République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles Et analyse numérique**

Par :

LAIB Fadia

Intitulé

Étude de la solution d'un problème aux limites pour une équation différentielle ordinaire du troisième ordre à trois points

Dirigé par : Mme ZENKOUFI Lilia

Devant le jury

PRESIDENT	Pr CHAOUI Abderrezak	PROF	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr ZENKOUFI Lilia	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr BOUHADJAR Slimane	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr BENDJAZIA Nassima	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2025

Dédicace

Je tiens à dédier ce modeste travail à :

Mes parents "que ALLAH les protège".

Ma sœur Amira et sa fille Melina "je t'aime, ma sœur".

Tous les membres de ma famille, sans exception, en particulier ma cousine Hazar.

Mes chères amies, en particulier Djihane, Imane, Nada, Hanine, à tous les étudiants de mathématiques.

Enfin, je dédie ce travail à tous ceux qui me sont chers et importants dans ma vie, et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin, et qui m'ont aidé et encouragé à réaliser de ce modeste travail.

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier ALLAH, *qui m'a donné la santé, la volonté et le courage d'achever ce travail.*

Je tiens à remercier mon encadrante Dr ZENKOUFI Lilia*, de m'avoir proposé ce sujet de recherche et d'avoir dirigé mon travail. Je la remercie pour son aide, sa patience, sa disponibilité, son soutien, ses judicieux conseils et toute l'attention qu'elle a portée à ce travail.*

J'adresse mes vifs remerciements au Professeur CHAOUI Abderrezak *pour le grand honneur qu'il me fait de présider le jury de soutenance.*

J'exprime également mes chaleureux remerciements au Docteur BOUHADJAR *Slimane et au* Docteur BENDJAZIA Nassima, *pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'avoir accepté de faire partie de ce jury.*

J'adresse un grand merci à toute ma famille pour tout ce qu'ils ont fait pour ma réussite, en particulier à ma mère Houria, mon père Said, et ma soeur Amira

Enfin, je remercie mes enseignants de l'école primaire, du collège, du lycée, ainsi que ceux de l'Université 8 Mai 1945 Guelma.

ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو إثبات الوجود، الوحدانية والإيجابية للحل لمسألة حدية مرفقة بمعادلة تفاضلية من الدرجة الثالثة وذلك باستعمال المتناوبة غير الخطية لليري شودار، مبدأ التقلص لباناخ و نظرية جيو-كراسنوسالسكي.

تتكون المذكرة من مقدمة و ثلاثة فصول. في الأول ناقشنا و أشرنا إلى بعض أساسيات التحليل الدالي التي سيتم استعمالها فيما بعد. في الفصل الثاني قدمنا بعض النظريات الهامة حول نظرية النقطة الثابتة، مثل نظرية النقطة الثابتة لباناخ، وبروير، وشودر، وأخيرًا قدمنا نظرية النقطة الثابتة لجيو-كراسنوسالسكي. (اقتبست عناصر التحليل هذه من عدة كتب ومقالات مختارة). و يخصص الفصل الثالث لدراسة مسألة حدية من الدرجة الثالثة أين ترد الشروط في ثلاث نقاط من المجال، باستخدام مبدأ التقلص لباناخ ونظرية النقطة الثابتة لجيو-كراسنوسيلسكي. النتائج المحصل عليها تم توضيحها بواسطة أمثلة. ننهي هذه المذكرة بقائمة من المراجع.

الكلمات المفتاحية :

نظرية جيو كراسنوسالسكي، المتناوبة غير الخطية لليري شودار، مبدأ التقلص لباناخ، مسألة حدية، الوحدانية، وجود الحل، إيجابية الحل.

Table des matières

Abstract

The objective of this work is to establish the existence, the uniqueness and the positivity of a solution for a boundary value problem generated by differential equation of third order, using the Leray-Schauder nonlinear alternative, the Banach contraction principle and the Guo-Krasnosel'skii fixed point theorem.

The memory consists of an introduction and three chapters. The first chapter reminds a few basics of functional analysis that will be used later. In the second chapter, we will present some results of fixed point theory, such as : the fixed point theorem of Banach, Brouwer, Schauder and finally, we will discuss the Guo-Krasnosel'skii fixed point theorem. In the last chapter, we studied the existence, uniqueness and positivity of the solution for a third order boundary value problem , where the boundary conditions are imposed in three points. The obtained results are illustrated by examples. We conclude this memory by a bibliography.

Key words : Guo-Krasnosel'skii theorem, Leray-Schauder nonlinear alternative, Banach contraction principle, boundary value problems, Existence of solution, Uniqueness, Positivity of solution.

Résumé

L'objectif de ce travail est d'établir l'existence, l'unicité et la positivité de la solution d'un problème aux limites engendré par une équation différentielle du troisième ordre, en utilisant l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, le principe de contraction de Banach et le théorème du point fixe de Guo-Krasnosel'skii.

Le mémoire se compose d'une introduction et de trois chapitres. Dans le premier, nous avons discuté et mentionné quelques notions de base de l'analyse fonctionnelle qui seront utilisées par la suite. Dans le deuxième, nous présenterons quelques résultats de la théorie du point fixe, tels que : le théorème du point fixe de Banach, Brouwer, Schauder et enfin nous discuterons du théorème du point fixe de Guo-Krasnosel'skii. (Ces éléments d'analyse ont été pris de quelques livres et articles choisis.). Dans le dernier chapitre, nous avons étudié l'existence, l'unicité et la positivité de la solution d'un problème aux limites du troisième ordre, où les conditions aux limites sont imposées en trois points du domaine. Les résultats obtenus sont illustrés par des exemples. Nous clôturons ce mémoire par une bibliographie.

Mots clés : Théorème de Guo-Krasnosel'skii, Alternative non linéaire de Leray-Schauder, Principe de contraction de Banach, Problème aux limites, Existence de la solution, Unicité, Positivité de la solution.

Introduction

Dans ce mémoire, nous s'intéressons à l'étude de l'existence, de l'unicité et de la positivité de la solution d'un problème aux limites pour une équation différentielle ordinaire du troisième ordre, en utilisant les théorèmes de point fixe tels que l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, le principe de contraction de Banach et le théorème de Guo-Krasnosel'skii dans un cône.

L'étude des problèmes aux limites à multi-points engendrés par des équations différentielles ordinaires du second ordre a été lancée par Il'in et Moiseev, voir [5, 6]. Gupta [7] a introduit les problèmes aux limites pour des équations différentielles non linéaires à non résonance. Depuis ces études, des problèmes aux limites à multi-points non linéaires plus généraux ont été étudiés par plusieurs auteurs en utilisant les théorèmes de point fixe, le théorème de continuation de Leray-schauder, l'alternative non-linéaire de Leray-Schauder, la théorie du degré de coïncidence et le théorème du point fixe dans un cône. L'étude de ces problèmes est d'actualité et plusieurs travaux et ouvrages sont consacrés à ce sujet.

Tout au long de ces dernières années, plusieurs auteurs se sont concentrés sur la recherche des conditions qui garantissent l'existence de solutions positives des problèmes aux limites. Le théorème du point fixe de Guo-Krasnosel'skii a été utilisé comme un outil afin d'établir de telles conditions.

Le mémoire se compose d'une introduction et de trois chapitres.

Le premier chapitre se compose notamment des rappels de quelques résultats théoriques, de quelques théorèmes importants sur la théorie du point fixe et des notions de base de l'analyse fonctionnelle qui seront utilisées dans les chapitres qui suivent.

Ces éléments d'analyse on été pris de quelques livres et articles choisis.

Dans le deuxième chapitre, nous présenterons quelques résultats de la théorie du point fixe, tels que : le théorème du point fixe de Banach, de Brouwer, de Schauder et enfin nous discuterons du théorème de point fixe de Guo-Krasnosel'skii.

Ces éléments d'analyse ont été pris de quelques livres et articles choisis.

Dans le dernier chapitre nous nous intéressons à l'étude de problème aux limites du troisième ordre à trois points suivant:

$$\begin{cases} u'''(t) + f(t, u(t), u'(t)) = 0, \quad t \in [0,1], \\ u(0) = u'(0) = 0, \quad \alpha u'(1) = \beta u(\eta), \end{cases}$$

où, $\alpha > 0, \beta > 0, \eta \in]0,1[$ et f est une fonction continue: $f \in C([0,1] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$.

Enfin, nous clôturons ce mémoire par **une bibliographie**.

Chapitre 1

Rappels de quelques notions d'analyse fonctionnelle

Dans ce chapitre, nous allons rappeler quelques définitions et notions de base de l'analyse fonctionnelle, le théorème d'Arzelà-Ascoli, ainsi que des résultats connus que nous allons utiliser dans la suite de notre travail.

Ces éléments d'analyse ont été pris de quelques livres et articles choisis.

1.1 Rappels

L'analyse fonctionnelle est la branche des mathématiques et plus particulièrement de l'analyse qui étudie les espaces de fonctions. Les espaces de base de l'analyse fonctionnelle sont les espaces vectoriels normés complets sur le corps des nombres réels ou des nombres complexes. De tels espaces sont appelés les espaces de Banach. Les espaces de Hilbert constituent un cas particulier important, où la norme est issue d'un produit scalaire.

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé (e.v.n) sur un corps $\Bbbk$ (en général $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), complet pour la distance issue de sa norme.

Soit V un espace vectoriel normé:

Définition 1.1 *Une norme est une application définie sur* V *(e.v.n) à valeurs dans* $\mathbb{R}^+$*, notée* $||.||_V$ *, et satisfaisant les trois propriétés suivantes*:

(*i*) $\|v\|_V = 0 \Leftrightarrow v = 0$,

(*ii*) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall v \in V$, $\|\lambda v\|_V = |\lambda| \ \|v\|_V$,

(*iii*) *Inégalité triangulaire*: $\forall v, w \in V$, $\|v + w\|_V \leq \|v\|_V + \|w\|_V$.

Définition 1.2 *(Ouvert).*

Un ensemble $O \subset V$ *est ouvert dans* V *si* $\forall x \in O$, $\exists\ \varepsilon > 0$, *tel que* $B(x, \varepsilon) \subset O$, *avec* $B(x, \varepsilon) = \{y \in V;\ ||x - y||_V < \varepsilon\}$ *boule ouverte de centre* x *et de rayon* ε.

Définition 1.3 *(Fermé).*

Un ensemble $F \subset V$ *est fermé dans* V *si* $V \backslash F$*est ouvert dans* V.

Définition 1.4 *(Convergence).*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* V. *On dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $l \in V$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N;\ \|u_n - l\|_V \leq \varepsilon.$$

Définition 1.5 *(Convexe).*

On dit qu'une partie A *de* V *est convexe si pour tout* $x, y \in A$, *on a pour tout* $t \in [0,\ 1]$,

$$tx + (1 - t)y \in A.$$

Ce qui signifie que le segment joignant x *et* y *est entrièrement contenu dans* A.

Définition 1.6 *(Espace metrique complet)***.**

On dit que l'espace métrique (V, d) *est complet si et seulement si toute suite de Cauchy d'éléments de* V *converge dans* V.

Définition 1.7 *Soit* $I \subset \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *On dit que l'intervalle* I *est stable relativement à la fonction* f *lorsque* $f(I) \subset I$.

Définition 1.8 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. On dit que x est un point fixe de f lorsque $f(x) = x$.*
En d'autres termes, les points fixes de f sont les solutions, lorsqu'elles existent de l'équation $f(x) = x$.

Définition 1.9 *(Suite de Cauchy).*

Soit (E, d) un espace métrique et $(x_n)_n$ une suite d'élément de E.

On dit que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy si et seulement si:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall p, q \in \mathbb{N},\ p \geq n_0 \ et\ q \geq n_0 \Rightarrow d(x_p, x_q) \leq \varepsilon.$$

Proposition 1.1

1) *Toute suite convergente est de Cauchy.*
2) *Toute suite de Cauchy est bornée.*
3) *Toute suite de Cauchy qui possède une suite extraite convergente est convergente.*

Définition 1.10 *(Ensemble compact).*

Un ensemble $A \subset V$ est compact si de toute suite d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de A.

Proposition 1.2 *Si A est compact, alors A est fermé et borné.*

Proposition 1.3 *Si V est de dimension finie, alors A est compact si et seulement si A est fermé et borné.*

Proposition 1.4 *Si V est compact et si A est une partie fermée de V, alors A est compacte.*

Proposition 1.5 *Tout espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ normé de dimension finie est complet.*

Définition 1.11 *Soient $||.||_{V_1}$ et $||.||_{V_2}$ deux normes sur V. On dit que ces deux normes sont équivalentes s'il existe c_1 et c_2 strictement positives telles que*

$$\forall v \in V,\ c_1 \|.\|_{V_2} \leq \|.\|_{V_1} \leq c_2 \|.\|_{V_2}.$$

Si $\|.\|_{V_1}$, *et* $\|.\|_{V_2}$ *sont deux normes équivalentes sur* V, *on a l'équivalence*:

$$u_n \text{ converge vers } l \text{ suivant } \|.\|_{V_1} \Leftrightarrow u_n \text{ converge vers } l \text{ suivant } \|.\|_{V_2}.$$

Proposition 1.6 *Si* V *est de dimension finie, alors toutes les normes sont équivalentes.*

Proposition 1.7 *Soit* V *un espace vectoriel normé.*

La norme sur V *est une application continue, autrement dit*

la fonction $\varphi : v \in V \longmapsto \|.\|_V \in \mathbb{R}$ *est continue.*

En effet, on a $\|\varphi(v) - \varphi(w)\| \leq \|v - w\|_V$ *et* φ *est lipschitzienne donc continue.*

Définition 1.12 *(Les espaces* L^P*).*

Soit $1 \leq p < +\infty$,

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \text{ mesurable et } |f(x)|^p \in L^1(\Omega)\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = (\int_\Omega |f(x)|^p \, dx)^{\frac{1}{p}}.$$

1.1.1 Applications continues d'un espace compact

Rappelons que toute fonction numérique continue sur un intervalle fermé borné atteint ses bornes inférieure et supérieure. Cette propriété implique que $f([a,b]) = [m, M]$ lorsque $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Définition 1.13 *(Continuité en un point).*

Soient I *un intervalle,* f *une fonction définie sur* I *et* $a \in I$.

On dit que f *est continue en* a *lorsque* f *admet une limite en* a *égale à* $f(a)$.

Définition 1.14 *(Continuité sur un intervalle).*

Soient I un intervalle, f une fonction définie sur I.

On dit que f est continue sur I lorsque f est continue en tout point de I.

Définition 1.15 *(Continuité absolue)***.**

Soit I un intervalle réel, une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est absolument continue si,

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ *tel que pour toute suite finie $([a_n, b_n])_{n\leq N}$ de sous intervalle de I d'interieurs disjoints,*

$$\sum_{n\geq 0}(b_n - a_n) < \eta \Rightarrow \sum_{n\geq 0} \mid f(b_n) - f(a_n) \mid < \varepsilon.$$

Propriétés:

$-$ F est absolument continue sur I, alors elle est continue sur I.

$-$ F est absolument continue sur I, si et seulement s'il existe une fonction intégrabale f sur I (au sens de Lebesgue) telle que:

$$\forall x \in I : F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt.$$

Définition 1.16 *(Continuité uniforme)***.**

Soit I un intervalle réel, une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue si,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x,\ y \in I,\ \ \mid x - y \mid \leq \eta \Rightarrow \mid f(x) - f(y) \mid \leq \varepsilon.$$

Théorème 1.1 [4] *(Théorème des valeurs intermédiaires)*

Soit I un intervalle, a et b appartient à I avec $a < b$, f une application continue sur l'intervalle I, et λ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Alors, il existe (au moins) un réel c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

(Autrement dit: l'équation, $f(x) = \lambda$ admet au moins une solution dans $[a, b]$).

Théorème 1.2 [4] *(Théorème des accroissements finis)*

Soit f est une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe c de $]a,b[$ tel que:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

1.1.2 Théorème d'Arzelà-Ascoli

Nous allons rappeler le théorème d'Arzelà-Ascoli qui concerne les compacts, qui constitue un outil fondamental de l'analyse fonctionnelle [7].

Définition 1.17 *(Uniformément borné).*

Une suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur un intervalle $I = [a,b]$ est uniformément bornée s'il existe un nombre $M > 0$, tel que:

$$|f_n(x)| \leq M, \quad \textit{pour tout} \;\; x \in I \;\; \textit{et}\; n \in \mathbb{N}.$$

Définition 1.18 *Pour toute fonction f_n appartenant à la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et pour tout $x, y \in [a,b]$, la suite est équicontinue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$,*

$$\textit{tel que} \;\; |x-y| < \delta, \;\; \textit{alors} \;\; |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

Définition 1.19 *(Equicontinuité).*

Soit $\mathcal{F}$ une famille d'applications $X \longrightarrow Y$ où X est un espace topologique et Y un espace métrique. On dit que $\mathcal{F}$ est équicontinue si pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in X$ il existe un voisinage V_x de x dans X tel que:

$$d(f(x), f(y)) < \varepsilon \;\textit{pour tout}\;\; f \in F \;\; \textit{et tout}\; y \in V_x.$$

Si X est aussi métrique, $\mathcal{F}$ est dite uniformément équicontinue si pour tout $\varepsilon > 0$ il *existe* $\alpha > 0$ *tel que pour tous* x, y *vérifiant*

$$d(x, y) < \alpha,$$

et tout $f \in \mathcal{F}$, *on ait*

$$d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Théorème 1.3 [4] *(Théorème d'Arzelà-Ascoli).*

Soient (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques et supposons que* X *est compact. Alors, une partie* $\mathcal{F}$ *incluse dans* $C(X, Y)$ *est relativement compacte (i.e, d'adhérence compact) pour la topologie de la convergence uniforme si et seulement si on a les deux conditions suivantes*:

- La famille $\mathcal{F}$ *est unifomément bornée sur* X.

- La famille $\mathcal{F}$ *est équicontinue en tout point de* X.

Autre énoncé

Théorème 1.4 *Soient* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques et supposons que* X *compact. Alors, une partie* $\mathcal{F}$ *incluse dans* $C(X, Y)$ *est relativement compacte (i.e, d'adhérence compact) pour la topologie de la convergence uniforme si et seulement si on a les deux conditions suivantes*:

- La famille $\mathcal{F}$ *est équicontinue en tout point de* X.

- Pour tout $x \in X$ *l'ensemble des* $f(x)$ *pour* $f \in \mathcal{F}$ *est relativement compact;*

i.e, $\mathcal{F}(x) = \{f(x), \quad f \in \mathcal{F}\}$ *est relativement compact pour tout* $x \in X$.

Définition 1.20 *Un opérateur complètement continu est un opérateur linéaire continu entre deux espaces vectoriels topologiques qui transforme toute suite faiblement convergente en une suite fortement convergente, (un opérateur est complètement continu s'il est continu et compact).*

Chapitre 2

Théorie du point fixe

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques résultats de la théorie du point fixe. Nous étudions le théorème du point fixe de Banach, de Brouwer, de Schauder et enfin nous abordons le théorème du point fixe de Guo-Krasnosel'skii. Ces théorèmes sont très importants en mathématiques.

Ces éléments d'analyse ont été pris de quelques livres et articles choisis.

2.1 Théorèmes du point fixe

En analyse, un théorème du point fixe est un résultat qui affirme qu'une fonction f possède au moins un point fixe, sous certaines conditions sur f. Un point fixe d'une fonction f qui est définie dans un espace métrique X vers lui même, est un élément $x \in X$ qui vérifie $f(x) = x$. Ces théorèmes présentent un outil très utile en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles.

Durant ces dernières années, les théorèmes du point fixe sont regardés comme de très puissants et importants outils dans l'étude des phénomènes non-linéaires. Le plus simple théorème de point fixe connu est le théorème de Banach qui est appelé aussi théorème de contraction: "toute contraction d'un espace métrique complet vers lui-même admet un unique point fixe."

En 1912, Brouwer a trouvé une généralisation du théorème de Banach, il affirme que: "une fonction continue de la boule unité fermée dans un espace euclidien de dimension n vers elle-même doit avoir un point fixe". Ce résultat a été généralisé par plusieurs mathématiciens, la plus importante généralisation est obtenue par le mathématicien polonais Juliusz Schauder en 1930 : "toute application continue et compacte d'un sous-ensemble fermé, borné et convexe d'un espace de Banach vers lui-même admet un point fixe". Ce puissant théorème de point fixe intervient surtout dans la démonstration de l'existence de solutions d'une équation différentielle.

Notons que les théorèmes de Brouwer et de Schauder ne s'appliquent pas si la compacité n'a pas lieu. En 1955, Darbo a prouvé que: "toute application Darbo-contractive d'un ensemble borné et convexe d'un espace de Banach vers lui-même admet un point fixe." La généralisation de ce théorème est obtenue par Sadovskii, il affirme que: "toute application condensée d'une partie non vide, fermée, bornée et convexe d'un espace de Banach vers lui-même, admet un point fixe." Parmi les généralisations du théorème de point fixe de Schauder, on cite aussi, le résultat de Schauder-Tychono concernant les espaces localement convexes: "Toute application continue d'un ensemble convexe et compact d'un espace localement convexe possède un point fixe."

Présentons maintenant quelques résultats de la théorie du point fixe.

Définition 2.1 *Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, $f : E \to F$ une application et k un réel positif.*
On dit que f est lipschitzienne si:

$$\forall (x, y) \in E^2,\ d_F\left(f(x), f(y)\right) \leq k\ d_E(x, y).$$

Définition 2.2 *Une application contractante est une application lipschitzienne avec* $0 < k < 1$.

Théorème 2.1 *(Théorème de point fixe).*

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$.

Si $f(I) \subset I$ (I stable relativement à f), alors f admet (au moins) un point fixe sur I. (C'est-à-dire: il existe (au moins) un réel x de I tel que: $f(x) = x$).

Preuve. *Considérons la fonction g définie sur $I = [a, b]$ par :*

$$g(x) = f(x) - x,$$

Montrons que $0 \in g(I)$. Nous avons:

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - a \in g(I), \\ g(b) &= f(b) - b \in g(I), \end{aligned}$$

Où, comme $f(I) \subset I$, nous avons:

$$f(a) \geq a \quad \text{et} \quad f(b) \leq b,$$

c'est-à-dire

$$g(a) \geq 0 \quad \text{et} \quad g(b) \leq 0.$$

D'après le théorème 1.2 des valeurs intermédiaires, il existe un réel $x \in I$ tel que:

$$g(x) = 0,$$

c'est-à-dire

$$f(x) = x.$$

■

2.1.1 Théorème de contraction de Banach

Le théorème du point fixe de Banach, connu aussi sous le nom théorème de contraction de Banach, est un résultat métrique, il garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante, s'applique aux espaces métriques complets et possède de nombreuses applications.

Théorème 2.2 *Soient (E, d) un espace métrique complet et $\varphi : E \longrightarrow E$ une application contractante, (i.e, Lipschitzienne de rapport $k < 1$).*

Alors, φ admet un unique point fixe $a \in E$.

De plus, pour tout point initial $x_0 \in E$, la suite itérée $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} x_0 \in E \quad quelconque \\ x_{p+1} = \varphi(x_p), \end{cases}$$

converge vers a.

Preuve.

1. Existence:

Soit $x_0 \in E$, un point initial quelconque et (x_p) la suite itérée associée. Nous avons:

$$d(x_p, x_{p+1}) = d\left(\varphi(x_{p-1}), \varphi(x_p)\right) \quad p \geq 1.$$

Nous allons prouver que (x_p) est une suite de Cauchy dans E. Pour $p < q$, nous utilisons l'inégalité triangulaire:

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_{p+2}) + ... + d(x_{q-1}, x_q).$$

Puisque φ est une contraction, nous avons:

$$\begin{aligned} d(x_p, x_{p+1}) &= d\left(\varphi(x_{p-1}), \varphi(x_p)\right) \\ &\leq kd(x_{p-1}, x_p), \quad p \geq 1. \end{aligned}$$

En répétant cette inégalité, nous obtenons:

$$d(x_p, x_q) \leq \left(k^p + k^{p+1} + ... + k^{q-1}\right) d(x_0, x_1)$$

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &\leq k^p \left(1 + k + ... + k^{q-p-1}\right) d(x_0, x_1) \\ &\leq k^p \left(\frac{1}{1-k}\right) d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Nous déduisons alors que (x_p) est une suite de Cauchy. Comme (E, d) est complet, la suite (x_p) converge vers un point limite $a \in E$.

Par ailleurs puisque φ est une contraction, nous avons:

$$a = \lim_{p\to\infty} x_p = \lim_{p\to\infty} \varphi(x_{p-1}) = \varphi\left(\lim_{p\to\infty} x_{p-1}\right) = \varphi(a).$$

Nous avons donc prouvé que φ admet un point fixe a dans E $(i.e,\ \varphi(a) = a)$.

2. Unicité:

Supposons qu'il existe $a, b \in E$, $a \neq b$, tels que nous avons $\varphi(a) = a$ et $\varphi(b) = b$. Alors,

$$d(a, b) = d(\varphi(a), \varphi(b)) \leq kd(a, b),$$

ce qui implique que: $d(a, b) = 0$, i.e, $a = b$. (puisque $k < 1$) . ■

Les hypothèses de ce théorème sont essentielles et si nous en négligeons seulement une, le point fixe n'existe pas.

Contre-exemples.

Les exemples suivants montrent que chacune des hypothèses du théorème est réellement nécessaire.

(**1**) X n'est pas stable relativement à f :

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, définie sur $X = [0, 1]$.

Où, X est fermé dans $\mathbb{R}$, est complet car $\mathbb{R}$ est complet.

De plus,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1 \\ \sup_{x\in X}\left|f^{'}(x)\right| &< 1, \text{ donc } f \text{ est contractante.} \end{aligned}$$

Et d'après le théorème de contraction de Banach, f n'a pas de point fixe car

$$f([0,1]) = \left[1, \sqrt{2}\right],$$

c'est-à-dire que, X n'est pas stable par f.

(**2**) f n'est pas contractante:

Soit $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, définie sur $X = [0, +\infty[$.

Nous avons, $f : X \to X$ et X est un fermé de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ est complet donc X est complet.

Mais,

$$\sup_{x\in X}|f'(x)| = 1$$

donc d'après le théorème de contraction de Banach f n'est pas contractante, alors f n'a pas de point fixe.

(**3**) X n'est pas complet:

Soit $f(x) = \frac{\sin(x)}{2}$, définie sur $X = \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Nous avons,

$$\begin{aligned} f\left(\left]0, \frac{\pi}{4}\right]\right) &= \left]0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right] \subset \left]0, \frac{\pi}{4}\right], \\ \sup_{x\in X}\left|f^{'}(x)\right| &= \frac{1}{2} < 1, \text{ donc } f \text{ est contractante.} \end{aligned}$$

Mais, X n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ donc n'est pas complet alors, d'après le théorème de contraction de Banach f n'a pas du point fixe.

2.1.2 Théorème de Brouwer

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique. Il fait partie de la grande famille des théorèmes du point fixe. Il existe plusieurs formes de ce théorème selon le contexte d'utilisation. Ce théorème donne l'existence (mais pas nécessairement l'unicité) d'un point fixe pour une fonction continue sur une boule fermée dans un espace de dimension finie.

Théorème 2.3 *Soit K une partie non vide, compacte et convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : K \to K$ une fonction continue. Alors, il existe $x \in K$ tel que: $f(x) = x$.*

Remarque 2.1 *Les parties convexes et compactes de $\mathbb{R}$ sont les segments.*

Dans le cas $n = 1$, le théorème de Brouwer prend donc la forme particulière suivante:

Théorème 2.4

Si $f : [a, b] \to [a, b]$ est continue, alors il existe $x \in [a, b]$ tel que: $f(x) = x$.

Preuve. Si f est continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$ lui-même, la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x \geq 0$ est continue, prend en a la valeur $f(a) - a \geq 0$ et en b la valeur $f(b) - b \leq 0$.

D'après le *Théorème des valeurs intermédiaires*, la fonction g s'annule en un point x_0, qui est un point fixe de f. ■

Remarque 2.2 1. *L'hypothèse " I fermé " n'est là que pour assurer que $x_0 \in I$. Si on sait déjà, par ailleurs que $x_0 \in I$, cette hypothése devient inutile.*

2. *Le théorème du point fixe de Banach ne s'applique pas si l'on remplace l'hypothèse "f contractante sur I" par l'hypothèse "f 1-lipschitzienne sur I".*

Voici, ***un exemple***:

Soit $I = [1, +\infty[$ et

$$f : I \to I$$

telle que,

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

Soient x et y dans I avec $x < y$.

Comme la fonction f est croissante sur $[1, +\infty[$, nous avons:

$$|f(y) - f(x)| \leq f(y) - f(x)$$

donc,

$$|f(y) - f(x)| \leq y - x + \frac{x-y}{xy}$$

alors,

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq y - x \\ &\leq |y - x| . \end{aligned}$$

Ce qui prouve que f est 1-lipschitzienne sur I.

Cependant, f n'a pas de point fixe sur I (L'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution).

2.1.3 Théorème de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach.

Théorème 2.5 *Soit K un sous ensemble non vide, convexe et compact dans un espace de Banach E. Alors toute application continue $f : K \to K$ possède un point fixe.*

Preuve. Soit $f : K \to K$ une application continue. Comme K est compact, f est uniformément continue, donc si on fixe $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout x, $y \in K$, nous ayons

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \epsilon, \text{ dès que } \|x - y\| \leq \delta$$

De plus, il existe un ensemble fini des points $\{x_1, ..., x_p\} \subset K$ tel que les boules ouvertes de rayon δ centrées aux x_j recouvrent K,

$i.e$,

$$K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p} B\left(x_j, \delta\right).$$

Si nous désignons $L := Vect\left(f(x_j)\right)_{1 \leq j \leq p}$, alors L est de dimension finie et, $K^* := K \cap L$ est compact convexe de dimension finie.

Pour $1 \leq j \leq p$, nous définissons la fonction continue $\psi_j : E \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\psi_j\left(x\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \|x - x_j\| \geq \delta, \\ 1 - \frac{\|x - x_j\|}{\delta} & \text{sinonn.} \end{cases}$$

Et nous voyons que, ψ_j est strictement positive sur $B\left(x_j, \delta\right)$ et nulle dehors.

Nous avons donc, pour tout $x \in K$, $\sum\limits_{j=1}^{p} \psi_j\left(x\right) > 0$, et donc nous pouvons définir sur K les fonctions continues positives φ_j par :

$$\varphi_j\left(x\right) = \frac{\psi_j\left(x\right)}{\sum\limits_{k=1}^{p} \psi_k\left(x\right)}$$

pour lesquelles nous avons $\sum\limits_{j=1}^{p} \varphi_j\left(x\right) = 1$, pour tout $x \in K$.

Nous posons alors, pour $x \in K$,

$$g\left(x\right) = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j\left(x\right) f\left(x_j\right).$$

g est continue (car elle est la somme des fonctions continues) et prend ses valeurs dans K^*, (car $g(x)$ est un barycentre des $f\left(x_j\right)$).

Donc, si nous prenons la restriction $g_{/K^*} : K^* \to K^*$, g possède un point fixe $y \in K^*$. De plus,

$$\begin{aligned} f(y) - y &= f(y) - g(y) = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) f(y) - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) f(x_j), \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y)(f(y) - f(x_j)). \end{aligned}$$

Or si, $\varphi_j(y) \neq 0$, alors

$$\|y - x_j\| < \delta,$$

et donc,

$$||f(y) - f(x_j)|| < \epsilon.$$

Donc, nous avons pour tout j,

$$\left\|\varphi_j(y)(f(y) - f(x_j))\right\| \leq \epsilon\varphi_j(y),$$

et donc,

$$\|f(y) - y\| \leq \sum_{j=1}^{p} \left\|\varphi_j(y)(f(y) - f(x_j))\right\| \leq \sum_{j=1}^{p} \epsilon\varphi_j(y) = \epsilon.$$

Donc, pour tout entier m, nous pouvons trouver un point $y_m \in K$ tel que

$$\|(f(y_m) - y_m)\| < 2^{-m}.$$

Et puisque K est compact de la suite $(y_m)_{m\in\mathbb{Z}}$, nous pouvons extraire une sous-suite (y_{m_k}) qui converge vers un point $y^* \in K$.

Alors, f étant continue, la suite $(f(y_{m_k}))$ converge vers $f(y^*)$ et nous concluons que

$$f(y^*) = y^*,$$

i.e, y^* est un point fixe de f sur K. ■

Théorème 2.6 [1] *(L'alternative non linéaire de Leray-Schauder).*

Soit X un espace de Banach, Ω un sous ensemble ouvert borné de X, avec $0 \in \Omega$. Soit $T : \overline{\Omega} \to X$ un opérateur complètement continue, alors:

(i) Il existe $x \in \partial\Omega$, $\lambda > 1$ telle que: $T(x) = \lambda x$.

(ii) Ou bien, il existe un point fixe $x^\star \in \overline{\Omega}$.

2.2 Théorème du point fixe dans un cône

Dans l'ouvrage [7], D. Guo, V. Lakshmikantham a démontré le théorème de Guo-Krasnosel'skii qui est un des plus important outils concentrés sur la recherche des conditions qui garentissent l'existence de solutions positives des problèmes aux limites, il a été l'objet de plusieurs articles de recherche et possède des très nombreuses applications intéressantes en analyse non linéaire.

Définition 2.3

Soit E un espace de Banach. Un sous-ensemble convexe, fermé et non vide $K \subset E$ est un cône s'il vérifie les deux conditions suivantes:

(i) $x \in K$ et $\lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda x \in K$.

(ii) $x \in K$ et $-x \in K \Rightarrow x = 0$.

Théorème 2.7 *(Guo-Krasnosel'skii).*

E un espace de Banach et $K \subset E$ un cône. Supposons que Ω_1, Ω_2 deux sous ensembles ouverts de E avec $0 \in \Omega_1$, $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$ et soit

$$\mathcal{A} : K \cap \left(\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1\right) \to K,$$

un opérateur complètement continu telles que:

(i) $\|\mathcal{A}u\| \leq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_1$ et $\|\mathcal{A}u\| \geq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_2$; ou

(ii) $\|\mathcal{A}u\| \geq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_1$ et $\|\mathcal{A}u\| \leq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_2$.

Alors $\mathcal{A}$ admet un point fixe dans $K \cap \left(\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1\right)$.

Chapitre 3

Problème aux limites du troisième ordre à trois points

Dans ce chapitre, sous certaines conditions sur la non-linéarité f, et en utilisant l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, le théorème de contraction de Banach et le théorème du point fixe de Guo-Krasnoselskii, nous allons étudier l'existence, l'unicité et la positivité de la solution d'un problème aux limites pour une équation différentielle du troisième ordre où les conditions aux limites sont imposées en trois points.

3.1 Introduction

En utilisant l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, le théorème de contraction de Banach et le théorème de Guo-Krasnoselskii, nous discutons de l'existence, de l'unicité et de la positivité de la solution au problème aux limites non homogène du troisième ordre à trois points.

L'étude des problèmes aux limites a reçu un intérêt considérable. Pour un petit échantillon de ces travaux, nous renvoyons le lecteur à Bai et Fang [2], Gupta [7], Gupta et Trofimchuk [9] et d'autres comme $[1, 3, 5, 6, 8, 10 - 14, 16...]$.

Inspiré par les travaux [4, 11] , Y-P. Sun [15] et d'autres "qui ont étudié l'existence et la positivité de la solution d'un problème aux limites à trois points", nous allons étudier le problème aux limites du troisième ordre à trois points suivant:

$$\begin{cases} u'''(t) + f(t, u(t), u'(t)) = 0, \quad t \in [0,1], \\ u(0) = u'(0) = 0, \quad \alpha u'(1) = \beta u(\eta), \end{cases} \tag{3.1}$$

où, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\eta \in]0,1[$ et f est une fonction continue: $f \in C([0,1] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$.

Au cours de ce travail, nous posons les hypothèses suivantes:

(I_1) : $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^\star$, $0 < \eta < 1$ et $f \in C([0,1] \times [0,\infty) \times [0,\infty), [0,\infty))$.

(I_2) : Nous utiliserons des espaces de Banach $C[0,1]$, $C^1[0,1]$, $L^1[0,1]$. Nous utilisons également l'espace de Banach $X = \{u \in C^1[0,1] / u \in C[0,1],\ u' \in C[0,1]\}$, muni de la norme $\|u\|_X = \max\{\|u\|_\infty,\ \|u'\|_\infty\}$, où $\|u\|_\infty = \max\limits_{t\in[0,1]} |u(t)|$.

Dans la section suivante, nous allons donner l'expression de la solution du problème linéaire et quelques propriétés de la fonction $G(t,s)$. Dans la troisième section, nous démontrerons les résultats d'existence et d'unicité de la solution du problème en utilisant l'alternative non linéaire de Leray-Schauder et le principe de contraction de Banach. Nous appliquerons le théorème d'Arzelà-Ascoli pour montrer que l'opérateur intégral défini dans la section précédente est complètement continu. Dans la quatrième section, nous emploierons le théorème de Guo-Krasnosel'skii pour étudier l'existence d'au moins une solution positive du problème. Les résultats obtenus seront illustrés par des exemples à la fin du chapitre.

3.2 Préliminaires

Dans cette section, nous allons présenter quelques préliminaires

Soit l'espace de Banach

$$X = \left\{u \in C^1[0,1] / u \in C[0,1],\ u' \in C[0,1]\right\},$$

muni de la norme $\|u\|_X = \max\{\|u\|_\infty, \ \|u'\|_\infty\}$, où $\|u\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |u(t)|$.

Lemme 3.1 [8] *Soit* $2\alpha \neq \beta\eta^2$ *et* $y \in L^1[0,1]$, *alors le problème linéaire*

$$\begin{cases} u''' + y(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = u'(0) = 0, \quad \alpha u'(1) = \beta u(\eta), \end{cases} \tag{3.2}$$

a une solution unique

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\, y(s)\, ds + \frac{\beta t^2}{2\alpha - \beta\eta^2} \int_0^1 G(\eta,s)\, y(s)\, ds. \tag{3.3}$$

où,

$$G(t,s) = \frac{1}{2} \begin{cases} (1-s)\, t^2, & t \leq s, \\ (-s + 2t - t^2)\, s, & s \leq t, \end{cases} \tag{3.4}$$

Preuve. En utilisant les conditions $u(0) = u'(0) = 0$, $\alpha u'(1) = \beta u(\eta)$, et par intégration de l'équation dans (3.2) sur l'intervalle $[0,t]$ pour $t \in [0,1]$, nous obtenons:

$$u(t) = \frac{-1}{2} \int_0^t (t-s)^2\, y(s)\, ds + \frac{t^2}{2} \int_0^1 (1-s)\, y(s)\, ds$$
$$+ \frac{\beta t^2}{2(2\alpha - \beta\eta^2)} \left(\eta^2 \int_0^\eta (1-s)\, y(s)\, ds + \eta^2 \int_\eta^1 (1-s)\, y(s)\, ds - \int_0^\eta (\eta - s)^2\, y(s)\, ds \right).$$

Donc,

$$u(t) = \frac{1}{2} \left(\int_0^t \left(-s + 2t - t^2\right) s y(s)\, ds + \int_t^1 (1-s)\, t^2 y(s)\, ds \right)$$
$$+ \frac{\beta t^2}{2(2\alpha - \beta\eta^2)} \left(\int_0^\eta \left(-s + 2\eta - \eta^2\right) s y(s)\, ds + \int_\eta^1 (1-s)\, \eta^2 y(s)\, ds \right).$$

Par conséquent,

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\, y(s)\, ds + \frac{\beta t^2}{2\alpha - \beta\eta^2} \int_0^1 G(\eta,s)\, y(s)\, ds.$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Donnons maintenant, quelques propriétés de la fonction $G(t,s)$.

Lemme 3.2 *Pour tous* $(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$, *nous avons*

$$0 \leq G^* (t,s) \leq 2G_1 (s) .$$

où,

$$G^* (t,s) = \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} = \begin{cases} (1-s) t, & t \leq s, \\ (1-t) s, & s \leq t. \end{cases} \tag{3.5}$$

Preuve. Il est facile de vérifier que:

Si $t \leq s$,

$$G^* (t,s) = (1-s) t \leq (1-s) s = 2G_1 (s) .$$

Et si $s \leq t \Rightarrow -t \leq -s$,

$$G^* (t,s) = (1-t) s \leq (1-s) s = 2G_1 (s) .$$

La preuve est terminée. ■

Lemme 3.3 *Soit* $0 \leq s \leq 1$, $0 < \tau \leq t \leq 1$, *nous avons*

$$\tau^2 G_1 (s) \leq G(t,s) \leq G_1 (s) = \frac{1}{2} (1-s) s.$$

Preuve. Soient $t, s \in [0,1]$. Si $s \leq t$, il découle de (3.4) que

$$G(t,s) = \frac{1}{2} \left(2t - t^2 - s\right) s = \frac{1}{2} \left[1 - s - (1-t)^2\right] s,$$

$$G(t,s) \leq \frac{1}{2} (1-s) s = G(1,s) ,$$

et

$$G(t,s) = \frac{1}{2} \left(2t - t^2 - s\right) s,$$

$$G(t,s) = \frac{1}{2} \left(2t - t^2 - s\right) s + t^2 - t^2 + t^2 s - t^2 s,$$

$$G(t,s)=\frac{1}{2}st^2(1-s)+\frac{1}{2}(1-t)\left[(t-s)+(1-s)t\right]s,$$

donc

$$G(t,s)\geq\frac{1}{2}s(1-s)t^2,$$

$$G(t,s)\geq t^2G_1(s).$$

Si $t\leq s$, il découle de (3.4) que

$$\frac{1}{2}t^2(1-s)s\leq G(t,s)=\frac{1}{2}t^2(1-s)\leq G_1(s).$$

Ainsi,

$$t^2G_1(s)\leq G(t,s)\leq G_1(s),\quad\forall(t,s)\in[0,1]\times[0,1].$$

Par conséquent,

$$\tau^2G_1(s)\leq G(t,s)\leq G_1(s),\quad\forall(t,s)\in[\tau,1]\times[0,1].$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Définition 3.1 *Nous définissons un opérateur $T:X\longrightarrow X$ par:*

$$Tu(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),u'(s))\,ds$$

$$+\frac{\beta t^2}{2\alpha-\beta\eta^2}\int_0^1 G(\eta,s)f(s,u(s),u'(s))\,ds. \tag{3.6}$$

Lemme 3.4 *La fonction $u\in X$ est une solution du problème* (3.1) *si et seulement si*

$$Tu(t)=u(t),$$

(u est un point fixe de T).

3.3 Existence et unicité de la solution

En utilisant l'alternative non linéaire de Leray-Schauder et le théorème de contraction de Banach, nous allons démontrer quelques résultats d'existence et d'unicité de la solution du problème (3.1).

Lemme 3.5 *Supposons que $u \in X$, $2\alpha \neq \beta\eta^2$ et k, $h \in L^1([0,1], \mathbb{R}_+)$ sont deux fonctions positives telles que*:

$$\left|f(t,x,y) - f(t,u,v)\right| \leq k(t)\left|x-u\right| + h(t)\left|y-v\right|, \quad \forall x,y,u,v \in \mathbb{R},\ t \in [0,1], \tag{3.7}$$

et

$$C = 2\left(1 + \frac{\beta}{\left|2\alpha - \beta\eta^2\right|}\right)\int_0^1 G_1(s)\left(k(s) + h(s)\right)ds < 1. \tag{3.8}$$

Alors le problème aux limites (3.1) *admet une solution unique dans* X.

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^1 G(t,s) f\left(s, u(s), u'(s)\right) ds \\ &\quad + \frac{\beta t^2}{2\alpha - \beta\eta^2}\int_0^1 G(\eta,s) f\left(s,u(s),u'(s)\right) ds. \end{aligned}$$

Nous allons prouver que T est une contraction.

Soient $u, v \in X$, alors,

$$\left|Tu(t) - Tv(t)\right| \leq \int_0^1 G_1(s)\left|f\left(s,u(s),u'(s)\right) - f\left(s,v(s),v'(s)\right)\right| ds$$

$$+\frac{\beta}{\left|2\alpha - \beta\eta^2\right|}\int_0^1 G_1(s)\left|f\left(s,u(s),u'(s)\right) - f\left(s,v(s),v'(s)\right)\right| ds,$$

donc,

$$\left|Tu(t) - Tv(t)\right| \leq \left(1 + \frac{\beta}{\left|2\alpha - \beta\eta^2\right|}\right)$$

$$\int_0^1 G_1(s)\left[k(s)\left|u(s)-v(s)\right|+h(s)\left|u'(s)-v'(s)\right|\right]ds,$$

ainsi,

$$|Tu(t)-Tv(t)| \leq \left(1+\frac{\beta}{|2\alpha-\beta\eta^2|}\right)\int_0^1 G_1(s)\,k(s)\left|u(s)-v(s)\right|ds$$

$$+\left(1+\frac{\beta}{|2\alpha-\beta\eta^2|}\right)\int_0^1 G_1(s)\,h(s)\left|u'(s)-v'(s)\right|ds.$$

Alors,

$$|Tu(t)-Tv(t)| \leq \left(1+\frac{\beta}{|2\alpha-\beta\eta^2|}\right)\max\left\{\|u-v\|_\infty,\|u'-v'\|_\infty\right\}$$

$$\int_0^1 G_1(s)\left(k(s)+h(s)\right)ds.$$

Donc,

$$|Tu(t)-Tv(t)| \leq \|u-v\|_X\left(1+\frac{\beta}{|2\alpha-\beta\eta^2|}\right)\int_0^1 G_1(s)\left(k(s)+h(s)\right)ds.$$

Et de même, nous avons

$$T'u(t)=\int_0^1 G^*(t,s)\,f\left(s,u(s),u'(s)\right)ds$$

$$+\frac{2\beta t}{2\alpha-\beta\eta^2}\int_0^1 G(\eta,s)\,f\left(s,u(s),u'(s)\right)ds.$$

Donc,

$$|T'u(t)-T'v(t)| \leq 2\left(1+\frac{\beta}{|2\alpha-\beta\eta^2|}\right)\max\left\{\|u-v\|_\infty,\|u'-v'\|_\infty\right\}$$

$$\int_0^1 G_1(s)\left(k(s)+h(s)\right)ds,$$

ainsi,

$$|T'u(t) - T'v(t)| \leq 2\|u-v\|_X \left(1 + \frac{\beta}{|2\alpha - \beta\eta^2|}\right) \int_0^1 G_1(s)(k(s) + h(s))\, ds,$$

alors,

$$\max\{\|Tu - Tv\|_\infty, \|T'u - T'v\|_\infty\} \leq C\|u-v\|_X .$$

Par conséquent,

$$\|Tu - Tv\|_X \leq C\|u-v\|_X .$$

D'après (3.8), T est une contraction, donc l'opérateur T admet un unique point fixe qui est l'unique solution du problème (3.1). ■

Théorème 3.1 *Nous supposons que* $f(t,0,0) \neq 0, 2\alpha \neq \beta\eta^2$ *et qu'il existe trois fonctions positives* k, l, $h \in L^1([0,1], \mathbb{R}_+)$, *telles que*

$$|f(t,u,v)| \leq k(t)|u| + l(t)|v| + h(t), \ \forall u,v \in \mathbb{R}, \ t \in [0,1], \tag{3.9}$$

et

$$2\left(1 + \frac{\beta}{|2\alpha - \beta\eta^2|}\right) \int_0^1 G_1(s)(k(s) + l(s))\, ds < 1.$$

Alors, le problème aux limites (3.1) *a au moins une solution* $u^* \in X$.

Preuve. *Soit*

$$F = 2\left(1 + \frac{\beta}{|2\alpha - \beta\eta^2|}\right) \int_0^1 G_1(s)(k(s) + l(s))\, ds,$$

$$G = 2\left(1 + \frac{\beta}{|2\alpha - \beta\eta^2|}\right) \int_0^1 G_1(s) h(s)\, ds.$$

Montrant que l'opérateur T *est complètement continu.*

1) T *est continu.*

Soit $2\alpha \neq \beta\eta^2$ *et* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite convergente vers* u *dans* X*. Nous pouvons obtenir,*

$$|Tu_k(t) - Tu(t)| \leq \left(1 + \frac{\beta}{|2\alpha - \beta\eta^2|}\right) \times$$

$$\int_0^1 G_1(s)\,|f(s, u_k(s), u_k'(s)) - f(s, u(s), u'(s))|\,ds.$$

Et de même, nous obtenons

$$|T'u_k(t) - T'u(t)| \leq 2\left(1 + \frac{\beta}{|2\alpha - \beta\eta^2|}\right) \times$$

$$\int_0^1 G_1(s)\,|f(s, u_k(s), u_k'(s)) - f(s, u(s), u'(s))|\,ds.$$

Alors,

$$\|Tu_k - Tu\|_X \leq \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\beta}{|2\alpha - \beta\eta^2|}\right) \times$$

$$\int_0^1 |f(s, u_k(s), u_k'(s)) - f(s, u(s), u'(s))|\,ds.$$

D'après le théorème de convergence dominné de Lebesgue, nous concluons que T *est continu.* ■

Preuve. 2) Soit $B_r = \{u \in X : \|u\|_X \leq r\}$ un sous ensemble borné. Nous allons prouver que $T(B_r)$ est relativement compact:

(i) $T(B_r)$ est uniformément borné.

Pour certains $u \in B_r$, nous avons:

$$|Tu(t)| \leq \left(1 + \frac{\beta}{|2\alpha - \beta\eta^2|}\right) \int_0^1 G_1(s)\,|f(s, u(s), u'(s))|\,ds,$$

alors,

$$|Tu(t)| \leq \left(1 + \frac{\beta}{|2\alpha - \beta\eta^2|}\right) \int_0^1 G_1(s)\,[k(s)\,|u(s)| + l(s)\,|u'(s)| + h(s)]\,ds,$$

donc,

$$|Tu\,(t)| \leq \left(1+\frac{\beta}{|2\alpha-\beta\eta^2|}\right)\|u\|_X \int_0^1 G_1\,(s)\,(k\,(s)+l\,(s))\,ds$$

$$+\left(1+\frac{\beta}{|2\alpha-\beta\eta^2|}\right)\int_0^1 G_1\,(s)\,h\,(s)\,ds.$$

Et de même, nous avons

$$|T'u\,(t)| \leq 2\left(1+\frac{\beta}{|2\alpha-\beta\eta^2|}\right)\int_0^1 G_1\,(s)\,|f\,(s,u\,(s)\,,u'\,(s))|\,ds,$$

donc,

$$|T'u\,(t)| \leq 2\,\|u\|_X\left(1+\frac{\beta}{|2\alpha-\beta\eta^2|}\right)\int_0^1 G_1\,(s)\,(k\,(s)+l\,(s))\,ds$$

$$+2\left(1+\frac{\beta}{|2\alpha-\beta\eta^2|}\right)\int_0^1 G_1\,(s)\,h\,(s)\,ds.$$

Alors,

$$\|Tu\|_X \leq F\,\|u\|_X + G,$$

i.e,

$$\|Tu\|_X \leq Fr+G,$$

alors, $T\,(B_r)$ est uniformément borné.

(ii) $T\,(B_r)$ est équicontinu.

$\forall\ t_1,\ t_2 \in [0,1]\,,\ u \in B_r$, nous avons:

$$|Tu\,(t_1)-Tu\,(t_2)| = \left|\int_0^1 (G\,(t_1,s)-G\,(t_2,s))\,f\,(s,u\,(s)\,,u'\,(s))\,ds\right.$$

$$\left.+\frac{\beta(t_1^2-t_2^2)}{|2\alpha-\beta\eta^2|}\int_0^1 G\,(\eta,s)\,f\,(s,u\,(s)\,,u'\,(s))\,ds\right|,$$

donc,

$$|Tu\,(t_1)-Tu\,(t_2)| \leq L\left[\int_0^{t_1}|G\,(t_1,s)-G\,(t_2,s)|\,ds+\int_{t_1}^{t_2}|G\,(t_1,s)-G\,(t_2,s)|\,ds\right.$$

$$+\int_{t_2}^{1}\left|G(t_1,s)-G(t_2,s)\right|ds\Bigg]+\frac{L\beta\left|t_1^2-t_2^2\right|}{\left|2\alpha-\beta\eta^2\right|}\int_0^1\left|G(\eta,s)\right|ds,$$

où,

$$L=\max_{\substack{0\le s\le 1\\ \|u\|_X\le r}}\left|f\left(s,u(s),u'(s)\right)\right|,$$

i.e,

$$\left|Tu(t_1)-Tu(t_2)\right|\le L(t_2-t_1)\left[\int_0^{t_1}\left|-2s+s(t_1+t_2)\right|ds+\int_{t_2}^{1}\left|(1-s)(t_1+t_2)\right|ds\right.$$

$$\left.+\frac{\beta(t_1+t_2)}{2\left|2\alpha-\beta\eta^2\right|}\int_0^1\left|G(\eta,s)\right|ds\right]+L\int_{t_1}^{t_2}\left|\left(t_1^2-st_2+s^2\right)+\left(t_1^2-t_2^2\right)s\right|ds,$$

donc

$$\left|Tu(t_1)-Tu(t_2)\right|\le L(t_2-t_1)\left[1-t_2^2+t_1(t_1-t_2+3)\right.$$

$$\left.+\frac{\beta(t_1+t_2)}{\left|2\alpha-\beta\eta^2\right|}\int_0^1\left|G(\eta,s)\right|ds\right].$$

De même, nous avons

$$\left|T'u(t_1)-T'u(t_2)\right|=\left|\int_0^1\left(G^*(t_1,s)-G^*(t_2,s)\right)f\left(s,u(s),u'(s)\right)ds\right.$$

$$\left.+\frac{2\beta(t_1-t_2)}{2\alpha-\beta\eta^2}\int_0^1G(\eta,s)f\left(s,u(s),u'(s)\right)ds\right|.$$

$$\left|T'u(t_1)-T'u(t_2)\right|\le L(t_2-t_1)\left[\int_0^{t_1}|s|\,ds+\int_{t_2}^{1}|s-1|\,ds\right.$$

$$\left.+\frac{2\beta}{\left|2\alpha-\beta\eta^2\right|}\int_0^1\left|G(\eta,s)\right|ds\right]$$

$$+L\int_{t_1}^{t_2}\left|(t_1-s)+(t_2-t_1)s\right|ds,$$

donc

$$\left|T'u(t_1)-T'u(t_2)\right|\le L(t_2-t_1)\left[1+(t_1-t_2)+\frac{1}{2}(3t_2-5t_1)\right.$$

$$+\frac{2\beta}{|2\alpha-\beta\eta^2|}\int_0^1 |G(\eta,s)|\,ds\Bigg].$$

Alors, $|Tu(t_1)-Tu(t_2)| \underset{t_1\to t_2}{\longrightarrow} 0$ et $|T'u(t_1)-T'u(t_2)| \underset{t_1\to t_2}{\longrightarrow} 0$.

Par conséquent, $T(B_r)$ est équicontinu.

D'après le *Théorème d'Arzelà-Ascoli*, nous déduisons que T est un opérateur complètement continu.

D'après la continuité de f et comme, $f(t,0,0)\neq 0$ et $F<1$, il existe un intervalle $[\sigma',\tau']\subset[0,1]$ telle que:

$$\min_{\sigma\le t\le r}|f(t,0,0)|>0 \text{ et du fait que } h(t)\ge |f(t,0,0)| \text{ sur } [\sigma',\tau'], \text{ alors } G>0.$$

Soit, $M=G(1-F)^{-1}$, $\Omega=\{u\in X: \|u\|<M\}$.

Supposons que: $u\in\partial\Omega$, $\lambda>1$, telle que, $Tu=\lambda u$. Alors

$$\lambda M=\lambda\|u\|=\|Tu\|_X=\max\{\|Tu\|_\infty,\|T'u\|_\infty\},$$

nous avons

$$|Tu(t)|\le \sup_{0\le t\le 1}\int_0^1 G(t,s)\,|f(s,u(s),u'(s))|\,ds$$

$$+\sup_{0\le t\le 1}\frac{\beta t^2}{|2\alpha-\beta\eta^2|}\int_0^1 G(\eta,s)\,|f(s,u(s),u'(s))|\,ds.$$

Donc,

$$|Tu(t)|\le\int_0^1 G_1(s)\left(k(s)|u(s)|+l(s)|u'(s)|+h(s)\right)ds$$

$$+\frac{\beta}{|2\alpha-\beta\eta^2|}\int_0^1 G_1(s)\left(k(s)|u(s)|+l(s)|u'(s)|+h(s)\right)ds.$$

Alors,

$$|Tu(t)|\le\left(1+\frac{\beta}{|2\alpha-\beta\eta^2|}\right)\max\{\|u\|_\infty,\|u'\|_\infty\}\int_0^1 G_1(s)\left(k(s)+l(s)\right)ds$$

$$+\left(1+\frac{\beta}{|2\alpha-\beta\eta^2|}\right)\int_0^1 G_1(s)\,h(s)\,ds,$$

i.e,

$$|Tu(t)| \leq \|u\|_X \left(1+\frac{\beta}{|2\alpha-\beta\eta^2|}\right)\int_0^1 G_1(s)\,(k(s)+l(s))\,ds$$

$$+\left(1+\frac{\beta}{|2\alpha-\beta\eta^2|}\right)\int_0^1 G_1(s)\,h(s)\,ds.$$

Et de même, nous avons

$$|T'u(t)| \leq \sup_{0\leq t\leq 1}\int_0^1 G^*(t,s)\,|f(s,u(s),u'(s))|\,ds$$

$$+\sup_{0\leq t\leq 1}\frac{2\beta t}{|2\alpha-\beta\eta^2|}\int_0^1 G(\eta,s)\,|f(s,u(s),u'(s))|\,ds.$$

Donc,

$$|T'u(t)| \leq 2\int_0^1 G_1(s)\,(k(s)\,|u(s)|+l(s)\,|u'(s)|+h(s))\,ds$$

$$+\frac{2\beta}{|2\alpha-\beta\eta^2|}\int_0^1 G_1(s)\,(k(s)\,|u(s)|+l(s)\,|u'(s)|+h(s))\,ds,$$

i.e,

$$|T'u(t)| \leq 2\,\|u\|_X \left(1+\frac{\beta}{|2\alpha-\beta\eta^2|}\right)\int_0^1 G_1(s)\,(k(s)+l(s))\,ds$$

$$+2\left(1+\frac{\beta}{|2\alpha-\beta\eta^2|}\right)\int_0^1 G_1(s)\,h(s)\,ds.$$

Ceci montre que,

$$\lambda M = \|Tu\|_X \leq F\,\|u\|_X + G = FM + G.$$

Alors, nous avons

$$\lambda \leq F+\frac{G}{M} = F+\frac{G}{G\,(1-F)^{-1}} = F+(1-F)=1,$$

ceci contredit $\lambda > 1$.

En appliquant *le Théorème* 2.6, nous concluons que, l'opérateur T admet un point fixe $u^* \in \overline{\Omega}$.

Par conséquent, le problème aux limites (3.1) a au moins une solution $u^* \in X$. ■

3.4 Positivité de la solution

En utilisant le théorème de Guo-Krasnosel'skii, nous étudions l'existence de solutions positives du problème aux limites (3.1).

Avant de présenter et démontrer les résultats de positivité, nous posons les hypothèses supplémentaires suivantes.

(Q1) : $f(t,u,v) = a(t)f_1(u,v)$ où $a \in C([0,1], \mathbb{R}_+)$ et $f_1 \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$.

(Q2) : $\int_{\tau_1}^{\tau_2} G_1(s)\, a(s) f_1(u(s), u'(s)) ds > 0,\ 0 \leq \tau_1 \leq s.$

Nous avons besoin de quelques propriétés de la fonction $G(t,s)$.

Lemme 3.6 *Pour tous* $0 < \tau_1 \leq s,\ t \leq \tau_2 < 1,\ s \in [0,1]$, *nous avons*

$$\tau_1^2 G_1(s) \leq G(t,s),$$

$$2\gamma G_1(s) \leq G^*(t,s).$$

Où, $\gamma = \min\{\tau_1^2, (1-\tau_2)\}$

Preuve. Il est facile de vérifier que:

Si $t \leq s$,

$$G^*(t,s) = (1-s)t = (1-s)s\frac{t}{s},$$

$$\geq (1-s)s\tau_1 \geq 2\tau_1^2 G_1(s).$$

Et si $s \leq t \Rightarrow -t \leq -s$,

$$G^*(t,s) = (1-t)s = \frac{1-t}{1-s}(1-s)s,$$

$$\geq (1-\tau_2)(1-s)\,s = 2(1-\tau_2)\,G_1(s).$$

La preuve est terminée. $\blacksquare$

Lemme 3.7 *Supposons que $2\alpha > \beta\eta^2$ et que les hypothèses $(Q1)$ et $(Q2)$ sont vérifiées. Si u est une solution du problème aux limites (3.1), alors u est positive et vérifie*

$$\min_{t\in[\tau_1,\tau_2]} (u(t)+u'(t)) \geq \gamma \|u\|_X,$$

où $\gamma = \min\{\tau_1^2, (1-\tau_2)\} \frac{\int_{\tau_1}^{\tau_2} G(1,s)a(s)f_1(u(s),u'(s))ds}{(1+\frac{\beta}{2\alpha-\beta\eta^2})\int_0^1 G(1,s)a(s)f_1(u(s),u'(s))ds}.$

Preuve. Supposons que $u \in X$ soit une solution du problem (3.1). Alors pour tout $t \in [0,1]$,

$$u(t) = Tu(t) = \int_0^1 G(t,s)\,a(s)\,f_1(u(s),u'(s))\,ds$$
$$+\frac{\beta t^2}{(2\alpha-\beta\eta^2)}\int_0^1 G(\eta,s)\,a(s)\,f_1(u(s),u'(s))\,ds.$$

D'après les hypothèses (Q_1) et (Q_2) et de la positivité de G, la fonction u est positive.

D'après les *Lemmes* 3.2 et 3.3, nous avons

$$u(t) \leq \left(1+\frac{\beta}{2\alpha-\beta\eta^2}\right)\int_0^1 G_1(s)\,a(s)\,f_1(u(s),u'(s))\,ds$$

et donc,

$$\|u\|_\infty \leq \left(1+\frac{\beta}{2\alpha-\beta\eta^2}\right)\int_0^1 G_1(s)\,a(s)\,f_1(u(s),u'(s))\,ds.$$

D'autre part, pour tout $t \in [\tau_1,\tau_2]$,

$$u(t) \geq \int_0^1 G(t,s)\,a(s)\,f_1(u(s),u'(s))\,ds,$$

et,

$$u(t) \geq \tau_1^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} G_1(s)\,a(s)\,f_1(u(s),u'(s))\,ds,$$

donc,

$$u(t) \geq \frac{\tau_1^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} G_1(s)\, a(s)\, f_1(u(s), u'(s))\, ds}{\left(1 + \frac{\beta}{2\alpha - \beta\eta^2}\right) \int_0^1 G_1(s)\, a(s)\, f_1(u(s), u'(s))\, ds} \|u\|_\infty .$$

Par conséquent,

$$\min_{t \in [\tau_1, \tau_2]} u(t) \geq \gamma_1 \|u\|_\infty .$$

où, $\gamma_1 = \frac{\tau_1^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} G_1(s)a(s)f_1(u(s),u'(s))ds}{\left(1+\frac{\beta}{2\alpha-\beta\eta^2}\right)\int_0^1 G_1(s)a(s)f_1(u(s),u'(s))ds}$.De même,

$$u'(t) = \int_0^1 G^*(t,s)\, a(s)\, f_1(u(s), u'(s))\, ds$$

$$+\frac{2\beta t}{2\alpha - \beta\eta^2} \int_0^1 G(\eta, s)\, a(s)\, f_1(u(s), u'(s))\, ds,$$

$$u'(t) \leq 2\left(1 + \frac{\beta}{2\alpha - \beta\eta^2}\right) \int_0^1 G_1(s)\, a(s)\, f_1(u(s), u'(s))\, ds$$

alors

$$\|u'\|_\infty \leq 2\left(1 + \frac{\beta}{2\alpha - \beta\eta^2}\right) \int_0^1 G_1(s)\, a(s)\, f_1(u(s), u'(s))\, ds.$$

D'autre part, pour $0 < \tau_1 \leq s,\ t \leq \tau_2 < 1$

$$u'(t) \geq \int_{\tau_1}^{\tau_2} G^*(t,s)\, a(s)\, f_1(u(s), u'(s))\, ds,$$

$$u'(t) \geq \int_{\tau_1}^{\tau_2} 2(1-\tau_2) G_1(s)\, a(s)\, f_1(u(s), u'(s))\, ds,$$

$$u'(t) \geq \frac{(1-\tau_2) \int_{\tau_1}^{\tau_2} G_1(s)\, a(s)\, f_1(u(s), u'(s))\, ds}{(1 + \frac{\beta}{2\alpha - \beta\eta^2}) \int_0^1 G_1(s)\, a(s)\, f_1(u(s), u'(s))\, ds} \|u'\|_\infty .$$

Par conséquent,

$$\min_{t \in [\tau_1, \tau_2]} u'(t) \geq \gamma_2 \|u'\|_\infty .$$

Où $\gamma_2 = \frac{\int_{\tau_1}^{\tau_2}(1-\tau_2)G_1(s)a(s)f_1(u(s),u'(s))ds}{(1+\frac{\beta}{2\alpha-\beta\eta^2})\int_0^1 G_1(s)a(s)f_1(u(s),u'(s))ds}$. Enfin,

$$\min_{t\in[\tau_1,\tau_2]} \left(u\left(t\right)+u'\left(t\right)\right) \geq \gamma \left\|u\right\|_X .$$

où $\gamma = \min(\gamma_1, \gamma_2)$.

Ceci achève la démonstration. ■

Définition 3.2 *Nous définissons le cône K par*

$$K = \left\{ u \in X, u\left(t\right) \geq 0 \ , \min_{t\in[\tau_1,\tau_2]} \left(u\left(t\right)+u'\left(t\right)\right) \geq \gamma \left\|u\right\|_X \right\}.$$

K est un sous-ensemble convexe, fermé et non vide de X.

Lemme 3.8 *L'opérateur T défini par (3.6) est complètement continu et satisfait* $T\left(K\right) \subseteq K$.

Preuve. T est complètement continu.

1) T est continu.

Soit $\left(u_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers u dans X.

Comme $f_1 \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, nous avons $\forall A > 0$, $\exists \eta > 0$, telle que

$$\begin{aligned} \left|\left(u_k\left(t\right), u_k'\left(t\right)\right) - \left(u\left(t\right), u'\left(t\right)\right)\right| &< \eta, \ alors \\ \left|f_1\left(u_k\left(s\right), u_k'\left(s\right)\right) - f_1\left(u\left(s\right), u'\left(s\right)\right)\right| &< A, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Tu\left(t\right) &= \int_0^1 G\left(t,s\right)a(t)f_1\left(u\left(s\right), u'\left(s\right)\right)ds \\ &\quad + \frac{\beta t^2}{\left(2\alpha-\beta\eta^2\right)} \int_0^1 G\left(\eta,s\right)a(t)f_1\left(u\left(s\right), u'\left(s\right)\right)ds. \end{aligned}$$

Alors,

$$\left|Tu_k\left(t\right) - Tu\left(t\right)\right| \leq \left(1 + \frac{\beta}{\left|2\alpha-\beta\eta^2\right|}\right)$$

$$\int_0^1 G_1(s)\, a(s) \max_{0<s<1} |f_1(u_k(s), u_k'(s)) - f_1(u(s), u'(s))|\, ds.$$

donc,

$$|Tu_k(t) - Tu(t)| \leq \left(1 + \frac{\beta}{|2\alpha - \beta\eta^2|}\right) A \int_0^1 G_1(s)\, a(s)\, ds,$$

où,

$$A = \max_{0<s<1} |f_1(u_k(s), u_k'(s)) - f_1(u(s), u'(s))|.$$

De même,

$$|T'u_k(t) - T'u(t)| \leq 2A \left(1 + \frac{\beta}{|2\alpha - \beta\eta^2|}\right) \int_0^1 G_1(s)\, a(s)\, ds,$$

Alors

$$\|Tu_k - Tu\|_X \leq \frac{1}{4} A \left(1 + \frac{\beta}{|2\alpha - \beta\eta^2|}\right) \int_0^1 a(s)\, ds,$$

ce qui implique que T est continu.

2) Soit $B_r = \{u \in X : \|u\|_X \leq r\}$ un sous-ensemble borné. Nous allons prouver que $T(B_r)$ est relativement compact:

(i) $T(B_r)$ est uniformément borné.

Pour certains $u \in B_r$, comme f_1 et a sont continues alors, il existe une constante L telle que

$$L = \max_{\substack{t \in [0,1] \\ \|u\|_X \leq r}} |a(t)\, f_1(u(t), u'(t))|,$$

et nous avons,

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^1 G(t,s)\, a(t) f_1(u(s), u'(s))\, ds \\ &\quad + \frac{\beta t^2}{(2\alpha - \beta\eta^2)} \int_0^1 G(\eta, s)\, a(t) f_1(u(s), u'(s))\, ds. \end{aligned}$$

Alors,

$$|Tu\,(t)| \leq L\left(1+\frac{\beta}{|2\alpha-\beta\eta^2|}\right)\int_0^1 G_1\,(s)\,a(s)ds,$$

et,

$$|T'u\,(t)| \leq 2L\left(1+\frac{\beta}{|2\alpha-\beta\eta^2|}\right)\int_0^1 G_1\,(s)\,a(s)ds,$$

donc,

$$\|Tu\|_X \leq 2L\left(1+\frac{\beta}{|2\alpha-\beta\eta^2|}\right)\int_0^1 G_1\,(s)\,a(s)ds,$$

alors, $T\,(B_r)$ est uniformément borné.

(ii) $T\,(B_r)$ est équicontinu.

Pour tout $t_1,\, t_2 \in [0,1]\,,\, t_1 < t_2,\, u \in B_r$, nous avons

$$|Tu\,(t_1) - Tu\,(t_2)| = \left|\int_0^1 (G\,(t_1,s) - G\,(t_2,s))\,a\,(s)\,f_1\,(u\,(s)\,,u'\,(s))\,ds\right.$$

$$\left.+\frac{\beta(t_1^2-t_2^2)}{|2\alpha-\beta\eta^2|}\int_0^1 G\,(\eta,s)\,a\,(s)\,f_1\,(u\,(s)\,,u'\,(s))\,ds\right|,$$

$$|Tu\,(t_1) - Tu\,(t_2)| \leq L\left[\int_0^{t_1} |G\,(t_1,s) - G\,(t_2,s)|\,ds + \int_{t_1}^{t_2} |G\,(t_1,s) - G\,(t_2,s)|\,ds\right.$$

$$\left.+\int_{t_2}^1 |G\,(t_1,s) - G\,(t_2,s)|\,ds\right]$$

$$+\frac{L\beta\,|t_1^2-t_2^2|}{|2\alpha-\beta\eta^2|}\int_0^1 |G\,(\eta,s)|\,ds,$$

donc,

$$|Tu\,(t_1) - Tu\,(t_2)| \leq L\,(t_2-t_1)\left[\int_0^{t_1} |-2s + s\,(t_1+t_2)|\,ds + \int_{t_2}^1 |(1-s)\,(t_1+t_2)|\,ds\right.$$

$$\left.+\frac{\beta(t_1+t_2)}{|2\alpha-\beta\eta^2|}\int_0^1 |G\,(\eta,s)|\,ds\right]$$

$$+L\int_{t_1}^{t_2} \left|\left(t_1^2 - st_2 + s^2\right) + \left(t_1^2-t_2^2\right)s\right|\,ds,$$

et,

$$|Tu(t_1) - Tu(t_2)| \leq L(t_2 - t_1)\left[1 - t_2^2 + t_1(t_1 - t_2 + 3)\right.$$
$$\left. + \frac{\beta(t_1 + t_2)}{|2\alpha - \beta\eta^2|}\int_0^1 |G(\eta, s)|\,ds\right].$$

De même, nous avons

$$|T'u(t_1) - T'u(t_2)| = \left|\int_0^1 (G^*(t_1, s) - G^*(t_2, s))\,a(s)\,f_1(u(s), u'(s))\,ds\right.$$
$$\left. + \frac{2\beta(t_1 - t_2)}{|2\alpha - \beta\eta^2|}\int_0^1 G(\eta, s)\,a(s)\,f_1(u(s), u'(s))\,ds\right|,$$
$$|T'u(t_1) - T'u(t_2)| \leq L(t_2 - t_1)\left[\int_0^{t_1} |s|\,ds + \int_{t_2}^1 |s - 1|\,ds\right.$$
$$\left. + \frac{2\beta}{|2\alpha - \beta\eta^2|}\int_0^1 |G(\eta, s)|\,ds\right]$$
$$+ L\int_{t_1}^{t_2} |(t_1 - s) + (t_2 - t_1)s|\,ds,$$

et,

$$|T'u(t_1) - T'u(t_2)| \leq L(t_2 - t_1)\left[1 + (t_1 - t_2) + \frac{1}{2}(3t_2 - 5t_1)\right.$$
$$\left. + \frac{2\beta}{|2\alpha - \beta\eta^2|}\int_0^1 |G(\eta, s)|\,ds\right].$$

Alors, $|Tu(t_1) - Tu(t_2)| \underset{t_1 \to t_2}{\longrightarrow} 0$ et $|T'u(t_1) - T'u(t_2)| \underset{t_1 \to t_2}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent, $T(B_r)$ est équicontinu.

D'après le théorème d'Arzela-Ascoli, nous déduisons que T est un opérateur complètement continu.

Maintenant, nous allons prouver que $T(K) \subseteq K$.

Pour toute $u \in K$, et $\forall\ t \in [0, 1]$, nous avons

$$\|Tu\|_\infty \leq \left(1 + \frac{\beta}{|2\alpha - \beta\eta^2|}\right)\int_0^1 G_1(s)\,a(s)\,f_1(u(s), u'(s))\,ds.$$

Et $\forall t \in [\tau_1, \tau_2]$,

$$Tu(t) \geq \int_0^1 G(t,s)\, a(s)\, f_1(u(s), u'(s))\, ds,$$

alors,

$$Tu(t) \geq \tau_1^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} G_1(s)\, a(s)\, f_1(u(s), u'(s))\, ds,$$

donc,

$$Tu(t) \geq \gamma \|Tu\|_\infty,$$

de même,

$$\|T'u\|_\infty \leq 2\left(1 + \frac{\beta}{|2\alpha - \beta\eta^2|}\right) \int_0^1 G_1(s)\, a(s)\, f_1(u(s), u'(s))\, ds,$$

et nous avons,

$$T'u(t) \geq \int_0^1 G^*(t,s)\, a(s)\, f_1(u(s), u'(s))\, ds,$$

$$T'u(t) \geq \int_{\tau_1}^{\tau_2} 2(1-\tau_2) G_1(s)\, a(s)\, f_1(u(s), u'(s))\, ds,$$

$$T'u(t) \geq \gamma \|T'u\|_\infty,$$

par conséquent,

$$\min_{t \in [\tau_1, \tau_2]} (Tu(t) + T'u(t)) \geq \gamma \|Tu\|_X.$$

Alors, $\forall\, u \in K : TK \subset K$. ■

Le résultat principal de cette section est le suivant:

Théorème 3.2 *Supposons que* $(Q1)$ *et* $(Q2)$ *sont vérifiées,* $2\alpha > \beta\eta^2$, *et supposons que*

$$f_0 = \lim_{(|u|+|v|) \to 0} \frac{f_1(u,v)}{|u| + |v|},$$

$$f_\infty = \lim_{(|u|+|v|) \to \infty} \frac{f_1(u,v)}{|u| + |v|}.$$

Alors, le problème (3.1) *a au moins une solution positive dans le cas*:

(i) $f_0 = 0$ *et* $f_\infty = \infty$ (*super-linéaire*), *ou*

(ii) $f_0 = \infty$ *et* $f_\infty = 0$ (*sous-linéaire*).

Preuve. Supposons que $2\alpha > \beta\eta^2$. Nous allons prouver que le problème (3.1), a au moins une solution positive dans les deux cas sous-linéaire et super-linéaire. Pour cela, nous utiliserons *le Théorème* 2.7.

(I) Le cas *super-linéaire*: Supposons que $f_0 = 0$, $f_\infty = \infty$.

D'après le *Lemme* 3.1, u est une solution du problème (3.1), si et seulement si u est un point fixe de l'operateur T, où T est défini par (3.6).

comme $f_0 = 0$, alors

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta_1 > 0 \text{ telle que } f_1(u,v) \leq \varepsilon(|u| + |v|),\ \text{ pour } |u| + |v| < \delta_1.$$

Soit Ω_1 un ouvert de X défini par

$$\Omega_1 = \{y \in X / \|y\|_X < \delta_1\},$$

alors, pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_1$, nous avons

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^1 G(t,s)\, a(s) f_1(u(s), u'(s))\, ds \\ &\quad + \frac{\beta t^2}{2\alpha - \beta\eta^2} \int_0^1 G(\eta,s)\, a(s) f_1(u(s), u'(s))\, ds, \end{aligned}$$

alors,

$$Tu(t) \leq \left(1 + \frac{\beta}{2\alpha - \beta\eta^2}\right) \int_0^1 G_1(s)\, a(s)\, f_1(u(s), u'(s))\, ds,$$

ainsi

$$Tu(t) \leq \varepsilon \|u\|_X \left(1 + \frac{\beta}{2\alpha - \beta\eta^2}\right) \int_0^1 G_1(s)\, a(s)\, ds,$$

$$\|Tu\|_\infty \leq \varepsilon \|u\|_X \left(1+\frac{\beta}{2\alpha-\beta\eta^2}\right)\int_0^1 G_1(s)\,a(s)\,ds,$$

de même,

$$T'u(t) \leq 2\left(1+\frac{\beta}{2\alpha-\beta\eta^2}\right)\int_0^1 G_1(s)\,a(s)\,f_1(u(s),u'(s))\,ds,$$

alors

$$\|T'u\|_\infty \leq 2\varepsilon \|u\|_X \left(1+\frac{\beta}{2\alpha-\beta\eta^2}\right)\int_0^1 G_1(s)\,a(s)\,ds.$$

En choisissant $\varepsilon = \left[2\left(1+\frac{\beta}{2\alpha-\beta\eta^2}\right)\int_0^1 G_1(s)\,a(s)\,ds\right]^{-1}$, nous obtenons

$$\|Tu\|_X \leq \|u\|_X, \quad \forall u \in K \cap \partial\Omega_1.$$

Maintenant, à partir de $f_\infty = \infty$, nous avons

$$\forall M > 0,\ \exists H > 0,\ \text{telle que}\ \ f_1(u,v) \geq M(|u|+|v|),\ \text{pour}\ \ |u|+|v| \geq H.$$

Soit

$$H_1 = \max\left\{2\delta_1, \frac{H}{\gamma}\right\},$$

notant par Ω_2 l'ensemble ouvert

$$\Omega_2 = \{y \in X / \|y\|_X < H_1\}.$$

Soit $u \in K \cap \partial\Omega_2$, alors

$$\min_{t\in[\tau_1,\tau_2]} \{u(t)+u'(t)\} \geq \gamma \|u\|_X,$$

$$= \gamma H_1 \geq H,$$

alors, $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$.

Soit $u \in K \cap \partial\Omega_2$ alors,

$$\begin{aligned} Tu\,(t) &\geq \frac{\tau_1^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} G(1,s)a(s)f_1(u(s),u'(s))ds}{(1+\frac{\beta}{2\alpha-\beta\eta^2})\int_0^1 G(1,s)a(s)f_1(u(s),u'(s))ds} \times \\ & \quad (1+\frac{\beta}{2\alpha-\beta\eta^2})\int_0^1 G(1,s)a(s)f_1(u(s),u'(s))ds, \end{aligned}$$

$$Tu\,(t) \geq M\gamma \left(1+\frac{\beta}{2\alpha-\beta\eta^2}\right) \|u\|_X \int_0^1 G_1\,(s)\,a\,(s)\,ds,$$

de même

$$\begin{aligned} T'u\,(t) &\geq \frac{(1-\tau_2)\int_{\tau_1}^{\tau_2} G_1\,(s)\,a\,(s)\,f_1\,(u\,(s)\,,u'\,(s))\,ds}{(1+\frac{\beta}{2\alpha-\beta\eta^2})\int_0^1 G_1\,(s)\,a\,(s)\,f_1\,(u\,(s)\,,u'\,(s))\,ds} \times \\ & \quad (1+\frac{\beta}{2\alpha-\beta\eta^2})\int_0^1 G_1\,(s)\,a\,(s)\,f_1\,(u\,(s)\,,u'\,(s))\,ds, \end{aligned}$$

$$T'u\,(t) \geq M\gamma \left(1+\frac{\beta}{2\alpha-\beta\eta^2}\right) \|u\|_X \int_0^1 G_1\,(s)\,a\,(s)\,ds,$$

En choisissant $M = \left[\gamma\left(1+\frac{\beta}{2\alpha-\beta\eta^2}\right)\int_0^1 G_1\,(s)\,a\,(s)\,ds\right]^{-1}$, nous obtenons

$$\|Tu\|_X \geq \|u\|_X\,,\ \forall u \in K \cap \partial\Omega_2.$$

En utilisant la première partie du *Théorème* 2.7, nous déduisons que T a un point fixe dans $K \cap \left(\overline{\Omega}_2 \diagdown \Omega_1\right)$.

Ceci achève le cas *super-linéaire* du *Théorème* 3.2.

(II) Le cas *sous-linéaire*.

Maintenant, on suppose que $f_0 = \infty$ et $f_\infty = 0$.

Comme $f_0 = \infty$, nous avons

$$\forall M' > 0,\ \exists \delta' > 0,\ \text{telle que}\ \ f\,(u,v) \geq M'\,(|u|+|v|)\,,\quad \text{pour}\quad |u|+|v| < \delta'.$$

Soit,

$$\Omega_1' = \{y \in C[0,1] \,/\, \|y\| < \delta'\},$$

pour, $u \in K \cap \partial\Omega_1'$, et en choisissant $M' = \left[\gamma\left(1 + \frac{\beta}{2\alpha - \beta\eta^2}\right)\int_0^1 G_1(s)\,a(s)\,ds\right]^{-1}$, nous obtenons

$$Tu(t) \geq \gamma\left(1 + \frac{\beta}{2\alpha - \beta\eta^2}\right)\int_0^1 G_1(s)\,a(s)\,f_1(u(s), u'(s))\,ds,$$

$$Tu(t) \geq M'\gamma\left(1 + \frac{\beta}{2\alpha - \beta\eta^2}\right)\|u\|_X \int_0^1 G_1(s)\,a(s)\,ds.$$

Et de même,

$$T'u(t) \geq \gamma\left(1 + \frac{\beta}{2\alpha - \beta\eta^2}\right)\int_0^1 G_1(s)\,a(s)\,f_1(u(s), u'(s))\,ds,$$

$$T'u(t) \geq M'\gamma\left(1 + \frac{\beta}{2\alpha - \beta\eta^2}\right)\|u\|_X \int_0^1 G_1(s)\,a(s)\,ds.$$

Ainsi,

$$\|Tu\|_X \geq \|u\|_X, \quad u \in K \cap \partial\Omega_1'.$$

Maintenant puisque $f_\infty = 0$, alors

$$\forall\varepsilon > 0, \exists H' > 0 \text{ telle que } f(u,v) \leq \varepsilon(|u| + |v|) \quad \text{pour} \quad |u| + |v| \geq H',$$

nous pouvons choisir ε, tel que

$$\varepsilon = \left[2\left(1 + \frac{\beta}{2\alpha - \beta\eta^2}\right)\int_0^1 G_1(s)\,a(s)\,ds\right]^{-1}.$$

Soit,

$$H_2 = \max\left\{2\delta', \ \frac{H'}{\gamma}\right\},$$

et,

$$\Omega_2' = \{y \in C[0,1] \,/\, \|y\|_X < H_2\},$$

alors, $u \in K \cap \partial\Omega_2'$, implique que

$$\begin{aligned} \min_{t\in[\tau_1,\tau_2]} \{u(t), u'(t)\} &\geq \gamma \|u\|_X, \\ &= \gamma H_2 \geq H', \end{aligned}$$

par conséquent,

$$Tu(t) \leq \left(1 + \frac{\beta}{2\alpha - \beta\eta^2}\right) \int_0^1 G_1(s)\, a(s)\, f_1(u(s), u'(s))\, ds,$$

ainsi

$$\|Tu\|_\infty \leq \varepsilon \|u\|_X \left(1 + \frac{\beta}{2\alpha - \beta\eta^2}\right) \int_0^1 G_1(s)\, a(s)\, ds.$$

Et de même,

$$T'u(t) \leq 2\left(1 + \frac{\beta}{2\alpha - \beta\eta^2}\right) \int_0^1 G_1(s)\, a(s)\, f_1(u(s), u'(s))\, ds,$$

$$\|T'u\|_\infty \leq 2\varepsilon \|u\|_X \left(1 + \frac{\beta}{2\alpha - \beta\eta^2}\right) \int_0^1 G_1(s)\, a(s)\, ds,$$

ainsi,

$$\|Tu\|_X \leq \|u\|_X, \quad u \in K \cap \partial\Omega_2'.$$

En utilisant la seconde partie du *Théorème* 2.7, nous déduisons que T a un point fixe dans $K \cap \left(\overline{\Omega}_2' \diagdown \Omega_1'\right)$.

Ceci achève le cas *sous-linéaire* du *Théorème* 3.2, alors le problème aux limite (3.1) admet au moins une solution positive.

La démonstration du *Théorème* 3.2 est terminé. ■

3.5 Exemples

Exemple 3.1 *Considérons le problème aux limites suivant:*

$$\begin{cases} u''' + tu + t^2 u' = 0, & 0 < t < 1 \\ u(0) = u'(0) = 0, & \alpha u'(1) = \beta u(\eta). \end{cases} \tag{$E1$}$$

Où,

$$\alpha = \frac{1}{2},\ \beta = \frac{1}{3},\ \eta = \frac{1}{4},$$

nous avons,

$$f(t,u,v) = tu + t^2 v.$$

1) *Choisissant,*

$$\begin{cases} k(t) = t \\ h(t) = t^2 \end{cases}, \quad t \in [0,1].$$

Où, $k,\ h \in L^1([0,1], \mathbb{R}_+)$ sont des fonctions positives et

$$|f(t,x,y) - f(t,u,v)| \leq t|x-u| + t^2|y-v|$$

$$|f(t,x,y) - f(t,u,v)| \leq k(t)|x-u| + h(t)|y-v|,$$

avec

$$C = 2\left(1 + \frac{\beta}{|2\alpha - \beta\eta^2|}\right)\int_0^1 G_1(s)(k(s) + h(s))\,ds < 1.$$

Ainsi, d'après le Lemme 3.5*, le problème aux limites* $(E1)$ *admet une unique solution* $u^* \in X$.

2) *Et pour,*

$$|f(t,u,v)| \leq t|u| + t^2|v|,$$

$$\leq k(t)|u| + l(t)|v| + h(t).$$

Nous pouvons choisir,

$$\begin{cases} k(t) = t \\ l(t) = t^2 \quad , \quad t \in [0,1], \\ h(t) = 0 \end{cases}$$

avec

$$2\left(1+\frac{\beta}{|2\alpha-\beta\eta^2|}\right)\int_0^1 G_1(s)\,(k(s)+l(s))\,ds < 1,$$

où, $k,\ l,\ h \in L^1([0,1],\mathbb{R}_+)$ *sont des fonctions positives.*

Ainsi, d'après le Théorème 3.1, *le problème aux limites* $(E1)$ *a au moins une solution* $u^* \in X$.

Exemple 3.2 *Considérons le problème aux limites suivant:*

$$\begin{cases} u''' + t^2u^2 + \frac{t^2}{5}(u')^2 = 0, \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = u'(0) = 0, \quad \alpha u'(1) = \beta u(\eta). \end{cases} \tag{E2}$$

Où, $0 < \eta < 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^\star$, *et*

$$f(t,u,v) = t^2\left(u^2 + \frac{1}{5}v^2\right),$$

$$f(t,u,v) = a(t)\,f_1(u,v),$$

$a(t) = t^2 \in C([0,1],\mathbb{R}_+)$, $\quad f_1(u,v) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$.

Nous prenons, $u = r\cos\varphi$ *et* $v = r\sin\varphi$, *quand* $(|u|+|v|) \to 0 \Longrightarrow r \to 0$ *et quand* $(|u|+|v|) \to \infty \Longrightarrow r \to \infty$. *Puis*

$$f_0 = \lim_{(|u|+|v|)\to 0}\frac{f_1(u,v)}{|u|+|v|} = 0,$$

$$f_\infty = \lim_{(|u|+|v|)\to \infty}\frac{f_1(u,v)}{|u|+|v|} = \infty,$$

d'après le Théorème $3.2.(i)$, *le problème aux limites* $(E2)$ *a au moins une solution positive.*

PERSPECTIVES ET CONCLUSION

Le thème traité dans ce travail est d'une grande importance, notament : l'existence, l'unicité et la positivité de la solution d'un problème aux limites engendré par une équation différentielle ordinaire où les conditions sont imposées en trois points du domaine.

Actuellement il y a une grande variété de théorèmes du point fixe. L'objectif commun de ces théorèmes est de rechercher des solutions et de résoudre les problèmes d'existence qui se posent en analyse mathématique et en ingénierie. De la théorie du point fixe découlent plusieurs applications qui constituent un domaine très actif de la recherche.

Et comme une suite de ce travail, on peut étudier la stabilité de solutions, ainsi que la resolution des problèmes aux limites engendrés par des équations integrales avec des conditions aux limites intégrales.

Bibliographie

[1] R. Agarwal, M. Meechan, D. O'Regan : Fixed point theory and applications, Cambridge University Press, 141, 2009.

[2] C. Bai, J. Fang : Existence of multiple positive solutions for nonlinear m-point boundary value problems, J. Math. Anal. Appl. 281 (2003), 76-85.

[3] K. Deimling : Nonlinear Functional Analysis, Springer, Berlin, 1985.

[4] A. Guezane-Lakoud, L. Zenkoufi : Existence of Positive Solutions for a Third-Order Multi-Point Boundary Value Problem, Applied Mathematics, 03(9)(2012), 1008-1013.

[5] V. A. Il'in, E. I. Moiseev : Nonlocal boundary value problem of the second kind for a Sturm-Liouville operator, Differential Equations 23(8)(1987), 979-987.

[6] V.A. Il'in, E.I. Moiseev : Non local boundary value problem of the first kind for a sturm-Liouiville operator in its differential and finite difference aspects, Diff, Equ, 23(7)(1987), 803-810.

[7] C.P. Gupta : Existence theorems for a second order m-point boundary value problem at resonance, Int. J. Math. Sci., 18 (1995), 705–710.

[8] C. P. Gupta, S. I. Trofimchuk : Solvability of a multi-point boundary value problem of Neumann type, Abstr. Appl. Anal., 4(2)(1999), 71–81.

[9] C. P. Gupta, S. I. Trofimchuk : Existence of a solution of a three-point boundary value problem and the spectral radius of a related linear operator, Nonlinear Analysis, 34(1998), 489–507.

[10] V. Lakshmikantham, A. Vatsala, Basic theory of fractional differential equations, Nonlinear Analysis TMA 69, 8 (2008), 2682-2777.

[11] Lilia ZENKOUFI : Existence of a Positive Solution for a Boundary Value Problem of some Nonlinear Fractional Differential Equation, Int. J. Nonlinear Anal. Appl., 10(1)(2020), 499-514.

[12] Lilia Zenkoufi, Hamid Boulares : WELL-POSEDNESS ANALYSIS VIA GENERALIZED FRACTIONAL DERIVATIVES, Journal of Computational Analysis and Applications, 34. (2)(2025), 190-203.

[13] Y. Sun : Positive solutions for third-order three-point nonhomogeneous boundary value problems, Appl. Math. Lett., 22 (2009) 45-51.

[14] Y. Sun : Positive solutions of singular third-order three-point boundary value problem, J. Math. Anal. Appl. 306 (2005), 589–603.

[15] Y-P. Sun : Nontrivial solution for a three-point boundary-value problem, E.J.D.E, 2004(111)(2004), 1-10.

[16] E. Zeidler : Nonlinear functional analysis and its applications. Fixed point theorem, Springer Verlag, New York, Berlin, Heiderberg, Tokyo 1985.