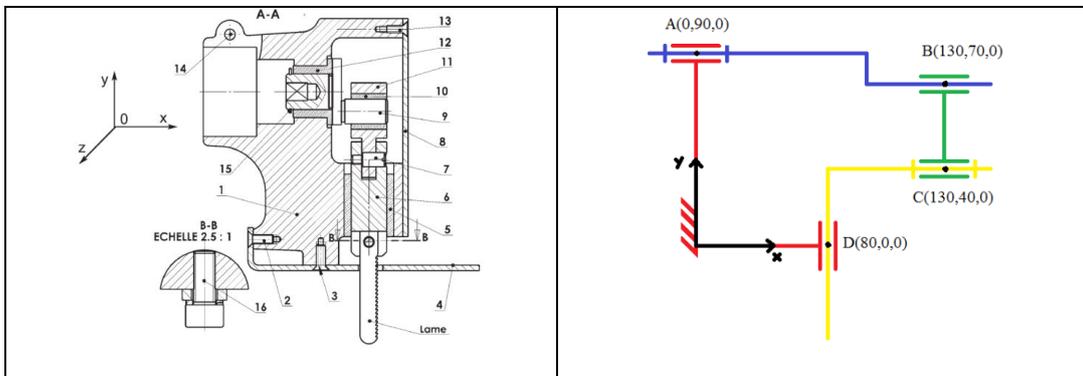




Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique

Polycopié de cours

Théorie de mécanismes



3^{ème} Année License

Spécialité : Construction Mécanique

Présenté par : *Dr FRIHI Djamel (MCA)*

Année universitaire 2024/2025

SOMMAIRE

Avant-propos	1
CHAPITRE I : RAPPELS & PRELIMINAIRES	
I-1 : Notions sur les torseurs.....	2
I-1-1 : Définition.....	2
I-1-2 : Torseurs de la mécanique du solide parfait.....	2
I-1-3 : Torseurs particuliers (élémentaires).....	2
I-1-4 : Notations : Ecriture en ligne ou en colonne.....	3
I-1-5 : Opérations sur les Torseurs.....	4
I-2 : Structure et classification des mécanismes.....	4
I-2-1 : Objectif.....	4
I-2-2 : Définitions de base.....	5
I-2-2-1 : Machine.....	5
I-2-2-2 Différents types de machines.....	5
I-2-3 : Pièce.....	6
I-2-4 : Liaison.....	6
I-2-5 : Hypothèses et limites de l'étude.....	6
I-2-6 : Couple cinématique.....	7
I-2-7 : Degrés de liberté.....	7
I-2-8 : Les mécanismes.....	8
I-2-8-1 : Définition.....	8
I-2-8-2 : Classification des mécanismes.....	8
I-2-8-3 : Structure des mécanismes.....	9
Chapitre II : MODELISATION DES MECANISMES	
II-1 : Introduction.....	16
II-2 : Définition d'un mécanisme.....	16
II-3 : But de la modélisation cinématique.....	17
II-4 : Classes d'équivalence cinématique.....	17
II-5 : Méthode pour modéliser un mécanisme.....	19
II-5-1 : Définir les classes d'équivalence.....	19
II-5-2 : Etablir le graphe des liaisons.....	19
II-5-3 : Construire le schéma cinématique minimal.....	19
II-6 : Paramétrages d'une liaison.....	19
II-7 : Liaisons.....	20
II-7-1 : Liaisons élémentaires et liaisons simples.....	20
II-7-2 : Liaisons composées et liaisons équivalentes.....	20
II-7-3 : Modélisation des liaisons – Contact et liaisons.....	21
II-8 : Nature des surfaces et modèle de liaison retenu.....	24
II-9 : Liaisons équivalentes.....	24
II-9-1 : Liaisons en série.....	25
II-9-2 : Liaisons en parallèle.....	26
II-10 : Approches utilisées pour trouver les liaisons équivalentes.....	28

Chapitre III : MOBILITE ET HYPERSTATISME	30
III-1 : Loi entrée-sortie.....	30
III-1-1 : Introduction.....	30
III-1-2 : Chaine cinématique ouverte.....	30
III-1-2-1 : Relation directe	31
III-1-2-2 : Relation indirecte	31
III-1-3 : Chaine cinématique fermée.....	31
III-1-3-1 : Fermeture géométrique.....	32
III-1-3-2 : Fermeture cinématique.....	32
III-1-3-3 : Cinématique graphique.....	33
III-2 : Particularités des lois entrée-sortie.....	33
III-3 : Hyperstatisme.....	35
III-3-1 : Introduction.....	35
III-3-1-1 : Définition.....	35
III-3-1-2 : Exemple.....	36
III-3-2 : Détermination du degré d'hyperstatisme par approche cinématique.....	37
III-3-2-1 : Inconnues cinématiques.....	37
III-3-2-2 : Nombre cyclomatique.....	38
III-3-2-3 : Nombre d'équations cinématiques.....	40
III-3-2-4 : Mobilités dans le mécanisme.....	40
III-3-3 : Calcul du degré d'hyperstatisme.....	41
III-3-4 : Conséquences de l'hyperstatisme.....	41
CHAPITRE IV : ANALYSE CINEMATIQUE DES MECANISMES	43
IV-1: Introduction	43
IV-2: Notions de mécanismes plans.....	43
IV-3 : Structure des mécanismes plans.....	44
IV-4: Etude cinématique du mécanisme à coulisseau et manivelle.....	44
IV-5: Mécanisme à quatre (04) barres [quadrilatère].....	48
CHAPITRE V : INITIATION A LA DAO ET SYNTHESE DES MECANISMES	54
V-1 : Introduction.....	54
V-2 : Présentation du mécanisme à modéliser (Scie sauteuse).....	54
V-2-1 : Introduction.....	54
V-2-2 : Données du problème.....	55
V-2-2-1 : Présentation du système.....	55
V-2-2-2 : Fonctionnement.....	55
V-2-2-3 : Elaboration du schéma cinématique.....	56
V-3 : Grandes étapes de création d'un modèle sous OpenMeca	58
V-3-1 : Création des groupes cinématiques.....	58
V-3-2 : Création des liaisons.....	59
V-3-3 : Habillage du schéma.....	61
V-3-3-1 : Les tiges et Les raccords.....	62
V-3-3-2 : La géométrie.....	65
V-4 : Création de points pour l'étude des mouvements sous OpenMeca	66
V-5 : La Simulation.....	68
V-6 : Exemples de résultats sous formes de courbes obtenues par OpenMeca	72
REFERNCES BIBLIOGRAPHIQUES	74

Avant-propos

La théorie des mécanismes est un domaine fondamental de la mécanique qui étudie les systèmes de pièces mobiles et leur interaction. Elle s'intéresse à la conception, l'analyse et l'optimisation des mécanismes, qui sont des assemblages de corps rigides reliés par des liaisons. Cette théorie est essentielle dans de nombreux domaines, tels que l'ingénierie, la robotique et la conception de machines. En comprenant les principes de la théorie des mécanismes, les étudiants (futurs techniciens et ingénieurs) peuvent créer des dispositifs plus efficaces et innovants, capables de réaliser des tâches complexes avec précision et fiabilité. Les concepts clés incluent les types de liaisons, les degrés de liberté, et les mouvements relatifs entre les composants, qui sont tous cruciaux pour le fonctionnement harmonieux d'un mécanisme.

Ainsi, le contenu de ce cours, destiné aux étudiants de la troisième année licence en construction mécanique, divisé en cinq chapitres, permettra aux étudiants et éventuellement aux techniciens et ingénieurs en mécanique, de pouvoir entreprendre quelques méthodes et techniques pour faire des études d'analyse ou de synthèse des systèmes mécaniques employés dans les domaines précités.

Cet ensemble de chapitres, propose un processus de mise en œuvre des méthodes et techniques d'analyse qui doivent accompagner tout bien d'équipement, de sa conception à son démantèlement. Il constitue une aide à la démarche d'ingénierie de conception visant à l'optimisation du coût global du système.

A la lumière de l'ensemble des chapitres l'étudiant sera en mesure de :

1. Comprendre les principes fondamentaux des mécanismes et leur fonctionnement.
2. Analyser et modéliser des systèmes mécaniques complexes.
3. Appliquer les concepts de la théorie des mécanismes à des problèmes pratiques d'ingénierie.
4. Développer des compétences en conception et en optimisation de mécanismes.
5. Explorer les applications des mécanismes dans divers domaines tels que la robotique, l'automobile et l'aéronautique.
6. Encourager la pensée critique et la résolution de problèmes à travers des études de cas et des projets pratiques.

Pour atteindre ces objectifs, certaines connaissances préalables recommandées sont nécessaires tels que l'analyse vectorielle, dessin industriel, technologie générale, fabrication mécanique et mécanique rationnelle.

Remerciement

Ce cours a pu voir la lumière grâce à l'aide précieuse du **Dr S. GHERIB** (Maître de Conférences au Département de Génie Mécanique à l'Université de Guelma) à laquelle j'adresse mes vifs remerciements.

CHAPITRE I

RAPPELS & PRELIMINAIRES

I-1 : NOTIONS SUR LES TORSEURS

I-1 -1 : Définition

Le torseur est un outil mathématique particulièrement adapté aux calculs de mécanique du solide indéformable. Il apparaît dans :

- | | |
|--|--|
| 1 : La cinématique du solide : | Torseur distributeur des vitesses ; |
| 2 : La modélisation des actions mécaniques : | Torseur des actions mécaniques |
| 3 : La dynamique : | Torseur cinétique
Torseur dynamique |

Un torseur est par définition constitué de deux champs de vecteurs : un champ \vec{R} et un champ \vec{M} .

$$\text{Il se note alors : } \{T\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}_{A:\text{Point de réduction}}$$

Le premier champ, appelé **Résultante** du Torseur et noté \vec{R} , est un champ constant,

Le deuxième champ, appelé **Moment** du Torseur et noté \vec{M} , est un champ antisymétrique vérifiant la loi du champ de moment :

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R}$$

\vec{M}_A : est le moment du torseur au point A

\vec{M}_B : est le moment du torseur au point B

\vec{R} et \vec{M}_A : sont les éléments de réduction du torseur au point A

\vec{R} et \vec{M}_B : sont les éléments de réduction du torseur au point B

I-1-2: Torseurs de la mécanique du solide parfait (cinématique et dynamique)

I-1-2-1 Torseur cinématique

Il est défini par : $\{V\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\omega} \\ \vec{V}_A \end{array} \right\}_A$

Où : $\vec{\omega}$: Vitesse angulaire et \vec{V}_A : Vitesse tangentielle

I-1-2-2 Torseur dynamique

Il est défini par : $\{T\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}_A$

I-1-3 : Torseurs particuliers (élémentaires)

I-1-3-1: Invariants d'un torseur

Quantités qui restent invariantes quel que soit le point de réduction.

Le premier invariant est un invariant vectoriel : la Résultante \vec{R} .

Le deuxième invariant est invariant scalaire : le produit scalaire $(\vec{R} \cdot \vec{M}_A)$ appelé automoment.

I-1-3-2: Torseurs élémentaires

Ce sont des torseurs dont l'invariant scalaire est nul, il en existe deux : le torseur « couple » et le torseur « glisseur ».

3-2-1 : Torseur nul

C'est le torseur $\{T\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{\forall P}$ les éléments de réduction sont nuls en tout point

3-2-2 : Torseur couple

Le torseur « couple » est un torseur dont la résultante est nulle et dont le moment est non nul en un point de l'espace. Le champ de moment d'un couple est uniforme et ne dépend pas du point d'observation.

$$\{T\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}_A$$

$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R} = \vec{M}_A$ implique que le torseur a la même expression en tout point

$$\{T\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{M}_P \end{array} \right\}_{\forall P}$$

3-2-3 : Torseur glisseur

C'est un torseur pour lequel il existe un point **P** où le moment est nul :

$$\{T\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_P$$

I-1-4 : Notations : Ecriture en ligne ou en colonne

4-1 : Ecriture en ligne

$$\{T\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_x \cdot \vec{x} + R_y \cdot \vec{y} + R_z \cdot \vec{z} \\ M_{Ax} \cdot \vec{x} + M_{Ay} \cdot \vec{y} + M_{Az} \cdot \vec{z} \end{array} \right\}_A$$

4-2 : Ecriture en colonne

$$\{T\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{cc} R_x & M_{Ax} \\ R_y & M_{Ay} \\ R_z & M_{Az} \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

I-1-5 : Opérations sur les Torseurs**5-1 : Addition ou somme de torseurs**

La somme de n torseurs $\{\tau_1\}, \{\tau_2\}, \{\tau_3\}, \dots, \{\tau_n\}$ n'est possible que si tous les torseurs de la somme sont écrits au même point.

$$\{\tau_1\}_P + \{\tau_2\}_P + \dots + \{\tau_n\}_P = \{\tau\}_P \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{R}_i \\ \vec{M}_P(\vec{R}) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_P(\vec{R}_i) \end{cases}$$

5-2 : Multiplication par un scalaire

$$a\{\tau\}_P = \left\{ \begin{array}{l} a\vec{R} \\ a\vec{M}_P(\vec{R}) \end{array} \right\}_P$$

5-3 : Torseurs égaux

Deux torseurs sont égaux s'ils ont même éléments de réduction en un point A quelconque.

$$\{T\} = \{T'\} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R} = \vec{R}' \\ \vec{M}_A = \vec{M}_A' \end{cases}$$

Egalité des moments au même point

I-2 : STRUCTURE ET CLASSIFICATION DES MECANISMES**I-2-1 : Objectif**

La mécanique des machines comprend deux disciplines : la théorie des mécanismes et la théorie des machines.

On entend par théorie des mécanismes un ensemble de méthodes qui permettent d'étudier les propriétés des mécanismes usuels employés dans les machines, en vue de les comprendre, de les améliorer ou de les concevoir. Ces méthodes reposent essentiellement sur deux branches de la mécanique, la statique et la cinématique. La théorie des machines s'attache à considérer l'ensemble de mécanismes associés formant la machine, cet ensemble peut être une machine isolée, groupe de machine, ou un complexe de machine à action automatique.

Le but de la théorie des mécanismes n'est pas d'établir une construction intellectuelle de plus, mais, de donner aux techniciens et ingénieurs un outil de travail efficace. Elle permet :

- L'analyse structurale et cinématique d'un mécanisme, afin d'émettre un avis sur la pertinence des solutions adoptées pour remplir la fonction mécanique souhaitée,
- L'analyse dynamique,
- La synthèse du mécanisme
- Élément de la théorie des machines automatiques.

I-2-2 Définitions de base

I-2-2-1 Machine :

La machine est un dispositif que l'homme a créé pour découvrir et mettre à profit les lois de la nature, pour faciliter son travail physique et intellectuel et le rendre plus productif, tout ceci en la substituant, partiellement ou intégralement, à son effort ou à un organe.

On peut donner une définition plus précise : la machine est un dispositif mécanique dont les parties constitutives fonctionnent en concordance exécutant des mouvements prescrits dans le but de réaliser la transformation de l'énergie, des matériaux ou de l'information :

I-2-2-2 Différents types de machines :

Du point de vue de leurs fonctions, les machines se répartissent dans les catégories suivantes :

I-2-2-2-1 Machines énergétiques :

a- Machines moteurs : servent à transformer l'énergie thermique, électrique ou tout autre type d'énergie en travail mécanique.

b- Machines générateurs : Transforment l'énergie mécanique en d'autre forme d'énergie. A cette classe de machine, on rapporte les compresseurs, les dynamos, ...

I-2-2-2-2 Machines de travail :

On distingue les machines de manutention ou de transport et les machines technologiques.

a- Les machines technologiques : Mettent en œuvre le travail mécanique développé par les machines moteurs dans le but de réaliser des opérations technologiques, c'est-à-dire des opérations d'usinage (machines-outils) et de transformation de différents matériaux (machines textiles, agricoles, ...).

b- Machines de manutention : Servent à changer la position des objets telles que les ponts roulants, les grues automobiles, les convoyeurs,...

I-2-2-2-3 : Machines informatiques :

Ce sont des machines qui traitent les informations, on distingue :

a- Machines de commande : Ce sont des ensembles automatisés (informatisés). Ces machines qui en traitant l'information se sert des résultats obtenus pour commander des unités complexes (machines énergétiques, machines-outils, ...). Exemple : la fabrication des pièces de grande précision (billes segments de piston,..). Le fonctionnement de ces machines est basé sur l'utilisation des ordinateurs.

b- Machines mathématiques : Transforment l'information mise sous forme mathématique, c'est-à-dire exprimée par des nombres ou des algorithmes (machines informatiques, calculateurs, ...).

I-2-2-2-4 : Machines cybernétiques :

Machines qui reproduisent ou simulent différents processus mécaniques, physiologiques, ou biologiques propres à l'homme ou à la nature vivante (les machines qui identifient les images, la parole, les machines qui remplacent un organe médical, ...).

I-2-3 Pièce :

Toutes les machines sont constituées de pièces (éléments) groupés. On appelle pièce tout sous ensemble rigide faisant partie d'un mécanisme ou d'une structure, quelle que soit sa réalisation. Une pièce (élément) se présente sous la forme d'un seul article sans avoir recours à aucune opération de montage. Les pièces peuvent être simples (vis, écrou, rondelle, ...) ou bien encombrantes et de formes compliquées (bâti, carter, ...).

I-2-4 : Liaison :

Une liaison résulte de la mise en contact de deux pièces par l'intermédiaire de surfaces fonctionnelles appropriées. On entend d'une liaison qu'elle transmette certains efforts d'une pièce à l'autre ou qu'elle interdise certains mouvements d'une pièce par rapport à l'autre.

I-2-5 : Hypothèses et limites de l'étude :

- Les pièces sont parfaitement indéformables : La distance de deux points quelconques appartenant à une même pièce et donc rigoureusement invariable, on néglige ici l'élasticité, en déduisant immédiatement qu'un ressort ne doit jamais être considéré comme une pièce.

- Les surfaces fonctionnelles par lesquelles les pièces viennent en contact sont géométriquement parfaites on néglige cette fois les tolérances de forme et d'état de surface.
- Les liaisons créées entre les pièces sont parfaites, c'est-à-dire qu'elles sont réalisées sans jeu, ni serrage, ni frottement. Les ajustements et l'usure sont exclus de l'étude.

I-2-6 : Couple cinématique :

Assemblage mobile de deux éléments se trouvant en contact permanent et susceptibles d'un mouvement relatif.

I-2-7 : Degrés de liberté :

Un solide rigide isolé dans l'espace peut se déplacer librement dans un mouvement qu'on peut décomposer suivant 6 transformations géométriques indépendantes (translations et rotations autour d'axes fixes dans les trois directions d'une base liée à notre espace à 3 dimensions).

Si ces solides sont liés mécaniquement, certains de ces mouvements élémentaires sont supprimés. On appelle degré de liberté dans une liaison, les mouvements indépendants qui restent possibles.

Pour chaque type de liaison considérée, il résulte une combinaison différente des degrés de liberté, dépendant complètement de la géométrie des contacts de liaison.

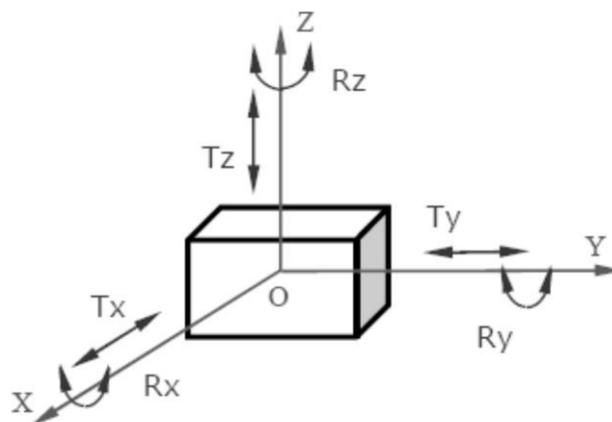


Figure 1 : Degrés de liberté dans l'espace

Cette notion est largement employée pour l'étude des dispositifs de mise en position de pièces sur les machines-outils, l'objectif étant de solidariser complètement la pièce avec la machine avec une dispersion la plus faible possible.

On a toujours représenté le mouvement d'un corps rigide dont la position est définie par trois points (A, B, C) comme la rotation autour de trois axes perpendiculaires x , y , z et le glissement le long de ces mêmes axes.

I-2-8: Les mécanismes

I-2-8-1 : Définition

Les mécanismes et les structures résultent de l'agencement d'éléments rigides liés les uns aux autres par des contacts physiques qui les rendent totalement ou partiellement solidaires, selon qu'ils autorisent ou non des mouvements relatifs. Ils comportent donc un nombre entier de pièces et un autre nombre entier, généralement différent, de liaisons. On trouve des systèmes dans lesquels certains éléments peuvent se mouvoir, Par exemple, le mécanisme d'une montre désigne l'ensemble des ressorts, balancier ou engrenages utilisés pour faire tourner les aiguilles, et des agencements purement statiques comme le montage qui immobilise une pièce en vue de son usinage sur une machine-outil. Certains d'eux ne comportent que des corps solides, d'autres incluent aussi comme parties intégrantes des corps fluides, des dispositifs électriques, magnétiques et autres. Ces derniers sont appelés respectivement : hydrauliques, électriques, ...

Les mécanismes sont généralement utilisés pour transformer un mouvement en un autre. Une machine est finalement constituée d'un ensemble de mécanismes.

I-2-8-2 : Classification des mécanismes

Du point de vue de leur fonctionnement, les mécanismes des machines se divisent généralement en :

1- Mécanismes des moteurs et des convertisseurs :

Les mécanismes des moteurs transforment différentes formes d'énergie en travail mécanique (mécanismes des moteurs à combustion interne, des machines à vapeur, ...). Les mécanismes des convertisseurs transforment le travail mécanique en d'autre formes d'énergie (mécanismes des pompes, des compresseurs, ...).

2- Mécanismes de transmission : ont pour but de transmettre le mouvement du moteur à la machine technologique ou aux mécanismes exécutifs (réducteurs de vitesse, multiplicateur, boîte des vitesses ou des avances, ...).

3- Mécanismes exécutifs : Ils agissent directement sur le milieu de travail ou sur l'objet de travail. Ils changent la forme, l'état, la position et les propriétés du milieu ou de l'objet (les mécanismes des machines-outils, les mécanismes de laminage,).

4- Mécanismes de commande, de contrôle et de régulation : Comprennent par exemple les mécanismes qui servent à contrôler les dimensions des articles à usiner, les régulateurs de vitesse ou encore les mécanismes de mesure qui contrôlent les dimensions, les pressions, les températures, ...

5- Mécanismes d'avance, de transport, d'alimentation et de triage : Vis d'alimentation, les élévateurs à godets, les trémies d'alimentation, les mécanismes de triage des produits finis suivants le poids, les dimensions ou la configuration, ...

6- Mécanismes automatiques de comptage, pesage et de conditionnement des produits finis :

Employés sur un grand nombre de machines, notamment pour la production en masse.

I-2-8-3 : Structure des mécanismes

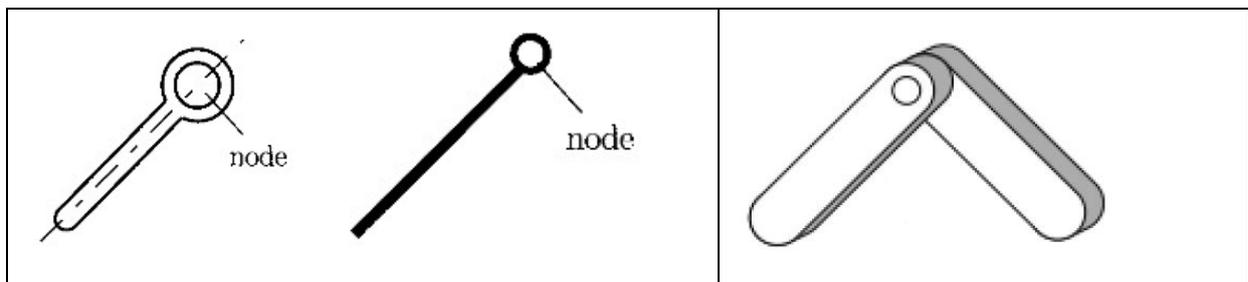
I-2-8-3-1 : Eléments cinématiques

L'élément cinématique est un corps dans la structure mécanique, il peut être solide, liquide ou gazeux. Sauf exception, on ne considérera que les corps rigide (indéformable). Le nombre d'élément cinématique est un paramètre qui caractérise la chaîne cinématique d'un mécanisme.

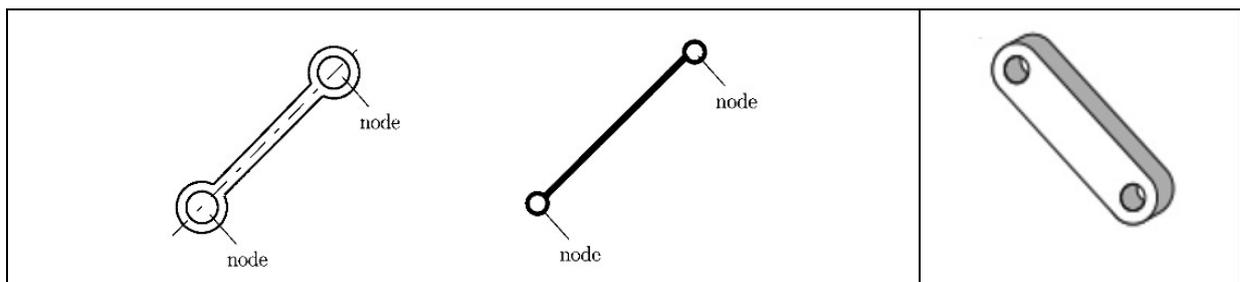
I-2-8-3-2 Types d'éléments cinématiques :

Les éléments cinématiques qui constituent une chaîne cinématique (mécanisme) ont du point de vue structurale diverse formes géométriques déterminées par le nombre "r" de la possibilité de liaisons (possibilité de couple cinématique). "r" est appelé "**rang**" de l'élément cinématique.

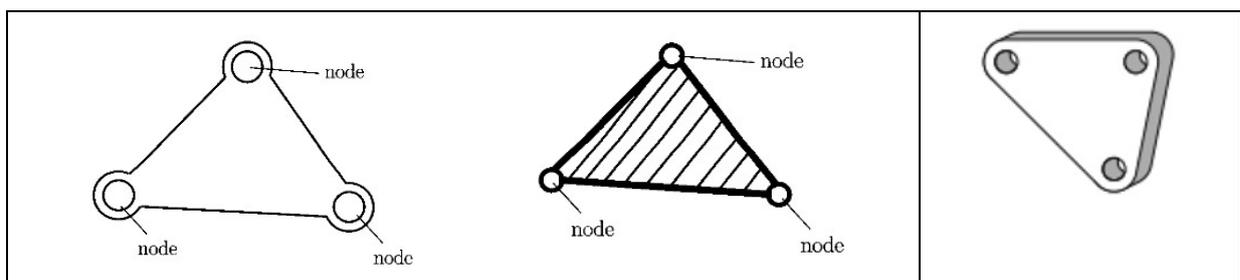
a- Elément unitaire: C'est un élément ayant une seule possibilité d'être associé à un autre élément par l'une de ces extrémités, son rang est $r=1$, on le symbolise par :



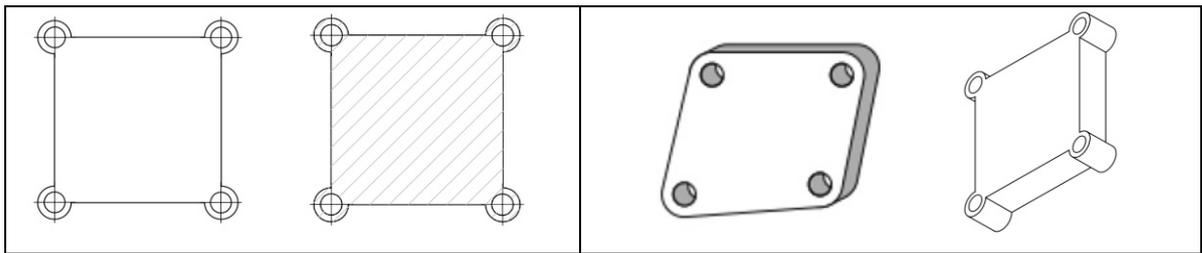
b- Elément binaire: c'est un élément ayant 2 possibilités d'être associé à d'autre élément, son rang est $r=2$.



c- Elément ternaire : C'est un élément ayant 3 possibilités d'être associé à d'autres éléments son rang est $r=3$. Il a une forme triangulaire.



d- Elément quaternaire : c'est un élément ayant 4 possibilités d'être associé à d'autres éléments cinématiques, son rang est $r=4$.



I-2-8-3-3 : Couples cinématiques

Comme le couple cinématique est un assemblage de deux éléments en contact, on peut donc réunir ces éléments d'une multitude de façons. Les figures 2 et 3 représentent deux exemples de couples cinématiques fondamentales le premier est dit de rotation le deuxième est dit de translation.

Ainsi le mouvement relatif de chaque élément d'un couple cinématique est limité à certaines restrictions qui dépendent du mode d'assemblage des éléments du couple. Ces restrictions imposées aux couples cinématiques sont dites conditions de **liaison "S"**. Sachant que le nombre de degrés de liberté d'un corps solide est égal à **6**, le nombre de conditions de liaison **S** imposées au mouvement relatif de chaque élément du couple cinématique ne peut varier que de 1 à 5 soit : $1 \leq S \leq 5$. Par conséquent le nombre de **ddl H** d'un élément du couple cinématique animé d'un mouvement relatif peut être exprimé par : $H=6-S$, il peut varier de 1 à 5.

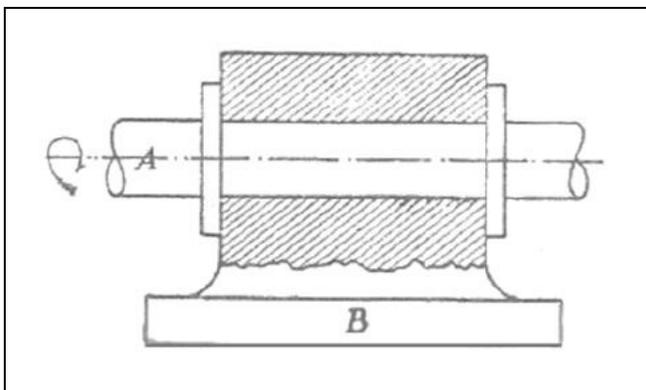


Figure 2 : Couple cinématique de rotation

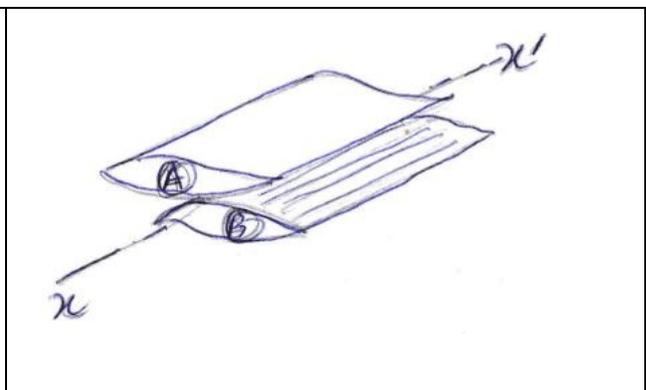


Figure 3 : Couple cinématique de translation

I-2-8-3-4 : Classes des couples cinématiques :

Tous les couples cinématiques sont divisés en **classes** en fonction du nombre de conditions de liaison qu'ils imposent au mouvement relatif de leurs éléments. Comme le nombre de conditions de liaison varie de 1 à 5, on a cinq classes de couples **I, II, III, IV, V**. la classe d'un couple cinématique est égale au nombre de conditions de liaison **S** ($S=C-6-H$).

Exemple : Couple cinématique de classe I (figure 4): $S=C-6-H=1$

Donc cette classe comprend cinq ddl (sphère A animé d'un mouvement avec glissement sur le plan B). $H=03R+02T=5ddl$

(Voir le tableau I)

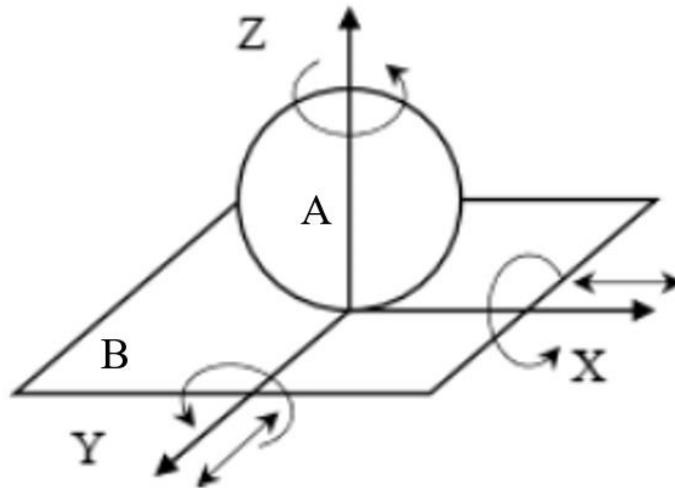


Figure 4 : Couple cinématique de classe I (Quinquamobile)

I-2-8-3-5 Représentation conventionnelle des couples cinématiques

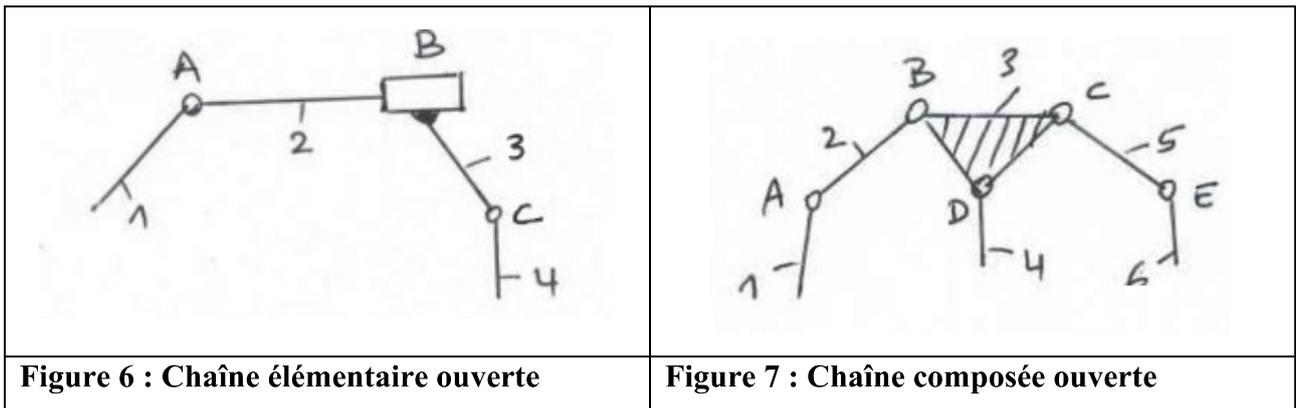
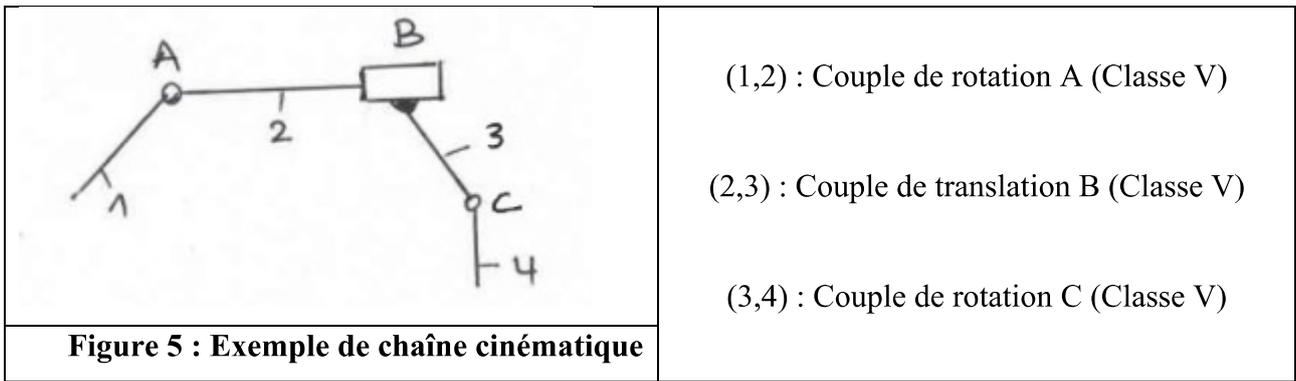
Lorsqu'on représente les mécanismes sur les figures il est commode de le faire au moyen de signes conventionnels au lieu d'exécuter les dessins des couples cinématiques et de leurs éléments (**tableau II**).

Selon la forme du contact réalisé entre deux éléments d'un couple cinématique, les couples cinématiques se divisent en 2 types (**tableau III**) :

- a- Couples cinématiques inférieurs : Lorsque le contact entre les éléments est surfacique.
- b- Couples cinématiques supérieurs : Lorsque le contact entre les éléments est ponctuel ou linéique.

I-2-8-3-6 : Chaîne cinématique :

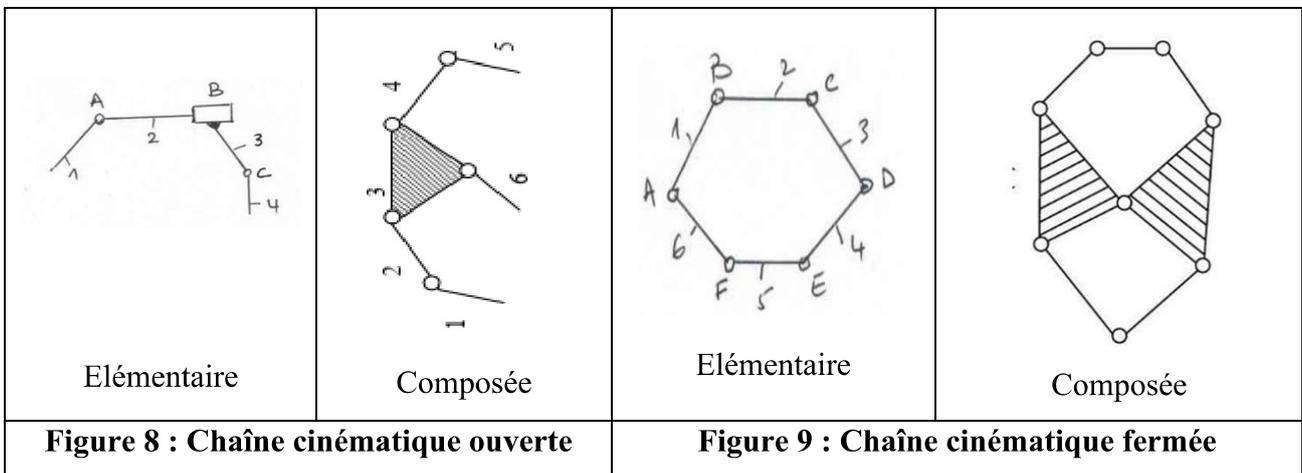
Par une chaîne cinématique on entend un système joint d'éléments qui forment entre eux des couples cinématiques (Figure 5 : Exemple de chaîne cinématique). Les chaînes cinématiques peuvent être élémentaires ou composées. La chaîne est dite élémentaire si chacun de ces éléments ne forme que deux couples cinématiques au maximum (figure 6). La chaîne cinématique est dite composée si elle comporte au moins un élément ternaire (figure 7). D'autre part, les chaînes cinématiques se subdivisent en :



a- **Chaînes cinématiques ouvertes** : ce sont des chaînes cinématiques qui contiennent au moins un élément unitaire formant avec l'une des deux extrémités un couple cinématique avec un autre élément et dont l'autre extrémité est libre (figure 8).

b- **Chaînes cinématiques fermées** : ce sont des chaînes qui ne contiennent pas d'éléments unitaire donc elles ne peuvent avoir au maximum que des éléments binaire (figure 9).

Remarque : Une chaîne cinématique a toujours le rang de l'élément d'ordre supérieur c'est-à-dire celui qui a le plus grand rang "r" parmi tous les autres éléments de cette chaîne.



Nom	point(s) d'expression	ddl	Représentation plane	Représentation 3D	Torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/1)\}$	Torseur des AM $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\}$
Encastrement	tout point de l'espace	0			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$	$\begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$
Pivot d'axe (A, \vec{x})	tout point de l'axe	1			$\begin{Bmatrix} \omega_{x21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$	$\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$
Glissière de direction \vec{x}	tout point de l'espace	1			$\begin{Bmatrix} 0 & V_{x21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$	$\begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$
Hélicoïdale d'axe (A, \vec{x}) et de pas p	tout point de l'axe	1			$\begin{Bmatrix} \omega_{x21} & h\omega_{x21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$ avec $h = \pm \frac{p}{2\pi}$	$\begin{Bmatrix} X_{12} & -hX_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$ avec $h = \pm \frac{p}{2\pi}$
Pivot glissant d'axe (A, \vec{x})	tout point de l'axe	2			$\begin{Bmatrix} \omega_{x21} & V_{x21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$
Rotule à doigt de centre A bloquée en \vec{x}	centre de la liaison	2			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{y21} & 0 \\ \omega_{z21} & 0 \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$	$\begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$
Rotule de centre A	centre de la liaison	3			$\begin{Bmatrix} \omega_{x21} & 0 \\ \omega_{y21} & 0 \\ \omega_{z21} & 0 \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$	$\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$
Appui plan de normale \vec{y}	tout point de l'espace	3			$\begin{Bmatrix} 0 & V_{x21} \\ \omega_{y21} & 0 \\ 0 & V_{z21} \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$	$\begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$
Linéique annulaire de centre A et de direction \vec{x}	centre de la liaison	4			$\begin{Bmatrix} \omega_{x21} & V_{x21} \\ \omega_{y21} & 0 \\ \omega_{z21} & 0 \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$
Linéique rectiligne de ligne (A, \vec{x}) et de normale \vec{y}	tout point du plan (A, \vec{x} , \vec{y})	4			$\begin{Bmatrix} \omega_{x21} & V_{x21} \\ \omega_{y21} & 0 \\ 0 & V_{z21} \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$
Ponctuelle en A de normale \vec{y}	tout point de (A, \vec{y})	5			$\begin{Bmatrix} \omega_{x21} & V_{x21} \\ \omega_{y21} & 0 \\ \omega_{z21} & V_{z21} \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$

Tableau I : Liaisons usuelles

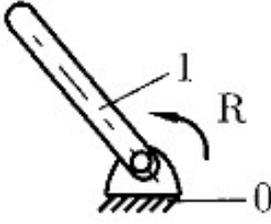
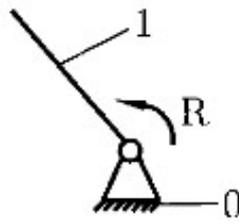
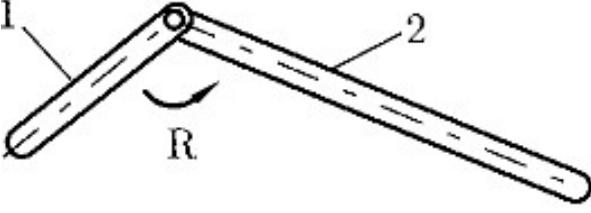
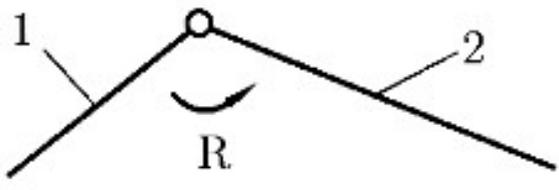
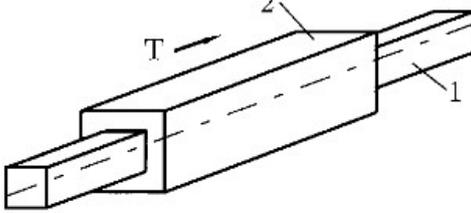
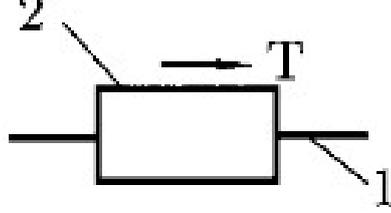
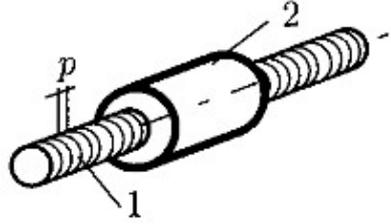
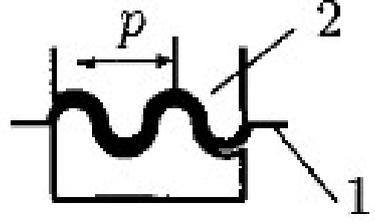
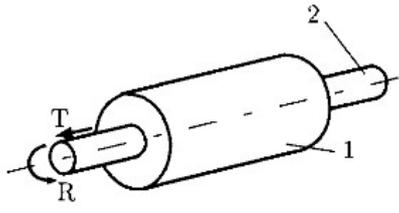
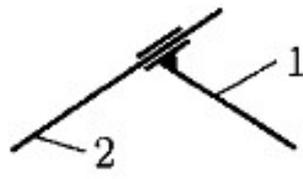
Couple Cinématique	Représentation Schématique
 <p>A 3D perspective view of a revolute joint. Link 1 is a rod pivoted at one end to a fixed frame 0. A curved arrow labeled 'R' indicates the relative rotation between the link and the frame.</p>	 <p>A 2D schematic of a revolute joint. Link 1 is a line pivoted at one end to a fixed frame 0. A curved arrow labeled 'R' indicates the relative rotation.</p>
 <p>A 3D perspective view of a revolute joint between two links, 1 and 2. A curved arrow labeled 'R' indicates the relative rotation between the two links.</p>	 <p>A 2D schematic of a revolute joint between two links, 1 and 2. A curved arrow labeled 'R' indicates the relative rotation.</p>
 <p>A 3D perspective view of a prismatic joint between two links, 1 and 2. Link 2 is a rectangular block that slides along link 1. A straight arrow labeled 'T' indicates the relative translation.</p>	 <p>A 2D schematic of a prismatic joint between two links, 1 and 2. Link 2 is a rectangular block that slides along link 1. A straight arrow labeled 'T' indicates the relative translation.</p>
 <p>A 3D perspective view of a cam-follower joint between two links, 1 and 2. Link 1 is a cam with a wavy profile, and link 2 is a follower with a matching profile. A straight arrow labeled 'p' indicates the pitch of the cam.</p>	 <p>A 2D schematic of a cam-follower joint between two links, 1 and 2. Link 1 is a cam with a wavy profile, and link 2 is a follower with a matching profile. A straight arrow labeled 'p' indicates the pitch of the cam.</p>
 <p>A 3D perspective view of a gear joint between two links, 1 and 2. Link 1 is a gear with a cylindrical profile, and link 2 is a smaller gear. A straight arrow labeled 'T' indicates the pitch, and a curved arrow labeled 'R' indicates the relative rotation.</p>	 <p>A 2D schematic of a gear joint between two links, 1 and 2. Link 1 is a gear with a cylindrical profile, and link 2 is a smaller gear. A straight arrow labeled 'T' indicates the pitch, and a curved arrow labeled 'R' indicates the relative rotation.</p>

Tableau II : Représentation conventionnelle

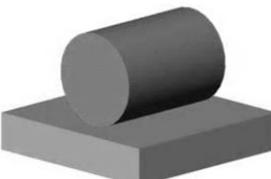
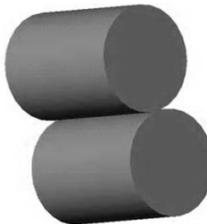
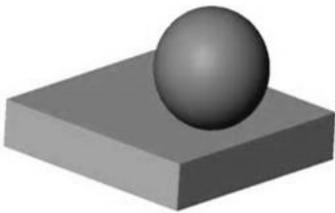
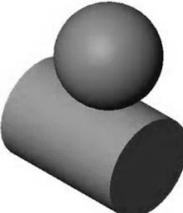
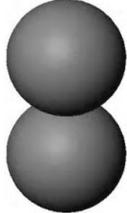
Couples cinématiques	Type de contact	Figure
Inférieur	Surfacique : plan/plan	
Supérieur	Linéique (plan/cylindre)	
	Linéique (cylindre/cylindre)	
	Ponctuelle (plan/sphère)	
	Ponctuelle (cylindre/cylindre)	
	Ponctuelle (sphère/cylindre)	
	Ponctuelle (sphère/sphère)	

Tableau III : Surfaces élémentaires de contact

Chapitre II

Modélisation des mécanismes

II-1 : Introduction :

Lors de la conception d'une machine, il est nécessaire de s'assurer que chaque mécanisme envisagé donne bien les mobilités souhaitées. L'étude du mécanisme permet également d'obtenir des informations précieuses pour la conception des liaisons.

Un système mécanique est caractérisé par une cinématique interne liée à la réalisation d'une ou plusieurs fonctions techniques. Dans le cadre de ce travail, les objectifs de l'analyse d'un tel mécanisme sont :

- Comprendre son fonctionnement ;
- Trouver les lois d'entrée-sortie du système (nécessaire pour établir son pilotage) ;
- Mettre en évidence les conditions de compatibilité géométriques (nécessaire à la cotation géométrique des pièces) ;
- Caractériser les contacts entre les pièces et la nature des actions mécaniques internes ;
- Déterminer pour des cas simples ces actions mécaniques de liaisons permettant ainsi de valider le choix de composants de liaison ou les dimensions nominales des pièces.

II-2 : Définition d'un mécanisme

Un mécanisme est un ensemble de pièces positionnées entre-elles par des liaisons dans le but de réaliser une ou plusieurs fonctions.

La théorie des mécanismes a donc pour but :

- Dans un contexte d'analyse, de vérifier l'aptitude d'un mécanisme existant à réaliser la loi entrée/sortie recherchée, et de mettre en évidence les conditions géométriques dont dépend éventuellement le bon fonctionnement de l'appareil.
- Dans un contexte de conception, de rechercher des dispositions constructives qui réalisent la loi entrée/sortie souhaitée d'une part, et pour lesquelles on est certain de pouvoir calculer les actions mécaniques internes en vue du dimensionnement, des organes mécaniques d'autre part.

La théorie de mécanismes est à la fois :

- ✓ Une méthode d'analyse qui conduit à une mise en équation
- ✓ Une méthode de résolution qui met en évidence le fonctionnement cinématique
- ✓ Une méthode de contrôle qui fournit des conditions de compatibilité.

Les hypothèses de travail en théorie des mécanismes sont celles de la cinématique du solide :

- ✓ Des pièces modélisées par des solides indéformables
- ✓ Des liaisons parfaites (sans frottement) => complémentarité entre le torseur des efforts et le torseur cinématique
- ✓ Des liaisons à contact bilatéral => le contact est supposé maintenu si le sens des actions mécaniques est inversé. (Cas des liaisons ponctuelles, linéaire rectiligne, appui plan)
- ✓ Des pièces de masse nulle (efforts d'inertie nuls)

II-3 : But de la modélisation cinématique

Un modèle est une représentation orientée d'un système réel. Il a pour but de chercher à prévoir le comportement du système réel en s'appuyant sur des notions théoriques maîtrisées. Suivant l'objectif, on utilisera différents modèles.

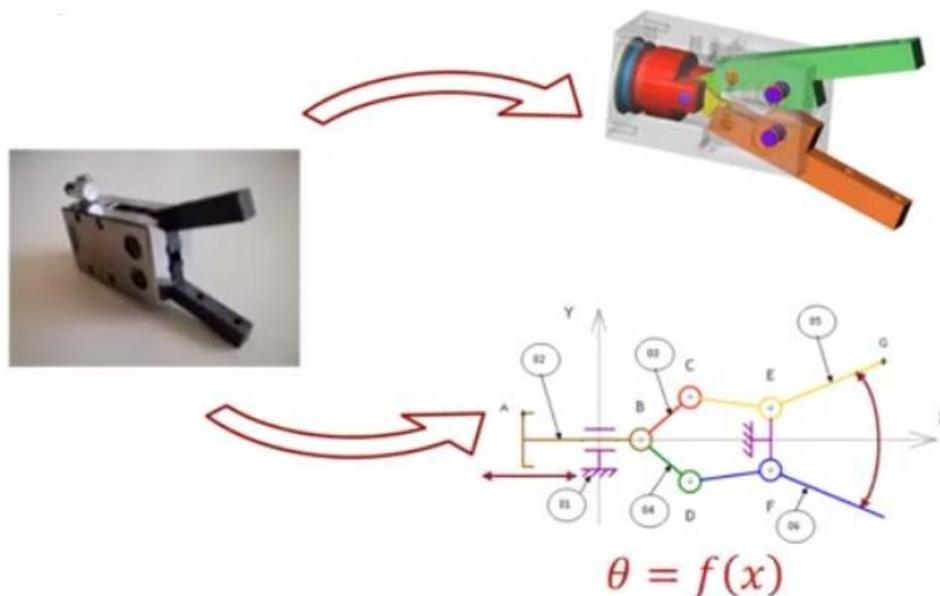


Figure II-1 : Différentes représentations des objets techniques

II-4 : Classes d'équivalence cinématique

Le schéma bloc précédent fait apparaître des groupes de pièces reliés entre eux par des fonctions cinématiques. La recherche et la communication de cette cinématique est facilitée par une schématisation mettant en valeur les mouvements au détriment des formes de pièces. Dans le sens de cette simplification, on ne représente que les ensembles ayant le même mouvement : les classes d'équivalence cinématique.

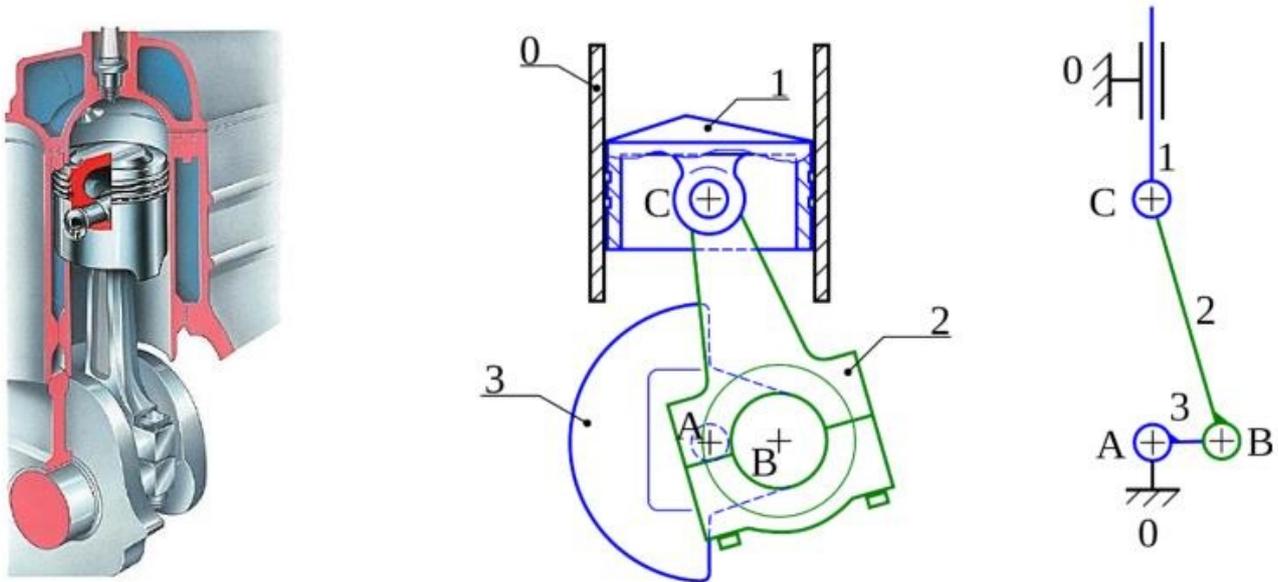


Figure II-2 : de gauche à droite : Croquis montrant un piston dessin et schéma associé

Deux pièces appartiennent à la même classe d'équivalence si elles sont en contact et si elles sont en encastrement ; c'est à dire n'ont pas de mouvement relatif (au cours du fonctionnement du système).

Pour identifier ces pièces, on peut s'aider de la nomenclature :

- ✓ Les ressorts, les éléments de guidage, roulements, paliers lisses, les joints dynamique sont entre deux pièces mobiles l'une par rapport à l'autre ;
- ✓ Les vérins, moteurs, actionneurs sont entre deux classes d'équivalence et se décomposent eux-mêmes en 2 classes d'équivalences (corps de vérin et tige de vérin, bâti moteur et axe moteur) ;
- ✓ Les vis, goupilles, clavettes, écrou participent généralement à des liaisons complètes entre pièces d'une même classe... ;
- ✓ Certains noms de pièces permettent de connaître leur mouvement :
 - Rotation continue : manivelle, vilebrequin, arbre, roue dentée...
 - Rotation alternée : levier, balancier
 - Translation : poussoir, coulisseau, tige, crémaillère, piston
 - Mouvement plan : bielle
 - Fixe : bâti, carter

Par ailleurs, un rapide coloriage sur un plan est un bon moyen de visualiser rapidement les différentes classes d'équivalence d'un système mécanique.

II-5 : Méthode pour modéliser un mécanisme

II-5-1 : Définir les classes d'équivalence

On appelle classe d'équivalence, un ensemble de pièces qui n'ont aucun mouvement relatif les unes par rapport aux autres. Pratiquement, on procède au coloriage du plan d'ensemble.

II-5-2 : Etablir le graphe des liaisons

Une fois que les classes d'équivalence sont déterminées, on analyse les liaisons mécaniques qui les relient. Chaque classe d'équivalence sera représentée par un cercle et chaque liaison par une ligne qui joindra deux cercles.

II-5-3 : Construire le schéma cinématique minimal

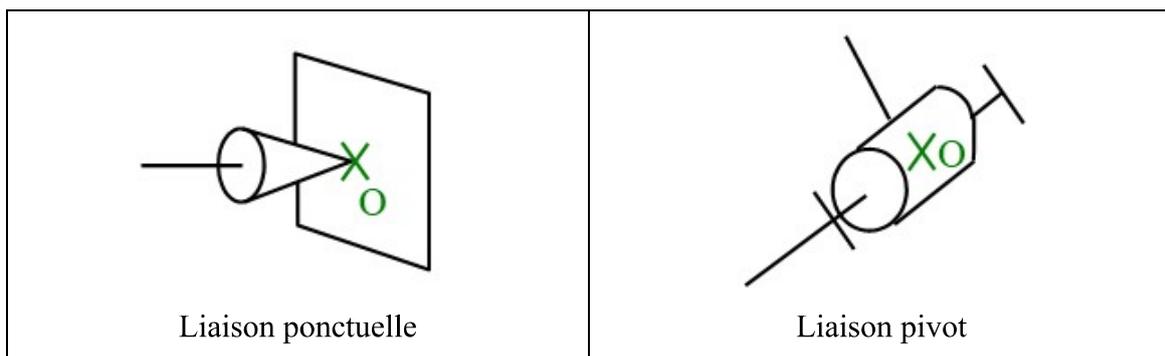
Il convient de placer les liaisons entre solides en respectant leur orientation les unes par rapport aux autres,

- Les solides sont matérialisés par de simples traits reliant les liaisons,
- Ne pas oublier de préciser ce qui est fixe (relié à « la masse »),
- Chaque liaison doit être convenablement paramétrée (centre, repère, indices), si cela est nécessaire

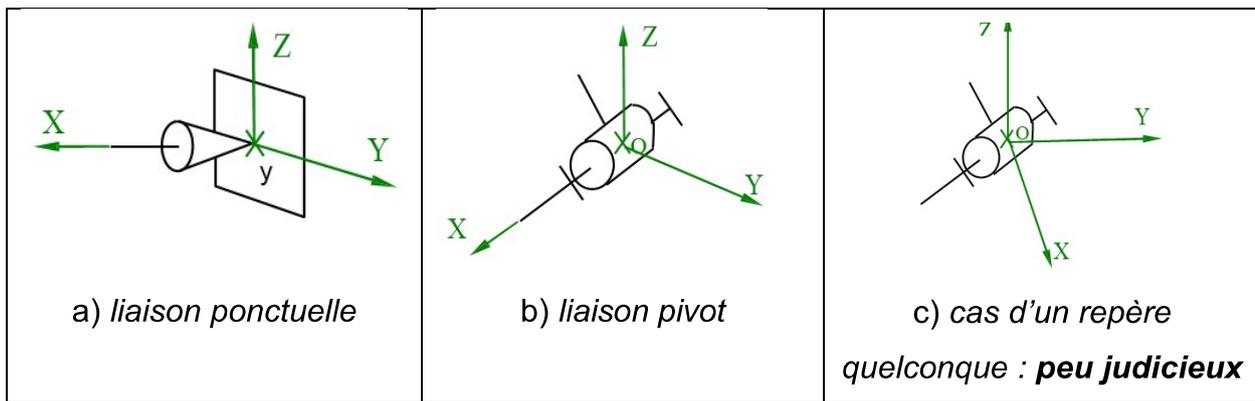
II-6 : Paramétrages d'une liaison

Afin d'étudier le comportement d'une liaison, il est préalablement nécessaire de mettre en place sur sa représentation schématique un certain nombre d'éléments :

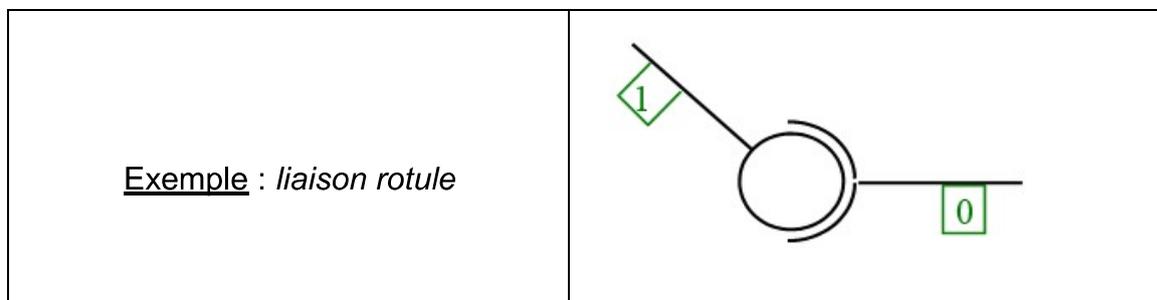
- **Le centre de la liaison** : il s'agit d'un point judicieusement choisi, à partir duquel on pourra écrire toutes les informations caractéristiques de la liaison.



- **Le repère local de la liaison** : IL s'agit d'un repère privilégié dont l'origine est confondue avec le centre de la liaison.



➤ **L'indice des solides** : IL s'agit d'un numéro que l'on affecte à chaque solide afin de pouvoir les identifier. Très souvent, on donne le chiffre 0 (zéro) à la pièce considérée comme fixe.



II-7 : Liaisons

II-7-1 : Liaisons élémentaires et liaisons simples

On définit comme surfaces élémentaires le plan, le cylindre et la sphère. Nous entendons par liaison élémentaire une liaison définie entre deux surfaces élémentaires en contact. Ainsi, on distinguera : les liaisons appui plan, pivot glissant, rotule, linéaire rectiligne, ponctuelle, linéaire annulaire.

Les liaisons encastrement (liaison totale ou complète), pivot (formée par une association de liaisons pivot glissant et appui plan), glissière (association de liaisons élémentaires) et glissière hélicoïdale forment avec les liaisons élémentaires un ensemble de liaisons dites simples représentées conventionnellement par des symboles normalisés.

II-7-2 : Liaisons composées et liaisons équivalentes

Un certain nombre de pièces liées entre elle par des liaisons simples peuvent être utilisées pour produire un effet équivalent à une liaison simple entre deux solides. Ainsi dans un schéma cinématique, un élément ne correspond pas toujours à une pièce, mais quelquefois à un groupe de pièces : un roulement par exemple est formé au minimum de plusieurs éléments roulants et de deux bagues, mais ensemble tous ces éléments réalisent une seule des trois liaisons simples que sont les liaisons pivot, pivot glissant et rotule.

II-7-3 : Modélisation des liaisons – Contact et liaisons

La norme NF E 04 015 s'intéresse aux 6 contacts élémentaires entre les surfaces sphériques, planes et cylindriques car elles sont aisément fabricables.

6 types de contacts simples sont issus de ces surfaces :

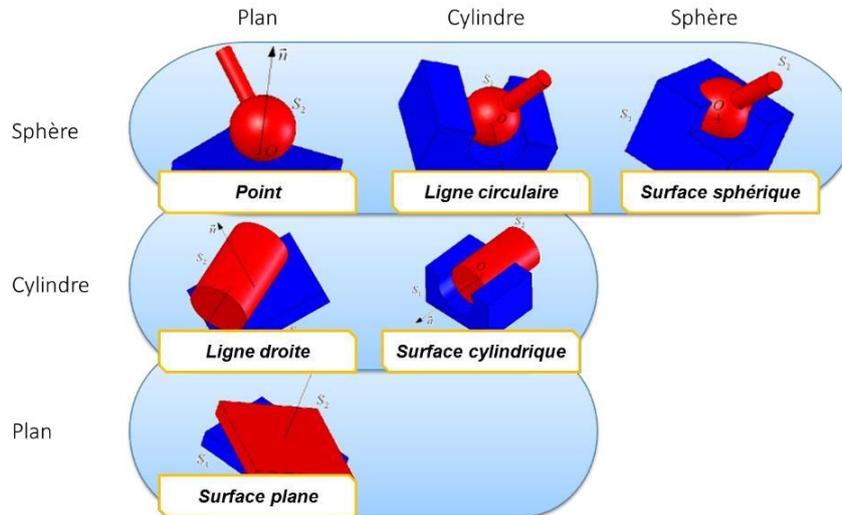


Figure II-3 : Nature des contacts

6 liaisons élémentaires (simples) sont associées à ces contacts :

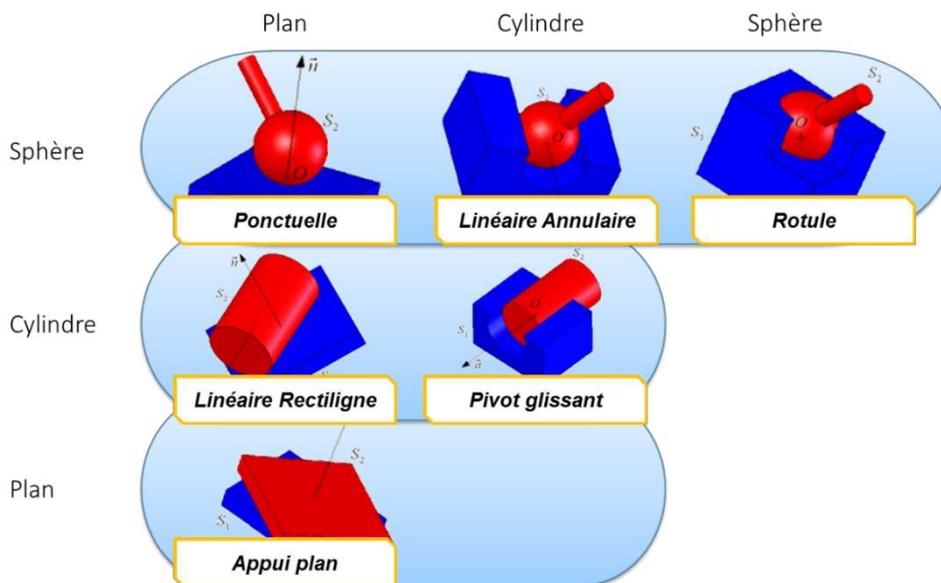


Figure II-4 : Association contacts-liaisons élémentaires

Mais ceci est insuffisant pour décrire toutes les liaisons existantes dans les systèmes.

Pour obtenir une description plus complète il est nécessaire de faire un détour par la mécanique générale. Le mouvement instantané d'un solide (indéformable) (Si) par rapport à un autre solide (Sj) peut-être décrit par le **torseur cinématique** $\mathfrak{G}_{i/j}$ caractérisé par **6 quantités scalaires** (éléments de réduction en un point quelconque **A**).

$$\{\vartheta_{i/j}\}_A = \left\{ \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \right\}_{A,R}$$

Si ces 6 quantités varient *de façon indépendante, le solide (Si) est dit libre par rapport à (Sj)*.

Si moins de 6 paramètres indépendants permettent de décrire le mouvement relatif de (Si) par rapport à (Sj) alors (Si) est dit *lié à (Sj)*.

Le nombre de paramètres permettant de décrire ce mouvement *est appelé degré de liberté (ddl)*.

Dans un mécanisme réel, l'interdépendance des paramètres est due à des relations de *contacts entre les pièces (Si) et (Sj)*.

En résumé, les liaisons mécaniques sont caractérisées par deux quantités mathématiques importantes qui sont :

- Le torseur cinématique associé ;
- Le torseur d'action mécanique transmissible.

Notations :

$$1- \text{ Torseur cinématique : } \{\vartheta_{i/j}\}_p = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Gamma(i/j)} \\ \overrightarrow{V}(p \in i/j) \end{array} \right\} \quad \text{(II-1)}$$

Si $\overrightarrow{\Gamma(i/j)}$ et $\overrightarrow{V}(p \in i/j)$ sont exprimés dans la même base :

$$\{\vartheta_{i/j}\}_{(p,B)} = \begin{pmatrix} P_{ij} & \mu_{ij} \\ q_{ij} & \gamma_{ij} \\ r_{ij} & \omega_{ij} \end{pmatrix}_{(p,B)} \quad \text{(II-2)}$$

2- **Torseur d'action mécanique transmissible** par la liaison :

$$\{\tau_{i \rightarrow j}\}_p = \begin{pmatrix} \overrightarrow{R}_{(i \rightarrow j)} \\ \overrightarrow{M}_p_{(i \rightarrow j)} \end{pmatrix} \quad \text{(II-3)}$$

Si $\overrightarrow{R}_{(i \rightarrow j)}$ et $\overrightarrow{M}_p_{(i \rightarrow j)}$ sont exprimés dans la même base :

$$\{\tau_{i/j}\}_{(p,B)} = \begin{pmatrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{pmatrix}_{(p,B)} \quad \text{(II-4)}$$

Exemples de liaison : liaison pivot

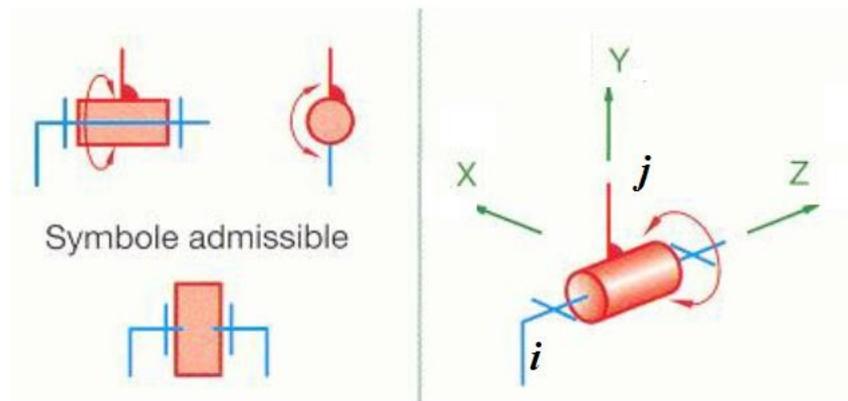


Figure II-5 : Liaison pivot

Action du solide i sur le solide j :

$$\{\vartheta_{i/j}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \Gamma j & 0 \end{Bmatrix}_{o,\vec{x},\vec{y},\vec{z}} = \begin{cases} \vec{\omega}(i/j) = \Gamma(i/j) \cdot \vec{z} \\ \vec{V}(o \in i/j) = \vec{0} \end{cases} \quad \text{(II-5)}$$

Sur l'ensemble des combinaisons possibles pour arranger les paramètres dans le torseur cinématique, certaines sont « faciles » à réaliser techniquement par des contacts simples ou par combinaison de contacts simples : *ce sont les 10 liaisons normalisées (tableau ci-dessous).*

Type	Schémas	Torseur Cinématique	Torseur Interefforts	Type	Schémas	Torseur Cinématique	Torseur Interefforts
Pivot d'axe (A, x)		$\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_A$	Appui plan de normale x		$\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & V_y \\ 0 & V_z \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ 0 & M \\ 0 & N \end{Bmatrix}_A$
Glissière d'axe x		$\begin{Bmatrix} 0 & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_A$	Rotule de centre A		$\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_A$
Hélicoïdale d'axe (A, x)		$\begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_A$	Rotule à doigt d'axes (A, x) et (A, y)		$\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & N \end{Bmatrix}_A$
Pivot glissant d'axe (A, x)		$\begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_A$	Linéaire rectiligne de normale x et axe y		$\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & V_y \\ 0 & V_z \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N \end{Bmatrix}_A$
Linéaire annulaire centre (A, x)		$\begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_A$	Ponctuelle de normale (A, x)		$\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & V_z \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$

Tableau II-1 : Liaisons élémentaires

II-8 : Nature des surfaces et modèle de liaison retenu

Un plan sur un plan peut être modélisé par un appui plan mais si les dimensions d'une des surfaces sont faibles une ponctuelle sera plus réaliste.

Si une seule dimension est faible (hauteur ou largeur par rapport à la longueur), un modèle de linéaire rectiligne sera plus adapté.

De la même façon, un contact cylindrique peut être assimilé à un contact linéique si le cylindre est de faible rayon voire une ponctuelle s'il est aussi de faible hauteur.

De manière générale, il faut considérer la dimension des formes de contact afin d'identifier le « juste » contact créé. Ceci est résumé dans la figure ci-dessous :

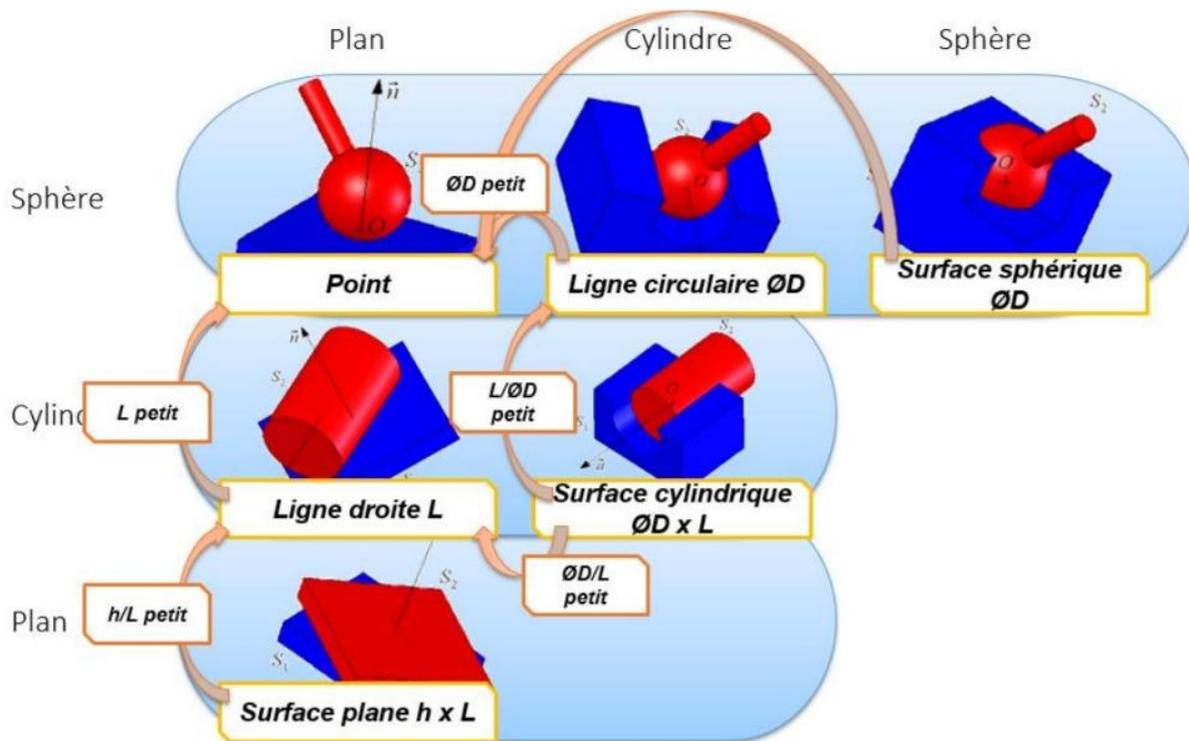
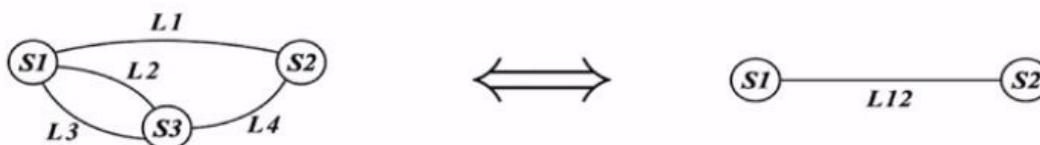


Figure II-6 : Nature de contact

II-9 : Liaisons équivalentes

C'est une liaison normalisée (tableau de liaisons) autorisant les mêmes mouvements (et transmettant les mêmes efforts) que l'association de liaisons en série ou en parallèle.



Remarque : il n'est pas toujours possible de trouver une liaison équivalente normalisée

II-9-1 : Liaisons en série

Prenons le cas de deux liaisons en série L_1 et L_2 l'idée est de trouver une liaison équivalente entre (S_1) et (S_3) .

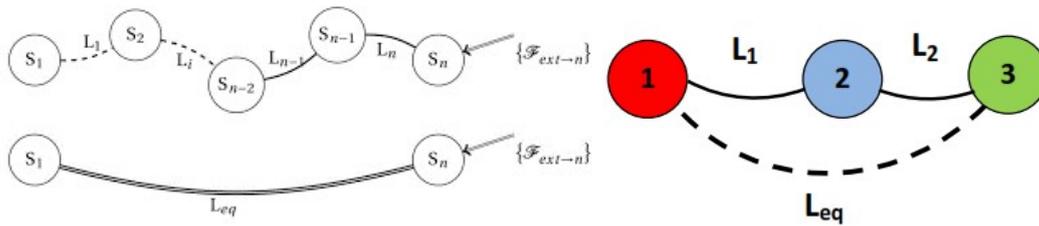
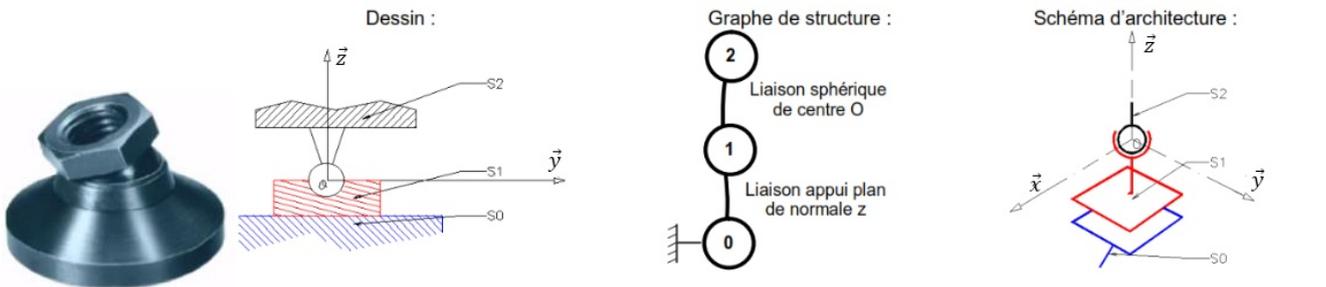


Figure II-7 : Liaisons en série

La liaison Leq est identifiée à partir de la forme de son torseur cinématique associé par la relation de composition de mouvement.

$$\{V_{Leq}\} = \{V_{3/0}\} = \{V_{3/2}\} + \{V_{2/1}\} + \{V_{1/0}\}$$

Exemple : patin à rotule



$$\left. \begin{aligned} \{V_{2/1}\} &= \begin{Bmatrix} \omega_{x,2/1} & 0 \\ \omega_{y,2/1} & 0 \\ \omega_{z,2/1} & 0 \end{Bmatrix}_{(x,\bar{y},\bar{z})} \\ \text{et} \\ \{V_{1/0}\} &= \begin{Bmatrix} 0 & v_{x,O\in 1/0} \\ 0 & v_{y,O\in 1/0} \\ \omega_{z,1/0} & 0 \end{Bmatrix}_{(x,\bar{y},\bar{z})} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \{V_{2/0}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{x,2/1} & v_{x,O\in 1/0} \\ \omega_{y,2/1} & v_{y,O\in 1/0} \\ \omega_{z,2/1} + \omega_{z,1/0} & 0 \end{Bmatrix}_{(x,\bar{y},\bar{z})} \Rightarrow \text{équiv. à une liaison sphère-plan de normale } \bar{z}$$

NB : Technologiquement parlant, il est donc préférable de réaliser une liaison ponctuelle par mise en série d'une liaison appui plan et d'une liaison rotule pour limiter la pression de contact. En effet, on passe d'un contact ponctuel, où la pression est infinie ($F=P.S$), à un contact surfacique, où la pression devient admissible pour les matériaux.

II-9-2 : Liaisons en parallèle

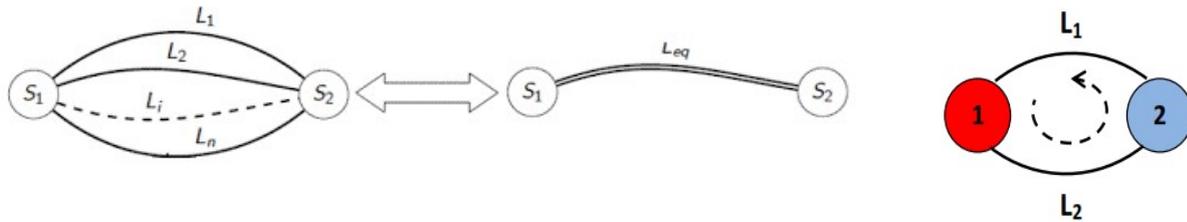


Figure II-8 : Liaisons en parallèle

La liaison Leq est identifiée à partir de la forme de son torseur cinématique associé :

$$\{V_{Leq}\} = \{V_{1/0}\} = \{V_{1/0}^{LA}\} = \{V_{1/0}^{LB}\} = \{V_{1/0}^{LC}\}$$

La compatibilité cinématique des n liaisons en parallèle avec la liaison équivalente, s'exprime par une identité des composantes de tous ces torseurs **réduits au même point**.

Exemple : Liaison entre un arbre 1 et un bâti 0 réalisée par l'association de deux roulements.

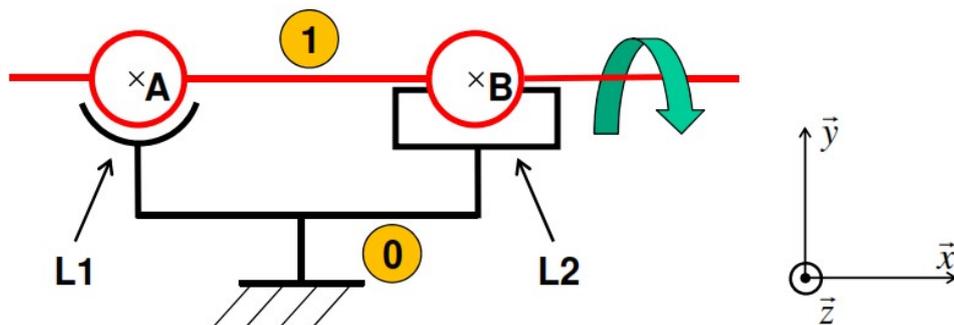
Arbre en rotation

Cas d'une liaison pivot réalisée avec deux roulements

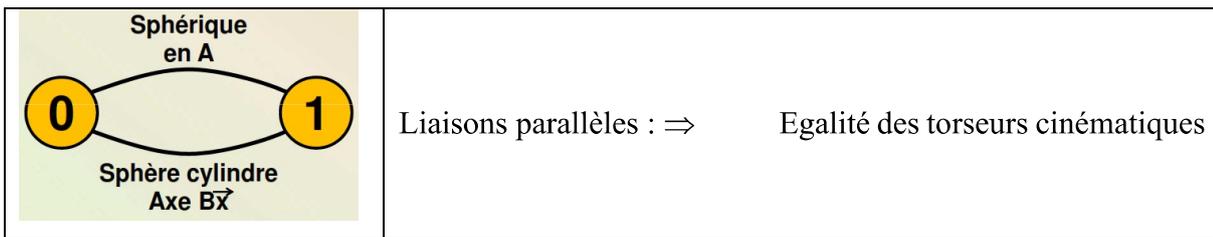
Schéma cinématique

Autre schéma cinématique plus précis

Traisons le cas le plus précis :



Grphe de liaisons :

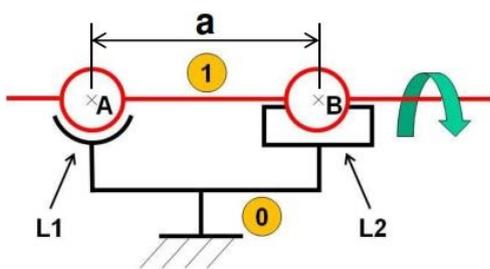


➤ Sphérique en A (notée L_1)

Torseur cinématique écrit au centre de la liaison : $\{\vartheta_{L1:1/0}\}_A = \left\{ \begin{bmatrix} \omega_{x1} \\ \omega_{y1} \\ \omega_{z1} \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}_{A,R}$

➤ Sphère-cylindre en B (notée L_2)

Torseur cinématique écrit au centre de la liaison : $\{\vartheta_{L2:1/0}\}_B = \left\{ \begin{bmatrix} \omega_{x2} \\ \omega_{y2} \\ \omega_{z2} \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} v_{x2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}_{B,R}$



$$\{\mathbf{v}_{L1\ 1/0}\}_A = \left\{ \begin{bmatrix} \omega_{x1} \\ \omega_{y1} \\ \omega_{z1} \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}_{A,R}$$

$$\{\mathbf{v}_{L2\ 1/0}\}_B = \left\{ \begin{bmatrix} \omega_{x2} \\ \omega_{y2} \\ \omega_{z2} \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} v_{x2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}_{B,R}$$

Avec R le repère $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

❖ Faisons les calculs en A

- 1- Liaison L_1 : Ok
- 2- Liaison L_2 : Calculons la vitesse au point A

$$\vec{V}_{A \in 1/0} = \vec{V}_{B \in 1/0} + \vec{AB} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = \begin{bmatrix} v_{x2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \omega_{x2} \\ \omega_{y2} \\ \omega_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{x2} + 0 \\ 0 - a \times \omega_{z2} \\ 0 + a \times \omega_{y2} \end{bmatrix}$$

Avec $\vec{\Omega}$: vecteur taux de rotation

Egalité des torseurs cinématiques :

$$\begin{cases} \omega_x \text{ éq} = \omega_{x1} = \omega_{x2} & \rightarrow \omega_x \text{ éq} \neq 0 \\ \omega_y \text{ éq} = \omega_{y1} = \omega_{y2} & \rightarrow \omega_y \text{ éq} = 0 \\ \omega_z \text{ éq} = \omega_{z1} = \omega_{z2} & \rightarrow \omega_z \text{ éq} = 0 \\ v_x \text{ éq} = 0 = v_{x2} & \rightarrow v_x \text{ éq} = 0 \\ v_y \text{ éq} = 0 = -a\omega_{z2} & \rightarrow v_y \text{ éq} = 0 \text{ et } \omega_{z2} = 0 \\ v_z \text{ éq} = 0 = +a\omega_{y2} & \rightarrow v_z \text{ éq} = 0 \text{ et } \omega_{y2} = 0 \end{cases}$$

Pivot d'axe \vec{Ax}

II-10 : Approches utilisées pour trouver les liaisons équivalentes

D'une façon générale deux approches peuvent être utilisé pour trouver les liaisons équivalentes à savoir l'approche cinématique et l'approche statique.

Cas des liaisons en série.

a) Approche cinématique :

On cherche à caractériser ici le mouvement de S_3 par rapport à S_1 par son torseur cinématique associé.

La loi de composition de mouvement donne :

$$\{\vartheta_{S3/S1}\} = \{\vartheta_{eq}\} = \{\vartheta_{S1/S2}\} + \{\vartheta_{S2/S3}\} \tag{II-6}$$

b) Approche statique :

En considérant l'équilibre de la chaine on montre que :

$$\{\tau_{S1 \rightarrow S3}\} = \{\tau_{eq}\} = \{\tau_{S1 \rightarrow S2}\} = \{\tau_{S2 \rightarrow S3}\} \tag{II-7}$$

Cas des liaisons en parallèle.

a) Approche cinématique :

Le torseur cinématique équivalent se déduit à partir de l'égalité des torseurs cinématiques :

$$\{\vartheta_{S3/S1}\} = \{\vartheta_{eq}\} = \{\vartheta_{S1/S2}\} = \{\vartheta_{S2/S3}\} \tag{II-8}$$

b) Approche statique :

C'est la somme des torseurs d'action mécanique transmissible par chacune des liaisons :

$$\{\tau_{S1 \rightarrow S3}\} = \{\tau_{\text{éq}}\} = \{\tau_{S1 \rightarrow S2}\} + \{\tau_{S2 \rightarrow S3}\} \quad (\text{II-9})$$

La recherche des liaisons équivalentes permet la réduction du graphe des liaisons. Ce dernier ainsi réduit est appelé graphe de liaisons minimal.

Le but dans ce travail est de simplifier le modèle que nous sommes en train d'étudier.

Récapitulation :

	Liaisons en parallèle	Liaisons en série
Liaison équivalente par approche <i>cinématique</i>	Egalité des torseurs	Somme des torseurs
Liaison équivalente par approche <i>statique</i>	Somme des torseurs	Egalité des torseurs

Chapitre III

Mobilité et hyperstatisme

(Etude des mécanismes)

III-1 : Loi entrée-sortie

III-1-1 : Introduction

L'étude des mécanismes consiste à déterminer les relations qui existent entre les différents paramètres géométriques et cinématiques

La loi Entrée Sortie d'un mécanisme est l'ensemble des relations qui existent entre les paramètres cinématiques d'entrée d'un mécanisme (en général actionneur) et les paramètres de sortie. Ces relations peuvent être obtenues de manières différentes selon la configuration du mécanisme.

Nous avons vu précédemment (chapitre 01) que les systèmes mécaniques peuvent être constitués à partir d'une chaîne cinématique ouverte ou bien d'une chaîne cinématique fermée ou même de plusieurs chaînes cinématiques fermés.

La méthode de détermination de la loi Entrée Sortie (E-S) dépend de la configuration du mécanisme.

III-1-2 : Chaîne cinématique ouverte

Dans le cas des chaînes cinématiques ouvertes, la loi Entrée Sortie concerne la relation entre les *coordonnées articulaires* et les *coordonnées opérationnelles* du point en bout de chaîne.

On distingue le modèle géométrique direct et le modèle géométrique indirect :

- Le modèle **géométrique direct** permet de lier les **coordonnées opérationnelles** aux **coordonnées articulaires**.
- Le modèle **géométrique indirect** permet de lier les **coordonnées articulaires** aux **coordonnées opérationnelles**.

Exemple : Bras de robot manipulateur

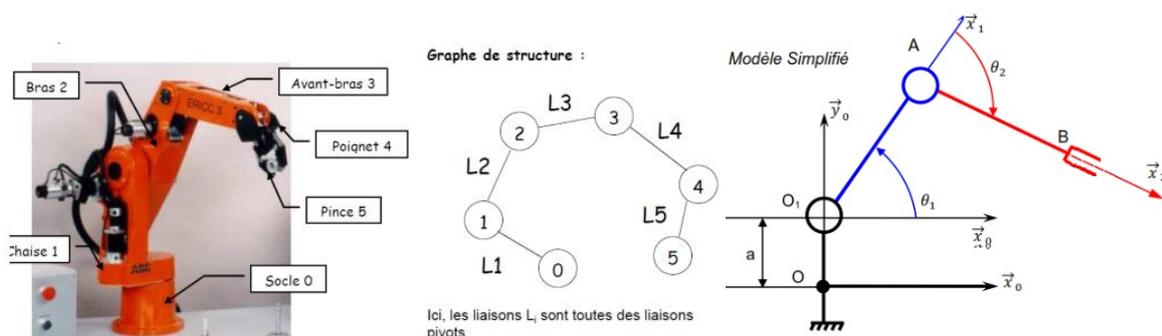


Figure III-1 : Robot Eric 3, Mécanisme réel et schéma cinématique simplifié

On considère le **modèle plan simplifié** dans lequel la pince de robot n'est animée que par deux mouvements de rotation paramétrés θ_1 et θ_2 .

Le point B en bout de chaîne a comme coordonnée x_B et y_B dans le repère $R_0(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Soit L la longueur des 2 bras de robot $[O_1A]$ et $[AB]$.

III-1-2-1 : Relation directe

Le **modèle géométrique direct** permet d'exprimer les coordonnées x_B et y_B en fonction des paramètres θ_1 et θ_2 .

En écrivant la relation de Chasles $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{AB}$ après projection on arrive à déterminer le modèle **géométrique direct** :

$$\begin{cases} x_B = L \cdot \cos\theta_1 + L \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y_B = a + L \cdot \sin\theta_1 + L \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases} \quad \text{III-1}$$

III-1-2-2 : Relation indirecte

Le **modèle géométrique indirect** permet d'exprimer les paramètres θ_1 et θ_2 en fonction des coordonnées x_B et y_B . Le modèle géométrique indirect est plus délicat à trouver.

Modèle géométrique indirect :

$$\begin{cases} \theta_2 = \arccos \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{x_B}{L} \right)^2 + \left(\frac{y_B - a}{L} \right)^2 \right) - 1 \right] \\ \theta_1 = \arctan \left(\frac{y_B - a}{x_B} \right) - \frac{\theta_2}{2} \end{cases} \quad \text{III-2}$$

III-1-3 : Chaîne cinématique fermée

La loi Entrée Sortie dans les chaînes cinématiques fermées peut être obtenue de différentes méthodes :

- Fermeture géométrique (contour vectoriel fermé)
- Fermeture cinématique
- Cinématique graphique.

Notion de fermeture

Une fermeture est une équation représentant les contraintes de bouclage dans les chaînes de solides :

- Une fermeture géométrique est une relation de Chasles sur les vecteurs position où chaque vecteur est soit fixe par rapport à un solide, soit défini par un paramètre de translation, pour former une des boucles du graphe de structure ;
- Une fermeture angulaire est une somme nulle d'angle d'un même plan formant une des boucles du graphe de structure ;
- Une fermeture cinématique est une somme nulle de torseurs exprimés au même point.

III-1-3-1 : Fermeture géométrique

But : obtenir les relations entre les différents paramètres géométriques des mécanismes ;

En particulier : c'est la détermination des relations entre l'entrée et la sortie.

Les inconnues : sont les paramètres géométriques des liaisons (angles, longueurs...).

En appliquant la fermeture géométrique, on obtient une relation entrée-sortie qui peut être :

- ❖ Une relation explicite (directe) : obtenir la relation directement $S=f(E)$ ou $E=f(S)$.
- ❖ Une relation implicite (indirecte).

La fermeture géométrique nous donne également la relation entre la vitesse et la vitesse de rotation. Ce résultat est obtenu suite à une dérivation temporelle des relations de la loi entrée-sortie trouvées par fermeture géométrique.

Ce qui nous conduit à parler de la deuxième méthode de résolution des mécanismes qui est la fermeture cinématique :

Fermeture cinématique = Fermeture géométrique + dérivation par rapport au temps.

III-1-3-2 : Fermeture cinématique

But : obtenir les relations entre les différents paramètres cinématiques des mécanismes (exemple : vitesses et vitesses de rotation associées aux liaisons).

Avantage : obtenir une relation explicite entre l'entrée et la sortie.

Les inconnues : sont les paramètres cinématiques des liaisons (Torseur cinématique : vitesse et vitesse de rotation).

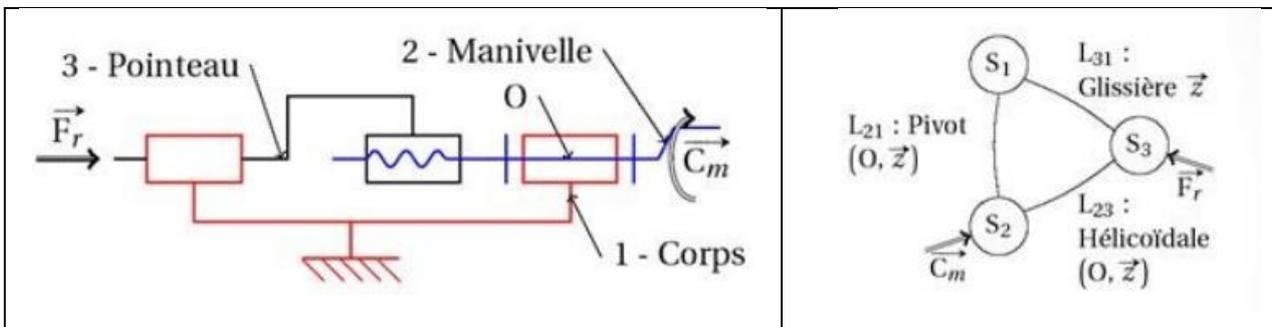
Remarque 01 : lorsque l'on effectue une fermeture cinématique on suppose qu'une fermeture géométrique a été faite et que les paramètres géométriques sont connus.

Remarque 02 : pour obtenir la même expression littérale de relations ; on choisit la même base de projection.

Remarque 03 : En projetant dans une base, six équations scalaires au maximum sont obtenues à partir de la fermeture cinématique. Des projections habilement choisies permettront de réduire les calculs, d'éliminer les inconnues indésirables et d'obtenir les relations recherchées.

Remarque 04 : Les équations obtenues par fermeture cinématique peuvent se retrouver par dérivation des équations géométriques et angulaires. Il s'agira donc de choisir entre les méthodes géométriques et cinématiques.

Exemple :



La fermeture cinématique s'écrit en O dans la base (x,y,z)

$$\{\vartheta_{3/2}\} + \{\vartheta_{2/1}\} + \{\vartheta_{1/3}\} = \{0\} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{32} & V_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{21} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & V_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

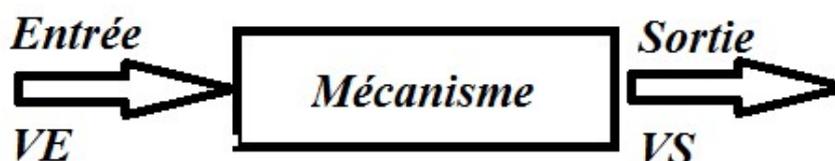
III-1-3-3 : Cinématique graphique

Permet de déterminer les vitesses pour des problèmes plans (*plus de détails dans le chapitre 04 : mécanismes plans*) dans des situations particulières.

En effet : les relations obtenues (valeurs) ne seront vraies que pour la situation dessinée.

Remarque : la cinématique graphique permet de résoudre les mécanismes et de déterminer les vitesses dans le cas des chaînes ouvertes.

III-2 : Particularités des lois entrée-sortie



Lorsqu'on impose une vitesse (VE) à l'entrée nous aurons une vitesse (VS) à la sortie

⇒ La loi d'entrée-sortie dans ce cas ça va être : le rapport entre la vitesse de sortie et la vitesse d'entrée : $V_s=f(V_e)$ ⇒ la **loi entrée/sortie**

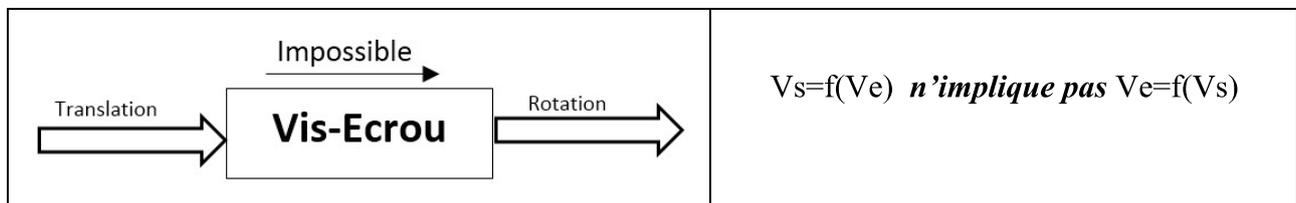
On l'appelle également la loi de comportement entre la sortie et l'entrée (Loi ES= V_s/V_e).

« Selon ce comportement, on peut parler de grands types de loi Entrée-sortie et cela selon le type de mécanismes ».

1- Système de transformation de mouvement (exemple vis-écrou)



Ce type de système est irréversible : dans ce cas on ne peut pas échanger la loi entrée-sortie : C'est-à-dire : $V_s=f(V_e)$ et non pas $V_e=f(V_s)$.



Si : $dx= f(\alpha)$ → mathématiquement parlant $\alpha= f(dx)$ mais si le système est *irréversible* $\alpha \neq f(dx)$.

2- On parle aussi de raison si le système est Homocinétiq (exemple : engrenage)



ω_e et ω_s sont reliées par une relation de proportionnalité :

$\omega_s = R \omega_e$ ⇒ R est une constante $R= \omega_s/\omega_e$ $R=R_e/R_s$ Rayons primitifs des roues

3- Exemple de loi entrée-sortie par fermeture géométrique

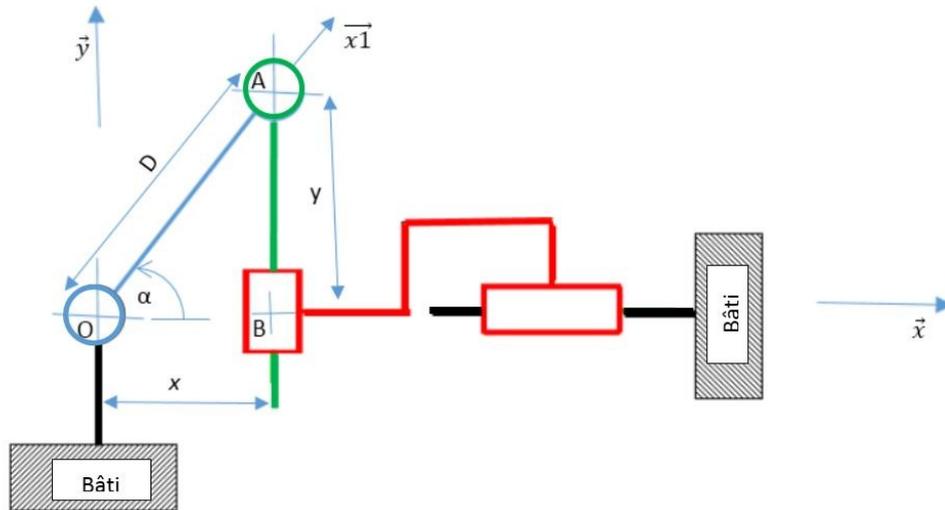


Figure III-2 : Exemple de schéma cinématique

Nous imposons une entrée (angle α) pour avoir une sortie (déplacement x)

Faisons maintenant une **fermeture géométrique** (Notion du contour vectoriel)

$$\overrightarrow{OO} = \vec{0}(\text{vecteur nul}) \qquad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0} \qquad \text{III-3}$$

$$D \cdot \vec{x}_1 - y \cdot \vec{y} - x \cdot \vec{x} = \vec{0} \qquad \text{III-4}$$

$$\vec{x}_1 = \cos(\alpha) \cdot \vec{x} + \sin(\alpha) \cdot \vec{y}$$

L'équation III-4 devient :

$$D \cdot (\cos(\alpha) \cdot \vec{x} + \sin(\alpha) \cdot \vec{y}) = y \cdot \vec{y} + x \cdot \vec{x} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} D \cdot \cos(\alpha) = x \\ D \cdot \sin(\alpha) = y \end{cases} \qquad \text{III-5}$$

Donc : $x = D \cos \alpha$ est la loi entrée sortie recherchée.

III-3 : Hyperstatisme

III-3-1 : Introduction

III-3-1-1 : Définition

Un mécanisme sera dit hyperstatique si des degrés de liberté ont été supprimés plusieurs fois. Cette surabondance de suppression de degrés de libertés a plusieurs conséquences :

➤ Du point de vue de la résolution analytique, trop d'inconnues existent par rapport au nombre d'équations, rendant ainsi impossible la détermination des inconnues par les méthodes classiques.

➤ Du point de vue des contraintes d'assemblage, le mécanisme sera plus délicat à réaliser car supprimer plusieurs fois un degré de liberté va imposer des contraintes géométriques entre les pièces (parallélisme, distance, coaxialité, ...).

➤ Du point de vue de la rigidité du mécanisme, cette surabondance va rendre le système rigide, ce qui est une qualité souvent recherchée (les machines-outils sont par exemple très hyperstatiques, car on recherche le moins de déformation possible de la structure).

➤ Du point de vue de la fiabilité du mécanisme, un système hyperstatique sera plus tolérant aux dégradations des liaisons, car une autre liaison continuera à supprimer les degrés de liberté nécessaires au fonctionnement du mécanisme.

Par opposition au mécanisme hyperstatique, un mécanisme dans lequel on ne supprime que le nombre de degrés de liberté strictement nécessaire au fonctionnement du système sera dit **isostatique**.

III-3-1-2 : Exemple

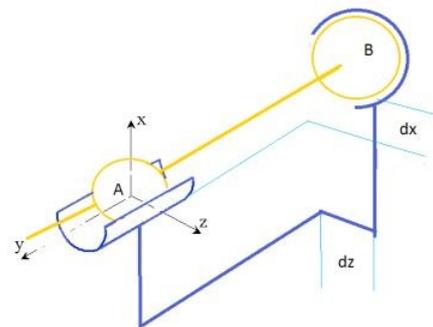
Pour réaliser une liaison pivot, qui supprime 5 degrés de liberté, on peut choisir d'associer en parallèle une liaison rotule et une liaisons linéaire annulaire :

Chacune des liaisons contribue à la suppression du nombre juste nécessaire de degrés de libertés :

- La rotule supprime 3 translations ;
- Le linéaire annulaire supprime 2 rotations.

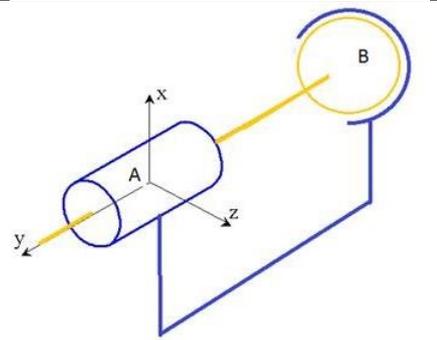
Le positionnement de l'ensemble se fait de manière "naturelle", sans contrainte de montage, quelles que soient les positions des centres de liaison A et B.

La liaison est isostatique.



On peut également choisir de réaliser cette liaison pivot par association en parallèle d'une liaison pivot glissant et d'une rotule :

- La liaison pivot glissant supprime 2 translations (T_X et T_Z) et 2 rotations (R_X et R_Y).
- La liaison rotule supprime la translation T_Y nécessaire pour réaliser la liaison pivot, mais supprime également 2 translations T_X et T_Z de façon redondante avec la liaison pivot.
 - Cette liaison est alors hyperstatique de degré 2.
 - Cet hyperstatisme va générer 2 contraintes de montage, liées aux degrés de libertés redondants : il s'agit du positionnement en X et Y du centre B de la rotule par rapport à l'axe du pivot glissant.



III-3-2 : Détermination du degré d'hyperstatisme par approche cinématique

Déterminer le degrés d'hyperstatisme d'un mécanisme (ou son isostatisme) nécessite d'introduire un *certain nombre de paramètres caractéristiques du mécanisme*.

III-3-2-1 : Inconnues cinématiques

Définition : Chacune des liaisons présentes dans le mécanisme est associée à un torseur cinématique dans lequel les composantes non nulles, inconnues, sont les degrés de liberté de la liaison.

Le nombre de degré de liberté dans une liaison est appelé nombre d'inconnues cinématiques de la liaison.

On notera n_{Ci} le nombre d'inconnues cinématiques de la liaison (i).

Le nombre total d'inconnues cinématiques vaut alors :

$$N_C = \sum_{i=1}^L n_{Ci} \quad \text{III-6}$$

Où 'L' désigne le nombre de liaisons dans le mécanisme.

Déterminer le nombre d'inconnues cinématiques revient à compter le nombre total de composantes non nulles dans les torseurs cinématiques des liaisons.

Exemple : Etau de serrage

	<p>Le mécanisme comporte :</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ 01 liaison pivot \mathcal{L}_1: $n_{c1} = 1$; ➤ 01 liaison pivot glissant \mathcal{L}_2 : $n_{c2} = 2$; ➤ 01 liaison hélicoïdale \mathcal{L}_3: $n_{c3} = 1$; ➤ 01 liaison glissière \mathcal{L}_4: $n_{c4} = 1$; <p>Le nombre total d'inconnues cinématiques vaut alors : $N_c = 1 + 2 + 1 + 1 = 5$</p>
--	---

III-3-2-2 : Nombre cyclomatique

Rappels :

Notons (**P**) le nombre de classes d'équivalence cinématique (CEC) et (**L**) son nombre de liaisons.

- Si « $L=P-1$ » : la chaîne de solides est ouverte, et **il n'y a pas de cycle**.



Figure III-3 : Chaîne ouverte (aucun cycle)

- Si « $L=P$ » : la chaîne est dite fermée et **il y a un (01) cycle**

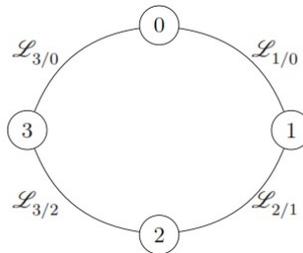


Figure III-4 : Chaîne fermée simple (aucun cycle)

- Si « $L>P$ » : la chaîne est dite complexe et **il y a plus d'un cycle**

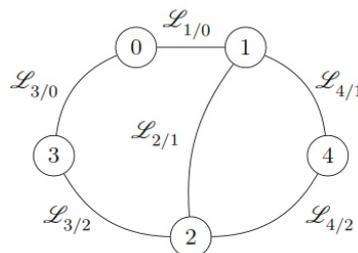


Figure III-5 : Chaîne fermée dite complexe

- **Nombre cyclomatique**

Lorsqu'un mécanisme est en chaîne fermée : il existe des relations entre les différents mouvements.

Dans un mécanisme complexe il peut y avoir plusieurs chaînes.

Pour déterminer leurs nombres on utilise le nombre « **cyclomatique** »

On appelle nombre cyclomatique γ (ou Γ) le nombre de chaînes de solides indépendantes dans le mécanisme.

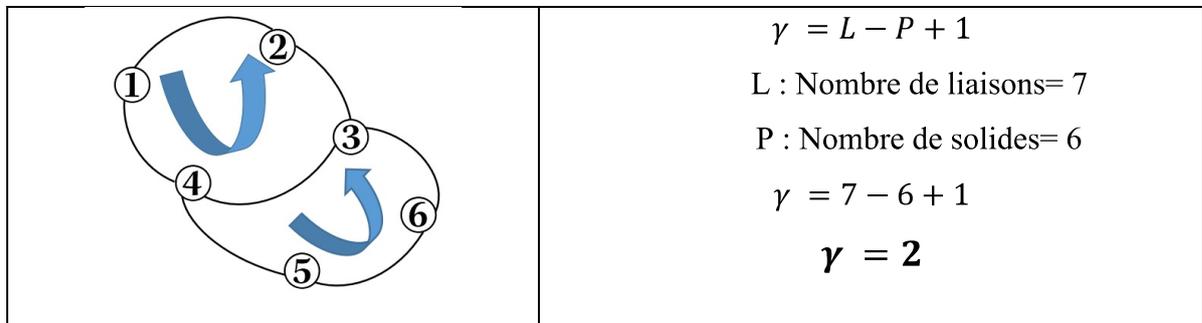
$$\gamma (\Gamma) = L - P + 1$$

III-7

$$\text{Où } \left\{ \begin{array}{l} \gamma (\Gamma): \text{ Nombre cyclomatique} \\ L: \text{ Nombre de liaisons} \\ P: \text{ Nombre de solides} \\ \quad (\gamma \text{ compris le bâti}) \end{array} \right.$$

➤ Le nombre cyclomatique correspond au nombre de chaînes indépendants d'un système : C'est-à-dire le nombre de chaînes *nécessaires* et *suffisantes* qu'il faut pour faire une *étude cinématique complète du mécanisme*.

Exemple :



Dans ce cas il faut prendre deux chaînes pour faire l'étude cinématique. A savoir :

- 1- « 12341 » et « 36543 »
- 2- « 1236541 » et « 12341 »
- 3- « 1236541 » et « 36543 »

Généralement on prend le cas de chaînes les plus simples : c'est le cas de (1) « 12341 » et « 36543 »

III-3-2-3 : Nombre d'équations cinématiques

Il est possible d'écrire une relation de fermeture cinématique pour chaque chaîne fermée. Or une fermeture cinématique génère 6 équations (3 équations pour les vecteurs rotation, 3 équations pour les vecteurs vitesse).

Sachant qu'il y a γ chaînes fermées, le nombre total d'équations cinématiques E_C a pour expression :

$$E_C = 6 \gamma = 6(L - P + 1) \quad \text{III-8}$$

III-3-2-4 : Mobilités dans le mécanisme

Définition : Les mobilités dans un mécanisme sont les mouvements possibles entre deux classes d'équivalence.

Certains mouvements contribuent à la loi entrée/sortie pour laquelle a été conçu le système, d'autres ne sont pas fonctionnels.

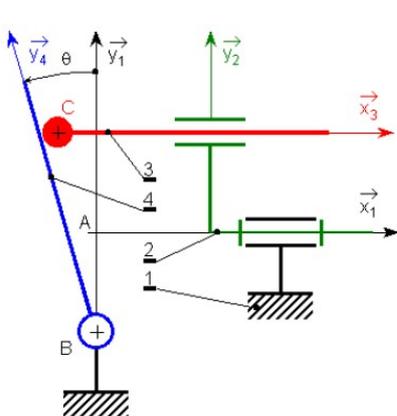
Il existe donc deux types de mobilités :

- Les mobilités utiles m_u , qui sont les mouvements indépendants contribuant à la loi entrée/sortie du mécanisme ;
- Les mobilités internes m_i , qui sont des mouvements autres que les mobilités utiles pouvant subsister même si les mobilités utiles sont bloquées.

Le degré de mobilité m d'un mécanisme est la somme des mobilités utiles et internes :

$$m = m_u + m_i \quad \text{III-9}$$

Exemple : Pompe à plateau oscillant



Dans le schéma d'une pompe à plateau oscillant ci-contre, il existe une mobilité utile : la rotation de l'arbre (2) qui entraîne la translation alternative du piston (3).

Mais il existe également une mobilité interne : la rotation sur lui-même du piston (3).

Dans ce mécanisme : $m = m_u + m_i = 1 + 1 = 2$.

Figure III-6 : Schéma cinématique d'une pompe à plateau oscillant

Conséquence sur les équations cinématiques

Lorsqu'une mobilité est présente, elle correspond à un mouvement possible dans le mécanisme qui va s'ajouter aux mouvements possibles des liaisons individuelles.

Le nombre total d'équations de mouvements est alors égal à : **$E_C + m$** .

III-3-3 : Calcul du degré d'hyperstatisme

Définition : Le degré d'hyperstatisme « h » correspond au nombre d'équations de fermetures cinématiques surabondantes par rapport au nombre d'inconnues cinématiques :

$$h = E_C + m - N_C \quad \text{III-10}$$

- Si $h > 0$: le mécanisme est hyperstatique
- Si $h = 0$: le mécanisme est isostatique
- Si $h < 0$: le mécanisme est hypostatique. Ce cas correspond à un mécanisme mal conçu dans lequel il existe plus de mobilités que nécessaire. Ce système ne peut pas être fonctionnel).

Récapitulatif :

Calcul du degré d'hyperstatisme :

N_C : Inconnues cinématiques (nombre de ddl conservés dans les liaisons)

$\gamma = L - P + 1$: Nombre cyclomatique (nombre de chaînes fermées)

$E_C = 6\gamma$: Nombre d'équations cinématiques

$m = m_u + m_i$: Nombre de mobilités (utiles et internes)

$$h = E_C + m - N_C$$

III-3-4 : Conséquences de l'hyperstatisme

1- Inconvénients :

Lorsqu'un mécanisme est hyperstatique, cela va nécessairement engendrer des contraintes de montage, liées à la nature des degrés d'hyperstatisme. Ces contraintes peuvent être satisfaites de plusieurs façons différentes :

- Contraintes géométriques lors de la fabrication des pièces,
- Présence de jeu dans les liaisons,
- Pièces flexibles autorisant la déformation,
- Reconception du mécanisme en vue de modifier les liaisons afin de rendre ce mécanisme isostatique.

- Un système hyperstatique est donc difficile à réaliser.
- Inversement, un système isostatique ne présentera aucune contrainte d'assemblage, quels que soient les tolérances de forme et de dimension appliquées sur ses pièces.

2 **Avantages :**

- Les degrés de liberté d'un système isostatique ne sont pas redondants. Or, l'usure d'une liaison va engendrer des libertés de mouvement supplémentaires (par exemple, un jeu dans un guidage en rotation pivot glissant va induire un rotulage ; ce rotulage va transformer la liaison pivot glissant en liaison linéaire annulaire).
 - En conséquence, le mécanisme *ne sera plus en mesure de remplir sa fonction*.
 - Inversement, un système hyperstatique sera plus robuste vis-à-vis de la dégradation et de l'usure d'une liaison, car les degrés de liberté *redondants* vont compenser cette usure.
- De même, un degré de liberté étant supprimé plusieurs fois, un mécanisme hyperstatique sera plus rigide qu'un mécanisme isostatique.
- L'hyperstatisme sera donc une propriété recherchée lorsque la rigidité du mécanisme est une contrainte fonctionnelle (cas des machines-outils par exemple, pour lesquelles une déformation du mécanisme se traduira par des défauts dimensionnels ou de forme sur les pièces usinées).

Mécanisme isostatique	Mécanisme hyperstatique
<ul style="list-style-type: none"> ❖ <i>Avantage</i> : facile à réaliser et à assembler (donc moins cher) ❖ <i>Inconvénients</i> : <ul style="list-style-type: none"> - peu rigide - peu robuste face aux défauts des liaisons 	<ul style="list-style-type: none"> ❖ <i>Avantages</i> : <ul style="list-style-type: none"> - rigide - robuste ❖ <i>Inconvénient</i> : <ul style="list-style-type: none"> - Contraintes de réalisation

CHAPITRE IV

ANALYSE CINEMATIQUE DES MECANISMES

Etude des mécanismes Plans

IV-1: Introduction

Le problème essentiel de la cinématique des mécanismes est l'étude du mouvement des éléments, indépendamment des forces qui agissent sur eux.

Cette étude est liée essentiellement à 3 problèmes :

- 1- Recherche des espaces parcourus par les éléments et des trajectoires suivies par les points des éléments.
- 2- Recherche des vitesses des points isolés des éléments et des vitesses angulaires.
- 3- Recherches des accélérations des points isolés et les accélérations angulaires des éléments.

IV-2: Notions de mécanismes plans

Un mécanisme est supposé plan, d'un point de vue cinématique, à partir du moment où on peut étudier les mouvements en projection sur un seul plan. Cela revient à dire que les solides sont en mouvement de telle sorte qu'un plan (fictif) d'un solide glisse sur un plan de n'importe quel autre solide (Figure IV-1).

Les mouvements possibles sont alors :

- Translation (rectiligne, circulaire, ou quelconque) dans le plan de l'étude.
- Rotation autour d'un axe fixe, perpendiculaire au plan de l'étude.
- Autre mouvement dans ce plan : on parle alors de mouvement plan quelconque (certains disent « mouvement plan complexe »).

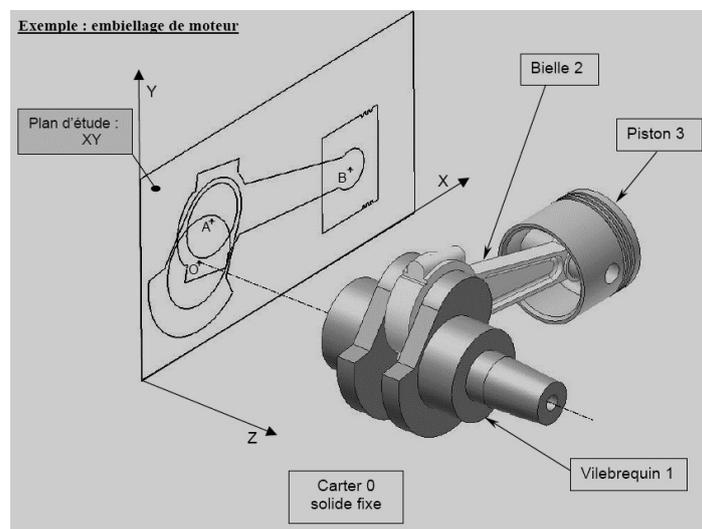


Figure IV-1 : Système bielle manivelle

Mouvement par rapport au carter : $1/0 =$ rotation d'axe Oz
 $3/0 =$ translation rectiligne de direction x
 $2/0 =$ Mouvement plan dans xy

Autres mouvements relatifs : $2/1 =$ rotation d'axe Az
 $3/2 =$ rotation d'axe Bz

IV-3 : Structure des mécanismes plans

Un mécanisme plan est un mécanisme dont les points des éléments décrivent des trajectoires situées dans des plans parallèles.

Exemple : **Figure IV-2.**

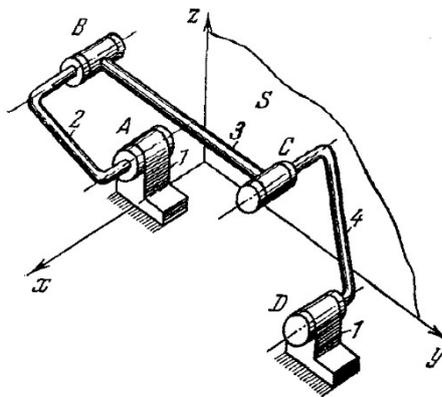


Figure IV-2: Mécanisme du quadrilatère articulé

Les points des éléments du mécanisme **ABCD** se déplacent dans les plans parallèles ($//$) à un plan S contenant les axes y et z.

Les éléments du couple ne peuvent tourner autour des axes y et z ni translater le long de l'axe x, reste la rotation autour de l'axe x, ou la translation le long des axes y et z.

AB ; CD : rotation autour de l'axe x

BC : rotation autour de x, translation suivant y et z.

Donc, des six mouvements possibles il ne reste que 3.

IV-4: Etude cinématique du mécanisme à coulisseau et manivelle (exemple : bielle manivelle)

Pour l'étude des mécanismes plans, nous utilisons la Méthode des contours vectoriels Fermés (**Fermeture géométrique**) qui consiste à remplacer chaque élément par un vecteur (V. ZINOVIEV).

Pour le mécanisme de la figure ci-dessous :

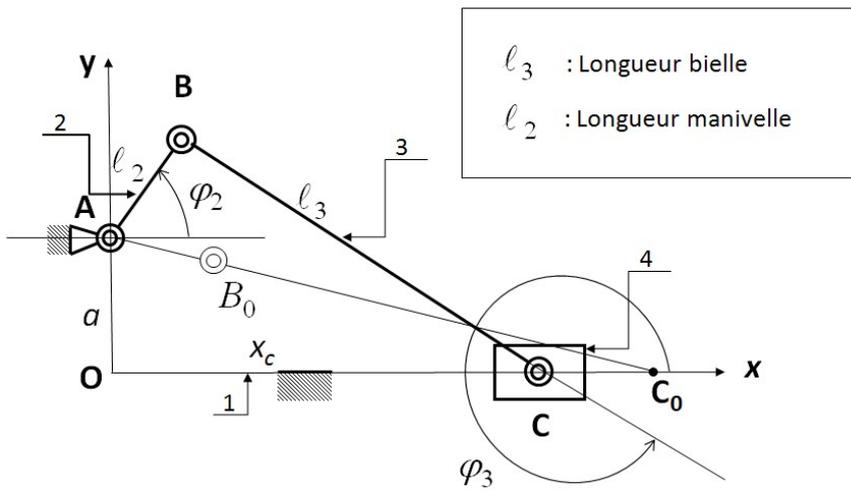
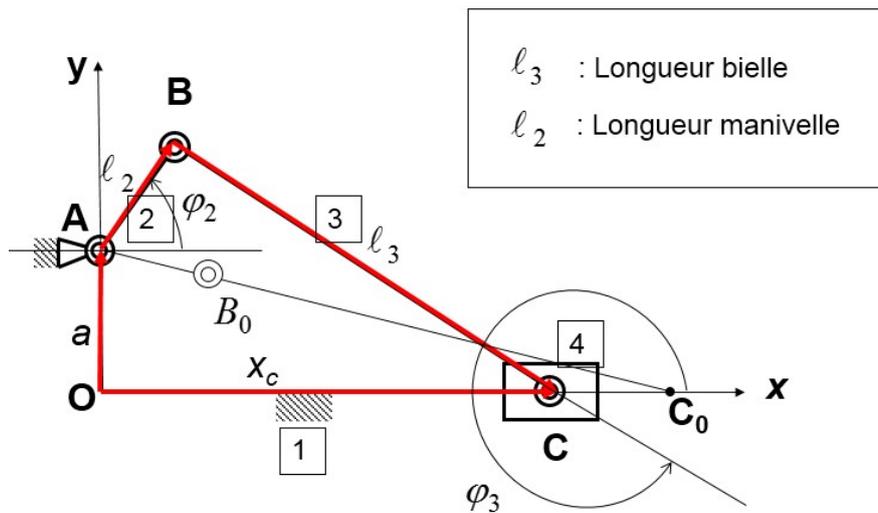
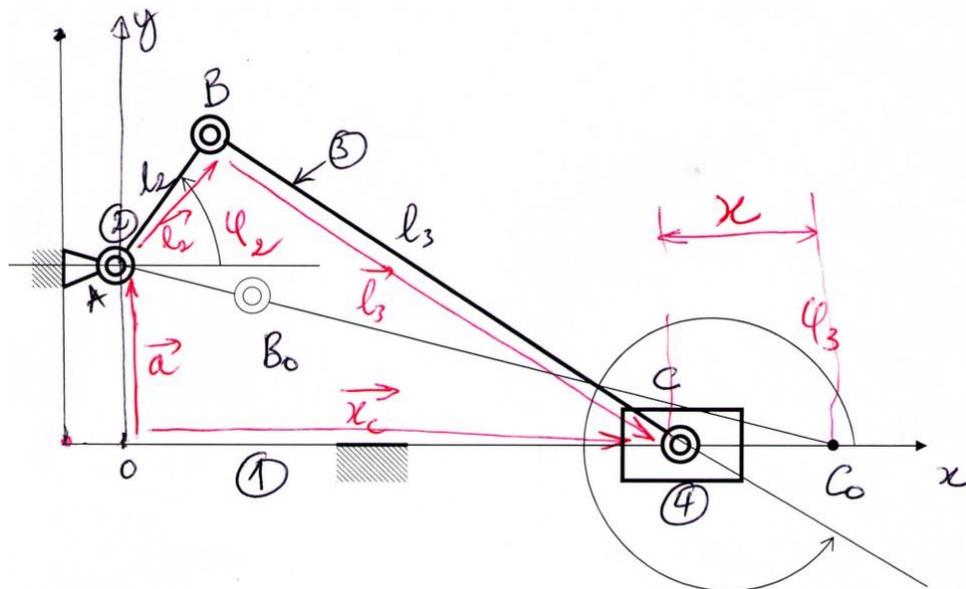


Figure IV-3 : Schéma du mécanisme à coulisseau et manivelle dans lequel l'axe de guidage ne passe pas par l'axe de rotation de la manivelle.



Considérons le contour **OABCO** comme la somme des vecteurs dans le sens horaire :

$$\vec{a} + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 = \vec{x}_C \quad \text{IV-1}$$

En projetant cette équation vectorielle sur les axes **Ox** et **Oy**, on aura :

$$\left. \begin{aligned} 0 + \ell_2 \cos \varphi_2 + \ell_3 \cos \varphi_3 &= x_C \\ a + \ell_2 \sin \varphi_2 + \ell_3 \sin \varphi_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{IV-2}$$

$$\text{Il en découle que : } \sin \varphi_3 = - \left(\frac{a + \ell_2 \sin \varphi_2}{\ell_3} \right) \quad \text{IV-3}$$

$$\text{De même : } x_C = \ell_2 \cos \varphi_2 + \ell_3 \sqrt{1 - \left(\frac{a + \ell_2 \sin \varphi_2}{\ell_3} \right)^2} \quad \text{IV-4}$$

Dans certaines applications, il est commode de mesurer l'espace parcouru par le coulisseau (4) à partir de la position extrême droite du mécanisme lorsque le point C se trouve en C₀, ce qui nous donne :

$$x(\text{course}) = OC_0 - x_C = \sqrt{(\ell_2 + \ell_3)^2 - a^2} - \ell_2 \cos \varphi_2 - \ell_3 \sqrt{1 - \left(\frac{a + \ell_2 \sin \varphi_2}{\ell_3} \right)^2} \quad \text{IV-5}$$

Pour déduire les équations des vitesses et des accélérations angulaires, on peut procéder à la dérivation des équations (IV-2) par rapport à la coordonnée généralisée φ_2 .

• Pour la vitesse angulaire ω_3 de la bielle (3) et la vitesse linéaire V_C du coulisseau (4) on aura :

$$\left. \begin{aligned} -\ell_2 \sin \varphi_2 - i_{32} \ell_3 \sin \varphi_3 &= V_{C_4} \\ \ell_2 \cos \varphi_2 + i_{32} \ell_3 \cos \varphi_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{IV-6}$$

$$\text{Avec : } i_{32} = \frac{d\varphi_3}{d\varphi_2} \quad \text{et} \quad V_{C_4} = \frac{dx_C}{d\varphi_2}$$

On déduit la vitesse V_{C_4} de la première équation en remplaçant i_{32} par sa valeur tirée de la deuxième équation, on obtient :

$$i_{32} = - \frac{\ell_2 \cos \varphi_2}{\ell_3 \cos \varphi_3} \quad \text{et} \quad V_{C_4} = \ell_2 \frac{\sin(\varphi_3 - \varphi_2)}{\cos \varphi_3} \quad \text{IV-7}$$

• Pour l'accélération angulaire $(i_{32})'$ de la bielle (3) et l'accélération linéaire (a_{C_4}) du coulisseau (4) faisons la dérivation des équations (IV-6) par rapport à (φ_2) :

•

$$\left. \begin{aligned} -\ell_2 \cos \varphi_2 - (i_{32})^2 \ell_3 \cos \varphi_3 - (i_{32})' \ell_3 \sin \varphi_3 &= a_{C_4} \\ -\ell_2 \sin \varphi_2 - (i_{32})^2 \ell_3 \sin \varphi_3 + (i_{32})' \ell_3 \cos \varphi_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{IV-8}$$

Où $(i_{32})' = \frac{di_{32}}{d\varphi_2}$ et $a_{C_4} = \frac{dV_{C_4}}{d\varphi_2}$

• De la deuxième équation on peut tirer :

$$(i_{32})' = \frac{\ell_2 \sin \varphi_2 + (i_{32})^2 \ell_3 \sin \varphi_3}{\ell_3 \cos \varphi_3} \quad \text{IV-9}$$

On porte ensuite la valeur de l'accélération $(i_{32})'$ dans la première équation et on détermine la valeur de l'accélération du coulisseau (4) ' (a_{C_4}) ' :

$$a_{C_4} = -\ell_2 \cos \varphi_2 - (i_{32})^2 \ell_3 \cos \varphi_3 - \frac{(\ell_2 \sin \varphi_2 + (i_{32})^2 \ell_3 \sin \varphi_3)}{\ell_3 \cos \varphi_3} \cdot \ell_3 \sin \varphi_3$$

IV-10

• Les vraies vitesses V_c et ω_3 et les vraies accélérations a_c et ε_3 sont égales à :

Vitesses	Accélérations
$V_C = \omega_2 \cdot V_{C_4}$	$a_C = \omega_2^2 \cdot a_{C_4} + \varepsilon_2 \cdot V_{C_4}$
$\omega_3 = \omega_2 \cdot i_{32}$	$\varepsilon_3 = \omega_2^2 \cdot (i_{32})' + \varepsilon_2 \cdot i_{32}$

Où : ω_2 et ε_2 sont la vitesse et l'accélération angulaires connues de l'élément (2).

IV-5: Mécanisme à quatre (04) barres [quadrilatère]

Considérons le mécanisme à 4 barres, les positions des éléments (2), (3) et (4) sont définies par les angles ϕ_2 , ϕ_3 , et ϕ_4 .

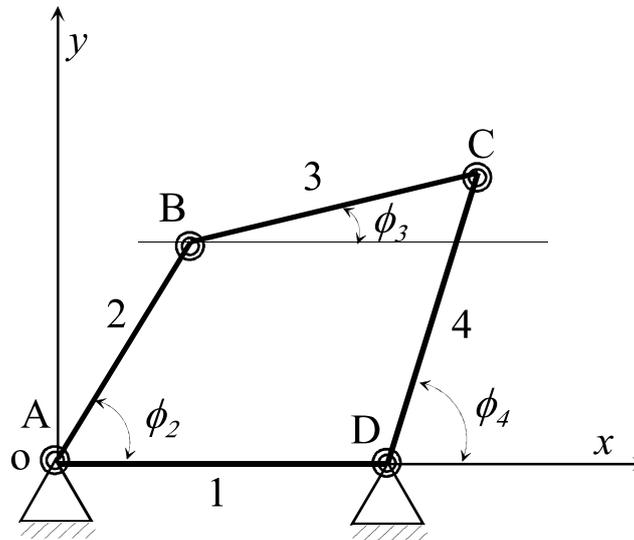


Figure IV-4 : mécanisme à 04 barres

Le mécanisme à quatre barres appelé quadrilatère (figure IV-4) est l'un des mécanismes Plans les plus utilisés dans l'industrie moderne.

A cet effet, et faire l'analyse cinématique de ce type de mécanismes nous utilisons également la technique de contours vectoriels fermés connue par la fermeture géométrique.

Pour cela il est commode de chercher la solution de problème de positions des éléments en divisant le contour fermé **ABCD** en deux triangle **ABD** et **BCD**. On peut alors toujours écrire pour ces contours les équations vectorielles suivantes.

$$\text{Le contour ABCD:} \quad \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + \vec{\ell}_1 = \vec{\ell}_4 \quad \text{IV-11}$$

$$\text{Pour le triangle ABD:} \quad \vec{\ell}_2 + \vec{S} - \vec{\ell}_1 = \vec{0} \quad \text{IV-12}$$

$$\text{Pour le triangle BCD:} \quad \vec{\ell}_3 - \vec{\ell}_4 - \vec{S} = \vec{0} \quad \text{IV-13}$$

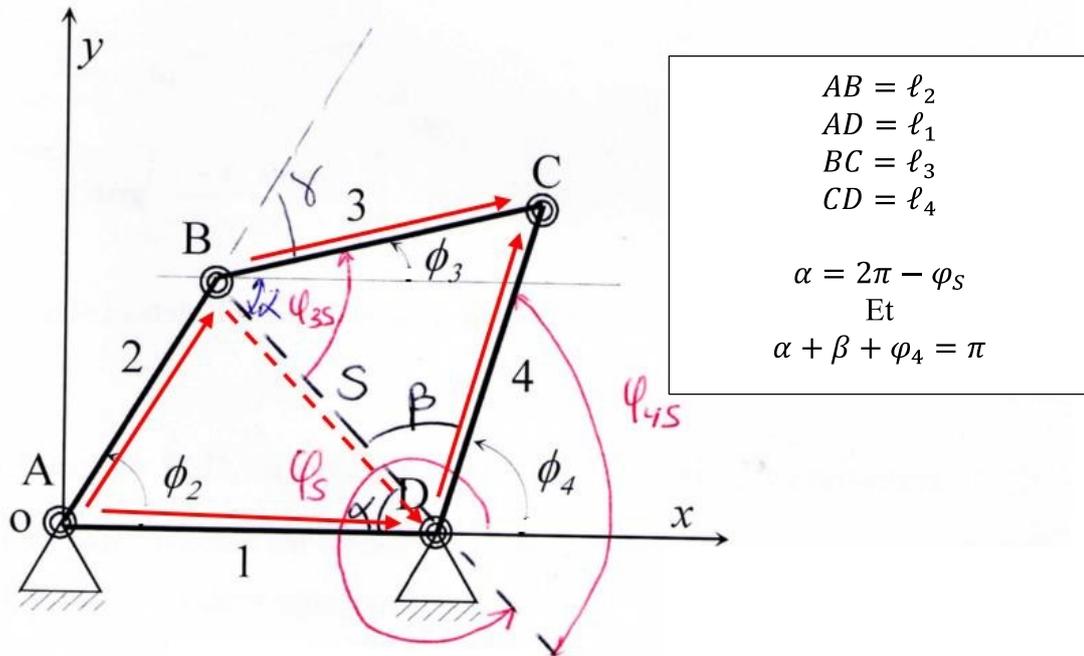


Figure IV-5 : Fermeture géométrique du quadrilatère

Où S est un vecteur fictif de module variable qui définit les positions des points B et D.

Projetons les vecteurs de l'équation (2) sur les axes de coordonnées (Ox, Oy).

$$\begin{cases} \text{Suivant Ox : } l_2 \cos \varphi_2 + S \cos \varphi_S - l_1 = 0 & \text{IV-14} \\ \text{Suivant Oy : } l_2 \sin \varphi_2 + S \sin \varphi_S = 0 & \text{IV-15} \end{cases}$$

Des équations (IV-14) et (IV-15) on peut tirer φ_S .

$$\text{tg } \varphi_S = \frac{-l_2 \sin \varphi_2}{-l_2 \cos \varphi_2 + l_1} \tag{IV-16}$$

$$\Rightarrow \varphi_S = \text{Artg} \left[\frac{-l_2 \sin \varphi_2}{-l_2 \cos \varphi_2 + l_1} \right]$$

Par suite, on déduit le module du vecteur S de l'équation (IV-15)

$$\Rightarrow S = \frac{-l_2 \sin \varphi_2}{\sin \varphi_S}$$

* Considérons le triangle **BCD**, les inclinaisons des vecteurs $\vec{\ell}_3$ et $\vec{\ell}_4$ sur le vecteur \vec{S} seront désignées respectivement par les angles φ_{3S} et φ_{4S} .

On a la possibilité d'écrire les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \ell_4^2 = \ell_3^2 + S^2 - 2\ell_3 S \cos \varphi_{3S} & \text{IV-17} \\ \ell_3^2 = \ell_4^2 + S^2 - 2\ell_4 S \cos(\pi - \varphi_{4S}) & \text{IV-18} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ell_4^2 = \ell_3^2 + S^2 - 2\ell_3 S \cos \varphi_{3S} & \text{(IV-17)} \\ \ell_3^2 = \ell_4^2 + S^2 + 2\ell_4 S \cos \varphi_{4S} & \text{(IV-18)} \end{cases}$$

A partir des équations (IV-17) et (IV-18) on peut déterminer les angles φ_{3S} et φ_{4S} .

$$\varphi_{4S} = \arccos\left(\frac{\ell_3^2 - \ell_4^2 - S^2}{2\ell_4 S}\right) \quad \text{(IV-17')}$$

$$\varphi_{3S} = \arccos\left(\frac{\ell_4^2 - \ell_3^2 - S^2}{-2\ell_3 S}\right) \quad \text{(IV-18')}$$

Si les longueurs des éléments du mécanisme et l'angle de rotation φ_2 de l'élément (2) sont connus, on arrive toujours à déterminer pour toute position de l'élément (2) les angles φ_3 , et φ_4 donc les positions des éléments (3) et (4).

$$\text{Avec} \begin{cases} \varphi_4 = \varphi_{4S} + \varphi_S \\ \varphi_3 = \varphi_{3S} + \varphi_S \end{cases}$$

IV-6: Recherche des vitesses et accélérations

Pour la recherche des vitesses et accélérations des éléments du quadrilatère articulé, on écrit les projections de l'équation vectorielle exprimant le caractère fermé du contour **ABCD**.

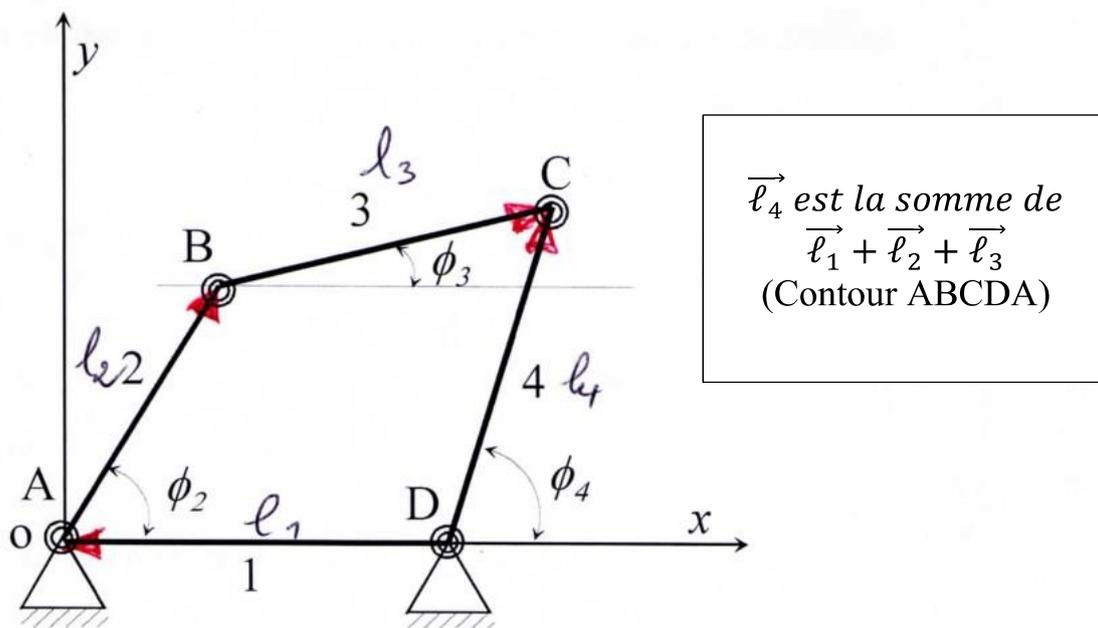
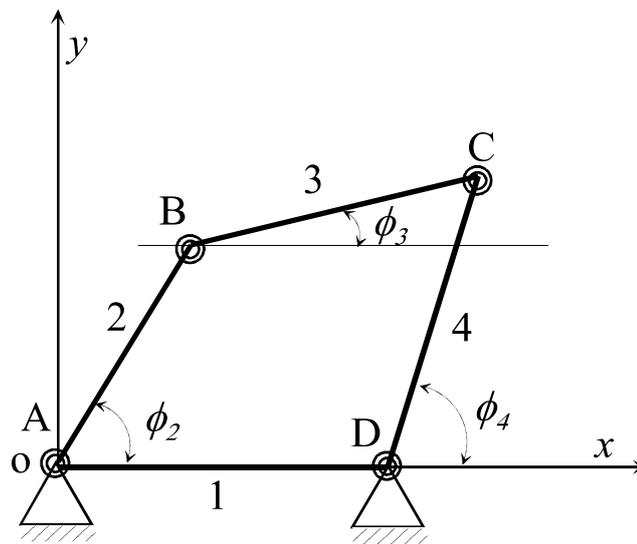


Figure IV-6 : Recherche des accélérations par fermeture géométrique

On obtient les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \text{Suivant } Ox : -l_1 + l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos \varphi_3 - l_4 \cos \varphi_4 = 0 & IV-19 \\ \text{Suivant } Oy : l_2 \sin \varphi_2 + l_3 \sin \varphi_3 - l_4 \sin \varphi_4 = 0 & IV-20 \end{cases}$$

Où: φ_2 , φ_3 , et φ_4 sont les angles que forment les axes des éléments (2), (3) et (4) avec l'axe Ox .

Pour rechercher les vitesses angulaires ω_3 , et ω_4 des éléments (3) et (4) on dérive les équations (IV-19) et (IV-20) par rapport à la coordonnée généralisée φ_2 .

On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Suivant } Ox : -\ell_2 \sin \varphi_2 - \ell_3 \sin \varphi_3 \frac{d\varphi_3}{d\varphi_2} + \ell_4 \sin \varphi_4 \frac{d\varphi_4}{d\varphi_2} = 0 \\ \text{Suivant } Oy : \ell_2 \cos \varphi_2 + \ell_3 \cos \varphi_3 \frac{d\varphi_3}{d\varphi_2} - \ell_4 \cos \varphi_4 \frac{d\varphi_4}{d\varphi_2} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} IV - 21 \\ IV - 22 \end{array}$$

Soit: $i_{32} = \frac{d\varphi_3}{d\varphi_2}$ et $i_{42} = \frac{d\varphi_4}{d\varphi_2}$: Les vitesses angulaires analogues.

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Suivant } Ox : -\ell_2 \sin \varphi_2 - i_{32} \ell_3 \sin \varphi_3 + i_{42} \ell_4 \sin \varphi_4 = 0 \\ \text{Suivant } Oy : \ell_2 \cos \varphi_2 + i_{32} \ell_3 \cos \varphi_3 - i_{42} \ell_4 \cos \varphi_4 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} IV - 23 \\ IV - 24 \end{array}$$

* les quantités i_{32} et i_{42} s'appellent aussi rapports de vitesses, car elles sont égales aux rapports des vitesses angulaires ω_3 et ω_4 à la vitesse angulaire de l'élément menant.

$$i_{32} = \frac{d\varphi_3}{d\varphi_2} = \frac{d\varphi_3/dt}{d\varphi_2/dt} = \frac{\omega_3}{\omega_2}$$

$$i_{42} = \frac{d\varphi_4}{d\varphi_2} = \frac{d\varphi_4/dt}{d\varphi_2/dt} = \frac{\omega_4}{\omega_2}$$

A partir de (13) et (14) on peut tirer i_{32} et i_{42}

$$\left. \begin{array}{l} i_{32} = \frac{-\ell_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_4)}{\ell_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_4)} \\ i_{42} = \frac{\ell_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}{\ell_4 \sin(\varphi_4 - \varphi_3)} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} i_{32} = \frac{\omega_3}{\omega_2} \rightarrow \omega_3 ? \\ i_{42} = \frac{\omega_4}{\omega_2} \rightarrow \omega_4 ? \end{array} \right\}$$

* pour la recherche des accélérations ε_3 et ε_4 des éléments (3) et (4) on dérive les équations (IV-23) et (IV-24) par rapport à la coordonnée généralisée φ_2 . Ce qui donne les équations suivantes.

$$\left\{ \begin{array}{l} Ox : -\ell_2 \cos \varphi_2 - i_{32} \ell_3 \cos \varphi_3 \frac{d\varphi_3}{d\varphi_2} - i'_{32} \ell_3 \sin \varphi_3 + i_{42} \ell_4 \cos \varphi_4 \frac{d\varphi_4}{d\varphi_2} + i'_{42} \ell_4 \sin \varphi_4 = 0 \\ Oy : -\ell_2 \sin \varphi_2 - i_{32} \ell_3 \sin \varphi_3 \frac{d\varphi_3}{d\varphi_2} + i'_{32} \ell_3 \cos \varphi_3 - i_{42} \ell_4 \sin \varphi_4 \frac{d\varphi_4}{d\varphi_2} + i'_{42} \ell_4 \cos \varphi_4 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (IV - 25) \\ (IV - 26) \end{array}$$

$$\begin{cases} \mathbf{Ox} : -l_2 \cos \varphi_2 - i_{32}^2 l_3 \cos \varphi_3 - i_{32}' l_3 \sin \varphi_3 + i_{42}^2 l_4 \cos \varphi_4 + i_{42}' l_4 \sin \varphi_4 = 0 & IV - 27 \\ \mathbf{Oy} : -l_2 \sin \varphi_2 - i_{32}^2 l_3 \sin \varphi_3 + i_{32}' l_3 \cos \varphi_3 + i_{42}^2 l_4 \sin \varphi_4 - i_{42}' l_4 \cos \varphi_4 = 0 & IV - 28 \end{cases}$$

Où i_{32} et i_{42} sont les vitesses angulaires analogues, i_{32}' et i_{42}' sont les accélérations analogues égales aux dérivées des vitesses angulaires correspondantes par rapport à la coordonnée généralisée φ_2 .

$$i_{32}' = \frac{di_{32}}{d\varphi_2} = \frac{d\left(\frac{d\varphi_3}{d\varphi_2}\right)}{d\varphi_2}$$

$$i_{42}' = \frac{di_{42}}{d\varphi_2} = \frac{d\left(\frac{d\varphi_4}{d\varphi_2}\right)}{d\varphi_2}$$

On peut ainsi, tirer: i_{32}' et i_{42}'

$$\begin{cases} i_{42}' = \frac{l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + i_{32}^2 l_3 - i_{42}^2 l_4 \cos(\varphi_4 - \varphi_3)}{l_3 \sin(\varphi_4 - \varphi_3)} \\ i_{32}' = \frac{-l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_4) + i_{42}^2 l_4 - i_{32}^2 l_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_4)}{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_4)} \end{cases}$$

Les vitesses vraies ω_3 et ω_4 et les accélérations ε_3 et ε_4 des éléments (3) et (4) sont égales:

Accélérations vraies	Vitesses vraies
$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \omega_2^2 i_{32}' + \varepsilon_2 i_{32}$	$\omega_3 = \omega_2 \cdot i_{32}$
$\varepsilon_4 = \frac{d\omega_4}{dt} = \omega_2^2 i_{42}' + \varepsilon_2 i_{42}$	$\omega_4 = \omega_2 \cdot i_{42}$

CHAPITRE V

Initiation à la DAO et synthèse des mécanismes

« Etude cinématique d'une Scie sauteuse sous OpenMeca »

V-1 : Introduction :

OpenMeca est un logiciel libre qui permet de créer un schéma cinématique en 3D puis de simuler le système ainsi obtenu. Différents résultats (actions mécaniques, trajectoires, vitesses, accélérations, etc.) peuvent être capturés pendant la simulation et visualisés sous forme de diagramme.

OpenMeca, c'est un logiciel de simulation sans prétention de systèmes mécaniques. Il permet de simuler des mécanismes avec des engrenages, des courroies, des liaisons pivots, des glissières, des ressorts... Bref, tous ces petits mécanismes qui, mis bout à bout, permettent à une voiture d'avancer, à une fusée de décoller, à un compresseur de compresser

OpenMeca permet donc de dessiner des schémas cinématiques en 3D et de les animer en appliquant des forces ou en imposant des déplacements. Il est également possible de placer des capteurs numériques afin de récupérer des données au cours d'une simulation. Enfin, et c'est une nouveauté par rapport à la version précédente, la gestion des contacts entre des géométries simples est disponible.

OpenMeca est un logiciel de calculs mécaniques. Distribué librement et téléchargeable depuis l'adresse du site : <http://openmeca.fr.nf/>

Son interface graphique génère un schéma cinématique spatial.

Il permet de modéliser un système mécanique simplement à partir des coordonnées (x, y, z) des centres des liaisons ainsi que les points particuliers attachés aux solides.

Il réalise les calculs et fournit les paramètres cinématique et dynamique liés au modèle

V-2 : Présentation du mécanisme à modéliser (Scie sauteuse)

V-2-1 : Introduction :

Une scie sauteuse est une machine-outil de découpe, équipée d'une lame dentée, utilisée en général pour la découpe de planches ou de panneaux en bois mais aussi de plastique et d'aluminium. La lame est très petite et étroite : elle est fixée d'un côté à un moteur qui lui fait faire un mouvement de va-et-vient rapide. Sur la plupart des modèles actuels, un guide renforce la rigidité de la lame.

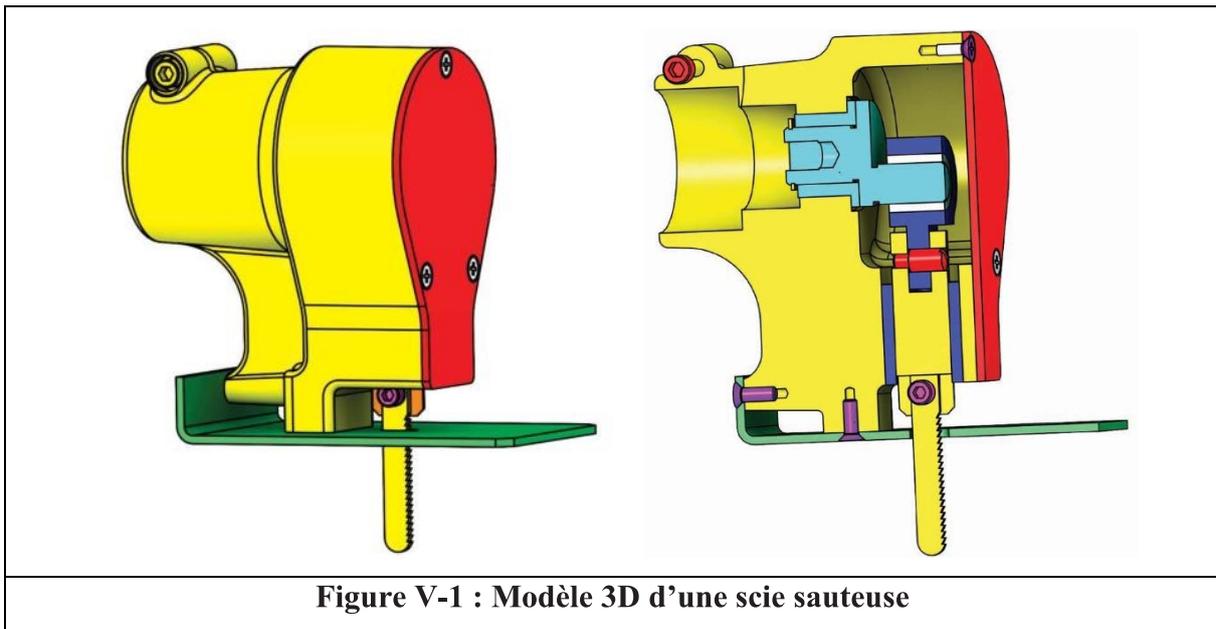
Elle est très utilisée en menuiserie car la petite taille de la lame lui permet d'être extrêmement maniable, et de scier des formes arrondies ou suivant un tracé librement choisi, contrairement aux scies de type scie circulaire qui ne sont faites que pour scier en ligne droite. Elle offre aussi l'avantage de pouvoir effectuer des coupes au centre d'une pièce par exemple. Sa petitesse impose bien sûr des limites, et seules des planches pas trop épaisses peuvent être découpées (suivant la puissance, jusqu'à 9 cm environ).

Certains modèles de scies sauteuses sont appelés pendulaires car en plus d'un mouvement vertical, elles impulsent un mouvement d'avant en arrière à la lame (en avant lors de la découpe et en arrière autrement), ce qui permet une découpe plus rapide et plus précise.

Une scie sauteuse permet également la découpe de tôles et de profilés métalliques de faible épaisseur.

V-2-2 : Données du problème :

V-2-2-1 : Présentation du système :



Le dessin ci-dessus représente un mécanisme de scie sauteuse portable. Il se fixe par adhérence sur un moteur (non représenté) dont l'extrémité de son arbre est carrée. Ce dernier tourne à une fréquence variable pouvant atteindre 1000 tr /min.

V-2-2-2- Fonctionnement :

La scie sauteuse transforme le mouvement de rotation uniforme du moteur (non représenté) en un mouvement de translation alternative de la lame. Cette transformation de mouvement est obtenue par l'utilisation d'un système bielle–manivelle formé par les pièces (9) et (11). La pièce (9), est entraînée en rotation par le moteur autour de l'axe de la broche. Elle est munie d'un cylindre excentré par rapport à son axe de rotation. Elle sert de manivelle à la bielle (11) qui entraîne le coulisseau porte lame (6) en translation rectiligne alternative par rapport au corps (1)

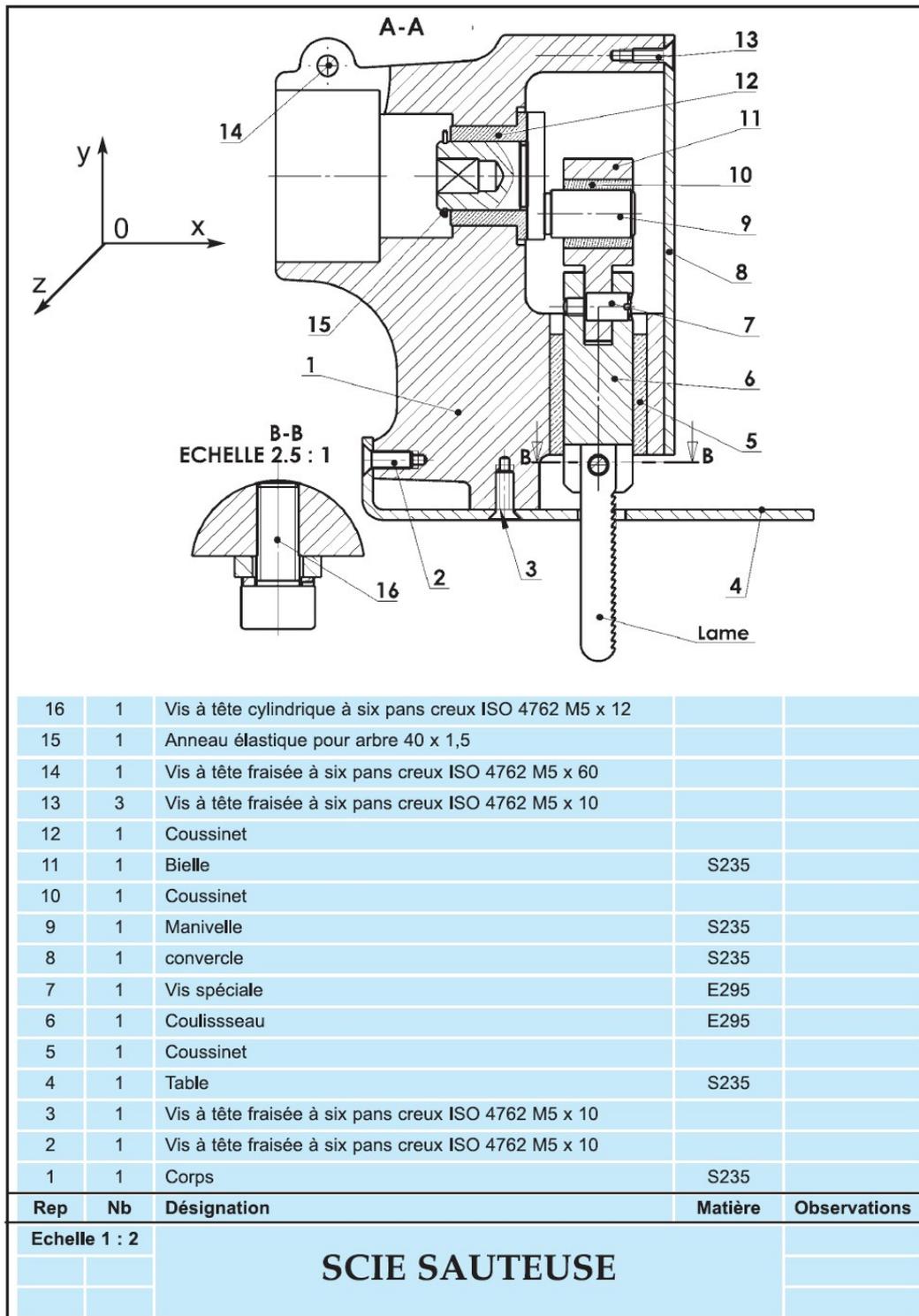


Figure V-2 : Dessin d'ensemble avec nomenclature de la scie sauteuse

V-2-2-3 : Elaboration du schéma cinématique

V-2-2-3-1 : Recherche des Classes d'équivalence Cinématique (CEC)

1. Analyser et rechercher les liaisons encastrement.
2. Colorier sur le plan d'ensemble, les sous-ensembles liés par liaisons encastrement.

3. Effectuer l'inventaire des pièces, appartenant à chaque classe d'équivalence, repérées par un numéro ou une lettre encerclée (colorier avec les couleurs choisies pour le plan d'ensemble).

La scie sauteuse sujet de notre étude est composée essentiellement de quatre principaux sous ensemble (CEC) :

Les Classes d'équivalence Cinématique ainsi que le graphe de liaisons :

<p>Groupe A : {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 8 ; 12 ; 13 ; 14}</p> <p>Groupe B : {9 ; 15}</p> <p>Groupe C : {10 ; 11}</p> <p>Groupe D : {6 ; 7 ; 16 ; lame}</p>	
---	--

- SE_n1/(Bâti) nous lui avons donné une couleur **rouge**.
- SE_n2/(Manivelle) nous lui avons donné une couleur **bleue**.
- SE_n3/(Bielle) nous lui avons donné une couleur **verte**.
- SE_n4/(Coulisseau) nous lui avons donné une couleur **jaune**.

V-2-2-3-2 : Schéma cinématique minimal

Les quatre sous-ensembles de la scie sauteuse sont liés entre eux par quatre liaisons élémentaires dont les coordonnées de leurs centres sont comme suit :

- Au point A : liaison pivot (0,90,0) (O,x)
- Au point B : liaison pivot Glissant (130,70,0) (O,x)
- Au point C : liaison Pivot (130,40,0) (O,x)
- Au point D : liaison pivot Glissant (80,0,0) (O,y)

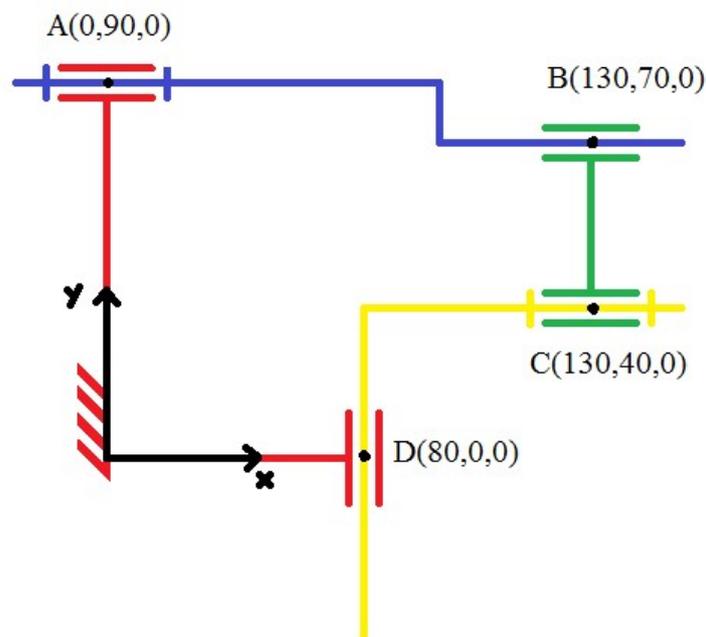


Figure V-3 : Schéma cinématique de la scie sauteuse

V-3 : Grandes étapes de création d'un modèle sous OpenMeca:

1- Création des groupes cinématiques :

Il s'agit de définir les entités (coquilles) auxquelles seront attachées des liaisons, et propriétés de masse (optionnelles),

2- Création des liaisons :

Définit les liaisons entre « SE » (groupes cinématiques). A choisir parmi les 11 liaisons type)

3- Réaliser l'habillage :

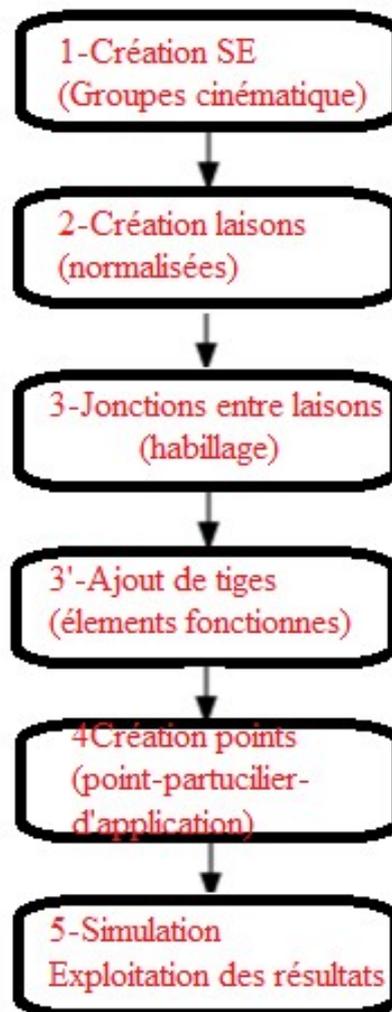
Permet de joindre les différentes liaisons appartenant aux groupes cinématiques (SE). Il est également possible d'ajouter des « tiges » ou « volumes » pour compléter le schéma fonctionnel.

4- Création de points :

Ce sont des points particuliers en dehors des centres de liaison, sur lesquels on souhaite mesurer certains paramètres cinématiques ou auxquels sont attachées certaines actions mécaniques.

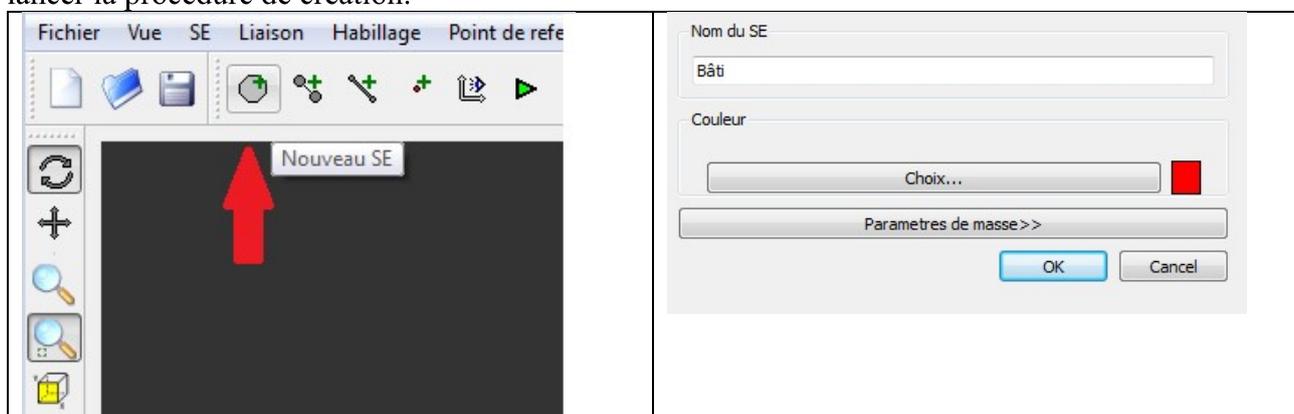
5- Simulation :

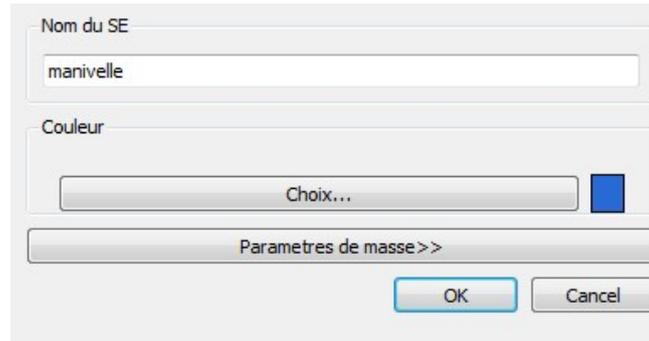
Création d'une loi de mouvement attachée à une liaison ou réponse à une action mécanique. La simulation calcule les paramètres mécaniques qui peuvent être exploités en direct pour chaque position de calcul, ou exportées pour être exploités à l'aide d'un grapheur.



V-3-1 : Création des groupes cinématiques :

Il s'agit de définir les entités auxquelles seront attachées des liaisons, et propriétés de masse (optionnelles). Après lancement de **OpenMeca**, appeler le menu SE ou cliquer sur l'icône SE pour lancer la procédure de création.



Compléter le reste des SE

Les sous-ensembles sont complétés :

**V-3-2 : Création des liaisons :**

Définir les liaisons entre « SE » (groupes cinématiques). A choisir parmi les 11 liaisons type)

Appeler le menu Liaisons ou cliquer sur l'icône Liaison pour lancer la procédure de création.

Sélectionner successivement :

↳ La nature de la liaison à choisir parmi la liste des liaison types.

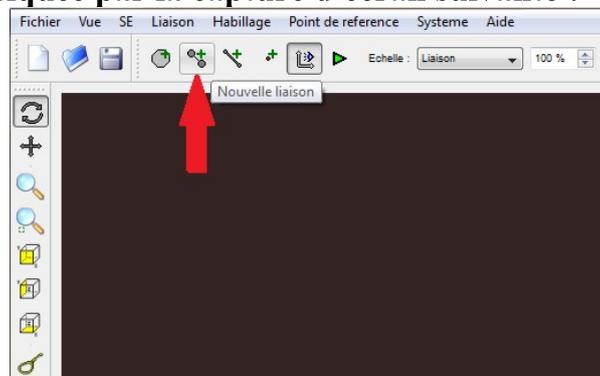
↳ Le nom de la liaison (il est toujours utile de définir des noms clairs pour ses liaisons)

↳ Les composants concernés par la liaison.

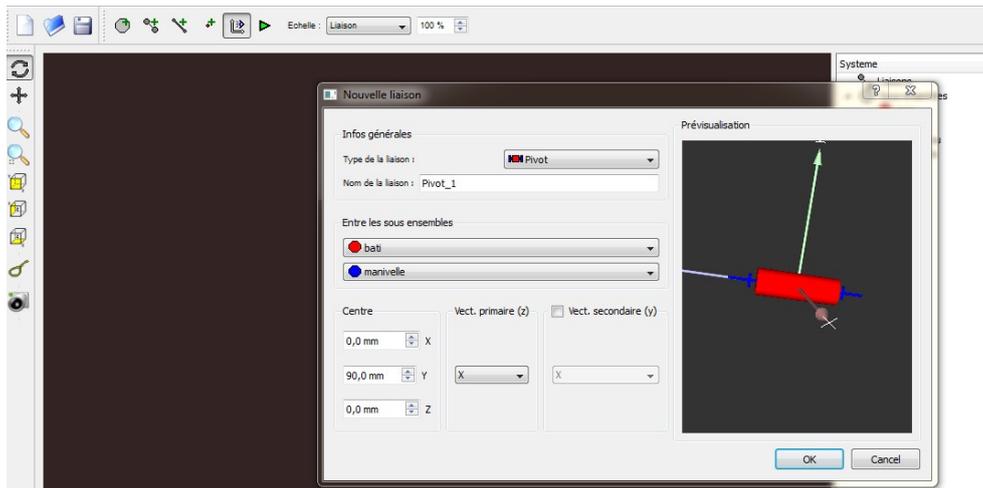
↳ Les coordonnées du centre de la liaison (dans le repère (O,x,y,z))

↳ L'axe principal de la liaison Après validation, la représentation graphique de la liaison apparaît dans la zone graphique.

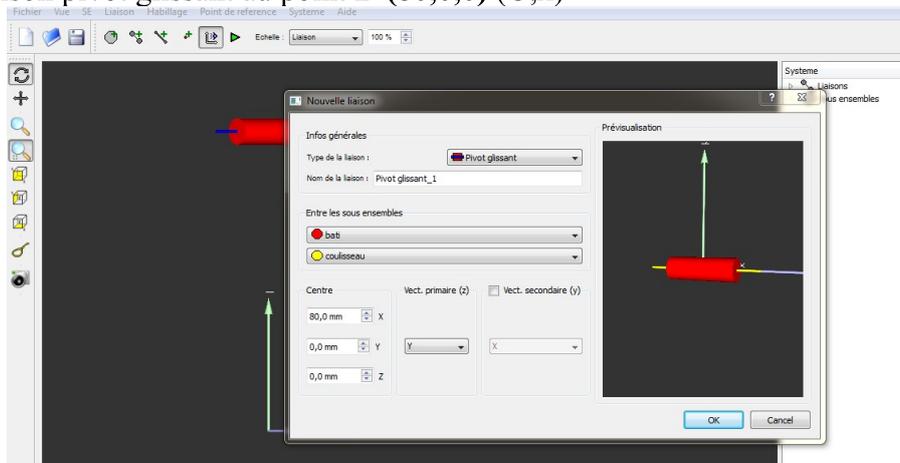
La méthode est indiquée par la capture d'écran suivante :



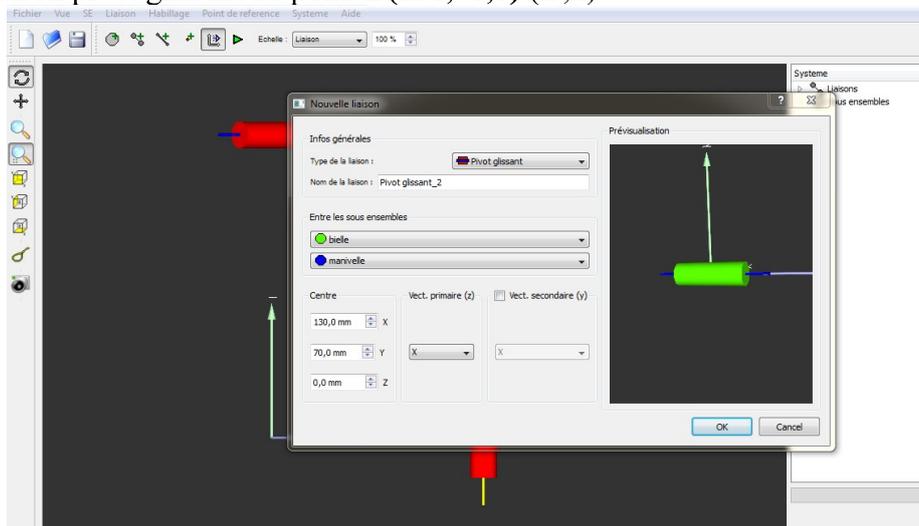
Nous ajoutons maintenant la liaison pivot au point A (0,90,0) (O,x) :



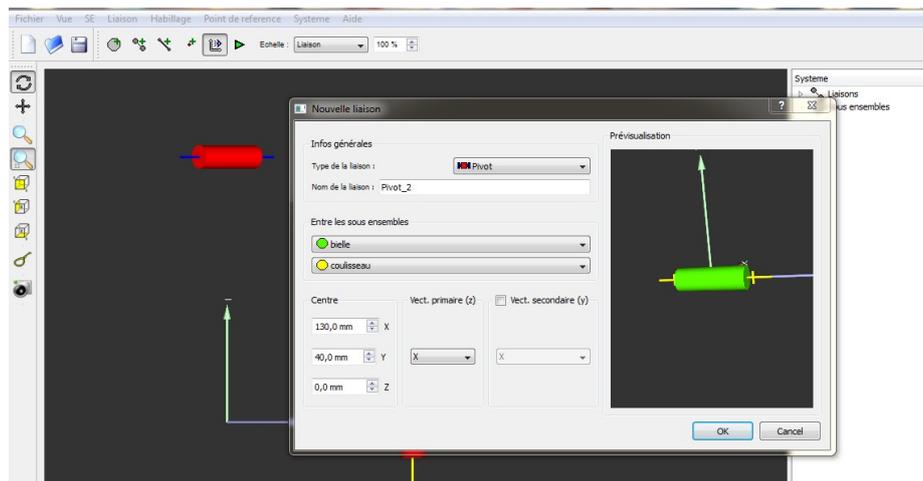
Ajoutant la liaison pivot glissant au point **D(80,0,0)** (O,x)



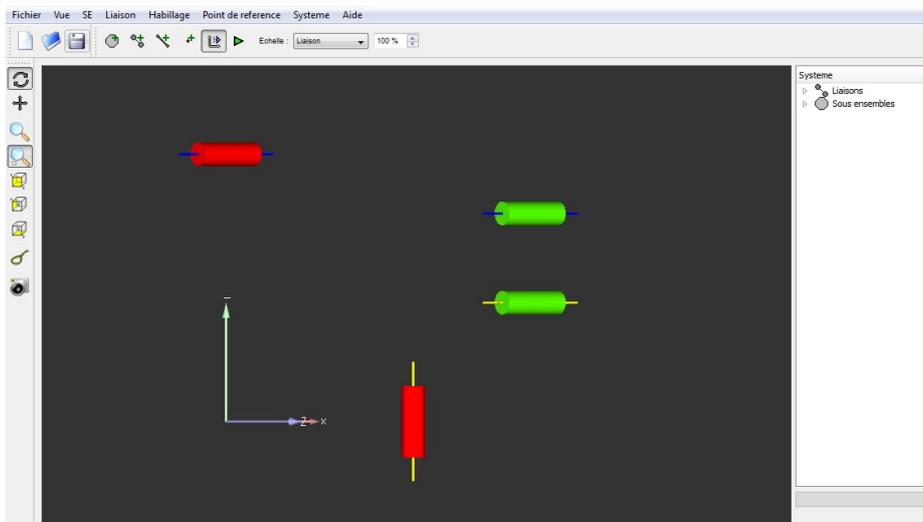
Ajoutant la liaison pivot glissant au point **B(130,70,0)** (O,x)



Terminer le travail par la dernière liaison Pivot au point **C(130,40,0)** (O,y)



L'ajout de liaisons est terminé.



V-3-3 : Habillage du schéma :

L'habillage permet de relier entre eux les différents éléments (liaisons) d'un même groupe cinématique. Appeler le menu Habillage ou cliquer sur l'icône Lignes pour lancer la procédure de création. Lignes entre liaisons.

↻ Entre la pièce (comprendre, liaison) : ⇒ Cliquer sur la première liaison de la zone graphique ou sur son nom dans le groupe «+ Sous-ensemble »de la zone de modélisation

↻ Et la pièce (comprendre, liaison) : ⇒ Cliquer sur la seconde liaison de la zone graphique ou sur son nom dans le groupe «+ Sous-ensemble »de la zone de modélisation

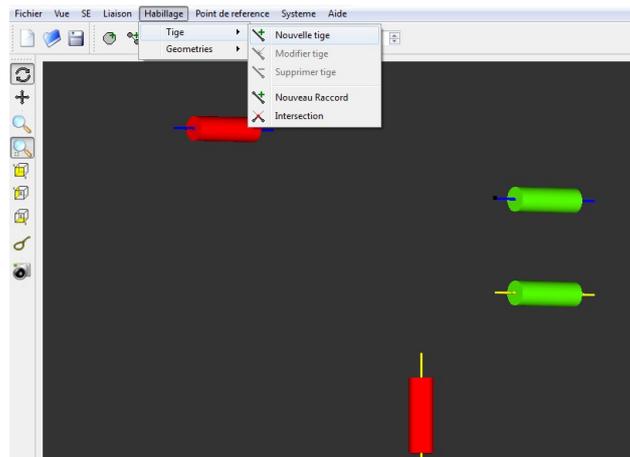
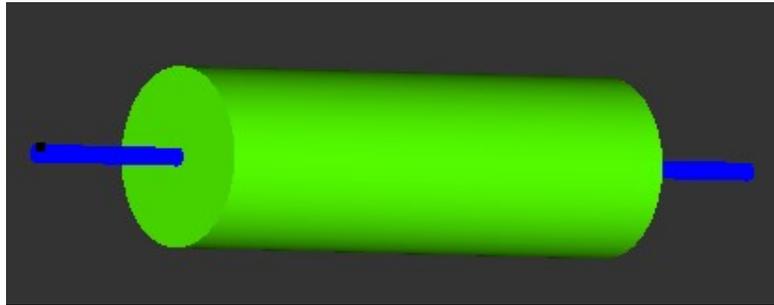
Ligne supplémentaire.

↻ Cliquer d'abord sur la liaison qui servira de point de départ de cette ligne. Cliquer droit sur cette liaison fait apparaître le menu contextuel qui donne cette possibilité « Nouvelle tige ». Attention, Pour obtenir un résultat correct, il faut que la liaison origine de la nouvelle tige corresponde au volume plein de la représentation de la liaison ex.: cylindre pour pivot, sphère pour rotule ou linéaire annulaire etc...

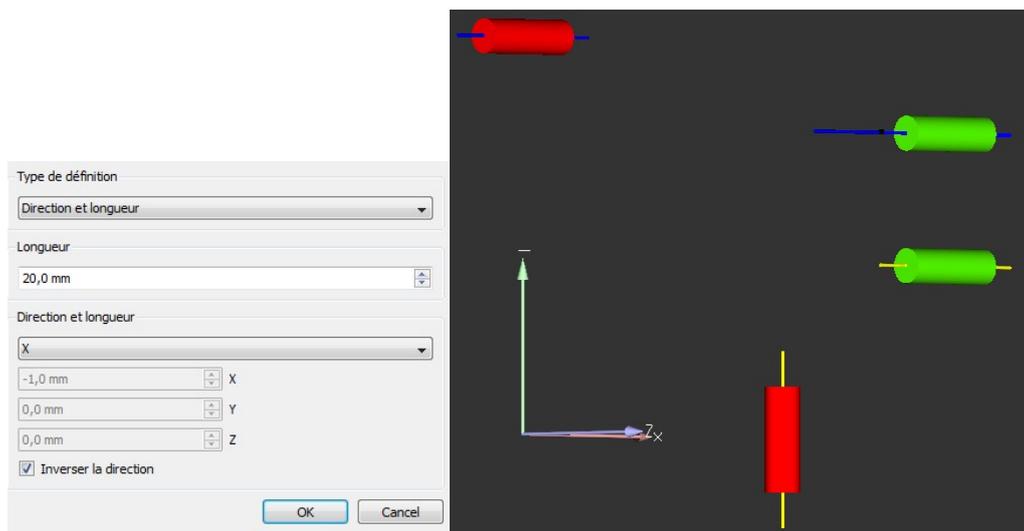
↻ Deux options sont possibles ⇒ Longueur et direction (option1) depuis la liaison sélectionnée sur la longueur saisie dans la direction choisie (si la direction n'est pas unique, x, y ou z, il est possible d'entrer le coefficient directeur de la direction en saisissant des valeurs dans les directions composantes. ⇒ Coordonnées (option 2) saisir les coordonnées relatives de l'extrémité de la ligne (l'origine locale correspond aux coordonnées de la liaison de départ).

V-3-3-1 : Les tiges et Les raccords :

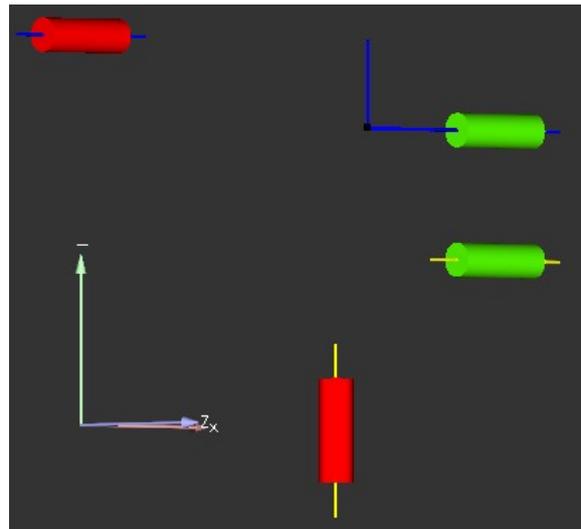
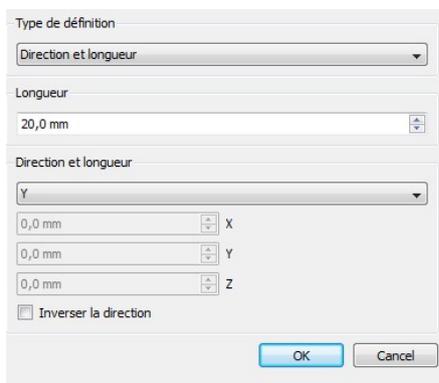
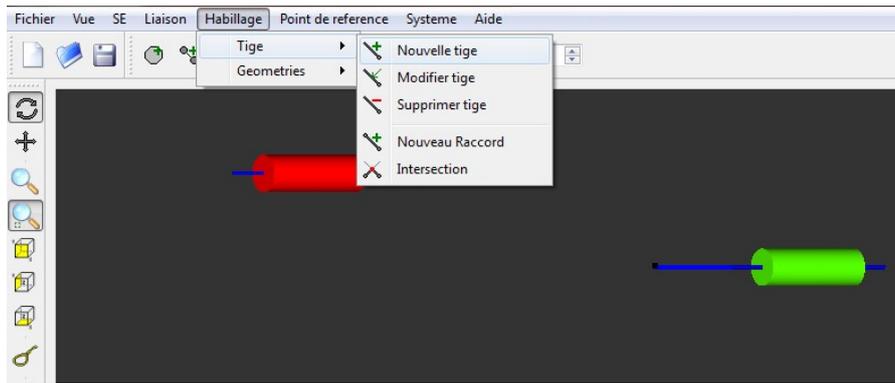
Maintenant nous commençons par la sélection d'un point de départ lié à l'axe de la bielle qui sera utilisé comme référence pour la conception de la tige de liant le bâti avec la bielle :



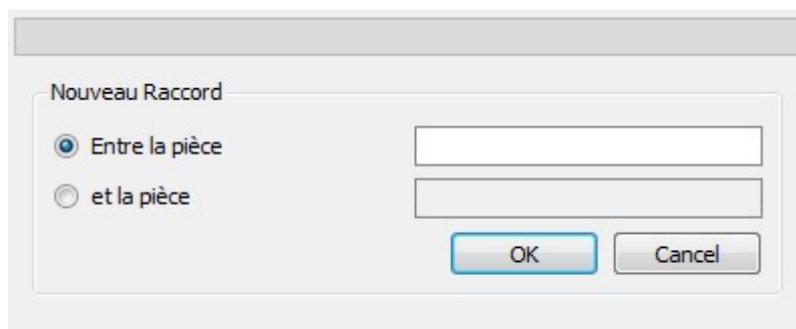
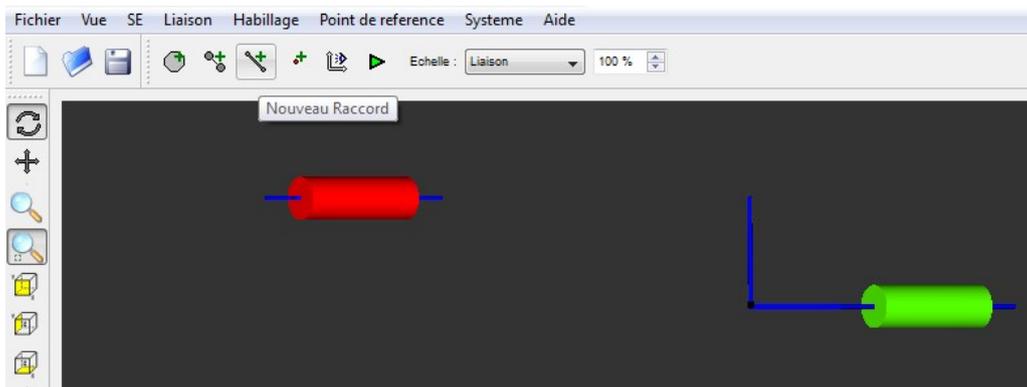
Introduisons maintenant la longueur de la tige qui est 20 mm

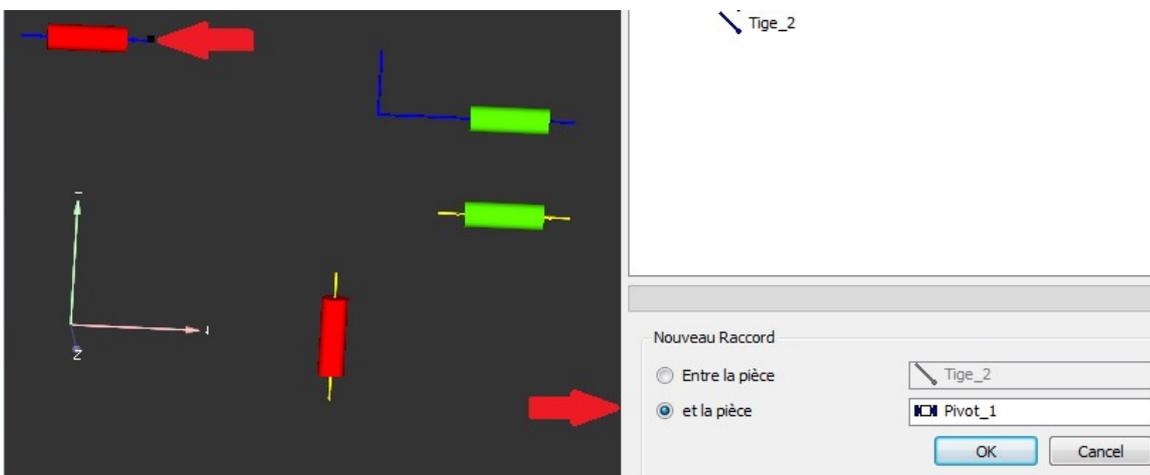
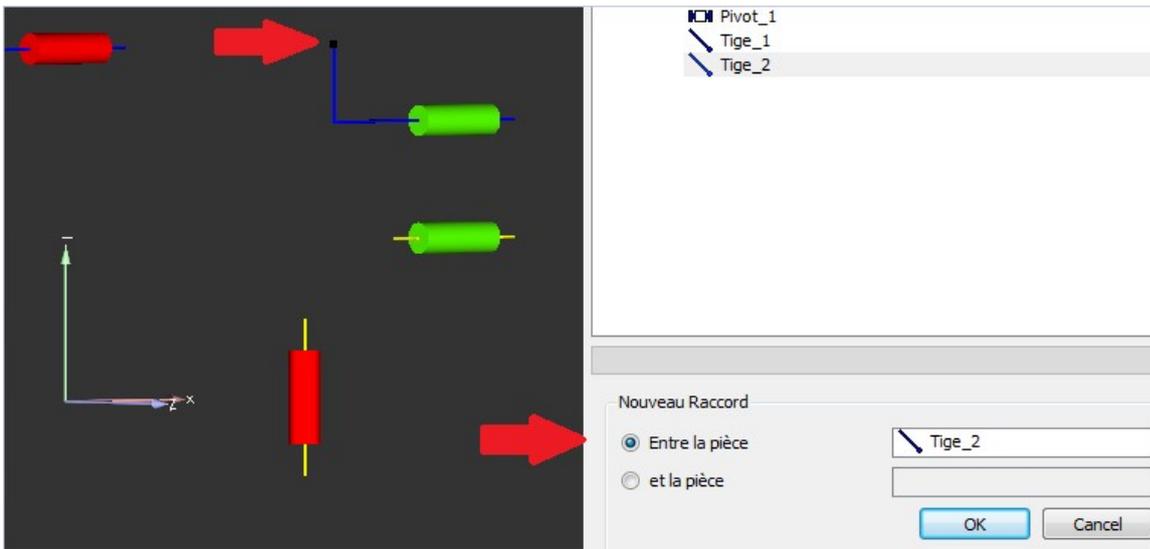


Le même travail est fait pour la deuxième tige reliant le bâti et la bielle mais cette fois dans le deuxième coté (axe oy)

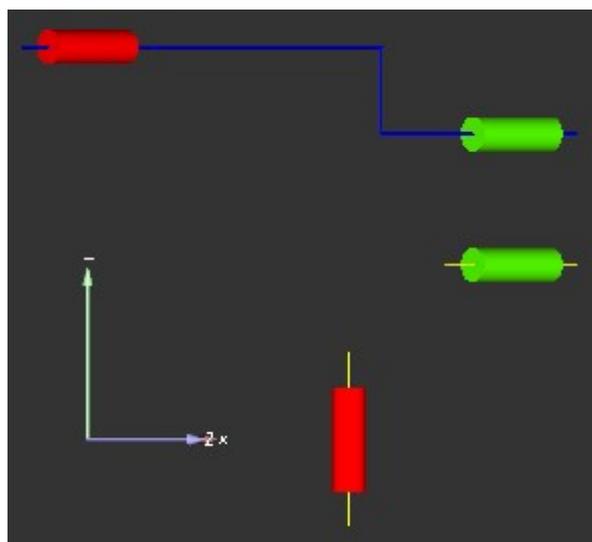


Procédure : Cliquez sur nouveau raccord et entrez les données comme indiqué sur l’image, ci-après, pour faire une ligne entre sur la liaison pivot la liaison pivot glissant :

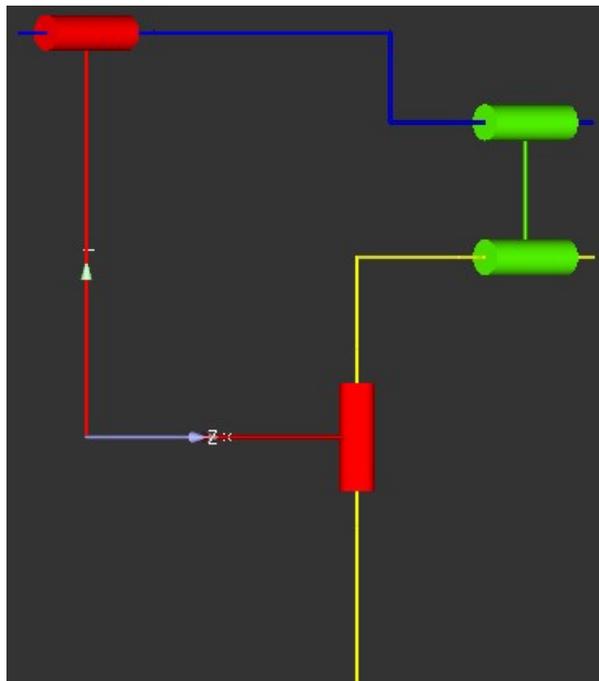




Maintenant les raccords sont terminés (voir image ci-après) :



Les tiges sont maintenant terminées

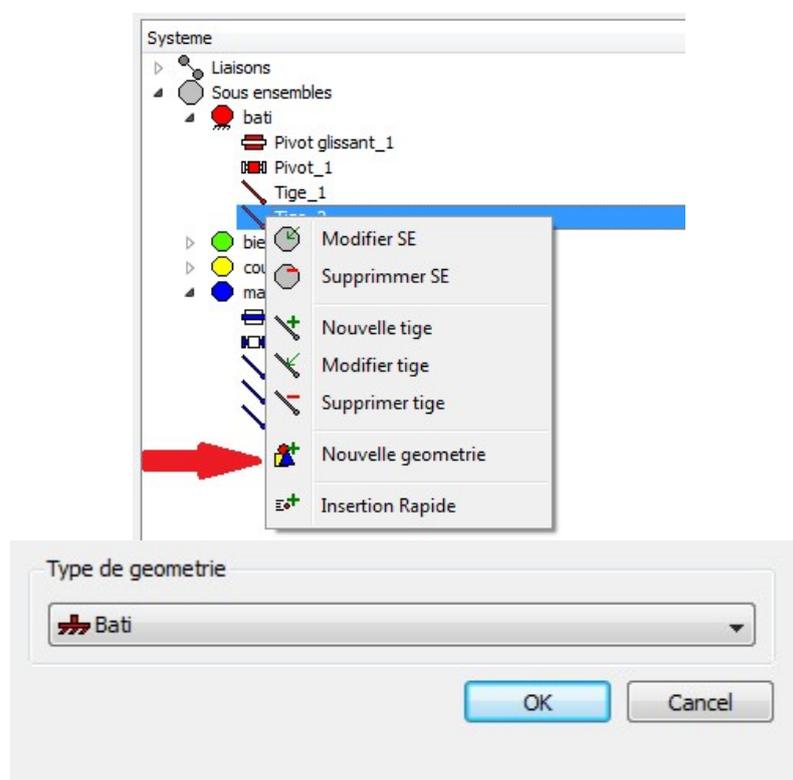


V-3-3-2 : La géométrie :

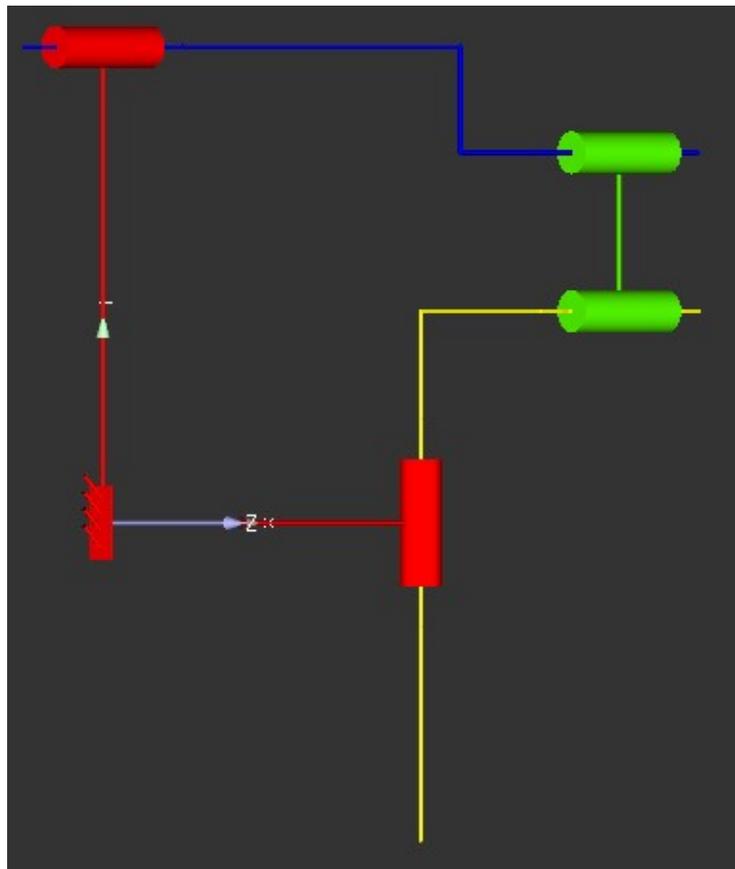
Nous allons maintenant ajouter les géométries de la scie sauteuse à modéliser pour rendre le schéma plus compréhensible, pour cela, nous avons une seule géométrie à ajouter qui le bâti.

1. Le bâti :

Avec un clic droit sur la tige inférieure du mors fixe et nouvelle géométrie et ajouter un bâti.



La forme finale du schéma cinématique utilisant Openmeca est ainsi obtenue (voir page suivante) :



V-4 : Création de points pour l'étude des mouvements sous OpenMeca :

Ce sont des points particuliers en dehors des centres de liaison, sur lesquels on souhaite mesurer certains paramètres cinématiques ou auxquels sont attachées certaines actions mécaniques. Points de références Définir les points pour lesquels on souhaite obtenir des résultats

Création manuelle d'un point :

- Définir le solide d'appartenance du point
- Saisir les coordonnées de ce point (coordonnées absolues)

Insertion rapide :

Cette fonction est accessible depuis un clic droit sur une liaison ou une tige de l'arbre de modélisation,

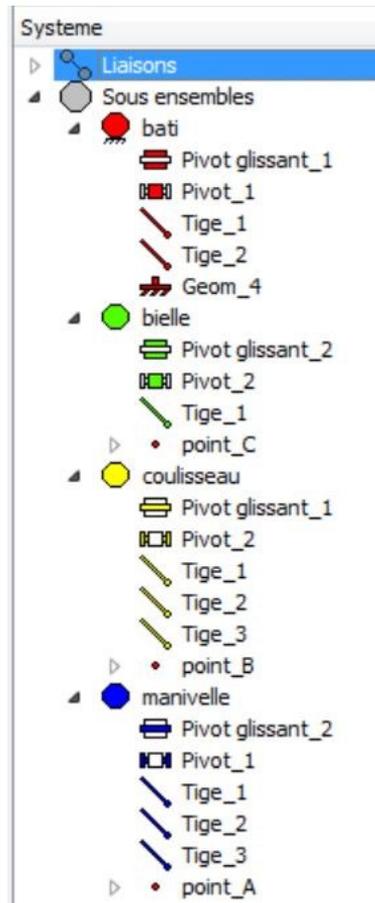
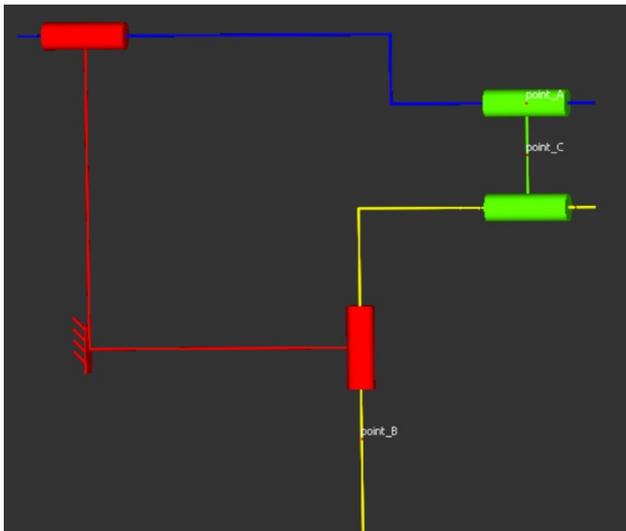
➤ Cliquer sur un élément, liaison, tige ...etc. Le point sera automatiquement créé dès que vous lui aurez donné un nom.

- Centre de la liaison pour une liaison
- une extrémité de la tige (dernier point de la création de la tige)

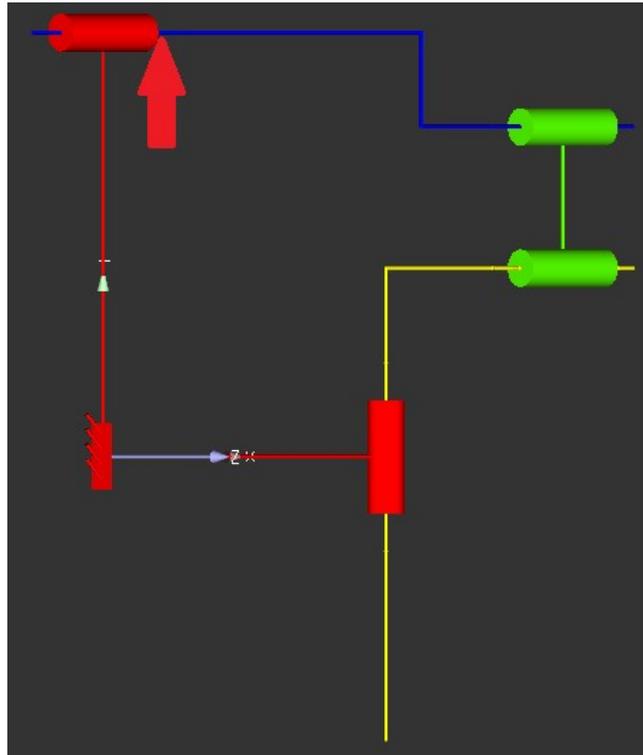
Choix des données attendues.

- Cliquer droit sur le(s) point(s) crée(s) et sélectionner la variable physique que vous souhaitez analyser parmi, trajectoire, vitesse ou accélération.

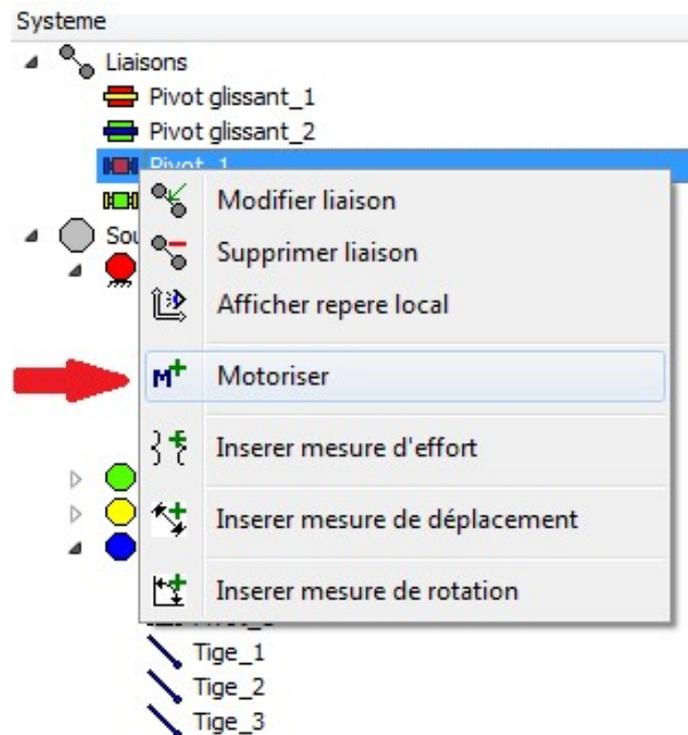
Les points de l'étude dans la scie sauteuse sont donc identifiés:



<p>Sous Ensemble</p> <p>manivelle</p> <p>Nom</p> <p>point_A</p> <p>Coordonnees</p> <p>X 130,0 mm</p> <p>Y 70,0 mm</p> <p>Z 0,0 mm</p>	<p>Sous Ensemble</p> <p>coulisseau</p> <p>Nom</p> <p>point_B</p> <p>Coordonnees</p> <p>X 80,0 mm</p> <p>Y -25,0 mm</p> <p>Z 0,0 mm</p>	<p>Sous Ensemble</p> <p>bielle</p> <p>Nom</p> <p>point_C</p> <p>Coordonnees</p> <p>X 130,0 mm</p> <p>Y 55,0 mm</p> <p>Z 0,0 mm</p>
---	--	--

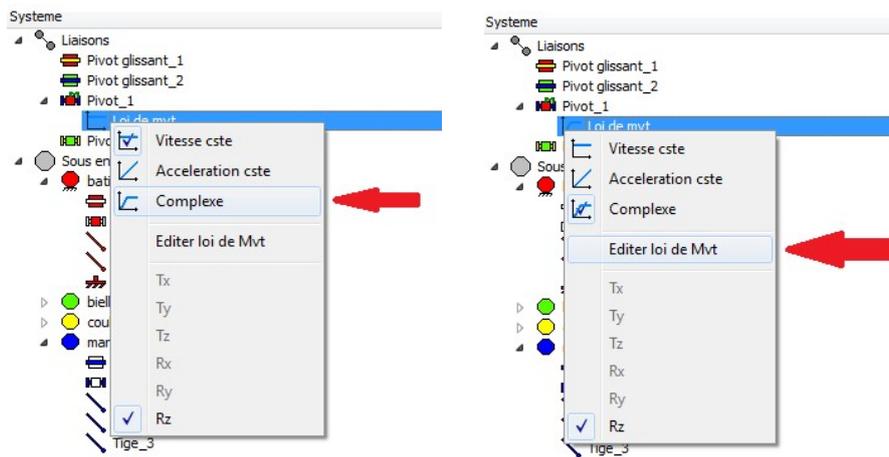
V-5 : La Simulation :

Avec un clic droit sur la liaison pivot_1 un choix de motorisation apparaîtra et quand on le sélectionne un M apparaîtra dans la liaison.

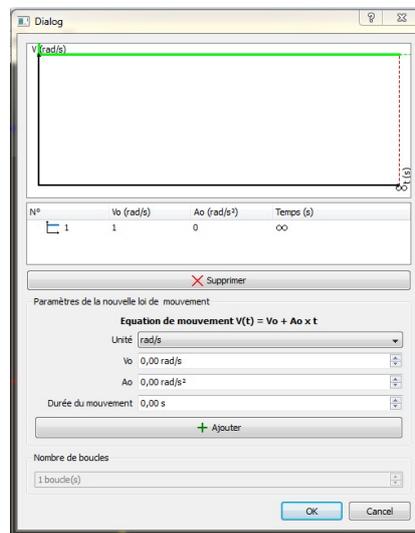


Pour simuler le mouvement alternatif de la lame, nous allons piloter la liaison Pivot_1 avec une loi de mouvement complexe (c'est un choix).

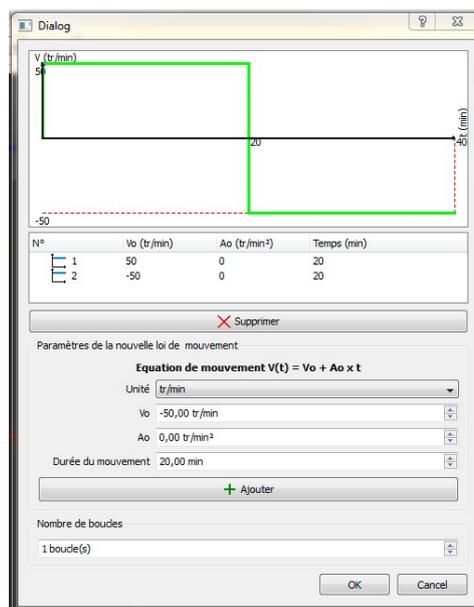
Pour cela il faut procéder comme suit : Ajouter la motorisation à la liaison Pivot, choisissez Complexe puis Édicter la loi de Mvt.



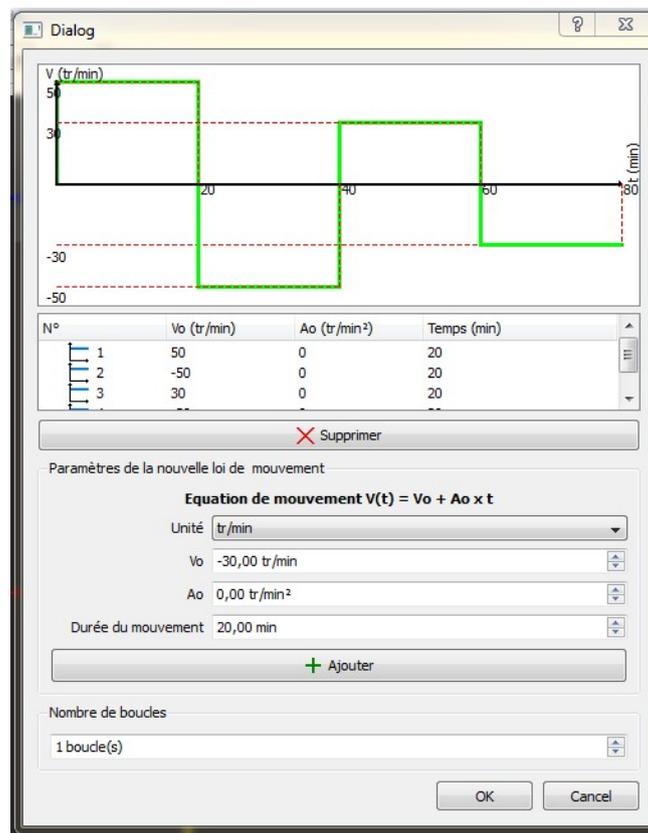
Nous sélectionnons maintenant le mouvement 1 donné par défaut qu'on doit supprimer pour introduire les données du mouvement qu'on va utiliser :



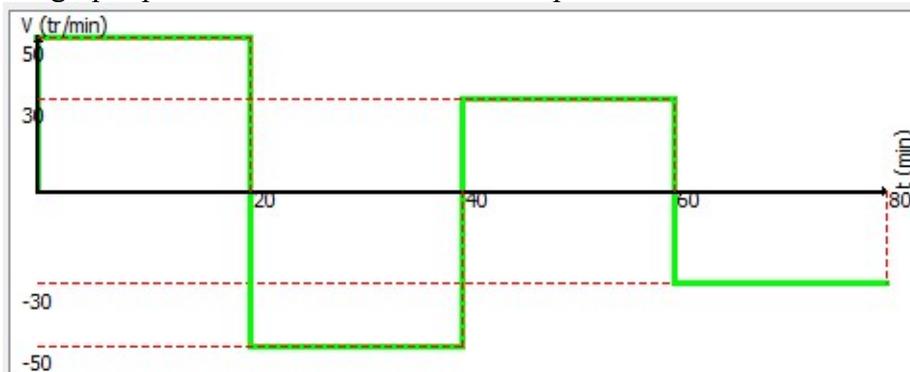
Nous allons maintenant compléter une première loi de mouvement comme ci-dessous, et cliquer sur ajouter.



Nous allons maintenant compléter une deuxième loi de mouvement comme ci-dessous puis ajouter.



La courbe graphique de la loi de mouvement complexe doit ressembler à l'image ci-dessous :



Note : (la boucle concerne les répétitions des cycles de mouvement, en Openmeca elle a un nombre limité de 500).

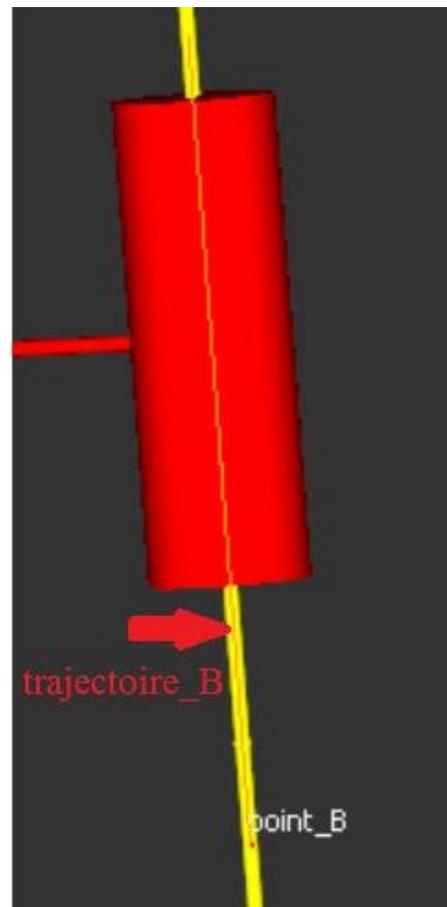
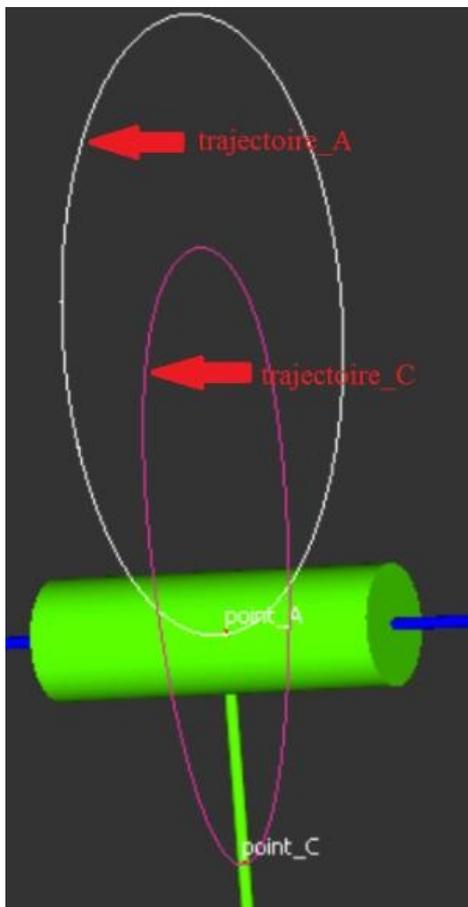
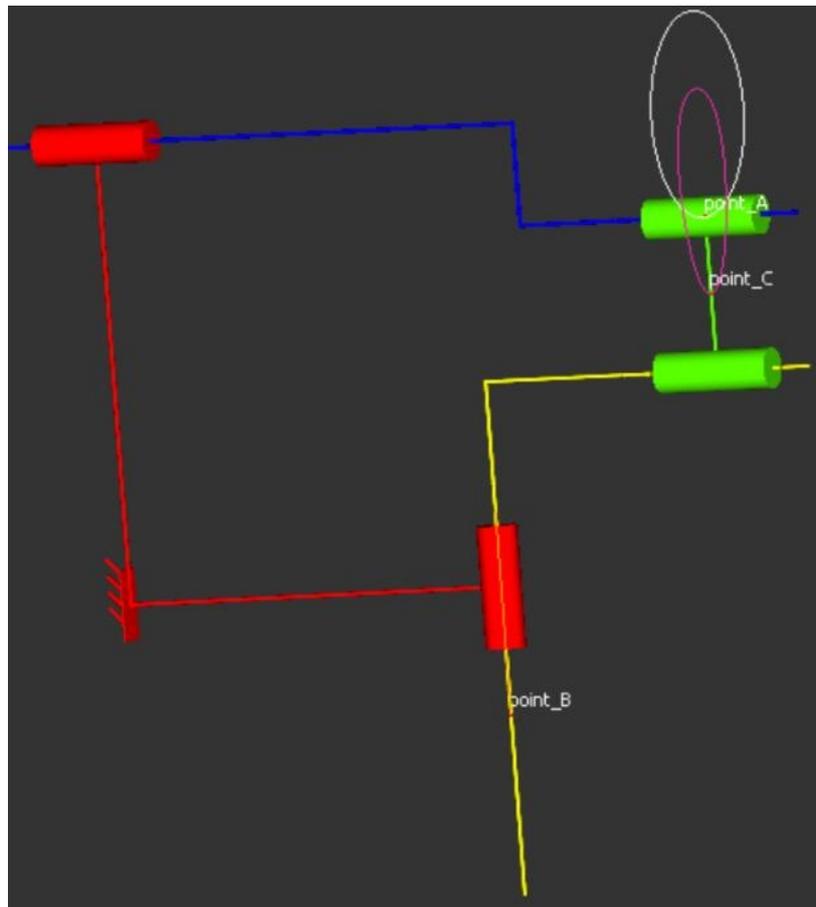
(Pour voir la simulation de l'étau de modéliste cliquez sur la vidéo nommée la simulation de la scie sauteuse)

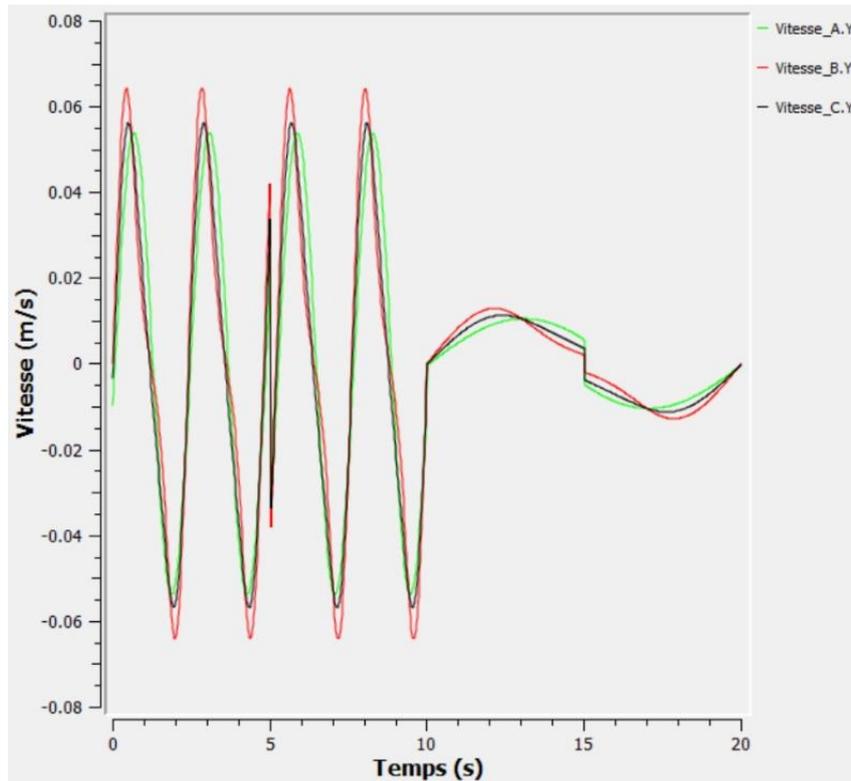
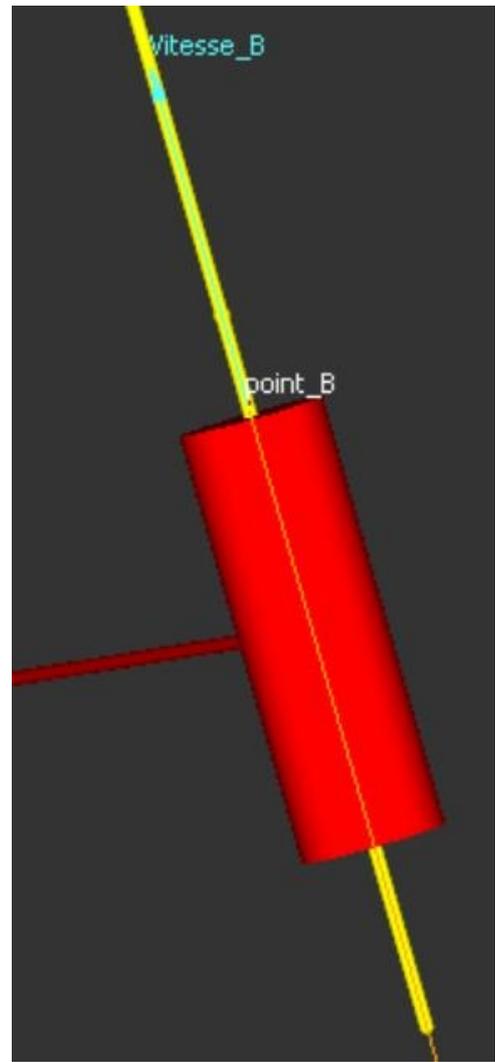
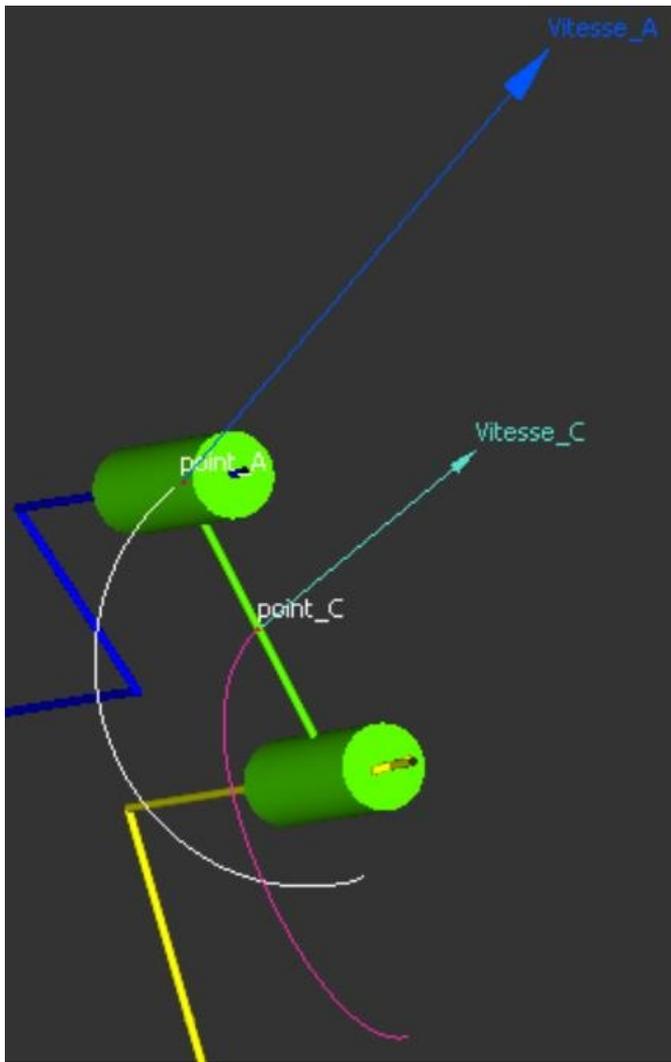
V-5-1 : Les courbes des points :

Dans cette simulation, nous avons inséré dans les trois points A, B et C :
Les différentes trajectoires ainsi les vitesses correspondantes.

- **Pour Exporter Les résultats**

☞ La commande « Export » présente dans le menu fichier, génère un document enregistrable.
Attention, le fichier généré n'est lisible qu'avec le module « OMC Graph ».





Références bibliographiques

- [1] Norton, Robert L. Design of machinery: an introduction to the synthesis and analysis and machines / Robert L. Norton - 2nd ed. p. cm. (McGraw-Hill series in mechanical engineering) ISBN 0-07-048395-7 ; 1999 .
- [2] Shahin S. Nudehi Ph.D., P.E., John R. Steffen Ph.D., P.E. , Analysis of Machine Elements Using SOLIDWORKS Simulation 2021, Published 2021.
- [3] Neil Sclater Nicholas P. Chironis , Mechanisms & mechanical Devices sourcebook, Third Edition, (McGraw-Hill series in mechanical engineering) ISBN 0-07-136169-3; 2001.
- [4] Myszka, David H. Machines and mechanisms : applied kinematic analysis 4th ed. ISBN-13: 978-0-13-215780-3, 2012 .
- [5] V. Arakélian; "Structure et cinématique des mécanismes"; Editeur Hermes, (Cote L/531.446 : Bibliothèque universitaire de Guelma).
- [6] Lajoie. Michel, "Mécanique et mécanismes : cours, méthodes et exercices commentés"; Editeur: Ellipses; (cote L/531.465 : Bibliothèque universitaire de Guelma).
- [7] Gilbert Bals; "Schémas cinématique des mécanismes"; Editeur: Ellipses (Cote: L/531.315 : Bibliothèque universitaire de Guelma).
- [8] I. Artobolerski; "Les mécanismes dans la technique moderne T1 & T2"; Editeur: Mir; (Cote: L/531.282 : Bibliothèque universitaire de Guelma).
- [9] Marc Rossetto et Pierre Agati. Liaison, Mécanismes et Assemblage. 2ème édition,. Collection science Sup. Dunod 2001.
- [10] Marc Rossetto et Pierre Agati. Liaisons et Mécanismes. Dunod 1994.
- [11] Partick Beynet. Sciences industrielle pour l'ingénieur. Ellipse éd Marketing S.A., 2012.
- [12] Viguen Arakelian. Structure et cinématiques des mécanismes, Hermes 1997.
- [13] Artobolovsky I. I. Théorie des mécanismes et des machines Ed. Sciences Moscou 1988.
- [14] R. le Borzec et J. Lotterie. Principe de la théorie des Mécanismes, éd. DUNOD 1977.
- [15] Boudet- C. Bortolussi. Présentation des mécanismes Techniques de l'ingénieur- B 600/8600,1 – R. 1980.
- [16] Jean-Louis Fanchon. Guide des sciences et technologies industrielles. Ed. DUNOD 2014.
- [17] Marghitsu, Dan B. Kinematic chains and machine components design , Elsevier Academic Press. ISBN 0-12-471352-1 ; 2005.
- [18] Equipe pédagogique CONAN « INSA de Lyon », Polycopié de cours Conception et analyse des systèmes mécaniques.

- [19] Jean-Louis Fanchon. Guide de mécanique Sciences et technologie industrielle. Ed. NATHAN ;2001.
- [20] John J. Uicker , Jr. Et al. ; Theory of Machines and Mechanisms 5th Edition, Oxford University Press 2017.
- [21] Jean-Dominique Mosser et al , Sciences industrielles pour l'ingénieur 1ère année MPSI-PCSI-PTSI, ISBN 978-2-10-053788-4 : Edition DUNOD 2008 .
- [22] Modélisation de la cinématique d'un système complexe, Sciences industrielles pour ingénieurs ; Outils mathématiques (les vecteurs et les torseurs).
- [23] Lahoucine Ouakidi, Cours sciences industrielles 1ère année des classes préparatoires aux grandes écoles d'ingénieurs : Filière (MPSI-PCSI).
- [24] L. Romdhane. Analyse des Systèmes Mécaniques Cours de Tronc Commun ENIM (Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir); 2006.
- [25] Necaibia Y. Étude cinématique sous **Openmeca** d'une scie sauteuse, projet de fin d'étude, 3^{ème} Année LCM, Université de Guelma, 2021.