République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par :

MOUSSAOUI Nada

Intitulé

Transformation de Laplace appliquée aux équations différentielles fractionnaires

Dirigé par : Dr. AISSAOUI Fatima

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr. FRIOUI Assia**	**PROF**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr. AISSAOUI Fatima**	**MCA**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr. MEFTAH Badreddine**	**MCA**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr. LARIBI Naima**	**MCA**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2025

.

الملخص

الهدف من هذه المذكرة يكمن في وجود حلول لبعض المعادلات التفاضلية العادية والكسرية، وهذه الحلول يتم الحصول عليها في هذا العمل باستخدام تحويل لابلاس ضمن اطار الحساب الكسري.

الكلمات المفتاحية : الحساب الكسري، مشتق كسري لنوع ريمان لوفيل، مشتق كسري لنوع كابيتو، المعادلات التفاضلية الكسرية، محولة لابلاس.

Résumé

Ce mémoire a pour objectif la résolution de certaines équations différentielles, tant ordinaires fractionnaires, en s'appuyant sur la transformation de Laplace appliquée au cadre du calcul fractionnaire.

Mots-clés: Calcul fractionnaire, dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, dérivée fractionnaire au sens de Caputo, équations différentielles fractionnaires, transformée de Laplace.

Abstract

The aim of this thesis is to solve some ordinary and fractional differential equations using the Laplace transformation associated with fractional calculus.

Keywords: Fractional calculus, fractional derivative for Riemann-Liouville type, fractional derivative for Caputo type, differential fractional, Laplace transform.

Table des matières

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.
Je tiens à exprimer ma gratitude et mes sincères remerciements à mon encadrante, Mme AISSAOUI Fatima. Merci infiniment pour l'aide que vous m'avez apportée et pour m'avoir guidée tout au long de ce travail. Merci pour vos précieux conseils et les informations que vous m'avez fournies, merci d'avoir accepté d'être mon encadrante. Je vous en suis profondément reconnaissante.
Je remercie également Mme. FRIOUI Assia, pour l'honneur de présider ce jury ; j'ai eu l'honneur de faire partie de vos étudiants et de bénéficier de votre enseignement riche.
Je remercie également les membres du jury, Mr. MEFTAH Badreddine et Mme. LARIBI Naima, d'avoir accepté de lire et d'évaluer ce modeste travail.
Je voudrais également remercier le personnel administratif et les enseignants du département de mathématiques de l'université 8 mai 1945 et tous mes compagnons de promotion.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mes parents

À Mon père, j'espère qu'il est fier de voir ici le résultat d'années de sacrifices pour m'aider à avancer dans la vie. Merci pour les valeurs nobles, l'amour, l'éducation et le soutient permanent venu de vous.

À Ma mère, qui ne cesse jamais de m'offrir, son amour, son soutien, tous les précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie.

Mes frères et sœurs qui sont pour moi des exemples de courage et de générosité.

Ma grande familles qui m'a toujours m'encouragée et soutenue.

Mes amies pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire.

Notations et Symboles

Ensembles

- $\mathbb{R}$ Ensembles des nombres réels.

- $\mathbb{N}$ Ensembles des entiers naturels.

- $\mathbb{N}^*$ Ensembles des entiers naturels non nuls.

Fonctions

- $\Gamma(\alpha)$ Fonction Gamma.

-$B(p,q)$ Fonction Bêta.

- $E_{\alpha,\beta}(z)$ Fonction de Mittag-Leffler.

- $I_a^\alpha f$ Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction f.

- $D_a^\alpha f$ Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction f .

- ${}^cD_a^\alpha$ Dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α de la fonction f.

- $D^n f = \frac{d^n f(t)}{dt^n}$ Dérivée ordinaire d'ordre n par rapport à t de la fonction f.

- $L[f(t)]$ Transformée de Laplace de la fonction f.

- $L^{-1}[F(p)]$ Transformée de Laplace inverse de la fonction F.

- $L[D_0^\alpha]$ Transformée de Laplace de l'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville.

- $L[{}^cD_0^\alpha]$ Transformée de Laplace de l'opérateur de dérivation de Caputo.

Abréviations

- EDO Equation différentielles ordinaires.

- EDF Equation différentielles fractionnaires.

- EDP Equation différentielle partielles.

- $R-L$ Riemann-Liouville.

Introduction

L'origine du calcul fractionnaire remonte à 1695, quand le mathématicien Guillaume de L'Hospital demanda à Leibniz ce que pourrait signifier une "dérivée d'ordre $\frac{1}{2}$". Cette question simple lança une réflexion qui allait durer des siècles. Au XVIII^{e} siècle, Euler et Lagrange commencèrent à explorer ces idées, mais c'est au XIX^{e} que le sujet prit vraiment forme avec les travaux de Liouville (1837) et Riemann (1847). Grünwald et Letnikov perfectionnèrent ensuite la théorie vers $1867 - 1868$. La version moderne s'est développée au XX^{e} siècle, notamment grâce à Caputo dans les années 1960, dont la formulation s'avéra plus pratique pour les applications.

La transformée de Laplace a connu une évolution remarquable depuis ses origines au $18^{ème}$ siècle. Tout a commencé avec les travaux préliminaires d'Euler en 1744, avant que Laplace ne développe formellement la méthode entre 1782 et 1785 pour ses recherches en probabilités. Au $19^{ème}$ siècle, Heaviside a joué un rôle crucial en adaptant cette théorie aux besoins des ingénieurs, malgré le scepticisme initial des mathématiciens. Au $20^{ème}$ siècle, la transformée de Laplace est devenue un outil indispensables majeurs par exemple : électrotechnique, théorie du contrôle, traitement du signal moderne ...

Ce mémoire se compose de trois chapitres :

Premier chapitre : Ce chapitre est consacré à un large rappel des éléments et les outils nécessaires de base du calcul fractionnaire qui serait utiles par la suite.

Le deuxième chapitre : s'étend à rappeler quelques définitions et propriétés fondamentales de la transformée de Laplace et son inverse des fonctions remarquables. Ainsi, on représente des définitions de la transformation de Laplace de la dérivée et l'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville et de Caputo qu'on aura besoin dans notre travaille.

Dans le troisième chapitre de ce mémoire on utilise la transformation de Laplace associé à la dérivation et l'intégrale fractionnaire pour résoudre des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Enfin, ce mémoire se termine par une brève bibliographie.

Chapitre 1

Calcul fractionnaire

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions et définitions des fonctions spécifiques utiles : fonction Gamma, Bêta, Mittag-Leffler. Ensuite, nous nous intéressons au calcul d'intégral et de dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et de Caputo. Ces outils permettent de modéliser des phénomènes complexes en science et ingénierie. (Voir $[2, 3, 7, 8, 12, 13]$).

1.1 Notion de base sur la théorie fractionnaire

Dans cette section nous allons rappeler et introduire quelques éléments nécessaires qui nous permettons d'étudier les notions de base sur le calcul fractionnaire.

1.1.1 La fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma qui prolonge la factoriel aux valeurs réelles et complexes. Rappelons la définition et quelques propriétés concernant cette fonction.

Définition 1.1 *La fonction Gamma d'Euler, notée* $\Gamma(\alpha)$ *est définie pour* $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$

par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} \exp(-t)t^{\alpha-1}dt. \tag{1.1}$$

Quelques propriétés de la fonction Gamma

Corollaire 1.1 *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$, $n \in \mathbb{N}$, *la fonction* $\Gamma(\alpha)$ *vérifier :*

1. $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
2. $\Gamma(n+1) = n!$.
3. $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}$.

Preuve. *Donnons la démonstration de 1 On a*

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} \exp(-t)t^{\alpha+1-1}dt.$$

En intégrant par partie, on trouve :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \exp(-t)t^{\alpha+1-1}dt &= \lim_{b\to+\infty}\lim_{a\to 0^+} \int_a^b \exp(-t)t^{\alpha}dt \\
&= \lim_{b\to+\infty}\lim_{a\to 0^+} \left[-(-t^{\alpha}\exp(-t)]_a^b + \alpha\int_a^b \exp(-t)t^{\alpha-1}dt\right] \\
&= \alpha\int_0^{+\infty} \exp(-t)t^{\alpha-1}dt = \alpha\Gamma(\alpha).
\end{aligned}$$

Donc

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

■

1.1.2 La fonction Bêta

La fonction Bêta est une fonction fondamentale en calcul fractionnaire, et elle est particulièrement importante lorsqu'elle est combinée avec la fonction Gamma.

Définition 1.2 *La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie par :*

$$B\left(p,q\right)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt \qquad \mathrm{Re}(p)>0 \quad et \quad \mathrm{Re}(q)>0. \tag{1.2}$$

Le changement de variable $u=1-t$ permet de montrer que la fonction Bêta est symétrique c'est-à-dire que $B\left(p,q\right)=B\left(q,p\right)$.

La relation entre la fonction Gamma et Bêta

Proposition 1.1 *La fonction Bêta est relié à la fonction Gamma par la relation suivante :*

$$B\left(p,q\right)=\frac{\Gamma\left(p\right)\Gamma\left(q\right)}{\Gamma\left(p+q\right)} \qquad \mathrm{Re}(p)>0 \quad et \quad \mathrm{Re}(q)>0. \tag{1.3}$$

Preuve. *Voir* [4]. ■

Proposition 1.2 *La fonction Bêta possède la forme trigonométrique suivante :*

$$B\left(p,q\right)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\theta\right)^{2p-1}\left(\cos\theta\right)^{2q-1}d\theta.$$

Preuve. Dans la formule (1.2) on pose $t=\sin^2\theta$, $1-t=\cos^2\theta$, $dt=2\sin\theta\cos\theta d\theta$

$$\begin{aligned} B\left(p,q\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2\theta\right)^{p-1}\left(\cos^2\theta\right)^{q-1}2\sin\theta\cos\theta d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\theta\right)^{2p-1}\left(\cos\theta\right)^{2q-1}d\theta. \end{aligned}$$

■

Exemple 1.1 *Pour $p=q=\frac{1}{2}$, $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi$ et par suite $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. On a :*

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1\right)}=\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right),$$

d'où

$$\begin{aligned}\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) &= B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^0 (\cos\theta)^0 d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 2\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi \implies \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

1.1.3 Fonction de Mittag-Leffler

La fonction exponentielle $\exp(z)$, joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La généralisation de la fonction exponentielle à un seul paramètre a été introduite par G.M. Mittag-Leffler et désignée par la fonction suivante :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \qquad (\alpha > 0). \tag{1.4}$$

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette dernière a été introduite par Agarwal et elle est définie par le développement en série suivant :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \qquad (\alpha > 0, \beta > 0). \tag{1.5}$$

Exemple 1.2 *Pour des valeurs spéciales de α et β on a :*

1. $E_1(z) = E_{1.1=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp(z)$.
2. $E_{1.2}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{\exp(z)-1}{z}$.
3. $E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z)$.

1.1.4 Fonctions de Bessel

Nous définissons une fonction de Bessel d'ordre n par

$$J_n(t) = \frac{t^n}{2^n\Gamma(n+1)}\left\{1 - \frac{t^2}{2(2n+2)} + \frac{t^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} - \cdots\right\}. \qquad (1.6)$$

Proposition 1.3 *Voici quelques propriétés importantes des fonctions de Bessel :*

1. $J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t)$ *si* n *est un entier positif.*
2. $J_{n+1}(t) = \frac{2n}{t} J_n(t) - J_{n-1}(t)$.
3. $\frac{d}{dt}\{t^n J_n(t)\} = t^n J_{n-1}(t)$. *Si* $n = 0$, *nous avons* $J_0'(t) = -J_1(t)$.
4. $\exp(\frac{1}{2}t(u - \frac{1}{u})) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t)u^n$ *qui est appelée fonction génératrice des fonctions de Bessel.*

Preuve. Pour montrer $J_0'(t) = -J_1(t)$, en posant $n = 0$ dans l'équation (1.6), il vient

$$\begin{aligned} J_0(t) &= 1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{2^2 4^2} - \frac{t^6}{2^2 4^2 6^2} + \cdots \\ &\Rightarrow J_0'(t) = -\frac{t}{2} + \frac{t^3}{2^2 4} - \frac{t^5}{2^2 4^2 6} + \cdots, \end{aligned}$$

en posant $n = 1$ dans l'équation (1.6), on obtient

$$\begin{aligned} J_1(t) &= \frac{t}{2\Gamma(2)}\left\{1 - \frac{t^2}{2.4} + \frac{t^4}{2.4^2.6} - \cdots\right\} \\ &= \frac{t}{2} - \frac{t^3}{2^2 4} + \frac{t^5}{2^2 4^2 6} - \cdots. \end{aligned}$$

Ainsi

$$J_0'(t) = -J_1(t).$$

■

1.2 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.3 *On appelle intégrale fractionnaire de* f *d'ordre* $\alpha \in \mathbb{C}$ $(\mathrm{Re}(\alpha) > 0)$, *et on la note* I_a^α *la fonction définie par :*

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \tag{1.7}$$

où $\Gamma(\alpha)$ *est la fonction Gamma.*

1.2.1 Quelques propriétés de l'intégrale fractionnaire au sens de R-L

Proposition 1.4 *Pour toute fonction* $f \in L^1(]a,b[)$ *avec* $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $\mathrm{Re}(\beta) > 0$ *on a :*

1. $I_a^0 f(t) = f(t)$.
2. *L'opérateur intégrale* I_a^α *est linéaire.*
3. $I_a^\alpha f \in L^1(]a,b[)$.
4. $I_a^\alpha \left(I_a^\beta f\right) = I_a^\beta \left(I_a^\alpha f\right) = I_a^{\alpha+\beta} f$.

Preuve. 3. Soit $f \in L^1(]a,b[)$ et $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$,

$$\begin{aligned}
\left|\left(I_a^\alpha f\right)(t)\right| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau\right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left|(t-\tau)^{\alpha-1}\right| |f(\tau)| \, d\tau \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sup_{t \in]a,b[} \left|(t-\tau)^{\alpha-1}\right| \int_a^t |f(\tau)| \, d\tau \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Puisque $f \in L^1(]a,b[)$, donc $I_a^\alpha f$ existe et par suite $I_a^\alpha f \in L^1(]a,b[)$.

4. Soient $f \in L^1(]a,b[)$ et $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $\mathrm{Re}(\beta) > 0$. On a par définition

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha \left(I_a^\beta f(t) \right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left(I_a^\beta f \right)(s) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \int_a^s (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau) \left[\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} ds \right] d\tau,
\end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable $s = \tau + (t-\tau)y$, $0 \leq y \leq 1$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\left[I_a^\alpha \left(I_a^\beta f \right) \right](t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} dy d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} f(\tau) d\tau \\
&= \left(I_a^{\alpha+\beta} f \right)(t).
\end{aligned}$$

■

Exemple 1.3 *Considérons la fonction $f(t) = (t-a)^m$, calculons l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville*

$$I_a^\alpha (t-a)^m = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-a)^m d\tau.$$

Pour évaluer cette intégrale, on effectue le changement de variable $\tau = a + (t-a)s$, $0 \leq s \leq 1$ alors :

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha (t-a)^m &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+m} \int_0^1 s^m (1-s)^{\alpha-1} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+m} B(m+1,\alpha) \\
&= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)} (t-a)^{\alpha+m}. \qquad (1.8)
\end{aligned}$$

Cas particulier : Intégrale d'ordre un-demi d'une fonction

Définition 1.4 *On appelle intégrale d'ordre un-demi d'une fonction, notée par* $\left(I^{\frac{1}{2}}f\right)(t)$,

$$\left(I^{\frac{1}{2}}f\right)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

Interprétation physique de l'intégrale d'ordre un-demi

Pour comprendre le sens d'une intégrale d'ordre un-demi, nous allons l'expliquer à travers un exemple qui est représenté par l'équation de la chaleur.

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = g(t), \quad t > 0, \ y \geq 0, \tag{1.9}$$

$$f(0,t) = 0, \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y,t) \to 0 \ \text{ si } \ y \to +\infty, \tag{1.11}$$

où g est une fonction donnée qui représente une source de chaleur.

Les ingénieurs sont directement intéressés par le flux de chaleur $\varphi(t)$ à la paroi, donné par la loi de Fourier :

$$\varphi(t) = -\mu \frac{\partial f}{\partial y}(0,t), \qquad t > 0,$$

où μ est la vitesse de diffusion.

La solution analytique du problème (1.9)-(1.11), on la trouve dans [11] donnée par :

$$\phi(t) = -\frac{\mu}{\pi} \int_0^t \frac{g(\theta)}{\sqrt{t-\theta}} d\theta.$$

On remarque que cette solution est exactement la définition d'une intégrale d'ordre un-demi.

1.3 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.5 *Soit $f \in L^1[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ $(\mathrm{Re}(\alpha) \in]n-1, n[)$, $n \in \mathbb{N}$, la dérivée fractionnaire de R-L d'ordre α de f de borne inferieure a est définie par :*

$$D_{a^+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \tag{1.12}$$

$$= D^n \left\{ I_{a^+}^{n-\alpha} f(t) \right\}, \tag{1.13}$$

où $D^n = \frac{d^n}{dt^n}$ est la dérivée d'ordre entier $n = [\alpha] + 1$.

Cas particuliers

1. $D_{a^+}^0 f(t) = D^n \left\{ I_{a^+}^n f(t) \right\} = f(t)$ $D_{a^+}^0$ est l'opérateur identité.

1.3.1 Dérivées fractionnaires au sens de R-L de quelques fonctions usuelles

Proposition 1.5 *Soit $f(t) = (t-a)^m$ avec $m > -1$.*

En effet, par définition on a

$$D_{a^+}^{\alpha} (t-a)^m = \frac{d^n}{dt^n} \left[I_{a^+}^{n-\alpha} (t-a)^m \right].$$

Appliquons le résultat (1.8), on trouve

$$\begin{aligned} D_{a^+}^{\alpha} (t-a)^m &= \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n-\alpha+m+1)} (t-a)^{n-\alpha+m} \right] \\ &= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n-\alpha+m+1)} \frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n-\alpha+m}, \end{aligned} \tag{1.14}$$

on a

$$\frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n-\alpha+m} = \frac{\Gamma(m+1+n-\alpha)}{\Gamma(-\alpha+m+1)} (t-a)^{m-\alpha}. \tag{1.15}$$

Par substitution de (1.15) *dans* (1.14), *on obtient*

$$D_{a^+}^{\alpha}(t-a)^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)}(t-a)^{m-\alpha}.$$

Cas particulier

Soit la fonction constante $f(t) = C$, d'après le dernier résultat on trouve

$$D_{a^+}^{\alpha}C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}. \tag{1.16}$$

Théorème 1.1 *Soit f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville existent, pour c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$ alors : $D_{a^+}^{\alpha}(c_1 f + c_2 g)$ existe, on a :*

$$D_{a^+}^{\alpha}(c_1 f + c_2 g) = c_1 D_{a^+}^{\alpha} f(t) + c_2 D_{a^+}^{\alpha} g(t).$$

Proposition 1.6 *Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $f \in L^1[a,b]$, alors l'égalité :*

1. $D_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\alpha} f(t) = f(t)$.
2. $D_{a^+}^{\beta}(I_{a^+}^{\alpha} f(t)) = D_{a^+}^{\beta-\alpha} f(t)$ *si* $0 < \alpha \leq \beta$.

Preuve. 1. En utilisant la formule (1.13) et 4 de la proposition 1.4 on aura :

$$\begin{aligned} D_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\alpha} f(t) &= D^n I_{a^+}^{n-\alpha}\left(I_{a^+}^{\alpha} f(t)\right) \\ &= D^n (I_{a^+}^{n-\alpha} I_{a^+}^{\alpha}) f(t) \\ &= D^n I_{a^+}^{n} f(t) \\ &= f(t). \end{aligned}$$

■

Proposition 1.7 *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est non-commutative, i.e.*

$$D_a^{\alpha} \circ D_a^{\beta} = D_a^{\alpha+\beta} \neq D_a^{\beta} \circ D_a^{\alpha}.$$

Exemple 1.4 *Soient* $\alpha = \frac{1}{2}$ *et* $\beta = \frac{3}{2}$*, la fonction* f *définie par :*

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \quad &\longrightarrow \quad f(t) = t^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On calcule $D_0^{\frac{1}{2}}f$*,* $D_0^{\frac{3}{2}}f$*,* $D_0^{\frac{1}{2}}D_0^{\frac{3}{2}}f$ *,* $D_0^{\frac{3}{2}}D_0^{\frac{1}{2}}f$ *et* $D_0^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}f$*. On a*

$$D_0^{\frac{1}{2}}(t^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}d\tau.$$

Soit $I = \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}d\tau$ *on pose* $\tau = tr$ *dans* (I) *on trouve*

$$\begin{aligned} I &= \int_0^t (1-r)^{-\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}tdr \\ &= t\int_0^t (1-r)^{-\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{2}}dr \\ &= t\int_0^t r^{\frac{3}{2}-1}(1-r)^{\frac{1}{2}-1}dr \\ &= tB(\frac{3}{2},\frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Alors

$$D_0^{\frac{1}{2}}(t^{\frac{1}{2}}) = \frac{d}{dt}\left(t\frac{B(\frac{3}{2},\frac{1}{2})}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(2\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$D_0^{\frac{3}{2}}(t^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d^2}{dt^2}\left[tB(\frac{3}{2},\frac{1}{2})\right] = 0.$$

D'où

$$\left(D_0^{\frac{1}{2}}D_0^{\frac{3}{2}}f\right)(t) = 0. \tag{1.17}$$

$$\left(D_0^{\frac{3}{2}}D_0^{\frac{1}{2}}f\right)(t) = D_0^{\frac{3}{2}}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right] = -\frac{t^{-\frac{3}{2}}}{4}. \tag{1.18}$$

$$\left(D_0^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}f\right)(t) = (D^2f)(t) = -\frac{t^{-\frac{3}{2}}}{4}. \tag{1.19}$$

Alors d'après (1.17) *et* (1.18) *on a*

$$D_0^\alpha D_0^\beta f \neq D_0^\beta D_0^\alpha f.$$

1.4 Dérivée fractionnaire de Caputo

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est très utile en mathématiques, mais elle a un problème : la dérivée d'une constante n'est pas nulle et les conditions initiales utilisent des dérivées fractionnaires. Caputo propose une nouvelle définition où la dérivée d'une fonction constante est nulle et les conditions initiales sont exprimées par des dérivées d'ordre entier.

Définition 1.6 *Soit* $\mathrm{Re}(\alpha) \in]n-1, n[, n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f \in C^n([a,b])$. *On appelle dérivée fractionnaire d'ordre* $\alpha \in \mathbb{C}$ *au sens de caputo de* f *notée* ${}^cD_a^\alpha$, *la fonction définie par*

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha f(t) &= I_a^{n-\alpha}\left[D^n f(t)\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)ds, \qquad (n = [\mathrm{Re}(\alpha)]+1, t > a), \end{aligned}$$

on note ${}^cD_a^\alpha$ *par* ${}^cD^\alpha$.

Exemple 1.5 *On considère la fonction* f *définie par*

$$f(t) = (t-a)^m, t \in [a,b] \qquad \text{où } m \geq 0.$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\alpha \geq 0$ *tel que* $\alpha \in [n-1, n[$, $m \geq 0$ *nous avons*

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha (t-a)^m &= I_a^{n-\alpha}\left[D^n (t-a)^m\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}\left[(s-a)^m\right]^{(n)} ds. \end{aligned}$$

On sait que

$$\left[(s-a)^m\right]^{(n)} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}(s-a)^{m-n},$$

et donc

$$
{}^{c}D_a^{\alpha}(t-a)^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(m-n+1)} \underbrace{\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}(s-a)^{m-n}ds.}_{I} \tag{1.20}
$$

En effectuant le changement de variable suivant $s = a + (t-a)\tau$ *avec* $0 \leq \tau \leq 1$, *donc* $ds = (t-a)d\tau$, *dans l'intégrale* I, *on obtient*

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 (t-a-(t-a)\tau)^{n-\alpha-1}(a+(t-a)\tau-a)^{m-n}(t-a)d\tau \\
&= \int_0^1 [(t-a)(1-\tau)]^{n-\alpha-1}[(t-a)\tau]^{m-n}(t-a)d\tau \\
&= (t-a)^{m-\alpha}\int_0^1 \tau^{(m-n+1)-1}(1-\tau)^{n-\alpha-1}d\tau.
\end{aligned}
$$

En tenant compte de (1.2) *puis la relation* (1.3), *on aura*

$$
\begin{aligned}
I &= (t-a)^{m-\alpha}\beta(m-n+1, n-\alpha) \\
&= (t-a)^{m-\alpha}\frac{\Gamma(m-n+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(m-\alpha+1)}.
\end{aligned}
$$

En retournant à la formule (1.20), *on obtient alors*

$$
{}^{c}D_a^{\alpha}(t-a)^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(m-n+1)}\left[(t-a)^{m-\alpha}\frac{\Gamma(m-n+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(m-\alpha+1)}\right].
$$

Ainsi, on obtient la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α *de la fonction* f, *telle que*

$$
{}^{c}D_a^{\alpha}(t-a)^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)}(t-a)^{m-\alpha}.
$$

1.5 Relation entre la dérivée de Caputo et la dérivée de Riemann-Liouville

Proposition 1.8 *Si* $\mathrm{Re}(\alpha) \in]n-1,\ n[, n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f \in C^n([a,b])$, *la relation entre la dérivée de R-L et celle de Caputo est donnée par*

$$^cD_a^\alpha f(t) = D_a^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(t-a)^k \right] \tag{1.21}$$

$$= D_a^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t-a)^{k-\alpha} \tag{1.22}$$

avec $n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1, t > a$.

Cas particulier

Lorsque $\mathrm{Re}(\alpha) \in]0, 1[$, on a

$$^cD_a^\alpha f(t) = D_a^\alpha f(t) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}. \tag{1.23}$$

Remarque 1.1 *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction constante* $f(t) = C$ *est nulle.*

En effet remplaçons (1.16) *dans* (1.23) *on trouve* $^cD_a^\alpha C = 0$.

Chapitre 2

Transformation de Laplace

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la définition de la transformée de Laplace, son inverse et ses propriétés en indiquant quelques fonctions usuelles. Et au cours de cela nous présentons la transformée de Laplace dans le cas fractionnaire. (voir $[5, 6, 9, 11, 12, 15]$).

2.1 Transformée de Laplace

Définition 2.1 *La transformation de Laplace d'une fonction continue f de la variable réelle $t \in [0, +\infty[$ est définie par :*

$$F(p) = L\left[f(t)\right](p) = \int_0^{+\infty} f(t)\exp(-pt)dt, \qquad p \in \mathbb{C}, \tag{2.1}$$

où p, appelé variable de Laplace $(\mathrm{Re}(p) \geq 0)$ et $f(t)$ est appelée l'originale de $F(p)$ qui doit être nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et elle doit être d'ordre exponentiel : $\exists\ M \geq 0$, $\exists\ C \geq 0$

$$|f(t)| \leq C\exp\left(Mt\right) \qquad \textit{pour tout } t \geq t_0.$$

2.1.1 Transformée de Laplace de quelques fonctions usuelles

Transformée de Laplace de quelques fonctions usuelles donnée dans le tableau suivant :

$f(t)$	$L\left[f(t)\right](p) = F(p)$
1	$\frac{1}{p}$, $\quad \mathrm{Re}\,(p) > 0$
t	$\frac{1}{p^2}$, $\quad \mathrm{Re}\,(p) > 0$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{n+1}}$, $\quad \mathrm{Re}\,(p) > 0$
$\exp(at)$	$\frac{1}{p-a}$, $\quad \mathrm{Re}\,(p) > a$
$\sin(at)$	$\frac{a}{p^2+a^2}$, $\quad \mathrm{Re}\,(p) > 0$
$\cos(at)$	$\frac{p}{p^2+a^2}$, $\quad \mathrm{Re}\,(p) > 0$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{p^2-a^2}$, $\quad \mathrm{Re}\,(p) > \|a\|$
$\cosh(at)$	$\frac{p}{p^2-a^2}$, $\quad \mathrm{Re}\,(p) > \|a\|$

2.1.2 Propriétés

Dans cette partie, on va présenter quelques propriétés de cette transformation.

Linéarité

Soit $f, g \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions admettant des transformations de Laplace $F\,(p)$ et $G\,(p)$, et soit α et β deux réels, alors :

$$L\left[\alpha f(t) + \beta g(t)\right](p) = \alpha L\left[f(t)\right](p) + \beta L\left[g(t)\right](p) = \alpha F(p) + \beta G\,(p)\,. \tag{2.2}$$

Translation de la variable p

Si $L\left[f(t)\right](p) = F\,(p)$, alors :

$$L\left[\exp\left(at\right) f(t)\right](p) = F\left(p - a\right). \tag{2.3}$$

Translation de la variable t

Si $L\left[f(t)\right](p) = F(p)$ et $g(t) = \begin{cases} f(t-a) & t > a \\ 0 & t \leq a \end{cases}$ alors :

$$L\left[g(t)\right](p) = \exp\left(-ap\right) F(p). \tag{2.4}$$

Changement d'échelle

Si $L\left[f(t)\right](p) = F(p)$, alors :

$$L[f(kt)](p) = \frac{1}{k} F(\frac{p}{k}). \tag{2.5}$$

Transformée d'un produit de convolution

Si $L\left[f(t)\right](p) = F(p)$ et $L\left[g(t)\right](p) = G(p)$, alors :

$$L\left[(f * g)(t)\right](p) = F(p)\, G(p). \tag{2.6}$$

Transformée des dérivées

Si f est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, si elle est d'ordre exponentiel M et si f' admet une transformée de Laplace, alors :

$$L\left[f'(t)\right](p) = pL\left[f(t)\right](p) - f(0) \qquad \text{pour } \operatorname{Re}(p) > M. \tag{2.7}$$

Si l'on applique plusieurs fois la règle précédente, on trouve, si f est de classe C^2, et f, f' d'ordre exponentiel M :

$$L\left[f''(t)\right](p) = p^2 L\left[f(t)\right](p) - pf(0) - f'(0). \tag{2.8}$$

Et plus généralement, si f est de classe C^n et $f, f', ..., f^{n-1}$ d'ordre exponentiel M :

$$L\left[f^{(n)}(t)\right](p) = p^n L\left[f(t)\right](p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0). \tag{2.9}$$

Transformée d'une primitive

Si $L\left[f(t)\right](p) = F(p)$ alors :

$$L\left[\int_0^t f(u)du\right](p) = \frac{1}{p}F(p). \tag{2.10}$$

Multiplication par t^n : dérivation de la transformée de Laplace

Si $L\left[f(t)\right](p) = F(p)$ alors :

$$L\left[t^n f(t)\right](p) = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n}F(p). \tag{2.11}$$

Division par t

Si $L\left[f(t)\right](p) = F(p)$ et si $\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}$ existe alors :

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right](p) = \int_p^\infty F(u)\,du. \tag{2.12}$$

Théorème de la valeur initiale

Si $L\left[f(t)\right](p) = F(p)$ et si les limites indiquées existent, alors :

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to\infty} pF(p). \tag{2.13}$$

Théorème de la valeur finale

Si $L\left[f(t)\right](p) = F(p)$ et si les limites indiquées existent, alors :

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p). \tag{2.14}$$

2.2 Transformée de Laplace inverse

Comme nous l'avons vu, la transformation de Laplace est très intéressante lorsque l'on veut simplifier des calculs, par exemple sur équation différentielle. Toutefois, cette démarche passe par le calcul de la transformée de Laplace de la solution de l'équation. Il serait bon de pouvoir, ayant obtenu cette fonction, revenir à la fonction de départ. Ceci s'effectue par transformée de Laplace inverse.

Introduisons maintenant la transformée de Laplace inverse :

Si la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ est $F(p)$ c-à-d $L[f(t)](p) = F(p)$, alors $f(t)$ est appelée **transformée de Laplace inverse** de $F(p)$ et nous écrivons

$$f(t) = L^{-1}[F(p)](t)$$

$$f(t) = L^{-1}[F(p)](t) \iff L[f(t)](p) = F(p).$$

De manière similaire à celle de la transformée de Laplace, la transformée de Laplace inverse possède les même propriétés de : linéarité, translation, changement d'échelle, dérivabilité, ...

2.3 Transformation de Laplace de quelques fonctions usuelles fractionnaires

Transformation de Laplace en termes de la fonction Gamma

Proposition 2.1 $L(t^{\alpha-1}) = \frac{\Gamma(\alpha)}{p^{\alpha}} \qquad \forall a \in \mathbb{R}, \alpha > 0.$

En effet, on a :

$$L(t^{\alpha-1}) = \int_0^{+\infty} \exp(-pt) t^{\alpha-1} dt$$

le changement de variable $u = pt$ et $du = pdt$ on trouve

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} \exp(-u)(\frac{1}{p}u)^{\alpha-1}\frac{1}{p}du \\
&= \frac{1}{p^\alpha}\int_0^{+\infty} u^{\alpha-1}\exp(-u)du \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)}{p^\alpha}.
\end{aligned}$$

Proposition 2.2 *En utilisant* (2.3) *on trouve* $L(t^{\alpha-1}\exp(-at)) = \frac{\Gamma(\alpha)}{(p+a)^\alpha}$, $\forall a \in \mathbb{R}, \alpha > 0.$

Transformation de Laplace en termes de la fonction Mittag-Leffler

Remarque 2.1 *Dans les démonstrations suivantes, nous allons utiliser la série géométrique*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{1}{1-r} \qquad \text{où} \quad |r| < 1,$$

et la définition de la fonction Gamma

Proposition 2.3 $L(t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(at^\alpha)) = \frac{1}{p^\alpha - a} \qquad \forall a \in \mathbb{R}, \alpha > 0.$

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
L(t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(at^\alpha)) &= \int_0^{+\infty} \exp(-pt)t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(at^\alpha)dt \\
&= \int_0^{+\infty} \exp(-pt)t^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(at^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}dt \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\int_0^{+\infty} t^{\alpha k+\alpha-1}\exp(-pt)dt.
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $u = pt$ et $du = pdt$ on trouve

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha)} \int_0^{+\infty} (\frac{1}{p}u)^{\alpha k+\alpha-1} \exp(-u)\frac{1}{p}du \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (\frac{a}{p^\alpha})^k \frac{1}{p^\alpha} \\
&= \frac{1}{p^\alpha - a}.
\end{aligned}$$

Proposition 2.4 $L(E_\alpha(-at^\alpha)) = \frac{p^\alpha}{p(p^\alpha+a)}$ $\qquad \forall a \in \mathbb{R}, \alpha > 0.$

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
L(E_\alpha(-at^\alpha)) &= \int_0^{+\infty} \exp(-pt)E_\alpha(-at^\alpha)dt \\
&= \int_0^{+\infty} \exp(-pt) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-at^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+1)}dt \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-a)^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha k} \exp(-pt)dt.
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $u = pt$ et $du = pdt$ on trouve

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-a)^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \int_0^{+\infty} (\frac{1}{p}u)^{\alpha k} \exp(-u)\frac{1}{p}du \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (\frac{-a}{p^\alpha})^k \frac{1}{p} \\
&= \frac{p^\alpha}{p(p^\alpha + a)}.
\end{aligned}$$

Proposition 2.5 $L(1 - E_\alpha(-at^\alpha)) = \frac{a}{p(p^\alpha+a)}$ $\qquad \forall a \in \mathbb{R}, \alpha > 0.$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} L(1 - E_\alpha(-at^\alpha)) &= L(1) - L(E_\alpha(-at^\alpha)) \\ &= \frac{1}{p} - \frac{p^\alpha}{p(p^\alpha + a)} \\ &= \frac{a}{p(p^\alpha + a)}. \end{aligned}$$

Proposition 2.6 $L(t^\alpha E_{1,\alpha+1}(-at)) = \frac{1}{p^\alpha(p-a)}$ $\qquad \forall a \in \mathbb{R}, \alpha > 0.$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} L(t^\alpha E_{1,\alpha+1}(at)) &= \int_0^{+\infty} \exp(-pt) t^\alpha E_{1,\alpha+1}(at) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \exp(-pt) t^\alpha \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k+\alpha+1)} dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{\Gamma(k+\alpha+1)} \int_0^{+\infty} \exp(-pt) t^{\alpha+k} dt. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $u = pt$ et $du = pdt$ on trouve

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{\Gamma(k+\alpha+1)} \int_0^{+\infty} \exp(-u) (\frac{1}{p}u)^{\alpha+k} \frac{1}{p} du \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (\frac{a}{p})^k \frac{1}{p^{\alpha+1}} \\ &= \frac{1}{p^\alpha(p-a)}. \end{aligned}$$

Proposition 2.7 $L(t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)) = \frac{p^{\alpha-\beta}}{p^\alpha - a}$ $\qquad \forall a \in \mathbb{R}, \alpha > 0.$

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
L(t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha})) &= \int_0^{+\infty} \exp(-pt)t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha})dt \\
&= \int_0^{+\infty} \exp(-pt)t^{\beta-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(at^{\alpha})^k}{\Gamma\left(\alpha k+\beta\right)}dt \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a^k}{\Gamma\left(\alpha k+\beta\right)}\int_0^{+\infty} \exp(-pt)t^{\alpha k+\beta-1}dt.
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $u = pt$ et $du = pdt$ on trouve

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a^k}{\Gamma\left(\alpha k+\beta\right)}\int_0^{+\infty} \exp(-u)(\frac{1}{p}u)^{\alpha k+\beta-1}\frac{1}{p}du \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{a}{p^{\alpha}})^k\frac{1}{p^{\beta}} \\
&= \frac{p^{\alpha-\beta}}{p^{\alpha}-a}.
\end{aligned}$$

Le tableau ci-dessous représente la transformée de Laplace des dérivés fractionnaires

$Y(p) = L\left[y(t)\right]$	$y(t) = L^{-1}\left[Y(p)\right]$
$\frac{\Gamma(\alpha)}{p^{\alpha}}$	$t^{\alpha-1}$
$\frac{\Gamma(\alpha)}{(p+a)^{\alpha}}$	$t^{\alpha-1}\exp(-at)$
$\frac{1}{p^{\alpha}-a}$	$t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(at^{\alpha}\right)$
$\frac{p^{\alpha}}{p(p^{\alpha}+a)}$	$E_{\alpha}\left(-at^{\alpha}\right)$
$\frac{a}{p(p^{\alpha}+a)}$	$1-E_{\alpha}\left(-at^{\alpha}\right)$
$\frac{1}{p^{\alpha}(p-a)}$	$t^{\alpha}E_{1,\alpha+1}(at)$
$\frac{p^{\alpha-\beta}}{p^{\alpha}-a}$	$t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha})$

Transformée de Laplace des fonctions de Bessel

(a) D'après la formule (1.6), la fonction de Bessel d'ordre zéro est

$$J_0(t) = 1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{2^2 4^2} - \frac{t^6}{2^2 4^2 6^2} + \cdots$$

D'où

$$\begin{aligned}
L[J_0(t)] &= \frac{1}{p} - \frac{1}{2^2}\frac{2!}{p^3} + \frac{1}{2^2 4^2}\frac{4!}{p^5} - \frac{1}{2^2 4^2 6^2}\frac{6!}{p^7} + \cdots \\
&= \frac{1}{p}\left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2}\right) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\left(\frac{1}{p^4}\right) - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\left(\frac{1}{p^6}\right) + \cdots\right\} \\
&= \frac{1}{p}\left\{\left(1 + \frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}
\end{aligned}$$

et d'après la formule (2.5), on obtient

$$L[J_0(at)] = \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{p^2+a^2}}.$$

(b) Maintenant nous pouvons trouver $L[J_1(t)]$ où $J_1(t)$ est la fonction de Bessel d'ordre un.

D'après la propriété des fonctions de Bessel nous avons $J_0'(t) = -J_1(t)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
L[J_1(t)] &= -L[J_0'(t)] = -[pL[J_0(t)] - 1] \\
&= 1 - \frac{p}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{\sqrt{p^2+1} - p}{\sqrt{p^2+1}}
\end{aligned}$$

et d'après la formule (2.5), on obtient

$$L[J_1(at)] = \frac{1}{a}\frac{\sqrt{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1} - \left(\frac{p}{a}\right)}{\sqrt{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1}} = \frac{\sqrt{p^2+a^2} - p}{a\sqrt{p^2+a^2}}.$$

(c) Alors, à partir de la démonstration par récurrence, on trouve que

$$J_n(at) = \frac{(\sqrt{p^2+a^2}-p)^n}{a^n\sqrt{p^2+a^2}}.$$

Transformée de Laplace de $\sin\sqrt{t}$ **et** $\frac{\cos\sqrt{t}}{t}$

(a) Pour trouver $L\left[\sin\sqrt{t}\right]$, en utilisant la série

$$\sin\sqrt{t} = \sqrt{t} - \frac{\left(\sqrt{t}\right)^3}{3!} + \frac{(\sqrt{t})^5}{5!} - \frac{(\sqrt{t})^7}{7!} + \cdots \quad = t^{\frac{1}{2}} - \frac{t^{\frac{3}{2}}}{3!} + \frac{t^{\frac{5}{2}}}{5!} - \frac{t^{\frac{7}{2}}}{7!} + \quad \cdots$$

La transformée de Laplace alors

$$\begin{aligned}
L[\sin\sqrt{t}] &= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{p^{\frac{3}{2}}} - \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{3!\ p^{\frac{5}{2}}} + \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{5!\ p^{\frac{7}{2}}} - \frac{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}{7!\ p^{\frac{9}{2}}} + \ \cdots \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{3}{2}}}\left\{1 - \left(\frac{1}{2^2p}\right) + \frac{\left(\frac{1}{2^2p}\right)^2}{2!} - \frac{\left(\frac{1}{2^2p}\right)^3}{3!} + \ \cdots\right\} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{3}{2}}}\exp(-\frac{1}{2^2p}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{3}{2}}}\exp(-\frac{1}{4p}).
\end{aligned}$$

(b) Pour trouver $L[\frac{\cos\sqrt{t}}{t}]$, on pose $y(t) = \sin\sqrt{t}$ alors $y'(t) = \frac{\cos\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}$, $y(0) = 0$. D'après le résultat précédent

$$\begin{aligned}
L\left[y'(t)\right] &= \frac{1}{2}L\left[\frac{\cos\sqrt{t}}{t}\right] = PY(p) - y(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{1}{2}}}\exp(-\frac{1}{4p}) \\
L[\frac{\cos\sqrt{t}}{t}] &= \frac{\sqrt{\pi}}{p^{\frac{1}{2}}}\exp(-\frac{1}{4p}).
\end{aligned}$$

2.4 Transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Théorème 2.1 *Soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ et $f \in L^1[0,b]$ pour tout $b > 0$, alors la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de R-L est formulée comme suit :*

$$L\left(I_{0+}^{\alpha} f\right)(p) = p^{-\alpha} L(f)(p).$$

Preuve. Par définition, on a

$$I_{0+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

On remarque qu'on peut écrire $I_{0+}^{\alpha} f$ sous la forme d'une convolution de deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ tq : $g(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$

$$I_{0+}^{\alpha} f(t) = (g * f)(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Alors

$$\begin{aligned} L\left[I_{0+}^{\alpha} f(t)\right](p) &= L\left[\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t)\right](p) \\ &= L\left[\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right](p).L\left[f(t)\right](p). \end{aligned}$$

On sait que

$$L\left[\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right](p) = \frac{1}{p^{\alpha}} = p^{-\alpha}.$$

Donc

$$L(I_{0+}^{\alpha} f)(p) = p^{-\alpha} L(f)(p).$$

■

2.5 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Théorème 2.2 *Si $f \in L^1[0,b], b > 0$, la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de R-L de f est :*

$$L(D_{0^+}^{\alpha} f)(p) = p^{\alpha} (Lf)(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k \left[D_{0^+}^{\alpha-k-1} f(t)\right]_{t=0}$$

avec $n-1 < \alpha < n$, cette transformée de Laplace est bien connue.

Preuve. Par la formule (1.13), on a

$$L(D_{0^+}^{\alpha} f)(p) = L(D^n I_{0^+}^{n-\alpha} f)(p).$$

On sait que :

$$L\left[f^{(n)}(t)\right] = p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k f^{(n-k-1)}(0).$$

En appliquant le Théorème 2.1 et 2 de la proposition 1.6, on trouve

$$\begin{aligned}
&= p^n L(I_{0^+}^{n-\alpha} f)(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k \left[D^{n-k-1}(I_{0^+}^{n-\alpha} f)(t)\right]_{t=0} \\
&= p^n p^{\alpha-n} L(f)(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k \left[D^{n-k-1+\alpha-n} f(t)\right]_{t=0} \\
&= p^{\alpha}(Lf)(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k \left[D_{0^+}^{\alpha-k-1} f(t)\right]_{t=0}.
\end{aligned}$$

■

2.6 Transformée de Laplace de la dérivée de Caputo

Théorème 2.3 *La transformée de Laplace de la dérivée de Caputo est :*

$$L\left[{}^cD_0^\alpha f(t)\right](p) = p^\alpha F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \qquad (n-1<\alpha\leq n).$$

Preuve. *On a :*

$${}^cD_0^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)ds$$

cette expression représente une convolution entre : $h(t) = \frac{t^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}$ *et* $f^{(n)}(t)$, *d'où*

$${}^cD_0^\alpha f(t) = (h * f^{(n)})(t).$$

Alors

$$L({}^cD_0^\alpha f(t)) = L(h(t)).L(f^{(n)}(t)). \tag{2.15}$$

D'une part

$$L(h(t)) = p^{\alpha-n} \qquad \text{car : } L(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}) = \frac{1}{p^\alpha}. \tag{2.16}$$

D'autre part

$$L(f^{(n)}(t)) = p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1} f^{(k)}(0). \tag{2.17}$$

En remplaçant (2.16) *et* (2.17) *dans* (2.15), *on trouve*

$$\begin{aligned} L({}^cD_0^\alpha f(t)) &= p^{\alpha-n}\left[p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1} f^{(k)}(0)\right] \\ &= p^\alpha F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \ . \end{aligned}$$

■

Chapitre 3

Résolution des équations différentielles par la transformée de Laplace

Dans ce chapitre, nous verrons d'abord l'application de la transformée de Laplace aux équations différentielles ordinaires classiques, puis nous étendrons cette application aux équations différentielles fractionnaires utilisant les définitions de Riemann-Liouville et Caputo (voir [11, 12, 15]).

3.1 Résolution d'EDO linéaire

La transformée de Laplace offre une approche systématique pour résoudre les équations différentielles ordinaires linéaires. Contrairement aux méthodes classiques limitées à l'ordre 1 et 2, cette technique s'applique efficacement même aux équations d'ordre supérieur, révélant ainsi toute sa puissance et sa généralité.

3.1.1 Résolution des EDO linéaire d'ordre 1

Exemple 3.1 *Considérons l'EDO linéaire d'ordre 1 non homogène i.e le cas le plus simple qui soit.*

On cherche la solution $y(t)$ de l'équation différentielle :

$$y'(t) + 2y(t) = 5,$$

avec la condition initiale suivant :

$$y(0) = 1.$$

Notons $Y(p)$ la transformée de Laplace de la fonction $y(t)$. Par linéarité la transformée de Laplace du premier membre est :

$$\begin{aligned} L\left[y'(t) + 2y(t)\right] &= L[y'(t)] + 2L[y(t)] \\ &= pL[y(t)] - y(0) + 2L[y(t)] \\ &= pY(p) - y(0) + 2Y(p) \\ &= (p+2)Y(p) - 1. \end{aligned}$$

Donc l'expression de $Y(p)$ en fonction de p est donnée par :

$$(p+2)Y(p) - 1 = \frac{5}{p} \Longleftrightarrow Y(p) = \frac{5+p}{p(p+2)},$$

une décomposition en éléments simples de fraction rationnelle en p donne :

$$Y(p) = \frac{5}{2p} - \frac{3}{2(p+2)},$$

reste à déterminer la transformée inverse de cette expression, par linéarité on sait que :

$$y(t) = \frac{5}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] - \frac{3}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{p+2}\right],$$

on a déjà établi que la transformée de Laplace de 1 *est* $\frac{1}{p}$ *et de* $\exp(-at)$ *est* $\frac{1}{p+a}$, *la solution est finalement donnée par :*

$$y(t) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\exp(-2t).$$

3.1.2 Résolution des EDO linéaire d'ordre 2

Exemple 3.2 *On cherche la solution* $y(t)$ *de l'équation différentielle*

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 4\exp(2t)$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$y(0) = -3, \;\; y'(0) = 5.$$

On note $L\left[y(t)\right] = Y(p)$, *par linéarité la transformée de Laplace de l'équation différentielle est :*

$$L[y''(t)] - 3L[y'(t)] + 2L[y(t)] = 4L[\exp(2t)],$$

alors

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \; pL\left[y'(t)\right] - y'(0) - 3L[y'(t)] + 2L[y(t)] = \tfrac{4}{p-2} \\
&\Longrightarrow \; p(pL[y(t)] - y(0)) - y'(0) - 3(pL[y(t)] - y(0)) + 2L\left[y(t)\right] = \tfrac{4}{p-2} \\
&\Longrightarrow \; p^2Y(p) + 3p - 5 - 3pY(p) - 9 + 2Y(p) = \tfrac{4}{p-2} \\
&\Longrightarrow \; p^2Y(p) - 3pY(p) + 2Y(p) = \tfrac{4}{p-2} + 14 - 3p \\
&\Longrightarrow \; y(p)\left[p^2 - 3p + 2\right] = \tfrac{4}{p-2} + 14 - 3p \\
&\Longrightarrow \; Y(p) = \tfrac{4}{(p^2-3p+2)(p-2)} + \tfrac{14-3p}{p^2-3p+2} \\
&\qquad\quad = \tfrac{-3p^2+20p-24}{(p-1)(p-2)^2}.
\end{aligned}$$

On passe à la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle en p *de*

$\frac{-3p^2+20p-24}{(p-1)(p-2)^2}$, *on obtient :*

$$Y(p) = \frac{-7}{p-1} + \frac{4}{p-2} + \frac{4}{(p-2)^2}.$$

En appliquant la transformée inverse, on obtient :

$$y(t) = -7L^{-1}[\frac{1}{p-1}] + 4L^{-1}\left[\frac{1}{p-2}\right] + 4L^{-1}[\frac{1}{(p-2)^2}] = -7\exp(t) + 4\exp(2t) + 4t\exp(2t).$$

3.1.3 Résolution des EDO linéaire d'ordre 2 à coefficients variables

Exemple 3.3 *On cherche la solution $y(t)$ de l'EDO à coefficients variables suivant :*

$$\begin{cases} ty''(t) + y'(t) + 4ty(t) = 0 \\ y(0) = 3, \; y'(0) = 0. \end{cases}$$

Appliquant la transformée de Laplace sur les membres de l'égalité, et par linéarité on obtient :

$$L\left[ty''(t) + y'(t) + 4ty(t)\right] = 0 \implies L\left[ty''(t)\right] + L\left[y'(t)\right] + 4L\left[ty(t)\right] = 0.$$

On a la propriété suivante :

$$L\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p),$$

alors

$$L\left[ty(t)\right] = -\frac{d}{dp} Y(p) = -Y'(p),$$

et

$$L\left[y'(t)\right] = pY(p) - y(0),$$

et

$$\begin{aligned} L\left[ty''(t)\right] &= -\frac{d}{dp}\left[p^2Y(p) - py(0) - y'(0)\right] \\ &= -2pY(p) - p^2Y'(p) + y(0). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad -2pY(p) - p^2Y'(p) + y(0) + pY(p) - y(0) - 4Y(p) \\ &\Longrightarrow \quad -2pY(p) - p^2Y'(p) + 3 + pY(p) - 3 - 4Y'(p) \\ &\Longrightarrow \quad (p^2+4)Y'(p) + pY(p) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad (p^2+4)\frac{dY}{dp} + pY = 0. \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{dY}{Y} + \frac{p\ dp}{p^2+4} = 0,$$

et en intégrant

$$\ln Y + \frac{1}{2}\ln(p^2+4) = c_1 \qquad ou \qquad Y = \frac{c}{\sqrt{p^2+4}},$$

en inversant, il vient

$$y = cJ_0(2t),$$

pour déterminer c remarquons que $y(0) = cJ_0(0) = c = 3$*. D'où*

$$y = 3J_0(2t).$$

Exemple 3.4 *Considérons l'EDO suivante*

$$\begin{cases} 4ty''(t) + 2y'(t) + y = 0 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

En prenant la transformée de Laplace si $y = L\left[y(t)\right]$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad -4\frac{d}{dp}\left\{p^2Y - py(0) - y'(0)\right\} + 2\left\{pY - y(0)\right\} + Y = 0 \\
&\Longrightarrow \quad 4p^2Y' + (6p-1)Y = 0 \\
&\Longrightarrow \quad Y = \frac{c}{p^{\frac{3}{2}}}\exp(-\frac{1}{4p}).
\end{aligned}$$

Pour des valeurs petites de t, *nous avons* $\sqrt{\sin t} \sim \sqrt{t}$ *et* $L\left[\sqrt{t}\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{3}{2}}}$. *Pour* p *grand,* $Y \sim \frac{c}{p^{\frac{3}{2}}}$. *Il s'ensuit par comparaison que* $c = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. *D'où*

$$Y = \frac{\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{3}{2}}}\exp(-\frac{1}{4p}),$$

en inversant, il vient

$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{3}{2}}}\exp(-\frac{1}{4p})\right] = \sin\sqrt{t}.$$

3.2 Résolution des équations aux dérivées partielles

Exemple 3.5 *Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivantes*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y = 16x + \sin x, \tag{3.1}$$

où $y = y(x,t)$, *avec les conditions* $y(0,t) = 0$, $y(\pi,t) = 16\pi$, $y_t(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}y\left(x,t\right)_{|t=0} = 0$ *et* $y(x,0) = 16x + 12\sin 2x - 8\sin 3x$.

En effet, on pose $Y(x,p) = L\left[y(x,t)\right](p)$ *(transformée de Laplace par rapport à la variable* t*).*

On prend la transformée de Laplace de l'EDP par rapport à la variable t, *on trouve*

$$\left[p^2Y(x,p) - py(x,0) - y_t(x,0)\right] - 4\frac{d^2Y(x,p)}{dx^2} + Y(x,p) = \frac{16x}{p} + \frac{\sin x}{p}.$$

Puisque $y(x,0) = 16x + 12\sin 2x - 8\sin 3x$ *et* $y_t(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} y(x,t)_{|t=0} = 0$, *on trouve l'équation différentielle suivante (du second ordre par rapport à* x*) :*

$$\frac{d^2Y}{dx^2} - \frac{1}{4}\left(p^2+1\right)Y = -\frac{4\left(p^2+1\right)x}{p} - \frac{\sin x}{4p} - 3p\sin(2x) + 2p\sin(3x) \tag{3.2}$$

avec les conditions initiales suivantes

$$Y(0,p) = L\left[y(0,t)\right](p) = L\left[0\right](p) = 0, \tag{3.3}$$

et

$$Y(\pi,p) = L\left[y(\pi,t)\right](p) = 16\pi L\left[1\right](p) = \frac{16\pi}{p}. \tag{3.4}$$

D'après la forme du second membre de l'équation (3.2) [*en tant que fonction de* x] *on déduit qu'une solution particulière de* (3.2) *est de la forme* $Y_P(x,p) = ax + b\sin x + c\sin 2x + d\sin 3x$. *En dérivant et substituant dans* (3.2) *et en égalant les coefficients des termes analogues, on trouve*

$$Y_P(x,p) = \frac{16x}{p} + \frac{\sin x}{p(p^2+5)} + \frac{12p\sin 2x}{p^2+17} - \frac{8p\sin 3x}{p^2+37}.$$

La solution générale de l'équation homogène associée à (3.2) *est de la forme*

$$Y_H(x,p) = c_1\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{p^2+1}x\right) + c_2\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{p^2+1}x\right),$$

où c_1 *et* c_2 *sont des constantes réelles. La solution générale de* (3.2) *est donc*

$$\begin{aligned} Y(x,p) &= Y_H(x,p) + Y_P(x,p) \\ &= c_1\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{p^2+1}x\right) + c_2\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{p^2+1}x\right) + \frac{16x}{p} + \frac{\sin x}{p(p^2+5)} \\ &\quad + \frac{12p\sin 2x}{p^2+17} - \frac{8p\sin 3x}{p^2+37}. \end{aligned}$$

Les conditions initiales portées en $(3.3)-(3.4)$ *donne*

$$0 = Y(0,p) = c_1 + c_2,$$

et

$$\frac{16\pi}{p} = Y(\pi,p) = c_1 \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{p^2+1}\pi\right) + c_2 \exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{p^2+1}\pi\right) + \frac{16\pi}{p}.$$

Donc $c_1 = c_2 = 0$ *et*

$$Y(x,p) = \frac{16x}{p} + \frac{\sin x}{p(p^2+5)} + \frac{12p\sin 2x}{p^2+17} - \frac{8p\sin 3x}{p^2+37}.$$

En prenant la transformée de Laplace inverse, on trouve la solution cherchée

$$y(x,t) = 16x + \frac{\sin x}{5}(1-\cos\sqrt{5}t) + 12\sin 2x\cos\sqrt{17}t - 8\sin 3x\cos\sqrt{37}t.$$

3.3 Résolution des équations différentielles fractionnaire

3.3.1 Résolution des EDF au sens de Riemann-Liouville

Dans cette sous-section, nous allons explorer quelques exemples d'équations différentielles fractionnaires simples de Riemann-Liouville.

Exemple 3.6 *Nous voudrions résoudre l'équation différentielle fractionnaire donnée par :*

$$D_t^{\frac{1}{2}} y(t) = 0$$

puisque $0 \leq p = \frac{1}{2} \leq 1$, *nous allons utiliser la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville pour* $n = 1$ *et prendre la transformée de Laplace des deux côtés. Si nous utilisons également la linéarité de la transformée de Laplace, Cela* *donne*

$$\begin{aligned} L\left[D_t^{\frac{1}{2}}y(t)\right] &= 0 \\ p^{\frac{1}{2}}Y(p) - D_t^{\frac{1}{2}-1}y(0) &= 0 \\ p^{\frac{1}{2}}Y(p) - D_t^{-\frac{1}{2}}y(0) &= 0. \end{aligned}$$

On voit que $D_t^{-\frac{1}{2}}y(0)$ *est la valeur de* $D_t^{-\frac{1}{2}}y(t)$ *évaluée à* $t = 0$. *Si nous supposons que cette valeur existe, nous pouvons définir* $D_t^{-\frac{1}{2}}y(0)$ *égale à* C_1 *pour obtenir*

$$p^{\frac{1}{2}}Y(p) - C_1 = 0.$$

Si nous résolvons ceci pour $Y(p)$ *nous obtenons*

$$Y(p) = \frac{C_1}{p^{\frac{1}{2}}}.$$

En utilisant le tableau de transformation de Laplace des dérivés fractionnaires avec $\alpha = \frac{1}{2}$, *on obtient la solution suivante*

$$\begin{aligned} y(t) &= C_1 L^{-1}\left[\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}\right] \\ &= C_1 \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} t^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Exemple 3.7 *Considérons l'équation différentielle fractionnaire de Riemann-Liouville suivante :*

$$D_t^{\frac{5}{4}}y(t) = 0$$

puisque $1 \leq p = \frac{5}{4} \leq 2$, *nous utilisons la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville pour* $n = 2$ *et prendre la transformée de Laplace des deux* *côtés. Cela donne*

$$\begin{aligned} L\left[D_t^{\frac{5}{4}}y(t)\right] &= 0 \\ p^{\frac{5}{4}}Y(p) - D_t^{\frac{5}{4}-1}y(0) - pD_t^{\frac{5}{4}-2}y(0) &= 0 \\ p^{\frac{5}{4}}Y(p) - D_t^{\frac{1}{4}}y(0) - pD_t^{-\frac{3}{4}}y(0) &= 0. \end{aligned}$$

Supposons que les valeurs initiales existent et notons : $D_t^{\frac{1}{4}}y(0) = C_2$ *et* $D_t^{-\frac{3}{4}}y(0) = C_3$ *alors*

$$p^{\frac{5}{4}}Y(p) - C_2 - pC_3 = 0.$$

En résolvant pour $Y(p)$ *:*

$$Y(p) = \frac{C_2 + pC_3}{p^{\frac{5}{4}}}.$$

nous utilisons encore une fois le tableau, on trouve la transformée da Laplace inverse de $Y(p)$ *et nous concluons que*

$$\begin{aligned} y(t) &= C_2L^{-1}\left[\frac{1}{p^{\frac{5}{4}}}\right] + C_3L^{-1}\left[\frac{1}{p^{\frac{1}{4}}}\right] \\ &= \frac{C_2}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}t^{\frac{1}{4}} + \frac{C_3}{\Gamma(\frac{1}{4})}t^{-\frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

Exemple 3.8 *Maintenant, nous voudrions résoudre l'équation différentielle fractionnaire donnée par*

$$D_t^{\frac{1}{7}}t(t) = ay(t)$$

où a *est une constante .comme* $0 \leq p = \frac{1}{7} \leq 1$*, nous utilisons la transformée de Laplace pour la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville avec* $n = 1$*, on trouve*

$$\begin{aligned} L\left[D_t^{\frac{1}{7}}t(t)\right] &= aL\left[y(t)\right] \\ P^{\frac{1}{7}}Y(p) - D_t^{\frac{1}{7}-1}(0) &= aY(p) \\ P^{\frac{1}{7}}Y(p) - D_t^{-\frac{6}{7}}(0) &= aY(p). \end{aligned}$$

La constante $D_t^{-\frac{6}{7}}(0)$ est la valeur de $D_t^{-\frac{6}{7}}(t)$ en $t = 0$. Si nous supposons que cette valeur existe, et nous l'appelons C_4, alors l'équation devient

$$P^{\frac{1}{7}}Y(p) - C_4 = aY(p).$$

En résolvant cette équation pour $Y(p)$, on arrive à

$$Y(p) = \frac{C_4}{P^{\frac{1}{7}} - a}.$$

Finalement, grâce au tableau, on trouve l'inverse de la transformée de Laplace de $Y(p)$ avec $\alpha = \frac{1}{7}$, puis on conclut que

$$y(t) = C_4 L^{-1}\left[\frac{1}{P^{\frac{1}{7}} - a}\right] = C_4 t^{-\frac{6}{7}} E_{\frac{1}{7},\frac{1}{7}}(at^{\frac{1}{7}}).$$

Exemple 3.9 *Maintenant, nous voudrions résoudre l'équation différentielle fractionnaire donnée par*

$$D_t^{\frac{25}{23}} y(t) = ky(t)$$

où k est une constante. Comme $1 \leq p = \frac{25}{23} \leq 2$, nous utilisons la transformée de Laplace pour la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville avec $n = 2$, on trouve

$$\begin{aligned} L\left[D_t^{\frac{25}{23}} y(t)\right] &= kL\left[y(t)\right] \\ P^{\frac{25}{23}}Y(p) - D_t^{\frac{25}{23}-1} y(0) - pD_t^{\frac{25}{23}-2} y(0) &= kY(p) \\ P^{\frac{25}{23}}Y(p) - D_t^{\frac{2}{23}} y(0) - pD_t^{-\frac{21}{23}} y(0) &= kY(p). \end{aligned}$$

En suivant les mêmes étapes que dans l'exemple précédent, nous supposons que les valeurs de $D_t^{\frac{2}{23}} y(0)$ et $D_t^{-\frac{21}{23}} y(0)$ existent et nous pouvons les prendre égal à C_5 et C_6 respectivement pour obtenir

$$P^{\frac{25}{23}}Y(p) - C_5 - pC_6 = kY(p).$$

Maintenant nous résolvons ceci pour $Y(p)$ nous obtenons

$$Y(p) = \frac{C_{5+}pC_6}{P^{\frac{25}{23}} - k}.$$

Nous utilisons encore une fois le tableau, on trouve la transformée da Laplace inverse de $Y(p)$ et nous concluons que

$$y(t) = C_5 L^{-1}\left[\frac{1}{P^{\frac{25}{23}} - k}\right] + C_6 L^{-1}\left[\frac{p}{P^{\frac{25}{23}} - k}\right] = C_5 t^{\frac{2}{23}} E_{\frac{25}{23},\frac{25}{23}}\left(kt^{\frac{25}{23}}\right) + C_6 t^{-\frac{21}{23}} E_{\frac{25}{23},\frac{2}{23}}(kt^{\frac{25}{23}}).$$

Exemple 3.10 *Considérons le problème de Riemann-Liouville suivant :*

$$\begin{cases} D_t^{\frac{1}{2}} y(t) + y(t) = t, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

En appliquant la transformée de Laplace on obtient :

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad L[D_t^{\frac{1}{2}} y(t)] + L[y(t)] = L[t] \\
&\Longrightarrow \quad p^{\frac{1}{2}} Y(p) - p^{\frac{1}{2}-1} y(0) + Y(p) = \frac{1}{p^2} \\
&\Longrightarrow \quad p^{\frac{1}{2}} Y(p) - p^{-\frac{1}{2}} y(0) + Y(p) = \frac{1}{p^2} \\
&\Longrightarrow \quad Y(p)\left[p^{\frac{1}{2}} + 1\right] = \frac{1}{p^2} + p^{-\frac{1}{2}} = \frac{1 + p^{\frac{3}{2}}}{p^2} \\
&\Longrightarrow \quad Y(p) = \frac{1 + p^{\frac{3}{2}}}{p^2(p^{\frac{1}{2}} + 1)}.
\end{aligned}$$

Après la décomposition de cette expression (on mit : $q = p^{\frac{1}{2}}$) on obtient :

$$\Longrightarrow Y(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{p^2}$$

en utilisant la transformée inverse des deux côtés, on obtient la solution

$$y(t) = L^{-1}(\frac{1}{p}) - L^{-1}(\frac{1}{p^{\frac{3}{2}}}) + L^{-1}(\frac{1}{p^2}) = 1 + t - \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}.$$

3.3.2 Résolution des EDF au sens de Caputo

Dans cette sous-section, nous allons explorer deux exemples d'équations différentielles fractionnaires de Caputo.

Exemple 3.11 *Soit l'équation différentielle fractionnaire suivante :*

$${}^{c}D_0^{\frac{15}{17}} y(t) = cy(t)$$

étant une constante réelle. En appliquant la transformée de Laplace, on aura :

$$L\left[{}^{c}D_0^{\frac{15}{17}} y(t)\right] = cL\left[y(t)\right],$$

on obtient,

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad P^{\frac{15}{17}} Y(p) - p^{\frac{15}{17}-1} y(0) = cY(p) \\
&\Longrightarrow \quad P^{\frac{15}{17}} Y(p) - p^{-\frac{2}{17}} y(0) = cY(p) \\
&\Longrightarrow \quad Y(p)\left[P^{\frac{15}{17}} - c\right] = p^{-\frac{2}{17}} y(0) \\
&\Longrightarrow \quad Y(p) = y(0)\frac{p^{-\frac{2}{17}}}{P^{\frac{15}{17}} - c}.
\end{aligned}$$

En appliquant la transformée inverse pour trouver la solution finale

$$y(t) = y(0)L^{-1}\left[\frac{p^{-\frac{2}{17}}}{P^{\frac{15}{17}} - c}\right]$$

avec ($\alpha = \frac{15}{17}, \alpha - \beta = -\frac{2}{17} \iff \beta = 1$)*, d'après le tableau on obtient*

$$y(t) = y(0)E_{\frac{15}{17},1}(ct^{\frac{15}{17}}).$$

Exemple 3.12 *On considère l'équation différentielle fractionnaire suivante :*

$${}^cD_0^{\frac{5}{4}}y(t) = 0,$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$y(0) = 2,\ y'(0) = 1.$$

En appliquant la transformée de Laplace, on obtient

$$L\left[{}^cD_0^{\frac{5}{4}}y(t)\right] = 0,$$

alors,

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad p^{\frac{5}{4}}y(p) - p^{\frac{5}{4}-1}y(0) - p^{\frac{5}{4}-2}y^{(1)}(0) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad p^{\frac{5}{4}}y(p) - p^{\frac{1}{4}}y(0) - p^{-\frac{3}{4}}y'(0) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad p^{\frac{5}{4}}y(p) - 2p^{\frac{1}{4}} - p^{-\frac{3}{4}} = 0 \\
&\Longrightarrow \quad y(p) = \frac{2p^{\frac{1}{4}} + p^{-\frac{3}{4}}}{p^{\frac{5}{4}}} \\
&\Longrightarrow \quad Y(p) = 2\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}.
\end{aligned}$$

En appliquant la transformée inverse, on aura

$$y(t) = 2L^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right] = 2 + t.$$

Exemple 3.13 *Soit le problème suivant*

$$\begin{cases} {}^cD_0^{\frac{1}{2}}y(t) = 3t \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad L\left[{}^cD_0^{\frac{1}{2}}y(t)\right] = 3L\left[t\right] \\ &\Longrightarrow \quad p^{\frac{1}{2}}Y\left(p\right) - p^{\frac{1}{2}-1}y(0) = 3\frac{1}{p^2} \\ &\Longrightarrow \quad Y(p) = 3\frac{1}{p^{\frac{5}{2}}}. \end{aligned}$$

Finalement, l'application de la transformée inverse de Laplace, donne

$$y(t) = 3L^{-1}\left[\frac{1}{p^{\frac{5}{2}}}\right] = 3\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = 3\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = 3.\frac{4}{3\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}}.$$

Conclusion 3.1 *Dans ce mémoire nous avons discuté l'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et de Caputo ainsi nous avons utilisé la méthode de la transformation de Laplace pour la résolution de certaines équations différentielles fractionnaires.*

Bibliographie

[1] E. Artin, The gamma function. Translated by Michael Butler. Athena Series : Selected Topics in Mathematics. Holt, Rinehart and Winston, New York-Toronto-London, 1964.

[2] G. Doetsch, Guide to the Applications of the Laplace and Z-Transforms, Van Nostrand Reinhold, London, 1971.

[3] G. Doetsch and L. Debnath, Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 7 (2008), no. 8, 631-632.

[4] K. Fridjet and S. Soualah, Dérivée et intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, 2017-2018.

[5] G. Jumarie, Laplace's transform of fractional order via the Mittag-Leffler function and modified Riemann-Liouville derivative. Appl. Math. Lett. 22 (2009), no. 11, 1659–1664.

[6] A. A. Kilbas and S. A. Marzan, Cauchy problem for differential equation with Caputo derivative. Fract. Calc. Appl. Anal. 7 (2004), no. 3, 297–321.

[7] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[8] J.M. Kimeu, Fractional Calculus : Definitions and Applications. Paper 115. 2009. Available online : http ://digitalcommons.wku.edu/theses/115 (accessed on 20 April

2024).

[9] I. Podlubny, Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. Mathematics in Science and Engineering, 198. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1999.

[10] H. Schaefer, Über die Methode der a priori-Schranken. (German) Math. Ann. 129 (1955), 415–416.

[11] H. Sebbar, Étude mathématique et numérique d'un problème aux dérivées fractionnaires par rapport au temps, Mémoire de Master, Université Badji Mokhtar, Annaba, 2022.

[12] M. R. Spiegel, Transformées de Laplace. Serie Schaum, 264, 1980.

[13] P. Torvik and R. Bagley, On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials. J. Appl. Mech. 51 (1984), 294–298.

[14] M. Wellbeer, Efficient numerical methods for fractional differential equations and their. Analytical Bockground, D. Univ Braunschweig, 20 (2010).