

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
et des Sciences de la Matière  
Département de Mathématiques



## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
**Master Académique en Mathématiques**  
Option : **Equations aux Dérivées Partielles**  
**Et analyse numérique**

Par : **MAMENIA Rihab**

## **Intitulé**

**Les équations de mouvement de l'air**

Dirigé par : **Merad Meriem**

Devant le jury

<b>PRESIDENT</b>	<b>Dr REBAI Ghania</b>	<b>MCA</b>	<b>Univ-Guelma</b>
<b>RAPPORTEUR</b>	<b>Dr MERAD Meriem</b>	<b>MCA</b>	<b>Univ-Guelma</b>
<b>EXAMINATEUR</b>	<b>Dr ZENKOUFI Lilia</b>	<b>MCA</b>	<b>Univ-Guelma</b>
<b>EXAMINATEUR</b>	<b>Dr AISSAOUI Fatima</b>	<b>MCA</b>	<b>Univ-Guelma</b>

**Année Universitaire 2024/2025**

# Dédicace

**À mon père,** Toi qui as été un roc silencieux dans la tempête de ma vie, Celui dont la présence a toujours été un pilier solide sur lequel je pouvais m'appuyer, Tes conseils pleins de sagesse ont guidé mes pas quand je me perdais, Ta force tranquille et ton amour profond, même parfois exprimés en silence, ont été ma source de confiance et d'espoir.

Ce mémoire est dédié à ta grandeur d'âme et à ton engagement silencieux, Merci d'avoir toujours cru en moi, même dans les moments où moi-même je doutais.

**À ma douce maman,** Toi qui as veillé sur moi dans le silence des nuits, Toi qui as essuyé mes larmes avant qu'elles ne tombent, Toi dont le regard a toujours su me redonner courage, Ce mémoire est le reflet de ton amour immense, Un amour qui m'a porté, soutenu et façonné. Merci pour ta tendresse, ta force, et ton cœur qui bat pour les miens avant les tiens.

**À mes sœurs (,Roufayda,Ritedje,Razane,Oumaima),** Vous êtes mes alliées, mes rires, mes repères. Dans les moments de doute, vos mots ont été des phares. Dans les jours durs, vos sourires étaient mon refuge. Merci pour votre affection sans condition, pour votre écoute et votre complicité.

**À mes amies(Kawther,Hadil,Ahlem),** Compagnons de route, confidents des jours heureux et des nuits d'inquiétude, Votre présence m'a allégé le cœur et éclairé l'esprit. Merci pour votre soutien, vos encouragements, et votre foi en moi.

**À tante (Soumia) et À tante (Fraïha),** Vous avez m'entourer d'une tendresse sincère, Toujours présentes avec vos mots doux et vos gestes rassurants, Votre amour a illuminé mon chemin avec douceur et simplicité.

**À mon professeur (Moussaab Bouafia),** Merci pour les encouragement, merci pour la confiance, merci pour tous les efforts.

**À vous ma famille** Ce mémoire est plus qu'un aboutissement personnel, C'est une offrande d'amour, de reconnaissance et de gratitude. Sans vous, ce chemin n'aurait pas eu la même lumière

# Remerciement

Avant toute chose, je rends grâce à Dieu Tout-Puissant, source de savoir, de force et de patience, pour m'avoir guidée et soutenue tout au long de ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à ma directrice de mémoire, **Docteur Merad Meriem**, pour sa précieuse orientation, sa disponibilité constante, et ses conseils éclairés qui ont grandement contribué à la réalisation de ce travail. Son accompagnement bienveillant a été d'un grand soutien tout au long de ce parcours.

J'adresse également mes sincères remerciements aux membres du jury, **Rebai Ghania, Zenkoufi lilia, Aissaoui Fatima** pour avoir accepté d'évaluer ce travail, et pour l'attention qu'ils y ont portée. Leurs remarques et suggestions seront, sans aucun doute, très enrichissantes.

Je ne saurais terminer sans adresser ma profonde reconnaissance à ma famille et à mes amies, pour leur soutien moral, leurs encouragements constants et leur présence bienveillante, qui m'ont beaucoup aidée à surmonter les moments de doute et de fatigue.

## Résumé

Ce travail porte sur la modélisation du mouvement de l'air en tenant compte de la condensation de la vapeur d'eau, à l'aide d'équations issues de la mécanique des fluides. Ces équations, non linéaires, ne possèdent généralement pas de solution analytique.

L'objectif principal est de construire un modèle décrivant le mouvement de l'air avec les transitions de phase de l'eau, et d'étudier l'existence et l'unicité des solutions pour la densité et la température en régime hydrostatique. Le mémoire comprend également une partie numérique consacrée au calcul de ces grandeurs dans un état hydrostatique intermédiaire, en utilisant la méthode des différences finies.

Ce travail met en lumière l'importance de la modélisation mathématique et numérique pour l'analyse des phénomènes atmosphériques et la compréhension du comportement de l'air dans diverses conditions physiques.

**Mots-clés** : Mécanique des fluides, équations aux dérivées partielles, état hydrostatique, , méthode des différences finies, modélisation atmosphérique.

# *Abstract*

This work focuses on modeling the movement of air while accounting for the condensation of water vapor, using equations derived from fluid mechanics. These equations are nonlinear and generally do not admit analytical solutions.

The main objective is to construct a model that describes the motion of air with phase transitions of water, and to study the existence and uniqueness of solutions for density and temperature under hydrostatic conditions. The thesis also includes a numerical component dedicated to computing these quantities in an intermediate hydrostatic state using the finite difference method.

This work highlights the importance of mathematical and numerical modeling in analyzing atmospheric phenomena and understanding the behavior of air under various physical conditions

**Keywords:** Fluid mechanics, partial differential equations, hydrostatic equilibrium, finite difference method, atmospheric modeling.

## ملخص

يركز هذا العمل على نمذجة حركة الهواء مع أخذ تكاثف بخار الماء بعين الاعتبار، باستخدام معادلات مشتقة من ميكانيكا الموائع .

هذه المعادلات غير خطية، ولا تمتلك عمومًا حلولًا تحليلية الهدف الرئيسي هو بناء نموذج يصف حركة الهواء مع تحولات الطور للماء، ودراسة وجود ووحداية الحلول للكثافة حالة التوازن الهيدروستاتيكي. كما يتضمن هذا البحث جزءًا عدديًا مخصصًا لحساب هذه الكميات في درجة الحرارة في حالة هيدروستاتيكية متوسطة، باستخدام طريقة الفروق المنتهية

يُبرز هذا العمل أهمية النمذجة الرياضية والعديدية في تحليل الظواهر الجوية وفهم سلوك الهواء تحت ظروف فيزيائية مختلفة

**الكلمات المفتاحية:** معادلات الحركة ، ديناميك الهواء، النمذجة الرياضية، النمذجة العددية، طرق التقريب.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Préliminaires et Définitions</b>	<b>11</b>
1.1 Les fluides : . . . . .	11
1.2 Caractéristique des fluides . . . . .	11
1.2.1 Masse volumique . . . . .	11
1.2.2 Densité de fluide . . . . .	12
1.2.3 Viscosité de fluide . . . . .	12
1.3 Ecoulement de fluide . . . . .	12
1.3.1 Ecoulement incompressible . . . . .	12
1.3.2 Ecoulement compressible . . . . .	12
1.3.3 Ecoulement stable . . . . .	13
1.3.4 Ecoulement instable . . . . .	13
1.3.5 Ecoulement stationnaire . . . . .	13
1.3.6 Ecoulement non stationnaire . . . . .	13
1.4 Formulation mathématique d'un écoulement de fluide . . . . .	13
1.4.1 Equation de conservation de la masse(continuité) . . . . .	14
1.4.2 Equations de quantité de mouvement . . . . .	15
1.4.3 Equation de conservation de l'énergie : . . . . .	17
<b>2 Equations de mouvement de l'air</b>	<b>20</b>
2.1 Equation de continuité de l'air . . . . .	21
2.1.1 Equation de continuité l'air sec . . . . .	21
2.1.2 Equation de continuité de la vapeur d'eau . . . . .	21
2.2 Equation de quantité de mouvement . . . . .	21
2.3 Equation de conservation de l'énergie . . . . .	22
2.4 Etat hydrostatique de l'air sec . . . . .	23

---

<b>3</b>	<b>Résolubilité du système d'équations de l'état hydrostatique avec la condensation</b>	<b>26</b>
3.1	Etat hydrostatique avec la condensation de la vapeur d'eau . .	26
3.2	Etat hydrostatique intermédiaire . . . . .	28
3.3	Etude de l'existence et l'unicité de la solution . . . . .	29
3.4	Calcul numérique de la densité et de la température dans l'état hydrostatique intermédiaire . . . . .	34

# Introduction

Le monde s'intéresse aux problèmes du climat et désire en connaître le mécanisme et les conséquences. Pour répondre à des nombreuses questions qui se posent, la modélisation mathématique des phénomènes atmosphériques et météorologiques est aujourd'hui plus nécessaire que jamais.

Comme on le sait, ces phénomènes sont assez complexes, de sorte qu'il est difficile de les décrire d'une manière complète et rigoureuse. Un des éléments essentiels de la complexité des phénomènes atmosphériques météorologiques est la présence de la vapeur d'eau dans l'air. En effet, à la différence des autres molécules comme  $N_2$ ,  $O_2$ ..., qui restent toujours en état gazeux dans les conditions ordinaires de l'atmosphère,  $H_2O$  peut subir la transition de phase dans l'atmosphère.

En raison de la complexité des phénomènes atmosphériques, nous souhaitons apporter notre modeste contribution à travers l'étude des équations du mouvement de l'air, incluant la condensation éventuelle de la vapeur d'eau. Ces modèles sont fondés sur la théorie de la mécanique des fluides et reposent très souvent sur des systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) non linéaires, pour lesquels il n'existe généralement pas de solutions analytiques.

L'objectif principal de notre travail est de construire et de bien comprendre un modèle décrivant le mouvement de l'air avec les transitions de phase de l'eau, et d'étudier la distribution de la densité, de la température et de la pression dans l'état hydrostatique de l'air avec condensation. Il s'agit d'un système d'équations non linéaires. Nous montrons l'existence et l'unicité de la solution, puis nous résolvons le problème numériquement à l'aide de la méthode des différences finies.

Le premier chapitre est consacré aux définitions et notions préliminaires relatives à la théorie des écoulements potentiels, ainsi qu'aux équations générales du mouvement des fluides. Celles-ci reposent sur les lois fondamentales de la mécanique des milieux continus, appliquées à un fluide en mouvement. Ces lois traduisent les principes physiques de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie qui doivent être respectés dans tout écoulement fluide.

Le deuxième chapitre présente brièvement le système d'équations formulé dans [2]-[3]-[4], qui modélise le mouvement de l'atmosphère en tenant compte des transitions de phase de l'eau entre l'état gazeux et l'état liquide, et inversement. Ce modèle a été développé dans une série de travaux (voir [6]-[8]-[10]). On y rappelle également l'état hydrostatique de l'air sec et l'on donne les expressions explicites de la densité, de la température et de la pression (voir [1]-[6]).

Le dernier chapitre est consacré à l'étude du système d'équations décrivant la distribution de la densité et de la température dans l'état hydrostatique de l'air avec condensation de la vapeur d'eau. On y démontre l'existence et l'unicité de la solution, et l'on présente une solution numérique obtenue par la méthode des différences finies.

Le contenu du chapitre trois est correspond au travail [11].

# Chapitre 1

## Préliminaires et Définitions

### 1.1 Les fluides :

Un fluide est un milieu matériel continue, dont les molécules ont peu d'adhésion et peuvent glisser librement les unes sur les autres (liquides) ou se déplacer indépendamment les unes des autres (gaz). Les fluides n'ont pas de forme propre (à la différence des solides) donc ils se déforment facilement sous l'effet de force et peut s'écouler.

Généralement les fluides sont répartis en deux types :

- Liquide : c'est un fluide dense et incompressible. Il occupe un volume bien définis et présente des surfaces libres.
- Gaz : c'est un fluide peu dense et compressible et même extensibles .

### 1.2 Caractéristique des fluides

#### 1.2.1 Masse volumique

La masse volumique est caractéristique qui représente la quantité de matière ( masse) rencontrée dans un espace (une unité volume) donné. Elle est notée  $\rho$  et est déterminée par la relation :

$$\rho = \frac{m}{v}$$

$\rho$  : la masse volumique (  $g/ml$  ou  $g/cm^3$  )

$m$  : la masse( $g$ )

$v$  : le volume ( $ml$  ou  $cm^3$ ).

### 1.2.2 Densité de fluide

La densité d'un corps est le rapport de sa masse volumique et la masse volumique d'un autre corps pris comme référence.

-Pour les liquides : le corps de référence est l'eau pure.

-Pour les gaz : le corps de référence est l'air, à la même température et sous la même pression.

La densité notée  $d$  s'exprime par :

$$d = \frac{\rho_{\text{corps}}}{\rho_{\text{réf}}}$$

### 1.2.3 Viscosité de fluide

La viscosité de fluide est une propriété physique qui caractérise les frottements internes du fluide, autrement dit sa capacité à s'écouler. On trouve deux types : La viscosité dynamique  $\mu$  s'exprime en  $kg/(m.s)$ , et la viscosité cinématique s'obtient en divisant la viscosité dynamique par la masse volumique du fluide.

## 1.3 Ecoulement de fluide

Écoulement de fluide en fonction de la masse volumique peut être :

### 1.3.1 Ecoulement incompressible

Un écoulement est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure sa masse volumique est constante. c'est à dire  $\rho = Cte$ .

### 1.3.2 Ecoulement compressible

On dit que l'écoulement est compressible, si la densité des particules de fluide ou la densité du fluide en écoulement change en fonction du temps.

Ecoulement de fluide en fonction de la vitesse peut être :

### 1.3.3 Ecoulement stable

Un écoulement stable est un écoulement dans lequel les propriétés telles que la vitesse, la pression et la densité ne changent pas avec le temps à tout point donné dans l'espace.

### 1.3.4 Ecoulement instable

On dit que l'écoulement instable, si la vitesse ou la pression ou la densité change avec le temps à tout point donné dans l'espace.

Ecoulement de fluide en fonction de temps peut être :

### 1.3.5 Ecoulement stationnaire

Les écoulements stationnaires (on dit aussi permanent), sont les écoulements dont les composantes de vitesse sont indépendantes de la variable temps. Dans ce type d'écoulement on a :

$$\partial_t \rho = \partial_t u = \partial_t T = \partial_t p = 0.$$

### 1.3.6 Ecoulement non stationnaire

Un écoulement est non stationnaire si la vitesse d'une particule de fluide change en fonction de sa position et du temps.

## 1.4 Formulation mathématique d'un écoulement de fluide

Dans cette partie, nous allons formuler les équations du mouvement des fluides à partir des considérations générales de la mécanique, comme on peut le voir en détail dans [LL6]. Ces équations ainsi obtenues expriment les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie et sont valables non seulement pour les liquides mais aussi pour les gaz. Les

grandeurs physiques que nous considérons sont : la densité, la vitesse, la pression, la température, etc...

Il s'agit d'un système d'équations aux dérivées partielles non-linéaires (qui décrivent le mouvement des fluides). Elles modélisent par exemple le mouvement de l'air dans l'atmosphère, les courants océaniques, l'écoulement de l'eau dans un tuyau, l'écoulement du sang, et de nombreux autres phénomènes d'écoulement de fluide.

### 1.4.1 Equation de conservation de la masse(continuité)

Soit  $\varrho(t, x)$  la densité du fluide au point  $x$  et à l'instant  $t$ . Alors la masse totale  $M(t)$  du fluide contenu dans  $V_0$  à l'instant  $t$  est donnée par

$$M(t) = \int_{V_0} \varrho(t, x) dx \quad (1.4.1)$$

Or, la loi de conservation de la masse implique que la masse de chaque partie matérielle du fluide, même si elle se déplace, reste constante. Par conséquent, l'augmentation ou la diminution de la masse  $M(t)$  du fluide contenu dans la région fixe  $V_0$  doit correspondre exactement à la différence de la masse qui entre dans  $V_0$  et de celle qui sort de  $V_0$ , c'est-à-dire on a

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_0} \varrho(t, x) dx = - \int_S \varrho(v(t, x) \cdot n(x)) dS \quad (1.4.2)$$

où  $n(x)$  et  $v(t, x)$  désigne le vecteur unitaire de la normale extérieure à  $V_0$  et le vecteur vitesse du fluide, tandis que  $dS$  est l'élément de surface de  $V_0$ . La quantité  $v(t, x) \cdot n(x) \varrho(t, x) dS dt$  c'est la quantité de masse qui sort de  $V_0$  passant par l'élément de surface  $dS$  et pendant le temps infinitésimal  $dt$ .

Compte tenu du théorème de divergence pour transformer l'intégrale de surface en intégrale de volume, on a

$$\int_S \varrho(t, x)(v(t, x) \cdot n(x)) dS = \int_{V_0} \nabla \cdot (\varrho(t, x)v(t, x)) dx$$

Il s'ensuit que

$$\int_{V_0} \partial_t \varrho(t, x) dx = - \int_{V_0} \nabla \cdot (\varrho(t, x)v(t, x)) dx.$$

Alors

$$\int_{V_0} \partial_t \varrho(t, x) dx + \int_{V_0} \nabla \cdot (\varrho(t, x) v(t, x)) dx = 0$$

Comme  $V_0$  est arbitraire, on déduit que

$$\partial_t \varrho(t, x) + \nabla \cdot (\varrho(t, x) v(t, x)) = 0 \quad (1.4.3)$$

C'est l'équation de conservation de la masse.

### 1.4.2 Equations de quantité de mouvement

Pour formuler l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans un fluide, nous adoptons une démarche similaire à celle utilisée pour l'équation de continuité.

On considère donc une région arbitraire  $V_0$  fixée, régulière et contenue dans le domaine occupé par le fluide. Alors la somme de la quantité de mouvement dans  $V_0$  est donnée par

$$\int_{V_0} \varrho(t, x) v(t, x) dx$$

sa variation par rapport au temps  $t$  est :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} \varrho(t, x) v(t, x) dx = \int_{V_0} \partial_t (\varrho(t, x) v(t, x)) dx$$

Pour éviter d'éventuelles équivoques dues à une notation abrégée, nous allons considérer la  $j$ -ième composante ( $j = 1, 2, 3$ ) de la somme de la quantité de mouvement :

$$\int_{V_0} \varrho(t, x) v_j(t, x) dx$$

et sa dérivée par  $t$  est

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} \varrho(t, x) v_j(t, x) dx = \int_{V_0} \partial_t (\varrho(t, x) v_j(t, x)) dx \quad (1.4.4)$$

On multiplie l'équation (1.4.3) par la valeur  $v_j$ , on trouve :

$$v_j \partial_t \varrho(t, x) = -v_j \nabla \cdot (\varrho(t, x) v(t, x)) = -v_j \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \varrho v_k$$

et on a :

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\varrho v_j v_k) = \varrho v_k \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} v_j + v_j \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \varrho v_k$$

Donc

$$v_j \partial_t \varrho = -v_j \nabla \cdot (\varrho v) = \varrho v_k \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} v_j - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\varrho v_j v_k)$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_0} \varrho v_j dx &= \int_{V_0} \varrho \partial_t v_j dx + \int_V v_j \partial_t \varrho dx \\ &= \int_{V_0} \varrho \partial_t v_j dx + \int_V \varrho v_k \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} v_j dx - \int_V \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\varrho v_j v_k) dx \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

Selon la loi de Newton de la mécanique, la variation de la quantité de mouvement de chaque partie du fluide doit être égale à la somme de la force exercée sur le fluide et de l'entrée (ou sortie) de quantité de mouvement à travers la frontière  $\partial V_0$  de la région  $V_0$ .

Alors, la formule de l'entrée de quantité de mouvement à travers la frontière  $\partial V_0$  est :

$$- \int_{\partial V_0} (v \cdot n) \varrho v_j dS$$

Et pour les forces exercées sur le fluide, consiste en deux parties : la force  $F^{ex}$  exercée de l'extérieur directement sur le fluide comme la force gravitationnelle et la force  $F^{in}$  exercée sur le fluide par les parties internes.

En résumant ces raisonnements, on a

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} \varrho v_j dx = \int_{V_0} \varrho f_j dx + \int_{\partial V_0} \sigma_j \cdot n dS - \int_{\partial V_0} (v \cdot n) \varrho v_j dS \quad (1.4.6)$$

Or, en utilisant la formule de Stokes, on a

$$\int_{\partial V_0} \sigma_j \cdot n dS - \int_{\partial V} (v \cdot n) \varrho v_j dS = \int_{V_0} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\sigma_{jk} - \varrho v_j v_k) dx \quad (1.4.7)$$

A l'aide de (1.4.7) on déduit de (1.4.5) et de (1.4.6) que

$$\int_{V_0} \varrho \partial_t v_j dx + \int_{V_0} \varrho \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_j dx = \int_{V_0} \varrho f_j dx + \int_{V_0} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{jk} dx \quad (1.4.8)$$

Comme  $V_0$  région arbitrairement choisie, on déduit que :

$$\varrho \partial_t v_j + \varrho \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_j = \varrho f_j + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{jk}. \quad (1.4.9)$$

Le tenseur  $\sigma_{jk}$  consiste deux parties telles que :

$$\sigma_{jk} = \sigma_{jk}^0(p) + \sigma'_{jk} \quad (1.4.10)$$

Où  $\sigma_{jk}^0(p)$  est déterminé par la pression  $p$  par la formule

$$\sigma_{jk}^0(p) = -\delta_{jk} p \quad (1.4.11)$$

Et  $\sigma'_{jk}$  représente l'effet de la viscosité donnée par la formule

$$\sigma'_{jk} = \eta \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) + \zeta \delta_{jk} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (1.4.12)$$

Donc on substituant (1.4.11) et (1.4.12) dans (1.4.9) on trouve :

$$\varrho \partial_t v_j + \varrho \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \eta \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\zeta (\nabla \cdot \mathbf{v})) + \varrho f_j. \quad (1.4.13)$$

L'équation (1.4.13) est l'équation fondamentale du mouvement des fluides.

Si le coefficient de viscosité  $\eta$  est constant, alors (1.4.13) se réduit à :

$$\varrho (\partial_t v + (v \cdot \nabla) v) + \nabla p = \eta \Delta v + \varrho f \quad (1.4.14)$$

avec

$$v \cdot \nabla = \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

### 1.4.3 Equation de conservation de l'énergie :

Examinons maintenant l'équation qui exprime la loi de conservation de l'énergie. L'énergie totale du fluide contenu dans  $V_0$  est donnée par :

$$\int_{V_0} \left( \varrho \frac{|v|^2}{2} + \varrho e \right) dx$$

où  $e$  c'est l'énergie interne par l'unité de masse. La variation de l'énergie totale du fluide dans  $V_0$  doit satisfaire l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_0} \left( \rho \frac{|v|^2}{2} + \rho e \right) dx = & - \int_{\partial V_0} \left( \rho \frac{|v|^2}{2} + \rho e \right) v \cdot n dS + \int_{V_0} \rho f \cdot v dx \quad (1.4.15) \\ & + \int_{\partial V_0} \sum_{j,k=1}^3 v_j \sigma_{jk} n_k dS - \int_{\partial V_0} q \cdot n dS \end{aligned}$$

Tel que

- $\int_{\partial V_0} \left( \rho \frac{|v|^2}{2} + \rho e \right) v \cdot n d$  : la sortie de l'énergie apportée par le fluide qui traverse la frontière  $\partial V_0$ .
- $\int_{V_0} \rho f \cdot v dx$  : le travail effectué par la force externe.
- $\int_{\partial V_0} \sum_{j,k=1}^3 v_j \sigma_{jk} n_k dS$  : travail effectué sur la surface de  $V_0$  par la pression et par la viscosité.
- $\int_{\partial V_0} q \cdot n dS$  : la chaleur qui sort de  $V_0$ .

Dans la pratique une bonne approximation de  $q$  a la forme :

$$q = -k \nabla T$$

Où,  $k, T$  est le coefficient de conductibilité thermique, et la température.

En utilisant la formule de stokes, l'équation (1.4.15) s'écrit

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} \left( \rho \frac{|v|^2}{2} + \rho e \right) dx = - \int_{V_0} \nabla \cdot \left( \rho v \left( \frac{|v|^2}{2} + e \right) - \sum_{j,k=1}^3 v_k \sigma_{jk} - k \nabla T \right) dx + \int_{V_0} \rho f \cdot v dx \quad (1.4.16)$$

La région  $V_0$  étant arbitraire, il s'ensuit que

$$\partial_t \left( \rho \frac{|v|^2}{2} + \rho e \right) = - \nabla \cdot \left( \rho v \left( \frac{|v|^2}{2} + e \right) - \sum_{j,k=1}^3 v_k \sigma_{kj} - k \nabla T \right) + \rho f \cdot v \quad (1.4.17)$$

En utilisant l'équation (1.4.2) et on écrit le premier membre de (1.4.17) dans une forme plus simple :

$$- (\nabla \cdot (\rho v)) \left( \frac{|v|^2}{2} + e \right) + v \cdot \rho \partial_t v + \rho \partial_t e = - \nabla \cdot \left( \rho v \left( \frac{|v|^2}{2} + e \right) \right) + \nabla \cdot \sum_{i,k=1}^3 v_i \sigma_{ik} + \nabla \cdot k \nabla T + \rho f \cdot v$$

En soustrayant  $-(\nabla \cdot (\rho v))(\frac{|v|^2}{2} + e)$  des deux membres on obtient :

$$v \cdot \rho \partial_t v + \rho \partial_t e = -\rho v \cdot \nabla \left( \frac{|v|^2}{2} + e \right) + \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (v_k \sigma_{kj}) + \nabla \cdot k \nabla T + \rho f \cdot v$$

ou

$$\rho(\partial_t e + v \cdot \nabla e) = -v \cdot (\rho \partial_t v + \rho(v \cdot \nabla)v) + \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (v_k \sigma_{kj}) + \nabla \cdot k \nabla T + \rho f \cdot v \quad (1.4.18)$$

Maintenant on substitue l'expression de (1.4.13) au terme  $\rho \partial_t v + \rho(v \cdot \nabla)v$ . Alors il résulte que

$$\rho(\partial_t e + v \cdot \nabla e) + p \nabla \cdot v = \nabla \cdot k \nabla T + \eta \sum_{j,k=1}^3 \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \nabla \cdot v \right) \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \zeta (\nabla \cdot v)^2. \quad (1.4.19)$$

Dans le cas du gaz idéal, l'énergie interne est proportionnelle à la température, plus précisément, on a  $e = c_v T$ , avec  $c_v$  étant la chaleur spécifique du gaz idéal. On aura donc

$$\rho c_v (\partial_t T + v \cdot \nabla T) + p \nabla \cdot v = \nabla \cdot k \nabla T + \eta \sum_{j,k=1}^3 \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \nabla \cdot v \right) \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \zeta (\nabla \cdot v)^2. \quad (1.4.20)$$

# Chapitre 2

## Equations de mouvement de l'air

Comme l'atmosphère est un gaz, son mouvement doit être décrit par les équations aux dérivées partielles de la dynamique des gaz. Or, en réalité, la composante  $H_2O$  a des comportements particuliers : la vapeur d'eau peut se transformer en liquide ou en solide et sa transition de phase contribue au changement de la concentration de  $H_2O$  en état gazeux, et au bilan de la température par la chaleur latente.

Dans ce chapitre nous rappelons les équations qui décrivent le mouvement de l'air contenant la vapeur d'eau et en tenant compte la transition de phase de l'eau **gaz-liquide** et ses conséquences, le modèle est développé dans [3], [4] et [10].

Il est utile de rappeler les quantités physiques qu'on va considérer : la densité de l'air sec  $\varrho$ , la densité de la vapeur d'eau  $\pi$ , la densité de l'eau liquide  $\sigma(m)$  contenue dans les gouttelettes de masse  $m$ , la vitesse  $v = (v_1, v_2, v_3)$  de l'air, la vitesse  $u(m) = (u_1(m), u_2(m), u_3(m))$  des gouttelettes de masse  $m$ , la température  $T$  et la pression  $p$ . On rappelle que dans les conditions usuelles de l'atmosphère, l'équation de la pression donnée par :

$$p = R\left(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h}\right)T; \quad (2.0.1)$$

où  $R$ ,  $\mu_a$  et  $\mu_h$  sont respectivement la constante universelle des gaz, la masse molaire moyenne de l'air sec et la masse molaire de  $H_2O$ . Pour la vitesse

$u(m, x, t)$  des gouttelettes de masse  $m$ , on adopte l'approximation

$$u(m, x, t) = v(x, t) - \frac{1}{\alpha(m)} \nabla \Phi, \quad (2.0.2)$$

où  $\alpha(m)$  est le coefficient de friction d'une gouttelette de masse  $m$  avec l'air, tandis que  $\Phi$  est le potentiel. (pour les détails, voir [3], [10]).

Dans la suite nous citons les équations du modèle développé dans [10].

## 2.1 Equation de continuité de l'air

### 2.1.1 Equation de continuité l'air sec

On entend par l'air sec la partie de l'air des molécules différentes de  $H_2O$ , c'est-à-dire des molécules de  $O_2$ ,  $N_2$ , et d'autre gaz en quantité infime, ainsi il sera régi par l'équation de la continuité suivante

$$\frac{\partial \varrho(t, x)}{\partial t} + \nabla(\varrho(t, x)v(t, x)) = 0 \quad (2.1.3)$$

### 2.1.2 Equation de continuité de la vapeur d'eau

Le principe de la conservation de la masse pour la vapeur d'eau, doit être appliquée en tenant compte de la variation due à la transition de phase ; ainsi l'équation qui exprime la loi de la conservation de la masse de la vapeur d'eau s'écrit

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \nabla(\pi v) = -H_{tr} \quad (2.1.4)$$

$H_{tr}$  : représente la quantité totale de  $H_2O$  qui se transforme du gaz au liquide (son éventuelle valeur négative signifie la quantité de  $H_2O$  qui se transforme du liquide au gaz)..

## 2.2 Equation de quantité de mouvement

Pour le mouvement de l'air dans l'atmosphère l'unique force extérieure qui intervient réellement, est celle de la gravitation

$$f = -\nabla \Phi$$

$\Phi$  étant le géopotential. On rappelle que le comportement mécanique de la vapeur d'eau ne diffère pas beaucoup de celui de l'air sec, ce qui nous permet de considérer l'équation de la quantité du mouvement avec la densité de l'air  $\varrho + \pi$ .

Donc, si on adopte l'approximation  $\eta = \text{constante} > 0$  et  $\zeta = \text{constante} > 0$ , en utilisant l'expression (1.4.11) de la pression, on obtient, dans le cas de l'absence de gouttelettes et de cristaux de glace, l'équation

$$\begin{aligned} (\varrho + \pi)(\partial_t v + (v \cdot \nabla)v) + R_0 \nabla \left( \frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h} \right) T = & \quad (2.2.5) \\ \eta \Delta v + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot v) - (\varrho + \pi) \nabla \Phi & \end{aligned}$$

D'autre part, pour le mouvement de l'air en présence des gouttelettes de  $H_2O$ , il faut tenir compte l'effet de la friction entre l'air et les gouttelettes

$$\int_0^\infty \alpha(m) \sigma(m) (v - u(m)) dm$$

et on adopte la détermination de  $u(m)$  par la relation (2.0.2), on aura l'équation de la conservation de la quantité du mouvement pour l'air de la forme

$$\begin{aligned} (\varrho + \pi)(\partial_t v + (v \cdot \nabla)v) = \eta \Delta v + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot v) & \quad (2.2.6) \\ -\nabla p - \left( \int_0^\infty \sigma(m) dm + \varrho + \pi \right) \nabla \Phi & \end{aligned}$$

## 2.3 Equation de conservation de l'énergie

Pour le bilan de l'énergie, il faut tenir compte de la contribution de la chaleur latente de la condensation ou de l'évaporation, ce qui s'exprime par l'équation suivante

$$\begin{aligned} (\varrho + \pi) c_v (\partial_t T + v \cdot \nabla T) = k \Delta T - p \nabla \cdot v & \quad (2.3.7) \\ + \eta \sum_{j,k=1}^3 \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \nabla \cdot v \right) \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \zeta (\nabla \cdot v)^2 + E_{rad} + L_{gl} H_{gl}. & \end{aligned}$$

où  $c_v$  et  $k$  sont respectivement la chaleur spécifique et le coefficient de la thermoconductibilité de l'air,  $E_{rad}$  est la source de la chaleur (principalement due à la radiation), et le terme  $L_{gl} H_{gl}(T, p, \sigma)$  représente la chaleur fournie à l'air par le processus de transition de phase gaz-liquide, tandis que  $H_{gl}(T, p, \sigma)$  désigne la quantité totale de  $H_2O$  qui se transforme du gaz-liquide.

## 2.4 Etat hydrostatique de l'air sec

Dans l'atmosphère réelle la diffusion de la chaleur et l'effet thermique de la friction interne sont relativement petits, de sorte que le déplacement vertical de l'air, s'il n'y a pas de transition de phase de l'eau, engendre la variation de la pression et de la température de manière assez proche du processus adiabatique. A cause de ce comportement de l'air, nous trouvons une distribution de la densité et de la température assez proche de la distribution de l'état hydrostatique.

Or, à cause de la présence de la vapeur d'eau susceptible de subir la transition de phase, et donc de fournir une chaleur dans la forme de chaleur latente, l'état hydrostatique peut être différent du cas de l'air sec au cas de l'air humide.

Dans la suite on note par  $\varrho^*$ ,  $T^*$ , et  $p^*$  la densité, la température, et la pression dans l'état hydrostatique de l'air sec. En effet, si on néglige la diffusion de la chaleur et l'augmentation de la température due à la friction interne, l'équation (2.3.7) réduit à

$$\varrho^* c_v (\partial_t T^* + v \cdot \nabla T^*) + R \varrho^* T^* \nabla \cdot v = 0, \quad (2.4.8)$$

où  $R = \frac{R_0}{\mu_a}$ . De l'équation de continuité, on a

$$\varrho \nabla \cdot v = -\frac{\partial \varrho}{\partial t} - v \nabla \cdot \varrho$$

Substituant l'expression de  $\varrho \nabla \cdot v$  dans l'équation (2.4.8)

$$c_v \varrho^* \left[ \frac{\partial}{\partial t} T^* + v \cdot \nabla T^* \right] - R T^* \left[ \frac{\partial \varrho^*}{\partial t} + v \cdot \nabla \varrho^* \right] = 0,$$

multipliant cette equation par  $\frac{1}{\varrho^* T^*}$ , on aura

$$c_v \left[ \frac{\partial}{\partial t} \log T^* + v \cdot \nabla \log T^* \right] - R \left[ \frac{\partial}{\partial t} \log \varrho^* + v \cdot \nabla \log \varrho^* \right] = 0$$

D'ou

$$\frac{\partial}{\partial t} \log \frac{T^{*c_v}}{\varrho^{R^*}} + v \cdot \nabla \log \frac{T^{*c_v}}{\varrho^{R^*}} = 0$$

Définissant les trajectoires par la relation

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = x(t, x_0), t_0 \leq t \leq t_1\}, \quad x(t, x_0) = x_0 + \int_0^t v(t', x(t', x_0)) dt',$$

(pour plus de détail voir [8]).

Si le mouvement de l'air vérifie l'équation (2.4.8), le long du trajectoire  $\Gamma$ , le rapport

$$\vartheta(t, x) = \frac{T^*(t, x)^{\frac{1}{\gamma}}}{\varrho^*(t, x)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \quad (2.4.9)$$

avec  $\gamma = \frac{c_v + R}{c_v}$  reste invariant, où  $\gamma$  est l'exposant adiabatique, qui a la valeur approximativement 1.4.

Ainsi, sur la trajectoire de chaque partie du gaz on a

$$\varrho^*(t, x) = C_1 T^{*\frac{1}{\gamma-1}}(t, x) \quad (2.4.10)$$

où  $C_1$  est une constante.

Supposons maintenant que la valeur de la constante  $C_1$  figurant dans l'équation (2.4.10) est identique dans une région  $\Omega$ , alors dans cette région la pression  $p^*$ , est donnée par

$$p^*(t, x) = h T^{*\frac{\gamma}{\gamma-1}}(t, x) \quad (2.4.11)$$

où  $h = C_1 R$  est une constante.

Soit  $\Phi$  le géopotential, si on substitue  $v \equiv 0$  et la relation (2.4.11) dans l'équation (2.2.6), on obtient

$$h \nabla T^{*\frac{\gamma}{\gamma-1}} = -C_1 T^{*\frac{1}{\gamma-1}} \nabla \Phi. \quad (2.4.12)$$

on trouve

$$T^* = \left( T_0^* + \frac{\gamma-1}{R\gamma} (\Phi_0 - \Phi) \right). \quad (2.4.13)$$

où  $\Phi_0 = \Phi(x_0)$  et  $T_0 = T(x_0)$  pour  $x_0 \in \Omega$ .

En outre, compte tenu de la relation  $\frac{C_1}{h} = \frac{1}{R}$ , on déduit de (2.4.10) et (2.4.13)

$$\varrho^* = \left( \varrho_0^{*\gamma-1} + \frac{C_1^{\gamma-1}(\gamma-1)}{h\gamma} (\Phi_0 - \Phi) \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (2.4.14)$$

où  $\varrho_0^* = C_1 T_0^{*\frac{1}{\gamma-1}}$  est la température au niveau de la surface de la mer.

D'autre part, de (2.4.11) et (2.4.13) on déduit que

$$p^* = h \left( T_0^{*\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{R\gamma} (\Phi_0 - \Phi) \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left( p_0^{*\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \frac{h^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}(\gamma-1)}{R\gamma} (\Phi_0 - \Phi) \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad (2.4.15)$$

où  $p_0^* = hT_0^{*\frac{\gamma}{\gamma-1}}$  est la pression au niveau de la mer.

En rappelant (2.4.14), cette relation signifie que quand on monte de  $H$  cm la température devrait descendre de  $9,8.H.10^{-5}$  degrés, c'est-à-dire que quand on monte de  $1\text{ km}$  la température devrait descendre de  $9,8$  degrés. Mais les mesures effectuées dans l'atmosphère réelle nous montrent que quand on monte de  $1\text{ km}$  la température descend en moyenne environ  $6,5$  degrés. Cette différence est due principalement à la présence de la vapeur d'eau et à sa transition de phase.

Les figures ci-dessous représentent la distribution verticale de la température ainsi que la densité de l'air dans l'état hydrostatique de l'air sec, dans une hauteur de  $12\text{ Km}$ , et avec les valeurs initiale de la température, et la densité

$$T^*(0) = 300(K), \quad \varrho^*(0) = 1204(g/m^3).$$

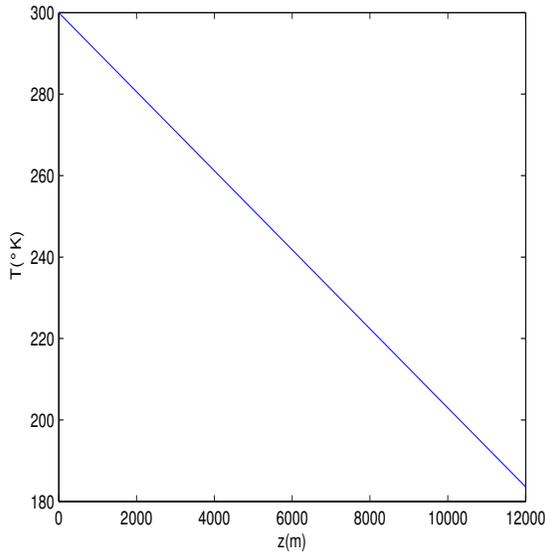


FIGURE 2.1 – La distribution de la température dans l'état hydrostatique de l'air sec

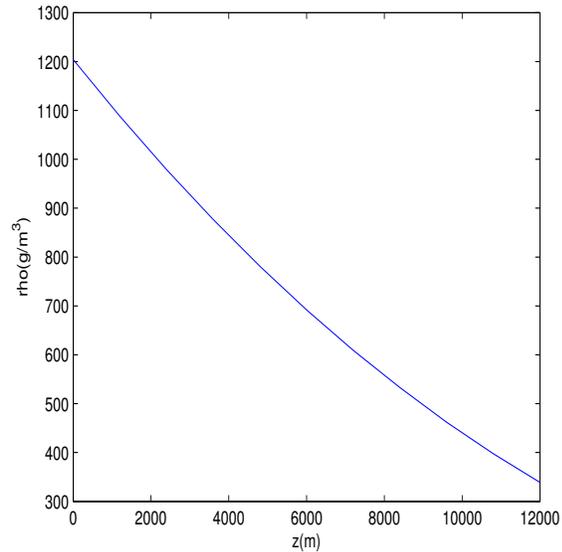


FIGURE 2.2 – La distribution de la densité dans l'état hydrostatique de l'air sec

# Chapitre 3

## Résolubilité du système d'équations de l'état hydrostatique avec la condensation

### 3.1 Etat hydrostatique avec la condensation de la vapeur d'eau

Dans le cas où la vapeur d'eau contenue dans l'air est partout saturée et la température est distribuée comme s'il y a constamment la condensation, cas communément dit de l'air humide, la distribution de la densité et de la température est différente et doit être déterminée compte tenu du processus de possible condensation.

Avant de construire un modèle qui décrit l'état hydrostatique de l'air accompagné par la condensation de la vapeur d'eau, rappelons les quantités qui interviennent dans le processus de condensation de la vapeur d'eau dans l'atmosphère. Pour simplifier, nous adoptons l'approximation de la chaleur latente de la transition de la vapeur d'eau, notée  $L_{tr}$ . D'autre part, la densité de la vapeur saturée de  $H_2O$  sera notée  $\bar{\pi}_{v_s}(T)$ . Sa dépendance de la température jouera un rôle essentiel dans le modèle. Nous adoptons, suivant [9],

son expression

$$\bar{\pi}_{vs}(T) = \frac{E_0}{RT} \cdot 10^{\frac{7.63(T-273.15)}{T-31.25}}, \quad E_0 = 6.107 \text{ (mbar)}. \quad (3.1.1)$$

Pour les détails des aspects physiques, la condensation de la vapeur d'eau se réalise, lorsque à une température supérieure à celle de la fusion de  $H_2O$ , la densité de la vapeur dépasse la densité de la vapeur saturée relative à l'état liquide  $\bar{\pi}_{vs}(T)$ , valeur critique au de laquelle les molécules de  $H_2O$  dans l'état gazeux tendent à s'établir à l'état liquide, il est utile de voir, outre [9], aussi [7].

On rappelle que dans l'air qui contient la vapeur d'eau à la saturation et monte avec la vitesse verticale  $v_3 > 0$ , la quantité de la condensation, notée  $H_{tr}$ , peut être donnée par

$$H_{tr} = \left( \bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \varrho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T) \right) v_3 \quad (3.1.2)$$

( pour plus de détail sur l'approximation (3.1.2) voir [5]).

Utilisant la relation (3.1.2), nous allons définir une distribution supposée de la température  $T_{hs}$  et la densité  $\varrho_{hs}$  dans l'état hydrostatique avec condensation. Pour ce faire, on désigne par  $\varrho_{hs}$  la somme de la densité de l'air sec et de celle de la vapeur d'eau

$$\varrho_{hs} = \varrho + \pi$$

Dans ce cas l'équation de continuité, donnée par

$$\frac{\partial \varrho_{hs}}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho_{hs} v) = -H_{tr}. \quad (3.1.3)$$

Quand il y a la condensation de la vapeur d'eau dans l'air, ce dernier reçoit la chaleur latente de la transition de phase de  $H_2O$ , de sorte que, si on néglige la diffusion de la chaleur et le terme due à la friction interne, la variation de la température est donnée par

$$\varrho_{hs} c_v (\partial_t T_{hs} + v \cdot \nabla T_{hs}) + R \varrho_{hs} T_{hs} \nabla \cdot v = L_{tr} H_{tr}. \quad (3.1.4)$$

Si on y substitue (3.1.2) et à  $\varrho_{hs} \nabla \cdot v$  l'expression obtenue de (3.1.3), et si en tenant compte du mouvement stationnaire (de sorte que  $v = (0, 0, v_3)$  et avec  $v_3 > 0$ , de (3.1.4) on obtient

$$\varrho_{hs} c_v \frac{dT_{hs}}{dz} - RT_{hs} \frac{d\varrho_{hs}}{dz} = \quad (3.1.5)$$

$$= (RT_{hs} + L_{tr})(\bar{\pi}_{vs}(T_{hs}) \frac{d}{dz} \log(\varrho_{hs}) - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T_{hs})).$$

Retournons à l'équation (2.2.6), si  $v = (0, 0, v_3)$  et  $\partial_t v_3 = 0$ , et si en négligeant les termes de viscosité et on écrit  $\frac{d}{dz}$  au lieu de  $\frac{\partial}{\partial z}$ , on aura

$$\varrho_{hs} v_3 \frac{dv_3}{dz} = -R \frac{d}{dz} (\varrho_{hs} T_{hs}) - [\Sigma + \varrho_{hs}] g$$

où  $\Sigma$  est la densité totale de l'eau liquide et  $g$  la force gravitationnelle.

Pour  $v_3 \rightarrow 0$ , on a  $v_3 \frac{dv_3}{dz} \rightarrow 0$ .

Alors de (3.1.2), il résulte que

$$H_{tr} \rightarrow 0, \quad \text{ainsi que} \quad \Sigma \rightarrow 0$$

Donc nous avons

$$R \frac{d}{dz} (\varrho_{hs} T_{hs}) = -g \varrho_{hs}. \quad (3.1.6)$$

## 3.2 Etat hydrostatique intermédiaire

Nous allons définir une distribution supposée de la température  $T_{hs}$  et la densité  $\varrho_{hs}$  dans l'état hydrostatique intermédiaire (entre humide et sec), pour ce faire, rappelons que les équations (3.1.5) et (3.1.6) représentent la distribution de la vapeur et la température dans le cas où l'air est avec la vapeur à la saturation, et la transition de phase de la vapeur d'eau se réalise partout.

La distribution de la température et de la densité observées dans l'atmosphère réelle montre que l'effet du réchauffement par la transition de phase de la vapeur d'eau dans l'atmosphère est partielle (même si considérable). Pour cela nous supposons que la température  $T_{hs}$  et la densité  $\varrho_{hs}$  de l'air vérifient la relation

$$\varrho_{hs} c_v \frac{dT_{hs}}{dz} - RT_{hs} \frac{d\varrho_{hs}}{dz} = \theta (RT_{hs} + L_{tr})(\bar{\pi}_{vs}(T_{hs}) \frac{d}{dz} \log \varrho_{hs} - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T_{hs})) \quad (3.2.7)$$

où  $\theta$  est un coefficient ayant la valeur entre 0 et 1. Le cas  $\theta = 0$  correspond à l'état hydrostatique de l'air sec, tandis que le cas  $\theta = 1$ , comme nous l'avons remarqué ci-dessus, correspondrait à l'état de l'air humide dans lequel potentiellement la transition de phase de la vapeur d'eau en liquide

est partout présente.

Si on accouple l'équation (3.2.7) avec l'équation de l'état hydrostatique

$$R \frac{d}{dz}(\varrho_{hs} T_{hs}) = -g \varrho_{hs} \quad (3.2.8)$$

et la donnée initiale (par exemple, une donnée de  $(T_{hs}(0), \varrho_{hs}(0))$ ) on peut déterminer la distribution de la température  $T_{hs}(z)$  et de la densité  $\varrho_{hs}(z)$ . Dans la suite nous montrons la solution numérique du système d'équations (3.2.7)–(3.2.8) avec  $0 < \theta < 1$ .

### 3.3 Etude de l'existence et l'unicité de la solution

Avant d'examiner la solution numérique du système d'équations (3.2.7)–(3.2.8) nous allons démontrer l'existence et l'unicité de la solution, avec les conditions (Pour la commodité du calcul, nous noterons  $\varrho, T$  au lieu de  $\varrho_{hs}, T_{hs}$ ).

$$\varrho(0) = \varrho_0, \quad T(0) = T_0 \quad (3.3.9)$$

( $\varrho_0 > 0, T_0 > 0$ ).

Pour l'équation (3.2.7), il faut préciser que l'expression de  $\bar{\pi}_{vs}(T)$  est donnée dans (3.1.1) et que nous la considérons seulement pour  $T > 31.25(K)$ .

Donc nous supposons que

$$T_0 > 31.25(K). \quad (3.3.10)$$

En outre, nous aurons besoin de la condition

$$T \frac{d}{dT} \log(\bar{\pi}_{vs}(T)) > \frac{c_v}{R} \quad (3.3.11)$$

qui est vérifiée pour

$$\Theta_- < T < \Theta_+, \quad \Theta_- = 31.25(K), \text{ et } \Theta_+ \approx 1275.95(K). \quad (3.3.12)$$

Pour cela, nous allons chercher la solution telle que

$$\Theta_- < T < \Theta_+. \quad (3.3.13)$$

Nous rappelons aussi que, pour le système (3.2.7)-(3.2.8) avec  $\theta = 0$ , le calcul direct nous donne la solution

$$T(z) = T_0 - \frac{g}{c_v + R}z \equiv T^*(z) \quad (3.3.14)$$

$$\varrho(z) = \varrho_0 \frac{T^{c_v/R}}{T_0^{c_v/R}} = \frac{\varrho_0}{T_0^{c_v/R}} \left( T_0 - \frac{g}{c_v + R}z \right)^{c_v/R} \equiv \varrho^*(z) \quad (3.3.15)$$

pour

$$0 \leq z < \frac{c_v + R}{g}T_0$$

h

Dans ce domaine on a évidemment  $T^*(z) > 0$  et  $\varrho^*(z) > 0$ .

Pour qu'on puisse utiliser la fonction  $(\bar{\pi}_{vs}(T))$ , on pose

$$\bar{z}^* = \frac{c_v + R}{g}(T_0 - 31.25) \quad (3.3.16)$$

On a la proposition suivante

**Proposition 3.3.1** *On suppose que  $\varrho_0 > 0$  et  $\Theta_- < T_0 < \Theta_+$ . Alors le système d'équations (3.2.7)-(3.2.8) avec la condition (3.3.9) admet, au moins sur l'intervalle  $[0, \bar{z}^*$ , une solution  $(\varrho, T)$  et une seule une fois continument dérivable. En outre, les fonctions  $\varrho(z)$  et  $T(z)$  sont strictement décroissantes et on a*

$$T(z) \geq T^*(z), \quad z \in [0, \bar{z}^*] \quad (3.3.17)$$

#### DÉMONSTRATION

Il est clair que le système d'équations (3.2.7)-(3.2.8) avec quelconques données initiales  $\varrho_0 > 0$  et  $\Theta_- < T_0 < \Theta_+$  admet une solution et une seule de classe  $C^1$  dans un intervalle suffisamment petit.

Donc, pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution dans  $[0, \bar{z}^*$ , il suffit de démontrer que, si la solution existe dans l'intervalle  $[0, \bar{z}$  avec  $0 < \bar{z} < \bar{z}^*$ , alors on a

$$0 < \inf_{0 \leq z < \bar{z}} \varrho(z) \leq \sup_{0 \leq z < \bar{z}} \varrho(z) < \infty$$

et

$$\Theta_- < \inf_{0 \leq z < \bar{z}} T(z) \leq \sup_{0 \leq z < \bar{z}} T(z) < \Theta_+.$$

Pour ce faire, nous utilisons les propriétés illustrées dans les lemmes suivants.

**Lemme 3.3.1** *Supposons que  $\varrho_0 > 0$  et  $\Theta_- < T_0 < \Theta_+$  et que  $(\varrho, T)$ , tels que  $\varrho > 0$ , et  $\Theta_- < T < \Theta_+$  est la solution du système d'équations (3.2.7)-(3.2.8) avec la condition (3.3.9) dans un intervalle  $[0, \bar{z}[$ ,  $0 < \bar{z} \leq \bar{z}^*$ . Alors les fonctions  $\varrho(z)$  et  $T(z)$  sont strictement décroissantes dans l'intervalle  $[0, \bar{z}[$  et on a*

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\bar{\pi}_{vs}(T(z))}{\varrho(z)} \right) \leq 0 \quad \forall z \in [0, \bar{z}[. \quad (3.3.18)$$

**DÉMONSTRATION.** Il nous est commode de transformer l'équation (3.2.7) dans la forme

$$\frac{d}{dz} \log \left( \frac{T^{c_v}}{\varrho^R} \right) = -\theta \left( R + \frac{L_{tr}}{T} \right) \frac{d}{dz} \left( \frac{\bar{\pi}_{vs}(T)}{\varrho} \right) \quad (3.3.19)$$

D'autre part, de l'équation (3.2.8) il résulte immédiatement que

$$\frac{d}{dz} (\varrho(z)T(z)) < 0 \quad \forall z \in [0, \bar{z}[. \quad (3.3.20)$$

Donc il est impossible que  $\frac{d}{dz}(\varrho(z)) \geq 0$  et  $\frac{d}{dz}T(z) \geq 0$ , alors il faut que  $\frac{d}{dz}(\varrho(z)) < 0$ . Mais dans ce cas le premier membre de (3.3.17) serait strictement positif, tandis que le deuxième membre serait strictement négatif, ce qui est impossible.

De manière symétrique, si  $\frac{d}{dz}(\varrho(z)) \geq 0$ , alors il faut que  $\frac{d}{dz}T(z) < 0$ . Mais dans ce cas le premier membre de (3.3.17) serait strictement négatif, tandis que le deuxième membre serait strictement positif, ce qui est impossible. Donc il faut que  $\frac{d}{dz}\varrho(z) < 0$  et  $\frac{d}{dz}T(z) < 0$ .

Alors les fonctions  $\varrho(z)$  et  $T(z)$  sont strictement décroissantes dans l'intervalle  $[0, \bar{z}[$ .

Pour démontrer (3.3.16), on suppose par absurde qu'il existe un  $z \in [0, \bar{z}[$  tel que l'on ait

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\bar{\pi}_{vs}(T(z))}{\varrho(z)} \right) > 0$$

Cette hypothèse implique que

$$-\frac{d}{dz}\varrho > -\frac{\varrho}{\bar{\pi}_{vs}(T(z))} \frac{d\bar{\pi}_{vs}(T)}{dT} \frac{d}{dz}T(z)$$

Si on substitue cette inégalité au premier membre de (3.2.7), il résulte qu'il est supérieur à

$$\varrho \left( c_v - RT \frac{d}{dT} \log(\bar{\pi}_{vs}(T)) \right) \frac{d}{dz} T(z)$$

Or, d'après (3.3.11) on a  $c_v - RT \frac{d}{dT} \log(\bar{\pi}_{vs}(T)) < 0$ , et comme on a démontré que  $\frac{d}{dz} T(z) < 0$ . Par conséquent, le premier membre de (3.2.7) serait strictement positif, tandis que le second membre est par hypothèse strictement négatif, ce qui est impossible. On a donc démontré (3.3.16).

**Lemme 3.3.2** *Supposons que  $\varrho_0 > 0$  et  $\Theta_- < T_0 < \Theta_+$  et que  $(\varrho, T)$ , tels que  $\varrho > 0$ , et  $\Theta_- < T < \Theta_+$  est la solution du système d'équations (3.2.7)-(3.2.8) avec la condition (3.3.9) dans un intervalle  $[0, \bar{z}[$ ,  $0 < \bar{z} \leq \bar{z}^*$ . Alors on a*

$$T(z) \geq T^*(z) \quad z \in [0, \bar{z}[ \quad (3.3.21)$$

**DÉMONSTRATION.** Posons

$$\varphi_1(z) = \theta \int_0^z \left( R + \frac{L_{tr}}{T(z')} \right) \left( -\frac{d}{dz'} \left( \frac{\bar{\pi}_{vs}(T(z'))}{\varrho(z')} \right) \right) dz' \quad (3.3.22)$$

En vertu du lemme 3.3.1 on a

$$\varphi_1(z) \geq 0 \quad z \in [0, \bar{z}[. \quad (3.3.23)$$

D'autre part, de l'équation (3.2.7) (ou (3.3.19)) on déduit

$$\frac{T^{c_v}}{\varrho^R} = \frac{T_0^{c_v}}{\varrho_0^R} e^{\varphi_1}$$

ou

$$\varrho = \varrho_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{c_v/R} \cdot e^{-\varphi_1/R} \quad (3.3.24)$$

En substituant (3.3.24) dans (3.2.8), on a

$$R \frac{d}{dz} (T^{(c_v+R)/R} e^{-\varphi_1/R}) = -g T^{c_v/R} e^{-\varphi_1/R} \quad (3.3.25)$$

Si on pose

$$y = T^{(c_v+R)/R} e^{-\varphi_1/R}$$

l'équation (3.3.25) se transforme en

$$R \frac{d}{dz} y = -g y^{c_v/(c_v+R)} e^{-\varphi_1/(c_v+R)}$$

Ou

$$(c_v + R) \frac{d}{dz} y^{R/(c_v+R)} = -g e^{-\varphi_1/(c_v+R)} \quad (3.3.26)$$

La solution de l'équation (3.3.26) avec la condition initiale

$$(y(0))^{R/(c_v+R)} = T_0$$

est

$$y^{R/(c_v+R)} = T_0 - \frac{g}{c_v + R} \int_0^z e^{-\varphi_1/(c_v+R)} dz'$$

Donc  $T(z)$  a la forme

$$T(z) = \left( T_0 - \frac{g}{c_v + R} \int_0^z e^{-\varphi_1/(c_v+R)} dz' \right) e^{\varphi_1/(c_v+R)} \quad (3.3.27)$$

Si  $\varphi_1 \geq 0$ , alors on a  $e^{-\varphi_1/(c_v+R)} \leq 1 \leq e^{\varphi_1/(c_v+R)}$ .

Par conséquent, en vertu de (3.3.23) on a

$$T(z) \geq T_0 - \frac{g}{c_v + R} z = T^*(z)$$

Le Lemme est démontré.

### CONTINUATION DE LA DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION (3.3.1)

Comme d'après le Lemme (3.3.1)  $T(z)$  est décroissante, compte tenu de (3.3.21) on a

$$0 < \Theta_- < T^*(z) \leq T(z) \leq T_0 < \Theta_+ \quad z \in [0, \bar{z}]. \quad (3.3.28)$$

D'autre part, comme pour tout  $T > \Theta_-$  et pour tout  $\varrho > 0$  on a  $\frac{\bar{\pi}_{vs}(T)}{\varrho} > 0$ , des Lemmes 3.3.1 et 3.3.2 on déduit que

$$0 \leq \varphi_1(z) \leq \left( R_1 + \frac{L_{tr}}{T^*(z)} \right) \frac{\bar{\pi}_{vs}(T_0)}{\varrho_0} \leq \left( R + \frac{L_{tr}}{\Theta_-} \right) \frac{\bar{\pi}_{vs}(T_0)}{\varrho_0} \equiv K_{\varphi_1} < \infty \quad (3.3.29)$$

Donc, de (3.3.24), (3.3.29) et du Lemme 3.3.1 on obtient

$$0 < K_{\varrho}^{-} \equiv \varrho_0^R \frac{\Theta_-^{c_v/R}}{T_0^{c_v/R}} e^{-K\varphi_1/R} \leq \varrho_0^R \frac{(T^*(z))^{c_v/R}}{T_0^{c_v/R}} e^{-K\varphi_1/R} \leq \varrho(z) \leq \varrho_0 < \infty \quad (3.3.30)$$

pour tout  $z \in [0, \bar{z}]$ .

Les inégalités (3.3.28) et (3.3.30) nous permettent de prolonger la solution  $(\varrho, T)$  avec ses propriétés de décroissance stricte et l'inégalité (3.3.21) sur tout l'intervalle  $[0, \bar{z}^*]$ . La Proposition est démontré.

### 3.4 Calcul numérique de la densité et de la température dans l'état hydrostatique intermédiaire

Nous calculons d'abord la solution  $(T(z), \varrho(z))$  du système d'équations (3.2.7)–(3.2.8) avec  $\theta = \frac{1}{2}$ . Nous utilisons la méthode de différences finies avec l'approximation

$$\frac{d\varrho}{dz} = \frac{\varrho(i+1) - \varrho(i)}{\delta z} \quad (3.4.31)$$

et

$$\frac{dT}{dz} = \frac{T(i+1) - T(i)}{\delta z} \quad (3.4.32)$$

En discrétisant le système d'équations (3.2.7)–(3.2.8), on a

$$R \left( T(i) \frac{\varrho(i+1) - \varrho(i)}{\delta z} + \varrho(i) \frac{T(i+1) - T(i)}{\delta z} \right) = -g\varrho(i). \quad (3.4.33)$$

$$\begin{aligned} & \varrho(i) c_v \frac{T(i+1) - T(i)}{\delta z} - RT(i) \frac{\varrho(i+1) - \varrho(i)}{\delta z} = \\ & = \theta \left( RT(i) + L_{tr} \right) \left[ \bar{\pi}_{vs}(T(i)) \frac{1}{\varrho(i)} \left( \frac{\varrho(i+1) - \varrho(i)}{\delta z} \right) + \right. \\ & \quad \left. - \left( \frac{d}{dT} \bar{\pi}_{vs}(T(i)) \frac{T(i+1) - T(i)}{\delta z} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.4.34)$$

Pour la commodité du calcul nous réécrivons les équations (3.4.33)-(3.4.34) dans la forme

$$T(i)\varrho(i+1) + \varrho(i)T(i+1) = 2T(i)\varrho(i) - \delta_z \frac{g}{R}\varrho(i), \quad i = 1, \dots, N \quad (3.4.35)$$

$$\begin{aligned} & c_v \varrho(i)T(i+1) - RT(i)\varrho(i+1) + \quad (3.4.36) \\ & -\theta \left( RT(i) + L_{tr} \right) \left[ \bar{\pi}_{vs}(T(i)) \frac{1}{\varrho(i)} \varrho(i+1) - T(i+1) \frac{d}{dT} \bar{\pi}_{vs}(T(i)) \right] = \\ & = c_v \varrho(i)T(i) - RT(i)\varrho(i) + \theta \left( RT(i) + L_{tr} \right) \times \\ & \times \left( \frac{d\bar{\pi}_{vs}}{dT} \times T(i) - \bar{\pi}_{vs}(T(i)) \right), \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

avec

$$T(0) = 300(K), \quad \varrho(0) = 1204(g/m^3).$$

Pour exécuter le calcul numérique, il faut avant tout choisir les valeurs des paramètres. Pour les coefficients physiques  $g, R, c_v$  et  $L_{tr}$ , nous utilisons les valeurs suivantes :

$$g = 9.8 \text{ m}^2/\text{s}^2, \quad R = 0.29.10^3 \text{ J/g}, \quad c_v = 0.72.10^3$$

$$L_{tr} = (3244 - 2.72T).10^3 \text{ J/Kg}.$$

Les figures illustrées ci-dessous représentent la distribution verticale de la température ainsi la densité de l'air dans l'état hydrostatique intermédiaire avec  $\theta = \frac{1}{2}$ , les calculs numériques ont été effectués pour une hauteur de  $z = 12km$  avec un pas  $\delta_z = 10m$ , avec les conditions initiales

$$T(0) = 300K, \quad \varrho(0) = 1204g/m,$$

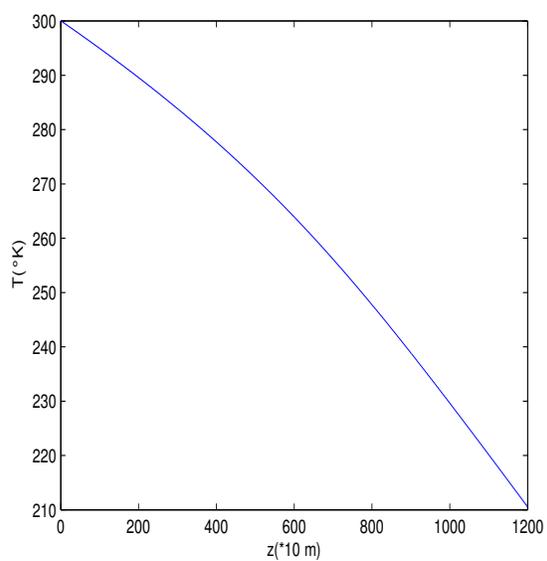


FIGURE 3.1 – La distribution de la température dans l'état hydrostatique intermédiaire avec  $\theta = \frac{1}{2}$ .

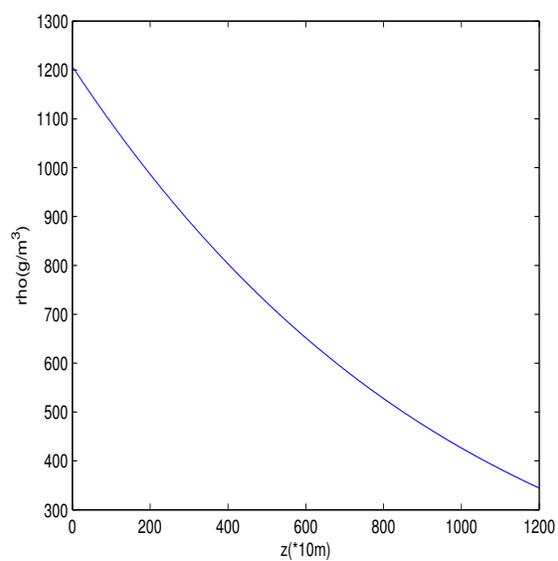


FIGURE 3.2 – La distribution de la densité dans l'état hydrostatique intermédiaire avec  $\theta = \frac{1}{2}$ .

# Conclusion

Dans ce travail, nous avons démontré l'existence et l'unicité de la solution du système d'équations modélisant la distribution de la densité et de la température dans l'état hydrostatique avec condensation.

Les résultats des calculs numériques mettent en évidence les aspects fondamentaux de la distribution de la densité et de la température. Ils montrent que la différence de température entre l'état hydrostatique de l'air sec et celui de l'air humide est principalement due à la chaleur latente libérée lors de la condensation de la vapeur d'eau dans l'air.

# Bibliographie

- [1] Dahrana, Imane : Modélisation mathématique de phénomène Orage. Mémoire de master juin 2016.
- [2] Fujita Yashima, H. : Modélisation de la physique des fluides, cours de l'université de Guelma, 2010.
- [3] Fujita Yashima, H. Campana, V. Aissaoui, M. Z. : Système d'équations d'un modèle du mouvement de l'air impliquant la transition de phase de l'eau dans l'atmosphère. *Ann. Math. Afr.*, vol. 2 (2011), pp. 66–92.
- [4] Fujita Yashima, H. : Modelación matemática del movimiento de la atmósfera con la transición de fase del agua. *Rev. Invest. Operac.*, vol. 34 (2013), pp. 93-104.
- [5] Ghomrani, S., Marín Antuña., J., Fujita Yashima, H. : Un modelo de la su-bida del aire ocasionada por la condensación del vapor y su cálculo nu-merico. *Rev. Cuba Fís.*, vol. 32 (2015), pp 3-8.
- [6] Ghomrani, S. Modélisation mathématique du phénomène d'un cyclone tropical. Thèse de doctorat 3ème cycle en Mathématiques université 8 Mai 1945 Guelma. 2017
- [7] Kikoïne, A. K., Kikoïne, I. K. : *Physique moléculaire* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1979.
- [8] Merad, M., Aissaoui, M., Fujita Yashima, H. : Etude de l'équation de coagu-lation des gouttlettes en mouvement avec le vent. Thèse de docto-rat 3ème cycle en Mathématiques, université 8 Mai 1945 Guelma. 2014.
- [9] Matveev, L. T. : *Physique de l'atmosphère*. Gidrometeoizdat, Leningrad-S. Peterburg, 1965, 1984, 2000.

- [10] Selvaduray, S., Fujita Yashima, H. : Equazioni del moto dell'aria con la transizione di fase dell'acqua nei tre stati : gassoso, liquido e solido. Accad. Sci. Torino, Memorie Cl. Sci. Fis., Serie V, vol. 35 (2011), pp.37-69.
- [11] D. RemAoun, M. Aouaouda, et H. Fujita, Oscillation de la pluie dans un modèle mathématique de l'orage, . Annales Mathématiques Africaines Volume 7 (2018) pp. 19-35.
- [LL6] L. D. Landau, E. M. Lifchitz : Mécanique des fluides (Physique théorique, tome 6) (traduit du russe). Mir, Moscou, 1989.