

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 mai 1945 – Guelma

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de : Génie Mécanique



جامعة 8 ماي 1945 قالمة  
UNIVERSITE 8 MAI 1945 GUELMA

Mémoire de Fin de Cycle

En vue de l'obtention du diplôme

**Master**

En : Génie Mécanique

Option : Construction Mécanique

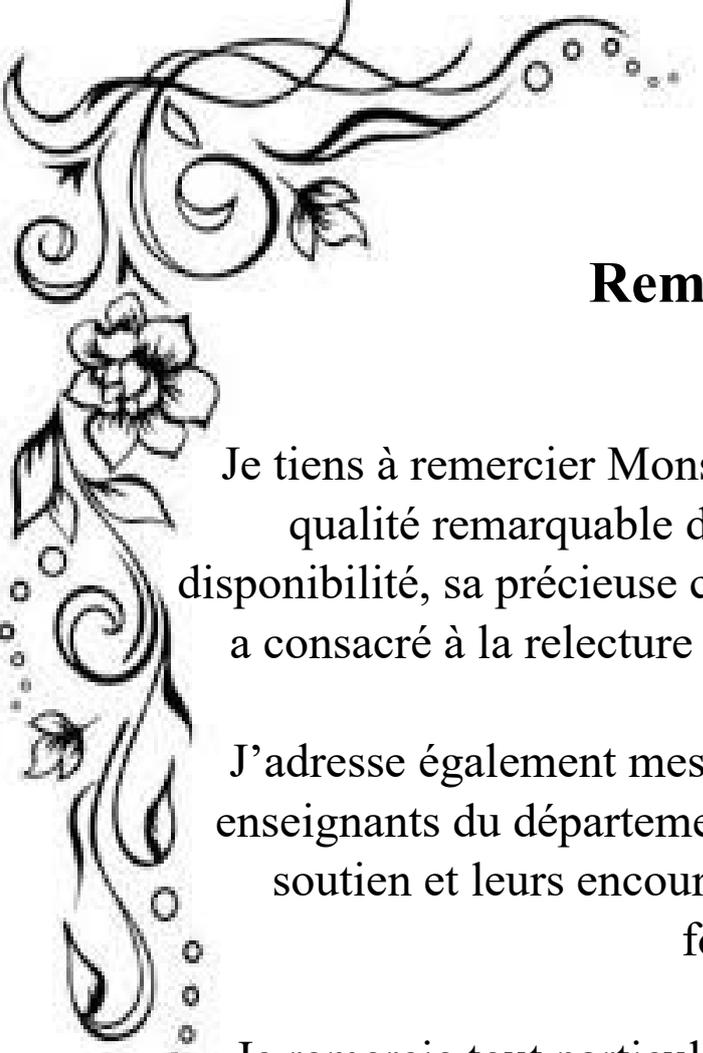
Présenté par : **Touaitia Mouhamed Elamine**

**Thème**

**Étude numérique de l'écrasement d'un  
fluide entre deux disques**

Sous la direction de : **Dr. Boussaha Bilal**

**Juin 2025**



## Remerciements

Je tiens à remercier Monsieur **Dr. Boussaha Bilal**, pour la qualité remarquable de son encadrement, sa grande disponibilité, sa précieuse contribution ainsi que le temps qu'il a consacré à la relecture et à la correction de ce mémoire.

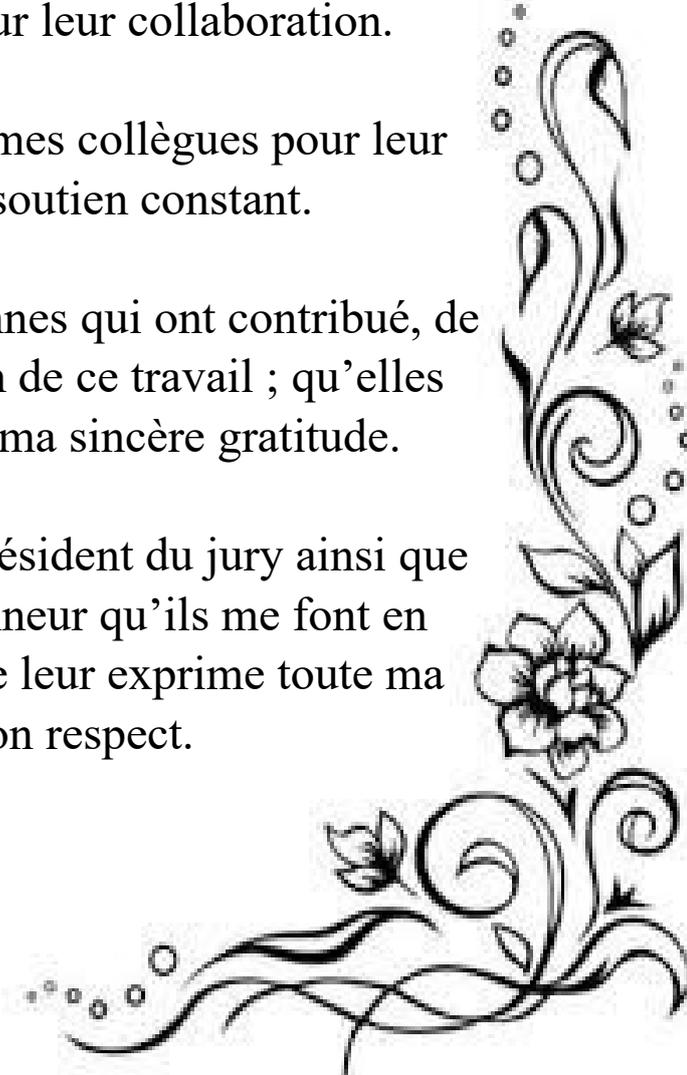
J'adresse également mes remerciements à l'ensemble des enseignants du département de Génie Mécanique pour leur soutien et leurs encouragements tout au long de cette formation.

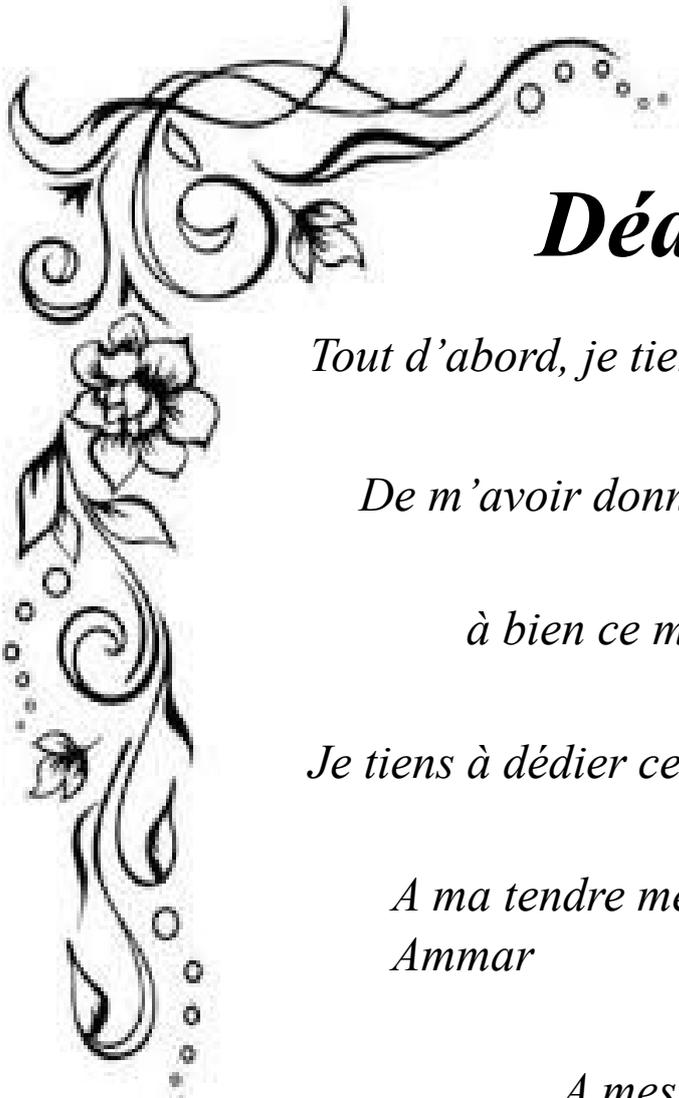
Je remercie tout particulièrement les membres du groupe FAMOS PMO et MAGE pour leur collaboration.

Mes remerciements vont aussi à mes collègues pour leur esprit d'entraide et leur soutien constant.

Je n'oublie pas toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail ; qu'elles trouvent ici l'expression de ma sincère gratitude.

Enfin, je remercie Monsieur le président du jury ainsi que les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'évaluer ce travail. Je leur exprime toute ma considération et mon respect.





# *Dédicace*

*Tout d'abord, je tiens à remercier Allah*

*De m'avoir donné la force et le courage de mener*

*à bien ce modeste travail.*

*Je tiens à dédier cet humble travail à :*

*A ma tendre mère Thouraya et mon très cher père  
Ammar*

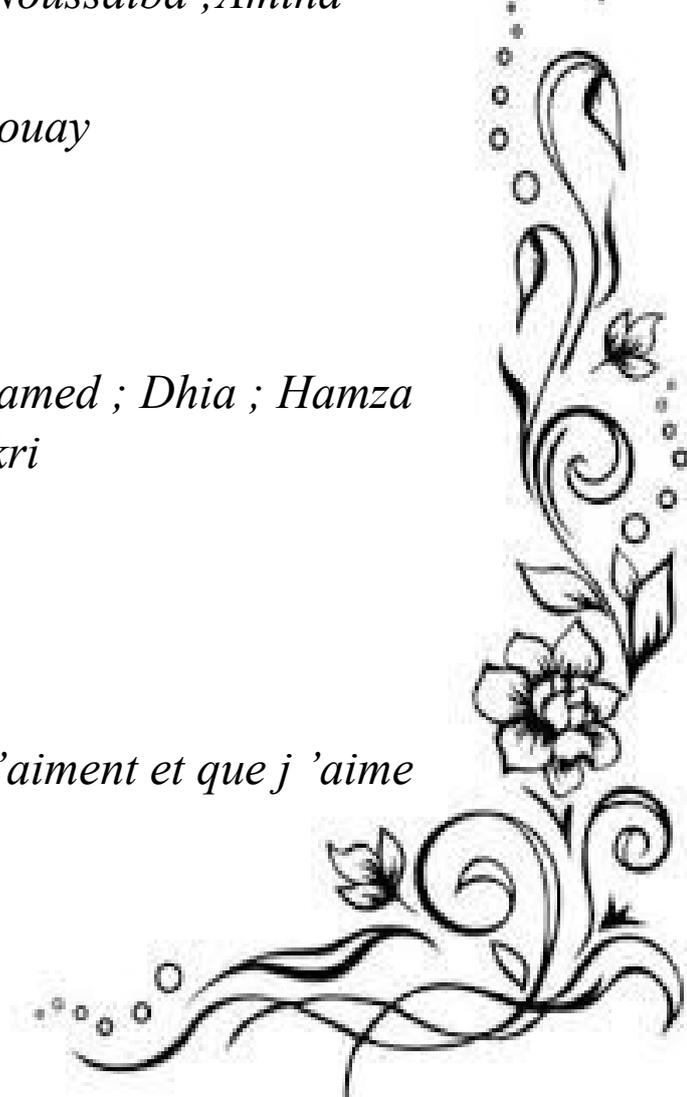
*A mes sœur: Noussaiba ;Amina*

*A mes frere :Louay*

*A mes meilleurs amis :*

*Youcef ;Nizar ; Anes ; Mohamed ; Dhia ; Hamza  
Ayoub ; Abdel kader ; Chokri*

*Tout ceux qui m'aiment et que j'aime*



## **Résumé**

Ce mémoire porte sur l'étude théorique de l'écrasement d'un film fluide non newtonien à couple de contrainte en suspension, entre deux surfaces circulaires, dans le cadre de la lubrification hydrodynamique. L'objectif principal est de modéliser le comportement du fluide sous l'effet de différentes influences : concentration particulaire, couple de contrainte, et présence éventuelle d'un milieu poreux.

Une revue bibliographique a d'abord été réalisée afin de présenter les paramètres influents dans les performances des films lubrifiants. Ensuite, l'équation de Reynolds modifiée a été dérivée en coordonnées cylindriques à partir des équations de la mécanique du micro-continuum. Des expressions analytiques ont été obtenues pour évaluer les performances du contact lubrifié, telles que la capacité de charge, la force de frottement et les débits de fuite.

Deux configurations ont été étudiées : l'écrasement d'un fluide viscoplastique entre deux surfaces rigides imperméables, et l'effet d'un substrat poreux sur l'écoulement. L'approche utilisée est exclusivement analytique, avec validation par une étude paramétrique des effets des différents paramètres.

## **Abstract**

This thesis presents a theoretical study of the squeeze flow of a non-Newtonian fluid with couple stress in suspension between two circular surfaces, in the context of hydrodynamic lubrication. The main objective is to model the behavior of the fluid under the influence of particle concentration, couple stress, and the presence of a porous medium.

A bibliographic review was first conducted to identify the key parameters affecting the performance of lubricating films. The modified Reynolds equation was then derived in cylindrical coordinates based on micro-continuum

mechanics. Analytical expressions were obtained to evaluate lubrication performance, including load-carrying capacity, friction force, and leakage flow rates.

Two configurations were investigated: squeeze flow between two impermeable rigid surfaces, and the influence of a porous substrate on fluid behavior. The study is based entirely on analytical methods, supported by a parametric analysis of the key factors.

### ملخص

يتناول هذا البحث دراسة نظرية لعملية انضغاط طبقة مائعة غير نيوتونية تحتوي على جزيئات معلقة وتخضع لعزوم إجهاد، بين سطحين دائريين، وذلك في إطار التزليق الهيدروديناميكي. الهدف الرئيسي هو نمذجة سلوك المائع تحت تأثير تركيز الجزيئات، وعزوم الإجهاد، ووجود وسط مسامي محتمل.

تم أولاً إجراء مراجعة ببليوغرافية لتحديد العوامل المؤثرة في أداء طبقات التزليق. بعد ذلك، تم اشتقاق معادلة رينولدز المعدلة باستخدام إحدائيات أسطوانية، بناءً على معادلات ميكانيكا الوسط المستمر الصغير. وقد تم استخراج تعابير تحليلية لتقدير مؤشرات الأداء مثل القدرة على التحمل، وقوة الاحتكاك، ومعدلات تسرب المائع.

تطرقت الدراسة إلى حالتين: انضغاط بين سطحين صلبين غير نافذين، وتأثير وسط مسامي على سلوك المائع. وتعتمد المقاربة المعتمدة على طرق تحليلية بحتة، مدعومة بدراسة عددية للمتغيرات المؤثرة.

## Table des matières

Remerciement	
Dédicace	
Résumé	
Nomenclature	
Liste des figures et tableaux	
Introduction générale.....	1

### Chapitre I

#### Revue Bibliographique

1.1 Introduction.....	2
1.2 Influence des Propriétés du Fluide et des Paramètres Géométriques.....	2
1.2.1 Comportement du Fluide.....	2
1.2.2 Concentration en Suspension.....	3
1.2.3 Porosité.....	3
1.2.4 Rugosité.....	4
1.2.5 Géométrie.....	5
1.2.6 Effet du Champ Magnétique (MHD).....	6
1.3 Régimes de Lubrification.....	6
1.3.1 Lubrification Hydrodynamique.....	6
1.3.2 Lubrification Élastohydrodynamique.....	8
1.3.3 Lubrification Limite.....	9
1.4 Comportement rhéologiques des Fluides.....	10
1.5 Conclusion.....	12

### Chapitre II

#### Théorie de la lubrification hydrodynamique

2.1 Introduction.....	13
2.2 Équations de base de la mécanique du micro- continuum de V. K. Stokes.....	13
2.3 Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée en coordonnées cylindriques.....	16

2.3.1 Hypothèses de la théorie de Reynolds.....	16
2.3.2 Analyse dimensionnelle des équations de mouvement pour un écoulement de film mince.....	16
2.3.3 Détermination du champ de vitesse.....	19
2.3.4 Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée.....	20
2.4 Calcul des différents paramètres de performance.....	21
2.4.1 Champ de pression dans le film.....	21
2.4.2 Capacité de charge (portance HD).....	21
2.4.3 Force de frottement.....	22
2.4.4 Vitesse moyenne de l'écoulement.....	22
2.4.5 Débits de fuite.....	22
2.5 Conclusion.....	24

### Chapitre III

#### Étude du film squeeze d'un fluide à couple de contrainte en suspension

3.1 Introduction.....	25
3.2 Caractérisation rhéologique de l'effet de la concentration en suspension.....	25
3.2.1 Modèle d'Einstein.....	26
3.2.2 Modèle de Batchelor et Green.....	26
3.2.3 Modèle de Ball et Richmond.....	26
3.2.4 Modèle de Phan-Thien et Pham.....	27
3.2.5 Modèle de Krieger-Dougherty.....	27
3.3 Équations de Reynolds modifiées gouvernant l'écrasement d'un fluide à couples de contraintes entre deux surfaces rigides.....	27
3.3.1 Hypothèses relatives à l'écoulement par effet d'écrasement.....	27
3.3.2 Conditions aux limites sur les vitesses et la pression.....	28
3.3.3 Équation de Reynolds modifiée en coordonnées cylindriques.....	29
3.4 Calcul des performances hydrodynamiques d'un film fluide écrasé entre deux surfaces rigides imperméables.....	29
3.4.1 Champ de pression du film de compression.....	29
3.4.2 Capacité de charge.....	29
3.4.3 Vitesse radiale moyenne.....	29

3.4.4 Débits de fuite au bord libre du disque.....	30
3.4.5 Contrainte de cisaillement.....	30
3.4.6 Force de frottement.....	30
3.5 Étude paramétrique.....	30
3.5.1 Influence du paramètre de couple de contrainte $\tilde{\ell}$ .....	31
3.5.2 Influence de la fraction volumique de particules $\phi$ .....	35
3.5.3 Influence de la fréquence d'oscillation.....	39
3.6 Conclusion.....	43

## Chapitre IV

### Ecrasement de lubrification non newtonienne en Présence d'un milieu poreux

4.1 Introduction.....	45
4.2 Ecoulement dans un milieu poreux.....	45
4.2.1 Définitions.....	45
4.2.2 Loi d'écoulement dans un milieu poreux.....	46
4.3 Équations de base du film lubrifiant.....	48
4.3.1 Hypothèses.....	48
4.3.2 La formulation du problème dans le film fluide.....	49
4.3.3 Formulation du problème dans le milieu poreux (Équation de Laplace modifiée).....	50
4.4 Équation de Reynolds modifiée.....	50
4.5 Résolution du problème de lubrification par film comprimé en présence d'un milieu poreux.....	52
4.6 Performances hydrodynamiques.....	52
4.6.1 Capacité de charge.....	52
4.6.2 Débits de fuite au bord du disque.....	53
4.6.3 Contrainte de cisaillement.....	53
4.6.4 Force de frottement.....	53
4.7 Étude paramétrique.....	53

4.7.1 Influence du paramètre de couple de contrainte $\tilde{\ell}$ .....	54
4.7.2 Influence des paramètres de perméabilité du milieu poreux.....	58
4.8 Conclusion.....	63
Conclusion générale.....	65
Références.....	66
Annexe.....	75

## Nomenclature

### Symboles latins

$F_f$	:	Force de frottement, [N]
$f$	:	Fréquence du mouvement sinusoïdal, [Hz]
$H^*$	:	Épaisseur du disque poreux inférieur, [m]
$h$	:	Épaisseur du film fluide, [m]
$\tilde{h}$	:	Épaisseur sans dimension du film fluide $= \frac{h}{h_0}$ , [-]
$h_0$	:	Épaisseur du film initiale, [m]
$h_a$	:	Amplitude du mouvement sinusoïdal, [m]
$\tilde{h}_a$	:	Amplitude du mouvement sinusoïdal sans dimension $= \frac{h_a}{h_0}$ , [-]
$k$	:	Perméabilité du disque inférieur, [m <sup>2</sup> ]
$k_r$ et $k_z$	:	Paramètres de perméabilité de la matrice poreuse anisotrope, [m <sup>2</sup> ]
$\ell$	:	Paramètre des couples de contraintes $= \sqrt{\eta/\mu_s}$ , [m]
$\tilde{\ell}$	:	Paramètre des couples de contraintes sans dimension $= \ell/h_0$ , [-]
$p$	:	Pression dans le fluide, [Pa]
$p^*$	:	Pression du film fluide dans le milieu poreux, [Pa]
$Q_r$	:	Débit volumique de fuite à $r = R$ selon la direction $\vec{e}_r$ , [m <sup>3</sup> /s]
$r, \theta$ et $z$	:	Variables d'espace en coordonnées cylindriques, [m]
$R$	:	Rayon des disques, [m]
$\tilde{r}$	:	Rayon de disque sans dimension $= r/R$ , [-]
$t$	:	Temps, [s]
$\tilde{t}$	:	Temps sans dimension $= ft$ , [-]
$u, v$ et $w$	:	Composantes de la vitesse de l'écoulement, [m/s]
$\langle u \rangle, \langle v \rangle, \langle w \rangle$	:	Vitesses moyennes de l'écoulement, [m/s]
$u^*, v^*$ et $w^*$	:	Composantes de vitesse dans la matrice poreux, [m/s]
$\vec{V}$	:	Vecteur vitesse du fluide, [m/s]
$\vec{V}^*$	:	Vecteur vitesse dans la matrice poreux, [m/s]
$V_p$	:	Volume des pores, [m <sup>3</sup> ]
$V_t$	:	Volume total, [m <sup>3</sup> ]
$V_s$	:	Volume du solide, [m <sup>3</sup> ]
$W$	:	Capacité de charge (portance HD), [N]
$W_{sq}$	:	Vitesse d'écrasement, [m/s]
$\tilde{W}_{sq}$	:	Vitesse d'écrasement sans dimension $= \frac{W_{sq}}{fh_0}$ , [-]

***Lettres grecques***

$\tau_{rz}$	:	Contrainte de cisaillement, [Pa]
$\mu_s$	:	Viscosité effective du fluide suspendant, [Pa. s]
$\mu_{bf}$	:	Viscosité du fluide de base, [Pa. s]
$\eta$	:	Constante du matériau responsable de la propriété de couple de contrainte, [N. s]
$\phi$	:	Fraction volumique des particules dans le fluide de base, [–]
$\Phi$	:	Fonction de dissipation visqueuse, [W. m <sup>-3</sup> ]
$\beta_r$ et $\beta_z$	:	Rapports entre la taille de la microstructure et la taille des pores, [–]

## Liste des figures

<b>Figure 1.1:</b> Représentation schématique des différents types de contact influençant le coefficient de frottement de surfaces en PDMS lubrifiées par des particules de verre en suspension dans un fluide.....	3
<b>Figure 1.2:</b> Géométrie d'un écoulement de type squeeze film.....	4
<b>Figure 1.3:</b> Géométrie du modèle de plaques rectangulaires pour une articulation du genou...	4
<b>Figure 1.4:</b> Géométrie d'un film fluide en écrasement entre plaques triangulaires parallèles...	5
<b>Figure 1.5:</b> Modèle physique d'un cylindre en contact avec une surface plane rugueuse.....	5
<b>Figure 1.6:</b> Palier à patin incliné (glissière hydrodynamique) .....	5
<b>Figure 1.7:</b> Film comprimé entre plaques circulaires poreuses rugueuses à paliers étagés sous champ magnétique appliqué field.....	6
<b>Figure 1.8:</b> Caractéristiques de la lubrification hydrodynamique.....	7
<b>Figure 1.9:</b> Mécanismes de développement de la pression pour la lubrification hydrodynamique.....	8
<b>Figure 1.10:</b> Caractéristiques de la lubrification élastohydrodynamique dure.....	8
<b>Figure 1.11:</b> Caractéristiques de la lubrification élastohydrodynamique déformables.....	8
<b>Figure 1.12:</b> Conditions de film des régimes de lubrification.....	9
<b>Figure 1.13:</b> Le coefficient de frottement pour différentes conditions de lubrification.....	10
<b>Figure 1.14:</b> Rhéogrammes des différents fluides.....	11
<b>Figure 2.1:</b> Schéma du contact hydrodynamique en coordonnées cylindriques.....	17
<b>Figure 2.2:</b> Schéma du contact selon la théorie de Reynolds en coordonnées cylindriques...	20
<b>Figure 2.3:</b> Débit de fuite dans le cas d'un contact de forme rectangulaire.....	23
<b>Figure 2.4:</b> Débit de fuite dans le cas d'un contact de forme cylindrique.....	23
<b>Figure 3.1:</b> Configuration géométrique de lécrasement.....	28
<b>Figure 3.2:</b> Champ de pression $p$ pour différentes valeurs de $\tilde{\ell}$ .....	32
<b>Figure 3.3 :</b> Capacité de charge $W$ pour différentes valeurs de $\tilde{\ell}$ .....	33
<b>Figure 3.4 :</b> Vitesse radiale $u$ du film pour différentes valeurs de $\tilde{\ell}$ .....	33
<b>Figure 3.5 :</b> Débit de fuite $Q_r$ au bord ( $r = R$ ) pour différentes valeurs de $\tilde{\ell}$ .....	34
<b>Figure 3.6 :</b> Contrainte de cisaillement au bord du disque ( $r = R$ ) pour différentes valeurs de $\tilde{\ell}$ .....	34
<b>Figure 3.7 :</b> Force de frottement $F_f$ pour différentes valeurs de $\tilde{\ell}$ .....	35

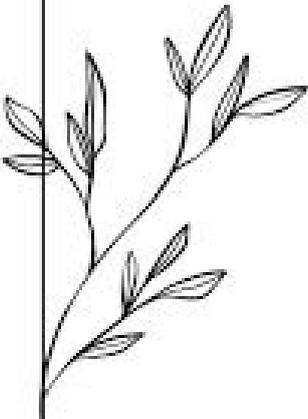
<b>Figure 3.8 :</b> Évolution du champ de pression $p$ pour différentes valeurs de $\phi$ .....	<b>36</b>
<b>Figure 3.9 :</b> Capacité de charge $W$ pour différentes valeurs de $\phi$ .....	<b>37</b>
<b>Figure 3.10 :</b> Vitesse radiale $u$ du film pour différentes valeurs de $\phi$ .....	<b>37</b>
<b>Figure 3.11 :</b> Débit de fuite $Q_r$ au bord ( $r = R$ )pour différentes valeurs de $\phi$ .....	<b>38</b>
<b>Figure 3.12 :</b> Contrainte de cisaillement au bord du disque ( $r = R$ ) pour différentes valeurs de $\phi$ .....	<b>38</b>
<b>Figure 3.13 :</b> Force de frottement $F_f$ pour différentes valeurs de $\phi$ .....	<b>39</b>
<b>Figure 3.14 :</b> Évolution du champ de pression $p$ pour différentes valeurs de fréquences $f$ ....	<b>40</b>
<b>Figure 3.15 :</b> Portance du film $W$ pour différentes valeurs de fréquences $f$ .....	<b>41</b>
<b>Figure 3.16 :</b> Vitesse radiale $u$ du film pour différentes valeurs de fréquences $f$ .....	<b>41</b>
<b>Figure 3.17:</b> Débit de fuite $Q_r$ au bord ( $r = R$ )pour différentes valeurs de fréquences $f$ .....	<b>42</b>
<b>Figure 3.18 :</b> Contrainte de cisaillement au bord du disque ( $r = R$ ) pour différentes valeurs de fréquences $f$ .....	<b>42</b>
<b>Figure 3.19 :</b> Force de frottement $F_f$ pour différentes valeurs de fréquences $f$ .....	<b>43</b>
<b>Figure 4.1 :</b> Les espaces vides dans un milieu poreux.....	<b>45</b>
<b>Figure 4.2 :</b> Modèle géométrique (3-D) .....	<b>49</b>
<b>Figure 4.3 :</b> Champ de pression $p$ pour différentes valeurs de $\tilde{\ell}$ .....	<b>55</b>
<b>Figure 4.4 :</b> Capacité de charge $W$ pour différentes valeurs de $\tilde{\ell}$ .....	<b>56</b>
<b>Figure 4.5 :</b> Vitesse radiale $u$ du film pour différentes valeurs de $\tilde{\ell}$ .....	<b>56</b>
<b>Figure 4.6:</b> Débit de fuite $Q_r$ au bord ( $r = R$ )pour différentes valeurs de $\tilde{\ell}$ .....	<b>57</b>
<b>Figure 4.7 :</b> Contrainte de cisaillement au bord du disque ( $r = R$ ) pour différentes valeurs de $\tilde{\ell}$ .....	<b>58</b>
<b>Figure 4.8 :</b> Force de frottement $F_f$ pour différentes valeurs de $\tilde{\ell}$ .....	<b>58</b>
<b>Figure 4.9 :</b> Champ de pression $p$ pour différentes valeurs de $k$ .....	<b>59</b>
<b>Figure 4.10 :</b> Capacité de charge $W$ pour différentes valeurs de $k$ .....	<b>60</b>
<b>Figure 4.11 :</b> Vitesse radiale $u$ du film pour différentes valeurs de $k$ .....	<b>60</b>
<b>Figure 4.12 :</b> Débit de fuite $Q_r$ au bord ( $r = R$ )pour différentes valeurs de $k$ .....	<b>61</b>
<b>Figure 4.13 :</b> Contrainte de cisaillement au bord du disque ( $r = R$ ) pour différentes valeurs de $k$ .....	<b>62</b>
<b>Figure 4.14 :</b> Force de frottement $F_f$ pour différentes valeurs de $k$ .....	<b>63</b>

**Liste des tableaux**

**Tableau 3.1:** Données géométriques et physiques du problème direct.....**31**

**Tableau 4.1 :** Données géométriques et physiques utilisées pour l'étude paramétrique.....**54**

***Introduction***  
***Générale***



## **Introduction Générale**

La lubrification est un domaine clé dans l'ingénierie mécanique, notamment dans la conception et l'optimisation des systèmes tribologiques, où les performances et la durabilité des pièces en contact dépendent largement du comportement du film fluide interfacial. L'évolution des besoins industriels, conjuguée à la miniaturisation des systèmes et à l'utilisation de matériaux complexes, a conduit à l'étude approfondie de fluides non newtoniens, de milieux poreux et de conditions d'écoulement spécifiques comme le régime d'écrasement (squeeze film).

Dans ce contexte, le présent mémoire est consacré à l'étude d'un film fluide à couple de contrainte en suspension, dans un système de lubrification en régime d'écrasement, en tenant compte de divers effets influents tels que la concentration particulaire et la présence d'un substrat poreux.

Le premier chapitre propose une revue bibliographique sur les paramètres influents dans la performance des films lubrifiants, notamment les propriétés du fluide, la porosité, la rugosité, et les effets magnétiques. Il présente également les différents régimes de lubrification et les lois de comportement rhéologique associées aux fluides complexes.

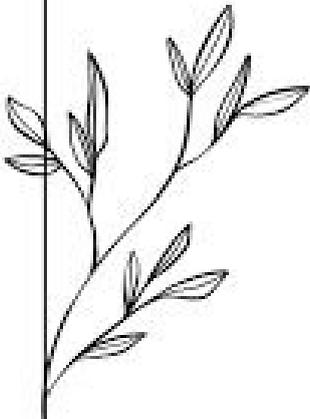
Le deuxième chapitre est consacré à la théorie de la lubrification hydrodynamique, en s'appuyant sur les équations de base de la mécanique des fluides et la dérivation de l'équation de Reynolds adaptée à un écoulement mince en coordonnées cylindriques. Il introduit les paramètres de performance tels que la capacité de charge, le frottement, et les débits de fuite.

Dans le troisième chapitre, l'étude porte sur le comportement d'un fluide à couple de contrainte en suspension entre deux surfaces rigides, en régime d'écrasement. Une modélisation du comportement rhéologique est présentée, suivie par l'établissement de l'équation de Reynolds modifiée, la détermination du champ de pression et l'analyse paramétrique des effets.

Enfin, le quatrième chapitre explore l'impact d'un milieu poreux sur les performances d'un film lubrifiant non newtonien en régime d'écrasement. Une formulation couplée du problème est établie pour le film fluide et le substrat poreux. Le problème est résolu analytiquement à l'aide d'approximations de type Morgan–Cameron.

À travers cette étude, nous visons à approfondir la compréhension des mécanismes de lubrification dans des conditions spécifiques, notamment en présence de suspensions et de milieux poreux, en nous appuyant exclusivement sur des approches analytiques.

*Chapitre I*  
*Revue*  
*Bibliographique*



## 1.1 Introduction

La lubrification par squeeze film joue un rôle fondamental dans de nombreux systèmes mécaniques, tels que les roulements, les engrenages et les dispositifs biomécaniques. Ce phénomène intervient lorsque deux surfaces en mouvement rapproché sont soumises à des forces de compression, positives ou négatives, et doivent être séparées par un film lubrifiant afin d'éviter tout contact direct.

En raison de son importance, de nombreuses recherches ont été menées pour explorer l'influence des propriétés rhéologiques du fluide, des paramètres géométriques, ainsi que des conditions de mouvement sur la dynamique de l'écrasement du fluide. Ces études permettent de mieux comprendre le comportement du film lubrifiant et d'optimiser les performances des systèmes mécaniques.

Osborne Reynolds (1886), pionnier de la théorie de la lubrification hydrodynamique, a démontré que la lubrification par squeeze film permet de séparer deux surfaces rapprochées grâce à la pression générée dans le film fluide. Cette séparation réduit le contact direct et l'usure mécanique. Les travaux de Reynolds ont conduit à la formulation de l'équation de Reynolds, qui décrit la distribution de pression dans le film lubrifiant et constitue aujourd'hui la base théorique des études modernes sur la lubrification par squeeze film.

## 1.2 Influence des Propriétés du Fluide et des Paramètres Géométriques

### 1.2.1 Comportement du Fluide

Le comportement du fluide lubrifiant, qu'il soit newtonien ou non-newtonien, joue un rôle crucial dans la performance des systèmes de lubrification. Les fluides newtoniens, étudiés par des chercheurs tels que Jackson, Bujurke et al., Megat et al., Hvacek, Ruggiero et al., Alshehri et Sharma, Hamrock et Hori, suivent la loi de Newton dans la plupart des cas classiques [1,2,3,4]. Cependant, sous des conditions de forte pression ou de confinement, les fluides lubrifiants peuvent présenter un comportement non-newtonien, où la viscosité dépend du cisaillement et la dissipation thermique modifie les performances du film, nécessitant des modèles adaptés pour décrire la réalité des contacts lubrifiés [5,6,7].

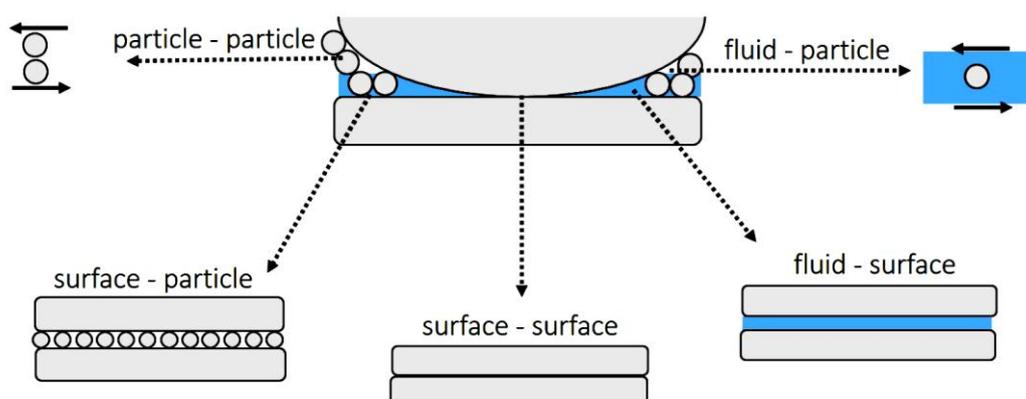
Des études récentes, telles que celles de Sarkar et al, ont analysé des fluides à rhéologie complexe [8,11,12]. Ces recherches montrent que les lubrifiants pseudoplastiques tendent à diminuer la pression et la capacité de charge, tandis que les fluides dilatants ou à couple stress

peuvent les augmenter. Ces effets sont amplifiés par des facteurs tels que la rugosité, la porosité ou la microstructure du support [8,10,11,12].

Enfin, la comparaison entre fluides newtoniens et non-newtoniens dans des systèmes réels, comme les paliers lisses, indique que les fluides non-newtoniens peuvent améliorer la formation du film et réduire le bruit ou la friction dans certains cas. Cependant, le choix optimal dépend des conditions de fonctionnement, de la géométrie et des charges appliquées [9,12,13].

### 1.2.2 Concentration en Suspension

La concentration en suspension influence directement la viscosité et, par conséquent, l'efficacité de la lubrification. Des études montrent qu'il existe une concentration optimale de particules (par exemple, 1–2 % pour les nanocristaux de cellulose) qui minimise le frottement et l'usure [14,22]. L'augmentation de la concentration de nanoparticules peut accroître la viscosité et modifier le régime de lubrification [15,16,19,20,21,23]. La stabilité de la suspension et la nature des particules (taille, surface, interactions) jouent également un rôle clé dans la réduction du coefficient de frottement et l'amélioration des performances tribologiques [17,18].

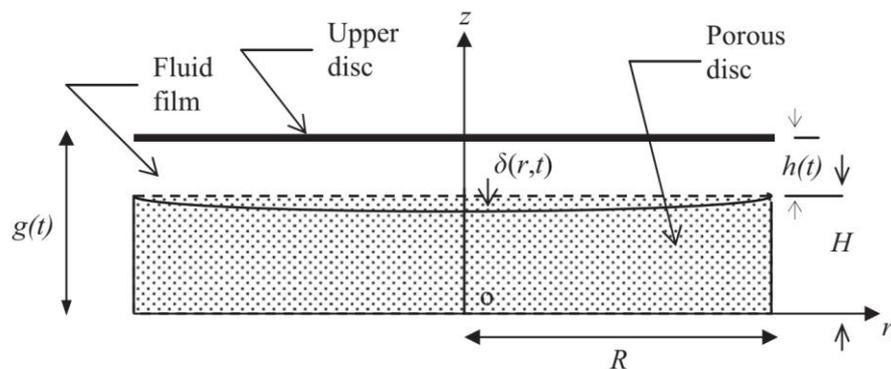


**Figure 1.1:** Représentation schématique des différents types de contact influençant le coefficient de frottement de surfaces en PDMS lubrifiées par des particules de verre en suspension dans un fluide. [19]

### 1.2.3 Porosité

La porosité du matériau est un facteur déterminant dans la lubrification, plusieurs études montrent qu'une porosité modérée optimise la rétention et la libération d'huile, réduisant le frottement et l'usure (notamment pour des composites ou polymères poreux) [23,25,26,27,28,29,30,32], tandis qu'une porosité trop élevée diminue la capacité portante et augmente l'usure ou le frottement [24,26,29,30], et qu'une faible porosité ou une porosité

optimisée peut améliorer la performance tribologique et la durée de vie des composants mécaniques [24,25,28,32].

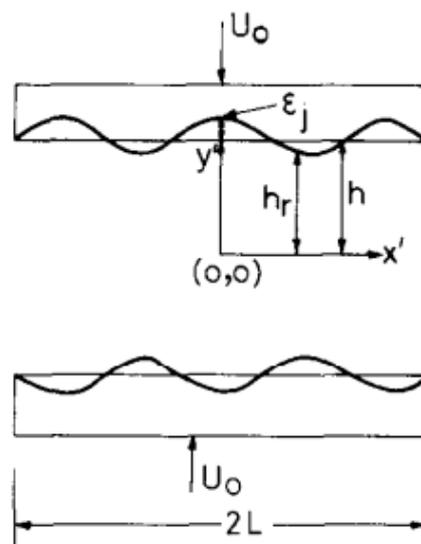


**Figure 1.2:** Géométrie d'un écoulement de type squeeze film. [33]

### 1.2.4 Rugosité

Plusieurs auteurs ont montré que la rugosité de surface influence fortement la lubrification : R. Larsson (2009), I. Křupka et al (2016), Wen-zhong Wang et al. indiquent qu'une rugosité élevée réduit l'épaisseur du film lubrifiant, favorise la transition vers la lubrification mixte ou la rupture du film, ce qui augmente le frottement et l'usure [34;35;36;39;37;40;41].

D'autre part, Xingqun Wang et al. (2021), Pan Wang et al. (2023) montrent qu'une rugosité modérée ou optimisée permet de minimiser le frottement et l'usure, tandis qu'une rugosité trop faible peut entraîner une accumulation de débris et une défaillance du film lubrifiant [38;42].

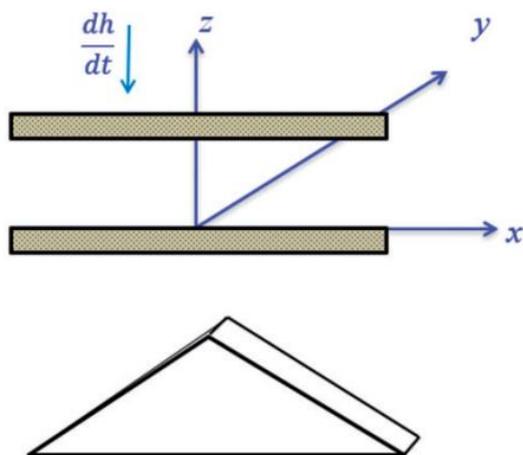


**Figure 1.3:** Géométrie du modèle de plaques rectangulaires pour une articulation du genou. [50]

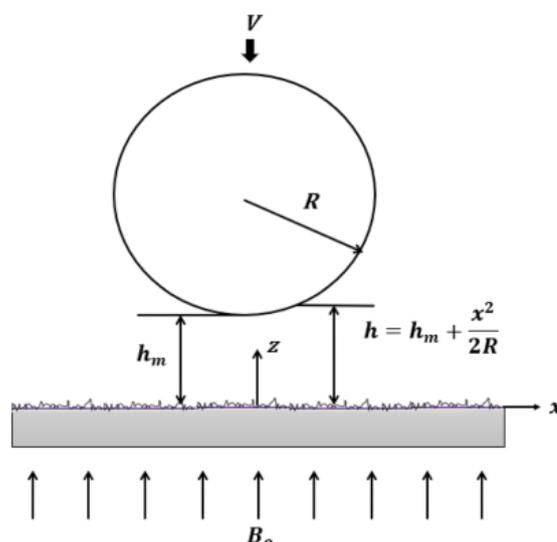
### 1.2.5 Géométrie

La géométrie des surfaces joue un rôle clé dans la lubrification par squeeze film. Les plaques parallèles (plates ou triangulaires) augmentent la capacité de charge et la pression du film, surtout avec des lubrifiants à couple stress ou ferrofluides [43;44;50] ; les surfaces inclinées, courbes ou axisymétriques (comme les plaques circulaires courbes ou les poinçons paraboloidaux) modifient la distribution de pression et la capacité de charge, avec une amélioration notable en présence de rugosité azimutale ou de champs magnétiques [46;47;48].

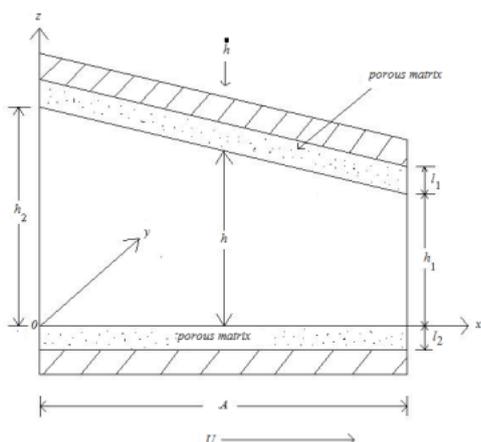
Enfin, les géométries triangulaires, elliptiques ou coniques, ainsi que la porosité, permettent d'optimiser la performance du film lubrifiant selon les besoins, chaque forme présentant des avantages spécifiques pour la pression, la capacité de charge ou le temps de réponse [45;47;51].



**Figure 1.4:** Géométrie d'un film fluide en écrasement entre plaques triangulaires parallèles. [43]



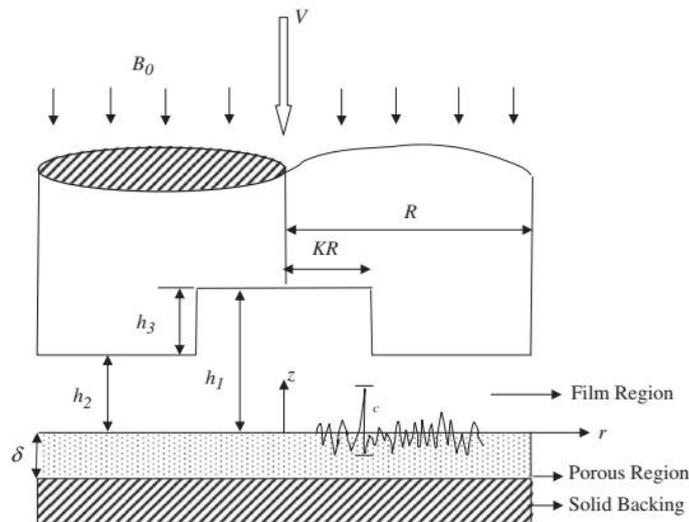
**Figure 1.5:** A Modèle physique d'un cylindre en contact avec une surface plane rugueuse. [45]



**Figure 1.6:** Palier à patin incliné (glissière hydrodynamique). [51]

### 1.2.6 Effet du Champ Magnétique (MHD)

L'application d'un champ magnétique (MHD) améliore la pression du film, la capacité de charge et le temps de réponse de la lubrification par squeeze film. Cet effet est confirmé par plusieurs études, que ce soit entre les surfaces parallèles, triangulaires, courbes ou poreuses[53 ;54 ;55 ;56 ;57 ;58 ;59].



**Figure 1.7:** Film comprimé entre plaques circulaires poreuses rugueuses à paliers étagés sous champ magnétique appliqué. [60]

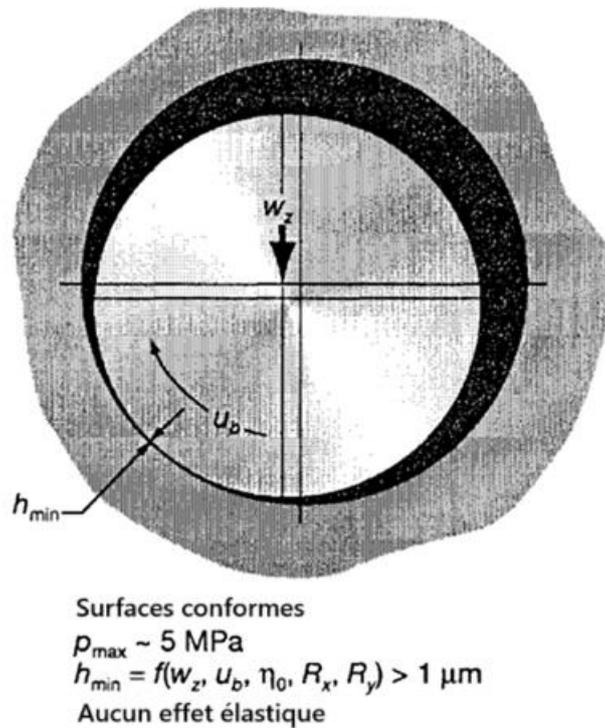
## 1.3 Régimes de Lubrification

Un lubrifiant est toute substance qui réduit le frottement et l'usure, tout en assurant un fonctionnement fluide et une durée de vie satisfaisante pour les éléments des machines. La plupart des lubrifiants sont des liquides (tels que les huiles minérales, les esters synthétiques, les silicones et l'eau), mais ils peuvent aussi être des solides (comme le polytétrafluoroéthylène, ou PTFE) pour les paliers secs, des graisses pour les roulements à éléments roulants, ou des gaz (comme l'air) pour les paliers à gaz. Les interactions physiques et chimiques entre le lubrifiant et les surfaces à lubrifier doivent être comprises afin d'assurer une durée de vie adéquate aux composants mécaniques. Afin de mieux distinguer les quatre régimes de lubrification, une brève description de chaque régime est présentée.

### 1.3.1 Lubrification Hydrodynamique

Dans la lubrification hydrodynamique, les films sont généralement épais, empêchant ainsi le contact direct entre les surfaces solides opposées. Cette condition est souvent qualifiée de « forme idéale de lubrification », car elle offre un faible frottement et une grande résistance à l'usure. La lubrification des surfaces solides est régie par les propriétés physiques globales du

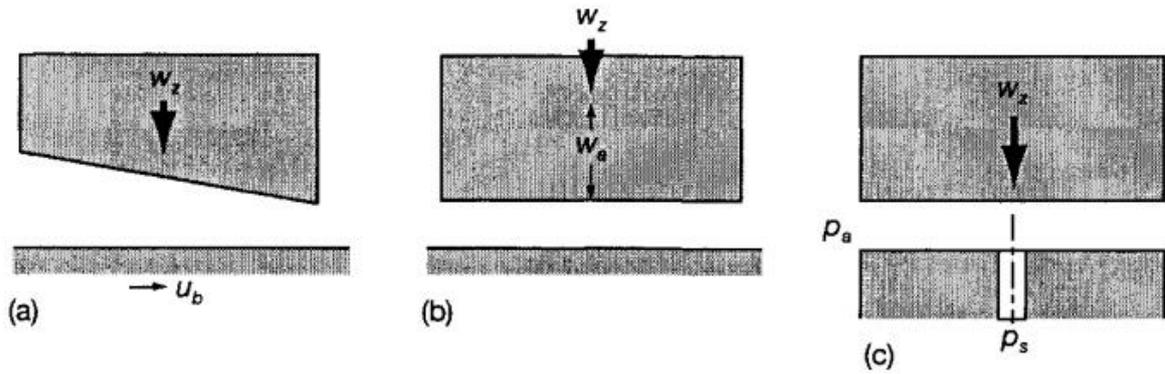
lubrifiant, notamment la viscosité, et les caractéristiques de frottement résultent uniquement du cisaillement du lubrifiant visqueux **Figure 1.3**.



**Figure 1.8:** Caractéristiques de la lubrification hydrodynamique.

Pour qu'une charge normale soit supportée par un palier, des profils de pression positive doivent se développer sur la longueur du palier. La **Figure 1.9** illustre trois méthodes pour générer une pression positive dans les paliers lubrifiés hydrodynamiquement :

- Dans un palier à patin **Figure 1.9a**, l'épaisseur du film lubrifiant doit diminuer dans la direction du glissement.
- Dans un palier à film d'écrasement **Figure 1.9b**, l'action de compression avec une vitesse d'écrasement rapproche les surfaces du palier. Ce mécanisme de génération de pression offre un effet d'amortissement utile lors du rapprochement des surfaces. Une pression positive n'est générée que lorsque l'épaisseur du film diminue.
- Dans un palier à pression externe, aussi appelé « palier hydrostatique » **Figure 1.9c**, la chute de pression à travers le palier supporte la charge. La capacité portante est indépendante du mouvement du palier et de la viscosité du lubrifiant. Il n'y a pas de contact direct entre les surfaces au démarrage et à l'arrêt, contrairement au palier à patin.

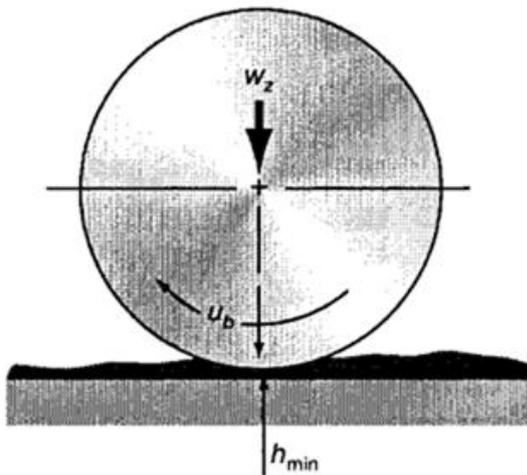


**Figure 1.9:** Mécanismes de développement de la pression pour la lubrification hydrodynamique, (a) Palier lisse ; (b) Palier à squeeze film; (c) Palier sous pression externe.

### 1.3.2 Lubrification Élastohydrodynamique

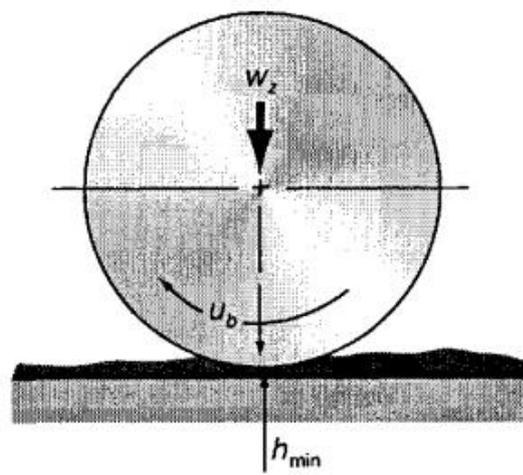
La lubrification élastohydrodynamique (EHL) est une forme de lubrification hydrodynamique où la déformation élastique des surfaces lubrifiées devient significative. Les caractéristiques importantes dans un palier à patin hydrodynamique **Figure 1.9a** une épaisseur de film convergente, un mouvement de glissement et un fluide visqueux entre les surfaces – sont également essentielles ici. L'EHL est généralement associée à des surfaces non conformes. Il existe deux formes distinctes d'EHL :

- EHL rigide (Figure 1.10)
- EHL déformables (Figure 1.11)



Surfaces non conformes  
 Matériau-hautement-élastique (e.g. steel)  
 $p_{max} \sim 1 \text{ GPa}$   
 $h_{min} = f(w_z, u_b, \eta_0, R_x, R_y, E, \xi) > 0.1 \mu\text{m}$   
 Les effets élastique et visqueux sont tous deux importants

**Figure 1.10:** Caractéristiques de la lubrification élastohydrodynamique dure.



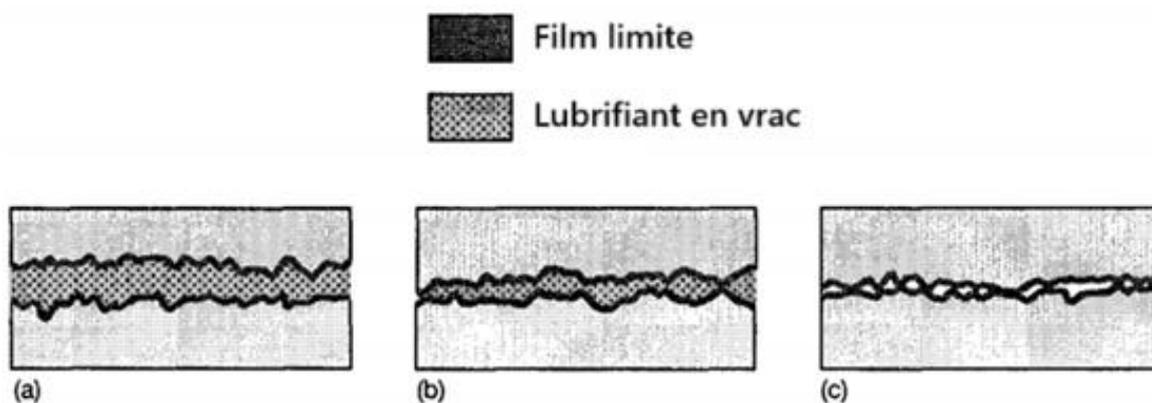
Nonconformal surfaces (e.g., nitrile rubber)  
 $p_{max} \sim 1 \text{ MPa}$   
 $h_{min} = f(w_z, u_b, \eta_0, R_x, R_y, E') \sim 1 \mu\text{m}$   
 Elastic effects predominate

**Figure 1.11:** Caractéristiques de la lubrification élastohydrodynamique déformables.

### 1.3.3 Lubrification Limite

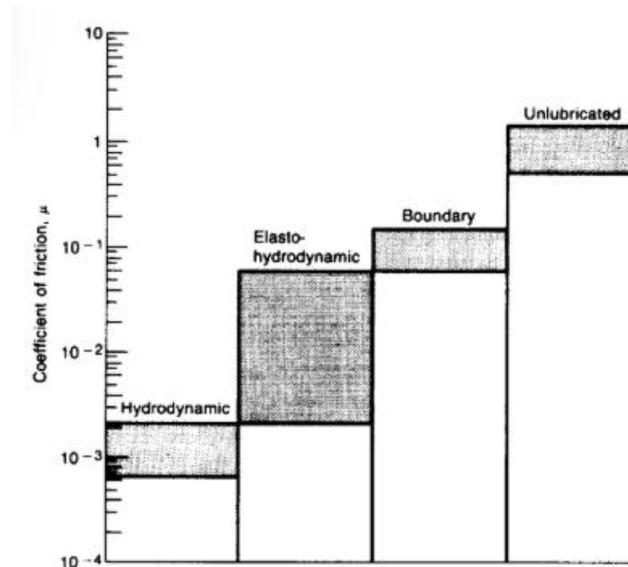
Dans la lubrification limite, les solides ne sont pas séparés par le lubrifiant, les effets du film fluide sont négligeables et il y a un contact important entre les aspérités. Le mécanisme de lubrification est alors gouverné par les propriétés physiques et chimiques de films de surface minces, de l'ordre moléculaire. Les propriétés du lubrifiant en volume sont secondaires, et le coefficient de frottement est essentiellement indépendant de la viscosité du fluide. Les caractéristiques de frottement sont déterminées par les propriétés des solides et du film lubrifiant aux interfaces communes. L'épaisseur des films de surface varie de 1 à 10 nm, selon la taille des molécules.

La **Figure 1.12** illustre les conditions de film dans la lubrification hydrodynamique et limite. Les aspérités de surface ne sont pas en contact dans le cas de la lubrification hydrodynamique, mais le sont en lubrification limite.



**Figure 1.12:** Conditions de film des régimes de lubrification. **(a) Lubrification par film fluide :** les surfaces sont séparées par un film lubrifiant épais . **(b) lubrification partielle :** e film lubrifiant et la lubrification de surface jouent tous deux un rôle. **(c) lubrification limite :** la performance dépend entièrement de la couche limite.

La **Figure 1.13** montre l'évolution du coefficient de frottement dans les différents régimes de lubrification. En lubrification limite, bien que le frottement soit beaucoup plus élevé qu'en régime hydrodynamique, il reste bien inférieur à celui de surfaces non lubrifiées. Le coefficient de frottement moyen augmente de trois ordres de grandeur en passant du régime hydrodynamique à l'élastohydrodynamique, puis à la lubrification limite, et enfin au régime non lubrifié.



**Figure 1.13:** Le coefficient de frottement pour différentes conditions de lubrification.

## 1.4 Comportement rhéologiques des Fluides

La rhéologie est l'étude de la déformation et de l'écoulement de la matière sous l'effet d'une contrainte appliquée. Les fluides peuvent être classés en deux grandes catégories selon leur comportement sous cisaillement :

- a) **Les fluides newtoniens** : Leur viscosité est constante, indépendante du taux de cisaillement. La relation entre la contrainte de cisaillement ( $\tau$ ) et le taux de cisaillement ( $\dot{\gamma}$ ) est linéaire et passe par l'origine (Figure 14). Les fluides tels que l'eau, l'huile minérale et l'air en sont des exemples typiques.
- b) **Les fluides non newtoniens** : Leur viscosité apparente ( $\tau/\dot{\gamma}$ ) n'est pas constante et dépend des conditions d'écoulement (taux de cisaillement, durée de cisaillement, etc.). Leur courbe d'écoulement peut être non linéaire ou ne pas passer par l'origine.

Les fluides non newtoniens peuvent être classés en trois groupes principaux :

- **Fluides indépendants du temps** : Le taux de cisaillement en un point ne dépend que de la contrainte de cisaillement à cet instant. Ces fluides sont également appelés *fluides purement visqueux, inélastiques* ou *fluides généralisés de Newton*.
- **Fluides dépendants du temps** : La relation entre la contrainte et le taux de cisaillement dépend aussi de la durée du cisaillement et de l'histoire cinématique du fluide.

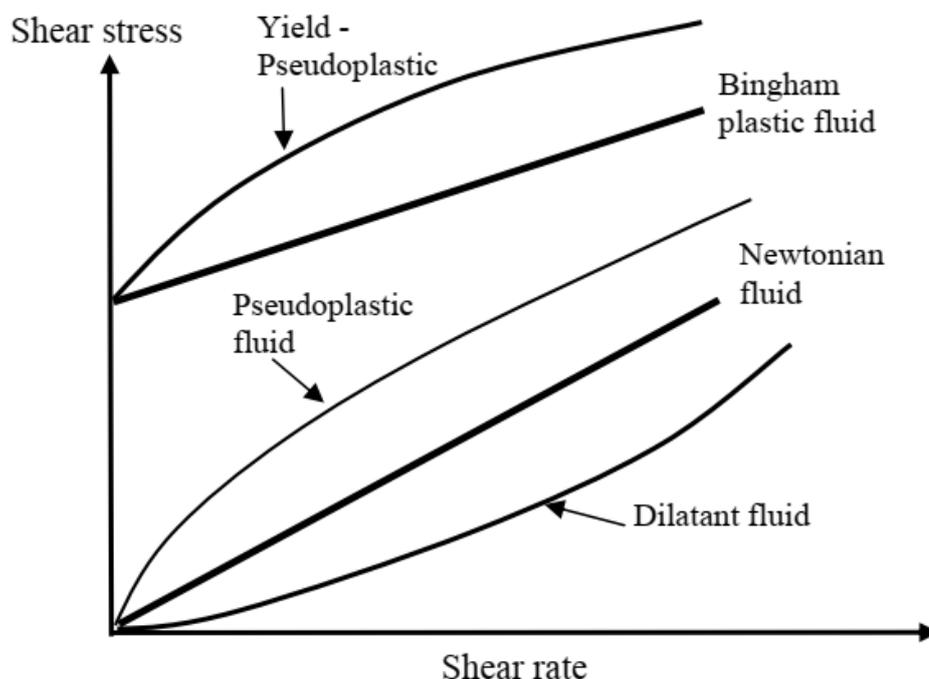
- **Fluides viscoplastiques** : Ils présentent à la fois des propriétés de fluides et de solides élastiques, avec une récupération partielle après déformation (comportement élasto-visqueux).

En cisaillement simple, le comportement de ces fluides peut être décrit par la relation constitutive suivante :

$$\tau_{yx} = f(\dot{\gamma}_{yx})$$

Cette équation signifie que le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}_{yx}$  en un point du fluide dépend uniquement de la valeur instantanée de la contrainte  $\tau_{yx}$  en ce point (ou inversement). Selon la forme de cette fonction, ces fluides peuvent être subdivisés en trois types :

- **Fluides rhéofluidifiants (pseudoplastiques)** : La viscosité apparente diminue avec l'augmentation du taux de cisaillement (ex. polymères, suspensions).
- **Fluides rhéoépaississants (dilatants)** : La viscosité apparente augmente avec le taux de cisaillement (ex. suspensions concentrées).
- **Fluides viscoplastiques** : Ils nécessitent un seuil de contrainte (seuil d'écoulement) avant de se déformer (ex. pâtes, certains gels).



**Figure 1.14:** Rhéogrammes des différents fluides.

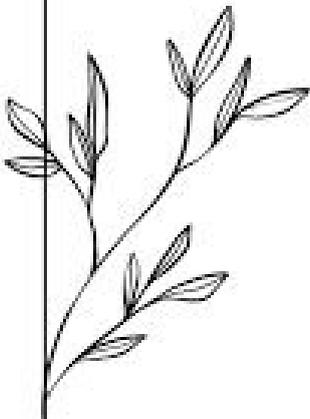
## 1.5 Conclusion

Ce chapitre a permis d'établir un cadre théorique pour l'étude numérique de l'écrasement d'un fluide entre deux disques circulaires. Les travaux fondateurs de Reynolds ont jeté les bases de la compréhension des phénomènes de lubrification par film mince, tandis que les recherches plus récentes ont mis en évidence la complexité des interactions entre les propriétés rhéologiques des fluides, les caractéristiques géométriques des surfaces et les conditions opératoires.

L'analyse approfondie des publications scientifiques montre que le comportement du film lubrifiant dans une configuration axisymétrique est gouverné par plusieurs paramètres clés. La nature newtonienne ou non-newtonienne du fluide influence directement la génération de pression et la capacité portante. Les effets de la rugosité surface, de la porosité et des champs magnétiques externes modifient significativement la dynamique de l'écrasement. Par ailleurs, la transition entre les différents régimes de lubrification - hydrodynamique, élastohydrodynamique et limite - doit être particulièrement prise en compte pour une modélisation fidèle du phénomène.

Ces éléments théoriques constituent une base essentielle pour le développement de notre modèle numérique. Ils mettent en lumière les défis à relever, notamment la nécessité de coupler les équations de la rhéologie complexe avec les déformations élastiques des surfaces, tout en garantissant la stabilité des algorithmes de calcul. Les perspectives ouvertes par les récentes avancées en simulation numérique et en intelligence artificielle offrent des opportunités prometteuses pour améliorer la précision des prédictions et élargir le champ des applications industrielles de ce type de système tribologique.

*Chapitre II*  
*Théorie de la*  
*lubrification*  
*hydrodynamique*



## 2.1 Introduction

La lubrification hydrodynamique constitue l'un des régimes fondamentaux de la tribologie. Elle repose sur la formation d'un film fluide généré par le mouvement relatif entre deux surfaces, permettant ainsi de maintenir une séparation complète entre celles-ci. Ce film agit comme un coussin de fluide, réduisant de manière significative les frottements et l'usure, et assurant une transmission efficace des efforts mécaniques.

L'étude de ce phénomène est particulièrement pertinente dans le cas des films d'écrasement (squeeze films), qui apparaissent lorsque la distance entre deux surfaces varie rapidement sous l'effet d'une charge normale. Ce type de configuration est fréquent dans les systèmes dynamiques tels que les roulements, les butées ou les dispositifs amortisseurs.

Ce chapitre s'attache à établir les bases théoriques de la lubrification hydrodynamique à partir des équations fondamentales de la mécanique des fluides. Il présente notamment le modèle du micro-continuum de V. K. Stokes et aboutit à la dérivation de l'équation de Reynolds modifiée en coordonnées cylindriques, adaptée à l'étude des films minces. Cette équation constitue l'outil central pour analyser les performances hydrodynamiques dans les configurations étudiées par la suite.[61,62,63].

## 2.2 Équations de base de la mécanique du micro- continuum de V. K. Stokes

La théorie des fluides à couples de contraintes, introduite par Vijay Kumar Stokes [68] à partir des travaux pionniers des frères Cosserat [69] sur les milieux élastiques polaires, constitue un cas particulier de la théorie des fluides polaires. Elle prend en compte, en plus des forces de surface et de volume classiques, les couples de contraintes ainsi que les couples de volume. Cette approche est adaptée aux fluides dont la microstructure du solvant joue un rôle mécanique significatif. Elle a été largement utilisée pour étudier le comportement des films lubrifiants minces [70]. Une autre application notable concerne les fluides réels contenant des particules métalliques chargées, soumis à un champ électromagnétique externe, induisant une rotation des particules par rapport à leurs voisines.

D'après la théorie isotherme du micro-continuum de V. K. Stokes (1966), les équations de base qui caractérisent l'écoulement de fluide à couples de contraintes compressible sont :

- Équation scalaire de continuité :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{V}) = 0 \quad (\text{II-1})$$

où  $D\rho/Dt = \partial\rho/\partial t + \overline{\operatorname{grad}} \rho \cdot \vec{V}$

- Équation vectorielle de mouvement :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} + \frac{1}{2} \overline{\operatorname{rot}}(\rho \vec{c}) + \overline{\operatorname{div}}(\overline{\tau}^{(s)}) + \frac{1}{2} \overline{\operatorname{rot}}(\overline{\operatorname{div}}(\overline{M})) \quad (\text{II-2})$$

où :

$\rho$  : masse volumique du fluide,

$t$  : variable temporelle,

$\vec{V}$  : vecteur vitesse du fluide,

$D\vec{V}/Dt$  : vecteur accélération du fluide tel que  $\vec{a} = D\vec{V}/Dt = \partial\vec{V}/\partial t + \overline{\operatorname{grad}} \vec{V} \cdot \vec{V}$ ,

$\vec{g}$  : vecteur force de volume par unité de masse,

$\vec{c}$  : vecteur couple de volume par unité de masse,

$\overline{\tau}^{(s)}$  : tenseur des contraintes d'ordre 2 symétrique,

$\overline{M}$  : tenseur des couples de contrainte d'ordre 2.

L'équation constitutive du fluide à couples de contraintes s'écrit en notation indicielle comme suit :

$$T_{ji} = \underbrace{-p \delta_{ij} + \lambda \operatorname{div}(\vec{V}) \delta_{ij} + 2 \mu D_{ij}}_{\tau_{ij}^{(s)} = T_{(ij)}} - \underbrace{\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (m_{,k} + 4 \eta \omega_{k,rr} + \rho c_k)}_{T_{[ij]} = \text{partie anti-symétrique}} \quad (\text{II-3})$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

où :

$p$  : pression dans le fluide

$\delta_{ij}$  : symbole de Kronecker ou tenseur unité

$\lambda$  et  $\mu$  : coefficients de viscosité du fluide

$D_{ij}$  : tenseur des taux de déformation symétrique,  $D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$

$\varepsilon_{ijk}$  : tenseur de permutation d'ordre trois antisymétrique

$c_k$  : vecteur des couples de volume, et  $\operatorname{div}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = D_{\alpha\alpha} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha}$

L'équation du tenseur des couples de contraintes est donnée par :

$$M_{rk} = \frac{1}{3} M_{nn} \delta_{rk} + 4 \eta \omega_{k,r} + 4 \acute{\eta} \omega_{r,k} \quad (\text{II-4})$$

où :

$$\boldsymbol{\omega} : \text{vecteur tourbillon ou taux de rotation, } \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \overline{\text{rot}}(\vec{V}) \text{ ou encore } \omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial V_k}{\partial x_j}$$

$$M_{nn} = m : \text{trace du tenseur des couples de contraintes, } M_{nn} = \text{trace}(\overline{\overline{M}})$$

$\eta$  et  $\acute{\eta}$  : constantes matérielles responsables de la propriété des couples de contraintes.

La virgule dans les suffixes indique la différenciation covariante et  $\omega_{k,rr}$  signifie  $\omega_{k,11} + \omega_{k,22} + \omega_{k,33}$ . Ces constantes physiques doivent vérifier les inégalités suivantes :

$$\mu \geq 0; \quad 3\lambda + 2\mu \geq 0; \quad \eta \geq 0; \quad |\acute{\eta}| \leq \eta \quad (\text{II-5})$$

Notons que le vecteur tourbillon et le tenseur tourbillon ou taux de rotation antisymétrique

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \text{ sont reliés par les équations suivantes :}$$

$$W_{ij} = \varepsilon_{ijr} \omega_r \quad ; \quad \omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{irs} W_{rs}$$

Il existe un paramètre de longueur caractéristique noté  $\ell = \sqrt{\eta/\mu}$ , qui représente une mesure de la polarité du fluide dans le cadre du modèle micro-continuum. Ce paramètre est nul dans le cas des fluides non polaires, tels que les fluides newtoniens classiques, ce qui traduit l'absence d'effets dus aux couples de contraintes internes.

Par ailleurs, dans le cadre de cette étude, le régime d'écoulement est supposé isotherme, c'est-à-dire à température constante dans tout le fluide. De ce fait, la dérivation de l'équation d'énergie à partir du premier principe de la thermodynamique n'est pas nécessaire.

En injectant la loi de comportement rhéologique dans l'équation de la dynamique, et en négligeant les forces et les couples de volume (ce qui est justifié pour un fluide incompressible ou iso-volume), on obtient le système d'équations générales gouvernantes suivant (voir détails en **Annexe A**) :

$$\text{div}(\vec{V}) = 0 \quad (\text{II-6})$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\overline{\text{grad}}(p) - \mu \overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}}(\vec{V})) - \eta \overline{\text{rot}}\left(\overline{\text{rot}}\left(\overline{\text{rot}}(\vec{V})\right)\right) \quad (\text{II-7})$$

Sachant que :  $\nabla^2 \vec{V} = \overline{\text{grad}}(\text{div}(\vec{V})) - \overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}}(\vec{V}))$ , l'équation (II-7) peut prendre la

$$\text{forme suivante : } \rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overline{\text{grad}} \vec{V} \cdot \vec{V} \right) = -\overline{\text{grad}}(p) + \mu \nabla^2 \vec{V} - \eta \nabla^4 \vec{V}$$

## 2.3 Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée

### 2.3.1 Hypothèses de la théorie de Reynolds

La dérivation de l'équation de Reynolds nécessite les hypothèses suivantes :

- L'épaisseur du film  $h$  est très faible devant les autres dimensions du contact  $L$ , le rapport d'échelle entre ces grandeurs  $\frac{h}{L}$  doit être de l'ordre  $10^{-3}$ . Si cette hypothèse n'est pas vérifiée, l'équation Reynolds ne peut s'appliquer.
- Le régime est laminaire ; en régime non laminaire il faudra utiliser une autre modélisation.
- Le milieu est continu, l'équation de Reynolds ne s'applique pas dans les zones où il y a rupture du film.
- Les forces massiques extérieures sont négligées, ce qui est très généralement vérifié sauf en magnétohydrodynamique.
- Les forces d'inertie dans le fluide sont négligeables devant les forces de viscosité et de pression, cela est vérifié dans le cas des films minces et laminaires.
- Il n'y a pas de glissement entre le fluide et les parois du contact ; la vitesse du fluide à la paroi est égale à celle des parois.
- La viscosité et la masse volumique du fluide ne varient pas à travers l'épaisseur du film.
- Les surfaces formant le contact sont supposées lisses et indéformables, ce qui permet de placer l'origine des axes sur cette surface.
- La courbure générale du film est négligée.
- La température ne varie pas à travers l'épaisseur du film, cette hypothèse n'est pas vérifiée ; elle est cependant très utilisée, car la résolution de l'équation Reynolds généralisée (3 – D) qui tient compte de l'effet thermique est très difficile.

### 2.3.2 Analyse dimensionnelle des équations de mouvement pour un écoulement de film mince

Pour l'écriture de l'équation de Reynolds modifiée en coordonnées cylindriques **Figure 2.1**, l'équation de continuité (II-6) et de mouvement (II-7) deviennent :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-8})$$

$$\rho \begin{pmatrix} \frac{Du}{Dt} - \frac{v^2}{r} \\ \frac{Dv}{Dt} + \frac{uv}{r} \\ \frac{Dw}{Dt} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \Delta u - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{r^2} \\ \Delta v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2} \\ \Delta w \end{pmatrix} -$$

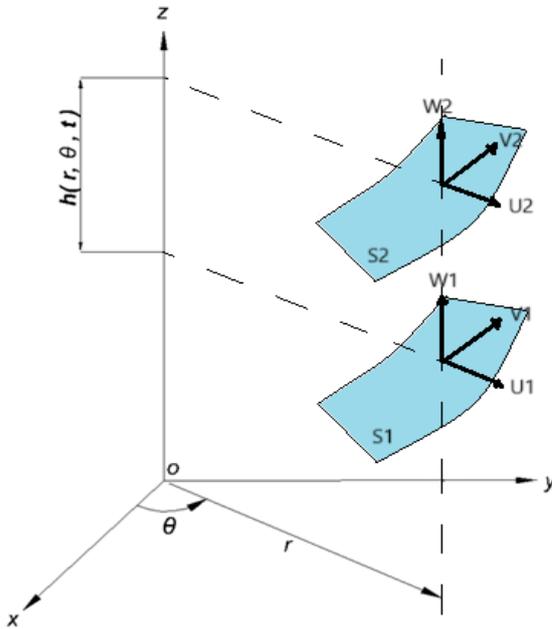
$$\eta \begin{pmatrix} \Delta^2 u - \frac{2}{r^2} \Delta u - \frac{4}{r^2} \Delta \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{8}{r^3} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial r} - \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{4}{r^3} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{4}{r^4} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{3u}{r^4} \\ \Delta^2 v - \frac{2}{r^2} \Delta v + \frac{4}{r^2} \Delta \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) - \frac{8}{r^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} - \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{4}{r^3} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{3v}{r^4} \\ \Delta^2 w \end{pmatrix} \quad (\text{II-9})$$

où :  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + w \frac{\partial}{\partial z}$

$$\Delta(\ ) = \nabla^2(\ ) = \frac{\partial^2(\ )}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\ )}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(\ )}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2(\ )}{\partial z^2}$$

$$\Delta^2(\ ) = \nabla^4(\ ) = \frac{\partial^4(\ )}{\partial r^4} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(\ )}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial(\ )}{\partial r} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4(\ )}{\partial \theta^4} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2(\ )}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^4(\ )}{\partial z^4} + 2 \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4(\ )}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4(\ )}{\partial r^2 \partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4(\ )}{\partial \theta^2 \partial z^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3(\ )}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3(\ )}{\partial r \partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3(\ )}{\partial r^3} \right)$$

Les composantes du vecteur de vitesse d'écoulement sont : u dans la direction radiale r. et v dans la direction angulaire θ .et w dans la direction axiale z.



**Figure 2.1 :** Schéma du contact hydrodynamique en coordonnées cylindriques.

- Les variables adimensionnelles sont cette fois-ci :

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= \frac{r}{R} & \tilde{u} &= \frac{u}{W} & \tilde{\mu} &= \frac{\mu}{\mu_0} & \tilde{p} &= \frac{h^2}{\mu_0 R W} p \\ \tilde{z} &= \frac{z}{h} & \tilde{v} &= \frac{v}{W} & \tilde{\eta} &= \frac{\eta}{\eta_0} & R_e &= \frac{\rho W h}{\mu_0} \\ \varepsilon &= \frac{h}{R} & \tilde{W} &= \frac{W}{W \varepsilon} & \tilde{l}_0 &= \frac{l_0}{h} & \tilde{t} &= \frac{W}{R} t \end{aligned} \quad (\text{II-10})$$

En tenant compte de ces changements de variables, le système d'équations(II-9) peut désormais être réécrit sous la forme adimensionnée suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} = & -R_e \varepsilon \left[ \frac{D\tilde{u}}{D\tilde{t}} - \frac{\tilde{v}^2}{\tilde{r}} \right] + \tilde{\mu} \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta}^2} - \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}} - \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} \right] \\
& - \tilde{\eta} \varepsilon^4 \left( \frac{l_0}{h} \right)^2 \left[ \left( \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{r}^4} + \frac{1}{\varepsilon^4} \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^4} - \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{r}^2} - \frac{1}{\tilde{r}^3} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^4} + \frac{4}{\tilde{r}^4} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta}^2} \right. \right. \\
& + 2 \left( \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta}^2 \partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{r}^2 \partial \tilde{z}^2} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta}^2 \partial \tilde{z}^2} - \frac{1}{\tilde{r}^3} \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta}^2 \partial \tilde{r}} \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \tilde{r} \partial \tilde{z}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \tilde{r}^3} \right) \right] - \frac{2}{\tilde{r}^2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta}^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} \right) \\
& - \frac{4}{\tilde{r}^2} \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}} \right)}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}} \right)}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}} \right)}{\partial \tilde{\theta}^2} + \frac{\partial^2 \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}} \right)}{\partial \tilde{z}^2} \right) + \frac{8}{\tilde{r}^3} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta} \partial \tilde{r}} \\
& \left. - \frac{4}{\tilde{r}^4} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta}^2} + \frac{4}{\tilde{r}^3} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} - \frac{4}{\tilde{r}^4} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}} - \frac{3 \tilde{u}}{\tilde{r}^4} \right] \quad (\text{II} - 11a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\theta}} = & -\tilde{\rho} R_e \varepsilon \left[ \frac{D\tilde{v}}{D\tilde{t}} + \frac{\tilde{u} \tilde{v}}{\tilde{r}} \right] + \tilde{\mu} \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}^2} + \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta}} - \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}^2} \right] \\
& - \tilde{\eta} \varepsilon^4 (l_0)^2 \left[ \left( \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{r}^4} + \frac{1}{\varepsilon^4} \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^4} - \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{r}^2} - \frac{1}{\tilde{r}^3} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^4} \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}^4} + \frac{4}{\tilde{r}^4} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}^2} \right. \right. \\
& + 2 \left( \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}^2 \partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{r}^2 \partial \tilde{z}^2} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}^2 \partial \tilde{z}^2} - \frac{1}{\tilde{r}^3} \frac{\partial^3 \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}^2 \partial \tilde{r}} \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial^3 \tilde{v}}{\partial \tilde{r} \partial \tilde{z}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial^3 \tilde{v}}{\partial \tilde{r}^3} \right) \right] - \frac{2}{\tilde{r}^2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^2} \right) \\
& + \frac{4}{\tilde{r}^2} \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta}} \right)}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta}} \right)}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta}} \right)}{\partial \tilde{\theta}^2} + \frac{\partial^2 \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta}} \right)}{\partial \tilde{z}^2} \right) - \frac{8}{\tilde{r}^3} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta} \partial \tilde{r}} \\
& \left. - \frac{4}{\tilde{r}^4} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}^2} + \frac{4}{\tilde{r}^3} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} + \frac{4}{\tilde{r}^4} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}} - \frac{3 \tilde{v}}{\tilde{r}^4} \right] \quad (\text{II} - 11b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} = & -\tilde{\rho} R_e \varepsilon^3 \left[ \frac{D\tilde{w}}{D\tilde{t}} \right] + \tilde{\mu} \varepsilon^4 \left[ \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{z}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{\theta}^2} \right] \\
& - \tilde{\eta} \varepsilon^6 \left( \frac{l_0}{h} \right)^2 \left[ \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{r}^4} + \frac{1}{\varepsilon^4} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{z}^4} - \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{r}^2} - \frac{1}{\tilde{r}^3} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^4} \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}^4} + \frac{4}{\tilde{r}^4} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}^2} \right. \\
& \left. + 2 \left( \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{\theta}^2 \partial \tilde{r}^2} - \frac{1}{\tilde{r}^3} \frac{\partial^3 \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}^2 \partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial \tilde{r}^3} \right) \right] \\
& - \tilde{\eta} \varepsilon^4 \left( \frac{l_0}{h} \right)^2 2 \left[ \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{r}^2 \partial \tilde{z}^2} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{\theta}^2 \partial \tilde{z}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial \tilde{r} \partial \tilde{z}^2} \right] \quad (\text{II-11c})
\end{aligned}$$

En appliquant les hypothèses classiques de Reynolds aux films minces, ce qui permet de négliger les termes d'ordre  $\varepsilon^2$  et supérieurs, ainsi que les termes d'inertie, les équations (II-11) se simplifient et prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} = \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} - \tilde{\eta} \left( \frac{l_0}{h} \right)^2 \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^4} \\ \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\theta}} = \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^2} - \tilde{\eta} \left( \frac{l_0}{h} \right)^2 \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^4} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} = 0 \end{cases} \quad (\text{II-12})$$

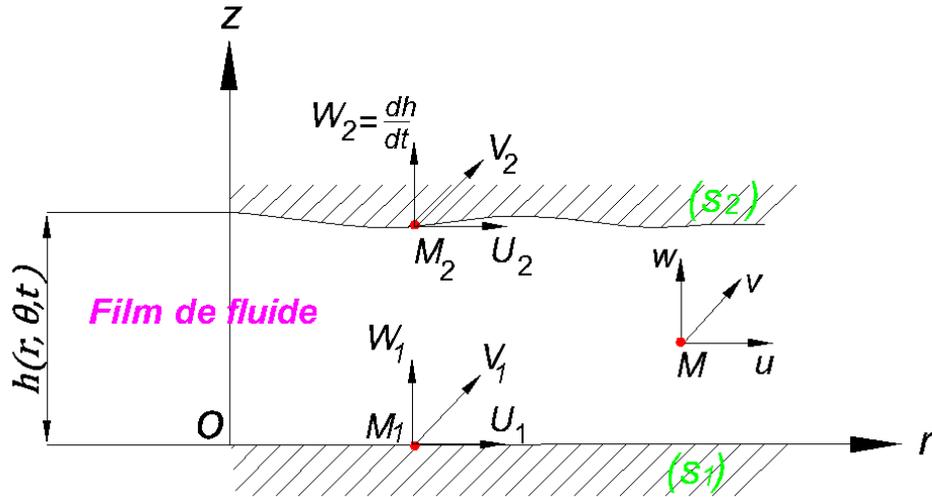
Soit en revenant aux variables dimensionnelles :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \eta \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \eta \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (\text{II-13})$$

### 2.3.3 Détermination du champ de vitesse

Les conditions aux limites appliquées aux composantes de la vitesse, illustrées dans la **Figure 2.2**, sont données par :

$$\begin{aligned}
z = 0 \quad u = U_1 \quad v = V_1 \quad w = W_1 & \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = 0 \\
z = h \quad u = U_2 \quad v = V_2 \quad w = W_2 = \frac{dh}{dt} & \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Big|_{z=h} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \Big|_{z=h} = 0
\end{aligned} \quad (\text{II-14})$$



**Figure 2.2 :** Schéma du contact selon la théorie de Reynolds en coordonnées cylindriques.

L'équation (II-13) est une équation différentielle linéaire du quatrième ordre à coefficients constants. Sa solution générale s'écrit comme la somme de la solution de l'équation homogène et d'une solution particulière correspondant au second membre.

Comme démontré dans **l'Annexe B**, pour un point de coordonnées fixes  $(r, z)$ , les deux composantes de la vitesse d'écoulement peuvent être exprimées de la manière suivante :

$$\begin{cases} u = U_1 + \left(\frac{U_2 - U_1}{h}\right)z + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) \left[ z^2 - hz + 2l^2 \left( 1 - \frac{\cosh\left(\frac{2z-h}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)} \right) \right] \\ v = V_1 + \left(\frac{V_2 - V_1}{h}\right)z + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right) \left[ z^2 - hz + 2l^2 \left( 1 - \frac{\cosh\left(\frac{2z-h}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)} \right) \right] \end{cases} \quad (\text{II-15})$$

### 2.3.4 Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée

Pour obtenir l'équation de Reynolds modifiée en coordonnées cylindriques, on doit intégrer l'équation de continuité à travers l'épaisseur du film[73] :

$$\int_0^{h(r,\theta,t)} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = \underbrace{\int_0^h \frac{\partial(ru)}{\partial r} dz}_{I_1} + \underbrace{\int_0^h \frac{\partial v}{\partial \theta} dz}_{I_2} + r \underbrace{\int_0^h \frac{\partial w}{\partial z} dz}_{I_3} = 0 \quad (\text{II-16})$$

Pour évaluer les intégrales  $I_1$  et  $I_3$ , on utilise la règle d'intégration de Leibnitz [74] qui s'écrit sous forme générale comme suit :

$$\int_{h_1(x,z,t)}^{h_2(x,z,t)} \frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1(x,z,t)}^{h_2(x,z,t)} f(x,y,z,t) dy + f(x,h_1,z,t) \frac{\partial h_1}{\partial x} - f(x,h_2,z,t) \frac{\partial h_2}{\partial x} \quad (\text{II-17})$$

Soit :

$$\begin{cases} I_1 = \left(\frac{U_1 + U_2}{2}\right)h + r \left(\frac{U_1 - U_2}{2}\right)\frac{\partial h}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{r G(h, l)}{12 \mu} \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) \right] \\ I_2 = \left(\frac{V_1 - V_2}{2}\right)\frac{\partial h}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{G(h, l)}{12 \mu r} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right) \right] \\ I_3 = r w|_0^h = r(W_2 - W_1) = r \left(\frac{dh}{dt} - W_1\right) = r \left(\frac{\partial h}{\partial t} + U_2 \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{V_2}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} - W_1\right) \end{cases} \quad (\text{II-18})$$

Par substitution dans l'équation (II-15), on obtient :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{U_1 + U_2}{2}\right)h + r \left(\frac{U_1 - U_2}{2}\right)\frac{\partial h}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{r G(h, l)}{12 \mu} \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) \right] + \left(\frac{V_1 - V_2}{2}\right)\frac{\partial h}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{G(h, l)}{12 \mu r} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right) \right] \\ & + r \left(\frac{\partial h}{\partial t} + U_2 \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{V_2}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} - W_1\right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{II-19})$$

Ainsi, l'équation de Reynolds modifiée dans le cas général s'écrit en coordonnées cylindriques comme suit :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{r G(h, l)}{12 \mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{G(h, l)}{12 \mu r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] \\ & = \left(\frac{U_1 + U_2}{2}\right)h + r \left(\frac{U_1 - U_2}{2}\right)\frac{\partial h}{\partial r} + \left(\frac{V_1 + V_2}{2}\right)\frac{\partial h}{\partial \theta} + r \frac{\partial h}{\partial t} - rW_1 \end{aligned} \quad (\text{II-20})$$

## 2.4 Calcul des différents paramètres de performance

### 2.4.1 Champ de pression dans le film

Le champ de pression dans le film lubrifiant est généralement obtenu par une intégration analytique ou numérique de l'équation de Reynolds modifiée, en tenant compte des conditions aux limites imposées sur la pression. Selon la complexité du problème, cette intégration peut être réalisée à l'aide de méthodes numériques telles que les différences finies, les éléments finis ou encore les volumes finis.

### 2.4.2 Capacité de charge (portance HD)

Considérons une surface  $S$  plane, dont le vecteur unitaire normal est noté  $\vec{y}$  ou  $\vec{z}$  selon le repère cylindrique adopté. La capacité de charge  $W$  (ou portance hydrodynamique) correspond à l'effort résultant exercé par le champ de pression  $p$  sur cette surface.

Elle est obtenue par intégration du champ de pression sur la surface  $S$ , ce qui permet de déterminer la force verticale maximale que le film lubrifiant peut supporter :

$$W = \iint_S p \, ds \quad (\text{II-21})$$

Cette grandeur constitue un paramètre clé pour évaluer l'efficacité de la lubrification dans les systèmes soumis à des charges normales.

### 2.4.3 Force de frottement

La force de frottement correspond à la composante tangentielle de l'effort exercé par le fluide sur la paroi. Elle résulte de l'action des contraintes de cisaillement au sein du film lubrifiant.

Cette force est obtenue par intégration des contraintes de cisaillement à la surface de contact :

$$F_f = \iint_s \tau_{rz} ds \quad (\text{II-22})$$

Où  $\tau_{rz}$  représente la contrainte de cisaillement agissant tangentiellement à la paroi.

La force de frottement est un paramètre essentiel pour évaluer les pertes d'énergie dans le système et l'efficacité globale de la lubrification.

### 2.4.4 Vitesse moyenne de l'écoulement

Les vitesses moyennes de l'écoulement se calculent par :

$$\begin{cases} \langle u \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h u dz \\ \langle v \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h v dz \end{cases} \quad (\text{II-23})$$

Après intégration, on trouve :

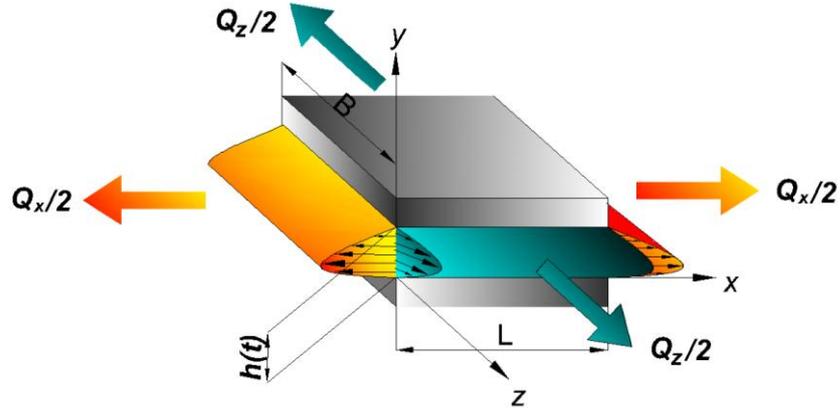
$$\begin{cases} \langle u \rangle = \frac{U_2 + U_1}{2} - \frac{G(h, l)}{12 \mu h} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \langle v \rangle = \frac{V_2 + V_1}{2} - \frac{G(h, l)}{12 \mu h} \frac{\partial p}{r \partial \theta} \end{cases} \quad (\text{II-24})$$

### 2.4.5 Débits de fuite

Les débits de fuite correspondent aux volumes de fluide s'échappant par les bords du film lubrifiant, sous l'effet du gradient de pression. Ils sont déterminés par l'intégration des composantes des vitesses moyennes aux limites latérales du domaine. Dans le cas d'une géométrie rectangulaire, les débits suivant les directions  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$  (voir **Figure 2.3**) peuvent être calculés à partir des expressions analytiques des vitesses moyennes. On obtient alors :

$$\begin{cases} Q_x = \int_0^B h u_{moy} dz = h \int_0^B u_{moy} dz = Bh \left( \frac{U_2 + U_1}{2} \right) - B \left( \frac{G(h, l)}{12 \mu} \right) \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) \\ Q_z = \int_0^L h w_{moy} dx = h \int_0^L w_{moy} dx = Lh \left( \frac{W_2 + W_1}{2} \right) - L \left( \frac{G(h, l)}{12 \mu} \right) \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) \end{cases} \quad (\text{II-25})$$

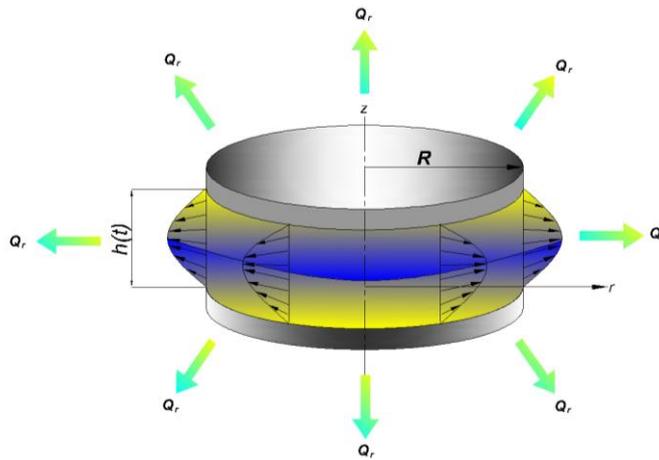
Ces grandeurs permettent d'évaluer les pertes de fluide par les extrémités du film et ont une influence directe sur la stabilité et l'efficacité de la lubrification.



**Figure 2.3 :** Débit de fuite dans le cas d'un contact de forme rectangulaire.

Dans le cas d'une géométrie cylindrique (voir **Figure 2.4**), le débit de fuite à la frontière  $r = R$ , selon la direction radiale  $\vec{e}_r$ , s'exprime comme suit :

$$Q_r = \int_0^{2\pi} h u_{moy} R d\theta = 2\pi R h u_{moy} = \pi R h (U_2 + U_1) - \pi R \left( \frac{G(h, l)}{6 \mu} \right) \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=R} \quad (\text{II-26})$$



**Figure 2.4 :** Débit de fuite dans le cas d'un contact de forme cylindrique.

Ce débit permet d'évaluer la quantité de fluide s'échappant à la périphérie du domaine lubrifié, ce qui est crucial pour la conservation du volume et la performance globale du système de lubrification.

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principes fondamentaux de la théorie du micro-continuum de V. K. Stokes, appliqués à la modélisation de l'écoulement des fluides à couples de contraintes. À partir de ces lois, nous avons établi une équation différentielle partielle (EDP) du second ordre, connue sous le nom d'équation de Reynolds modifiée, exprimée en coordonnées cylindriques. Cette équation, dont la pression constitue la variable principale, permet de décrire le comportement du fluide dans un film mince en régime hydrodynamique.

Des expressions analytiques ont également été formulées pour calculer les grandeurs caractéristiques du contact lubrifié, telles que la capacité de charge, la force de frottement, la vitesse moyenne d'écoulement et les débits de fuite.

Les équations ainsi obtenues serviront de base aux chapitres 3 et 4, où elles seront appliquées à l'étude de l'écrasement d'un film lubrifiant non newtonien à couples de contraintes, entre deux disques circulaires, en présence respectivement de surfaces solides imperméables et d'un milieu poreux.

*Chapitre III*  
*Étude du film squeeze*  
*d'un fluide à couple*  
*De contrainte en*  
*suspension*



### 3.1 Introduction

Ce chapitre traite du mécanisme de lubrification par effet d'écrasement (squeeze film) d'un lubrifiant non newtonien en suspension, confiné entre deux disques rigides, parallèles et imperméables. Ce type de configuration est représentatif de nombreux systèmes techniques où le contact direct entre surfaces doit être évité par l'intermédiaire d'un film lubrifiant dynamique. L'utilisation de lubrifiants non newtoniens, notamment les fluides à couple de contrainte décrits par la théorie du micro-continuum de Stokes, permet de mieux modéliser les comportements complexes observés en présence de microstructures internes.

Lorsqu'on considère une suspension de particules dans le fluide porteur, la viscosité effective devient fonction de la concentration. Plusieurs modèles empiriques et phénoménologiques permettent de décrire cette évolution, tels que le modèle d'Einstein (pour les faibles concentrations), le modèle de Krieger-Dougherty (adapté aux suspensions concentrées).

Ce chapitre se propose d'étudier l'effet combiné de la non-newtonianité et de la présence de particules en suspension sur le comportement du film lubrifiant soumis à un mouvement d'écrasement.

### 3.2 Caractérisation rhéologique de l'effet de la concentration en suspension

La manière la plus élémentaire de représenter la structure macroscopique d'un fluide non newtonien en suspension [97] consiste à considérer celui-ci comme un ensemble de particules rigides sphériques réparties dans un liquide newtonien. La relation rhéologique du fluide, donnée par l'équation des couples de contraintes (II-7), demeure inchangée, à l'exception du fait que la viscosité dynamique  $\mu_s$  du fluide est remplacée par la viscosité effective de la suspension.

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\overrightarrow{grad}(p) - \mu_s \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{V})) - \eta \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{V})\right)\right) \quad (\text{III-1})$$

L'étude des suspensions diluées [98] trouve son origine en 1906 avec les travaux pionniers d'Einstein. Par la suite, ses résultats ont été enrichis et modifiés par plusieurs scientifiques. Parmi l'ensemble de ces approches, les plus accessibles et les plus fréquemment employées sont les suivantes :

### 3.2.1 Modèle d'Einstein

Les recherches pionnières d'Einstein en rhéologie se sont concentrées sur le comportement des suspensions fortement diluées constituées de particules rigides sphériques, caractérisées par une fraction volumique  $\phi$ , dispersées dans un fluide newtonien de viscosité dynamique  $\mu_s$ . Il fut le premier à établir une relation analytique quantifiant l'évolution de la viscosité effective d'une telle suspension en fonction de la concentration volumique des particules solides. La formule qu'il propose demeure valide pour tout régime d'écoulement, sous la condition que la suspension reste suffisamment diluée ( $\phi \leq 1\%$ ) [99.100.101]

$$\frac{\mu_s}{\mu_{bf}} = 1 + [\eta]\phi \quad (\text{III-2})$$

où :

$\mu_s$  : la viscosité effective de la suspension

$\mu_{bf}$  : la viscosité du fluide de base

$\phi$  : la fraction volumique de particules dans le fluide de base

$[\eta]$  : la viscosité intrinsèque, dont la valeur typique pour les suspensions mono dispersées de sphères dures est de 2,5 [102].

### 3.2.2 Modèle de Batchelor et Green

En 1972, Batchelor et Green ont étendu le modèle initial proposé par Einstein en y intégrant un terme quadratique afin de prendre en considération les interactions hydrodynamiques induites par le mouvement brownien des particules en suspension. Ainsi, l'expression de la viscosité effective est modifiée, et la relation (équation III.2) devient:

$$\frac{\mu_s}{\mu_{bf}} = 1 + 2.5 \phi + 6.2 \phi^2 \quad (\text{III-3})$$

### 3.2.3 Modèle de Ball et Richmond

En 1980, Ball et Richmond ont apporté une modification au modèle de Batchelor et Green en introduisant la notion de concentration volumique maximale admissible, notée ( $\phi_m \approx 0.64$  pour des sphères dans le solvant), afin de mieux décrire le comportement rhéologique des suspensions à concentrations plus élevées. Cette approche permet de tenir compte des effets de la compacité maximale dans l'estimation de la viscosité effective.

$$\frac{\mu_s}{\mu_{bf}} = \left(1 - \frac{\phi}{\phi_m}\right)^{-2.5 \phi_m} \quad (\text{III-4})$$

### 3.2.4 Modèle de Phan-Thien et Pham

Phan-Thien et Pham en 1987 proposent une expression plus élaborée de la viscosité effective, tenant compte des interactions complexes entre particules.

$$\frac{\mu_s}{\mu_{bf}} = (1 - \phi)^{-2.5} \quad (\text{III-5})$$

### 3.2.5 Modèle de Krieger-Dougherty

En 1959, Krieger et Dougherty [103] ont développé une expression empirique permettant d'estimer la viscosité dynamique d'une suspension sur l'ensemble des fractions volumiques, en prenant en compte l'effet de la concentration sur le comportement rhéologique du fluide porteur (solvant).

$$\mu_s = \mu_{bf} \left(1 - \frac{\phi}{\phi_m}\right)^{-[\eta]\phi_m} \quad (\text{III-6})$$

La fraction volumique maximale de compactage des particules ( $\phi_m$ ) varie entre 0,495 et 0,54 à l'état de repos, et atteint environ 0,605 sous des régimes de cisaillement élevé [104, 105].

## 3.3 Équations de Reynolds modifiées

### 3.3.1 Hypothèses

Les hypothèses utilisées dans cette approche sont :

- La géométrie étudiée, représentée à la **figure 3.2**, consiste en deux disques circulaires, parallèles, de même rayon  $R$  et ayant des axes confondus, entre lesquels est interposé un film fluide d'épaisseur variable  $h(t)$ .
- Le fluide **non newtonien** se trouvant entre les deux disques est un fluide à couples de contraintes suspendant décrit par la théorie du micro-continuum de V. K. Stokes.
- Le modèle de viscosité de Krieger-Dougherty est adopté pour le calcul de la viscosité effective de la suspension.
- Les propriétés physiques du fluide lubrifiant sont supposées constantes à savoir : la viscosité dynamique du solvant  $\mu$ , la masse volumique  $\rho$ , et la nouvelle constante physique  $\eta$ .
- L'épaisseur du film  $h(t)$  correspondant au mouvement harmonique sinusoïdal du disque supérieur est exprimée par l'équation (III-7) :

$$h(t) = h_0 + h_a \cos(2\pi ft) \quad (\text{III-7})$$

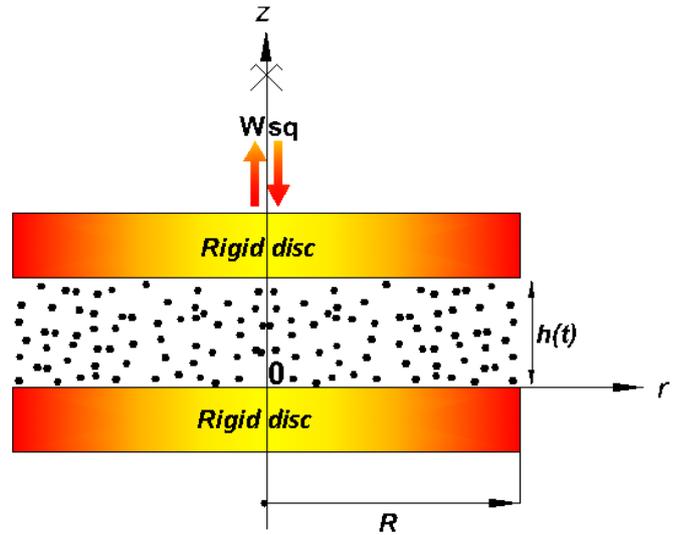
La vitesse du disque supérieur est alors donnée par l'équation (III-8):

$$W_{sq} = \frac{dh}{dt} = -2\pi f h_a \sin(2\pi f t) \quad (\text{III-8})$$

où  $h_0$  est l'épaisseur de film initiale ;  $h_a$  est l'amplitude, et  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  est la fréquence du mouvement sinusoïdal.

- Les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  sont utilisées pour l'écriture des équations gouvernantes.
- L'écoulement du fluide est supposé isotherme, incompressible et axisymétrique ( $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ )
- Les forces de volume, les couples de volume, et les forces d'inertie du fluide sont négligées [107.108].
- Pour dériver l'équation de Reynolds modifiée, on utilise les mêmes hypothèses présentées dans la section 2.3.1

**Figure 3.1 :** Configuration géométrique de l'écrasement



### 3.3.2 Conditions aux limites sur les vitesses et la pression

Les conditions aux limites sur les vitesses au niveau du disque inférieur et du disque supérieur sont:

$$\begin{aligned} z = 0 & \quad u = U_1 = 0 & \quad v = V_1 = 0 & \quad w = W_1 = 0 \\ z = h & \quad u = U_2 = 0 & \quad v = V_2 = 0 & \quad w = W_2 = W_{sq} \end{aligned} \quad (\text{III-9})$$

Les conditions aux limites sur la pression sont :

$$\begin{aligned} r = 0 & \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0 & \quad (\text{champ axisymétrique}) \\ r = R & \quad ; \quad p = 0 & \quad (\text{pression relative ambiante}) \end{aligned} \quad (\text{III-10})$$

### 3.3.3 Équation de Reynolds modifiée

En considérant les conditions d'écoulement définies au paragraphe 3.3.1 de ce chapitre, ainsi que les conditions aux limites appliquées à la vitesse (équation III-9), l'équation de Reynolds modifiée pour un fluide à couples de contraintes (équation II-20), s'écrit sous la forme suivante:

$$\frac{G(h, l)}{12 \mu_s} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \frac{\partial p}{\partial r} \right) \right] = \frac{dh}{dt} \quad (\text{III-11})$$

$$\text{où : } G(h, l) = h^3 - 12hl^2 + 24l^3 \tanh\left(\frac{h}{2l}\right)$$

Si  $l = 0$ , on retrouve l'équation de Reynolds Newtonienne classique.

## 3.4 Calcul des performances hydrodynamiques

### 3.4.1 Champ de pression du film de compression

Pour déterminer la solution de l'équation de Reynolds modifiée, on procède à une intégration analytique de l'équation (III-11) par rapport à la variable. En tenant compte des conditions aux limites (III-10), on obtient ainsi l'expression de la pression hydrodynamique développée dans le film fluide :

$$p(r, t) = \frac{3 \mu_s}{G(h, l)} \frac{dh}{dt} (r^2 - R^2) \quad (\text{III-12})$$

Une fois la pression dans le film déterminée, il devient possible de calculer les différentes caractéristiques du film de compression.

### 3.4.2 Capacité de charge

La détermination de la capacité portante du disque inférieur  $W$  repose sur l'équation (III-13) :

$$W = 2 \pi \int_0^R p r dr = \frac{3 \pi \mu_s R^4}{2 G(h, l)} \frac{dh}{dt} \quad (\text{III-13})$$

### 3.4.3 Vitesse radiale moyenne

L'équation gouvernant le champ de vitesses dans le fluide (équation II-29), couplée aux conditions aux limites données par les équations (III-9) et (III-10), permet de déduire le profil de la composante radiale de la vitesse selon l'expression suivante :

$$u = \frac{3 r}{G(h, l)} \frac{dh}{dt} \left[ z^2 - hz + 2l^2 \left( 1 - \frac{\cosh\left(\frac{2z-h}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)} \right) \right] \quad (\text{III-14})$$

La valeur moyenne de la composante radiale de la vitesse, en un point du fluide de coordonnée radiale donnée, s'exprime selon la relation suivante :

$$\langle u \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h u \, dz = -\frac{r}{2h} \frac{dh}{dt} \quad (\text{III-15})$$

#### 3.4.4 Débits de fuite au bord libre du disque

La connaissance de la vitesse radiale moyenne en  $r = R$  permettra de calculer le débit volumique de fuite au bord du disque par l'expression suivante :

$$Q_r = \int_0^{2\pi} h \langle u \rangle R d\theta = 2\pi R h \langle u \rangle = -\pi R^2 \frac{dh}{dt} \quad (\text{III-16})$$

#### 3.4.5 Contrainte de cisaillement

La contrainte de cisaillement pariétale  $\tau_{rz}$  s'écrit comme suit :

$$\tau_{rz}|_{z=0} = \mu_s \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} - \eta \left. \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} \right|_{z=0} = -\frac{3h \mu_s}{G(h, l)} \frac{dh}{dt} r \quad (\text{III-17})$$

#### 3.4.6 Force de frottement

La force de frottement  $F_f$  est déterminée par l'intégration de la contrainte de cisaillement exercée à la surface du disque inférieur ( $z = 0$ ), située au plan :

$$F_f = \int_0^R \int_0^{2\pi} \tau_{rz}|_{z=0} r d\theta dr = -\frac{2\pi h \mu_s}{G(h, l)} \frac{dh}{dt} r^3 \quad (\text{III-18})$$

### 3.5 Étude paramétrique

Cette étude paramétrique analyse l'influence des principaux paramètres contrôlant l'écoulement du lubrifiant — notamment les couples de contraintes, la concentration de la suspension et la fréquence d'oscillation — sur le comportement dynamique du film au cours d'un cycle d'oscillation.

Pour illustrer ces effets, nous présentons ci-dessous les résultats graphiques issus de la résolution du problème direct, basés sur les données géométriques et physiques rassemblées dans le **Tableau 3.1**. Les valeurs retenues pour l'amplitude et la fréquence d'oscillation ont été spécifiquement choisies pour garantir un écoulement laminaire du fluide sans apparition de cavitation.

Paramètres	Symboles	Valeur Numérique	Unités
Viscosité dynamique du fluide de base	$\mu_{bf}$	$120 \times 10^{-3}$	[Pa.s]
Rayon des deux disques	$R$	$25 \times 10^{-3}$	[m]
Épaisseur initiale du film fluide	$h_0$	$0.02 \times 10^{-3}$	[m]
Amplitude d'oscillation	$h_a$	$4 \times 10^{-6}$	[m]
Constante matérielle responsable de la propriété des couples de contrainte	$\eta$	0 $1.92 \times 10^{-12}$ $4.32 \times 10^{-12}$ $7.68 \times 10^{-12}$	[N.s]
Paramètre du couple de contrainte sans dimension	$\tilde{\ell}$	0 , 0.2 , 0.3 , 0.4	[–]
Fraction volumique de particule	$\phi$	0 , 0.2 , 0.3 , 0.4	[–]
Fréquence de mouvement sinusoïdal	$f$	0.33 , 0.66 , 1 , 1.5	[Hz]

**Tableau 3.1:** Données géométriques et physiques utilisées pour l'étude paramétrique du problème de lubrification en régime d'écrasement.

### 3.5.1 Influence du paramètre de couple de contrainte $\tilde{\ell}$

L'augmentation du paramètre de couples des contraintes adimensionnel  $\tilde{\ell}$ , dans le cas d'un fluide ne contenant pas de particules en suspension ( $\phi = 0$ ) et soumis à une fréquence d'oscillation  $f = 1.5 \text{ Hz}$ , traduit la polarité du fluide et renforce sa structuration interne. Cela se manifeste par :

- Une augmentation du champ de pression (Figure 3.3) ce qui se traduit directement par une augmentation de la capacité de charge (Figure 3.4).
- La vitesse radiale  $u$  (Figure 3.5) et le débit de fuite  $Q_r$  (Figure 3.6) au bord du disque ( $r=R$ ), ne montrent pas de variations significatives. En effet, la distribution de la vitesse radiale à travers l'épaisseur du film reste dominée par la vitesse d'écrasement  $Wsq$  imposée, et l'hypothèse d'imperméabilité des disques empêche toute fuite dans d'autres directions.
- En revanche, une augmentation notable de la contrainte de cisaillement calculée au bord du disque ( $r = R$ ) (Figure 3.7), est observée, entraînant une élévation de la force de frottement  $F_f$  (Figure 3.8).

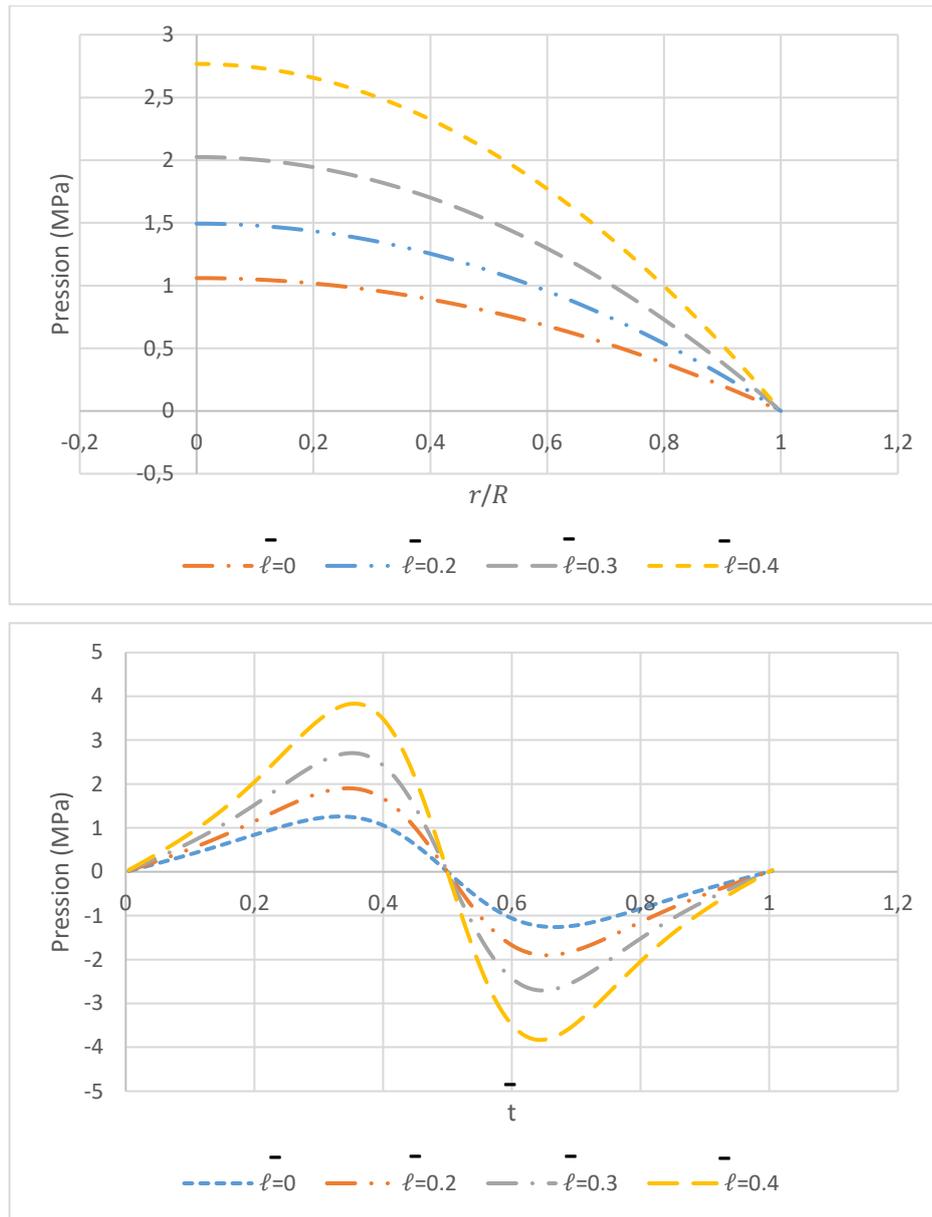


Figure 3.2 : Champ de pression  $p$  pour différentes valeurs de  $\tilde{\ell}$

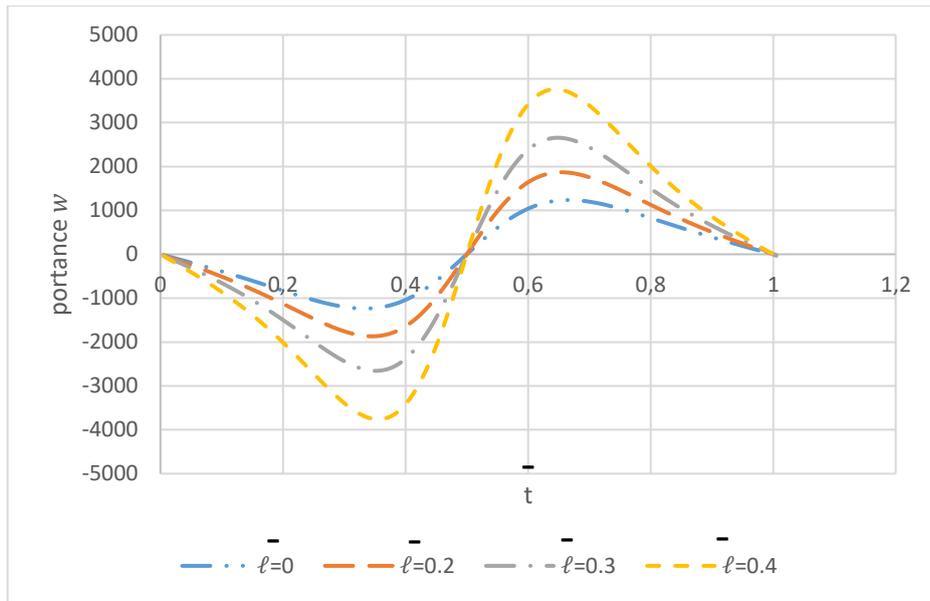


Figure 3.3 : Capacité de charge  $W$  pour différentes valeurs de  $\tilde{\ell}$

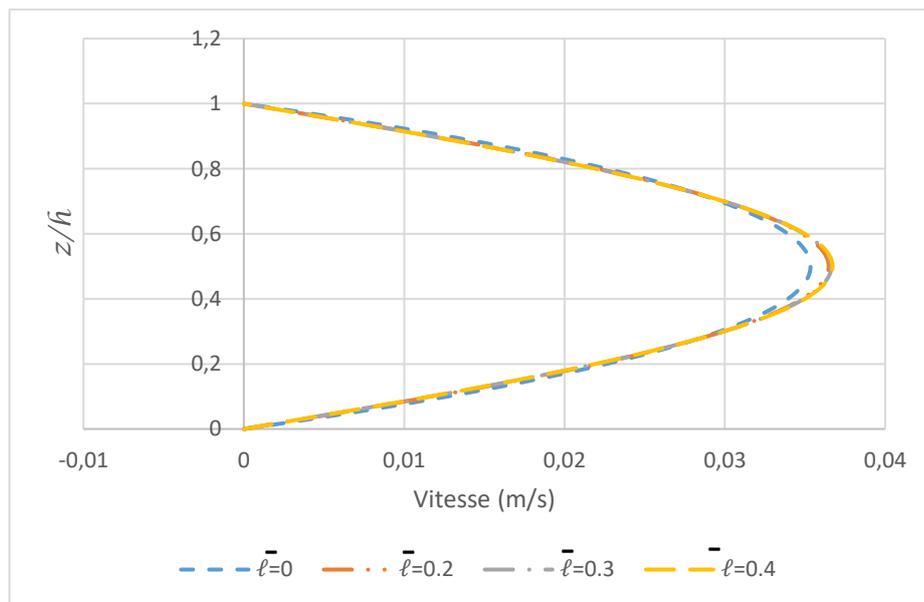


Figure 3.4 : Vitesse radiale  $u$  du film pour différentes valeurs de  $\tilde{\ell}$

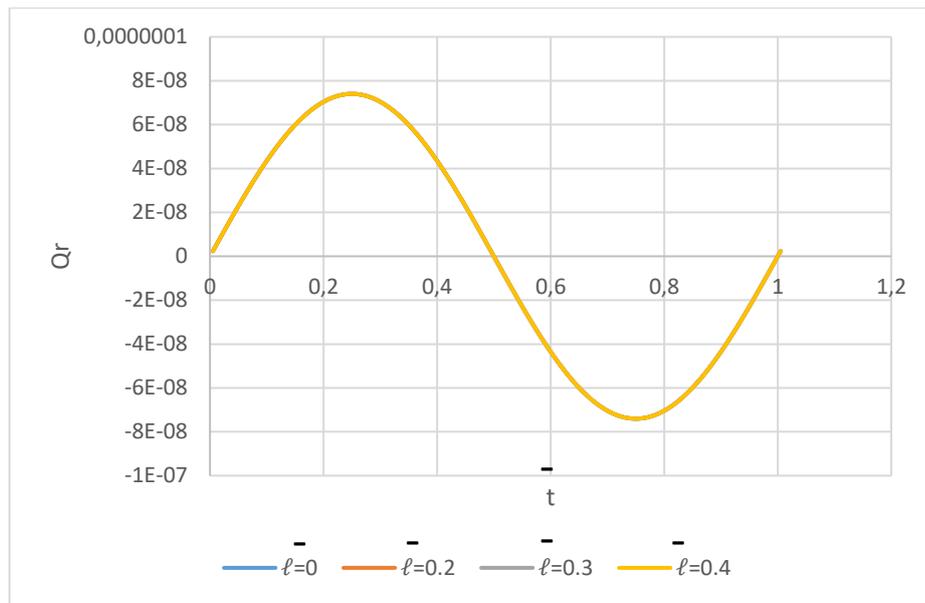


Figure 3.5 : Débit de fuite  $Q_r$  au bord ( $r = R$ ) pour différentes valeurs de  $\tilde{\ell}$

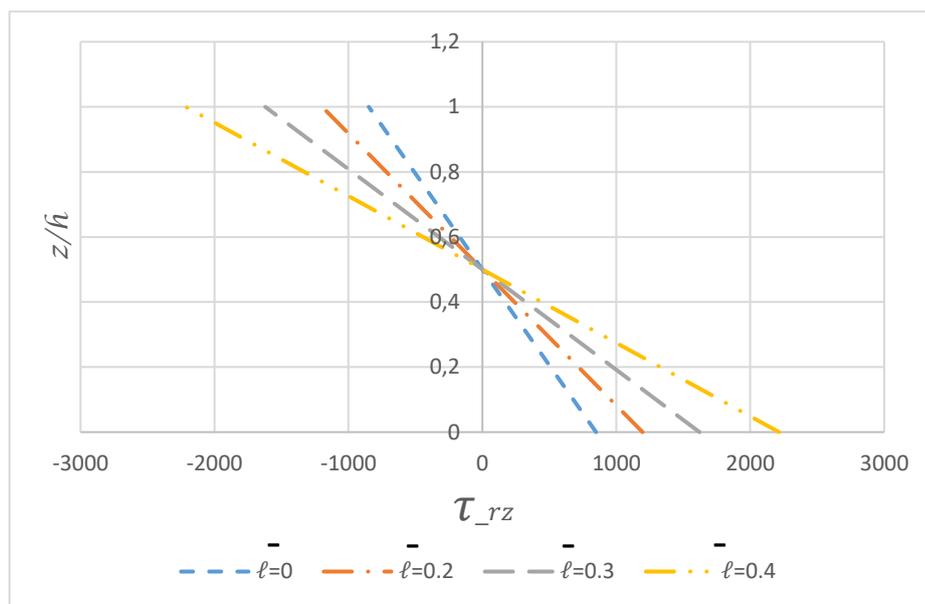
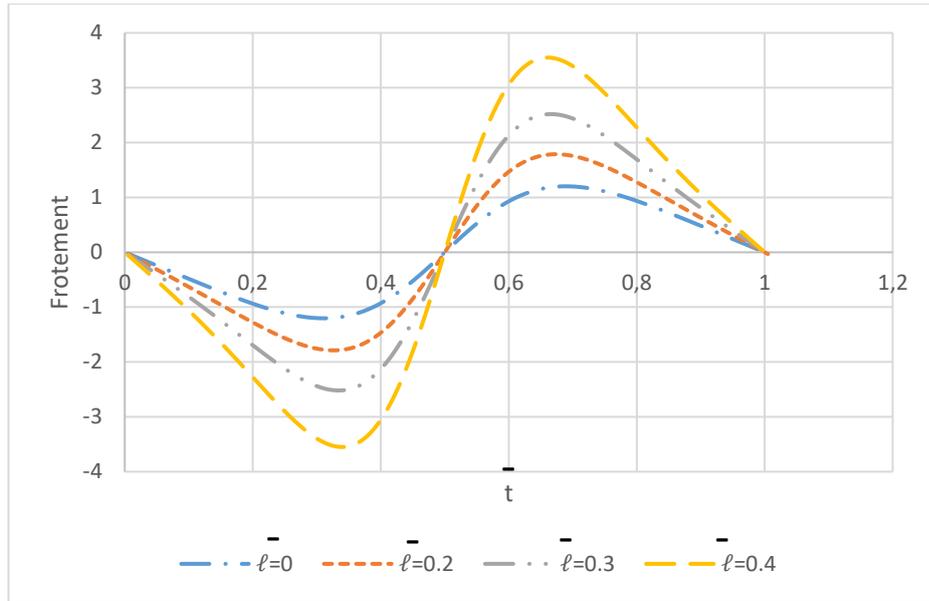


Figure 3.6 : Contrainte de cisaillement au bord du disque ( $r = R$ ) pour différentes valeurs de  $\tilde{\ell}$

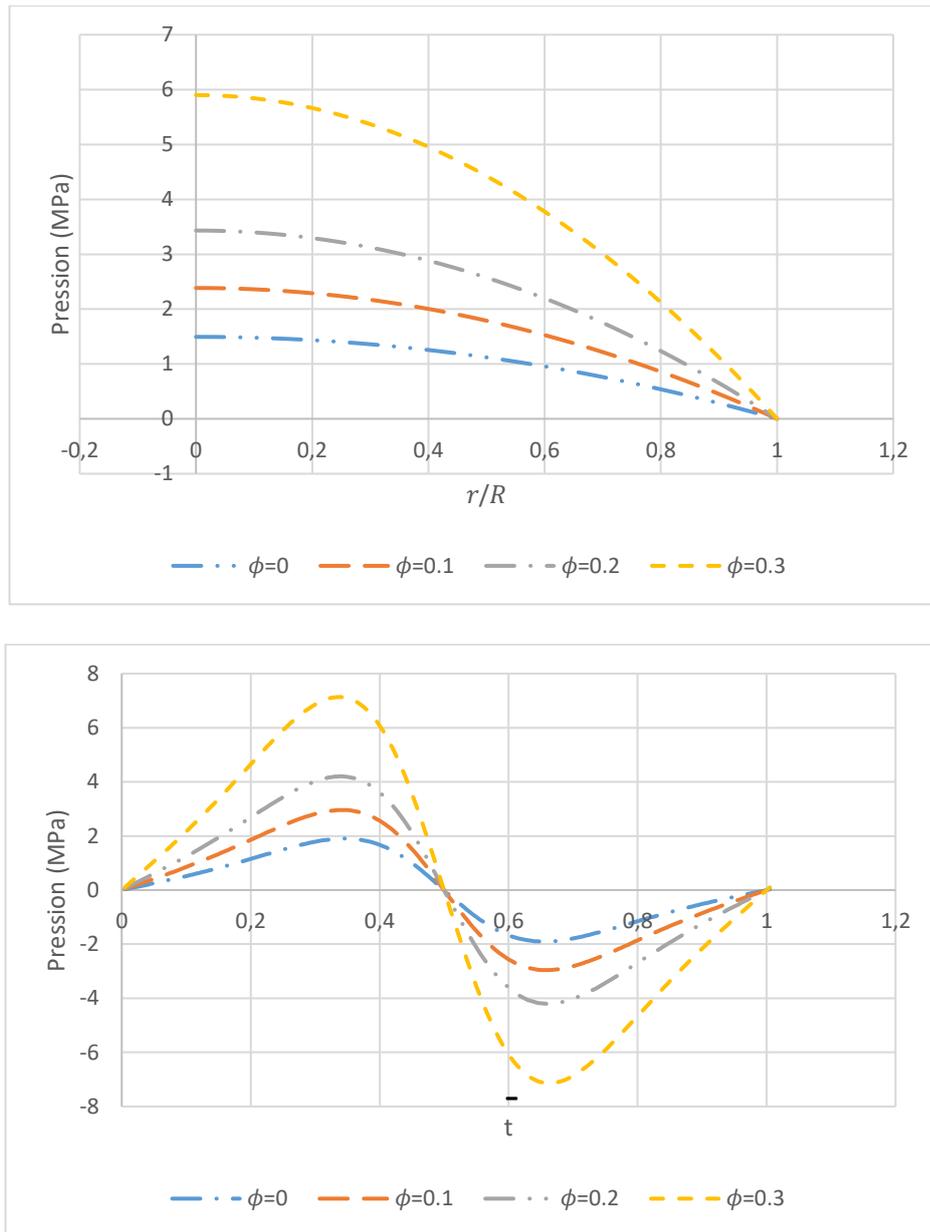


**Figure 3.7 :** Force de frottement  $F_f$  pour différentes valeurs de  $\tilde{\ell}$

### 3.5.2 Influence de la fraction volumique de particules $\phi$

Cette étude est menée pour un fluide caractérisé par un paramètre de couple de contrainte  $\tilde{\ell} = 0.2$  et une fréquence d'oscillation  $f = 1.5 \text{ Hz}$ . Les effets observés sont les suivants :

- Le champ de pression augmente sensiblement (Figure 3.9), entraînant une amélioration de la portance (Figure 3.10). Cette évolution s'explique par l'élévation de la viscosité du fluide, due à la présence des particules en suspension.
- Les vitesses radiales et les débits de fuite au bord du disque (Figure 3.11 et Figure 3.12) restent peu affectés, pour les mêmes raisons évoquées précédemment : la vitesse d'écrasement et l'imperméabilité du système dominant l'écoulement radial.
- La contrainte de cisaillement augmente (Figure 3.13), ce qui induit une augmentation de la force de frottement (Figure 3.14), liée à la plus grande résistance du fluide enrichi en particules.



**Figure 3.8 :** Évolution du champ de pression  $p$  pour différentes valeurs de  $\phi$

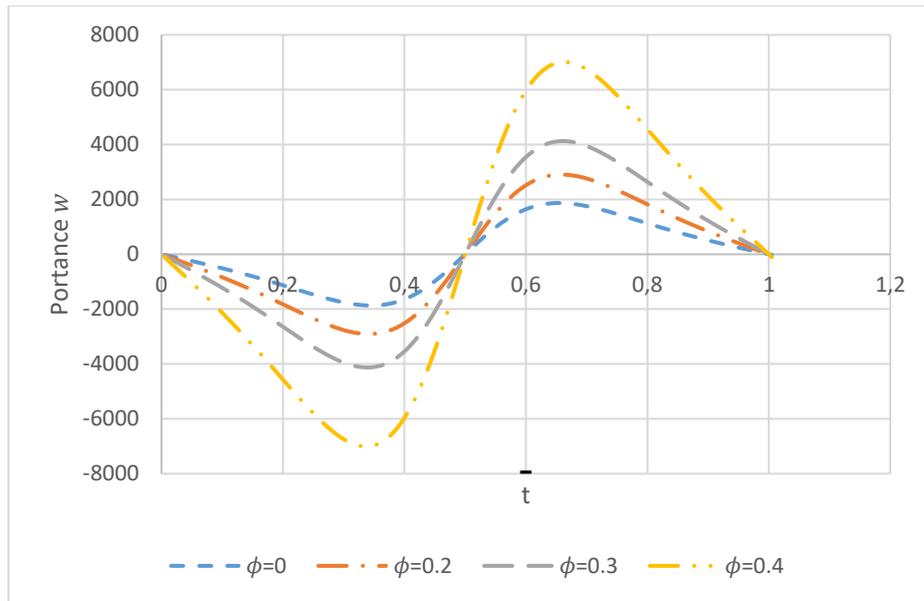


Figure 3.9 : Capacité de charge  $W$  pour différentes valeurs de  $\phi$

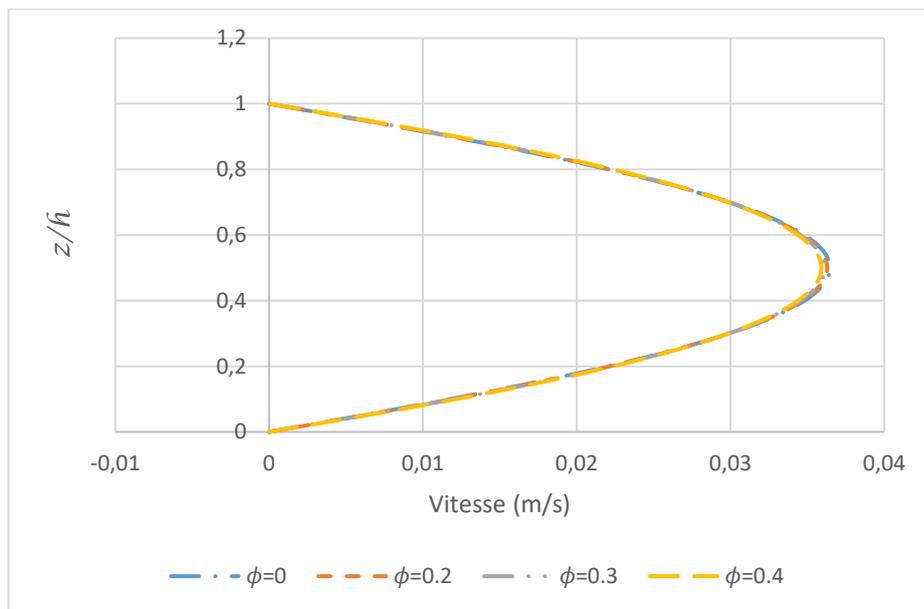


Figure 3.10 : Vitesse radiale  $u$  du film pour différentes valeurs de  $\phi$

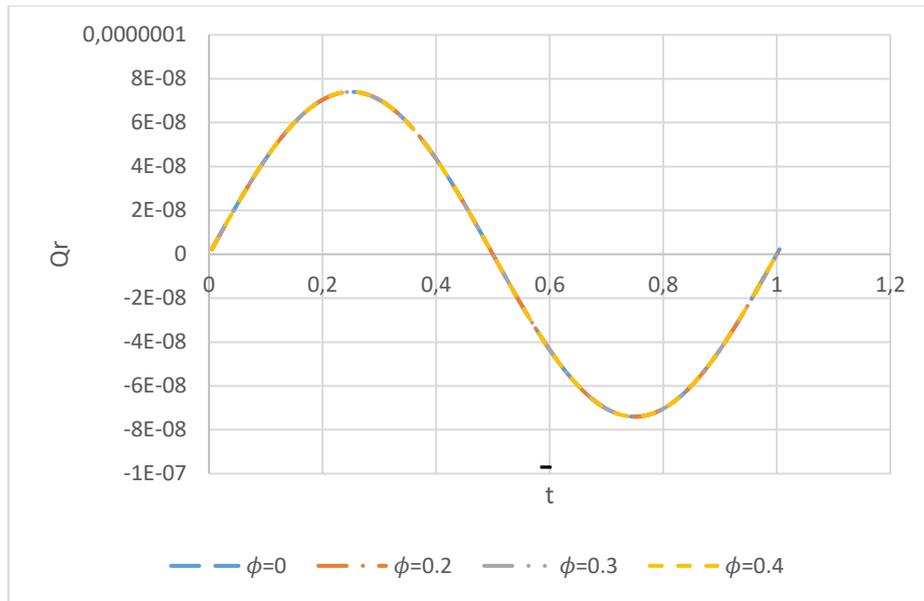


Figure 3.11 : Débit de fuite  $Q_r$  au bord ( $r = R$ ) pour différentes valeurs de  $\phi$

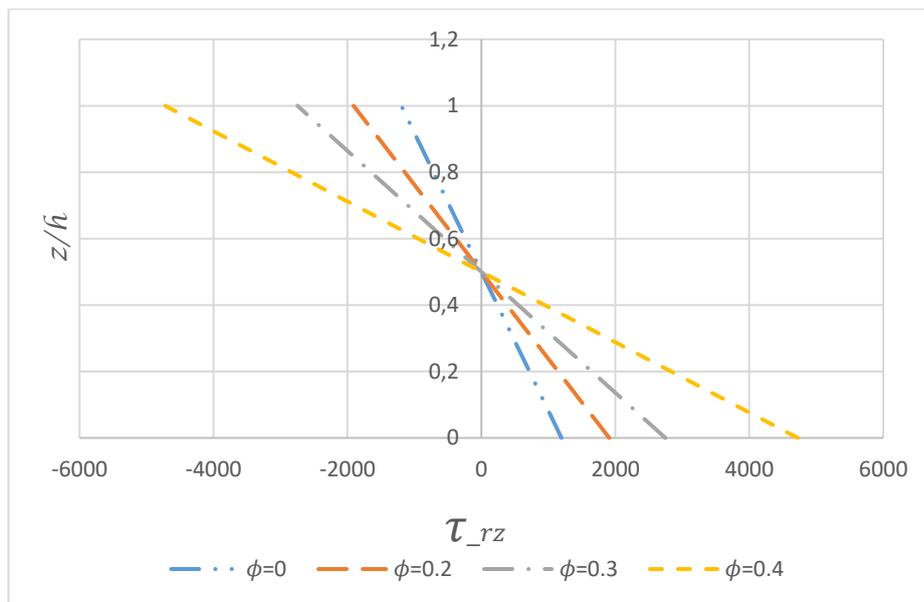
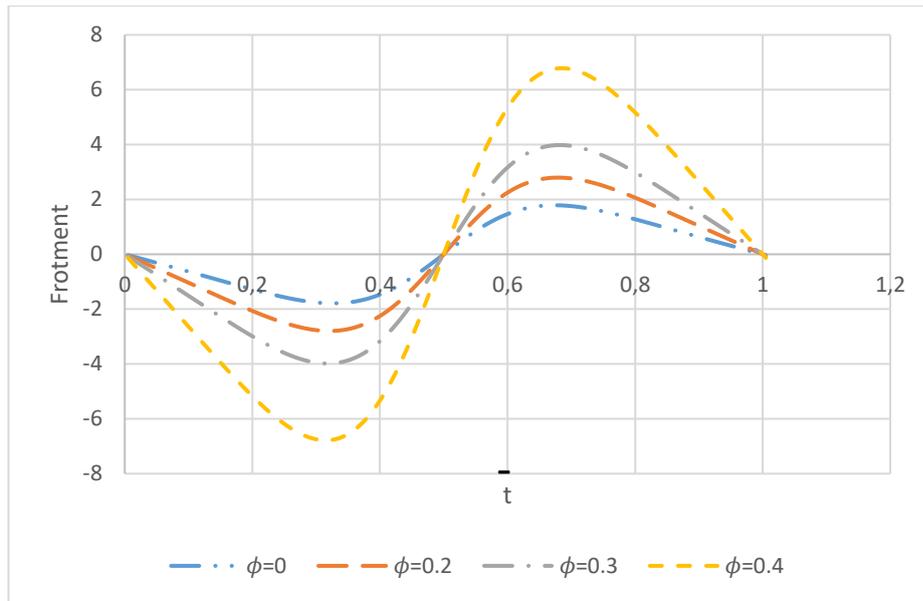


Figure 3.12 : Contrainte de cisaillement au bord du disque ( $r = R$ ) pour différentes valeurs de  $\phi$



**Figure 3.13 :** Force de frottement  $F_f$  pour différentes valeurs de  $\phi$

### 3.5.3 Influence de la fréquence d'oscillation

Dans ce cas, les simulations sont réalisées pour un fluide à couple de contrainte caractérisé par  $\tilde{\ell} = 0.2$  et une concentration particulaire  $\phi = 0.2$ . L'effet de la fréquence d'oscillation est lié à la rapidité de variation de l'épaisseur du film :

- Une fréquence élevée génère une pression plus intense, surtout en phase d'écrasement du film rapide (Figure 3.15).
- La capacité de charge est augmentée (Figure 3.16), mais cette amélioration est accompagnée d'une élévation des vitesses radiales et des débits de fuite au bord du disque (Figure 3.17 et Figure 3.18), conséquence directe de l'augmentation de la vitesse d'écrasement  $Wsq$ .
- Les contraintes de cisaillement s'augmentent, menant à une augmentation de la force de frottement (Figure 3.19 et Figure 3.20).

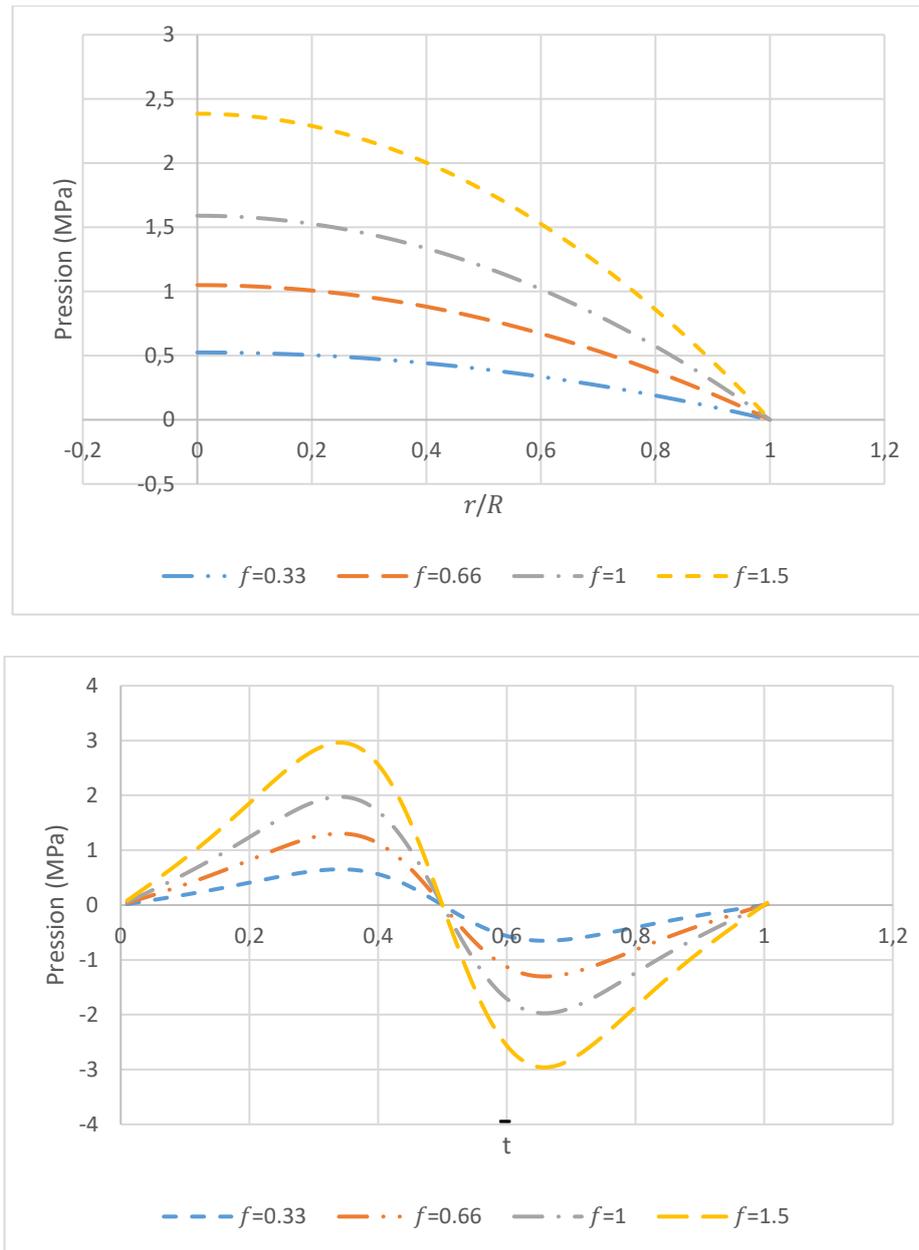


Figure 3.14 : Évolution du champ de pression  $p$  pour différentes valeurs de fréquences  $f$

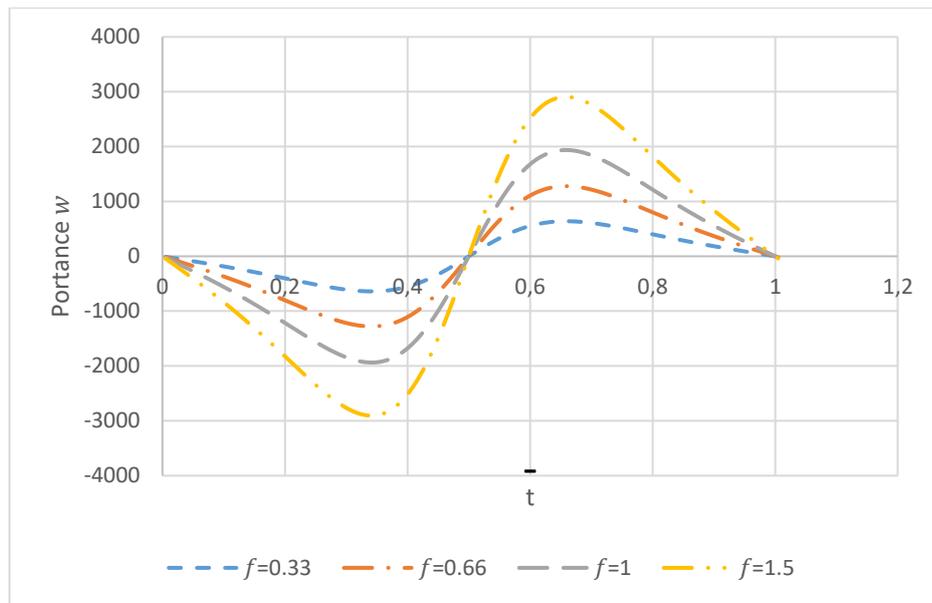


Figure 3.15 : Portance du film  $W$  pour différentes valeurs de fréquences  $f$

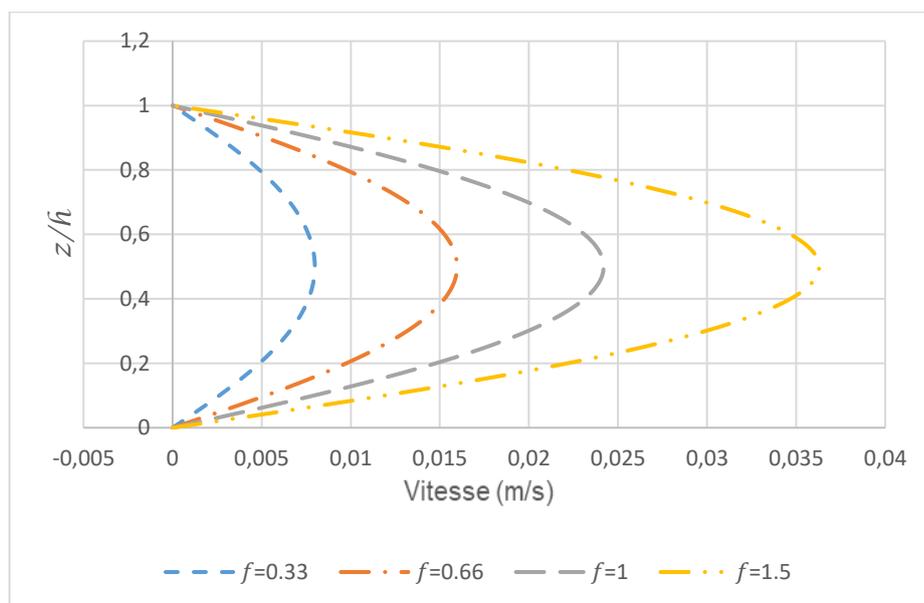
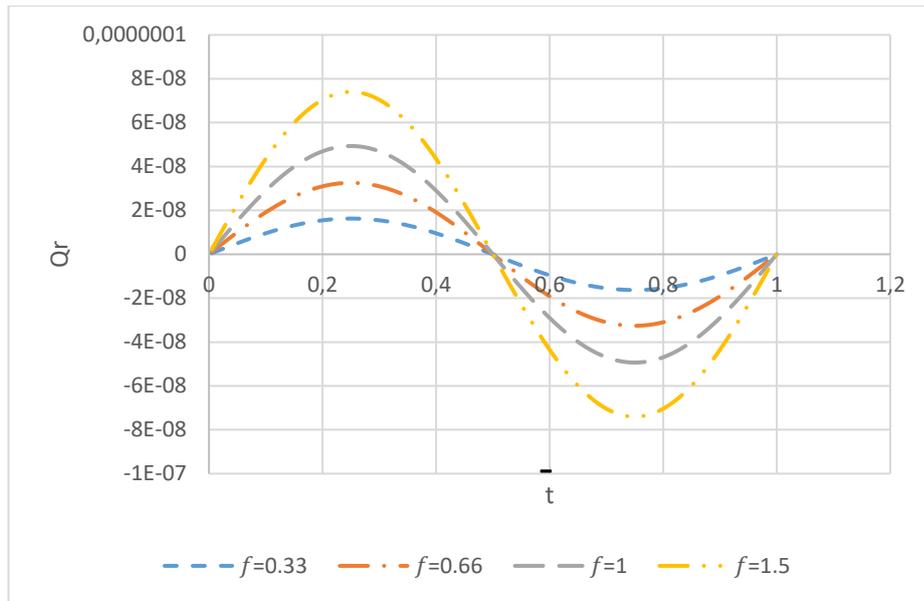
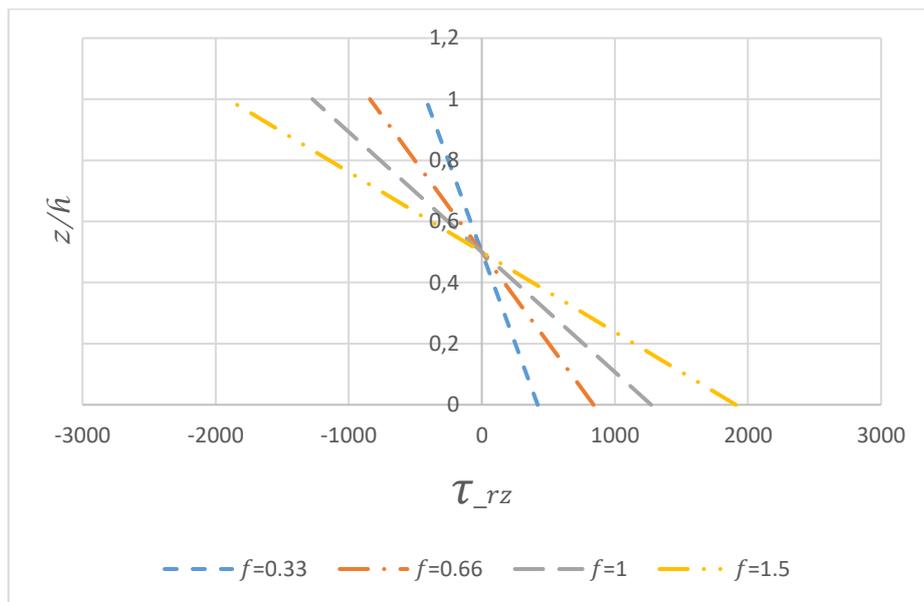


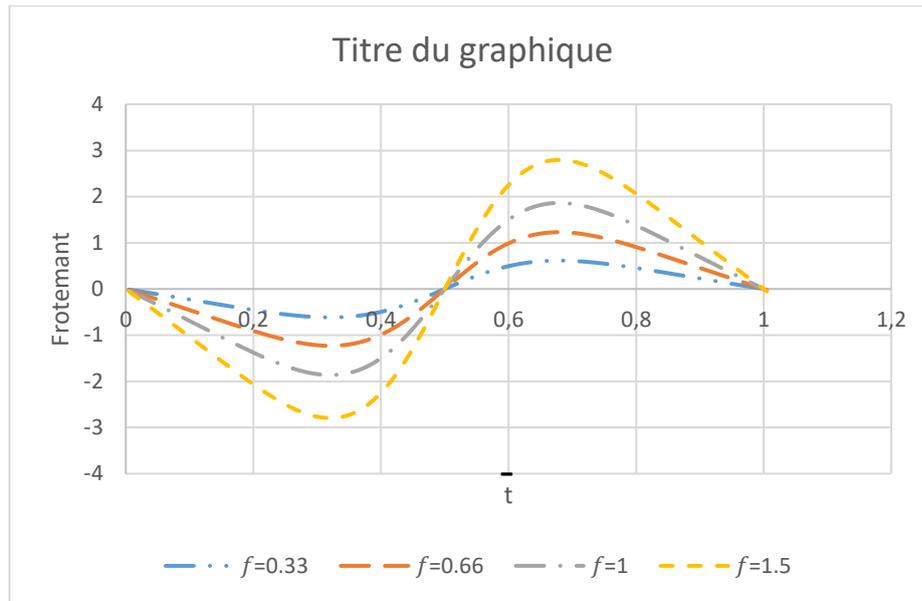
Figure 3.16 : Vitesse radiale  $u$  du film pour différentes valeurs de fréquences  $f$



**Figure 3.17:** Débit de fuite  $Q_r$  au bord ( $r = R$ ) pour différentes valeurs de fréquences  $f$



**Figure 3.18 :** Contrainte de cisaillement au bord du disque ( $r = R$ ) pour différentes valeurs de fréquences  $f$



**Figure 3.19 :** Force de frottement  $F_f$  pour différentes valeurs de fréquences  $f$

### 3.6 Conclusion

Ce chapitre a traité du mécanisme de lubrification en régime d'écrasement (*squeeze film*) d'un fluide non newtonien à couple de contrainte, contenant des particules en suspension, confiné entre deux disques rigides et imperméables.

Dans un premier temps, une modélisation rhéologique rigoureuse a été adoptée pour représenter l'effet de la concentration en particules sur les propriétés visqueuses du fluide. L'équation de Reynolds a ensuite été modifiée pour tenir compte de la nature non newtonienne du fluide et des conditions spécifiques du contact par écrasement. Les principales grandeurs hydrodynamiques (champ de pression, capacité de charge, contraintes, vitesses, débits de fuite, force de frottement) ont été déduites analytiquement à partir des solutions obtenues.

Une **étude paramétrique détaillée** a permis d'évaluer l'influence de trois paramètres clés :

- Le **paramètre de couple de contrainte**  $\tilde{\ell}$ , lié à la polarité du fluide,
- La **fraction volumique de particules**  $\phi$ , influant sur la viscosité effective,
- La **fréquence d'oscillation**  $f$  du disque mobile.

Les résultats ont montré que :

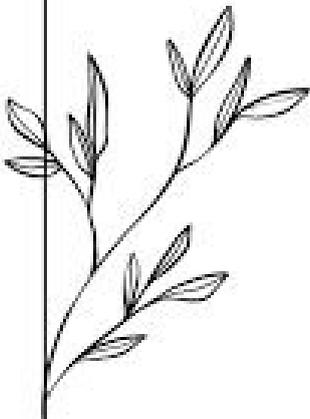
- L'augmentation du paramètre  $\tilde{\ell}$  et de la concentration  $\phi$  renforce la portance et la résistance au cisaillement, tout en augmentant la force de frottement.

- La fréquence d'oscillation  $f$  amplifie la réponse dynamique du film, avec une montée rapide de pression, mais aussi une élévation des pertes par frottement et des débits de fuite.

Ces analyses fournissent une compréhension fine du comportement d'un film lubrifiant non newtonien en régime transitoire, et constituent une base solide pour le dimensionnement de dispositifs tribologiques soumis à des charges dynamiques.

Le chapitre suivant étendra cette étude à un cas plus complexe, en tenant compte de la présence d'un **milieu poreux** sous-jacent, afin d'examiner les effets de l'absorption du fluide et de la perméabilité du substrat sur les performances du film.

*Chapitre IV*  
*Écrasement de*  
*lubrification non*  
*newtonienne en*  
*Présence d'un milieu*  
*poreux*



## 4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié le phénomène de lubrification hydrodynamique par effet d'écrasement entre deux disques rigides et imperméables. L'analyse a pris en compte l'influence des couples de contraintes, la concentration des particules en suspension, ainsi que la fréquence du mouvement sinusoïdal imposé au disque supérieur.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à une configuration plus complexe : l'écrasement de lubrifiants non newtoniens en présence d'un milieu poreux. Ce contexte modifie considérablement la dynamique de l'écoulement du fluide, du fait de la résistance induite par la structure poreuse et du comportement non linéaire du fluide lubrifiant. Ce type de situation trouve des applications dans les dispositifs biomécaniques, les revêtements poreux de certains roulements, et les systèmes de micro-lubrification.

Afin d'obtenir une solution analytique au problème posé, l'approximation de Morgan-Cameron [114] a été adoptée. Cette méthode permet de simplifier les équations régissant l'écoulement dans des conditions d'écrasement et de mieux comprendre l'influence des différents paramètres physiques.

## 4.2 Ecoulement dans un milieu poreux

### 4.2.1 Définitions

Un milieu poreux est un matériau constitué d'une matrice solide à l'intérieur de laquelle se trouvent des vides, appelés pores, qui peuvent être partiellement ou totalement remplis par un fluide. Ces milieux sont présents dans de nombreux contextes naturels et industriels : sols, roches, mousses, tissus biologiques ou encore matériaux frittés.

L'écoulement dans un milieu poreux désigne le mouvement d'un fluide à travers l'espace interconnecté formé par ces pores. Ce type d'écoulement est généralement plus lent que dans les milieux libres, et sa modélisation repose souvent sur des lois empiriques ou semi-empiriques, la plus connue étant la loi de Darcy.

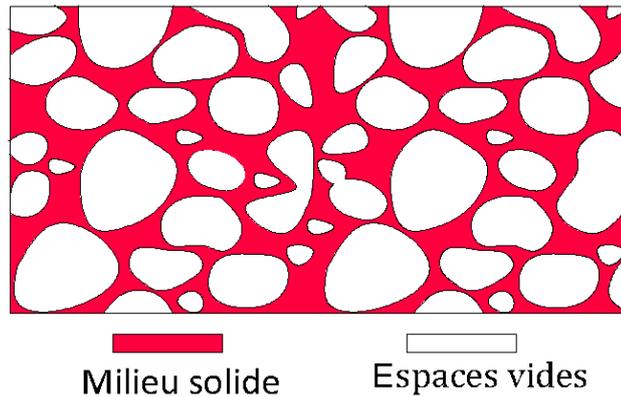
Les milieux poreux ont différentes caractéristiques, à savoir :

- **Porosité ( $\varepsilon$ )** : rapport entre le volume des vides et le volume total du milieu.

Ce paramètre est défini par la relation suivante :

$$\varepsilon = \frac{V_p}{V_t} \quad (\text{IV-1})$$

où  $V_p$  est le volume des pores et  $V_t$  est le volume total.



**Figure 4.1** : Les espaces vides dans un milieu poreux

- **Perméabilité (K)** : mesure de la capacité du milieu à laisser passer un fluide. Elle peut être calculée à partir de la relation de Kozeny-Carman [128.129.130] :

$$k = \frac{D_p^2 \varepsilon^3}{180 (1 - \varepsilon)^2} \quad (\text{IV-2})$$

où  $D_p$  est un diamètre caractéristique des pores.

- **Milieu isotrope** : dont les propriétés (comme la perméabilité) sont identiques dans toutes les directions.

#### 4.2.2 Loi d'écoulement dans un milieu poreux

Le comportement de l'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux dépend fortement de la structure du milieu, du régime de l'écoulement, et des propriétés du fluide. Plusieurs modèles ont été développés pour décrire ces écoulements, allant de l'approche classique de Darcy aux extensions intégrant des effets inertiels et visqueux supplémentaires.

##### a) Modèle de Darcy

Le modèle de Darcy [132.133] est le plus ancien et le plus simple pour décrire l'écoulement à travers un milieu poreux. Il a été formulé par Henry Darcy en 1856 à partir d'expériences sur l'écoulement de l'eau dans le sable.

La **loi de Darcy** s'écrit sous la forme :

$$\vec{V}^* = -\frac{k}{\mu} \vec{\nabla} p^* \quad (\text{IV-3})$$

où :

- $\vec{V}^*$  est la vitesse de filtration (ou vitesse de Darcy),
- $k$  est la perméabilité du milieu ( $\text{m}^2$ ),

- $\mu$  est la viscosité dynamique du fluide,
- $\vec{\nabla}p^*$  est le gradient de pression dans le milieu poreux.

Ce modèle est valable dans le cas d'un **écoulement lent et laminaire** (nombre de Reynolds faible), sans effets inertiels significatifs.

#### b) Modèle de Darcy–Forchheimer

Lorsque la vitesse d'écoulement augmente, les effets inertiels deviennent non négligeables. Le modèle de **Darcy-Forchheimer** [136.137] ajoute un terme quadratique dans la vitesse pour tenir compte de ces effets :

$$\vec{\nabla}p^* = -\frac{\mu}{k} \vec{V}^* - \frac{\rho c_f |\vec{V}^*|}{\sqrt{k}} \vec{V}^* \quad (\text{IV-4})$$

où :

- $\rho$  est la masse volumique du fluide,
- $c_f$  est le coefficient de Forchheimer (lié à la structure poreuse),

Ce modèle est utilisé pour les **écoulements non linéaires à vitesses modérées ou élevées**, où les pertes de charge ne sont plus uniquement visqueuses.

#### c) Modèle de Darcy–Brinkman

Pour décrire les effets visqueux à l'intérieur du fluide dans les pores, notamment près des frontières solides (effets de cisaillement), le modèle de **Darcy-Brinkman** [120] introduit un terme de type Laplacien, dérivé des équations de Navier–Stokes :

$$\vec{\nabla}p^* = -\frac{\mu}{k} \vec{V}^* + \mu' \nabla^2 \vec{V}^* \quad (\text{IV-5})$$

où :

- $\mu'$  est la viscosité effective du fluide dans le milieu poreux.

Ce modèle permet de **prendre en compte les effets de diffusion visqueuse** et convient mieux aux milieux poreux à forte porosité ou proches des interfaces avec un fluide libre.

#### d) Modèle de Darcy–Brinkman–Forchheimer

Ce modèle est le plus général. Il combine les termes visqueux (Brinkman), les pertes linéaires (Darcy), et les pertes quadratiques dues aux effets inertiels (Forchheimer) [138.139.140]:

$$\vec{\nabla} p^* = -\frac{\mu}{k} \vec{V}^* + \mu' \vec{\nabla}^2 \vec{V}^* - \frac{\rho c_f |\vec{V}^*|}{\sqrt{k}} \vec{V}^* \quad (\text{IV-6})$$

Ce modèle est utilisé pour décrire les **écoulements complexes** dans des milieux poreux à **forte porosité**, soumis à des vitesses significatives, avec des effets à la fois visqueux et inertiels.

### 4.3 Équations de base du film lubrifiant

#### 4.3.1 Hypothèses

Dans cette étude, plusieurs hypothèses ont été adoptées pour modéliser l'écoulement du fluide sous effet d'écrasement entre deux disques circulaires parallèles :

- La configuration géométrique considérée, illustrée à la **Figure 4.2**, est composée de deux disques circulaires et parallèles de même rayon  $R$  d'axes confondus, séparés par un film fluide de hauteur variable  $h(t)$ , et reposant sur une couche poreuse de hauteur  $H^*$ .
- Le fluide lubrifiant est **non newtonien**, à **couples de contraintes**, modélisé par la théorie du **micro-continuum de V. K. Stokes**.
- La **viscosité effective** de la suspension est évaluée à l'aide du **modèle de Krieger-Dougherty**.
- Les propriétés physiques du fluide (viscosité dynamique  $\mu$ , la masse volumique  $\rho$ , constante physique  $\eta$ ) sont supposées **constantes**.
- L'écoulement est supposé **isotherme**, **incompressible**, et **axisymétrique** (i.e.  $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ )
- Le disque supérieur suit un mouvement harmonique sinusoïdal vertical, donné par :
$$h(t) = h_0 + h_a \cos(2\pi f t) \quad (\text{IV-7})$$

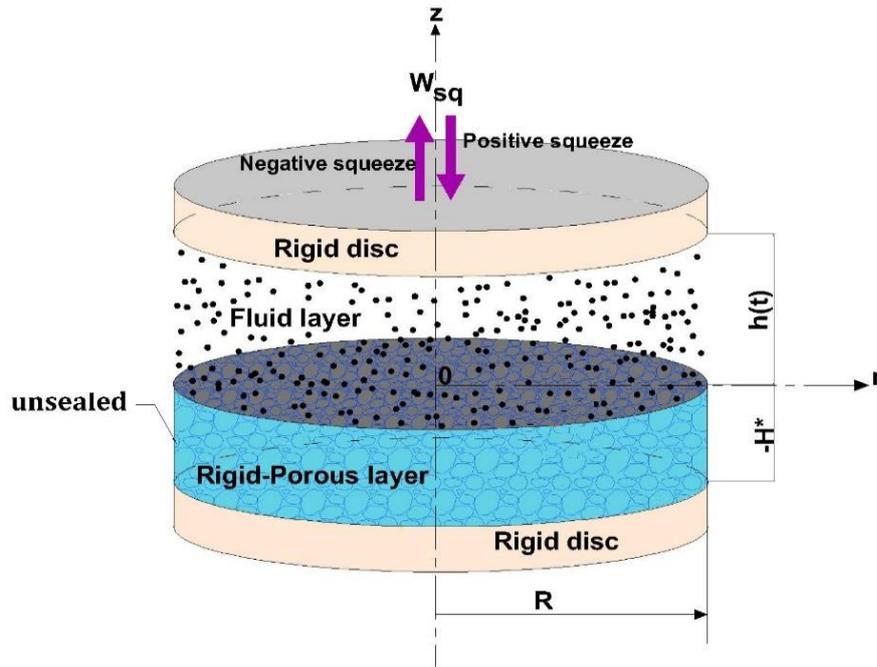
où  $h_0$  est l'épaisseur de film initiale ;  $h_a$  l'amplitude, et  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  la fréquence.

- La **vitesse d'écrasement** correspondante est donnée par :

$$W_{sq} = \frac{dh}{dt} = -2\pi f h_a \sin(2\pi f t) \quad (\text{IV-8})$$

- Les **forces de volume**, **couples de volume** et **effets d'inertie** du fluide sont négligés.
- On applique les **hypothèses de Reynolds** décrites dans la section II.3.1 pour dériver l'équation du film mince.
- Le disque inférieur est considéré comme un milieu poreux anisotrope, de perméabilité  $k$  constante
- Aucun glissement n'est supposé à l'interface entre le fluide et le milieu poreux.

- L'écoulement à travers le disque poreux est modélisé à l'aide d'un modèle de Darcy modifié, issu de la théorie du micro-continuum de V. K. Stokes.
- Il est également envisagé que le bord du disque poreux puisse être partiellement perméable (non étanche).
- L'approximation de **Morgan–Cameron** est utilisée pour coupler l'équation de Reynolds modifiée dans le film fluide avec l'équation de Darcy dans le substrat poreux, en assurant la continuité de la pression et du débit à l'interface.



**Figure 4.2 :** Modèle géométrique (3-D)

### 4.3.2 La formulation du problème dans le film fluide

La présence du milieu poreux dans le disque inférieur modifie profondément l'équation de Reynolds modifiée (II-19). Il est alors nécessaire de reformuler l'équation de film mince à partir des équations de mouvement (II-13) et de continuité (II-8), de manière à intégrer les effets du milieu poreux. Pour un écoulement incompressible et axisymétrique, ces équations se réduisent aux équations suivantes :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu_s \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \eta \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} \quad (\text{IV-9})$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (\text{IV-10})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{IV-11})$$

### 4.3.3 Formulation du problème dans le milieu poreux (Équation de Laplace modifiée)

Dans la matrice poreuse, l'équation de continuité, exprimée en coordonnées cylindriques pour un écoulement incompressible et axisymétrique, s'écrit comme suit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u^*)}{\partial r} + \frac{\partial w^*}{\partial z} = 0 \quad (\text{IV-12})$$

où  $u^*$  et  $w^*$  représentent respectivement les composantes radiale et axiale de la vitesse dans le milieu poreux.

Pour un écoulement laminaire, isotherme et en régime permanent, les vitesses dans la matrice poreuse sont décrites par la loi de Darcy modifiée, intégrant les effets des couples de contraintes[141] :

$$u^* = -\frac{k_r}{\mu_s (1 - \beta_r)} \left( \frac{\partial p^*}{\partial r} \right) \quad (\text{IV-13})$$

$$w^* = -\frac{k_z}{\mu_s (1 - \beta_z)} \left( \frac{\partial p^*}{\partial z} \right) \quad (\text{IV-14})$$

où :

$\beta_r = \frac{\eta/\mu_s}{k_r}$  : Paramètre caractérisant l'effet de la microstructure à celle du pore dans la direction radiale,

$\beta_z = \frac{\eta/\mu_s}{k_z}$  : Paramètre caractérisant l'effet de la microstructure à celle du pore dans la direction axiale

tel que  $0 \leq \beta_r, \beta_z < 1$ , et les grandeurs  $k_r$  et  $k_z$  désignent les perméabilités radiale et axiale du milieu poreux.

Le champ de pression  $p^*$  dans la couche poreuse obéit à l'**équation de Laplace modifiée**, adaptée aux fluides à couples de contraintes, donnée par :

$$\frac{k_r}{\mu_s r (1 - \beta_r)} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p^*}{\partial r} \right) + \frac{k_z}{\mu_s (1 - \beta_z)} \left( \frac{\partial^2 p^*}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (\text{IV-15})$$

### 4.4 Équation de Reynolds modifiée

L'intégration de l'équation de mouvement (IV-9) , en tenant compte des conditions aux limites (IV-16) et des hypothèses énoncées dans la section 4.3.1, permet de déterminer les composantes du champ de vitesse de l'écoulement radial  $u$  .

Les conditions aux limites associées aux vitesses sont les suivantes :

$$z = h(t) ; \quad u = 0 \quad ; \quad w = \frac{dh}{dt} = W_{sq} ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{IV-16a})$$

$$z = 0 \quad ; \quad u = 0 \quad ; \quad w = w^*|_{z=0} \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{IV-16b})$$

**Remarque :** L'annulation des couples de contraintes aux parois impose que les dérivées secondes de la vitesse  $u$  par rapport à  $z$  soient nulles.

Les conditions aux limites sur la pression sont données par :

$$r = R \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p = 0 & (\text{pression ambiante}) \\ p^* = 0 & (\text{cas non étanche}) \end{cases} \quad (\text{IV-17a})$$

$$r = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial p^*}{\partial r} = 0 \end{cases} \quad (\text{champ axisymétrique}) \quad (\text{IV-17b})$$

$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad p = p^* \quad (\text{continuité de pression}) \quad (\text{IV-17c})$$

$$z = -H^* \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p^*}{\partial z} = 0 \quad (\text{substrat rigide}) \quad (\text{IV-17d})$$

Le champ de vitesse dans le film fluide est alors exprimé par :

$$u(r, z) = \frac{1}{2 \mu_s} \frac{\partial p}{\partial r} \left[ z(z-h) + 2 l^2 \left( 1 - \frac{\cosh\left(\frac{2z-h}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)} \right) \right] \quad (\text{IV-18})$$

avec  $l = \sqrt{\eta/\mu_s}$  représentant le paramètre caractéristique des couples de contraintes.

En intégrant l'équation de continuité (IV-11) sur l'épaisseur du film fluide et en appliquant les conditions limites de vitesse(IV-16), on obtient l'équation de Reynolds modifiée :

$$\frac{G(h, l)}{12 \mu_s} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{dh}{dt} - w^*|_{z=0} \quad (\text{IV-19})$$

où :

$$G(h, l) = h^3 - 12 l^2 h + 24 l^3 \tanh\left(\frac{h}{2l}\right)$$

Dans le cas particulier d'un fluide newtonien (*i. e.*  $l = 0$ ), cette expression se réduit à :  $G(h) = h^3$

En remplaçant  $w^*|_{z=0}$  à partir de l'équation (IV-14) on obtient la forme finale de l'équation de Reynolds modifiée :

$$\frac{G(h, l)}{12 \mu_s} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{dh}{dt} + \frac{k_z}{\mu_s (1 - \beta_z)} \left( \frac{\partial p^*}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} \quad (\text{IV-20})$$

## 4.5 Résolution du problème de lubrification par film comprimé en présence d'un milieu poreux

L'équation de Reynolds modifiée (IV-20) est couplée à l'équation de Laplace modifiée (IV-15) à l'interface entre le film fluide et le milieu poreux, en imposant la continuité de la pression et des vitesses. Ce système est résolu analytiquement en adoptant l'approximation de Morgan-Cameron, qui reste valable uniquement lorsque l'épaisseur de la couche poreuse est très faible devant le rayon du disque, soit  $\left(\frac{H^*}{R} \ll 1\right)$ .

En considérant un milieu poreux isotrope ( $k_r = k_z = k$ ) et en intégrant l'équation (IV-15), selon l'axe  $z$ , sur l'épaisseur de la couche poreuse, tout en appliquant les conditions aux limites (IV-17d), on obtient :

$$\frac{\partial p^*}{\partial z} \Big|_{z=0} = - \int_{-H^*}^0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p^*}{\partial r} \right) dz \Rightarrow \frac{\partial p^*}{\partial z} \Big|_{z=0} = - H^* \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (\text{IV-21})$$

Dès lors, la composante axiale de la vitesse de Darcy modifiée à l'interface  $z = 0$  s'écrit :

$$w^* \Big|_{z=0} = - \frac{k}{\mu_s (1 - \beta)} \frac{\partial p^*}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{k H^*}{\mu_s r (1 - \beta)} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (\text{IV-22})$$

En substituant l'expression (IV-22) dans l'équation de Reynolds modifiée (IV-20), tout en négligeant la vitesse de glissement à l'interface, on obtient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{12 \mu_s \frac{dh}{dt} (1 - \beta)}{G(h, l)(1 - \beta) + 12 k H^*} \quad (\text{IV-23})$$

Finalement, en appliquant les conditions aux limites sur la pression (IV-17), la solution analytique de l'équation (IV-23) est donnée par :

$$p(r, t) = \frac{3 \mu_s \frac{dh}{dt} (1 - \beta)}{G(h, l)(1 - \beta) + 12 k H^*} (r^2 - R^2) \quad (\text{IV-24})$$

## 4.6 Performances hydrodynamiques

### 4.6.1 Capacité de charge

La capacité de charge instantanée  $W(t)$  du film lubrifiant soumis à un écrasement axisymétrique est obtenue par intégration de la pression hydrodynamique sur la surface du disque supérieur. Elle s'exprime comme suit :

$$W(t) = 2\pi \int_0^R p(r, t) r dr = -\frac{3 \mu_s \frac{dh}{dt} (1 - \beta) \pi R^4}{2 G(h, l)(1 - \beta) + 24 k H^*} \quad (\text{IV-25})$$

#### 4.6.2 Débits de fuite au bord du disque

Le débit de fuite instantané  $Q_r$  au bord du disque est déterminé à partir de la relation (II-26), en appliquant les conditions aux limites (IV-16). Il s'écrit :

$$Q_r = \int_0^{2\pi} h u_{moy} R d\theta = 2\pi R h u_{moy} = -\pi R \left( \frac{G(h, l)}{6\mu_s} \right) \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=R}$$

Ce qui conduit à l'expression suivante :

$$Q_r = -\frac{G(h, l) \frac{dh}{dt} (1 - \beta) \pi R^2}{G(h, l)(1 - \beta) + 12 k H^*} \quad (\text{IV-27})$$

#### 4.6.3 Contrainte de cisaillement

Pour le fluide à couples de contraintes, la contrainte de cisaillement pariétale  $\tau_{rz}$  est donnée par :

$$\tau_{rz}|_{z=0} = \mu_s \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} - \eta \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} \Big|_{z=0} \quad (\text{IV-28})$$

En utilisant l'expression de la vitesse  $u$  et des conditions aux limites associées, cette contrainte devient :

$$\tau_{rz}|_{z=0} = -\left( \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = -\frac{3 \mu_s \frac{dh}{dt} (1 - \beta) r h}{G(h, l)(1 - \beta) + 12 k H^*} \quad (\text{IV-29})$$

#### 4.6.4 Force de frottement

La force de frottement  $F_f$  exercée par le fluide sur la paroi du disque supérieur est obtenue en intégrant la contrainte de cisaillement pariétale sur la surface du disque :

$$F_f = -2\pi \int_0^R \left( \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial r} \right) r dr = -\frac{\mu_s \frac{dh}{dt} (1 - \beta) \pi h R^3}{G(h, l)(1 - \beta) + 12 k H^*} \quad (\text{IV-30})$$

### 4.7 Etude paramétrique

Dans cette section, nous analysons l'influence de certains paramètres clés sur les performances hydrodynamiques d'un film lubrifiant non newtonien à couple de contrainte, en présence d'un substrat poreux. Le fluide étudié contient une fraction volumique constante de particules en

suspension 0.2 , et le disque supérieur est soumis à une oscillation sinusoïdale de fréquence  $f = 1.5\text{Hz}$ .

Deux paramètres physiques ont été sélectionnés pour l'étude :

- Le **paramètre adimensionnel de couple de contrainte**  $\tilde{\ell}$  , représentant la polarité du fluide,
- Les **paramètres de perméabilité radiale et axiale** du milieu poreux **isotrope** , notés  $k$ .

L'influence de ces paramètres sur les performances hydrodynamiques a été évaluée en se basant sur les conditions géométriques et physiques présentées ci-dessous.

Paramètres	Symboles	Valeur Numérique	Unités
Viscosité dynamique du fluide de base	$\mu_{bf}$	$120 \times 10^{-3}$	[Pa. s]
Rayon des deux disques	$R$	$25 \times 10^{-3}$	[m]
Épaisseur initiale du film fluide	$h_0$	$0.02 \times 10^{-3}$	[m]
Épaisseur du disque poreux	$H^*$	$2 \times 10^{-3}$	[m]
Paramètre de perméabilités radiale et axiale du milieu poreux.	$k_r =$ $k_z =$ $k$	0 $9.6 \times 10^{-15}$ $51 \times 10^{-15}$ $86 \times 10^{-15}$	[m <sup>2</sup> ]
Amplitude d'oscillation	$h_a$	$4 \times 10^{-6}$	[m]
Constante matérielle responsable de la propriété des couples de contrainte	$\eta$	0 $1.92 \times 10^{-12}$ $4.32 \times 10^{-12}$ $7.68 \times 10^{-12}$	[N. s]
Paramètre du couple de contrainte sans dimension	$\tilde{\ell}$	0 , 0.2 , 0.3 , 0.4	[–]
Fraction volumique de particule	$\phi$	0.2	[–]
Fréquence de mouvement sinusoïdal	$f$	1.5	[Hz]

**Tableau 4.1** : Données géométriques et physiques utilisées pour l'étude paramétrique

#### 4.7.1 Influence du paramètre de couple de contrainte $\tilde{\ell}$

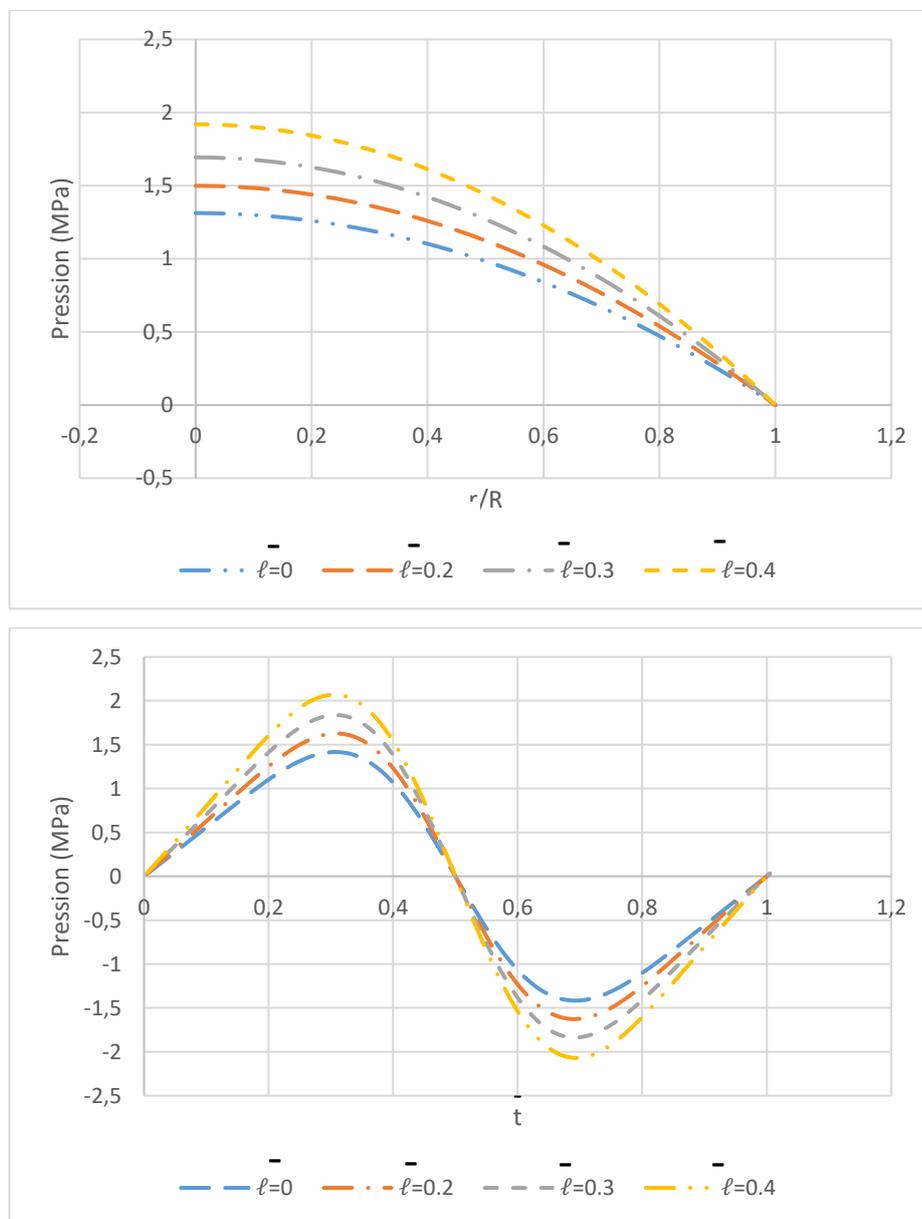
L'étude est réalisée pour des valeurs croissantes de  $\tilde{\ell}$  , en maintenant constantes la fraction volumique  $\phi = 0.2$  , la fréquence  $f = 1.5 \text{ Hz}$ , ainsi que les perméabilités  $k = 9.6 \times 10^{-15} \text{ m}^2$ .

Les résultats montrent que :

- Le champ de pression augmente significativement (Figure 4.3), ce qui se traduit par une meilleure capacité de charge (Figure 4.4). Cela est dû à la structuration interne accrue du fluide sous l'effet des couples de contrainte.

- La vitesse radiale  $u$  (Figure 4.5) et le débit de fuite  $Qr$  (Figure 4.6) diminuent lorsque l'on augmente le paramètre des couples de contraintes, car la fuite se fait à travers la matrice poreuse, laquelle devient plus active à mesure que ce paramètre augmente.
- En revanche, on observe une augmentation notable de la contrainte de cisaillement  $\tau_{rz}$  au bord du disque (Figure 4.7), ce qui entraîne une augmentation de la force de frottement  $F_f$  (Figure 4.8).

Ces observations confirment les tendances observées dans le chapitre précédent, tout en soulignant l'effet combiné des contraintes internes du fluide et de l'absorption dans le milieu poreux.



**Figure 4.3 :** Champ de pression  $p$  pour différentes valeurs de  $\tilde{\ell}$

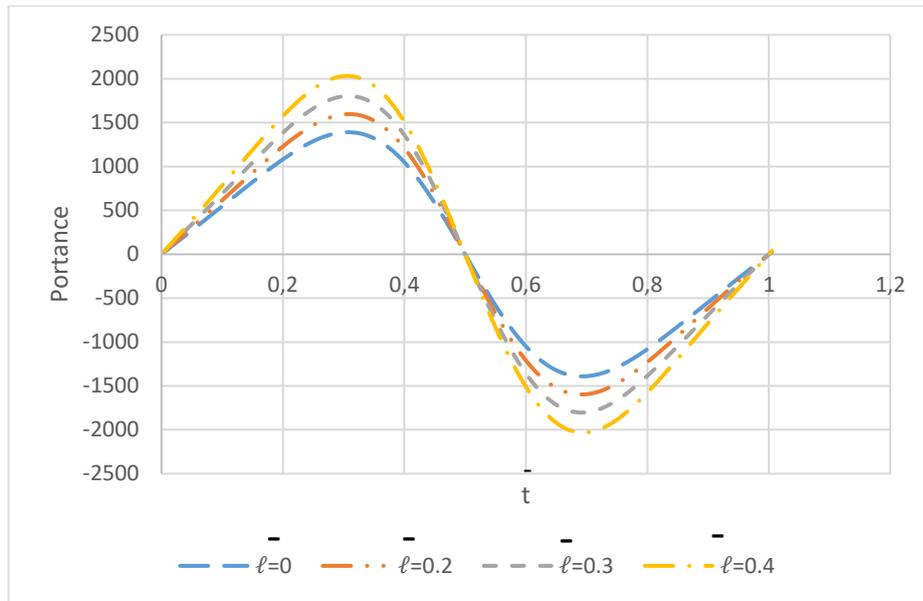


Figure 4.4 : Capacité de charge  $W$  pour différentes valeurs de  $\tilde{\ell}$

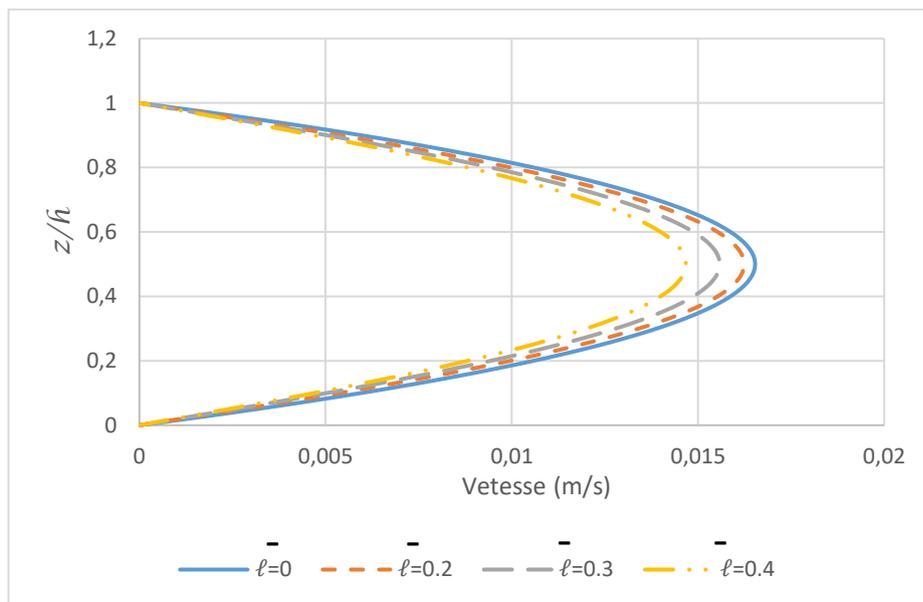


Figure 4.5 : Vitesse radiale  $u$  du film pour différentes valeurs de  $\tilde{\ell}$

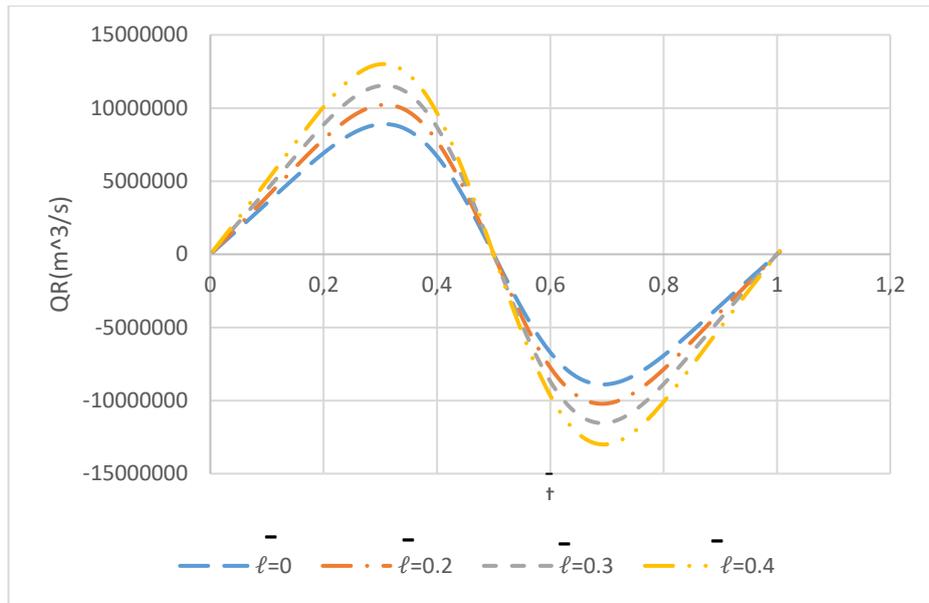
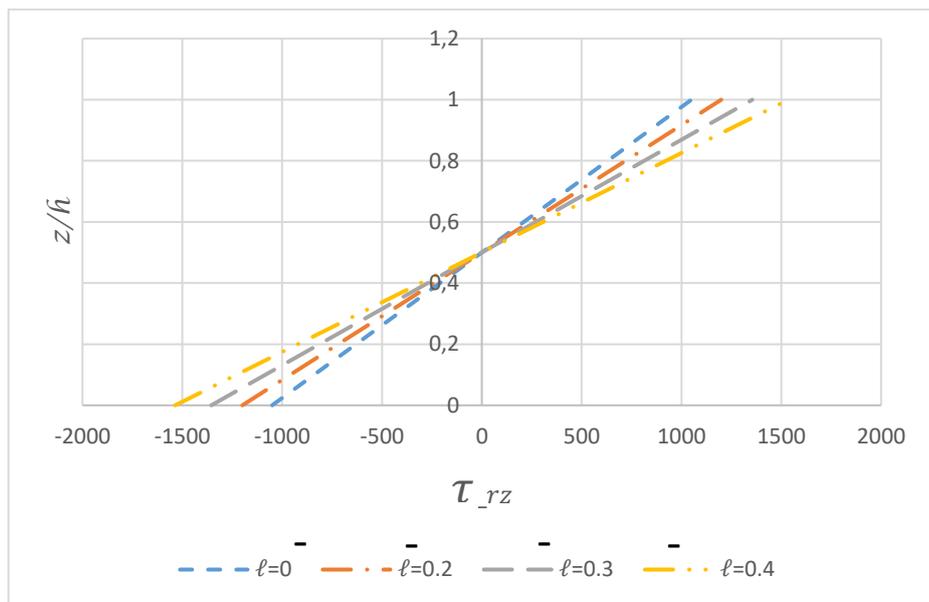
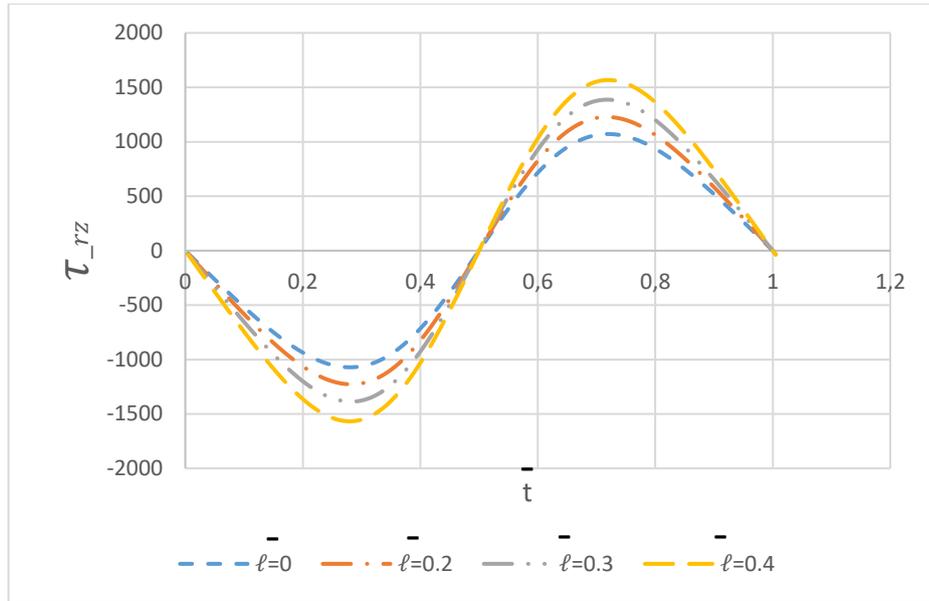
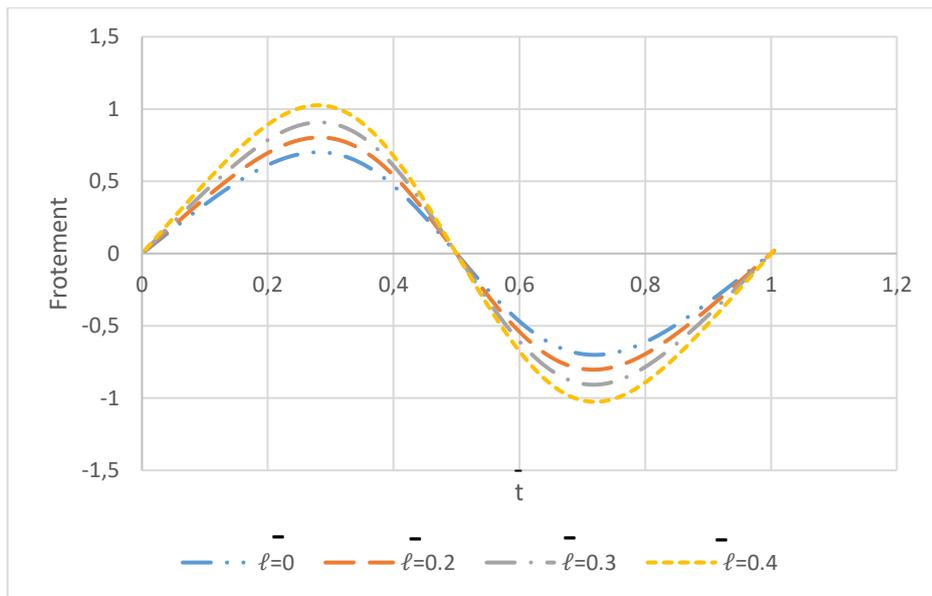


Figure 4.6: Débit de fuite  $Q_r$  au bord ( $r = R$ ) pour différentes valeurs de  $\tilde{\ell}$





**Figure 4.7 :** Contrainte de cisaillement au bord du disque ( $r = R$ ) pour différentes valeurs de  $\tilde{\ell}$



**Figure 4.8 :** Force de frottement  $F_f$  pour différentes valeurs de  $\tilde{\ell}$

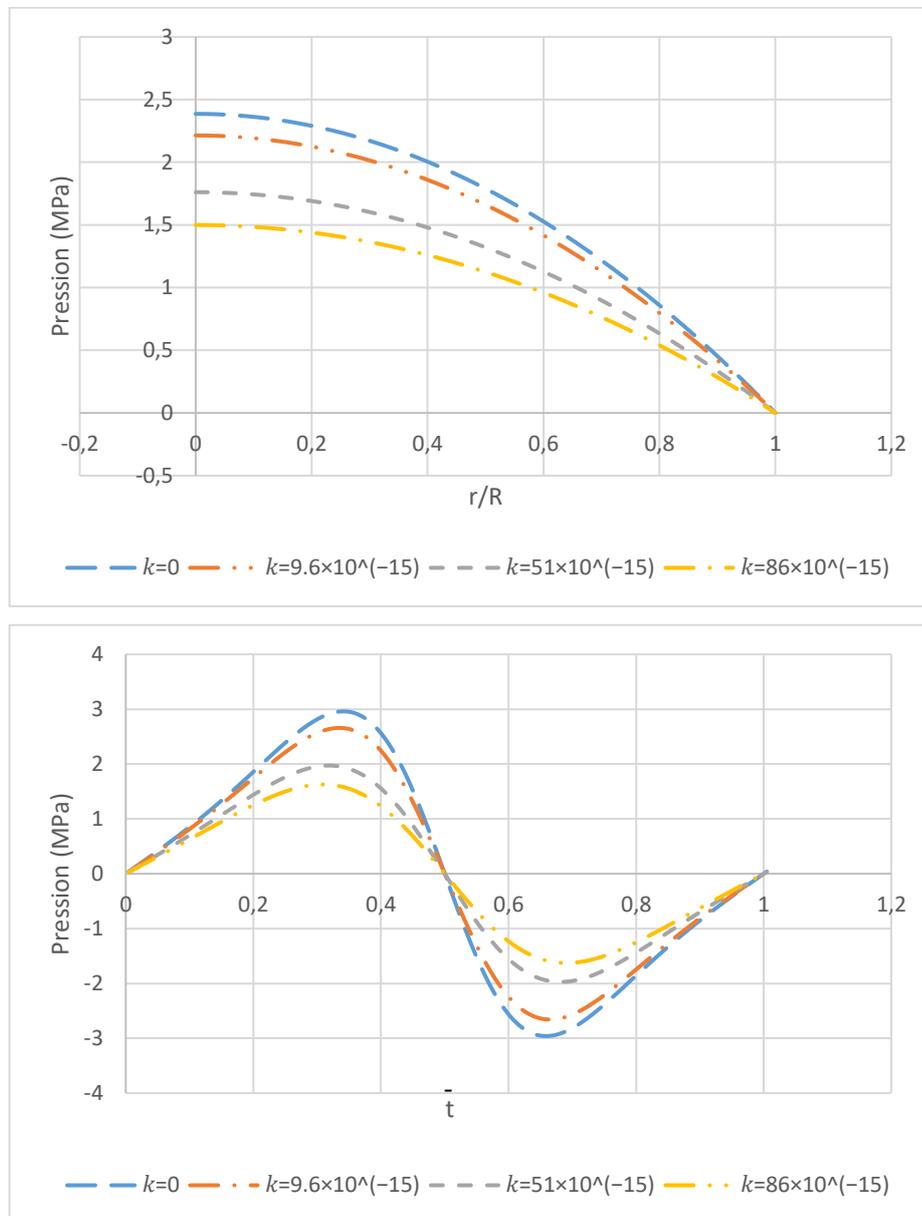
#### 4.7.2 Influence des paramètres de perméabilité du milieu poreux

L'effet des perméabilités du substrat poreux est analysé pour des valeurs croissantes de  $k$  avec  $\tilde{\ell} = 0.2$ ,  $\phi = 0.2$  et  $f = 1.5 \text{ Hz}$ .

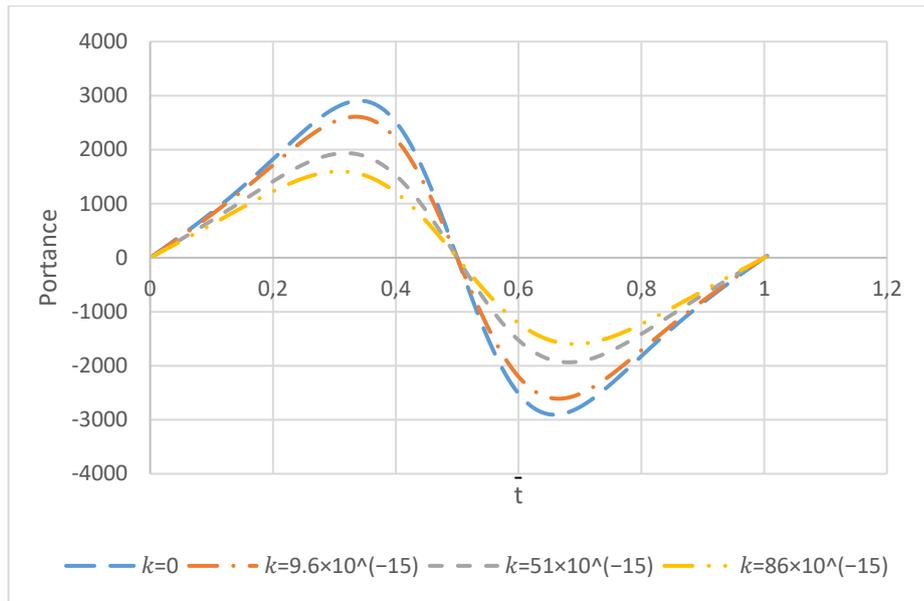
Les résultats montrent que :

- L'augmentation de la perméabilité facilite la pénétration du fluide dans le milieu poreux, entraînant une diminution du champ de pression dans le film (Figure 4.9) et une réduction de la capacité de charge (Figure 4.10).
- Les vitesses radiales et débits de fuite (Figures 4.11 et 4.12) diminuent légèrement, en raison d'un transfert de fluide vers le substrat poreux.
- La contrainte de cisaillement  $\tau_{rz}$  (Figure 4.13) diminue, traduisant un amortissement du cisaillement par effet de drainage, ce qui entraîne une diminution de la force de frottement  $F_f$  (Figure 4.14).

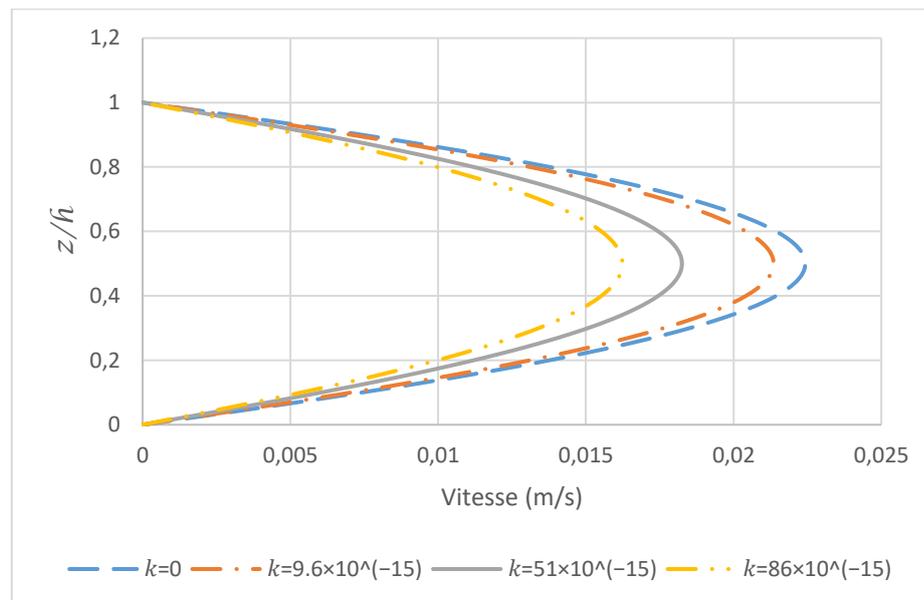
Ainsi, la présence d'un milieu poreux modifie sensiblement les performances du film en agissant comme un réservoir absorbant, réduisant la pression interfaciale et les efforts tangents.



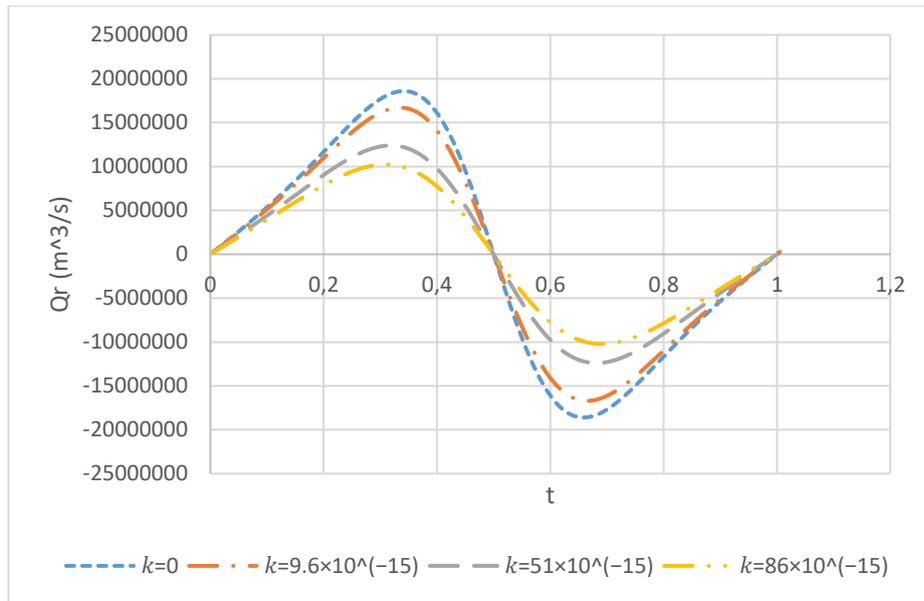
**Figure 4.9 :** Champ de pression  $p$  pour différentes valeurs de  $k$



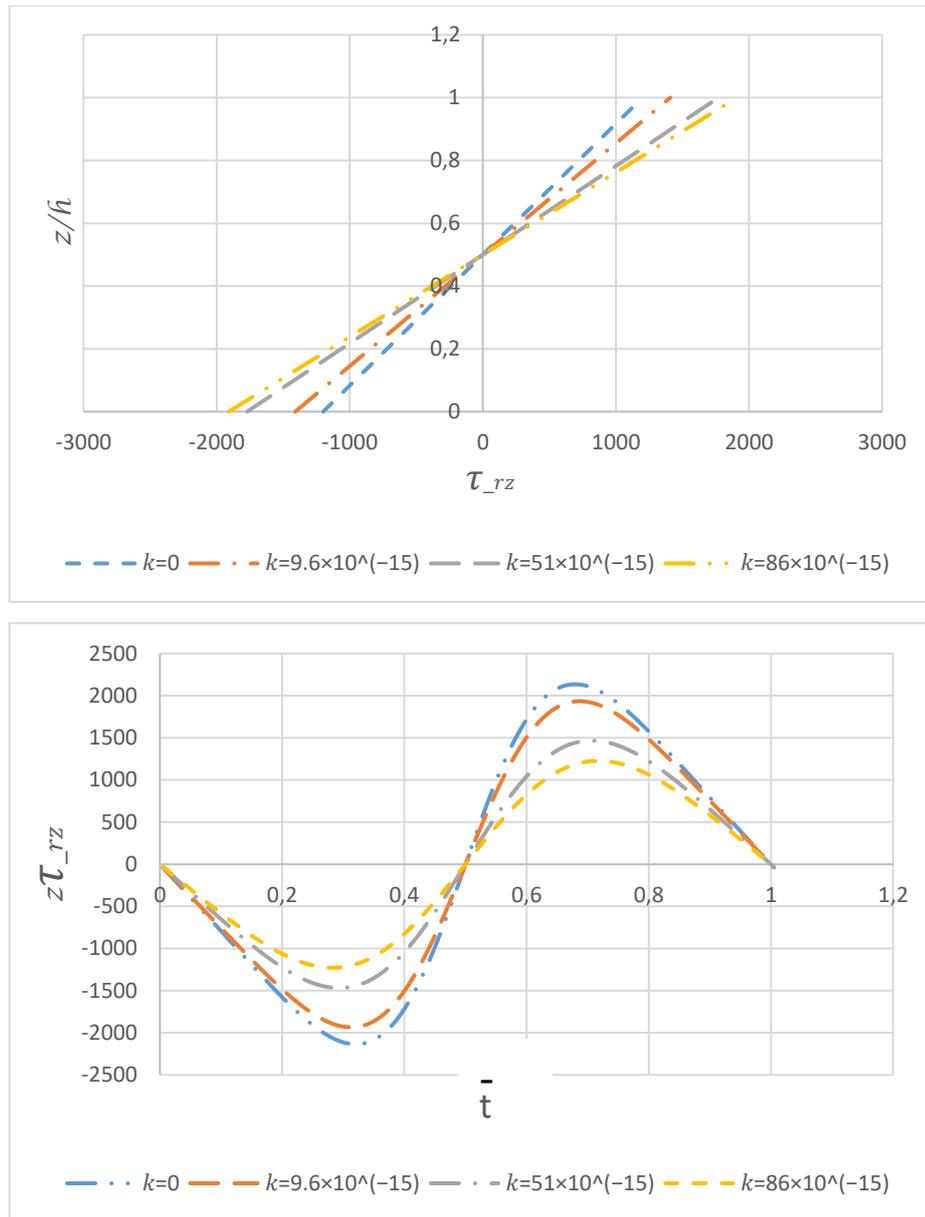
**Figure 4.10 :** Capacité de charge  $W$  pour différentes valeurs de  $k$



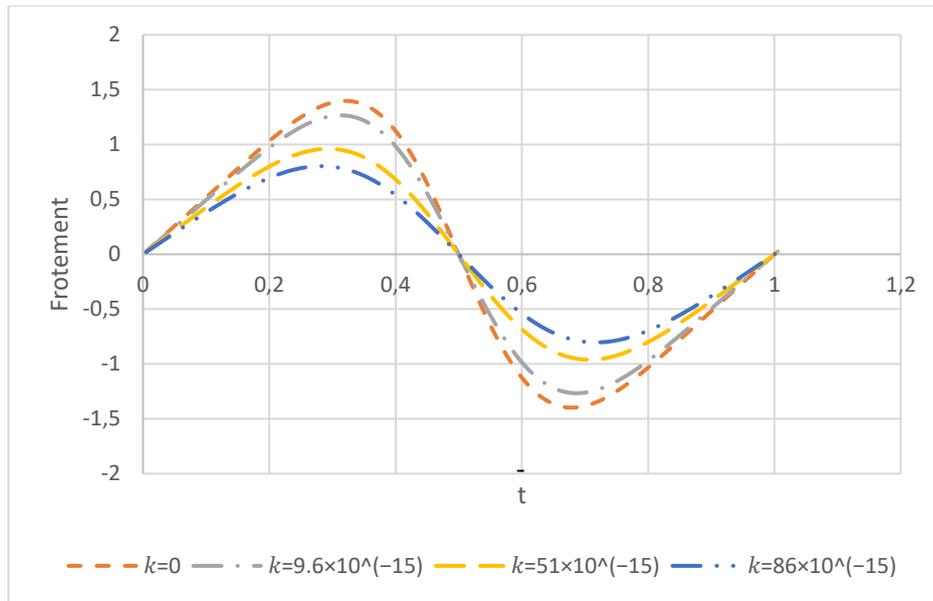
**Figure 4.11 :** Vitesse radiale  $u$  du film pour différentes valeurs de  $k$



**Figure 4.12 :** Débit de fuite  $Q_r$  au bord ( $r = R$ ) pour différentes valeurs de  $k$



**Figure 4.13 :** Contrainte de cisaillement au bord du disque ( $r = R$ ) pour différentes valeurs de  $k$



**Figure 4.14 :** Force de frottement  $F_f$  pour différentes valeurs de  $k$

#### 4.8 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à l'étude du comportement d'un film lubrifiant non newtonien à couples de contraintes, soumis à un effet d'écrasement entre deux disques circulaires, dont l'un est en contact avec un substrat poreux. En intégrant les effets du milieu poreux dans le modèle, une formulation couplée du problème a été développée, combinant les équations du film fluide et celles du substrat perméable.

Les équations de Reynolds modifiées ont été établies en tenant compte de la perméabilité du milieu et de la rhéologie complexe du fluide. Une résolution analytique a été proposée à l'aide de l'approximation de Morgan-Cameron, permettant une modélisation efficace du comportement du film comprimé en interaction avec un support poreux.

L'analyse a permis de quantifier les performances hydrodynamiques du système, notamment en termes de champ de pression, capacité de charge, débits de fuite, contraintes de cisaillement et force de frottement.

L'étude paramétrique a mis en évidence plusieurs points clés :

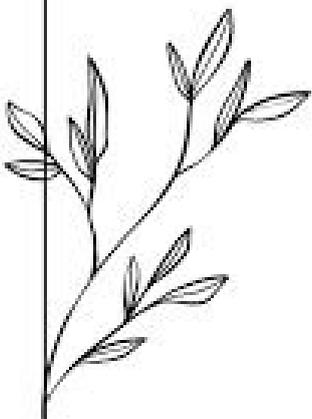
- L'augmentation du paramètre de couple de contrainte renforce la structuration du fluide, augmentant la pression et la portance, tout en intensifiant les efforts de cisaillement et donc la force de frottement.

- L'accroissement de la perméabilité du milieu poreux agit comme un mécanisme de drainage, réduisant la pression interfaciale, la portance et les forces de frottement, mais atténuant également les contraintes de cisaillement.

Ces résultats confirment que l'interaction entre les caractéristiques du fluide, le régime d'écoulement et la nature du substrat poreux influence fortement les performances tribologiques du système. Ils soulignent l'intérêt de concevoir des solutions de lubrification adaptées, notamment dans les dispositifs mécaniques intégrant des surfaces poreuses ou des lubrifiants complexes.

Les connaissances issues de ce chapitre offrent une base solide pour explorer des solutions de lubrification innovantes, notamment dans les micro-systèmes, les dispositifs biomécaniques ou les systèmes de dissipation passive d'énergie.

# *Conclusion Générale*



## **Conclusion Générale**

Ce travail a permis de modéliser le comportement d'un fluide non newtonien à couple de contrainte soumis à un effet d'écrasement entre deux disques rigides, en tenant compte de plusieurs facteurs influents tels que la concentration particulaire, la polarité du fluide, la fréquence du mouvement et la présence d'un substrat poreux.

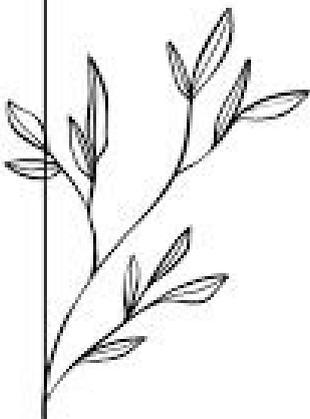
L'approche adoptée repose sur des formulations analytiques rigoureuses, issues des lois de la mécanique des fluides et adaptées à la rhéologie du lubrifiant étudié. L'introduction de l'approximation de Morgan–Cameron a permis de traiter efficacement le couplage entre le film fluide et le milieu poreux, offrant ainsi une meilleure compréhension des mécanismes de drainage et de réduction de pression dans ce type de système.

Les résultats obtenus mettent en évidence l'impact déterminant des propriétés internes du fluide et des conditions de confinement sur les performances hydrodynamiques du contact : champ de pression, portance, efforts de frottement et contraintes de cisaillement. Ces observations confirment l'intérêt d'une modélisation adaptée pour la conception de systèmes tribologiques performants, notamment dans des environnements exigeants tels que les dispositifs à haute précision, les systèmes biomécaniques ou les micro-technologies.

En somme, ce mémoire offre un cadre d'analyse pertinent pour appréhender la lubrification en régime d'écrasement dans des conditions complexes. Il ouvre également la voie à des perspectives de recherche prometteuses. Pour prolonger cette étude, plusieurs pistes peuvent être envisagées :

- L'intégration d'une approche par éléments finis pour traiter des géométries plus complexes ;
- L'introduction de conditions thermiques variables afin d'analyser les effets thermo-rhéologiques du fluide ;
- La réalisation d'études expérimentales sur des prototypes, en vue de valider les modèles analytiques développés.

*Références  
bibliographiques*



*Références bibliographiques*

- [1] O. Reynolds, "On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 177, pp. 157-234, 1886
- [2] J. D. Jackson, "A study of squeezing flow," *Applied Scientific Research, Section A*, vol. 11, no. 1, p. 148–152, 1963 January .
- [3] B. J. Hamrock, *Fundamentals of Fluid Film Lubrication*, Madison, Ohio: National Aeronautics and Space Administration, 1990 August .
- [4] Y. Hori, *Hydrodynamic Lubrication*, Tokyo ; New York: Springer, 2006.
- [5] Non-newtonian lubrication, J. Greenwood",2001,5,"","", "Tribology and Interface Engineering Series", "
- [6] Spreading of non-Newtonian fluids on hydrophilic surfaces. Rafaï, D. Bonn, A. Boudaoud",2004,80,"The spreading of Newtonian fluids on smooth solid substrates is well understood
- [7] Effects of confinement-induced non-Newtonian lubrication forces on the rheology of a dense suspension Alan Rosales-Romero, A. Vázquez-Quesada, S. S. Prasanna Kumar, J. E. López-Aguilar, M. Ellero",2024
- [8] Mathematics", Sarkar,"10.3390/math11224679", " A General Case of a Line Contact Lubricated by a Non-Newtonian Giesekus Fluid ; tribological performance
- [9] Performance Comparison of Newtonian and Non-Newtonian Fluid on a Heterogeneous Slip/No-Slip Journal Bearing System Based on CFD-FSI Method . Tauviqirrahman, J. Jamari, S. Susilowati, C. Pujiastuti, B. Setiyana, Ahmad Hafil Pasaribu, Muhammad Imam Ammarullah",2022,
- [10] Dynamic Behavior Analysis of Journal Bearings Lubricated by Non-Newtonian Fluid During Start-Up Shaoyu Zhu, Xiangjun Zhang, Jun Sun, Jie Zhu",2025
- [11] jie Zhu et all, The dynamic behavior of journal bearing lubricated by non-Newtonian fluid , *Journal of Tribology* ", "2", "10.1115/1.4067837", "<https://consensus.app/papers/dynamic-behavior-analysis-of-journal-bearings-lubricated-zhu-zhang/2fe2272aaf725a30bd47943a3e5694c5/>"
- [12] Two-dimensional flow of a non-Newtonian lubricant *Journal of Engineering Tribology* J. Greenwood",2000 <https://consensus.app/papers/twodimensional-flow-of-a-nonnewtonian-lubricant-greenwood/ec523d2c3ace5094946a986aba993abb/>
- [13] A novel suspension transport method: Viscoplastic lubrication of high-density fluids Qianqian Yang, P. Huang, Yanfei Fang",2016,29,"","", "Tribology International"
- [14] viscosity in lubricating oil and glycerol, with a larger effect in ethylene glycol Behzad Zakani, H. Salem, Sohrab Entezami, A. Sedaghat, D. Grecov",2022
- [15] Effect of gelatinization and swelling degree on the lubrication behavior of starch suspensions S. Garmeh, A. Dolatabadi, I. Karimfazli",2021,2,"","", "Journal of Non-newtonian Fluid
- [16] Jianhong Bao, Rodolphe Heyd, Gilles Régnier, A. Ammar, J. Peixinho",2023
- [17] Lei-Lei Ji, He Zhang, L. Cornacchia, G. Sala, E. Scholten",2022,16,"","", "Carbohydrate
- [18] Non-Polar Chain-Enabled Suspension of Carbon Nanoparticles in Base Oil M. H. Kabir, Darrius Dias, Evan Johnson, Joe Kosmoski, H. Liang",2024
- [19] Dynamics of particle entrainment for glass particles suspended in various fluids Raisa Rudge, H. M. Shewan, Jason R. Stokes, J. Dijkstra, Elke Scholten",2024,0,"","", "Tribology
- [20], The Behavior of Suspended Solid Particles in Rolling and Sliding Elastohydrodynamic Contacts "Tribology Transactions"G. Wan, H. Spikes" Solid particle suspensions,1988
- [21] The effect of particle concentration in a magneto rheological suspension on the performance of a boundary lubricated contact W. C. Leung, W. Bullough, P. Wong, C. Feng", *Journal of Engineering Tribology*"2004
- [22] Effect of ultrasonication on lubrication performance of cellulose nano-crystalline (CNC) suspensions as green lubricants Behzad Zakani, Sohrab Entezami, D. Grecov, H. Salem, A. Sedaghat",2022
- [23] Effects of confinement-induced non-Newtonian lubrication forces on the rheology of a dense suspension Alan Rosales-Romero, A. Vázquez-Quesada, S. S. Prasanna Kumar, J. E. López-Aguilar, M. Ellero",2024
- [24] Investigation of porous polyimide lubricant retainers to improve the performance of rolling bearings under conditions of starved lubrication Jingqiu Wang, Huajun Zhao, Wei Huang, Xiaolei Wang",2017
- [25] Effects of porosity on the tribological and mechanical properties of oil-impregnated polyimide Xingya Xu, X. Shu, Qichao Pei, H. Qin, Rui Guo, Xiaolong Wang, Qihua Wang",2022

- [26] The use of Powder Metallurgy for promoting friction reduction under sliding-rolling lubricated conditions G. Boidi, F. Profito, A. Kadiric, I. Machado, D. Dini",2021,7,"", "", "Tribology International"
- [27] A calculated model for the porosity effect of a self-lubricating composite on its lubrication property Yan Lu, Zuomin Liu",2013,19,"", "", "Tribology International"
- [28] Oil-Retention and Oil-Bearing Tribological Properties of Nanoporous Copper Prepared Using a Chemical Dealloying Method Fei Chen, Jiahao Zhao, Hao Wang, Honglin Li, G. Yin, Meirong Cai, Yangwei Wang, Qiang Shen",2023
- [29] G. Boidi, I. Tertuliano, Luiz Gustavo Del Bianchi da Silva Lima, F. Profito, I. Machado",2019
- [30] Effect of Porosity on the Friction Properties of Porous Polyimide Impregnated with Poly- $\alpha$ -Olefin in Different Lubrication Regimes Higher porosity in porous polyimide Chao Wang, Diqi Zhang, Qihua Wang, H. Ruan, Tingmei Wang",2020
- [31] study may provide guidance for the development of high-performance oil-impregnated lubricating nanoporous copper Tribology Letters"Jinbang Li, Ningning Zhou, Janet S. S. Wong",2023,
- [32] result of the increase in the elastic collapse area, which will aggravate the solid–solid direct rubbing and increase the COFs.Graphic Abstract Z. Jin, D. Dowson, J. Fisher" Friction,1992 Journal of Engineering in Medicine
- [33] The Effect of Porosity of Articular Cartilage on the Lubrication of a Normal Human Hip Joint M. Nabhani et al. 1992 (Non-Newtonian couple stress poroelastic squeeze film)
- [34] Modelling the effect of surface roughness on lubrication in all regimes R. Larsson",2009,55,"", "", "Tribology International" Tribology International
- [35] Effect of surface roughness on lubricant film breakdown and transition from EHL to mixed lubrication I. Křupka, P. Sperka, M. Hartl",2016,37,"", "", "Tribology International"
- [36] Jiaqi Li, Linxue An, Yuping Huang, Zhenshun Li, Ben Guan, Rui Li",2024
- [37] Influence of surface roughness on normal-sliding lubrication Wen-zhong Wang, Hui Chen, Yuan-zhong Hu, Hui Wang",2006
- [38] In situ oral lubrication and smoothness sensory perception influenced by tongue surface roughness Xingqun Wang, Jianshe Chen, Xinmiao Wang",2021 Thermal Science and Engineering Progress
- [39] Effect of surface roughness parameters on mixed lubrication characteristics J. Lundberg",1995,51,"", "lubrication capabilities in the transition,"", "Tribology International"
- [40] JinJing Liao, Xuanchi Liu, S. Miramini, Lihai Zhang",2022,7,"", "", "Computers in biology and medicine"
- [41] Influences of variability and uncertainty P. Tandon, L. Rakesh",1981,10,"", "", "Wear" Thermal Science and Engineering Progress
- [42] Pan Wang, He Liang, Liang Jiang, L. Qian",2023,17,"", "", "Wear BACKGROUND Influence of surface roughness
- [43] Effects of cartilage roughness on the lubrication H. Aminkhani, M. Daliri",2020 Journal of Engineering Tribology
- [44] Effects of piezo-viscous–coupled stress lubricant Akbar Toloian, M. Daliri, N. Javani",2020 Advances in Tribology
- [45] The Performance of Squeeze Film between Parallel Triangular R. Suresha<sup>1,2,3</sup> · R. Arunkumar<sup>1</sup> · B. N. Hanumagowda<sup>4</sup> · Dilsora Abduvalieva<sup>5</sup> · Nainaru Tarakaramu<sup>6,7</sup> · Fuad A. Awwad<sup>8</sup> · Emad A. A. Ismail<sup>8</sup> · M. Ijaz Khan<sup>9,10</sup> 2023
- [46] Combined effect of magneto hydrodynamics S. Boedo, E.D. Heisey",2024,1,"", "", "Tribology International"
- [47] effects of couple stress fluids and lubricant viscosity variation with pressure in squeeze film Haewon Byeon, Y. L. Latha, B. Hanumagowda, V. Govindan, A. Salma, S. Abdullaev, J. Tawade, Fuad A. Awwad, Emad A. A. Ismail",2023,5,"", "", "Scientific Reports"
- [48] Squeeze Film Characteristics of a Rigid Lubricated S. A., Hanumagowda B.N.",2022,5,"", "", "Partial Differential Equations in Applied
- [49] Effect of mhd and viscosity variation on the couplestress squeeze film between curved circular plate and a flat porous plate R. Shah, Rajiv B. Shah",2017,6,"Based on the Shliomis ferrofluid flow model
- [50] Magnetohydrodynamics and viscosity variation in couple stress squeeze film lubrication between rough flat and curved circular plates J. Lin, L. Chu, C. Hung, Pin-Yu Wang",2013 "Meccanica"
- [51] Theoretical analysis of effect of MHD B. Prajapati",1995,44,"", "", "Journal of Magnetism and Magnetic Materials"

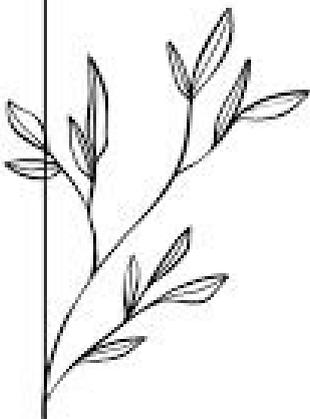
- [52] Lubrication of Isotropic Permeable Porous Inclined Slider Bearing with Slip Velocity and Squeeze Velocity ; Rajesh C. Shah<sup>1,\*</sup>, M. M. Parsania<sup>2</sup>, H. R. Kataria<sup>3</sup> ; 2012 Tribology
- [53] Theoretical analysis of effect of MHD, couple stress and slip velocity on squeeze film lubrication of rough Triangular plates R. Vinutha, B. Hanumagowda, K. Vasanth",2023,6,"","","Tribology International"
- [54] A Study of Squeeze Film Lubrication with Combined Effect of Viscosity Variation and Magnetohydrodynamic on Triangular Plates Vinutha R, Hanumagowda B. N, Vasanth K. R, G. K.",2024,0,"","","International Journal of Thermofluids"
- [55] Derivation of two-dimensional couple-stress hydromagnetic squeeze film Reynolds equation and application to wide parallel rectangular plates A. Nisha",2020 Solid State Technology
- [56] Combined effects of MHD and surface roughness on couple-stress squeeze film lubrication between porous circular stepped plates N. Naduvinamani, B. Hanumagowda, S. T. Fathima",2012,"","","Tribology International"
- [57] Effect of mhd and viscosity variation on the couplestress squeeze film between curved circular plate and a flat porous plate S. A., Hanumagowda B.N.",2022,"","","Partial Differential Equations in Applied Mathematics"
- [58] Jagadish Patil, Hanumagowda Bannihalli Naganagowda, Dhanraj Neela, Vishal Patil, A. G. Hiremath, T. Biradar, Vijayalaxmi Patil",2024 Journal of Advanced Research in Fluid Mechanics
- [59] Surface roughness effects on non-Newtonian MHD non-parallel squeeze film bearing,"M. Mouda, M. Nabhani, M. Khlifi",2020
- [60] - Combined effects of MHD and surface roughness on couple-stress squeeze film lubrication between porous circular stepped plates N.B. Naduvinamani a,n, B.N. Hanumagowda b, Syeda Tasneem Fathima c
- [61] M. J. Furey and B. M. Burkhardt, "Biotribology: Friction, wear, and lubrication of natural synovial joints," Lubrication Science, vol. 9, no. 3, pp. 255-271, 1997.
- [62] J. Dumbleton, Tribology of Natural and Artificial Joints, New York: Elsevier, 1981.
- [63] D. Dowson and Z. Jin, "Micro-Elastohydrodynamic Lubrication of Synovial Joints," Engineering in medicine, vol. 15, no. 2, pp. 63-65, 1986.
- [64] P. Tandon et S. Jaggi, «Wear and lubrication in an artificial knee joint replacement,» International Journal of Mechanical Sciences, vol. 23, n° %17, pp. 413-422, 1981.
- [65] E. Abdulluh, «Study Effect of Film Thickness of Articular Cartilage with Couple Stress Fluid on Performance Improvement of the Human Knee Joint,» American Scientific Research Journal for Engineering, Technology, and Sciences (ASRJETS), vol. 26, n° %11, 2016.
- [66] A. Ruggiero, E. Gómez and R. D'Amato, "Approximate closed-form solution of the synovial fluid film force in the human ankle joint with non-Newtonian lubricant," Tribology International, 2013.
- [67] N. Bujurke, R. B. Kudenatti and V. Awati, "Effect of surface roughness on squeeze film poroelastic bearings with special reference to synovial joints," Mathematical Biosciences, vol. 209, p. 76–89, 2007.
- [68] V. K. Stokes, "Couple Stresses in Fluids," Physics of Fluids, 1966.
- [69] E. Cosserat and F. Cosserat, "Théorie des Corps déformables," Hermann et Fils, vol. 81, p. 67, 1909.
- [70] B. J. Hamrock, S. R. Schmid and B. O. Jacobson, Fundamental of fluid film lubrication, 2 ed., Marcel Dekker,Inc.,270 Madison Avenue, New York, NY 10016,U.S.A., 2004.
- [71] A. Z. SZERI, Fluid Film Lubrication: Theory and Design, United Kingdom: Cambridge University Press, 2005.
- [72] E. R. Booser, CRC Handbook of Lubrication and Tribology, vol. 3, CRC Press, 1994.
- [73] O. Reynolds, «On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil,» Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vol. 177, pp. 157-234, 1886.
- [74] M. R. Spiegel, Théorie et applications de l'analyse, Mc GRAW-HILL, 1973.
- [75]<https://consensus.app/papers/hydrodynamic-lubrication-of-textured-surfaces-a-review-of-gropper-wang/50b389f07aaf5721a1d2b10af058b8a6/>
- [76]<https://consensus.app/papers/coupling-effect-of-boundary-tribofilm-and-hydrodynamic-jin-chen/88c781067d5c52f6980b881d71379905/>
- [77]<https://consensus.app/papers/a-multifield-analysis-of-hydrodynamic-lubrication-in-high-wu-zhang/58a03c77e6cb59db8dac09dc70342350/>
- [78]<https://consensus.app/papers/impact-of-textured-surfaces-in-starved-hydrodynamic-yagi-matsunaka/55a7ee135af75915b49872dd19cb5597/>
- [79] V. K. Stokes, "Couple Stresses in Fluids," Physics of Fluids, 1966.
- [80] E. Cosserat and F. Cosserat, "Théorie des Corps déformables," Hermann et Fils, vol. 81, p. 67, 1909.

- [81] A. Ruggiero, E. Gómez and R. D'Amato, "Approximate closed-form solution of the synovial fluid film force in the human ankle joint with non-Newtonian lubricant," *Tribology International*, vol. 57, p. 156–161, 2013.
- [82] V. K. Stokes, "Couple Stresses in Fluids," *Physics of Fluids*, 1966.
- [83] J. Robinson, F. Watson, R. Bucknall et S. W. Edwards, «Activation of neutrophil reactive-oxidant production by synovial fluid from patients with inflammatory joint disease,» *Biochemical journal*, vol. 286, n° 12, p. 345–351, 1992.
- [84] S. Solomon, M. Masilamani and S. Mohanty, "Generation of three-dimensional pannus-like tissues in vitro from single cell suspensions of synovial fluid cells from arthritis patients," *Rheumatology International*, vol. 24, p. 71–76, 2004 .
- [85] J.R. Lin, «Oscillating circular squeeze films considering the combined effects of fluid inertial forces and non-Newtonian couple stresses,» *Proc. IMechE, Journal of Engineering Tribology, Part J.*, vol. 222, 2008.
- [86] O. Reynolds, «On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil,» *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 177, pp. 157-234, 1886.
- [87] J. D. Jackson, "A study of squeezing flow," *Applied Scientific Research, Section A*, vol. 11, no. 1, p. 148–152, 1963 January .
- [88] N. Bujurke, M. Jagadeeswar and P. Hiremath, "Analysis of normal stress effects in a squeeze film porous bearing," *Wear*, vol. 116, no. 2, pp. 237-248, 1987 May 1 .
- [89] N. Bujurke and N. Naduvinamani, "A note on squeeze film between rough anisotropic porous rectangular plates," *Wear*, vol. 217, no. 2, pp. 225-230, 1998 May 15.
- [90] N. Bujurke and R. Kudenatti, "Surface roughness effects on squeeze film poroelastic bearings," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 2, no. 174, pp. 1181-1195, 2006 March 15 .
- [91] M. Megat Ahmad, D. Gethin, T. Claypole and B. Roylance, "Numerical and experimental investigation into porous squeeze films," *Tribology International*, vol. 31, no. 4, pp. 189-199, 1998 April.
- [92] M. Hlaváček, "Squeeze-film lubrication of the human ankle joint with synovial fluid filtrated by articular cartilage with the superficial zone worn out," *Journal of Biomechanics*, vol. 33, no. 11, pp. 1415-1422, 2000 November 1
- [93] A. Ruggiero, E. Gómez and R. D'Amato, "Approximate Analytical Model for the Squeeze-Film Lubrication of the Human Ankle Joint with Synovial Fluid Filtrated by Articular Cartilage," *Tribology Letters*, vol. 41, no. 2, p. 337–343, 2011 February .
- [94] M. Alshehri and S. K. Sharma, "Computational Model for the Generalised Dispersion of Synovial Fluid," *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, vol. 8, no. 2, 2017.
- [95] B. J. Hamrock, *Fundamentals of Fluid Film Lubrication*, Madison, Ohio: National Aeronautics and Space Administration, 1990 August .
- [96] Y. Hori, *Hydrodynamic Lubrication*, Tokyo ; New York: Springer, 2006.
- [97] S. Myers, "Suppression of hyaluronic acid synthesis in synovial organ cultures by corticosteroid suspensions," *Arthritis and Rheumatism*, vol. 28, no. 11, pp. 1275-1282, 1985.
- [98] R. Tanner , *Engineering Rheology*, Oxford: Oxford University Press, 2000.
- [99] D. Thomas, "Transport characteristics of suspension: VIII. A note on the viscosity of Newtonian suspensions of uniform spherical particles," *Journal of Colloid Science*, vol. 20, no. 3, pp. 267-277, 1965.
- [100] L. T. Kein, «Approche par changement d'échelle des caractéristiques rhéologiques d'une suspension de particules dans un fluide à seuil,» Thèse de doctorat, l'école nationale des ponts et chaussées, 2009.
- [101] S. HALELFADL, "Caractérisation des propriétés thermo-physiques et d'échanges de chaleur des nanofluides à base de nanotubes de carbone," l'INSA de Rennes, thèse de doctorat, 2014.
- [102] M. Kole and T. Dey, "Effect of aggregation on the viscosity of copper oxide-gear oil nanofluids," *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 50, no. 9, pp. 1741-1747, 2011.
- [103] I. M. Krieger and T. J. Dougherty, "A Mechanism for NonNewtonian Flow in Suspensions of Rigid Spheres," *Journal of Rheology*, vol. 3, no. 137 , 1959.
- [104] C. Haisheng, D. Yulong and T. Chunqing , "Rheological behaviour of nanofluids," *New Journal of Physics*, vol. 9, p. 367, 2007.
- [105] I. Mahbulul, R. Saidur and M. Amalina, "Latest developments on the viscosity of nanofluids," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 55, p. 874–885, 2012.
- [106] R. Roscoe, "The viscosity of suspensions of rigid spheres," *British journal of applied physics*, vol. 3, no. 8, 1952.

- [107] M. Devekar et T. K. V. Iyengar, «Stokes' problems for an incompressible couple stress fluid.,» *Nonlinear analysis: Modeling and control*, vol. 1, n° 12, pp. 181-190, 2008.
- [108] V. K. Stokes, *Theories of Fluids with Microstructure: An introduction*, Berlin Heidelberg NewYork Tokyo: Springer-Verlag, 1984.
- [109] J. Dumbleton, *Tribology of natural and artificial joints*, Elsevier scientific publishing company, 1981.
- [110] D. J. Knox, S. K. Wilson, B. R. Duffy and S. McKee, “Squeeze-Film Flow in the Presence of a Thin Porous Bed, with Application to the Human Knee Joint,” Oxford Centre for Collaborative Applied Mathematics, 2012.
- [111] M. Yousfi , B. Bou-Saïd and J. Tichy, “Axisymmetric squeezing of a Phan-Thien and Tanner lubricant film under imposed constant load in the presence of a poroelastic medium,” *Lubrication Science*, vol. 27, no. 8, p. 505–522, 2015.
- [112] J. Katta, Z. Jin, E. Ingham and J. Fisher, “Biotribology of articular cartilage—A review of the recent advances,” *Medical Engineering & Physics*, vol. 30, no. 10, p. 1349–1363, 2008.
- [113] P. JURCZAK, “Pressure distribution in a squeeze film biobearing lubricated by a synovial fluid,” *Int. J. of Applied Mechanics and Engineering*, vol. 11, no. 4, pp. 857-864, 2006.
- [114] V. Morgan and A. Cameron, “Mechanismus of lubrication in porous metal bearing,” *Proc. Conf. on Lubrication and Wear, Inst. Mech. Eng., London*, pp. 151-157, 1957.
- [115] J.-R. Lin, L.-M. Chu , W.-L. Li and R.-F. Lu, “Combined effects of piezo-viscous dependency and non-Newtonian couple stresses in wide parallel-plate squeeze-film characteristics,” *Tribology International*, vol. 44, no. 12, pp. 1598-1602, 2011 November .
- [116] M. Nabhani, M. El Khelifi and B. Bou-Saïd, “Non-Newtonian couple stress poroelastic squeeze film,” *Tribology International*, vol. 64, pp. 116-127, 2013 August.
- [117] V. Ponnuswamy and S. Govindaraj, “Behaviour of Couple Stress Fluids in Porous Annular Squeeze Films,” *Journal of Applied Mathematics and Physics*, vol. 2, pp. 349-358, 2014.
- [118] G. S. Beavers and D. D. Joseph, "Boundary conditions at a naturally permeable wall," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 30, no. 1, pp. 197-207, 1967.
- [119] H. C. Brinkman, "A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles," *Flow, Turbulence and Combustion*, vol. 1, no. 1, p. 27, 1949.
- [120] D. A. Nield and A. Bejan, *Convection in Porous Media*, Fifth Edition ed., Springer, Cham, 2017.
- [121] A. E. Scheidegger , *The physics of flow through porous media*, Britain: University of Toronto Press, 1974.
- [122] R. E. Collins , *Flow of fluids through porous materials*, New York: Reinhold publishing corporation, 1961.
- [123] A. Hutin, “Les milieux poreux en ingénierie de réservoir,” 2020.
- [124] P. Carman, “Fluid flow through granular beds,” *Chemical Engineering Research and Design*, vol. 75, pp. S32-S48, 1997.
- [125] P. Carman, “Fluid Flow through Granular Beds,” *Trans. Inst. Chem. Eng.*, vol. 15, pp. 150-166, 1937
- [126] J. Kozeny , Über kapillare Leitung des Wassers im Boden, Wien: Sitzungsbericht Akademie Wissenschaft, 1927.
- [127] S. Kunik, “Étude numérique et expérimentale du mécanisme de lubrification eX-Poro-HydroDynamique (XPHD),” Université de Poitiers, Thèse de doctorat, 2018.
- [128] A. Nield and A. Bejan, *Convection in porous media*, New York: Springer, 2006.
- [129] H. Darcy, *Les fontaines publiques de la ville de Dijon: exposition et application*, Paris: Victor Dalmont, 1856.
- [130] J. Bear , *Dynamics of fluids in porous media*, New York: Dover Publication, 1988.
- [131] M. Muskat , *The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media*, London: McGraw-Hill Book Company, 1937.
- [132] J. Ward, “Turbulent flow in porous media,” *Journal of the hydraulics division*, vol. 90, no. 1, pp. 1-12, 1964.
- [133] P. Forchheimer, «Z. Ver. Dtsch.,» *Ing. ,* vol. 45, p. 1782–1788, 1901.
- [134] C. Hsu and . P. Cheng, “Thermal dispersion in a porous medium,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 33, no. 8, pp. 1587-1597, 1990.
- [135] K. Gartling, C. Hickox et R. C. GIVLER, «Simulation of coupled viscous and porous flow problem.,» *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, vol. 7, n° 11-2, pp. 23-48 , 1996 .
- [136] P. Nithiarasu, . K. Seetharamu and T. Sundararajan, “Natural convective heat transfer in a fluid saturated variable porosity medium,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 40, no. 16, pp. 3955-3967, 1997.

- [138] N. B. Naduvinamani and A. Siddangouda, "Combined effects of surface roughness and couple stresses on squeeze film lubrication between porous circular stepped plates," *Proc. IMechE, Part J: Journal of Engineering Tribology*, vol. 221, pp. 525-534, 2007.
- [139] N. B. Naduvinamani, S. T. Fathima and P. S. Hiremath, "Effect of surface roughness on characteristics of couplestress squeeze film between anisotropic porous rectangular plates," *Fluid Dynamics Research*, vol. 32, no. 5, 2003.
- [140] A. E. Yousif and A. A. Al-allaq, "The hydrodynamic squeeze film lubrication of the ankle joint," *International Journal of Mechanical Engineering and Applications*, vol. 1, pp. 34-42, 2013.
- [141] G. Allaire, *Numerical Mathematics and Scientific Computation*, New York: Oxford University Press, 2007.
- [142] B. Alkahtani, "Numerical Solutions to the Navier-Stokes Equations in Two and Three Dimensions," Doctoral thesis, University of Manchester, 2013.
- [143] J. D. Hoffman and S. Frankel, *Numerical Methods for Engineers and Scientists*, 2 ed., CRC Press, 2001.
- [144] P. Nithiarasu, . K. Seetharamu and T. Sundararajan, "Natural convective heat transfer in a fluid saturated variable porosity medium," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 40, no. 16, pp. 3955-3967, 1997.
- [145] B. Laouadi, . M. Lahmar, B.-s. Benyebka, . H. Boucherit and A. Mouassa, "Analysis of couple-stresses and piezo-viscous effects in a layered connecting-rod bearing," *Mechanics & Industry*, vol. 19, no. 6, p. 607, 2018.
- [146] J. H. DUMBLETON, *Tribology of natural and artificial joints*, NEW YORK: Elsevier scientific publishing company, 1981.
- [147] D. J. Knox, S. K. Wilson, B. R. Duffy and S. McKee, "Squeeze-Film Flow in the Presence of a Thin Porous Bed, with Application to the Human Knee Joint," *Oxford Centre for Collaborative Applied Mathematics*, 2012.
- [147] M. Yousfi, B. Bou-Saïd and J. Tichy, "Axisymmetric squeezing of a Phan-Thien and Tanner lubricant film under imposed constant load in the presence of a poroelastic medium," *Lubrication Science*, vol. 27, no. 8, p. 505-522, 2015.
- [148] D. D. Frisbie, M. W. Cross and C. W. McIlwraith, "A comparative study of articular cartilage thickness in the stifle of animal species used in human pre-clinical studies compared to articular cartilage thickness in the human knee," *Veterinary and Comparative Orthopaedics and Traumatology*, vol. 19(03), pp. 142-146, 2006.
- [149] V. C. Mow, A. Ratcliffe et A. Poole, «Cartilage and diarthrodial joints as paradigms for hierarchical materials and structures,» *Biomaterials*, vol. 13, n° 12, pp. 67-97, 1992.
- [150] J. Katta, Z. Jin, E. Ingham and J. Fisher, "Biotribology of articular cartilage—A review of the recent advances," *Medical Engineering & Physics*, vol. 30, no. 10, p. 1349-1363, 2008.
- [151] A. Ruggiero, E. Gómez and R. D'Amato, "Approximate closed-form solution of the synovial fluid film force in the human ankle joint with non-Newtonian lubricant," *Tribology International*, 2013.
- [152] M. Nabhani, M. El Khelifi et B. Bou-Saïd, «Combiend non-Newtonian and viscous shear effects on porous squeeze film behavior,» *Trbology Transactions*, vol. 55, n° 14, pp. 491-502, 2012.
- [153] Y. Hori, *Hydrodynamic Lubrication*, Tokyo ; New York: Springer, 2006.
- [154] J. R. Lin, «Oscillating circular squeeze films considering the combined effects of fluid inertial forces and non-Newtonian couple stresses.,» *Proc. IMechE, Journal of Enginnering Tribology, Part J.*, vol. 222, 2008.
- [155] A. Ruggiero, E. Gómez and R. D'Amato, "Approximate closed-form solution of the synovial fluid film force in the human ankle joint with non-Newtonian lubricant," *Tribology International*, 2013.
- [156] M. Nabhani, M. El Khelifi et B. Bou-Saïd, «Combiend non-Newtonian and viscous shear effects on porous squeeze film behavior,» *Trbology Transactions*, vol. 55, n° 14, pp. 491-502, 2012.
- [157] Y. Hori, *Hydrodynamic Lubrication*, Tokyo ; New York: Springer, 2006.
- [158] J. R. Lin, «Oscillating circular squeeze films considering the combined effects of fluid inertial forces and non-Newtonian couple stresses.,» *Proc. IMechE, Journal of Enginnering Tribology, Part J.*, vol. 222, 2008.

# *Annexes*



### ❖ Équations de mouvement de V. K. Stokes

Équation de mouvement (*Momentum*) d'un fluide à couples de contraintes :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \mu \nabla^2 \vec{V} - \eta \nabla^4 \vec{V} \quad (\text{A-1})$$

On peut montrer que le Laplacien du champ de vitesse  $\vec{V}$  peut être défini par :

$$\Delta \vec{V} = \nabla^2 \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{V})) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})) \quad (\text{A-2})$$

Le fluide étant incompressible, l'équation de continuité s'écrit alors :

$$\text{div}(\vec{V}) = 0 \quad (\text{A-3})$$

Compte tenu de (A-3), Le Laplacien du champ de vitesse  $\vec{V}$  se réduit à :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{V} &= \nabla^2 \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{V})) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})) \\ \Delta \vec{V} &= \nabla^2 \vec{V} = -\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})) \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

Le bi-Laplacien du champ de vitesse  $\vec{V}$  s'exprime :

$$\begin{aligned} \Delta^2 \vec{V} &= \nabla^4 \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\Delta \vec{V})) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\Delta \vec{V})) = \Delta \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{V})) - \Delta \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})) \\ &= \left[ \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{V})))) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{V})))) \right] \\ &\quad - \left[ \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})))) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})))) \right] \end{aligned}$$

Soit :

$$\Delta^2 \vec{V} = \nabla^4 \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{V})))) + \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})))) \quad (\text{A-5})$$

Le fluide étant incompressible ( $\text{div}(\vec{V}) = 0$ ), le bi-Laplacien du champ de vitesse  $\vec{V}$  s'écrit comme :

$$\Delta^2 \vec{V} = \nabla^4 \vec{V} = \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})))) \quad (\text{A-6})$$

Finalement l'équation vectorielle de V. K. Stokes pour un fluide incompressible à couple de contraintes s'écrit sous la forme suivante :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}(p) - \mu \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})) - \eta \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})))) \quad (\text{A-7})$$

### ❖ Détermination du champ de vitesse pour un écoulement de fluide à couples de contraintes

Pour un écoulement bidimensionnel (2D) en film mince visqueux, les équations de V. K. Stokes s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \eta \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \eta \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(B-1a)} \\ \text{(B-1b)} \end{matrix}$$

En fixant un point  $x$  du continuum, l'équation (B-1a) peut être traitée comme une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre quatre à coefficients constants dont la solution générale est la somme de la solution homogène et de la solution particulière :

$$u = \underbrace{A_1 + A_2 z + E_1 e^{\frac{z}{l}} + E_2 e^{-\frac{z}{l}}}_{\text{solution homogène}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2\mu}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) z^2}_{\text{solution particulière}} \quad \text{(B-2)}$$

Avec  $A_1, A_2, E_1$  et  $E_2$  sont des constantes, où  $E_1 = \left(\frac{B_1+B_2}{2}\right)$  et  $E_2 = \left(\frac{B_1-B_2}{2}\right)$

Sachant que :  $\cosh\left(\frac{z}{l}\right) = \frac{(e^{\frac{z}{l}} + e^{-\frac{z}{l}})}{2}$  et  $\sinh\left(\frac{z}{l}\right) = \frac{(e^{\frac{z}{l}} - e^{-\frac{z}{l}})}{2}$

l'équations (B-2) devient :

$$u = \underbrace{A_1 + A_2 z + B_1 \cosh\left(\frac{z}{l}\right) + B_2 \sinh\left(\frac{z}{l}\right)}_{\text{solution homogène}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2\mu}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) z^2}_{\text{solution particulière}} \quad \text{(B-3)}$$

Le dérivée seconde de la vitesse s'écrit :

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{B_1}{l^2} \cosh\left(\frac{z}{l}\right) + B_2 \sinh\left(\frac{z}{l}\right) + \left(\frac{1}{2\mu}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) \quad \text{(B-4)}$$

L'indentification des constantes d'intégration nécessite l'utilisation des conditions aux limites (**figure B.1**) sur la vitesse :

$$\begin{array}{llll} z = 0 & u = U_1 & v = V_1 & w = W_1 \\ z = h & u = U_2 & v = V_2 & w = W_2 = \frac{dh}{dt} \end{array} \quad \begin{array}{l} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right|_{z=0} = 0 \\ \left. \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right|_{z=h} = \left. \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right|_{z=h} = 0 \end{array} \quad \text{(B-5)}$$

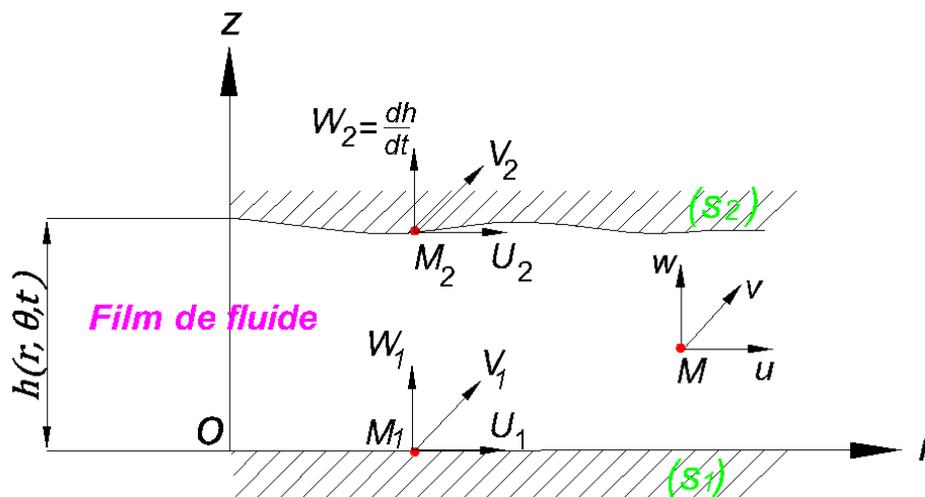


Fig. B.1 Schéma du contact selon la théorie de Reynolds

Pour  $z = 0$ , l'équation (B-4) devient :

$$0 = \frac{B_1}{l^2} \cosh(0) + B_2 \sinh(0) + \left(\frac{1}{2\mu}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)$$

On a donc :

$$B_1 = -\left(\frac{l^2}{\mu}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) \quad (\text{B-6})$$

Soit :

$$U_1 = A_1 + A_2 (0) + B_1 \cosh(0) + B_2 \sinh(0) + \left(\frac{1}{2\mu}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) (0)$$

et

$$A_1 = U_1 + \left(\frac{l^2}{\mu}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) \quad (\text{B-7})$$

Pour  $z = h$

$$\begin{cases} U_2 = A_1 + A_2 h + B_1 \cosh\left(\frac{h}{l}\right) + B_2 \sinh\left(\frac{h}{l}\right) + \left(\frac{1}{2\mu}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) h^2 \\ 0 = \frac{B_1}{l^2} \cosh\left(\frac{h}{l}\right) + B_2 \sinh\left(\frac{h}{l}\right) + \left(\frac{1}{2\mu}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) \end{cases}$$

La solution de ce système d'équations à deux variables donne :

$$B_2 = \left(\frac{l^2}{\mu}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) \left(\frac{\cosh\left(\frac{h}{l}\right) - 1}{\sinh\left(\frac{h}{l}\right)}\right) \quad (\text{B-8})$$

$$A_2 = \frac{U_2 - U_1}{h} - \left(\frac{h}{2\mu}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) \quad (\text{B-9})$$

En substituant ces valeurs et après avoir simplifié, l'expression de vitesse d'écoulement est enfin obtenue :

$$u = U_1 + \left(\frac{U_2 - U_1}{h}\right)z + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) \left[ z^2 - hz + 2l^2 \left( 1 - \frac{\cosh\left(\frac{2z-h}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)} \right) \right] \quad (\text{B-10})$$

De même pour  $v$  :

$$v = V_1 + \left(\frac{V_2 - V_1}{h}\right)z + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right) \left[ z^2 - hz + 2l^2 \left( 1 - \frac{\cosh\left(\frac{2z-h}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)} \right) \right] \quad (\text{B-11})$$