiques de la dynamique des fluides. Lorsqu'un condensat est confiné dans un domaine borné et soumis à une rotation, son comportement devient particulièrement complexe en raison des effets conjugués de la non-linéarité, de la contrainte géométrique et de la formation de vortex quantiques.

Les CBE en rotation présentent divers phénomènes quantiques intéressants, tels que l'apparition de vortex quantiques [4, 8, 9, 16], le centre de rotation de masse [1, 16, 32]. Dans le cadre expérimental physique, les pièges à rotation occupent simultanément l'état fondamental du système car la température est inférieure à une valeur critique [4, 8, 11, 13, 16] et au cours des deux dernières décennies, l'étude des CEB en rotation est toujours un sujet central des physiciens et des mathématiciens à la fois au niveau national et international [4, 9, 13, 21, 23, 27, 29] et les références qui s'y trouvent.

Nous étudions les condensats de Bose-Einstein avec des interactions attractives dans un domain borné $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, décrit par l'énergie fonctionnelle de Gross-Pitaevskii (GP) [13–15], donnée par :

$$E_a(u) := \int_{\mathcal{D}} (|\nabla u(x)|^2 + V(x)|u(x)|^2)dx - \frac{a}{2} \int_{\mathcal{D}} |u(x)|^4 dx - \Omega \int_{\mathcal{D}} x^\perp \cdot (iu, \nabla u) dx. \quad (1.1)$$

ici,

- $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, $x^\perp = (-x_2, x_1)$, $(iu, \nabla u) := i(u\nabla \bar{u} - \bar{u}\nabla u)/2$.
- $\mathcal{D}$ est un domaine borné qui satisfait la condition de boule intérieure et $\partial\mathcal{D} \in C^1$.
- Le paramètre $a > 0$ dans (1.1) caractérise le produit absolu de la longueur de diffusion ν d'interactions à deux corps fois le nombre N des particules dans les condensats.
- $\Omega \geq 0$ décrit la vitesse de rotation d'un piège $V(x)$.

Dans le but de faire une étude plus précise sur l'équation de CBE en rotation avec l'énergie fonctionnelle de GP (1.1), notre mémoire est organisé en deux grande parties:

- *Nous assurons l'existence d'un seuil qui entraîne l'existence d'un nombre critique des particules pour l'effondrement du condensat de Bose-Einstein, autrement, selon le seuil, nous étudions l'existence et la non-existence des minimiseurs pour $E_a(u)$.*
- *Nous présentons une analyse détaillée du comportement des minimiseurs à mesure que a approche de a^* . (a^* sera défini ultérieurement)*

Chapitre 2

*L'existence et la non-existence des minimiseurs
pour le problème de minimisation*

Le problème fondamental dans l'étude de CBE en rotation est de trouver le condensat stationnaire $u(x)$, en particulier l'état fondamental qui est l'état quantique de plus basse énergie. Autrement, l'état fondamental $u(x)$ est obtenu par la minimisation de l'énergie fonctionnelle sous la conservation de la masse totale :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \text{ tel que :} \\ e(a) := \min_{\{u \in H_0^1(\mathcal{D}, \mathbb{C}), \|u\|_2^2 = 1\}} E_a(u). \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Pour faire notre étude de l'existence de minimiseurs de (2.1), nous assumons que le potentiel de piégeage est harmonique c'est-à-dire

$$V(x) = x_1^2 + \Lambda x_2^2, \quad \Lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ et } x = (x_1, x_2) \in \mathcal{D}. \quad (2.2)$$

Et le résultat obtenu dans le Théorème 2.1 assure l'existence du seuil a^* qui entraîne l'existence d'un nombre critique des particules pour l'effondrement du condensat de Bose-Einstein [4].

Remarque 2.1. Si nous utilisons l'inégalité diamagnétique [15, 30]

$$|(\nabla - i\mathcal{A})u|^2 = |\nabla u|^2 - 2\mathcal{A} \cdot (iu, \nabla u) + \mathcal{A}^2 |u|^2 \geq |\nabla |u||^2, \text{ p.p dans } \mathbb{R}^2, \quad (2.3)$$

où $u \in H^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, $\mathcal{A} \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ et posons $\mathcal{A} = \frac{\Omega}{2} x^\perp$, nous pouvons réécrire l'énergie fonctionnelle de Gross-Pitaevskii (GP) comme suit :

$$E_a(u) = \int_{\mathcal{D}} \left| \left(\nabla - i \frac{\Omega}{2} x^\perp \right) u \right|^2 dx + \int_{\mathcal{D}} V_\Omega(x) |u(x)|^2 dx - \frac{a}{2} \int_{\mathcal{D}} |u(x)|^4 dx. \quad (2.4)$$

où $V_\Omega(x)$ est défini par :

$$V_\Omega(x) := V(x) - \frac{\Omega^2}{4} |x|^2, \quad x \in \mathcal{D}. \quad (2.5)$$

De plus, posons

$$\mathcal{Z} := \left\{ x \in \bar{\mathcal{D}} : V_\Omega(x) = \inf_{y \in \bar{\mathcal{D}}} V_\Omega(y) \right\}, \quad (2.6)$$

où $\bar{\mathcal{D}} := \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$ et $V_\Omega(x)$ sur $\partial\mathcal{D}$ sera défini par :

$$V_\Omega(x) |_{x=(x_1, x_2) \in \partial\mathcal{D}} := x_1^2 + \Lambda x_2^2 - \frac{\Omega^2}{4} |x|^2, \quad x \in \mathcal{D}. \quad (2.7)$$

Remarque 2.2. Dans le cas où il n'y a pas une rotation pour $V(x)$, c'est-à-dire, $\Omega = 0$, nous notons de l'inégalité diamagnétique (2.3) que

$$|\nabla u| \geq |\nabla |u||, \quad p.p \text{ in } \mathbb{R}^2, \quad (2.8)$$

ce qui nous indique que tous les minimiseurs sont essentiellement à valeurs réelles.

Le problème (2.1) avec $\Omega = 0$ dans l'espace $\mathbb{R}^2$ était largement étudié [5, 20, 23–25, 30] dans le cadre de chercher l'existence, le comportement de limite raffiné, la brisure de symétrie et l'unicité locale des minimiseurs de la fonctionnelle. De [17, 28, 35], l'équation scalaire de champ non linéaire

$$-\Delta u + u - u^3 = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}). \quad (2.9)$$

admet une solution positive et unique qui est radialement symétrique à son l'origine. Nous la notons $w(x)$ qui est exponentiellement décroissante [17]

$$w(x), \quad |\nabla w(x)| = O(|x|^{-\frac{1}{2}} e^{-|x|}), \quad \text{lorsque } |x| \rightarrow \infty. \quad (2.10)$$

En supplément, de [5, 23], $e(a)$ dans $\mathbb{R}^2$ admet des minimiseurs si et seulement si $0 \leq a < a^* := \|w\|_2^2$, à l'aide de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg [35] :

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^4 dx \leq \frac{2}{a^*} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^2 dx, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \quad (2.11)$$

où $\frac{2}{a^*}$ est la meilleure constante et l'égalité est atteinte si $u(x) = w(x)$. (2.11) peut être transformer en un nouveau type de l'inégalité de GN

$$\int_{\mathcal{D}} |u(x)|^4 dx \leq \frac{2}{a^*} \int_{\mathcal{D}} |\nabla u(x)|^2 dx \int_{\mathcal{D}} |u(x)|^2 dx, \quad u \in H_0^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}), \quad (2.12)$$

où la meilleure constante $\frac{2}{a^*}$ ne peut pas être atteindre. Cette inégalité aide à démontrer le théorème 2.1 de l'existence et la non-existence des minimiseurs du problème de minimisation (2.1).

Théorème 2.1. Soit w la solution radiale, positive et unique de (2.9). Supposons V satisfait (2.2). Posons $a^* := \|w\|_2^2$, alors

1. Si $0 \leq \Omega < \infty$ et $0 \leq a < a^*$, il existe au moins un minimiseur pour (2.1).
2. Si $0 \leq \Omega < \infty$ et $a \geq a^*$, il n'existe pas un minimiseur pour (2.1).

Remarque 2.3. Selon [22], dans $\mathbb{R}^2$ avoir des results pour $e(a)$ exige l'existence d'une vélocité critique $0 < \Omega^* \leq \infty$ telle que $e(a) \in \mathbb{R}^2$ admet des minimiseurs si et seulement si $0 < a < a^*$ qui mène à $\Omega < \Omega^*$. La raison entre les résultats dans $\mathbb{R}^2$ et un domaine borné $\mathcal{D}$ est le terme rotationnel $-\Omega \int_{\mathcal{D}} x^\perp \cdot (iu, \nabla u) dx$ qui est borné inférieurement pour $a \in (0, a^*)$.

Preuve du Théorème 2.1 :

• **L'existence des minimiseurs :**

Pour $u \in H_0^1(\mathcal{D}, \mathbb{C})$ et $\|u\|_2^2 = 1$, en utilisant l'inégalité GN (2.12), nous avons de (2.8)

$$\begin{aligned} E_a(u) &\geq \int_{\mathcal{D}} |\nabla u(x)|^2 dx - \frac{a}{a^*} \int_{\mathcal{D}} |\nabla |u||^2 dx - \Omega \int_{\mathcal{D}} x^\perp \cdot (iu, \nabla u) dx \\ &\geq \frac{a^* - a}{a^*} \int_{\mathcal{D}} |\nabla u|^2 dx - \Omega \int_{\mathcal{D}} x^\perp \cdot (iu, \nabla u) dx. \end{aligned} \quad (2.13)$$

D'un autre côté, en appliquant l'inégalité de Cauchy, nous avons

$$\begin{aligned} \Omega \int_{\mathcal{D}} x^\perp \cdot (iu, \nabla u) dx &\leq \frac{a^* - a}{2a^*} \int_{\mathcal{D}} |\nabla u|^2 dx + \frac{a^* \Omega^2}{2(a^* - a)} \int_{\mathcal{D}} |x|^2 |u|^2 dx \\ &\leq \frac{a^* - a}{2a^*} \int_{\mathcal{D}} |\nabla u|^2 dx + C, \end{aligned} \quad (2.14)$$

où $C > 0$ est une constante qui dépend de a , Ω et $\text{diam}(\mathcal{D})$. En substituant (2.14) dans (2.13), nous obtenons

$$E_a(u) \geq \frac{a^* - a}{2a^*} \int_{\mathcal{D}} |\nabla u|^2 dx - C \geq -C, \quad (2.15)$$

ce qui implique que $E_a(u)$ est uniformément borné inférieurement et $e(a)$ admet au moins une suite minimisante.

Soit $\{u_n\} \subset H_0^1(\mathcal{D}, \mathbb{C})$ une suite minimisante de $e(a)$ avec $a \in (0, a^*)$, c'est-à-dire

$$\|u_n\|_2^2 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E_a(u_n) = e(a).$$

De (2.15), nous avons

$$e(a) \geq \frac{a^* - a}{2a^*} \int_{\mathcal{D}} |\nabla u_n|^2 dx - C, \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty, \quad (2.16)$$

ce qui montre que $\int_{\mathcal{D}} |\nabla u_n|^2$ est uniformément borné en n . Étant donné que l'injection $H_0^1(\mathcal{D}, \mathbb{C}) \hookrightarrow L^q(\mathcal{D}, \mathbb{C})$ est compacte pour tout $q \in [2, \infty)$, passant à une sous-suite s'il est nécessaire, il existe $u_0 \in H_0^1(\mathcal{D}, \mathbb{C})$ telle que

$$\begin{aligned} u_n &\xrightarrow{n} u_0 \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\mathcal{D}, \mathbb{C}), \\ u_n &\xrightarrow{n} u_0 \quad \text{fortement dans } L^q(\mathcal{D}, \mathbb{C}). \end{aligned} \quad (2.17)$$

D'un autre part, nous déduisons de $E_a(u)$ et (2.17) que $E_a(u_n)$ est faiblement semi-continue inférieurement le long de la suite u_n , ce qui implique que

$$e(a) \leq E_a(u_0) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} E_a(u_n) = e(a). \quad (2.18)$$

Alors, $\int_{\mathcal{D}} |u_0|^2 dx = 1$ et $e(a) = E_a(u_0)$. Donc, pour tout $0 \leq \Omega < \infty$ et $0 < a < a^*$, il existe au moins un minimiseur pour $e(a)$.

• **La non-existence des minimiseurs :**

La preuve de la non-existence des minimiseurs pour (2.1) dans le cas $a \geq a^*$ se fait comme suit.

- $a > a^*$:

Nous définissons,

$$u_\tau(x) = \frac{A_\tau \tau}{\|w\|_2} \phi\left(\frac{x - x_\tau}{R_\tau}\right) w(\tau(x - x_\tau)) e^{i \frac{\Omega}{2} x \cdot x_\tau^\perp}, \quad x \in \mathcal{D}, \quad (2.19)$$

où $\tau > 0$, $R_\tau > 0$, $x_\tau \in \mathcal{D}$, $x_\tau^\perp = (-x_{\tau 1}, x_{\tau 2})$, $A_\tau > 0$ est choisi de sorte que $\int_{\mathcal{D}} |u_\tau|^2 dx = 1$, $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ est positive telle que $\phi(x) = 1$ si $|x| \leq 1$, $\phi(x) \in (0, 1)$ si $|x| \in (1, 2)$ et $\phi(x) = 0$ si $|x| \geq 2$.

Maintenant, nous dénotons

$$\mathcal{D}_\tau := \{\tau(x - x_\tau) : x \in \mathcal{D}\} \quad \text{et} \quad R_\tau := \frac{M \ln(\tau)}{\tau},$$

où $M > 0$ est une constante suffisamment grande. Prenons x_0 comme un point minimum de $V_\Omega(x)$ dans $\bar{\mathcal{D}}$, c'est-à-dire

$$V_\Omega(x_0) = \inf_{x \in \bar{\mathcal{D}}} V_\Omega(x), \quad (2.20)$$

où $V_\Omega(x)$ est défini dans (2.7). Si $V_\Omega(x)$ peut atteindre son minimum en certains points intérieurs de $\mathcal{D}$, $x_0 \in \mathcal{D}$ et $x_\tau \equiv x_0$. Si $V_\Omega(x)$ peut atteindre son minimum en certains points de la frontière de $\mathcal{D}$, nous supposons $x_0 \in \partial\mathcal{D}$ et notons $x_\tau = x_0 - 2R_\tau \vec{n}$, où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal de $\partial\mathcal{D}$ à x_0 et $B_{2R_\tau}(x_\tau) \subset \mathcal{D}$ pour τ largement grand.

Appliquons (2.10) et (2.12) pour $u = w$, après quelques calculs, nous obtenons

$$A_\tau^2 = 1 + o(\tau^{-M}) \quad \text{lorsque} \quad r \rightarrow \infty \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{D}} \left| \left(\nabla - i \frac{\Omega}{2} x^\perp \right) u_\tau \right|^2 dx \\ &= \frac{A_\tau^2 \tau^2}{\|w\|_2^2} \int_{\mathcal{D}} \left| \frac{1}{R_\tau} \nabla \phi \left(\frac{x - x_\tau}{R_\tau} \right) w(\tau(x - x_\tau)) + \tau \phi \left(\frac{x - x_\tau}{R_\tau} \right) \nabla w(\tau(x - x_\tau)) \right. \\ & \quad \left. - i \frac{\Omega}{2} (x - x_\tau)^\perp \phi \left(\frac{x - x_\tau}{R_\tau} \right) w(\tau(x - x_\tau)) \right|^2 dx \\ &= \frac{A_\tau^2 \tau^2}{\|w\|_2^2} \int_{\mathcal{D}_\tau} \left[\phi^2 \left(\frac{x}{\tau R_\tau} \right) |\nabla w|^2 + 2 \frac{1}{\tau R_\tau} \phi \left(\frac{x}{\tau R_\tau} \right) w \nabla \phi \left(\frac{x}{\tau R_\tau} \right) \cdot \nabla w \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\tau^2 R_\tau^2} \left| \nabla \phi \left(\frac{x}{\tau R_\tau} \right) \right|^2 w^2 \right] dx + \frac{A_\tau^2}{\|w\|_2^2} \frac{\Omega^2}{4\tau^2} \int_{\mathcal{D}_\tau} |x|^2 \phi^2 \left(\frac{x}{\tau R_\tau} \right) w^2 dx \\ &= \tau^2 + \frac{\Omega^2}{4a^* \tau^2} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 w^2 dx + o(\tau^{-M}), \tau \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\int_{\mathcal{D}} V_{\Omega}(x) |u_{\tau}|^2 dx = \frac{A_{\tau}^2}{\|w\|_2^2} \int_{\mathcal{D}_{\tau}} V_{\Omega} \left(\frac{x}{\tau} + x_{\tau} \right) \phi^2 \left(\frac{x}{\tau R_{\tau}} \right) w^2 dx = V_{\Omega}(x_0) + o(\tau^{-M}), \tau \rightarrow \infty, \quad (2.23)$$

et,

$$\frac{a}{2} \int_{\mathcal{D}} |u_{\tau}|^4 dx = \frac{a}{2} \frac{A_{\tau}^4 \tau^2}{\|w\|_2^4} \int_{\mathcal{D}_{\tau}} \phi^4 \left(\frac{x}{\tau R_{\tau}} \right) w^4 dx = \frac{a}{a^*} \tau^2 + o(\tau^{-M}), \tau \rightarrow \infty. \quad (2.24)$$

En utilisant les estimations précédentes, nous déduisons de $E_a(u)$ que,

$$e(a) \leq E_a(u_{\tau}) = \frac{a^* - a}{a^*} \tau^2 + V_{\Omega}(x_0) + O(\tau^{-2}), \tau \rightarrow \infty. \quad (2.25)$$

Comme $\Omega \geq 0$ and $a > a^*$, nous obtenons directement que $e(a)$ n'est pas borné inférieurement et n'admet pas des minimiseurs.

- $a = a^*$:

Finalement, nous montrons la non-existence des minimiseurs pour $e(a^*)$ par contradiction. De (2.20) et (2.25), nous avons,

$$e(a^*) \leq V_{\Omega}(x_0) = \inf_{x \in \mathcal{D}} V_{\Omega}(x). \quad (2.26)$$

D'un autre côté, en utilisant l'inégalité diamagnétique (2.8) et l'inégalité de GN (2.12), nous déduisons de $E_a(u)$ que pour tout $u \in H_0^1(\mathcal{D}, \mathbb{C})$ avec $\|u\|_2^2 = 1$,

$$E_{a^*}(u) \geq \int_{\mathcal{D}} V_{\Omega}(x) |u|^2 dx \geq \inf_{x \in \mathcal{D}} V_{\Omega}(x). \quad (2.27)$$

Combinons (2.26) et (2.27)

$$e(a^*) = \inf_{x \in \mathcal{D}} V_{\Omega}(x). \quad (2.28)$$

Supposons qu'il existe un minimiseur $u^* \equiv 0$ pour $e(a^*)$. Similaire à (2.27), nous obtenons,

$$e(a^*) = E_{a^*}(u^*) \geq \int_{\mathcal{D}} V_{\Omega}(x) |u^*|^2 dx > \inf_{x \in \mathcal{D}} V_{\Omega}(x), \quad (2.29)$$

qui est contradictoire avec (2.28). Ce qui prouve la non-existence des minimiseurs pour $e(a^*)$. Alors, la preuve de Théorème 2.1 est complète.

Chapitre 3

*La discipline des minimiseurs lorsque a
s'approche de a^**

L'étude de l'existence des minimiseurs seulement si $0 \leq \Omega < \infty$ et $0 \leq a < a^*$, nous permet à voir la discipline des minimiseurs u_a lorsque a s'approche de la valeur critique a^* . Autrement, le deuxième résultat traite de la discipline de masse de concentration des minimiseurs pour le problème (2.1), avec un potentiel piégeage $V(x)$ satisfaisant (2.2) où $\Lambda > 1$ et $\Omega \leq 2$. Nous pouvons voir facilement de (2.2) et (2.5) que $V_\Omega(x) \geq 0$ et l'origine est le point minimum unique de $V_\Omega(x)$ si $\Lambda > 1$ et $\Omega \leq 2$. Alors, nous supposons que $0 \in \mathcal{D}$ pour pouvoir analyser la limite de la discipline des minimiseurs dans le le théorème suivant.

Théorème 3.1. *Supposons que l'origine est un point intérieur de $\mathcal{D}$ et $V(x)$ satisfait (2.2) avec $\Lambda > 1$ et $\Omega \leq 2$. Soit u_a un minimiseur à valeurs complexes de $e(a)$. Alors, nous avons les conclusions comme suit.*

1. $|u_a|$ admet un point de minimum local et unique x_a lorsque a est très proche de a^* et x_a satisfait

$$\frac{|x_a|}{(a^* - a)^{\frac{1}{4}}} \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*. \quad (3.1)$$

2. Posons $\tilde{u}_a := \sqrt{a^* \frac{(a^* - a)^{\frac{1}{4}}}{\lambda}} u_a \left(\frac{(a^* - a)^{\frac{1}{4}}}{\lambda} x + x_a \right) e^{-i \left(\frac{\Omega}{2\lambda} (a^* - a)^{\frac{1}{4}} x \cdot x_a^\perp - \theta_a \right)}$, où $\theta \in [0, 2\pi)$ est une constante et

$$\lambda := \left[\int_{\mathbb{R}^2} V(x) w^2 dx \right]^{\frac{1}{4}} > 0. \quad (3.2)$$

Alors, $\tilde{u}_a$ satisfait

$$\tilde{u}_a \rightarrow w(x) \quad \text{uniformément dans } L^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) \text{ lorsque } a \nearrow a^*. \quad (3.3)$$

où w est la solution positive, radialement symétrique et unique de (2.9).

Remarque 3.1. La preuve de théorème (3.1) base fortement sur l'analyse d'explosion sur $|u_a|$ et les méthodes d'énergie et nous pouvons déduire du preuve que

$$\frac{e(a)}{(a^* - a)^{\frac{1}{2}}} \rightarrow \frac{2\lambda}{a^*}, \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*. \quad (3.4)$$

Remarque 3.2. Le théorème (3.1) s'applique aussi si $0 < \Lambda < 1$ et $\Omega \leq 2\sqrt{\Lambda}$.

Pour prouver les résultats du théorème (3.1), nous supposons que u_a satisfait l'équation de Euler-Lagrange suivante :

$$\begin{cases} -\Delta u_a + V(x)u_a + i\Omega x^\perp \cdot \nabla u_a = \mu_a u_a + a|u_a|^2 u_a, & \text{in } \mathcal{D}, \\ u_a = 0, & \text{in } \partial\mathcal{D}. \end{cases} \quad (3.5)$$

où $\mu_a \in \mathbb{R}$ est le multiplicateur de Lagrange associé et

$$\mu_a = e(a) - \frac{a}{2} \int_{\mathcal{D}} |u_a|^4 dx, \quad 0 < a < a^*. \quad (3.6)$$

Maintenant, nous adressons les estimations de l'énergie $e(a)$ lorsque $a \nearrow a^*$.

Lemme 3.1. Supposons que l'origine est un point intérieur de $\mathcal{D}$ et que $V(x)$ satisfait (2.2) avec $\Lambda > 1$ et $\Omega \leq 2$. Alors, nous avons

$$0 \leq e(a) \leq \frac{2\lambda^2 + o(1)}{a^*} (a^* - a)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*, \quad (3.7)$$

où $\lambda > 0$ est défini par (3.2).

Preuve.

Nous commençons par la borne inférieure de $e(a)$. En utilisant l'inégalité de GN (2.12) et l'inégalité diamagnétique (2.8), nous déduisons à partir de $E_a(u)$ que pour tout $u \in H_0^1(\mathcal{D}, \mathbb{C})$ avec $\|u\|_2^2 = 1$

$$\begin{aligned} E_a(u) &\geq \int_{\mathcal{D}} |\nabla u|^2 dx - \frac{a}{2} \int_{\mathcal{D}} |u|^4 dx + \int_{\mathcal{D}} V_\Omega(x) |u|^2 dx \\ &\geq \frac{a^* - a}{2} \int_{\mathcal{D}} |u|^4 dx + \int_{\mathcal{D}} V_\Omega(x) |u|^2 dx \geq 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

ce qui donne la borne inférieure de (3.7).

Maintenant, nous allons établir la borne supérieure de (3.7), en prenant une fonction test comme celle de (2.19) avec $x_\tau \equiv 0$. similaire à (2.22)-(2.24), nous obtenons

$$\frac{a}{2} \int_{\mathcal{D}} |u_\tau|^4 dx = \frac{a}{a^*} \tau^2 + o(\tau^{-M}), \quad \text{lorsque } \tau \rightarrow \infty,$$

$$\int_{\mathcal{D}} \left| \left(\nabla - i \frac{\Omega}{2} x^\perp \right) u_\tau \right|^2 dx = \tau^2 + \frac{\Omega^2}{4a^*\tau^2} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 w^2 dx + o(\tau^{-M}), \quad \text{lorsque } \tau \rightarrow \infty,$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} V_\Omega(x) |u_\tau|^2 dx &= \frac{A_\tau^2}{\|w\|_2^2} \int_{\mathcal{D}_\tau} V_\Omega\left(\frac{x}{\tau}\right) \phi^2\left(\frac{x}{\tau R_\tau}\right) w^2 dx \\ &= \frac{1}{a^*\tau^2} \int_{\mathbb{R}^2} V_\Omega(x) w^2 dx + o(\tau^{-M}), \quad \text{lorsque } \tau \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Avec les estimation précédentes, prenons $\tau = \lambda(a^* - a)^{-\frac{1}{4}}$, alors nous avons

$$\begin{aligned} e(a) &\leq \frac{\tau^2}{a^*} (a^* - a) + \frac{1}{a^*\tau^2} \int_{\mathbb{R}^2} \left[V_\Omega(x) + \frac{\Omega^2}{4} |x|^2 \right] w^2 dx + o(\tau^{-M}) \\ &= \frac{\tau^2}{a^*} (a^* - a) + \frac{\lambda^4}{a^*\tau^2} + o(\tau^{-M}) \\ &= \frac{2\lambda^2 + o(1)}{a^*} (a^* - a)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{lorsque } \tau \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Alors, nous obtenons ainsi la borne supérieure dans (3.7), ce qui achève la démonstration de ce lemme. $\square$

Lemme 3.2. Supposons que les hypothèses du théorème 2.1 sont satisfaites. Soit u_a un minimiseur à valeurs complexes de $e(a)$. Définissons

$$\epsilon_a := \left(\int_{\mathcal{D}} |\nabla u_a|^2 dx \right)^{-\frac{1}{2}} > 0. \tag{3.10}$$

Alors, nous avons

1. $\epsilon_a \rightarrow 0$ et $\mu_a \epsilon_a^2 \rightarrow -1$, lorsque $a \nearrow a^*$.
2. $|u_a|$ admet au moins un point de maximum global dans $\mathcal{D}$.

Preuve.

1. Par raisonnement par l'absurde, supposons que $\int_{\mathcal{D}} |\nabla u_a|^2 dx \leq C$ pour une certaine constante C . Comme $\int_{\mathcal{D}} |u_a|^2 dx = 1$, nous en résultons que la suite $\{u_a\}$ est

uniformément bornée dans $H_0^1(\mathcal{D}, \mathbb{C})$ lorsque $a \nearrow a^*$. Étant donné que l'injection $H_0^1(\mathcal{D}, \mathbb{C}) \hookrightarrow L^q(\mathcal{D}, \mathbb{C})$ est compacte pour tout $q \in [2, \infty)$, nous pouvons extraire si nécessaire une sous-suite, toujours notée $\{u_a\}$, telle que

$$\begin{aligned} u_a &\rightharpoonup u_0 \text{ faiblement dans } H_0^1(\mathcal{D}, \mathbb{C}), \\ u_a &\rightarrow u_0 \text{ fortement dans } L^q(\mathcal{D}, \mathbb{C}), \end{aligned}$$

où $u_0 \in H_0^1(\mathcal{D}, \mathbb{C})$.

Prenons $\{u_a\}$ avec $a \nearrow a^*$ comme une suite de minimisation de $e(a^*)$. Alors, à ceux utilisés dans (2.17)-(2.18) montrent que u_0 est un minimiseur de $e(a^*)$, ce qui contredit le fait que $e(a^*)$ n'admet pas de minimiseurs. Par conséquent, nous avons $\epsilon_a \rightarrow 0$ lorsque $a \nearrow a^*$.

Nous montrons ensuite que $\mu_a \epsilon_a^2 \rightarrow -1$ lorsque $a \nearrow a^*$. Puisque $e(a) \rightarrow 0$, lorsque $a \nearrow a^*$, nous pouvons déduire de $E_a(u)$ que

$$\int_{\mathcal{D}} V_{\Omega}(x) |u_a|^2 dx \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*, \quad (3.11)$$

et

$$\frac{\int_{\mathcal{D}} |u_a|^4 dx}{\int_{\mathcal{D}} \left| \left(\nabla - i \frac{\Omega}{2} x^\perp \right) u_a \right|^2 dx} \rightarrow \frac{2}{a^*}, \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*. \quad (3.12)$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Cauchy, pour tout $\epsilon > 0$, nous obtenons

$$\left| \Omega \int_{\mathcal{D}} x^\perp (iu_a, \nabla u_a) dx \right| \leq \epsilon \int_{\mathcal{D}} |\nabla u_a|^2 dx + \frac{1}{4\epsilon} \int_{\mathcal{D}} \Omega^2 |x|^2 |u_a|^2 dx. \quad (3.13)$$

Prenons $\epsilon = \left(\int_{\mathcal{D}} |\nabla u_a|^2 dx \right)^{-\frac{1}{2}}$, nous obtenons

$$\left| \Omega \int_{\mathcal{D}} x^\perp (iu_a, \nabla u_a) dx \right| \leq C \left(\int_{\mathcal{D}} |\nabla u_a|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.14)$$

où $C > 0$ est une constante dépendante de a , Ω et $\text{diam}(\mathcal{D})$. Par ailleurs, nous pouvons dériver de (2.3) et (3.14) que

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\mathcal{D}} \left| \left(\nabla - i \frac{\Omega}{2} x^\perp \right) u_a \right|^2 dx}{\int_{\mathcal{D}} |\nabla u_a|^2 dx} &= 1 - \frac{\Omega \int_{\mathcal{D}} x^\perp (i u_a, \nabla u_a) dx}{\int_{\mathcal{D}} |\nabla u_a|^2 dx} + \frac{\frac{\Omega^2}{4} \int_{\mathcal{D}} |x|^2 |u_a|^2 dx}{\int_{\mathcal{D}} |\nabla u_a|^2 dx} \\ &= 1 + o(1), \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Alors, de (3.6), (3.7), (3.12) et (3.15), nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{a \nearrow a^*} \mu_a \epsilon_a^2 &= \lim_{a \nearrow a^*} \frac{e(a) - \frac{a}{2} \int_{\mathcal{D}} |u_a|^4 dx}{\int_{\mathcal{D}} |\nabla u_a|^2 dx} \\ &= \lim_{a \nearrow a^*} \frac{e(a) - \frac{a}{2} \int_{\mathcal{D}} |u_a|^4 dx}{\int_{\mathcal{D}} \left| \left(\nabla - i \frac{\Omega}{2} x^\perp \right) u_a \right|^2 dx} \\ &= -1. \end{aligned} \quad (3.16)$$

2. Définissons $v_a(x) := \epsilon_a u_a(\epsilon_a x)$. Alors, nous pouvons vérifier que

$$\int_{\mathcal{D}'_a} |v_a|^2 dx = \int_{\mathcal{D}'_a} |\nabla v_a|^2 dx = 1, \quad (3.17)$$

et $v_a(x)$ satisfait

$$\begin{cases} \left\{ -\Delta v_a + i \epsilon_a^2 \Omega x^\perp \cdot \nabla v_a \right\} + \left[\frac{\epsilon_a^4 \Omega^2}{4} |x|^2 + \epsilon_a^2 V_\Omega(\epsilon_a x) - \mu_a \epsilon_a^2 - a |v_a|^2 \right] v_a = 0, & \text{dans } \mathcal{D}'_a, \\ v_a = 0, & \text{sur } \partial \mathcal{D}'_a, \end{cases} \quad (3.18)$$

où $\mathcal{D}'_a := \{\epsilon_a x : x \in \mathcal{D}\}$.

Supposons que $v_a := R_{v_a} + i I_{v_a}$, où R_{v_a} la partie réelle de v_a et I_{v_a} la partie imaginaire de v_a . Donc, nous pouvons dériver que

$$\begin{cases} -\Delta R_{v_a} - \epsilon_a^2 \Omega x^\perp \cdot \nabla I_{v_a} + \left[\frac{\epsilon_a^4 \Omega^2}{4} |x|^2 + \epsilon_a^2 V_\Omega(\epsilon_a x) - \mu_a \epsilon_a^2 - a |v_a|^2 \right] R_{v_a} = 0, & \text{dans } \mathcal{D}'_a, \\ -\Delta I_{v_a} + \epsilon_a^2 \Omega x^\perp \cdot \nabla R_{v_a} + \left[\frac{\epsilon_a^4 \Omega^2}{4} |x|^2 + \epsilon_a^2 V_\Omega(\epsilon_a x) - \mu_a \epsilon_a^2 - a |v_a|^2 \right] I_{v_a} = 0, & \text{dans } \mathcal{D}'_a. \end{cases} \quad (3.19)$$

En utilisant la théorie L^p [18] et le théorème standard d'injection de Sobolev [18], nous pouvons déduire que $R_{v_a}, I_{v_a} \in C^1(\mathcal{D}'_a)$, ce qui implique que $|v_a|^2 \in C^1(\mathcal{D}'_a)$. Maintenant, nous allons prouver que $|v_a|$ admet au moins un point maximal global en $\mathcal{D}_a$ par contradiction. Sinon, supposons que $|v_a|$ atteigne son maximum sur la frontière de $\mathcal{D}_a$. Puisque $v_a = 0$ sur $\partial\mathcal{D}'_a$, nous pouvons déduire que $|v_a| \equiv 0$ sur $\bar{\mathcal{D}}'_a$, ce qui contredit (3.17). Donc, nous pouvons conclure directement que $|u_a|$ admet au moins un point maximal global dans $\mathcal{D}$. Alors, la preuve de ce lemme est complète. $\square$

Lemme 3.3. Supposons que toutes les hypothèses du théorème 2.1 sont satisfaites. Soit u_a un minimiseur à valeurs complexes de $e(a)$. Définissons

$$w_a(x) := \epsilon_a u_a(\epsilon_a x + x_a) e^{i(\theta_a - \frac{\epsilon_a \Omega}{2} x \cdot x_a^\perp)}, \quad x \in \mathcal{D}_a, \quad (3.20)$$

où x_a est un point de maximum global de $|u_a|$, $\theta_a \in [0, 2\pi)$ est une constante à déterminer et

$$\mathcal{D}_a := \{x \in \mathbb{R}^2 : \epsilon_a x + x_a \in \mathcal{D}\}. \quad (3.21)$$

Alors, Nous avons ce qui suit.

1. il existe des constantes $\eta > 0$ et $R > 0$, indépendantes de a , telles que

$$\liminf_{a \nearrow a^*} \int_{B_{2R}(0) \cap \mathcal{D}_a} |w_a|^2 dx \geq \eta > 0. \quad (3.22)$$

2. Pour chaque $|u_a|$ avec a suffisamment proche de a^* , le point de maximum global x_a est l'unique point de maximum local de $|u_a|$ et satisfait $\lim_{a \nearrow a^*} |x_a| = 0$. De plus, $\mathcal{D}_a$ satisfait

$$\mathcal{D}_{a^*} = \mathbb{R}^2. \quad (3.23)$$

Et w_a satisfait

$$w_a(x) \rightarrow \frac{w(x)}{\sqrt{a^*}} \text{ Fortement dans } H^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}), \quad \text{quand } a \nearrow a^*, \quad (3.24)$$

où w est l'unique solution radialement symétrique positive de (2.9).

Preuve.

1. Posons $w_a(x) := e^{i\theta_a} \bar{w}_a(x)$, où $\bar{w}_a(x) := \epsilon_a u_a(\epsilon_a x + x_a) e^{-i\frac{\epsilon_a \Omega}{2} x \cdot x_a^\perp}$ et $\theta_a \in [0, 2\pi)$ est choisi de telle sorte que

$$\left\| w_a - \frac{w}{\sqrt{a^*}} \right\|_{L^2(\mathcal{D}_a)} = \min_{\theta \in [0, 2\pi)} \left\| e^{i\theta} \bar{w}_a - \frac{w}{\sqrt{a^*}} \right\|_{L^2(\mathcal{D}_a)}. \quad (3.25)$$

Quelques calculs permettent alors d'obtenir les conditions d'orthogonalité suivantes pour w_a :

$$\int_{\mathcal{D}_a} w_a I_a(x) dx = 0, \quad (3.26)$$

où $I_a(x)$ est la partie imaginaire de $w_a(x)$. D'un côté, similaire à (3.11), (3.12), (3.15) et (3.17), nous avons

$$\int_{\mathcal{D}_a} |w_a|^2 dx = 1, \quad (3.27)$$

$$\int_{\mathcal{D}_a} |\nabla w_a|^2 dx = \epsilon_a^2 \int_{\mathcal{D}} \left| \left(\nabla - i \frac{\Omega}{2} x_a^\perp \right) w_a \right|^2 dx \rightarrow 1, \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*, \quad (3.28)$$

$$\int_{\mathcal{D}_a} |w_a|^4 dx \rightarrow \frac{2}{a^*}, \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*, \quad (3.29)$$

et

$$\int_{\mathcal{D}_a} V_\Omega(\epsilon_a x + x_a) |w_a|^2 dx \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*. \quad (3.30)$$

Par conséquent, $\{w_a\}$ est uniformément borné dans $H_0^1(\mathcal{D}_a, \mathbb{C})$. En utilisant l'inégalité diamagnétique (2.3), nous pouvons vérifier que $|w_a|$ est aussi uniformément borné dans $H_0^1(\mathcal{D}_a, \mathbb{R})$.

D'après (3.5) et (3.20), nous pouvons déduire que w_a est une solution à valeurs complexes de l'équation d'Euler-Lagrange suivante :

$$\begin{cases} -\Delta w_a + i\epsilon_a^2 \Omega(x^\perp, \nabla w_a) + \left[\frac{\epsilon_a^4 \Omega^2}{4} |x|^2 + \epsilon_a^2 V_\Omega(\epsilon_a x + x_a) - \mu_a \epsilon_a^2 - a |w_a|^2 \right] w_a = 0, & \text{dans } \mathcal{D}_a, \\ w_a = 0, & \text{dans } \partial \mathcal{D}_a. \end{cases} \quad (3.31)$$

Définissant $W_a := |w_a|^2 \geq 0$ dans $\mathcal{D}_a$, il s'ensuit que

$$-\frac{1}{2} \Delta W_a + |\nabla w_a|^2 - \epsilon_a^2 \Omega x^\perp (i w_a \cdot \nabla w_a) +$$

$$\left[\frac{\epsilon_a^4 \Omega^2}{4} |x|^2 + \epsilon_a^2 V_\Omega(\epsilon_a x + x_a) - \mu_a \epsilon_a^2 - a W_a \right] W_a = 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}_a. \quad (3.32)$$

D'après (2.3), nous avons

$$|\nabla w_a|^2 - \epsilon_a^2 \Omega x^\perp (i w_a \cdot \nabla w_a) + \frac{\epsilon_a^4 \Omega^2}{4} |x|^2 W_a \geq 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}_a \quad (3.33)$$

ce qui implique d'après (3.32) que

$$-\frac{1}{2} \Delta W_a - \mu_a \epsilon_a^2 W_a - a W_a^2 \leq 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}_a. \quad (3.34)$$

Puisque 0 est un point maximal de W_a , nous avons $-\Delta W_a(0) \geq 0$ pour tout $a < a^*$. De plus, en raison de $\mu_a \epsilon_a^2 \rightarrow -1$ lorsque $a \nearrow a^*$, nous pouvons d'extraire de (3.34) que

$$W_a(0) \geq \frac{1}{2a} \geq \frac{1}{2a^*} > 0. \quad (3.35)$$

Ici, nous affirmons qu'il existe une constante $R > 0$ telle que

$$\frac{1}{2a^*} \leq \max_{B_R(0)} W_a(x) \leq C \int_{B_{2R}(0) \cap \mathcal{D}_a} |W_a|^2 dx. \quad (3.36)$$

S'il existe une constante $R > 0$ telle que $B_{2R}(0) \subset \mathcal{D}_a$ lorsque a est suffisamment proche de a^* , en utilisant la théorie de De-Giorgi-Nash-Moser, nous pouvons d'extraire de (3.34) que

$$\frac{1}{2a^*} \leq W_a(0) = \max_{B_R(0)} W_a(x) \leq C \int_{B_{2R}(0)} |W_a|^2 dx = C \int_{B_{2R}(0) \cap \mathcal{D}_a} |W_a|^2 dx. \quad (3.37)$$

D'un autre part, si pour toute constante $R > 0$, $B_{2R}(0) \not\subset \mathcal{D}_a$ lorsque $a \nearrow a^*$, posons

$$\tilde{W}_a = \begin{cases} W_a, & x \in \mathcal{D}_a, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}_a, \end{cases}$$

et alors, $\tilde{W}_a$ satisfait

$$-\frac{1}{2} \Delta \tilde{W}_a - \mu_a \epsilon_a^2 \tilde{W}_a - a \tilde{W}_a^2 \leq 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^2. \quad (3.38)$$

Alors, pour toute constante $R > 0$, il existe que

$$\sup_{B_R(0)} \tilde{W}_a = \tilde{W}_a(0) = W_a(0) > \frac{1}{2a^*}.$$

Similaire à (3.37), nous avons alors

$$\frac{1}{2a^*} \leq \sup_{B_R(0)} \tilde{W}_a \leq C \int_{B_{2R}(0)} |\tilde{W}_a|^2 dx = C \int_{B_{2R}(0) \cap \mathcal{D}_a} |W_a|^2 dx. \quad (3.39)$$

Donc, (3.36) s'ensuit de (3.32) et (3.39). De plus, nous pouvons déduire de (3.37) qu'il existe une constante $\eta > 0$ telle que

$$\int_{B_{2R}(0) \cap \mathcal{D}_a} |w_a|^2 dx \geq \int_{B_{2R}(0) \cap \mathcal{D}_a} \frac{W_a^2}{\sup_{x \in \mathcal{D}_a} W_a} dx \geq \eta > 0. \quad (3.40)$$

(3.22) est ainsi prouvée.

2. Nous allons maintenant prouver que $\lim_{a \nearrow a^*} |x_a| = 0$, où x_a est un point de maximum global de $|u_a|$. Par contradiction, supposons qu'il existe $c_0 > 0$ tel que $|x_a| \geq c_0$ est uniformément en a . Nous pouvons déduire de (3.22) et (3.30) que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim \int_{\mathcal{D}_a} V_\Omega(\epsilon_a x + x_a) |w_a|^2 dx \\ &\geq \int_{B_{\frac{1}{\sqrt{\epsilon_a}}}(0) \cap \mathcal{D}_a} \liminf_{a \nearrow a^*} \left(1 - \frac{\Omega^2}{4}\right) |\epsilon_a x + x_a|^2 |w_a|^2 dx \\ &\geq C\eta > 0, \end{aligned} \quad (3.41)$$

ce qui est une contradiction.

Puisque $\epsilon_a \rightarrow 0$ et $|x_a| \rightarrow 0 \in \mathcal{D}$ lorsque $a \nearrow a^*$, nous pouvons observer de (3.29) que $\mathcal{D}_{a^*} = \mathbb{R}^2$. Nous pouvons donc prolonger le domaine de définition de $w_a(x)$ à $\mathbb{R}^2$ en posant $w_a = 0$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}_a$. Dans la suite de la preuve, nous supposons toujours que $w_a \in H^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ dans le sens où $w_a = 0$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}_a$. Comme $|w_a|$ est uniformément borné dans $H^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, en passant à une sous-suite si nécessaire, il existe

$|w_a| \rightharpoonup w_0$ faiblement dans $H^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, lorsque $a \nearrow a^*$ pour quelques $w_0 \in H^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Ensuite, nous certifierons que

$$|w_a| \rightarrow w_0 \text{ fortement dans } H^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \text{ lorsque } a \nearrow a^*. \quad (3.42)$$

Remarquons d'après (3.22) que $w_0 \neq 0$ dans $\mathbb{R}^2$. Par la convergence faible, nous pouvons assumer que $|w_a| \rightarrow w_0$ presque partout dans $\mathbb{R}^2$ lorsque $a \nearrow a^*$. L'application du lemme de Brézis-lieb [4] donne

$$\|\nabla |w_a|\|_2^2 = \|\nabla w_0\|_2^2 + \|\nabla |w_a| - \nabla w_0\|_2^2 + o(1), \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*, \quad (3.43)$$

et

$$\|w_a\|_q^q = \|w_0\|_q^q + \||w_a| - w_0\|_q^q + o(1), \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*, \quad (3.44)$$

où $q \in [2, +\infty)$. Il s'ensuit

$$\begin{aligned} \lim_{a \nearrow a^*} \left(\int_{\mathcal{D}_a} |\nabla |w_a||^2 dx - \frac{a^*}{2} \int_{\mathcal{D}_a} |w_a|^4 dx \right) &= \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla w_0|^2 dx - \frac{a^*}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |w_0|^4 dx \\ &+ \lim_{a \nearrow a^*} \left[\int_{\mathcal{D}_a} |\nabla (|w_a| - w_0)|^2 dx - \frac{a^*}{2} \int_{\mathbb{R}^2} ||w_a| - w_0|^4 dx \right]. \end{aligned} \quad (3.45)$$

D'un autre part, en utilisant l'inégalité diamagnétique (2.8), l'inégalité de GN (2.12) et (3.28)-(3.29), nous pouvons avoir

$$0 \leq \lim_{a \nearrow a^*} \left[\int_{\mathcal{D}_a} |\nabla |w_a||_2^2 dx - \frac{a^*}{2} \int_{\mathcal{D}_a} |w_a|^4 dx \right] \leq \lim_{a \nearrow a^*} \left[\int_{\mathcal{D}_a} |\nabla w_a|_2^2 dx - \frac{a^*}{2} \int_{\mathcal{D}_a} |w_a|^4 dx \right] = 0. \quad (3.46)$$

Puisque $\|w_0\|^2 \leq \lim_{a \nearrow a^*} \|w_a\|_2^2 = 1$ et $\||w_a| - w_0\|_2^2 \leq 1$, en utilisant à nouveau l'inégalité de GN (2.12), nous pouvons déduire de (3.45) et (3.46) que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla w_0|^2 dx = \frac{a^*}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |w_0|^4 dx, \quad (3.47)$$

ce qui implique de (2.11) que $\|w_0\|_2^2 \geq 1$. Donc, nous avons $\|w_0\|_2^2 = 1$ et $|w_a| \rightarrow w_0$ fortement dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ lorsque $a \nearrow a^*$. En raison d'être uniformément borné pour $|w_a|$ dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ et en utilisant l'inégalité d'interpolation, nous avons

$$|w_a| \rightarrow w_0 \text{ fortement dans } L^q(\mathbb{R}^2), \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*, \quad \text{où } q \in [2, \infty). \quad (3.48)$$

Il s'ensuit alors de (3.29) et (3.44) que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |w_0|^4 dx = \lim_{a \nearrow a^*} \int_{\mathbb{R}^2} |w_a|^4 dx = \frac{2}{a^*},$$

ce qui implique de (3.47) que $\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla w_0|^2 dx = 1$. De plus, nous pouvons déduire de (3.28) et (3.43) que $\nabla |w_a| \rightarrow \nabla w_0$ fortement dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ lorsque $a \nearrow a^*$. Par conséquent, nous pouvons finalement obtenir

$$|w_a| \rightarrow w_0 \text{ fortement dans } L^2(\mathbb{R}^2), \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*.$$

Notons d'après (3.47) que w_0 est un optimiseur de l'inégalité de GN (2.11) dans $\mathbb{R}^2$. Avec le fait que $\|w_0\|_2^2 = \|\nabla w_0\|_2^2 = 1$, cela indique à une translation près si nécessaire que $w_0 = \frac{1}{\sqrt{a^*}} w(x)$, c'est-à-dire, il existe un certain $y_0 \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{a^*}} w(x + y_0),$$

où w est la solution unique, positive et radialement symétrique de (2.9). Nous pouvons donc conclure que, à une sous-suite près si nécessaire, qu'il existe

$$w_a \rightarrow \frac{w(x + y_0)}{\sqrt{a^*}} \text{ fortement dans } H^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*, \quad (3.49)$$

ce qui indique que

$$w_a \rightarrow \frac{w(x + y_0)}{\sqrt{a^*}} e^{i\sigma} \text{ fortement dans } H^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}), \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*, \quad (3.50)$$

pour un certain $\sigma \in [0, 2\pi)$. En utilisant la condition d'orthogonalité (3.26), nous avons $\sigma = 0$.

Rappelons de (3.31) que $w_a(x)$ satisfait

$$-\Delta w_a = f(w_a) \text{ dans } H^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}), \quad (3.51)$$

où w_a dans $\mathbb{R}^2$ est prolongé de w_a dans $\mathcal{D}$ en posant $w_a \equiv 0$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}_a$ et

$$f(w_a) := -i\epsilon_a^2 \Omega(x^\perp, \nabla w_a) - \left[\frac{\epsilon_a^4 \Omega^2}{4} |x|^2 + \epsilon_a^2 V_\Omega(\epsilon_a x + x_a) - \mu_a \epsilon_a^2 - a |w_a|^2 \right] w_a.$$

Puisque w_a est uniformément borné dans $H^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, nous pouvons vérifier que $f(w_a)$ est uniformément borné dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, lorsque $a \nearrow a^*$. En utilisant [18], nous pouvons alors déduire que $w_a \in H^2(B_R)$ et

$$\|w_a\|_{H^2(B_R)} \leq C \left(\|w_a\|_{H^1(B_{R+1})} + \|f(w_a)\|_{L^2(B_{R+1})} \right), \quad (3.52)$$

où $R > 0$ est une constante suffisamment grande. En appliquant l'estimation de L^p [18] et nous peut déduire que w_a est uniformément borné dans $W^{2,2}(B_R)$. En utilisant l'injection de Sobolev standard, nous obtenons donc que w_a est uniformément borné dans $C^{1,\alpha}(B_R)$. De plus, comme $V(x) \in C^\infty(\mathcal{D})$ et $\partial\mathcal{D} \in C^1$, par la théorie de Schauder, nous pouvons déduire que w_a est uniformément borné dans $C^{2,\alpha}(B_R)$ et que (3.49) est valable dans $C^2(B_R)$, ce qui implique que

$$|w_a| \rightarrow \frac{w(x+y_0)}{\sqrt{a^*}} \text{ fortement dans } C^2_{loc}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*. \quad (3.53)$$

Puisque l'origine est un point de maximum global de $|w_a|$, elle doit aussi être un point de maximal global de $w(x+y_0)$. Cela implique d'après (3.53) que

$$y_0 = 0,$$

étant donné que l'origine est l'unique point de maximum global de w . De plus, comme la convergence ci-dessus est indépendante de choix de sous-suite, (3.51) est vraie pour toute suite. Par conséquent, (3.24) est prouvé.

Finalement, nous prouverons l'unicité du point de maximum local de $|u_a|$. Quelques arguments sont similaires à (3.32)-(3.36) permettent de conclure que $|w_a| \rightarrow 0$ lorsque $|x| \rightarrow \infty$ et $w_a(z_0) \geq \frac{1}{2a^*} > 0$ si a est suffisamment proche de a^* , où z_0 est un point de maximum local de $|w_a|$. Nous pouvons donc conclure de (3.53) que tous les points de maximum local de $|w_a|$ doivent rester dans une boule finie lorsque $a \nearrow a^*$. De plus, puisque $w(x)$ est radialement symétrique par rapport à l'origine et décroît strictement en $|x|$, par [34], nous pouvons déduire que l'origine est l'unique point maximal de $|w_a|$ si a est suffisamment proche de a^* . Alors, cela donne l'unicité du point de maximum local pour $|u_a|$ lorsque a est suffisamment proche de a^* et la preuve de ce lemme est terminée. $\square$

Lemme 3.4. *supposons que toutes les hypothèses du Théorème 2.1 se vérifient. Soit u_a un minimiseur à valeurs complexes de $e(a)$ et w_a est défini par (3.20). Alors, nous avons les conclusions suivantes.*

1. *il existe une constante $R > 0$ telle que*

$$|w_a| \leq Ce^{-\frac{1}{4}|x|} \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus B_R(0). \quad (3.54)$$

2. *$w_a(x)$ satisfait*

$$w_a(x) \rightarrow \frac{w(x)}{\sqrt{a^*}} \quad \text{uniformément dans } L^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}), \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*. \quad (3.55)$$

3. *L'estimation suivante est valable*

$$\Omega \int_{\mathcal{D}} x^\perp (i w_a, \nabla w_a) dx = o(\epsilon_a^2), \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*, \quad (3.56)$$

où $\epsilon_a > 0$ est défini par (3.10).

Preuve.

1. Rappelons de (3.23) que $\mathcal{D}_{a^*} = \mathbb{R}^2$. Comme dans le lemme 3.3, nous prouvons prolonger $w_a(x)$ à $\mathbb{R}^2$ en fixant $w_a = 0$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}_a$. En utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Sobolev, nous pouvons déduire de (3.24) que

$$W_a \rightarrow \frac{w^2}{a^*} \quad \text{fortement dans } H^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*.$$

Alors, par la théorie de De-Giorgie-Nash-Moser [26], pour tout $\epsilon' > 0$ donné, il existe un $R > 0$ suffisamment grand tel que $W_a(x) < \epsilon'$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)$. De plus, d'après (3.34), nous avons

$$-\Delta W_a + W_a \leq 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus B_R(0).$$

Alors, en utilisant le principe de comparaison, nous pouvons déduire que $|w_a|$ se décroît exponentiellement comme (3.54).

2. Des arguments similaires à (3.51) et (3.52) permettent d'avoir w_a uniformément borné dans $H^2(B_R)$, où $R > 0$ est une constante grande. De plus, en raison de l'injection $H^2(B_R) \hookrightarrow L^\infty(B_R)$ qui est compacte, nous pouvons déduire en passant à une sous-suite si nécessaire que (3.24) est valable dans $L^\infty(B_R)$. Cela implique en outre que (3.24) reste valable dans $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^2)$, puisque $R > 0$ est arbitraire. En combinant avec la décroissance exponentielle de $|w_a|$ dans (3.54), il s'ensuit en passant à une sous-suite si nécessaire que (3.24) est valable dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ uniformément. De plus, comme la convergence est indépendante de choix de la sous-suite, (3.55) est vrai pour n'importe quelle suite.

3. Rappelons de $E_a(u)$ que

$$\begin{aligned} e(a) &= \frac{1}{\epsilon_a^2} \int_{\mathcal{D}_a} |\nabla w_a|^2 dx - \frac{a}{2\epsilon_a^2} \int_{\mathcal{D}_a} |w_a|^4 dx + \frac{\epsilon_a^2 \Omega^2}{4} \int_{\mathcal{D}_a} |x|^2 |w_a|^2 dx \\ &\quad + \int_{\mathcal{D}_a} V_\Omega(\epsilon_a x + x_a) |w_a|^2 dx - \Omega \int_{\mathcal{D}_a} x^\perp (i w_a, \nabla w_a) dx \\ &\geq \frac{1}{\epsilon_a^2} \int_{\mathcal{D}_a} |\nabla w_a|^2 dx - \frac{a^*}{2\epsilon_a^2} \int_{\mathcal{D}_a} |w_a|^4 dx - \Omega \int_{\mathcal{D}_a} x^\perp (i w_a, \nabla w_a) dx \end{aligned} \quad (3.57)$$

Soit $w_a(x) = R_a(x) + iI_a(x)$, où $R_a(x)$ et $I_a(x)$ désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de w_a . Il découle de (3.27), (3.28) et (3.55),

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_a} |w_a|^2 dx &= \int_{\mathcal{D}_a} |R_a|^2 + |I_a|^2 dx = 1, \\ \int_{\mathcal{D}_a} |\nabla w_a|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla R_a|^2 dx + |\nabla I_a|^2 dx \rightarrow 1, \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*, \end{aligned}$$

et,

$$R_a(x) \rightarrow \frac{w(x)}{\sqrt{a^*}} \text{ et } I_a(x) \rightarrow 0 \text{ uniformément dans } L^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*. \quad (3.58)$$

De plus, en utilisant l'inégalité de GN (2.11) et (3.58), quelque calculs permettent d'obtenir

$$\frac{a^*}{2} \int_{\mathcal{D}_a} |w_a|^4 dx = \frac{a^*}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (R_a^4 + I_a^4 + 2R_a^2 I_a^2) dx$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla R_a|^2 dx \int_{\mathbb{R}^2} R_a^2 dx + a^* \int_{\mathbb{R}^2} R_a^2 I_a^2 dx + o(1) \int_{\mathbb{R}^2} I_a^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla R_a|^2 dx \left(1 - \int_{\mathbb{R}^2} I_a^2 dx\right) + ((1 + o(1)) \int_{\mathbb{R}^2} w^2 I_a^2 dx + o(1) \int_{\mathbb{R}^2} I_a^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla R_a|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^2} I_a^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} w^2 I_a^2 dx + o(1) \int_{\mathbb{R}^2} I_a^2 dx, \text{ lorsque } a \nearrow a^*,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\Omega \int_{\mathbb{R}^2} x^\perp \cdot (i w_a, \nabla w_a) dx &= \Omega \int_{\mathbb{R}^2} x^\perp \cdot (R_a \nabla I_a - I_a \nabla R_a) dx \\
&= 2\Omega \int_{\mathbb{R}^2} x^\perp \cdot R_a \nabla I_a dx \\
&= 2\Omega \int_{\mathbb{R}^2} x^\perp \cdot R_a \nabla I_a dx \\
&= \frac{2\Omega}{\sqrt{a^*}} \int_{\mathbb{R}^2} x^\perp \cdot w \nabla I_a dx + \frac{2\Omega}{\sqrt{a^*}} \int_{\mathbb{R}^2} x^\perp \cdot (\sqrt{a^*} R_a - w) \nabla I_a dx \\
&\leq \frac{2\Omega}{\sqrt{a^*}} \int_{\mathbb{R}^2} x^\perp \cdot w \nabla I_a dx + o(1) \|\nabla I_a\|_2 \\
&= o(1) \|\nabla I_a\|_2, \text{ lorsque } a \nearrow a^*,
\end{aligned}$$

où la dernière " = " tient au fait que

$$\int_{\mathbb{R}^2} x^\perp \cdot w \nabla I_a dx = - \int_{\mathbb{R}^2} x^\perp \cdot \nabla w I_a dx,$$

et

$$x^\perp \cdot \nabla w(x) = x^\perp \cdot \nabla_x w(|x|) = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^2.$$

En combinant toutes les estimations ci-dessus, nous pouvons avoir de (3.57)

$$\begin{aligned}
\epsilon_a^2 e(a) &\geq \|I_a\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^2 - \int_{\mathbb{R}^2} w^2 I_a^2 dx + o(1) \|I_a\|_2^2 - o(1) \epsilon_a^2 \|\nabla I_a\|_2 \\
&= \frac{1}{2} \|I_a\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^2 - \int_{\mathbb{R}^2} w^2 I_a^2 dx - o(1) \epsilon_a^2 \|\nabla I_a\|_2, \text{ lorsque } a \nearrow a^*.
\end{aligned}$$

Rappelons de (3.26) que I_a est orthogonal à w et nous avons alors $\int_{\mathbb{R}^2} w^2 I_a^2 dx = 0$.

Il s'ensuit que

$$\epsilon_a^2 e(a) \geq \frac{1}{2} \|I_a\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^2 - o(1) \epsilon_a^2 \|\nabla I_a\|_2, \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*. \quad (3.59)$$

D'un autre part, en utilisant l'inégalité de GN (2.11) et l'inégalité diamagnétique (2.3), nous pouvons déduire de $E_a(u)$, (3.7) et (3.15) que

$$\begin{aligned} \frac{2\lambda^2 + o(1)}{a^*} (a^* - a)^{\frac{1}{2}} &\geq e(a) \geq \frac{a^* - a}{a^*} \int_{\mathcal{D}} \left| \left(\nabla - i \frac{\Omega}{2} x^\perp \right) u_a \right|^2 dx \\ &= \frac{a^* - a}{a^*} (1 + o(1)) \epsilon_a^{-2}, \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*. \end{aligned}$$

Cela indique que

$$(a^* - a)^{\frac{1}{2}} \leq C \epsilon_a^2 \text{ et } e(a) \leq C \epsilon_a^2, \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*$$

A partir de (3.59), nous pouvons alors obtenir

$$\|I_a\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^2 \leq C \epsilon_a^2 \text{ et } \|\nabla I_a\|_2 \leq C \epsilon_a^2, \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*.$$

De plus, de (3.58), nous avons,

$$\begin{aligned} \left| \Omega \int_{\mathbb{D}_a} x^\perp (i w_a, \nabla w_a) dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^2} x^\perp \cdot \left(\sqrt{a^*} R_a - w \right) \nabla I_a dx \right| \\ &\leq o(1) \|\nabla I_a\|_2 \\ &\leq o(1) \epsilon_a^2. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Par conséquent, (3.56) découle de (3.60) et la preuve de ce lemme est complète. $\square$

Preuve du théorème 3.1 :

Avec les lemmes ci-dessus, nous allons finalement compléter la preuve du Théorème 3.1 en établissant l'estimation de l'énergie raffinée. Similaire à (3.57), à partir de (3.27) et (3.28), nous avons

$$\begin{aligned} e(a) &= \frac{1 + o(1)}{\epsilon_a^2} \frac{a^* - a}{a^*} + \int_{\mathcal{D}_a} V_\Omega(\epsilon_a x + x_a) |w_a|^2 dx + \frac{\epsilon_a^2 \Omega^2}{4} \int_{\mathcal{D}_a} |x|^2 |w_a|^2 dx \\ &\quad - \Omega \int_{\mathcal{D}_a} x^\perp (i w_a, \nabla w_a) dx, \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*. \end{aligned} \tag{3.61}$$

En utilisant (3.55), nous pouvons déduire que

$$\frac{\epsilon_a^2 \Omega^2}{4} \int_{\mathcal{D}_a} |x|^2 |w_a|^2 dx = \frac{(1 + o(1)) \Omega^2 \epsilon_a^2}{4 a^*} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 w^2 dx, \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*, \tag{3.62}$$

et

$$\int_{\mathcal{D}_a} V_{\Omega}(\epsilon_a x + x_a) |w_a|^2 dx = \epsilon_a^2 \int_{\mathcal{D}_a} V_{\Omega} \left(x + \frac{x_a}{\epsilon_a} \right) |w_a|^2 dx. \quad (3.63)$$

Ici, nous affirmons que

$$\frac{|x_a|}{\epsilon_a} \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*. \quad (3.64)$$

Nous allons d'abord prouver que $\frac{|x_a|}{\epsilon_a}$ est uniformément borné lorsque $a \nearrow a^*$. Supposons que $\frac{|x_a|}{\epsilon_a} \rightarrow +\infty$ lorsque $a \nearrow a^*$ et nous pouvons déduire de (2.5) et (3.63) qu'il existe une constante grande $M > 0$, telle que

$$\int_{\mathcal{D}_a} V_{\Omega}(\epsilon_a x + x_a) |w_a|^2 dx \geq M \epsilon_a^2. \quad (3.65)$$

Il s'ensuit alors de (3.56), (3.61)-(3.62) et (3.65) que

$$e(a) \geq \frac{a^* - a}{a^* \epsilon_a^2} + M \epsilon_a^2 + o(\epsilon_a^2) \geq M' (a^* - a)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*,$$

où $M > 0$ est une constante suffisamment grande. Ceci contredit l'estimation de l'énergie supérieure dans (3.7), et avoir uniformément borné de $\frac{|x_a|}{\epsilon_a}$ lorsque $a \nearrow a^*$ est donc prouvé.

Ensuite, nous compléterons la preuve de (3.64). Supposons qu'en passant à une sous-suite si nécessaire, il existe un certain $y_0 \neq (0, 0)$ tel que $\frac{x_a}{\epsilon_a} \rightarrow y_0$ lorsque $a \nearrow a^*$. Définissant

$$\kappa := \left[\int_{\mathbb{R}^2} V_{\Omega}(x + y_0) w^2 dx + \frac{\Omega^2}{4} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 w^2 dx \right]^{\frac{1}{4}}.$$

Et nous pouvons vérifier à partir de (2.5) que $\kappa > \lambda$, où λ est défini par (3.2). De (3.55), (3.62) et (3.63), nous pouvons donc déduire que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{D}_a} V_{\Omega}(\epsilon_a x + x_a) |w_a|^2 dx + \frac{\epsilon_a^2 \Omega^2}{4} \int_{\mathcal{D}_a} |x|^2 |w_a|^2 dx \\ &= (1 + o(1)) \frac{\epsilon_a^2}{a^*} \int_{\mathbb{R}^2} V_{\Omega}(x + y_0) |w|^2 dx + \frac{(1 + o(1)) \Omega^2 \epsilon_a^2}{4 a^*} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 w^2 dx \\ &= (1 + o(1)) \frac{\epsilon_a^2}{a^*} \kappa^4, \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*. \end{aligned}$$

En substituant ces estimations dans (3.61), il découle de (3.56) que

$$e(a) \geq \frac{a^* - a}{a^* \epsilon_a^2} + \frac{\epsilon_a^2}{a^*} \kappa^4 + o(\epsilon_a^2) \geq \frac{2\kappa^2 + o(1)}{a^*} (a^* - a)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*.$$

Ceci contredit l'estimation supérieure de l'énergie dans (3.7) car $\kappa > \lambda$ et l'affirmation (3.64) est donc prouvée.

Avec l'affirmation ci-dessus (3.64), nous pouvons donc déduire de (3.55) et (3.63) que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_a} V_\Omega(\epsilon_a x + x_a) |w_a|^2 dx &= (1 + o(1)) \frac{\epsilon_a^2}{a^*} \int_{\mathbb{R}^2} V_\Omega(x) w^2 dx \\ &= (1 + o(1)) \frac{\epsilon_a^2}{a^*} \lambda^4 - \frac{\epsilon_a^2 \Omega^2}{4} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 w^2 dx, \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*, \end{aligned} \quad (3.66)$$

où λ est défini par (3.2). D'après (2.5), (3.61)-(3.64) et (3.66), nous avons

$$e(a) \geq \frac{a^* - a}{a^* \epsilon_a^2} + \frac{\epsilon_a^2}{a^*} \lambda^4 + o(\epsilon_a^2) \geq \frac{2\lambda^2 + o(1)}{a^*} (a^* - a)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*. \quad (3.67)$$

Avec l'estimation supérieure de l'énergie dans (3.7), nous pouvons directement obtenir

$$e(a) = \frac{2\lambda^2 + o(1)}{a^*} (a^* - a)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{lorsque } a \nearrow a^* \quad (3.68)$$

ce qui implique que tous les "=" de (3.67) sont valides, et ϵ_a satisfait donc

$$\epsilon_a = \frac{1 + o(1)}{\lambda} (a^* - a)^{\frac{1}{4}}, \quad \text{lorsque } a \nearrow a^*. \quad (3.69)$$

De plus, comme la convergence ci-dessus est indépendante du choix de sous-suite, nous pouvons vérifier que (3.64) et (3.69) sont vrais pour toute suite. Finalement, soit

$$\tilde{u}_a := \sqrt{a^*} \frac{(a^* - a)^{\frac{1}{4}}}{\lambda} u_a \left(\frac{(a^* - a)^{\frac{1}{4}}}{\lambda} x + x_a \right) e^{-i \left(\frac{\Omega}{2\lambda} (a^* - a)^{\frac{1}{4}} x \cdot x_a^\perp - \theta_a \right)},$$

où $\theta_a \in [0, 2\pi)$ est une constante et λ est défini par (3.2). Nous pouvons alors obtenir directement que (3.3) découle de (3.55) et (3.69), (3.1) découle de (3.64) et (3.4) découle de (3.68). Et nous avons terminé la preuve du Théorème 3.1.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude de l'existence et du comportement asymptotique des minimiseurs pour les condensats de Bose-Einstein (CBE) en rotation, confinés dans un domaine borné de $\mathbb{R}^2$. Nous avons formulé et analysé un problème variationnel associé à la minimisation de l'énergie de Gross-Pitaevskii sous contrainte de masse.

Nous avons démontré qu'il existe une constante critique a^ telle que, pour tout $0 < a < a^*$, la fonctionnelle d'énergie admet au moins un minimiseur, indépendamment de la vitesse de rotation $\Omega \geq 0$. Ce résultat contraste avec la situation sur tout l'espace $\mathbb{R}^2$, où l'existence dépend fortement de Ω . Ce phénomène est attribué au fait que la géométrie bornée du domaine offre un meilleur contrôle sur les termes de rotation.*

Par ailleurs, nous avons analysé le comportement des minimiseurs lorsque a tend vers a^ . En particulier, nous avons montré que la masse des minimiseurs se concentre autour du point minimal du potentiel effectif V_Ω , et que les fonctions re-scalées convergent uniformément vers la solution radiale unique d'une équation de champ scalaire non linéaire sur $\mathbb{R}^2$.*

Ce travail contribue à une meilleure compréhension des phénomènes de concentration de masse dans les systèmes de condensats de Bose-Einstein en rotation, et illustre la richesse mathématique des problèmes variationnels sous contraintes dans des domaines bornés.

Des perspectives futures pourraient inclure l'étude du comportement asymptotique dans des domaines à géométrie plus complexe, ou sous des potentiels plus généraux, ainsi que l'analyse de la formation de vortex multiples lorsque la vitesse de rotation devient très grande.

Références

参考文献

- [1] Abo-Shaeer, J. R., Raman, C., Vogels, J. M. and Ketterle, W., *Observation of vortex lattices in Bose-Einstein condensate. Science* 292 (2001), 476.
- [2] Aftalion, A., *Vortices in Bose-Einstein condensates, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*, 67. Birkhäuser Boston Inc, Boston 2006.
- [3] Anderson, M. H., Ensher, J. R., Matthews, M. R., Wieman, C. E. and Cornell, E. A., *Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. Science* 269 (1995), 198–201.
- [4] Arbunich, J., Nenciu, I. and Sparber, C., *Stability and instability properties of rotating Bose-Einstein condensates. Lett. Math. Phys.* 109 (2019), 1415–1432.
- [5] Bao, W.Z. and Cai, Y.Y., *Mathematical theory and numerical methods for Bose-Einstein condensation. Kinet. Relat. Models* 6 (2013), 1–135.
- [6] Cao, D.M, Peng, S.J. and Yan, S.S., *Singularly perturbed methods for nonlinear elliptic problems. Cambridge University Press, New York*, 2021.
- [7] Carr, L. D. and Clark, C. W. *Vortices in attractive Bose-Einstein condensates in two dimensions. Phys. Rev. Lett.* 97 (2006), 010403.
- [8] Cazenave T., *Semilinear Schrödinger equations. Courant Lecture Notes in Mathematics*, vol. 10, Courant Institute of Mathematical Science/AMS, New York, 2003.
- [9] Correggi, M. and Dimonte, D., *On the third critical speed for rotating Bose-Einstein condensates. J. Math. Phys.* 57 (2016), 071901.

-
- [10] Correggi, M., Pinsker, F., Rougerie, N. and Yngvason, J., *Critical rotational speeds for superfluids in homogeneous traps*. *J. Math. Phys.* 53 (2012), 095203.
- [11] Correggi, M. and Rougerie, N., *Boundary behavior of the Ginzburg-Landau order parameter in the surface superconductivity regime*. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 219 (2016), 553–606.
- [12] Correggi, M., Rougerie, N. and Yngvason, J., *The transition to a giant vortex phase in a fast rotating Bose-Einstein condensate*. *Comm. Math. Phys.* 303 (2011), 451–508.
- [13] Dalfovo, F., Giorgini, S., Pitaevskii, L. P. and Stringari, S., *Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases*. *Reviews of Modern Phys.* 71 (1999), 463–512.
- [14] Davis, K. B., Mewes, M.-O., Andrews, M. R., van Druten, N. J., Durfee, D. S., Kurn, D. M., Ketterle, W., *Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms*. *Phys. Rev. Lett.* 75 (1995), 3969–3973.
- [15] Esteban, M.J. and Lions, P.L., *Stationary solutions of nonlinear Schrödinger equations with an external magnetic field*. *Partial differential equations and the calculus of variations*, vol. 1, 401–449, *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.* 1, Birkhäuser, Boston, MA, 1989.
- [16] Fetter, A. L., *Rotating trapped Bose-Einstein condensates*. *Reviews of Modern Phys.* 81 (2009), 647–691.
- [17] Gidas, B., Ni, W.M. and Nirenberg, L., *Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in R* . *Mathematical analysis and applications Part A*. *Adv. Math. Suppl. Stud.* 7, Academic Press, New York, (1981), 369–402.
- [18] Gilbarg, D. and Trudinger, N.S., *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, 1983.

-
- [19] Guo, Y.J., *The nonexistence of vortices for rotating Bose-Einstein condensates in non-radially symmetric traps. J. Math. Pure. Appl.* 170 (2023), 1–32.
 - [20] Guo, Y.J., Lin, C.S. and Wei, J.C., *Local uniqueness and refined spike profiles of ground states for two-dimensional attractive Bose-Einstein condensates. SIAM J. Math. Anal.* 49 (2017), 3671–3715.
 - [21] Guo, Y.J., Luo, Y. and Peng, S.J., *Local uniqueness of ground states for rotating Bose-Einstein condensates with attractive interactions. Calc.Var. Partial Differ. Equ.* 60 (2021), 237.
 - [22] Guo, Y.J., Luo, Y. and Yang, W., *The nonexistence of vortices for rotating Bose-Einstein condensates with attractive interactions. Arch. Rational Mech. Anal.* 238 (2020), 1231–1281.
 - [23] Guo, Y.J. and Seiringer, R., *On the mass concentration for Bose-Einstein condensates with attractive interactions. Lett. Math. Phys.* 104 (2014), 141–156.
 - [24] Guo, Y.J., Wang, Z.Q., Zeng, X.Y. and Zhou, H.S., *Properties for ground states of attractive Gross-Pitaevskii equations with multi-well potentials. Nonlinearity* 31 (2018), 957–979.
 - [25] Guo, Y.J., Zeng, X.Y. and Zhou, H.S., *Energy estimates and symmetry breaking in attractive Bose-Einstein condensates with ring-shaped potentials. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 33 (2016), 809–828.
 - [26] Han, Q. and Lin, F.H., *Elliptic partial differential equations. Courant Lecture Notes in Mathematics. vol. 1. Courant Institute of Mathematical Science/AMS, New York, 2011.*
 - [27] Huepe, C., Metens, S., Dewel, G., Borckmans, P. and Brachet, M. E., *Decay rates in attractive Bose-attractive condensates. Phys. Rev.Lett.* 82 (1999), 1616–1619.
 - [28] Kwong, M.K., *Uniqueness of positive solutions of $-u + u^p = 0$ in $\mathbb{R}^n$. Arch. Rational Mech. Anal.* 105 (1989), 243–266.

-
- [29] Lewin, M., Nam, P.T. and Rougerie. N., *Blow-up profile of rotating 2D focusing Bose gases*, Springer Verlag, *Macroscopic Limits of Quantum Systems*, Springer Verlag, 2018.
- [30] Lieb E.H. and Loss M., *Analysis, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 14*(second ed.), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [31] Lieb, E.H. and Seiringer, R., *Derivation of the Gross-Pitaevskii equation for rotating Bose gases*. *Comm. Math. Phys.* 264 (2006), 505–537.
- [32] Lundh, E., Collin, A. and Suominen, K.-A., *Rotational states of Bose gases with attractive interactions in anharmonic traps*. *Phys. Rev. Lett.* 92 (2004), 070401.
- [33] Luo, Y. and Zhu, X.C., *Mass concentration behavior of Bose-Einstein condensates with attractive interactions in bounded domains*. *Anal. Appl.* 99 (2020), 2414–2427.
- [34] Ni, W.M. and Takagi, I., *On the shape of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem*. *Comm. Pure Appl. Math.* 44 (1991), 819–851.
- [35] Weinstein, M.I., *Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolations estimates*. *Comm. Math. Phys.* 87 (1983), 567–576.
- [36] Zhang, J., *Stability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with unbounded potentials*. *Z. Angew. Math. Phys.* 51 (2000), 498–503.
- [37] Y.Gao, S.Li, P.Zhong, *Existence and Asymptotic Behavior of Minimizers for Rotating Bose-Einstein Condensations in Bounded Domains*. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 543 (1) 128833 (2025).