République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Département d'Electronique et Télécommunications

Polycopié du Cours

==

Asservissements et Régulation

==

3ième Année Licence Electronique

Présenté par :

M. BENJOUDI Salim

Dédicaces

A mes très chers parents

A ma très chère et adorable femme

A mes chers enfants

A mes frères et sœurs

Pour leur amour et leur soutien permanent, leur encouragement et leur aide et pour toute l'estime et la confiance qu'ils ont mise en moi.

A tous mes amis

Avant-propos

Ce polycopié de cours « d'Asservissements et Régulation » est destiné aux étudiants de la $3^{ième}$ licence d'électronique, d'automatique, d'électrotechnique, d'électromécanique. Son objectif est de donner aux étudiants une bonne connaissance des méthodes classiques d'étude des boucles d'asservissement, la modélisation des processus physiques, l'analyse des performances en boucle ouverte et fermée ainsi que la synthèse des correcteurs. La structure de ce polycopié est inspirée du programme officiel du ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique. Ce cours a résumé d'une façon très simple se sorte à permettre aux étudiants de comprendre facilement les bases théoriques de l'automatique. Les étudiants intéressés par ce cours sont censés avoir acquis les bases en traitement du signal, de l'électronique fondamentale 1, les modules de Maths 1, 2 et 3 qui sont des prérequis pour cette matière d'Asservissements et Régulation.

Table des Matières

Définition et histoire de l’automatique

- ## Définition de l’automatique

Aujourd'hui et d’après le dictionnaire le Nouveau Petit Robert :

« L'automatique est l’ensemble des disciplines scientifiques et des techniques utilisées pour la conception de la commande et du contrôle des processus »

• L'automatique a donc notamment pour but : Le développement "intelligent" de lois de commande automatiques, c'est-à-dire ne nécessitant plus l'intervention humaine une fois conçues.

- ## Histoire de l'automatique

Les sciences, ou plutôt La Science, n'a pas de commencement, les objets et les concepts existent bien avant leur découverte, cependant nous allons considérer quelques périodes du développement de l'automatique.

L’histoire des asservissements ou des systèmes automatisés peut être divisée en trois grandes périodes.

- ## Première période (La préhistoire de l’automatique) : de l’antiquité au milieu du XIXème siècle

Cette période est marquée par :

- L’horloge à eau de ***CTESIBIOS***. Le premier moyen fiable de mesure du temps. Son principe de fonctionnement est de maintenir à un niveau constant l'eau dans un réservoir. Ce niveau d'eau constant permet d'obtenir un débit constant au fond du réservoir qui remplit un second réservoir à vitesse constante. La clepsydre fut inventée par le mécanicien grec appelé ***CTESIBIOS*** à Alexandrie (en Égypte) en l’année (– 270) avant J.-C.

- Les études de ***PHILON*** de Byzance sur la nature de l'air, sur ses rapports avec l'eau et le vide, sur l'équilibre des liquides dans les vases communicants, sur les siphons, l’ont amené à créer des objets extraordinaires à base uniquement de leviers et des tuyaux percés. C'est ainsi qu'il construit des fontaines intermittentes, des vases à deux liquides,

des automates, et proposa ainsi des versions évoluées de l'horloge hydraulique de ***CTESIBIOS.***

- Le premier siècle après J.-C a été marqué par l'invention du système de porte automatique par l'ingénieur grec ***HERON*** d'Alexandrie.
- Plusieurs siècles plus tard, en ***1763 JAMES WATT*** inventa son moteur à vapeur. Quand ***ROEBUCK*** fit faillite en ***1773***, ***J. WATT*** collabora avec ***MATTHEW BOULTON*** un homme d'affaires de Birmingham. Pendant plus d'une décennie les usines de ***BOULTON*** ont continuer à produire et vendre les moteurs de ***WATT*** aux mineurs qui les utilisaient pour pomper l'eau de leurs mines.
- En 1788, l'ingénieur écossais ***J. WATT*** invente un régulateur à boules qui a pour but de maintenir, constante, la vitesse de rotation d'une turbine à vapeur.
- En 1801, le français Joseph-Marie Jacquard invente son métier à tisser à cartes perforées.

- **Deuxième période (L'époque classique) (du XIX e siècle au XX e siècle)**

  - Le laboratoire "Bell" étudia le comportement des systèmes de communication (**1910-1930**) dans le domaine fréquentiel. Les bases théoriques de cette approche furent énoncées par les mathématiciens ***CAUCHY***, ***LAPLACE*** et encore ***FOURIER***. Les travaux de ce dernier jouent d'ailleurs un rôle prépondérant dans la transmission de signaux (série de ***FOURIER***, transformée de ***FOURIER***).
  - Les travaux scientifiques de ***HAZEN*** publiés dans les années 1930 dans son ouvrage "Théorie des servomécanismes") permirent de progresser dans ces domaines. Ses théories introduisent une relation maître/escalve dans les systèmes. Les bombardiers de la seconde guerre mondiale étaient conçus selon ces principes et étaient capables de traiter les informations concernant l'altitude de l'appareil, la force du vent afin de gagner en précision lors des actions aériennes.
  - Cette deuxième période de l'automatique, à partir du XIX e siècle, s'est caractérisée par la théorie du bouclage et par les applications de l'algèbre de Boole. Les premiers travaux sur le bouclage sont dus au physicien écossais Maxwell (en 1868), au mathématicien anglais ***ROUTH*** (en 1872) et au

mathématicien allemand ***HURWITZ*** (en 1890), qui ont tous deux donné leur nom aux critères algébrique de stabilité.

- En 1868, **J. C. MAXWELL** présenta à la Royal Society de Londres une communication ayant pour titre « On Governors » ; dans laquelle il faisait une analyse mathématique de l'instrument que James Watt avait imaginé, environ 100 ans auparavant, pour réguler la vitesse des machines à vapeur, encore balbutiantes. Ceci fait penser que la pratique de l'automatique a presque un quart de millénaire.
- L'étude analytique de la stabilité du régulateur de Watt fut initiée par Maxwell en 1868 et complétée en 1876 par ***WICHNEGRADSKY***. L'étude des systèmes bouclés doit beaucoup à l'approche fréquentielle de ***NYQUIST, BODE, BLACK, NICHOLS, HALL et EVANS***, qui ont donné leur nom à des représentations et ont publié la plupart de leurs résultats à la fin de la seconde guerre mondiale.

- ## Troisième période (Les prémisses de l'ère moderne)

- En **1948**, les russes ont manifesté beaucoup d'intérêt à l'étude des systèmes non linéaires (LYAPUNOV), ces études fut focalisée sur les techniques liées au domaine temporel.
- L'URSS était en **1960** un pôle de créativité très important dans le domaine des théories automatiques et la première conférence internationale du contrôle automatique (IFAC) s'est tenue à MOSCOU en 1960 c'est-à-dire trois ans après le lancement du premier satellite artificiel terrestre : Spoutnik 1 (1957).
- Le mathématicien ***BERNOUILLI*** fut le premier à mentionner le principe d'optimalité au $18^{ième}$ siècle.
- R. Bellman appliqua en 1957 la programmation dynamique au contrôle optimal de systèmes temporels discrets.
- En 1958 L.S. ***PONTRYAGIN*** énonça le principe maximum qui permit la résolution des problèmes de contrôles optimaux. Il résolu aussi le problème du temps minimum.

- Dans les années 60 R. ***KALMAN*** assisté de ***BUCY*** développa son filtre continu après avoir publié trois ouvrages fondamentaux récapitulant et perfectionnant les théories automatiques du domaine temporel.
- Le premier texte (***KALMAN*** et ***BERTRAM*** 1960) faisait la synthèse des travaux du russe ***LYAPUNOV***, le second (***KALMAN*** 1960) a traitait le contrôle optimal des systèmes du régulateur quadratique linéaire (LQR).

Aujourd’hui, et avec l’apparition des ordinateurs et des calculateurs numériques le monde de l’automatique se voit révolutionner. La puissance de calcul disponible a fait naître les méthodes dites de l’automatique « moderne ».

Rappels sur la Transformée de Laplace

1.1. Introduction

La transformée de **Laplace** (T.L.) transforme les équations différentielles en des équations algébriques en p ; la solution de ces équations différentielles est obtenue par simples manipulations algébriques dans le domaine des p.

Toutefois pour obtenir la solution temporelle, il est nécessaire d'inverser la solution en p obtenue. Aujourd'hui pour la plu part des travaux d'asservissement l'information obtenue dans le domaine des p est largement suffisante au point qu'il est inutile de revenir à l'espace temporel.

1.1.1. Définition

A toute fonction du temps x(t) définie pour t>0, on fait correspondre une fonction X(p) de la variable complexe p ($p=\sigma+j\omega$) qu'on appelle transformée de **Laplace** de x(t), définie par :

$$\boxed{X(p)=L\{x(t)\}=\int_{0}^{\infty} x(t)\, e^{-pt}\, dt} \qquad \textbf{(1.1)}$$

Où $p=\sigma+j\omega$ est un nombre complexe à priori indéterminé, on dit que la correspondance entre x(t) et X(p) est biunivoque ; c'est à dire :

$$\boxed{X(p)=L\{x(t)\} \qquad \text{et} \qquad x(t)=L^{-1}\{X(p)\}} \qquad \textbf{(1.2)}$$

- **<u>Exemples</u> :** Consulter le tableau des transformées.

La transformée de **Laplace** existe si l'intégrale **(1)** existe ; c'est à dire si **x(t)** est intégrable et ne croit pas plus vite pour t infini qu'une exponentielle ; si la partie réelle de **p** (**Re(p)**) est prise suffisamment grande, le facteur e^{-pt} forcera $\mathbf{e^{-pt}}$ **f(t)** à tendre vers zéro et l'intégrale à converger. La valeur de **Re(p₀) = σ₀** à laquelle doit être supérieure **Re(p)** est dite seuil de définition de la transformée de Laplace de x(t).

1.1.2. L'unicité

Si deux fonctions continues **f(t)** et **g(t)** possèdent la même image **F(p)**, elles sont identiquement égales pour **$t \geq 0$.**

1.2. Les transformées de Laplace de quelques signaux

Les signaux d'excitation utilisés généralement pour évaluer les performances des asservissements sont : ***l'échelon, la rampe, l'impulsion de Dirac, la fonction porte, la fonction exponentielle décroissante*** et enfin le ***signal sinusoïdal***.

- **La transformées de l'échelon**

$$\mathbf{x(t)=a\ u(t)} \quad \Longleftrightarrow \quad X(p)=\frac{a}{p} \qquad \textbf{(1.3)}$$

Remarque : Pour calculer F(p) le terme p est vu comme une constante assurant la convergence de F(p), par conséquent si **p>0** alors **$e^{-\infty t} \to 0$** et **$e^{-0t} \to 1$.**

- **La transformées du signal rectangulaire (fenêtre)**

$$x(t) = a.\mathrm{rect}\,\{(t - T/2)/T\} \quad \Longleftrightarrow \quad X(p)=\frac{a.(1-e^{-Tp})}{p} \qquad \textbf{(1.4)}$$

- **La transformées de l'impulsion de Dirac**

$$x(t) = a.\delta(t) = a.u_1(t) \quad \Longleftrightarrow \quad X(p)=a \qquad \textbf{(1.5)}$$

- **La transformées de la fonction exponentielle décroissante**

$$x(t) = e^{-\alpha t}.u(t) \quad \Longleftrightarrow \quad X(p)=\frac{1}{p+\alpha} \qquad \textbf{(1.6)}$$

- **La transformées du signal sinusoïdal**

$$x(t) = \sin(t).u(t) \quad \Longleftrightarrow \quad X(p)=\frac{1}{p^2+1} \qquad \textbf{(1.7)}$$

1.3. Les propriétés de la transformée de Laplace

1.3.1. La linéarité

$$\boxed{L\left\{\sum_{i=1}^{i=n}\lambda_i.x_i(t)\right\}=\sum_{i=1}^{i=n}\lambda_i.X_i(p)} \tag{1.8}$$

1.3.2. Translation (Retard)

$$\boxed{L\{x(t-t_0).u(t-t_0)\}=e^{-pt_0}X(p)} \tag{1.9}$$

1.3.3. Le changement d'échelle

$$\boxed{L\{x(at).u(t)\}=\frac{1}{|a|}X\left(\frac{p}{a}\right)} \tag{1.10}$$

- **Exemple**

$$L\{\sin(t).u(t)\}=\frac{1}{p^2+1} \quad \text{et} \quad L\{\sin(\omega t).u(t)\}=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

1.3.4. La multiplication par e^{-ct} :

$$\boxed{L\left\{e^{-ct}.x(t).u(t)\right\}=X(p+c)} \tag{1.11}$$

- **Exemple**

- Si $L\{t^n.u(t)\}=\dfrac{n!}{p^{n+1}}$ $\quad alors \quad$ $L\{t^n.e^{-at}.u(t)\}=\dfrac{n!}{(p+a)^{n+1}}$

  et celle de $\quad L\left\{e^{-\alpha t}.\sin(\omega t).u(t)\right\}=\dfrac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$

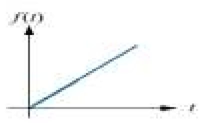
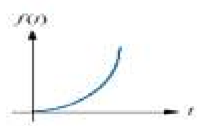
1.2.5. La transformée de la dérivée

$$\boxed{L\{x'(t)\}=pX(p)-x(0)} \tag{1.12}$$

Par extension on démontre :

- $L\{x''(t)\} = p^2X(p) - px(0) - x'(0)$
- $L\{x^{(3)}(t)\} = p^3X(p) - p^2x(0) - px'(0) - x''(0)$
-

N°	**f(t)**	**F(p)**
1.	$\delta(t)$	1
2.	$u(t)$	$\frac{1}{p}$
3.	$tu(t)$	$\frac{1}{p^2}$
4.	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
5.	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{p+a}$
6.	$\sin \omega t u(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
7.	$\cos \omega t u(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$

Entrée	Fonction	Description	Croquis	Utilisation
Impulsion	$\delta(t)$	$\delta(t) = \infty$ pour $0- < t < 0+$ $= 0$ *Ailleurs* $\int_{0-}^{0+} \delta(t)\,dt = 1$		Modélisation de la réponse transitoire
Echelon	$u(t)$	$u(t) = 1$ pour $t > 0$ $= 0$ pour $t < 0$		Réponse transitoire - Erreur en régime permanent
Rampe	$tu(t)$	$tu(t) = t$ pour $t \geq 0$ $= 0$ *Ailleurs*		Erreur en régime permanent
Parabole	$\frac{1}{2}t^2u(t)$	$\frac{1}{2}t^2u(t) = \frac{1}{2}t^2$ pour $t \geq 0$ $= 0$ *Ailleurs*		Erreur en régime permanent
Sinusoïde	$\sin \omega t$			Modélisation de la réponse transitoire Erreur en régime permanent

$$\boxed{L\left\{x^{(n)}(t)\right\} = p^{n} X(p) - \sum_{i=0}^{i=n-1} p^{(n-i-1)} x^{(i)}(0)} \tag{1.13}$$

1.2.6. La multiplication par t

$$\boxed{L\{\, t.x(t).u(t)\,\} = -\frac{d}{dp}\{X(p)\}} \tag{1.14}$$

- **Exemple**

Comme L{1.u(t)} = 1/p = p^{-1} alors L{t^n.u(t)} = n ! / (p^{n+1}) et celle de :

$$\boxed{L\{\, t^{n}.x(t).u(t)\} = (-1)^{n} \frac{d^{n}}{dp^{n}}\{X(p)\}} \tag{1.15}$$

1.2.7. La transformée de l'intégrale

$$\boxed{L\{\int_0^t x(t).dt\} = L\left\{x^{-1}(t)\right\} = \frac{X(p)}{p} + \frac{x(0)}{p}} \tag{1.16}$$

Par extension

- ✓ $L\left\{\iint x(t).dt\right\} = L\left\{x^{-2}(t)\right\} = \frac{X(p)}{p^{2}} + \frac{x^{-1}(0)}{p^{2}} + \frac{x^{-2}(0)}{p}$
- ✓

$$\boxed{L\left\{\iint \ldots\int x(t).dt.\right\} = L\left\{x^{-n}(t)\right\} = \frac{X(p)}{p^{n}} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{x^{(-n+i-1)}(0)}{p^{i}}} \tag{1.17}$$

1.2.8. Théorème de la valeur finale

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{p \to 0} p.X(p)} \tag{1.18}$$

1.2.9. Théorème de la valeur initiale

$$\boxed{\lim_{t \to 0} x(t) = \lim_{p \to \infty} p.X(p)} \tag{1.19}$$

1.2.10. Théorème du produit de convolution

$$\boxed{L\{x_1(t) * x_2(t)\} = X_1(p).X_2(p)} \qquad \textbf{(1.20)}$$

Donc si $X_1(p)$ <═══> $x_1(t)$ et $X_2(p)$ <═══> $x_2(t)$

alors :

$$\boxed{L^{-1}\{X_1(p).X_2(p)\} = x_1(t) * x_2(t) = \int_0^t x_1(\tau).x_2(t-\tau)d\tau} \qquad \textbf{(1.21)}$$

- **Exemple :** Trouver la transformée inverse de : $F(p) = \dfrac{1}{p^2(p+1)^2}$

En posant : $X_1(p) = \dfrac{1}{p^2}$ et $X_2(p) = \dfrac{1}{(p+1)^2}$ on aura alors : $x_1(t)$=t.u(t) et $x_2(t)$ = te^{-t} u(t)

et par conséquent :

$$L^{-1}\{F(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2(p+1)^2}\right\} = \int_0^t \tau e^{-\tau}(t-\tau)d\tau = (t - te^{-t} + 2e^{-t} - 2).u(t)$$

1.2.11. La transformée d'une fonction périodique

Si $X_m(p)$ <═══> $x_m(t)$ et $x_{pT}(t)$ est la fonction T-périodique de motif $x_m(t)$, on démontre alors que :

$$\boxed{L\{x_{pT}(t)\} = X_{pT}(p) = \frac{X_m(p)}{(1-e^{Tp})}} \qquad \textbf{(1.22)}$$

N°	Théorème		Nom
1.	$\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$	$= \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$	Définition
2.	$\mathcal{L}[kf(t)]$	$= kF(s)$	Théoreme de linéarité
3.	$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)]$	$= F_1(p) + F_2(p)$	Théoreme de linéarité
4.	$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)]$	$= F(p + a)$	Translation fréquentielle
5.	$\mathcal{L}[f(t - T)]$	$= e^{-pT}F(p)$	Translation temporelle
6.	$\mathcal{L}[f(at)]$	$= \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$	Changement d'échelle
7. $F(p)$	$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right]$	$= pF(p) - f(0-)$	Théoreme de dérivation
8.	$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right]$	$= p^2F(p) - pf(0-) - \dot{f}(0-)$	Théoreme de dérivation
9.	$\mathcal{L}\left[\frac{d^nf}{dt^n}\right]$	$= p^nF(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k}f^{k-1}(0-)$	Théoreme de dérivation
10.	$\mathcal{L}\left[\int_{0-}^{t} f(\tau)d\tau\right]$	$= \frac{F(p)}{p}$	Théoreme d'intégration
11.	$f(\infty)$	$= \lim_{s \to 0} pF(p)$	Théoreme de la valeur finale
12.	$f(0+)$	$= \lim_{s \to \infty} pF(p)$	Théoreme de la valeur initiale

1.3. La transformée inverse de Laplace

Le principe de la méthode consiste à décomposer X(p) en éléments simples (en vertu de la propriété de linéarité), puis à écrire les transformées inverses des différents termes de la décomposition et à les ajouter.

1.3.1. Décomposition en éléments simples

La décomposition en éléments simples dépend du type et du nombre de multiplicité des racines du dénominateur *Den(p)* (pôles) de la transformée de Laplace X(p) dont *Num(p)* et *Den(p)* sont des polynômes en p de degré respectif m et n. Les systèmes réels se font représenter par des X(p) dont le degré du numérateur **n** est supérieur à celui du dénominateur **m**.

Soit : $$X(p) = \frac{Num(p)}{Den(p)}$$

Supposons que : $Den(p) = \prod_{i=1}^{i=n}(p + p_i)$ où les ($-p_i$) sont des racines réelles ou des paires de racines complexes simples ou multiples. Considérons alors chaque cas séparément :

- **Cas où *Den(p)* a des racines réelles simples**

Dans ce cas X(p) peut s'écrire sous la forme :

$$X(p) = \frac{Num(p)}{Den(p)} = \frac{\prod_{j=1}^{j=m}(p+p_j)}{\prod_{i=1}^{i=n}(p+p_i)}$$

Qui une fois décomposée donne :

$$x(t) = L^{-1}\left\{\frac{Num(p)}{Den(p)}\right\} = L^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{i=n}\frac{A_i}{(p+p_i)}\right\} \quad \textbf{(1.23)}$$

Les coefficients A_i sont appelés résidus aux pôles (p = - p_i).

Pour évaluer les A_i, multiplions X(p) dans l'équation (3) par (p + p_i) et faisons tendre p vers **-p_i**, ce qui donne :

$$A_i = \lim_{p\to -p_i}(p+p_i)X(p) \quad \textbf{(1.24)}$$

et à partir de l'équation (4) nous obtenons :

$$x(t) = L^{-1}\{X(p)\} = L^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{i=n}\frac{A_i}{(p+p_i)}\right\} = \sum_{i=1}^{i=n}A_i e^{-p_i t} \quad \textbf{(1.25)}$$

- **Cas où Den(p) a des racines réelles multiples**

Pour des raisons de simplification, on supposera que seul le pôle (-p_1) est r fois multiple tandis que tous les autres pôles sont simples. Dans ces conditions X(p) s'écrira comme suit :

$$X(p) = \frac{Num(p)}{(p+p_1)^r.(p+p_{r+1}).......(p+p_n)} \quad \textbf{(1.26)}$$

Qui une fois décomposée donne :

$$X(p) = \lambda + \sum_{i=r+1}^{i=n}\frac{A_i}{(p+p_i)} + \sum_{j=r}^{j=1}\frac{B_j}{(p+p_1)^j} \quad \textbf{(1.27)}$$

Le λ (cas où m=n) s'obtient simplement par la division euclidienne longue. Les résidus A_i aux pôles (p = - p_i) se calculent de la même façon que précédemment, par contre ceux des racines multiples (B_j) s'obtiennent avec la relation suivante :

$$B_j = \frac{1}{(r-j)!} \lim_{p \to -p_1} \left[\frac{d^{(r-j)}}{dp^{(r-j)}} \left\{ (p+p_1)^r X(p) \right\} \right] \qquad avec \quad j = r : -1 : 1 \tag{1.28}$$

Ce qui donne à partir de l'équation (8).

$$x(t) = L^{-1}(X(p)) = \lambda\delta(t) + \sum_{j=r}^{j=1} \frac{B_j t^{(j-1)}}{(j-1)!} e^{-p_1 t} + \sum_{i=(r+1)}^{i=n} A_i e^{-p_i t} \tag{1.29}$$

- **Cas où Den(p) a des racines simples complexes conjugués**

Supposons que Den(p) possède une seule paire de racines complexes conjuguées, qu'on note : p_{11} = - (a + jω) et p_{12} = - (a - jω)

Donc une fois décomposée donne :

$$X(p) = \frac{A_1}{p+(a+j\omega)} + \frac{A_1^*}{p+(a-j\omega)} + \sum_{i=3}^{i=n} \frac{A_i}{(p+p_i)} \tag{1.30}$$

où A_1 et A_1^* sont les résidus aux pôles $p = -(a \pm j\omega)$ ces résidus forment eux aussi une paire complexes conjuguée.

La transformée inverse de Laplace de X(p) peut s'obtenir tout simplement en calculant :

$$x(t) = L^{-1}(X(p)) = L^{-1}\left(\frac{A_1}{p+(a+j\omega)} + \frac{A_1^*}{p+(a-j\omega)} + \sum_{i=3}^{i=n} \frac{A_i}{(p+p_i)} \right) \tag{1.31}$$

Pour évaluer les A_i, multiplions X(p) dans l'équation (3) par (p + p_i) et faisons tendre p vers p_i, ce qui donne :

$$A_i = \lim_{p \to \infty} (p+p_i) X(p)$$

et à partir de l'équation (4) nous obtenons :

$$x(t) = L^{-1}\{X(p)\} = L^{-1}\left(\frac{A_1}{p+(a+j\omega)} + \frac{A_1^*}{p+(a-j\omega)} \right) + \sum_{i=3}^{i=n} A_i e^{-p_i t} \tag{1.32}$$

$$x(t) = 2 * \mathrm{Re}\left[A_1 e^{-(a+j\omega)t} \right] + \sum_{i=3}^{i=n} A_i e^{-p_i t} \tag{1.33}$$

où $$A_1 = \lim_{p \to -(a+j\omega)} (p+a+j\omega) X(p) \tag{1.34}$$

Introduction sur les Asservissements

2.1. But et intérêts général

Les systèmes automatiques permettent avant tout de réaliser des opérations qui ne peuvent pas être confiées à l'homme, pour différentes raisons, parmi celles-ci nous citons :

- ✓ **Précision** nécessairement limitée dans le cas de l'intervention humaine,
- ✓ ***Le caractère pénible*** voir même impossible de taches à effectuer dans certains environnements (températures ⇗, températures ⇘, sous l'eau, en espace, pressions ⇗, pressions ⇘ etc.…
- ✓ **La complexité** à partir d'une certaine échelle (grand nombre de paramètres) la commande manuelle n'est plus envisageable,
- ✓ **La répétitivité** de taches dénuées d'intérêts,
- ✓ La recherche d'une diminution des coûts par l'augmentation des **rendements** : en particulier la robotisation permet de diminuer notablement la part relative de la main d'œuvre dans le prix de revient,
- ✓ La recherche de **performances élevées** (productivités, coût, qualité, régularité des produis, rapidité des réponses, etc.…) voir des **performances optimales**.

Au cours des dernières années, les systèmes de commande automatiques ont joué un rôle important dans le développement et le progrès de la technologie moderne.

Aujourd'hui ces systèmes sont présents partout (appareils à utilisation domestiques, secteurs industriels, chaînes de montage automatiques, la robotique, les technologies spatiales, même les systèmes économiques et sociaux aujourd'hui sont approchés par la théorie des systèmes de commande.

2.2. Les systèmes et les systèmes asservis

2.2.1. Les systèmes

Un système est un ensemble d'éléments physiques ou abstraits possédant chacun sa structure propre, reliés entre eux de façon telle qu'un (des) effet (s) (sortie(s)s se produise (ent) à partir d'une (des) cause(s) (entrée (s).

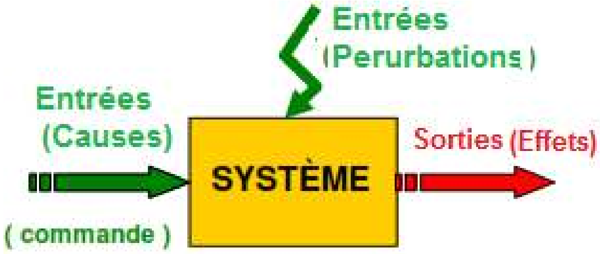


Figure 2.1 : Système de cause à effet

<u>Note :</u>

- Chaque élément est un système en soi mais on l'appelle un sous-système du système global,
- Chaque système a une ou des entrées principales et une ou des sorties principales, une ou des entrées secondaires et une ou des sorties secondaires figure (1).
- Analyser un système : c'est expliquer son comportement et expliciter les relations qui existent entre ses divers composants.
- Faire la synthèse (concevoir) un système c'est réaliser un système qui produit l'effet (la sortie) voulu (e) à partir d'une entrée donnée.

2.2.1.1. Les systèmes en <u>B</u>oucle <u>F</u>ermée (BF) et en <u>B</u>oucle <u>O</u>uverte (BO)

Un système est appelé en <u>B</u>oucle <u>F</u>ermée (BF) (ou à retour ou à Feedback) si sa sortie réagit sur son entrée selon le schéma général de la figure (2) :

- On parlera de retour unitaire, si la sortie réagit directement sur l'entrée (sans être modifiée) figure (2b), et à retour non unitaire, si la sortie est modifiée par le sous-système trois **(s/s3) ou K(p)** avant d'affecter l'entrée figure (2a)
- On parlera de retour négatif, si la sortie modifiée ou pas est soustraite de l'entrés à travers un comparateur et de retour positif si la sortie s'additionne à l'entrée figure (2a) et (2b).
- S'il n'existe pas de retour, comme c'est le cas dans les figures (3a) et (3b), ci-dessus le système est dit à boucle ouverte.

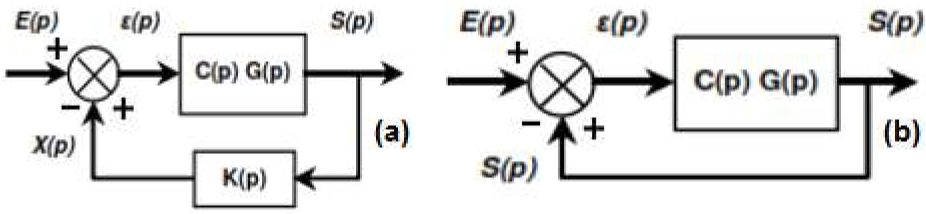


Figure 2.2 : (a) Système en boucle fermée à retour non unitaire **(b)** à retour unitaire

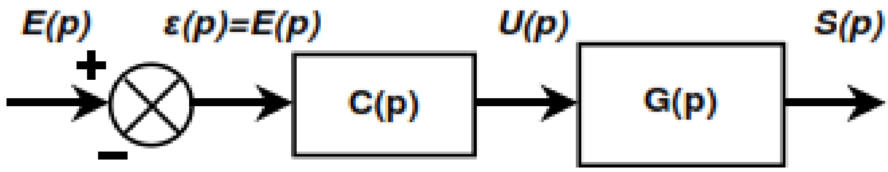


Figure 2.3 : (a) Système en boucle ouverte

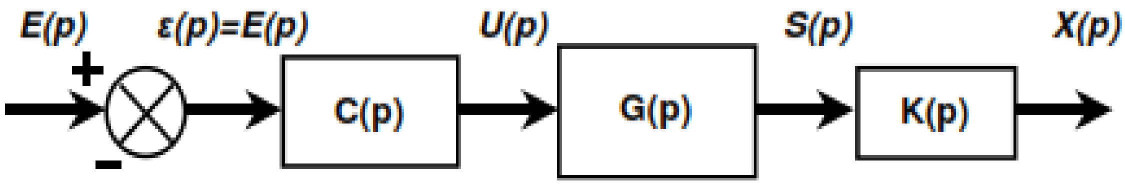


Figure 2.3 : (b) Système en boucle ouvert

2.2.2. Les systèmes asservis (asservissements)

Plusieurs définitions de l'asservissement peuvent être trouvées dans la littérature, et elles sont très voisines les unes des autres

Un asservissement est un ***système de commande*** possédant ***une boucle de retour*** et ***une amplification de puissance***.

- **Remarque**

La branche de retour peut remplir un second rôle, soit celui de conférer au système des performances spécifiées par l'utilisateur. Cet aspect sera repris ultérieurement.

2.2.2.1. Les systèmes de commande

La notion de système on l'a déjà donnée, il ne reste qu'à lui rajouter celle de commande, afin de bien souligner la relation de cause à effet entre l'entrée et la sortie, le système en soi intéresse assez peu l'utilisateur, ce dernier le considère comme un simple moyen de transformer une entrée en une sortie que lui, l'utilisateur juge désirable.

La commande consiste donc à exercer une influence sur un ou plusieurs éléments de ce système pour réaliser une tache déterminée. Il existe deux types de commande :

2.2.2.2. La commande manuelle : (Sans amplification de puissance)

La commande est dite manuelle lorsque l'influence est exercée par l'homme lui-même.

- ***Exemple de la montre*** : remonter une montre est effectué sans amplification de puissance.

Une chaîne sans amplification de puissance est réversible ce qui signifie que la sortie peut influencer l'entrée (d'où une perte de contrôle)

- **Exemple** : Barrer un voilier ou un navire.

2.2.2.3. La commande avec amplification de puissance :

- **Exemple** : Barrer un pétrolier c'est faire obligatoirement appel à l'assistance d'un autre élément, par exemple un moteur hydraulique.

- **Conclusion**

Une chaîne de commande munie **d'un amplificateur** de puissance est **dite unilatérale**. La sortie ne peut en aucun cas influencer l'entrée, la maîtrise du système est donc meilleure.

2.2.3. Les perturbations

La direction prise par le navire sera fonction de l'angle de la barre mais aussi des courants de la houle, du vent, etc.

Un four aussi bien calorifugé soit-il été toujours le siège de fuites thermiques.

Un système est donc toujours perturbé, et de ce fait à une commande d'entrée ne correspondra pas toujours l'effet escompté.

- **Conclusion** :

La direction d'un système n'est ni prise, ni sûre d'où la nécessité **d'une boucle de retour**.

Au vu de cette analyse, il est clair que pour fonctionner correctement, un automatisme doit pouvoir réagir aux aléas externes (Perturbations externes) et pallier les carences du modèle (Perturbations internes).

Assurer cette faculté d'adaptation est précisément le rôle ***de la boucle de retour***.

Son principe de fonctionnement consiste simplement à :

- ***Observer le résultat de la commande sur la sortie à l'aide de capteurs,***
- ***Comparer ce résultat à la valeur désirée pour cette sortie,***
- ***Agir pour contrer l'écart constaté.***

2.2.4. Une boucle de retour

Puisque le système asservi est destiné à produire telle sortie à partir de telle entrée, il doit posséder une façon de vérifier si cette sortie se comporte comme prévue ou pas, cette mesure de la sortie se fait par la boucle de retour et la comparaison de la sortie avec l'entrée est effectuée par le détecteur d'écart (comparateur).

Dans bien des cas la mesure de la sortie introduit un retour non unitaire soit pour changer le niveau de sortie (en l'atténuant ou en l'amplifiant) avant d'effectuer la comparaison avec l'entrée, soit pour rendre compatible les unités de l'entrée et de la sortie.

Exemples

C'est ainsi que le système de chauffage d'une résidence est à retour unitaire puisque le thermostat (par le biais de sa lame bimétallique fait directement la différence entre la température désirée (l'entrée) et la température ambiante (sortie).

Par contre l'asservissement d'un moteur commandé par son champ ou par son armature est un système à retour non unitaire, car l'entrée du détecteur d'écart est une tension qui est l'image de la vitesse désirée du moteur et une autre tension qui est l'image de la vitesse réelle du moteur. Cette dernière tension est obtenue par exemple à l'aide d'une dynamo-tachymétrique entraîné par le moteur.

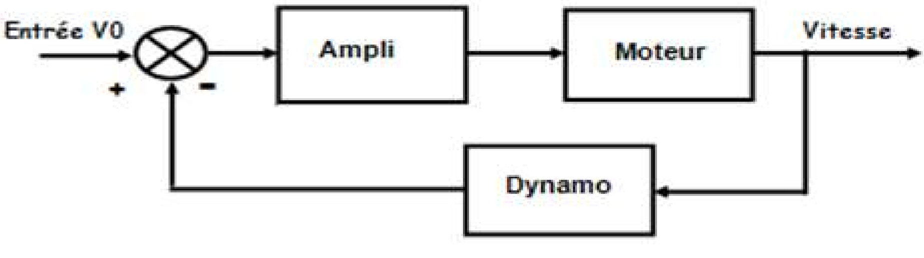


Figure 2.4 : Exemple d'asservissement de vitesse

2.2.5. L'amplification de puissance

Dans le cas de l'asservissement du moteur la détection de l'écart ε peut se faire par exemple à l'aide d'un amplificateur opérationnel dont la sortie ε (t) est d'un niveau de puissance tel qu'on ne jamais à alimenter le moteur à partir de cette tension, d'où la nécessité de la puissance c'est-à-dire d'un ou d'autres étages d'amplification.

Selon la définition adoptée un asservissement doit contenir une telle amplification de puissance, toutefois certains auteurs considèrent que cette condition n'est pas essentielle.

2.3. La représentation générale d'un asservissement

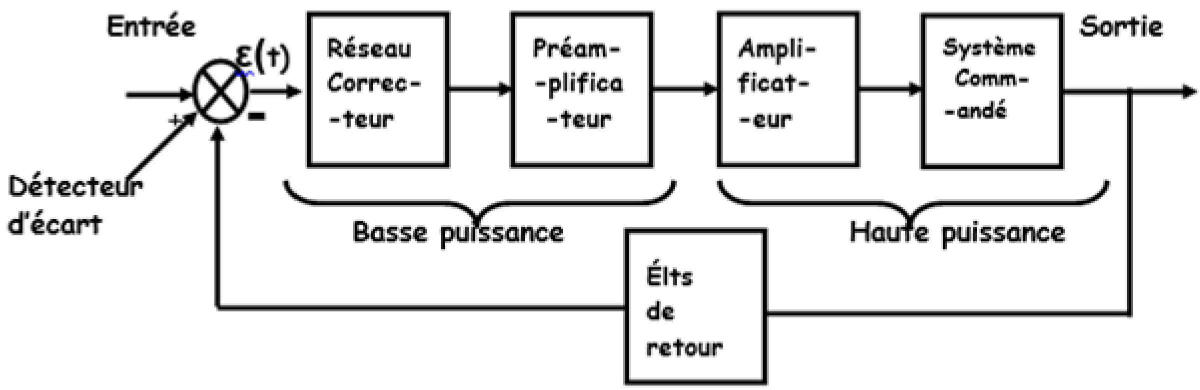


Figure 2.5 : Schéma général d'un asservissement

Il comprend des éléments déjà définis. Le système commandé, le détecteur d'écart l'élément de retour et l'élément d'amplification de puissance.

Le réseau correcteur a pour fonction de corriger le comportement du système c'est à dire de donner au système les performances demandées par l'utilisateur, parmi celles-ci on rencontre fréquemment : une stabilité, une grande précision en régime statique, une grande rapidité dynamique, un degré d'amortissement optimal, un, temps de réponse assez court.

La synthèse de ce réseau correcteur (lequel est parfois inséré dans la chaîne directe ou dans la chaîne de retour ou partiellement dans chacun de ces endroits est étudié au détail à la fin de cette deuxième partie de ce module.

2.4. Les systèmes suiveurs et les régulateurs

Parmi les systèmes asservis on distingue parfois ***les systèmes suiveurs et les régulateurs*** :

2.4.1. Un système suiveur (en anglais : TracKing system)

Est un système asservi qui tend à maintenir à un niveau le plus bas possible l'écart entre l'entée et la sortie et ce quelles que soient les variations de cette entrée.

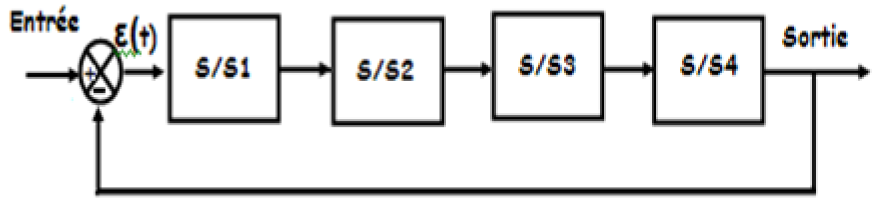


Figure 2.6 : Diagramme fonctionnel d'un système suiveur

2.4.2. Un système régulateur

Pour sa part le régulateur est un système asservi dans lequel l'entrée est constante (ou au moins constante par palier) et la sortie doit être la plus voisine possible de l'entrée malgré la présence de perturbation pouvant être appliquée en tout point de la chaîne.

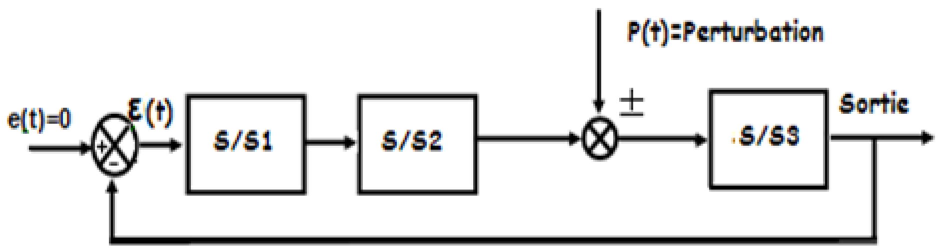


Figure 2.7 : Diagramme fonctionnel d'un système régulateur

En réalité cette distinction n'est pas aussi facile à faire qu'elle apparaît à prime, d'abord car bien des asservissements sont à la fois des systèmes suiveurs et des régulateurs, tel est le cas par exemple du système de poursuite radar, dans lequel l'orientation de la structure parabolique de l'antenne (la sortie) doit être faite en tout temps la plus voisine possible de l'avion ennemi (l'entrée) qui varie constamment et ce malgré les perturbations (d'un vent qui exerce des forces sur l'antenne).

2.5. C'est quoi un retour (feedback), et quels sont ses effets sur les systèmes ?

Le but recherché à travers l'utilisation d'un retour dans les exemples précédents est trop simplifié, car dans ces cas le retour a servi juste pour réduire l'erreur entre l'entrée de référence et la sortie réelle du système. Toutefois la réduction de l'erreur n'est qu'un parmi tant d'autres effets du retour sur le système. Son impact sur les performances du système de commande est plus complexe. Nous verrons dans la suite de ce chapitre que le retour a aussi des effets sur le gain, la stabilité, les perturbations, la sensibilité et la bande passante.

Afin d'estimer les différents effets du retour sur les performances du système et sans recourir aux fondements mathématiques de la théorie de la commande des systèmes linéaires que nous verrons par la suite, nous allons nous contenter tout simplement d'un système statique (ses éléments ont tous des gains indépendants de la fréquence).

Soit le système suivant :

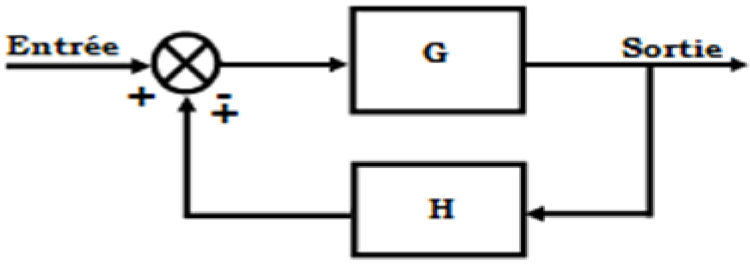


Figure 2.8 : Diagramme fonctionnel d'un système

$$\boxed{T = \frac{S}{E} = \frac{G}{1 \pm GH}} \qquad (2.1)$$

2.5.1. Effet du retour sur le gain total du système

Comme le gain du système sans retour est affecté du facteur $(1 \pm GH)$ et du fait que **GH** peut être **> 0** ou **< 0**, alors le gain total ***T*** peut ↱ou ↳. Mais en pratique **G** et **H** sont des fonctions de la fréquence, par conséquent l'amplitude (***module*** de $(1 \pm GH)$ peut être ***supérieur à 1 dans un domine des fréquences et inférieur à 1 dans un autre***.

Par conséquent :

Le retour peut augmenter le gain total T du système dans une certaine bande de fréquences et le réduire dans une autre.

2.5.2. Effet du retour sur la stabilité du système

La stabilité est la notion qui décrit si le système est capable de suivre l'entrée de commande ou pas, et d'une autre manière moins rigoureuse un système est dit instable, si sa sortie est « ***incontrôlable*** »

Pour estimer la stabilité nous devons revenir à l'exemple précèdent.

Si $\boldsymbol{GH = -1 \Longrightarrow S} \to \infty\ \forall \parallel \boldsymbol{E} \parallel < \infty$: et le système est dit instable. ***Donc le retour peut déstabiliser les systèmes initialement stables***.

Par conséquent le retour est une lame double tranchante, c'est à dire quand il est mal utilisé il peut nuire au bon fonctionnement du système. En plus il ne faut pas oublier qu'on s'intéresse ici qu'aux systèmes statiques. Mais en réalité **GH= -1,** n'est pas la seule condition d'instabilité, cette question fera l'objet d'un chapitre à part.

Toutefois on peut démontrer qu'une bonne utilisation du retour peut stabiliser les systèmes instables. Pour cela supposons que le système à retour non unitaire précèdent est instable à cause de $\boldsymbol{GH = -1}$ **.**

Introduisons maintenant un deuxième retour à travers un élément de gain **F**, comme le montre la figure (2.9) :

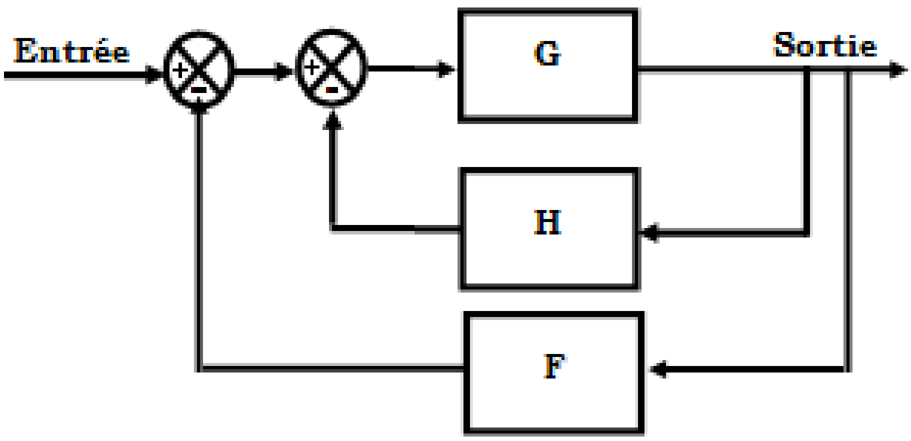


Figure 2.9 : Effet du retour sur la stabilité du système

$$\boxed{T = \frac{S}{E} = \frac{\frac{G}{1 \pm GH}}{1 + \frac{G}{1 \pm GH} \cdot F} = \frac{G}{(1+GH)+GF} \neq \infty} \qquad \textbf{(2.2)}$$

En pratique, ***GH = GH(f)*** et par conséquent la condition de stabilité de la boucle fermée dépend de l'amplitude et de la phase de ***GH.***

Conclusion

Le retour peut améliorer la stabilité d'un système ou la détruire, s'il est mal utilisé !

2.5.3. Effet du retour sur les perturbations externes et les bruits internes de mesure

Durant leur fonctionnement les systèmes physiques réels sont affectés par des signaux externes (perturbations) ou/et des bruits internes. Par conséquent, lors de leur conception ces considérations doivent être prises en compte afin que le système conçu soit sensible uniquement aux signaux de commande.

L'effet de retour sur les bruits et les perturbations dépend beaucoup de l'endroit où ces derniers affectent le système. Donc aucune conclusion générale ne peut être avancée. Toutefois, le retour peut réduire l'effet de ces signaux nuisibles au bon fonctionnement du système.

Pour évaluer son effet sur ces signaux, regardons le diagramme fonctionnel du système de la figure (**2.10**) :

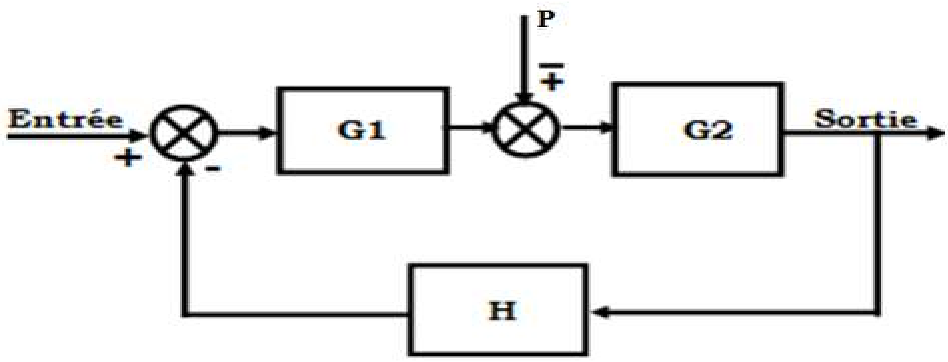


Figure 2.10 : Effet du retour sur les perturbations

P : bruits thermiques, rayonnements électromagnétiques, etc.

- En l'absence de retour **H=0**, la sortie **S** du système due, à la seule action **P** est :

$$\boxed{S = G_2 P} \tag{2.3}$$

- Mais en présence du retour, la sortie **S** du système, due à la seule action **P** est :

$$\boxed{S = \frac{G_2}{1+G_1G_2}P} \qquad (2.4)$$

Donc, en comparant les deux expressions précédentes, nous voyons bien que l'effet du bruit P est réduit du facteur $(1 + G_1G_2)$, si ce dernier est bien sûr supérieur à 1 et le système est toujours stable.

2.5.4. Effet du retour sur la sensibilité du système

Les considérations sur la sensibilité d'un système de commande sont importantes, et doivent être prises en compte lors de sa conception. Car tous les éléments physiques réels ont la propriété de changer avec le temps (âge) et l'environnement dans lequel ils opèrent.

Par conséquent nous ne pouvons pas prétendre de la stationnarité d'un système durant toute sa durée de vie. Mais seulement un bon système de commande doit rester plus sensible aux variations de ses entrées de commande qu'à celle de ses paramètres. Pour bien évaluer l'effet que peut avoir le retour sur la sensibilité d'un système aux variations de ses paramètres, revenons une deuxième fois au diagramme fonctionnel de la figure (12), mais cette fois ci, en supposant que son gain **G** varie.

La sensibilité du gain total **T** du système à la variation de **G** est défini par :

$$\boxed{S_G^T = \frac{\partial T/T}{\partial G/G} = \frac{\%\ de\ la\ variation\ de\ T}{\%\ de\ la\ variation\ de\ G}} \qquad (2.5)$$

Où ∂T est la variation de **T** provoquée par la variation ∂G de **G**.

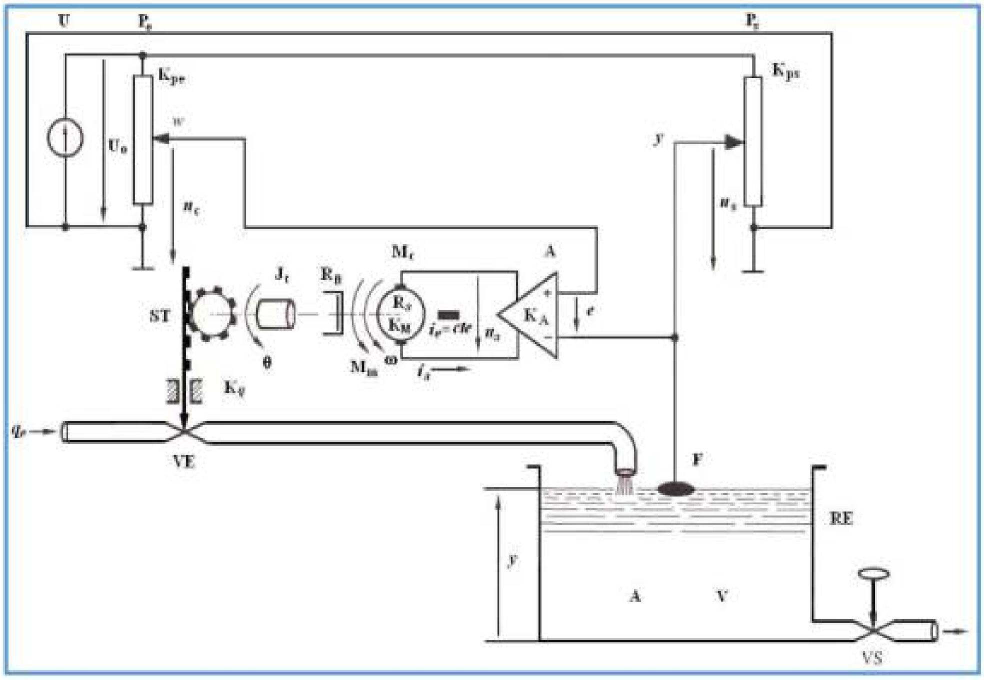
La fonction de sensibilité est donc :

$$\boxed{S_G^T = \frac{\partial T}{\partial G} \cdot \frac{G}{T} = \frac{1}{1+GH}} \qquad (2.6)$$

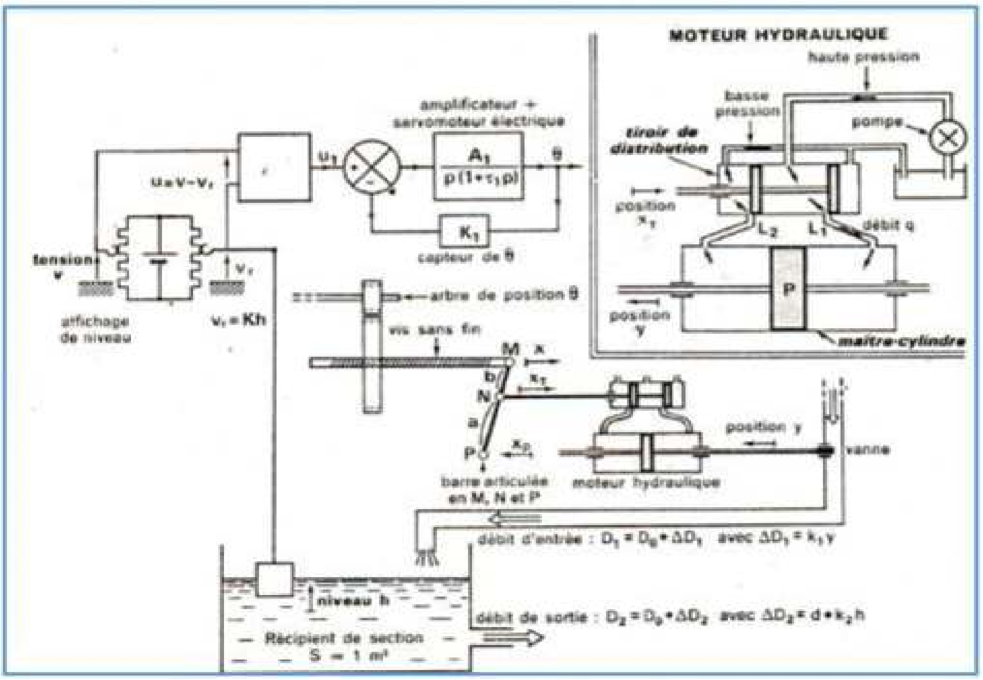
- En boucle ouverte, $S_G^T = 1$ car dans ce cas **T = G.**
- En boucle fermée, S_G^T diminue avec l'augmentation du produit **GH.**
- En réalité $GH = GH(f) \Rightarrow \| (1 + GH) \|$ peut parfois devenir inférieur à l'unité (***pour certaines fréquences***). Par conséquent le retour peut augmenter la sensibilité du système aux variations de ses paramètres.

Quelques exemples de systèmes asservis

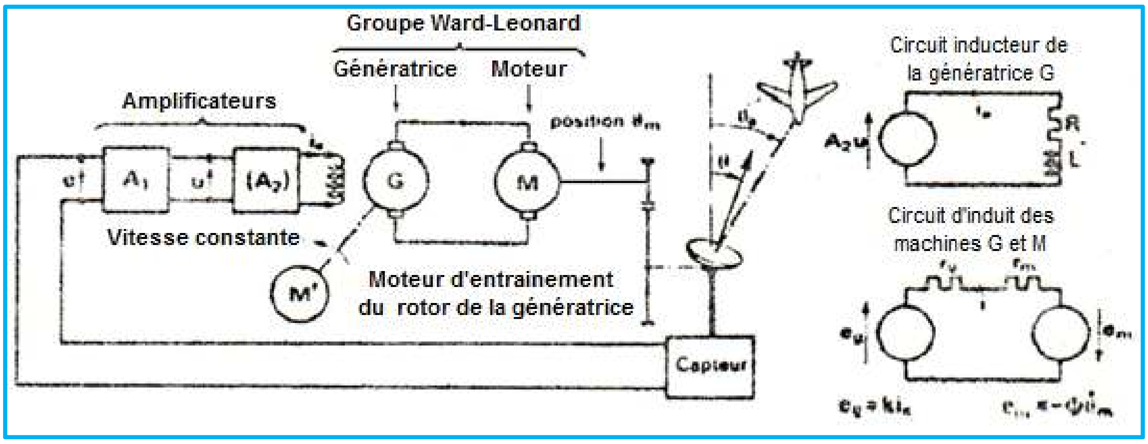
1. Asservissement de niveau dans un réservoir industriel



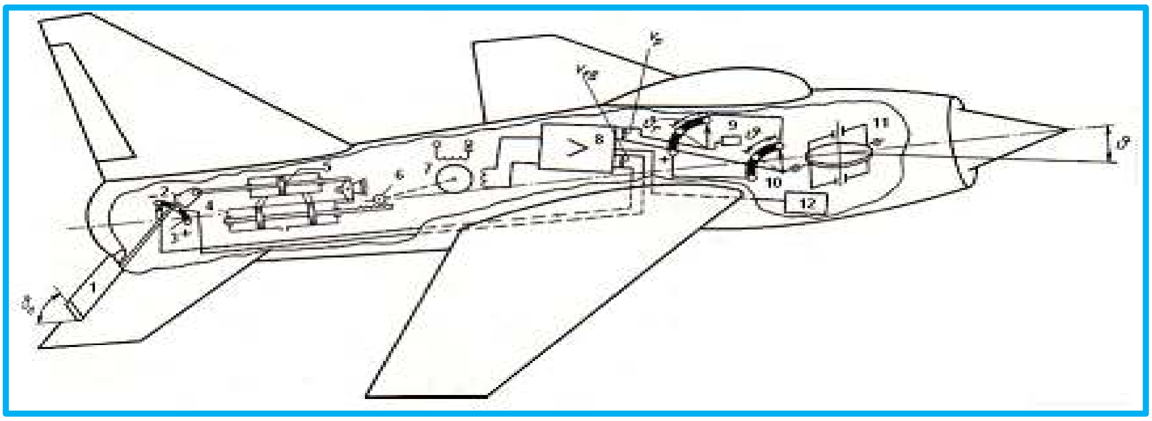
2. Asservissement de niveau dans un réservoir industriel



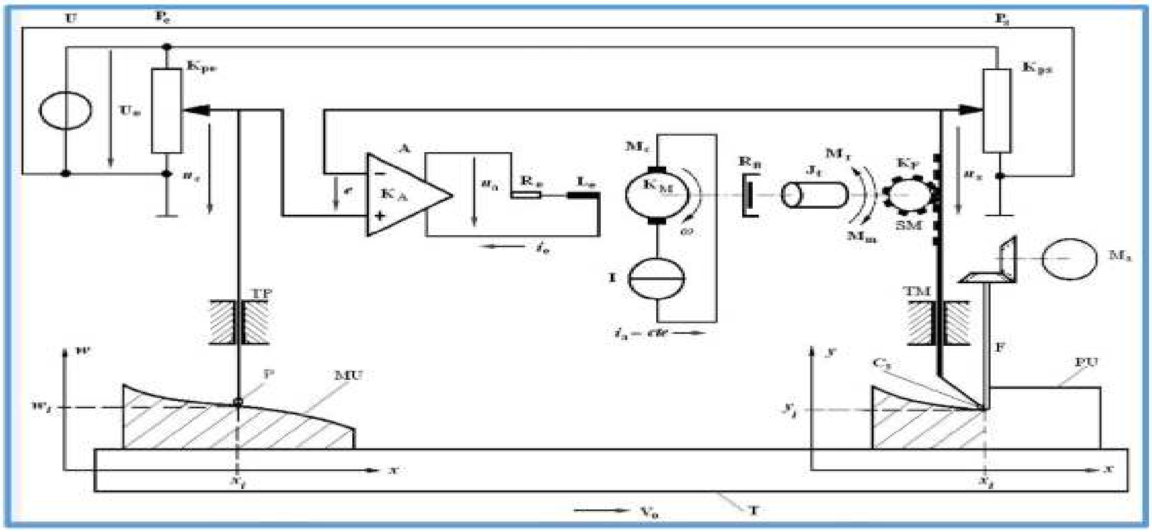
3. Asservissement de position de l'antenne d'un radar



4. Stabilisation automatique d'un avion



5. Asservissement de position dans une machine à outils copieuse



Modélisation des systèmes asservis linéaires

3.1. Les systèmes de traitement de l'information

3.1.1. Définition

Un système de traitement des signaux est un dispositif qui effectue sur un signal provenant de l'extérieur ou produit à l'intérieur un ensemble d'opérations de base telles que le filtrage, l'amplification, la modulation, une transformation non linéaire, la détection, l'estimation d'un paramètre, etc.

On appelle ces systèmes des processeurs du signal (en anglais : signal processor).

Ils peuvent être analogiques, numériques ou hybrides. On peut les classer-en :

- Générateur
- Transformateur de signal
- Analyseur de signal

Figure 3.1 : Les systèmes de traitement de l'information

3.2. Diagrammes (schémas) fonctionnels

Vu leur complexité, les systèmes de traitement sont souvent décomposés en schémas blocs, où chaque bloc est un opérateur fonctionnel qui représente une opération de base. L'exemple suivant illustre le principe de fonctionnement d'un analyseur de spectre.

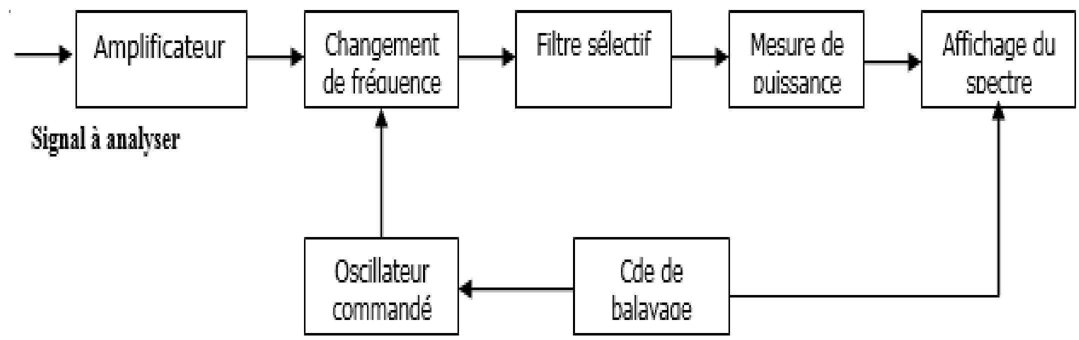


Figure 3.2 : Diagramme fonctionnel d'un analyseur de spectre

3.2.1. Opérateur fonctionnel

3.2.1.1. Définition

Comme un opérateur fonctionnel représente des opérations de base caractérisées par une grandeur de sortie dépendant d'une grandeur d'entrée ou d'une combinaison de grandeurs d'entrée. Donc il établit entre l'entrée x et la sortie y la relation :

$$\boxed{y = S(x)} \qquad \textbf{(3.1)}$$

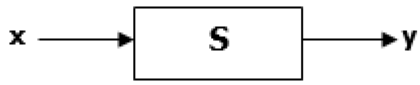


Figure 3.3 : opérateur fonctionnel

Si ses signaux sont analogiques on écrira : **y (t) = S(x(t))**. Ces opérateurs sont réalisés en technique analogique. Par contre si les signaux sont sous forme numérique ou plus généralement s'ils sont à temps discret, ils se laissent représentés par : **y(n) = S(x (n)).**

Ces opérateurs sont réalisés en techniques numériques câblées ou programmées.

3.3. Systèmes linéaires stationnaires (invariant)

Dans ce module nous nous intéressons exclusivement aux systèmes linéaires invariants dans le temps. De tels systèmes sont représentés sur les figures 3.4. (a) et 3.4. (b)

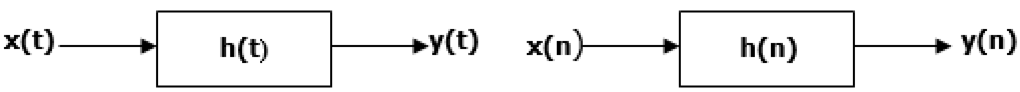


Figure 3.4 : Les différents systèmes linéaires invariants

3.3.1. Systèmes linéaires

Un système continu (discret) est linéaire si le signal d'entrée $ax_1(t) + bx_2(t)$ / $[ax_1(n) + bx_2(n)]$, produit le signal de sortie $ay_1(t) + by_2(t)$ / $[ay_1(n) + by_2(n)]$, a et b étant des constants arbitraires. Ici $x_1(t)$ et $x_2(t)$ / $[x_1(n)$ et $x_2(n)]$ sont des signaux arbitraires et $y_1(t)$ et $y_2(t)$ / $[y_1(n)$ et $y_2(n)]$ sont les signaux de sortie correspondants.

3.3.2. Invariance dans le temps

Un système continu (discret) est invariant dans le temps, si le signal d'entrée x(t-T) / [x(n-i)] produit le signal de sortie y(t-T) / [y(n-i)], T / [i] étant un retard / [entier] arbitraire, x(t) / [x(n)] est un signal d 'entrée arbitraire et y(t) / [y(n)] est le signal de sortie correspondant. Nous définissons aussi deux autres concepts (***la stabilité et la causalité***) très importants pour la réalisation pratiques de ces systèmes.

3.3.3. La stabilité

Un système continu (discret) est stable, si tout signal d'entrée arbitraire x(t) / [x(n)], d'amplitude finie : $| x(t) |_{max} < A$ / $[| x(n) |_{max} < A]$ produit un signal de sortie y(t) / [y(n)] d'amplitude finie c'est à dire $| y(t) |_{max} < B$ / $[| y(n) |_{max} < B]$

3.3.4. La causalité

Un système continu / [discret] est causal, si tout signal de sortie à tout instant $t = t_0$ / $[n=n_0]$ est indépendant des valeurs du signal d'entrée aux instants postérieures à t_0 / $[n_0]$, en d'autres termes il n'y a pas de signal de sortie tant qu'il n'y a pas de signal d'entrée.

3.4. Modèles mathématiques

En général la relation entre l'entrée x(t) / [x(n)] et la sortie y(t) / [y(n)] pour les systèmes C.L.I. / [D.L.I], mono-entrée mono-sortie **(monodimensionnel)** peut être exprimée par l'une des trois descriptions suivantes :

- Équation différentielle ou récurrente du nième ordre à coefficient constant.
- Un système d'équation d'état
- La réponse impulsionnelle

3.4.1. Équation différentielle

$$\boxed{\sum a_i\, y^{(i)}(t) = \sum b_j\, x^{(j)}(t) \quad \text{généralement } a_n = 1,\ i=1{:}n \text{ et } j = 1{:}m} \tag{3.2a}$$

3.4.2. Équation récurrente

$$\boxed{\sum a_i\, y(n-i) = \sum b_j\, x(n-j) \quad \text{généralement } a_n = 1,\ i=1{:}n \text{ et } j = 1{:}m} \tag{3.2b}$$

3.4.3. Un système d'équation d'état

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{x'(t) = Ax(t) + Bu(t)} \\ \boldsymbol{y(t) = Cx(t) + Du(t)} \end{cases}} \tag{3.3}$$

- ✓ A : la matrice d'évolution [n x n]
- ✓ B : la matrice de commande [n x l]
- ✓ C : la matrice d'observation [m x n]
- ✓ D : la matrice de transmission directe [m x l]

3.4.4. Réponse impulsionnelle : h(t) / [h(n)]

$$\mathbf{y(t) = h(t) * x(t) = x(t) * h(t) \ / \ [y(n) = h(n) * x(n) = x(n) * h(n)]} \tag{3.4a}$$

$$\mathbf{y(t) = \int_R h(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau \quad / \quad y(n) = \sum_R h(n-i)\, x(i)} \tag{3.4b}$$

La connaissance de h(t) / [h(n)] nous permet de calculer le signal de sortie y(t) / [y(n)] correspondant à un signal d'entrée quelconque x(t) [x(n)] par la relation de convolution précédente

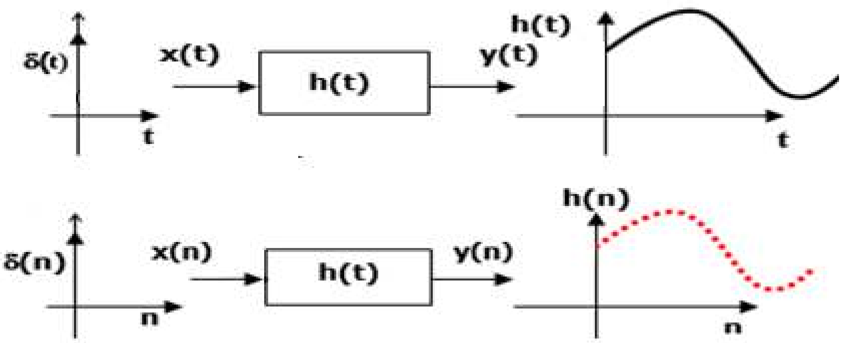


Figure 3.5 : Les différentes réponses impulsionnelles

Sous réserve de satisfactions des conditions d'existence des transformées de **Laplace** / **[z]**, il y a équivalence entre ces différentes modèles fonctions du temps et leurs transformée fonction de **p ou (s) / [z].**

L'application de la transformée de **Laplace** et celle de **z** aux équations précédentes nous conduit aux descriptions suivantes :

3.5. Fonctions de transfert

3.5.1. Fonctions de transfert des systèmes continus

$$\boxed{\mathbf{H(p) = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots \ldots b_m p^m}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots \ldots a_n p^n}}} \qquad (3.5)$$

3.5.2. Fonctions de transfert des systèmes discrets

$$\boxed{\mathbf{H(z) = \frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots \ldots b_m z^m}{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \ldots a_n z^n}}} \qquad (3.6)$$

3.5.3. Fonctions de transfert à partir des équations d'état

$$\boxed{\begin{cases} H(p) = C(pI - A)^{-1}B \mapsto Continus \\ H(z) = C(zI - A)^{-1}B \mapsto Discrets \end{cases}} \qquad (3.7)$$

3.5.4. Réponses impulsionnelles

$$\boxed{\begin{cases} Y(p) = H(p)U(p) \mapsto Continus \\ Y(z) = H(z)U(z) \mapsto Discrets \end{cases}} \qquad (3.8)$$

Remarques

a. La forme algébrique de ces dernières paires d'équations simplifie beaucoup les calculs. Nous effectuons maintenant l'hypothèse qui garantit l'existence de ces relations algébriques. Tous les signaux considérés ci-dessous sont causaux (nuls pour $t \leq 0$) et de croissance au plus exponentielle ou géométriques dans le cas discret. En d'autres termes on s'intéresse qu'aux systèmes initialement aux repos et dont l'excitation ne se manifeste qu'à partir de l'instant $t = 0$. De ce qui précède nous déduirons aussi que :

$$\boxed{\int_R |\, h(t) \,|\, d\tau < \infty \ \text{(Continu)} \quad / \quad y(n) = \sum_R |\, h(n) \,| < \infty \ \text{(Discret)}} \qquad (3.9)$$

b. Pour un système causal

$$\boxed{h(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \ \text{(Continu)} \quad / \quad h(n) = 0 \text{ pour } n < 0 \ \text{(Discret)}} \qquad (3.10)$$

3.6. Les réponses fréquentielles

La représentation d'un système dans l'espace fréquentiel présente souvent de grands avantages par rapport à sa description temporelle. La transformée de Fourier (T.F.D : La transformée de Fourier discrète) de h(t) / [h(n)] d'un système C.L.I / [D.L.I] est appelée réponse fréquentielle.

Tout comme h(t) / [h(n)], H (jω) / [H ($e^{j\theta}$)] est une description complète du système. Pour un système donné de réponse impulsionnelle h(t) / [h(n)], nous démontrons que sa réponse y(t) / [y(n)] à un signal d'entrée en cosinus $x(t) = e_0.\cos \omega_0 t$ / $[x(n)=e_0.\cos (n\theta)]$ est de la forme :

$$\boxed{\begin{gathered} \mathbf{y(t) = e_0 . A(f). \cos\left(\omega_0 t + \Phi(f)\right) \ / \ \left[y(n) = e_0 . A(f). \cos\left(n\theta + \Phi(f)\right)\right]} \\ \textit{où} \\ A(f) = H(j\omega) \text{ et } \Phi(f) = arg\big(H(j\omega)\big) \, / \left[A(f) = H(e^{j\theta}) \text{ et } \Phi(f) = arg\left(H(e^{j\theta})\right)\right] \end{gathered}} \qquad (3.11)$$

C'est à dire un signal d'entrée en cosinus est convertit par un système C.L.I / [D.L.I] en signal de sortie de même fréquence, mais dont l'amplitude et la phase dépendent de la réponse en fréquence H(jω) / [H($e^{j\theta}$)] à cette fréquence particulière. Cette propriété peut être considérée comme l'une des plus essentielles d'un système linéaire invariant. D'ailleurs c'est sur elle que repose toute l'analyse fréquentielle.

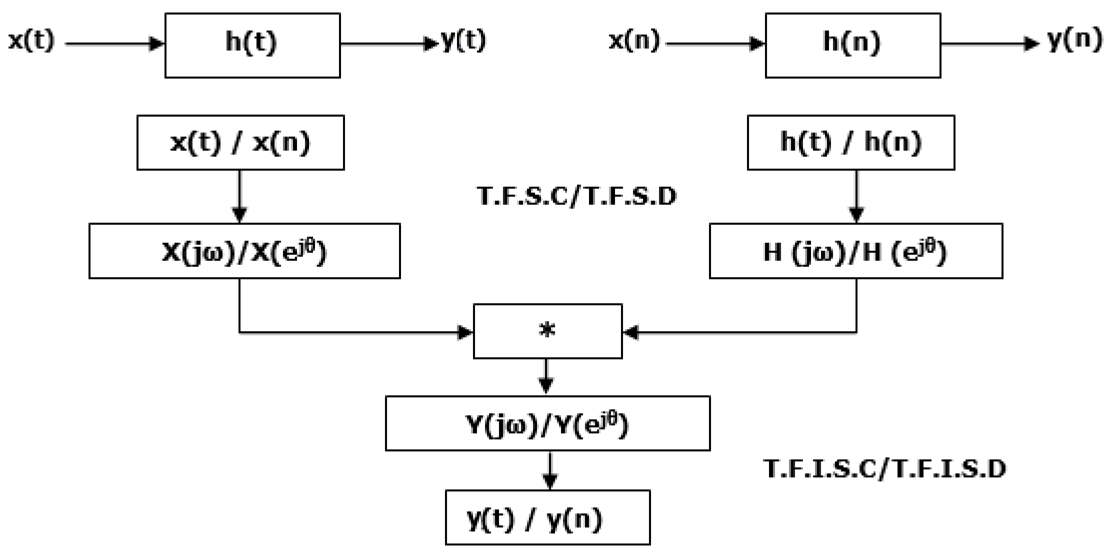


Figure 3.6 : Relations entre les réponses fréquentielles et temporelles

3.7. Les pôles et les zéros

Une autre méthode de description des systèmes C.L.I / [D.L.I] utilise la notion de pôles et de zéros et permet aussi de déduire certaines propriétés d'un système. La théorie sur laquelle est fondée utilise la transformée de ***Laplace* / [*z*]**. En supposant les conditions initiales nulles et en transformant les deux membres, les quantités H(p) / [H(z)] précédemment déterminées sont appelées fonctions de transfert ou transmittance du système. Ces dernières peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\boxed{\boldsymbol{H(p) = \frac{K\prod(p-z_j)}{\prod(p-p_i)} \quad \therefore \quad H(z) = \frac{K\prod(z-z_j)z^{n-m}}{\prod(z-p_i)}}} \qquad \textbf{(3.12)}$$

Les quantités complexes $\mathbf{z_j}$ et $\mathbf{p_i}$ sont appelées respectivement les zéros et les pôles de la fonction de transfert du système. On voit de la dernière écriture que H(p) / [H(z)], à la constante K prés, peut être entièrement déterminée par les valeurs de $\mathbf{z_j}$ et $\mathbf{p_i}$. On peut aisément représenter graphiquement ces pôles et zéros dans le plan des **p** / [*z*] (plan de Laplace).

Remarque

Pour les systèmes réalisables physiquement, il est toujours vrai que les coefficients $\mathbf{a_i}$, $\mathbf{b_j}$ dont on part sont réels, ce qui implique que les zéros (pôles) sont soit réels soit ils forment des paires complexes conjuguées, ce qui entraine une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

- ✓ n ≥ m ; c'est à dire que le nombre des pôles est donc toujours supérieur ou égal à celui des zéros.
- ✓ Pour un système stable tous les pôles sont situés à gauche de l'axe vertical (c'est à dire dans le demi -plan gauche **D.P.G)**, les zéros peuvent être n'importe où à droite, à gauche ou sur l'axe vertical.

Exemple

Représentation des lieux des racines du système dont la fonction de transfert est H(p)

$$H(p) = \frac{p^2 + 7p + 10}{5p^4 + 12p^3 + 31p^2 + 22p + 28}$$

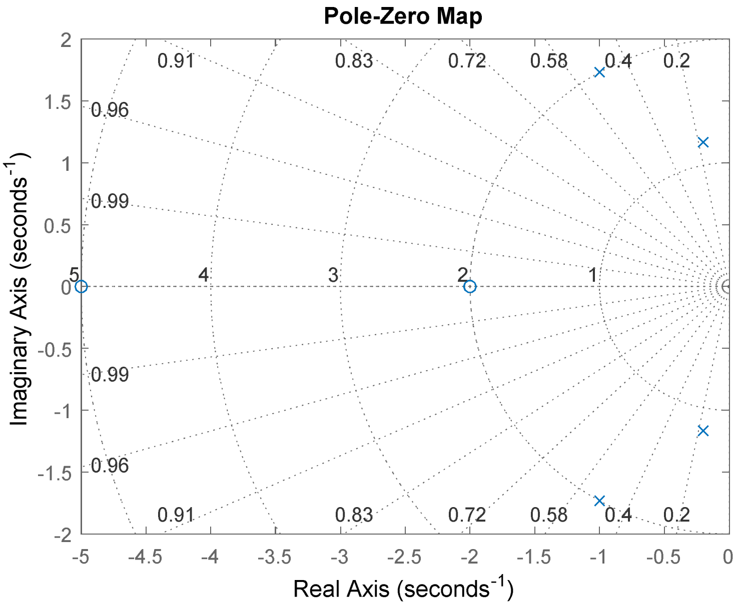


Figure 3.7 : Lieux des racines de H(p)

3.8. Modélisation des systèmes

Pour étudier les performances des systèmes (systèmes asservis), bien entendu dans le but de les améliorer, il est nécessaire de disposer d'une description mathématique du système que l'on veut contrôler. La description mathématique des systèmes dynamiques est généralement un système d'équations intégro-différentielles. Pour exprimer ces équations il est nécessaire de connaître les principes physiques qui régissent le système étudié. Ceci est vrai pour les systèmes électriques, mécaniques, fluidique, thermiques et thermodynamiques.

Pour cela on doit :

a. Ecrire la relation mathématique liant l'entrée e_i à la sortie si de chaque organe composant le système, puis transformer par Laplace ces équations intégro-différentielles,

b. Remplacer chacune des expressions trouvées par un schéma bloc (diagramme fonctionnel),

c. Enfin, combiner les différents blocs de chacune des chaînes, séparément pour obtenir les expressions des fonctions de transfert de la chaîne directe ***G(p)*** et celle de retour ***H(p)*** de la figure donnée ci-dessous.

Cette section illustre comment obtient-on les diagrammes représentant les organes types constituant les systèmes de commande (systèmes asservis) dans les différentes technologies, et dans les chapitres qui suivent nous verrons comment peut-on combiner ces derniers pour former les asservissements complets.

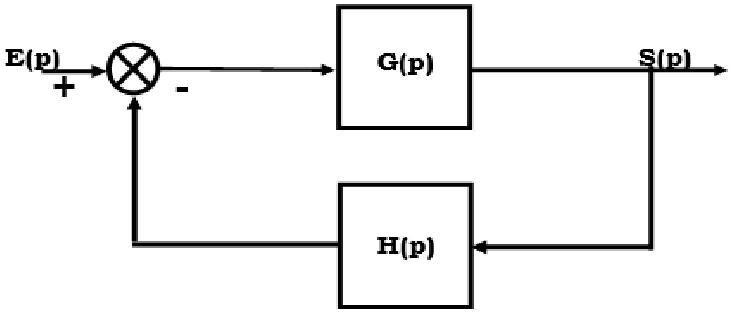


Figure 3.8 : Diagramme fonctionnel d'un système en BF à retour non unitaire

3.9. Mise en équation des éléments de systèmes asservis

La plupart des procédés et des éléments qui interviennent dans les systèmes asservis peuvent être considérés comme linéaires, si on réduit suffisamment l'étendue de leur domaine de fonctionnement et si on admet les hypothèses simplificatrices suivantes :

- **Systèmes électriques**

- Les résistances, les inductances et les capacités sont considérées constantes et indépendantes des courants qui les traversent et des tensions à leurs bornes.

- **Systèmes mécaniques**

- Les frottements secs sont supposés négligeables. Seuls les frottements visqueux sont pris en compte, ce qui engendre des forces de frottement proportionnelles à la vitesse.
- La raideur est supposée constante pour les éléments flexibles. Pour les autres, elle est infinie, il en est de même de leurs fixations et liaisons.

- **Systèmes pneumatiques et hydrauliques**
  - Les débits sont supposés proportionnels à la différence de pression.
  - Les coefficients de compressibilité sont supposés constants.

3.9.1. Modélisation des systèmes électriques

3.9.1.1. Les éléments des systèmes électriques

Élément	Tension-courant	Courant-tension	Tension-charge	Impédance Z(p)=V(p)/I(p)	Admittance Y(p) = I(p)/V(p)
Condensateur	$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$	$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$	$v(t) = \frac{1}{C}q(t)$	$\frac{1}{Cp}$	Cp
Résistance	$v(t) = Ri(t)$	$i(t) = \frac{1}{R}v(t)$	$v(t) = R\frac{dq(t)}{dt}$	R	$\frac{1}{R} = G$
Iductance	$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)d\tau$	$v(t) = L\frac{d^2q(t)}{dt^2}$	Lp	$\frac{1}{Lp}$

Note : La série de symboles et d'unités suivante est utilisée tout au long de ce manuel : $v(t)$ = V (volts), $i(t)$ = A (amps), $q(t)$ = Q (coulombs), C = F (farads), R = Ω (ohms), G = ℧ (mhos), L = H (henries).

3.8.2.1. Lois relatives aux circuits électriques

$$\begin{bmatrix} \text{Somme des} \\ \text{impédances mécaniques} \\ \text{autour du ddl} - 1 \end{bmatrix} . X_1(p) - \begin{bmatrix} \text{Somme des} \\ \text{impédances mécaniques} \\ \text{communes à } X_1 \text{ et } X_2 \end{bmatrix} . X_2(p) = \begin{bmatrix} \text{somme des sources} \\ \text{de forces au ddl} - 1 \end{bmatrix}$$

3.8.2.2. Lois de Kirchhoff

- Dans chaque maille (boucle), la somme des tensions est nulle. (KVL : Kirchhoff Voltage Law)

$$\boxed{\begin{matrix} \text{Loi des mailles} \\ \sum_{k=1}^{n} v_k = 0 \end{matrix}}$$

- À chaque nœud la somme des courants est nulle. (KCL : Kirchhoff Current Law)

$$\boxed{\begin{matrix} \text{Loi des noeuds} \\ \sum_{k=1}^{n} i_k = 0 \end{matrix}}$$

- **Modélisation d'une boucle simple : circuit RLC**

Problème : *Déterminer la fonction de transfert entre la tension d'entrée V(p) et la tension de sortie Vc(s) aux bornes du condensateur.*

Loi des mailles appliquée au circuit RLC

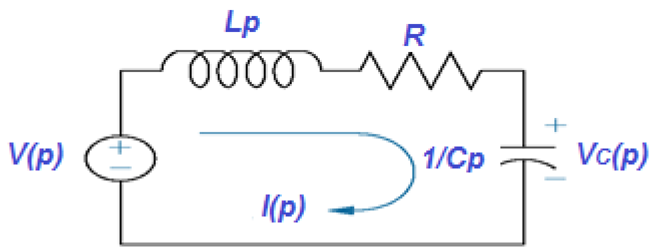


Figure 3.9 : Circuit RLC

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt \tag{3.13}$$

$$v_c(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt \;\Rightarrow\; i(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt} \tag{3.14}$$

En remplaçant (13) dans (14), alors on obtient :

$$LC\frac{d^2v_c(t)}{dt^2} + RC\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v(t) \tag{3.15}$$

Équation différentielle du second ordre entre **v(t)** et **v_c(t)**

- Loi des mailles appliquée au circuit RLC
- Transformée de Laplace avec C.I. nulles

$$V(p) = (LCp^2 + RCp + 1)V_c(p)$$

$$\frac{V(p)}{V_c(p)} = \frac{1}{(LCp^2+RCp+1)} = \frac{\frac{1}{LC}}{\left(p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{LC}\right)} \tag{3.16}$$

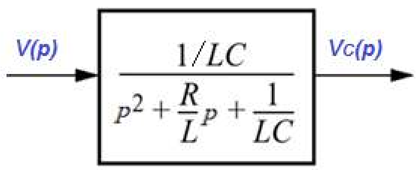


Figure 3.10 : Fonction de transfert du circuit RLC

Application du concept d'impédance dans la méthode des mailles

✓ Aux bornes d'une capacité

$$V(p) = \frac{1}{Cp}I(p)$$

- ✓ Aux bornes d'une résistance

$$V(p) = RI(p)$$

- ✓ Aux bornes d'une inductance

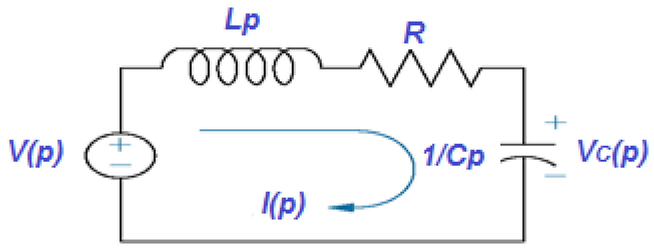
$$V(p) = LpI(p)$$

- ✓ La fonction de transfert est définie

$$\frac{V(p)}{I(p)} = Z(p)$$

Intérêt de cette méthode déterminer le courant de maille I(s) en deux étapes :

- ✓ **Étape 1** : remplacer les courants et tensions par leur transformées de Laplace
- ✓ **Étape 2** : remplacer les valeurs des éléments passifs par la valeur de leur impédance.



Loi de Kirchhoff pour une maille dans le domaine de Laplace

[Somme des impédances dans la maille]. I(s) = [Somme des sources de tension dans la maille]

- ✓ **Deuxième circuit**

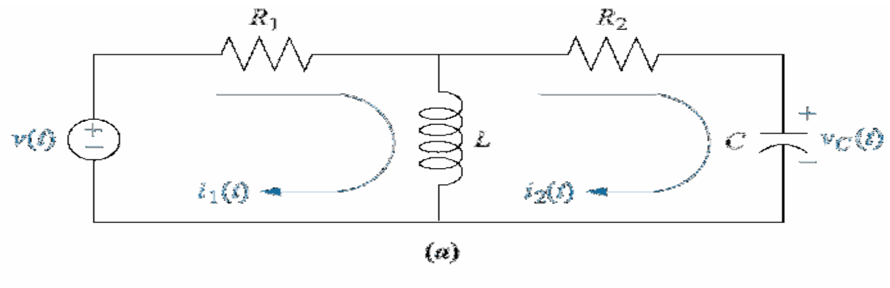


Figure 3.11 : Circuit RLC à deux mailles

$$\begin{aligned} -V(p) + R_1 I_1(p) + Lp\big(I_1(p) - I_2(p)\big) &= 0 \\ Lp\big(I_2(p) - I_1(p)\big) + R_2 I_2(p) + \frac{1}{Cp} I_2(p) &= 0 \end{aligned} \qquad (3.16)$$

- ✓ De la deuxième équation, on trouve :

$$I_1(p) = \left\{\frac{LCp^2 + R_2Cp + 1}{LCp^2}\right\} I_2(p)$$

- ✓ Le remplacement de cette expression dans la première équation mène à :

$$I_2(p) = \frac{LCp^2}{(R_1 + R_2)LCp^2 + (L + R_1R_2C)p + R_1} V(p)$$

- ✓ D'où finalement :

$$V_C(p) = \frac{Lp}{(R_1 + R_2)LCp^2 + (L + R_1R_2C)p + R_1} V(p)$$

Circuit à 3 mailles

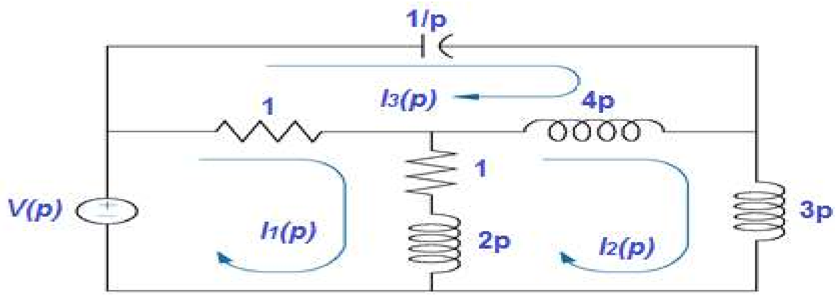


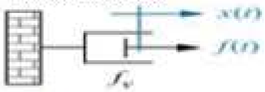
Figure 3.12 : Circuit RLC à trois mailles

$$\begin{bmatrix} 2p+2 & -(2p+1) & -1 \\ -(2p+1) & (9p+1) & -4p \\ -1 & -4p & \left(4p + 1 + {}^{1}/_{p}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{I_2(p)}{V(p)} = \frac{8p^3 + 10p^2 + 3p + 1}{24p^4 + 30p^3 + 17p^2 + 16p + 1}$$

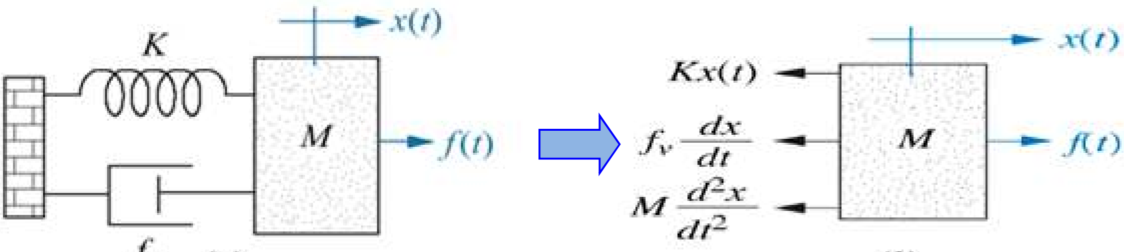
3.9.2 Modélisation des systèmes mécaniques

3.9.2.1. Système mécanique en translation

Composant	Force-Vitesse	Force-déplacement	Impédance $Z_M(p) = F(p)/X(p)$
Ressort 	$f(t) = K\int_0^t v(\tau)\,d\tau$	$f(t) = Kx(t)$	K
Amortisseur 	$f(t) = f_v v(t)$	$f(t) = f_v \frac{dx(t)}{dt}$	$f_v p$
Masse 	$f(t) = M\frac{dv(t)}{dt}$	$f(t) = M\frac{d^2x(t)}{dt^2}$	Mp^2

Note : La série de symboles et d'unités suivante est utilisée tout au long de ce manuel : $f(t) = N$ (Newton), $x(t) = m(mètres)$, $v(t) = m/s$ $(mètres/secondes)$, $K = N/m(Newtons/mètres)$, $f_v = N - s/m$ $(mètres - secondes/mètres)$, $M = Kg$ $(Kilogrammes =$ Newton $- secondes^2/mètres)$

- **Système à 1 degré de liberté**

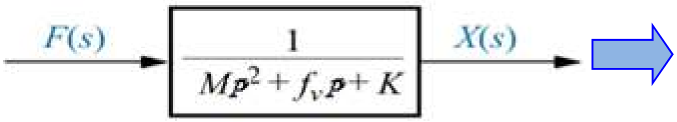


(a) (b)

- **Équation dynamique du système :**

$$f(t) - M\frac{d^2x}{dt^2} - f_v\frac{dx}{dt} - Kx(t) = 0$$

- **Transformée de Laplace :**



$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + f_v s + K}$$

[Somme des impédances mécaniques]. X(p) = [Somme des sources]

Système à 2 degrés de liberté

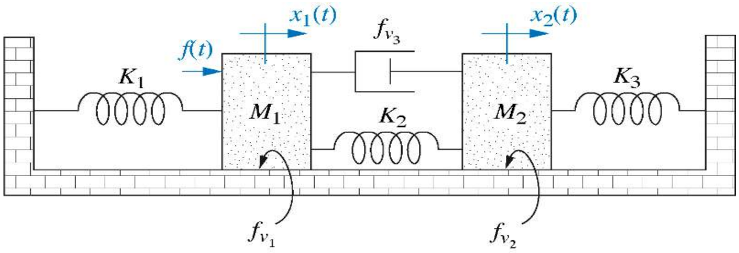


Figure 3.14 : Système mécanique à deux degrés de liberté

Diagramme des corps libres :

- **Masse 1 :**

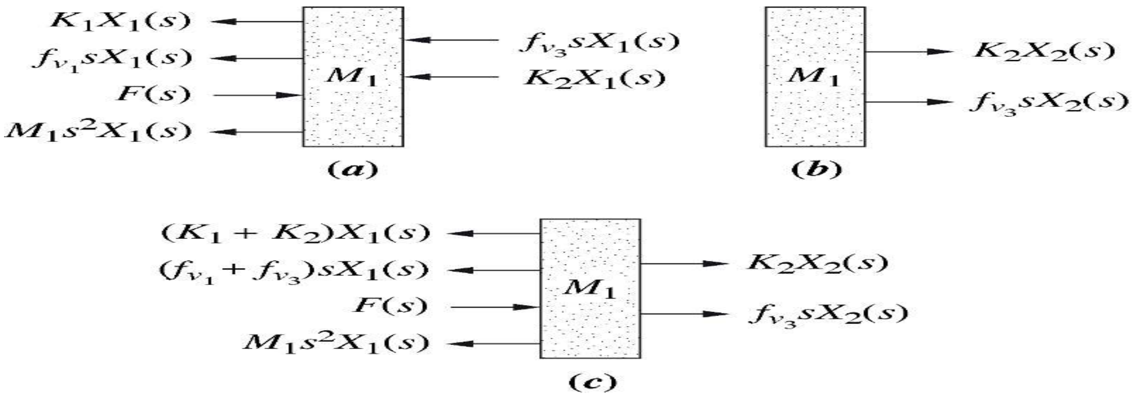


Figure 3.15 : Diagramme des corps libres (masse M_1)

i. **Équation de la masse 1 :**

$$F(s) + f_{v_3}sX_2 + K_2X_2 - M_1s^2X_1$$
$$-\left(f_{v_1} + f_{v_2}\right)sX_1 - \left(K_1 + K_2\right)X_1 = 0$$

ii. **Diagramme des corps libres :**

a. **Masse 2 :**

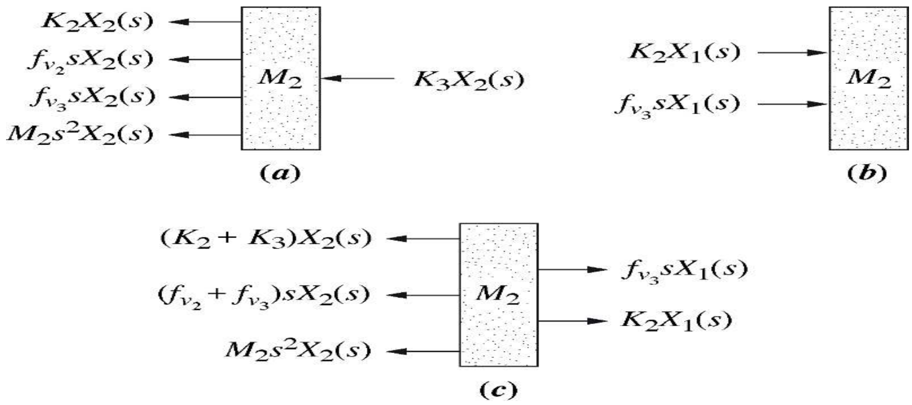


Figure 3.16 : Diagramme des corps libres (masse M_2)

iii. Équation de la masse 2 :

$$f_{v_3}sX_1 + K_2X_1 - M_2s^2X_2 - \left(f_{v_2} + f_{v_3}\right)sX_2 - \left(K_2 + K_3\right)X_2 = 0$$

Donc

$$X_1 = \frac{M_2s^2 + \left(f_{v_2} + f_{v_3}\right)s + \left(K_2 + K_3\right)}{f_{v_3}s + K_2}X_2$$

iv. Équation de l'ensemble :

$$\frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{f_{v_3}s + K_2}{\left(M_1s^2 + \left(f_{v_1} + f_{v_2}\right)s + \left(K_1 + K_2\right)\right)\left(M_2s^2 + \left(f_{v_2} + f_{v_3}\right)s + \left(K_2 + K_3\right)\right) - \left(f_{v_3}s + K_2\right)^2}$$

$$\begin{bmatrix} \textit{Somme des} \\ \textit{impédances mécaniques} \\ \textit{autour du ddl} - 1 \end{bmatrix} . X_1(p) - \begin{bmatrix} \textit{Somme des} \\ \textit{impédances mécaniques} \\ \textit{communes à } X_1 \textit{ et } X_2 \end{bmatrix} . X_2(p) = \begin{bmatrix} \textit{somme des sources} \\ \textit{de forces au ddl} - 1 \end{bmatrix}$$

Exemple

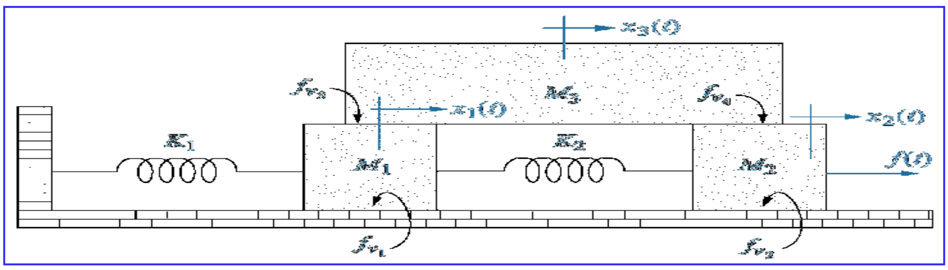


Figure 3.17 : Système mécanique à trois degrés de liberté en translation

3.9.2.2. Modélisation des systèmes en rotation

Composant	Couple-Vitesse angulaire	Couple-déplacement angulaire	Impédance $Z_M(p) = T(p)/\theta(p)$
Ressort K ; $T(t)$ $\theta(t)$	$T(t) = K\int_0^t \omega(\tau)d\tau$	$T(t) = K\theta(t)$	K
Amortisseur D ; $T(t)$ $\theta(t)$	$T(t) = D\omega(t)$	$T(t) = D\frac{d\theta(t)}{dt}$	Dp
Inertie J ; $T(t)$ $\theta(t)$	$T(t) = J\frac{d\omega(t)}{dt}$	$T(t) = J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$	Jp^2

Note : La série de symboles et d'unités suivante est utilisée tout au long de ce manuel : $T(t) = N - m$ $(Newtons - mètres)$, $\theta(t) = rad(radians)$, $\omega(t) = rad/s\ (radians/secondes)$, $K = N.m/rad\ (Newtons - mètres/radians)$; $D = N - m - s/rad\ (Newtons - mètres - secondes/radians)$. $J = kg - m^2$ $(Kilogrammes - mètres^2 = Newtons - mètres - secondes^2/radians)$

- ✓ **Système en rotation à 2 ddl.**

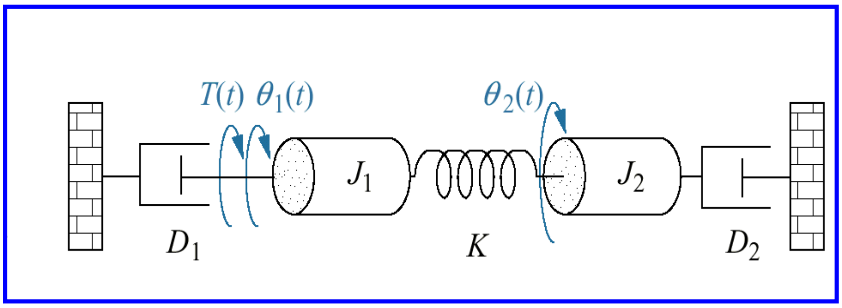


Figure 3.18 : Système mécanique à deux degrés de liberté en rotation

<u>Analogie :</u>

- ✓ **Force – Couple actionneur**
- ✓ **Déplacement linéaire – Déplacement angulaire**

✓ **Exemple-1 : Système à 2 ddl.**

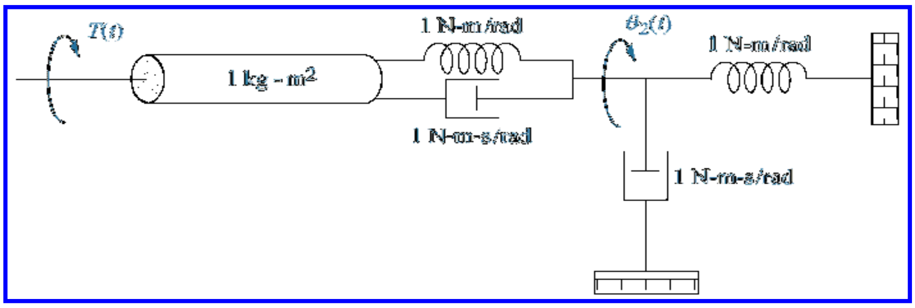


Figure 3.19 : Système mécanique à deux degrés de liberté en rotation

Il y a 2 deux degrés de liberté

$$(p^2+p+1)\theta_1(p)-(p+1)\theta_2(p)=T(p)$$

$$-(p+1)\theta_1(p)+(2p+2)\theta_2(p)=0$$

Alors

$$\begin{bmatrix}(p^2+p+1) & -(p+1)\\ -(p+1) & 2(p+1)\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\theta_1(p)\\ \theta_2(p)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T(p)\\ 0\end{bmatrix}$$

Alors par la méthode de Cramer on obtient

$$\theta_2(p)=\frac{det\left(\begin{vmatrix}(p^2+p+1) & T(p)\\ -(p+1) & 0\end{vmatrix}\right)}{det\left(\begin{vmatrix}(p^2+p+1) & -(p+1)\\ -(p+1) & 2(p+1)\end{vmatrix}\right)}=\frac{(p+1)T(p)}{(p+1)(2p^2+p+1)}$$

$$\frac{\theta_2(p)}{T(p)}=\frac{1}{(2p^2+p+1)}$$

- **Système en rotation avec engrenage**

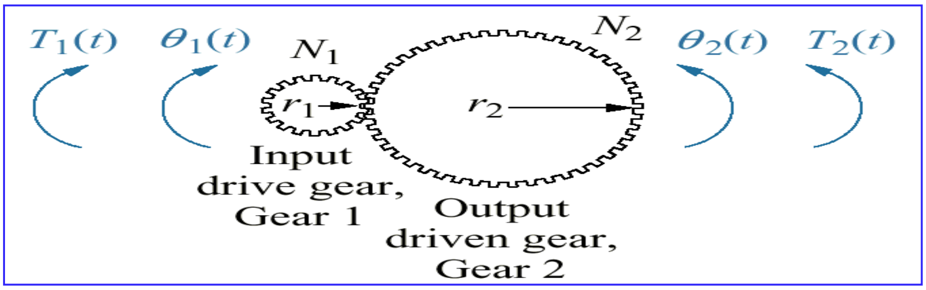
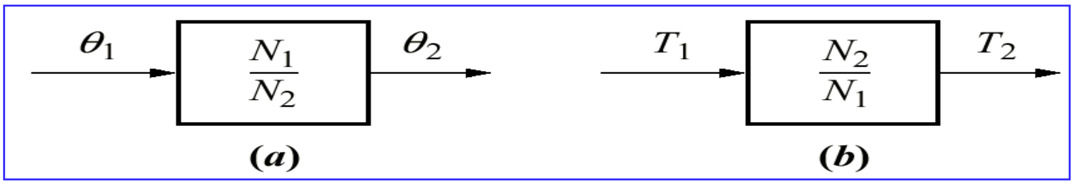


Figure 3.20 : Système mécanique en rotation avec engrenage

- **Diagramme du système en rotation avec engrenage**



- **Figure 3.21** : Fonction de transfert des systèmes mécanique en rotation avec engrenage

- **Contrainte géométrique**
- **Contrainte de transmission de puissance**

Système en rotation avec engrenage (principe du transfert)

En isolant l'arbre 2, on peut la relation suivante :

$$(\mathbf{Jp^2 + Dp + K}).\boldsymbol{\theta}_2(\mathbf{p}) = \mathbf{T_2(p)}$$

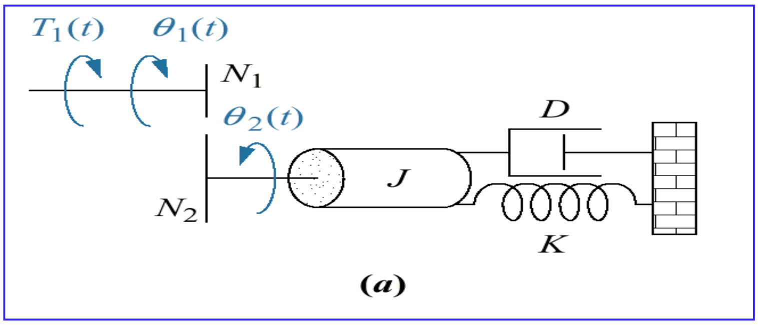


Figure 3.22 : Système mécanique avec engrenage (principe du transfert)

Les contraintes imposent :

$$\boldsymbol{\theta}_2(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{N_1}}{\mathbf{N_2}}.\boldsymbol{\theta}_1(\mathbf{p}) \qquad \mathbf{T_1(p)} = \frac{\mathbf{N_1}}{\mathbf{N_2}}.\mathbf{T_2(p)}$$

Alors

$$(\mathbf{Jp^2 + Dp + K}).\frac{\mathbf{N_1}}{\mathbf{N_2}}\boldsymbol{\theta}_1(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{N_2}}{\mathbf{N_1}}\mathbf{T_1(p)}$$

$$\left(\mathbf{J}\left(\frac{\mathbf{N_1}}{\mathbf{N_2}}\right)^2\mathbf{p^2} + \mathbf{D}\left(\frac{\mathbf{N_1}}{\mathbf{N_2}}\right)^2\mathbf{p} + \mathbf{K}\left(\frac{\mathbf{N_1}}{\mathbf{N_2}}\right)^2\right).\boldsymbol{\theta}_1(\mathbf{p}) = \mathbf{T_1(p)}$$

En transférant les éléments de l'arbre 2 sur l'arbre 1, on doit les multiplier par le rapport au carré du nombre de dents à l'arbre 1 sur le nombre de dents de l'arbre 2 : c'est le principe du transfert.

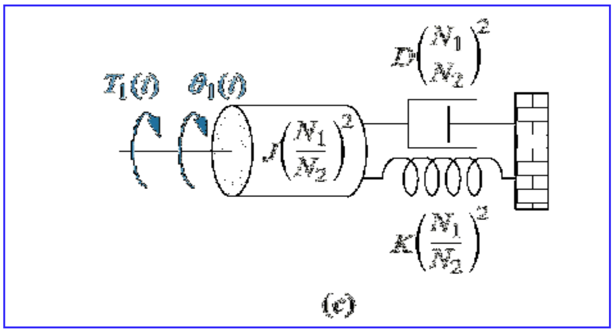


Figure 3.23 : Système mécanique avec engrenage (principe du transfert)

$$\left(J\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 p^2 + D\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 p + K\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2\right).\theta_1(p) = T_1(p)$$

3.9.3. Les systèmes électromécaniques

Généralement les moteurs d'asservissement n'ont pas les mêmes caractéristiques que les moteurs ordinaires, les caractéristiques de ces derniers sont optimisées pour le régime permanents, tandis que ceux des systèmes asservis, elles sont optimisées pour le régime transitoire.

3.9.3.1. Les différents types de moteurs des systèmes asservis

Les plus utilisés sont :

- Les moteurs à commande d'inducteur (excitation séparée),
- Les moteurs à commande d'induit (excitation série),
- Les moteurs biphasés,
- Les moteurs pas à pas.

3.9.3.2. Les moteurs à commande d'inducteur (excitation séparée)

i. Principe

L'inducteur est alimenté par la grandeur de commande i_f, tandis que l'induit est parcouru par une intensité constante i_a. Pour les machines de petites puissances le courant I_a peut être tenu constant par un simple montage électronique tandis que pour les grandes puissances on utilise des machines spéciales appelées les Métadynes.

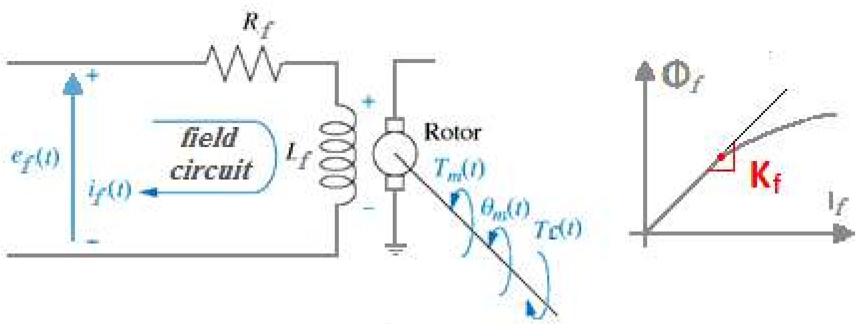


Figure 3.24 :: Moteur à commande d'inducteur

ii. La mise en équation

Le couple T_m développé par le moteur est proportionnel au produit $I_a.\Phi$.

$$\mathbf{T_m(t) = K_1 I_a \Phi(t)}$$

Où $\Phi(t)$ est le flux magnétique de l'inducteur, K_1 est une constante qui dépend des caractéristiques du moteur, à savoir le nombre total de conducteur de l'induit et du nombre de ses pôles. De la figure (17b) il vient :

$$\boldsymbol{\Phi(t) = K_f i_f(t)}$$

Des deux équations précédentes nous obtenons **:**

$$\mathbf{T_m(t) = K_1 K_f I_a i_f(t) = K_m I_a i_f(t)}$$

Si le moment d'inertie de l'induit est **J**, le coefficient des frottements visqueux auquel est soumis l'arbre moteur est B, le couple de charge est **Tc**, il vient alors :

$$\mathbf{T_m(t) = J\theta''(t) + B\theta'(t) + T_c(t)}$$

Par conséquent :

$$\mathbf{T_m(p) = (Jp + B)\Omega(p) + T_c(p) = (Jp + B)p\theta(p) + T_c(p)}$$

L'équation donnant le courant inducteur i_f est obtenue de son circuit électrique équivalent de la figure (x) :

$$\mathbf{e_f(t) = L_f \frac{di_f(t)}{dt} + R_f i_f(t)}$$
$$\Rightarrow \quad \mathbf{E_f(p) = (L_f \cdot p + R_f) I_f(p)}$$

$$\mathbf{I_f(p) = \frac{E_f(p)}{(L_f \cdot p + R_f)} = \frac{1}{R_f} \frac{E_f(p)}{\frac{L_f}{R_f} \cdot p + 1} = \frac{1}{R_f} \cdot \frac{E_f(p)}{1 + \tau_e p}}$$

où $\quad \tau_e = L_f/R_f \quad$: la constante de temps électrique de l'inducte**ur**

Des équations précédentes nous écrivons :

$$\mathbf{\Omega(p) = \frac{1}{(Jp + B)} \left[\frac{K_m I_a / R_f}{1 + \tau_e p} E_f(p) - M_c(p) \right]}$$

Ou bien :

$$\mathbf{\theta(p) = \frac{1/B}{p(1 + \tau_m p)} \left[\frac{K}{1 + \tau_e p} E_f(p) - T_c(p) \right]}$$

Avec : $\boldsymbol{\tau_m = J/B}$ est la constante de temps mécanique de l'induit, et $\mathbf{K_e = K_m I_a}/\boldsymbol{R_f}$**.**

D'où le diagramme fonctionnel du moteur à courant continu (CC) à commande par l'inducteur.

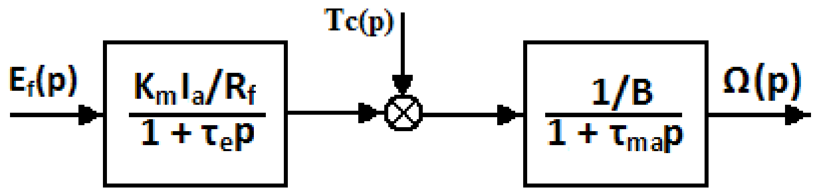


Figure 3.25 : Le diagramme fonctionnel du moteur à CC commandé par l'inducteur

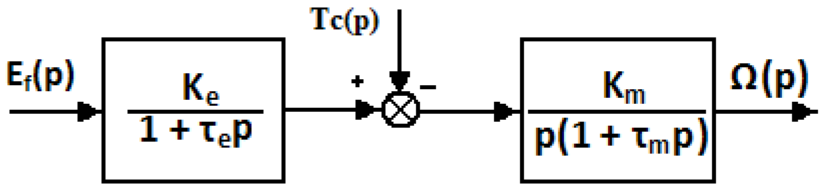


Figure 3.26 : Le diagramme fonctionnel du moteur à CC commandé par l'inducteur

3.9.3.3. Les moteurs à commande d'induit (excitation série)

Principe

L'inducteur cette fois-ci est alimenté avec un courant d'intensité constante (**I_f=C^{ste}**), par contre l'induit est alimenté par la tension de commande **e_a(t)**.

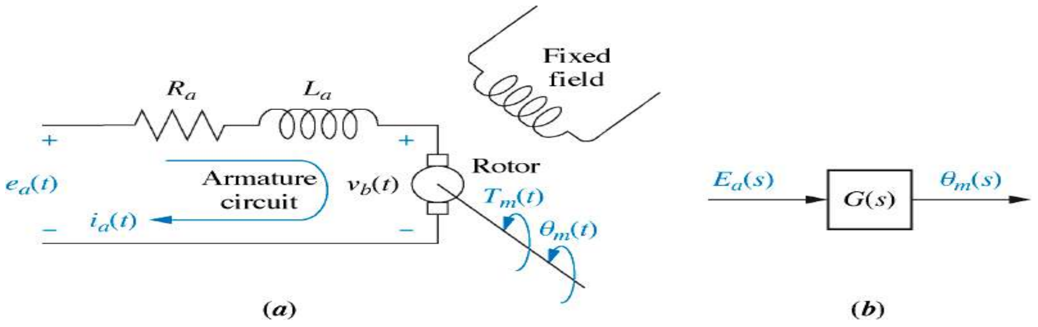


Figure 3.27 : (**a**) Moteurs à commande d'induit (excitation série)

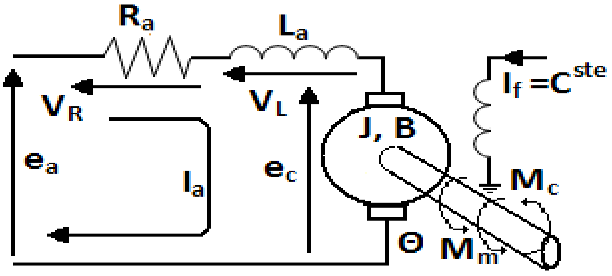


Figure 3.27 : (b) Les moteurs à commande d'induit (excitation série)

- **e_c :** représente la f.c.é.m. induite (dans l'induit) par suite de sa rotation dans le champ d'induction magnétique **B.** On montre que cette f.c.é.m. **$e_c(t)$** est proportionnelle à la vitesse de rotation $\boldsymbol{\omega(t) = d\theta(t)/dt}$ ·

$$\mathbf{e_c(t) = K_3\emptyset\theta'(t) = K_3\emptyset\omega(t) = K_3(K_fI_f)\theta'(t) = K_b\theta'(t)}$$

La mise en équation :

L'équation donnant le couple moteur :

$$\mathbf{M_m(t) = K_mI_fi_a(t) = J\theta''(t) + B\theta'(t) + M_c(t) = K_ii_a(t)}$$

$$\mathbf{M_m(p) = (Jp + B)\Omega(p) + M_c(p)}$$

$$\mathbf{\Omega(p) = \frac{[M_m(p) - M_c(p)]}{B\left(1 + \frac{J}{B}p\right)} = \frac{[M_m(p) - M_c(p)](1/B)}{(1 + \tau_{ma}p)}}$$

L'équation donnant le courant électrique **$i_a(t)$** est obtenue directement du circuit de la figure (3.27) :

$$\mathbf{e_a(t) - e_c(t) = R_ai_a(t) + L_a\frac{di_a(t)}{dt}}$$

$$\mathbf{I_a(p) = \frac{1}{R_a} \cdot \frac{[E_a(p) - E_c(p)]}{\left(1 + \frac{L_a}{R_a}p\right)} = \frac{G_a \cdot [E_a(p) - E_c(p)]}{(1 + \tau_{ea}p)}}$$

Et comme : $\mathbf{E_c(p) = K_b \cdot \Omega(p)}$

Alors :

$$\mathbf{I_a(p) = \frac{G_a \cdot [E_a(p) - K_b \cdot \Omega(p)]}{(1 + \tau_{ea}p)}}$$

Des équations précédentes on en déduit le diagramme fonctionnel illustrant le principe de fonctionnement du moteur à CC commandé par l'induit :

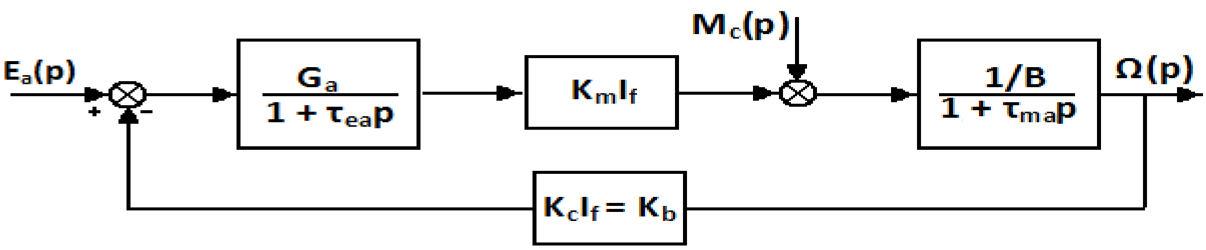


Figure 3.28 : Le diagramme fonctionnel du moteur à CC commandé par l'induit

Remarque : Généralement l'inductance **La** est négligeable c'est-à-dire L_a**=0.**

3.9.3.4. Le groupe Ward-Léonard

Principe

Ce système convient aux puissances supérieures à 100 Watts, avec une bonne constante de temps et une bonne linéarité. Ce groupe se compose :

a. D'un moteur constituant la source d'énergie (vitesse constante), généralement triphasé entrainant la génératrice,

b. D'une génératrice continue dont l'inducteur est alimenté avec la tension de commande du système $e_{fg}(t)$,

c. D'un moteur à commande d'induit, (dont l'inducteur est alimenté avec un courant constant, ce moteur entraîne la charge fixée à son rotor (l'induit).

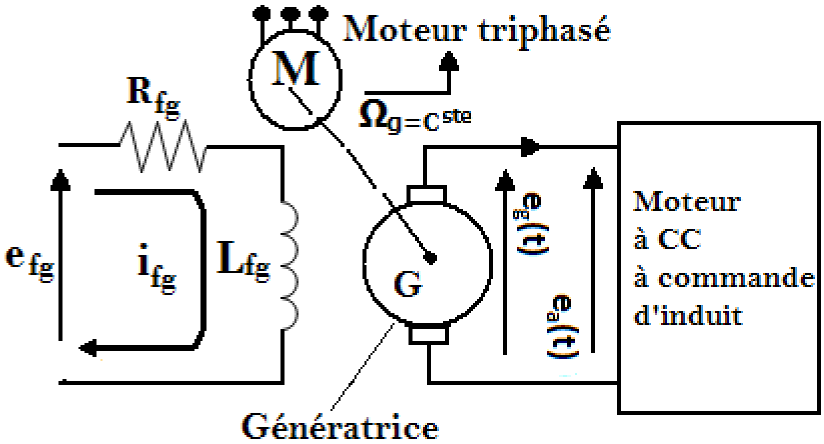


Figure 3.29 : Le groupe Ward-Léonard

La mise en équation :

- **Équation du circuit électrique :**

$$e_{fg}(t) = R_{fg} i_{fg}(t) + L_{fg}\frac{di_{fg}(t)}{dt}$$

La tension $e_g(t)$ induite dans l'induit de la génératrice est aussi la tension d'alimentation $e_a(t)$ du moteur $[e_g(t) = e_a(t)]$.

$$e_g(t) = e_a(t) = K_{cg}\cdot\omega_g\cdot i_{fg}(t) = K_{cg}\cdot i_{fg}(t)$$

Où $\omega_g = \dot{\theta}_g$ est la vitesse angulaire du moteur d'entrainement qui est dans notre cas constante :

$\mathbf{e_g(t) = e_a(t) = K_{cg} \cdot i_{fg}(t)}$

$$\mathbf{E_g(p) = \frac{K_c/R_{fg}}{1 + \tau_{fg}p} E_{fg}(p)}$$

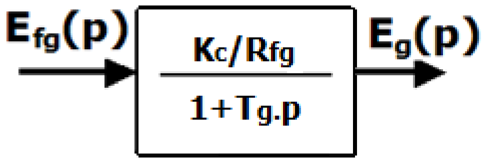


Figure 3.30 : Le diagramme fonctionnel relatif à la génératrice

Le diagramme fonctionnel liant la tension d'entrée à la vitesse de rotation Ω(p) de l'induit du moteur (groupe moteur génératrice) est obtenu en connectant tout simplement le bloc de l'équation précédente à celui de la figure (3.28).

3.9.3.5. La génératrice tachymétrique

C'est ensemble dont le flux magnétique est donné par des aimants permanents et dont l'équation de fonctionnement est :

$$\boldsymbol{e_c(t) = K_g \cdot \omega_g(t) \quad \Rightarrow \quad E_c(p) = K_g \cdot \Omega_g(p)}$$

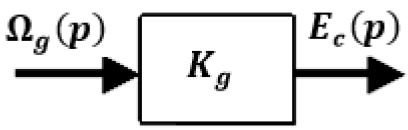


Figure 3.31 : Le diagramme fonctionnel relatif à la génératrice tachymétrique

3.10. Fonction de transfert et diagrammes fonctionnels

3.10.1. Fonction de transfert

La Fonction de transfert offre une représentation compacte (interne) des systèmes et se prête très bien à l'analyse de ces derniers.

3.10.1.1 Définition

La Fonction de transfert d'un système linéaire, continu et stationnaire est définie comme étant le rapport de la transformée de Laplace de la variable de sortie à celle de l'entrée, lorsque les conditions initiales sont toutes nulles.

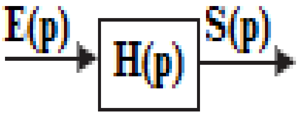


Figure 3.32 : Système en boucle ouverte

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

Ceci est équivalent aussi à :

$$s(t) = L^{-1}[H(p)E(p)] = \int_{0}^{+\infty} h(\tau)\, e(t-\tau)d\tau$$

Où h(t) est définit comme étant la réponse impulsionnelle du système c'est à dire :

$$h(t) = L^{-1}[H(p)]$$

3.10.1.2. La fonction de transfert d'un système décrit par une équation différentielle

Si le système considéré est représenté par une équation différentielle linéaire à coefficient constants de type :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot s^{(i)}\,(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j \cdot e^{(j)}\,(t)$$

La recherche de sa fonction de transfert nous oblige à considérer les deux cas suivants :

Cas de conditions initiales nulles

Si toutes les conditions initiales sont toutes nulles c'est-à-dire :

$$s^{(i)}(0) = e^{(j)}(0) = 0 \qquad pour \qquad i = 0 : n-1 \quad et \quad j = 0 : m-1$$

Alors en appliquant le théorème :

$$L\left[f^{(n)}(t)\right] = p^n F(p)$$

Il vient :

$$S(p) = H(p)E(p)$$

Avec :

$$H(p) = \frac{Num(p)}{Den(p)} = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j p^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i p^i}$$

Noter que pour les systèmes réels $n \geq m$. Den(p)=0 et n sont appelés respectivement l'équation caractéristique et l'ordre du système.

Exemple

Trouver la fonction de transfert du système décrit par l'équation différentielle suivante :

$$3s'(t) + 7s(t) = 5e(t) \quad avec \quad s(0) = 0$$

Trouver la réponse de ce système à une excitation en échelon unitaire :

Réponse

La fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{5}{3p + 7}$$

et la réponse indicielle de ce système est :

$$s(t) = \frac{5}{7}\left[1 - e^{\left(-\frac{7t}{3}\right)}\right]u(t)$$

Cas de conditions initiales non nulles

La fonction de transfert est toujours ***H(p)***, car cette dernière est liée à la structure du système et non aux conditions initiales, toutefois dans ce cas précis on doit tenir compte des conditions initiales dans le calcul de la réponse ***s(t)***.

Exemple

Trouver la réponse indicielle du système décrit par l'équation différentielle suivante :

$$3s'(t) + 7s(t) = 5e(t) \quad avec \quad s(0) = s_0$$

Réponse : Après transformation on obtient l'expression :

$$S(p) = \frac{5E(p)}{3p + 7} + \frac{3s_0}{3p + 7}$$

$$\Rightarrow \quad s(t) = \left[\frac{5}{7} - \frac{5}{7}e^{\left(-\frac{7t}{3}\right)} + s_0 e^{\left(-\frac{7t}{3}\right)}\right]u(t)$$

Les écritures standards des fonctions de transfert

Noter que les fonctions de transfert des systèmes réels peuvent s'écrire sous l'une des deux formes suivantes :

i. **Forme des constantes de temps (ou de Bode)**

$$\boldsymbol{H(p) = \frac{K}{p^{\alpha}} \cdot \frac{\prod_{j=1}^{m}(1 + T_{zj}p)}{\prod_{i=1}^{n}(1 + T_{pi}p)}} \qquad avec \qquad \boldsymbol{K = \frac{b_0}{a_{\alpha+1}}}$$

Lorsque α = 0, le coefficient *K* est appelé ***gain statique***, c'est le gain du système en régime permanent. Lorsque α = 1, on parle de ***gain en vitesse***. On peut exprimer la relation entre le facteur d'Evans et le gain.

$$\boldsymbol{K = k \prod_{j=1}^{m}(-z_j) \Big/ \prod_{i=\alpha+1}^{n}(-p_i)}$$

Si le polynôme compte une paire de racines complexes, on modifie pour faire apparaître la pulsation naturelle ω_0 et le facteur d'amortissement ξ ; en effet, des constantes de temps complexes n'auraient pas de sens physique. On donne en un exemple pour le dénominateur.

$$\boldsymbol{H(p) = \frac{K}{p^{\alpha}} \cdot \frac{\prod_{j=1}^{m}(1 + T_{zj}p)}{\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right) \cdot \prod_{i=\alpha+1}^{n-2}(1 + T_{pi}p)}}$$

ii. **Forme des pôles et zéros (ou d'Evans)**

$$\boldsymbol{H(p) = \frac{K'}{p^{\alpha}} \cdot \frac{\prod_{j=1}^{m}(p + z_j)}{\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right) \cdot \prod_{i=\alpha+1}^{n-2}(p + p_i)}}$$

iii. **Classification**

Pour identifier rapidement le genre de comportement d'un système, on a l'habitude d'utiliser deux critères.

- ***L'ordre d'un système*** est défini par l'ordre ***n*** de l'équation caractéristique, qui est égal au nombre de pôles de la fonction de transfert. C'est encore égal au nombre d'équations différentielles linéairement indépendantes du premier degré qui sont nécessaires et suffisantes pour décrire le système avec une représentation d'état.
- ***Le type d'un système*** est défini par le nombre d'intégrations pures qu'il admet. Cela correspond au degré $\boldsymbol{\alpha}$ de la variable ***p*** qu'on peut mettre en évidence au numérateur de la fonction de transfert.

- On appelle encore ***système fondamental*** un système qui n'admet pas de zéro et dont le type est **0**. Certains auteurs restreignent encore la définition aux ordres **1** et **2**.

3.10.1.3. Les différentes interprétations de la fonction de transfert

- **La 1ière interprétation**

- **Excitation avec une impulsion unitaire**

$$\boldsymbol{si} \qquad \boldsymbol{e(t) = \delta(t) \Rightarrow E(p) = 1 \Rightarrow S(p) = H(p) \Rightarrow s(t) = h(t)}$$

Par conséquent, la fonction de transfert d'un système est la transformée de Laplace de sa réponse impulsionnelle h(t).

- **La 2ième interprétation**

- **Excitation avec un échelon unitaire**

$$\boldsymbol{si} \qquad \boldsymbol{e(t) = u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{1}{p} \Rightarrow S(p) = \frac{H(p)}{p} \Rightarrow}$$

Donc, en notant par ***q(t)*** la réponse indicielle (réponse à un échelon unitaire), l'équation précédente devient :

$$\boldsymbol{H(p) = pS(p) = p \cdot L\{q(t)\} \;\Rightarrow\; h(t) = dq(t)/dt}$$

Par conséquent la fonction de transfert d'un système est la transformée de Laplace de la dérivée de sa réponse indicielle ***q(t).***

Conclusion :

Tout système peut donc être caractérisé aussi bien par sa fonction de transfert ***H(p)***, qu'avec ses réponses indicielle ***q(t)*** (unitaire) ou impulsionnelle ***h(t).***

- **La 3ième interprétation**

- **Excitation avec un signal sinusoïdal**

$$si \;\; e(t) = e_0 \sin(\omega t) u(t) \;\Rightarrow\; E(p) = {e_0\omega}\big/{(p^2+\omega^2)} \;\Rightarrow\; S(p) = {e_0\omega H(p)}\big/{(p^2+\omega^2)}$$

$$\Rightarrow \; S(p) = \frac{e_0\omega H(p)}{(p^2+\omega^2)} = \frac{e_0\omega H(p)}{(p+j\omega)(p-j\omega)} = \frac{A_1}{(p+j\omega)} + \frac{A_2}{(p-j\omega)}$$
$$+ \sum des \;\; termes \;\; associés \;\; aux \;\; autres \;\; poles \;\; de \;\; H(p)$$

Par conséquent *S(p)* est constitué de deux parties à savoir :

- 1ière partie : correspond à une fonction oscillante permanente
- 2ième partie : correspond à une fonction transitoire qui s'atténue pour devenir nulle après un temps assez long (bien sûr si H(p) est stable : c'est à dire si ses pôles sont à partie réelle négative).

$$s(t) = s_p(t) + s_t(t)$$

Mais si on s'intéresse uniquement à la réponse permanente $s_p(t)$ de la solution, celle-ci est donnée par :

$$s_p(t) = A_1 e^{-j\omega t} + A_2 e^{j\omega t} \quad avec \quad A_2 = A_1^*$$

$$A_1 = \lim_{p \to -j\omega} (p + j\omega) \cdot S(p) = \lim_{p \to -j\omega} \frac{e_0 \omega H(p)}{(p - j\omega)} = \frac{-e_0 H(-j\omega)}{2j}$$

$$A_2 = A_1^* = \lim_{p \to j\omega} (p - j\omega) \cdot S(p) = \lim_{p \to j\omega} \frac{e_0 \omega H(p)}{(p + j\omega)} = \frac{e_0 H(j\omega)}{2j}$$

$$s_p(t) = e_0 \left[\frac{H(j\omega) e^{j\omega t} - H(-j\omega) e^{-j\omega t}}{2j} \right]$$

En posant :

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| \cdot e^{j\theta(\omega)}$$

Alors $s_p(t)$ s'écrira :

$$\boldsymbol{s_p(t) = e_0 |H(j\omega)| sin(\omega t + \theta(\omega)) = e_0 H \cdot sin(\omega t + \theta)}$$

Conclusion

Il apparaît donc, que la connaissance de la fonction de transfert d'un système nous permet d'évaluer sa fonction de transfert harmonique $\boldsymbol{H(j\omega)}$, en remplaçant simplement *p* par ***jω*** et de là, sa réponse fréquentielle harmonique.

Exemple 3 :

Trouver la réponse fréquentielle permanente du système décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\boldsymbol{5s'(t) + 10s(t) = e(t) \quad pour \quad e(t) = e_0 sin(2t) \quad et \quad s(0) = 0}$$

Réponse

$$H(p) = \frac{1}{5p+10} \Rightarrow H(2j) = \frac{1}{10j+10} = \frac{1}{10\sqrt{2}} e^{\left(-j\frac{\pi}{4}\right)} \Rightarrow s_p(t) = 0.0707 sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Exemple 4 :

Soit le système suivant :

$$5s'(t) + 10s(t) = e(t) \quad pour \quad e(t) = e_0 sin(2t) \quad et \quad s(0) = 0$$

a. Trouver l'expression de son régime permanent.

b. Trouver l'expression de sa réponse totale c'est-à-dire :

$$S(p) = L^{-1}[H(p) \cdot E(p)]$$

Réponse

$$H(p) = \frac{2}{1+0.5p} \Rightarrow H(2j) = \frac{2}{(1+j)} = \sqrt{2} e^{\left(-j\frac{\pi}{4}\right)} \Rightarrow s_{max} = 5\sqrt{2} \quad et \quad \theta = -\pi/4$$

$$s_p(t) = 5\sqrt{2} sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$S(p) = \frac{2 * 10}{(1+0.5p)(p^2+4)}$$

$$\Rightarrow \quad s(t) = \underbrace{5\sqrt{2} sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)}_{\substack{Partie\ exprimant\ le\ régime \\ permanent\ (Solution\ forcée)}} + \underbrace{5e^{(-2t)}}_{\substack{Partie\ exprimant\ le\ régime \\ transitoire\ (Solution\ naturelle)}}$$

3.10.1.4. Les différentes fonctions de transfert d'un système bouclé

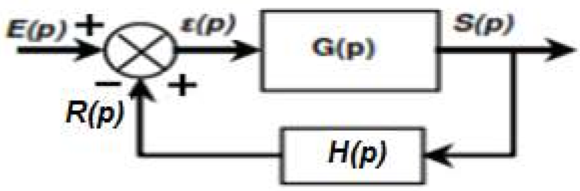


Figure 3.33 : schéma fonctionnel d'un système asservi

3.10.2. Les fonctions de transfert d'un système bouclé

- $G(p)$: *La fonction de transfert de la chaine directe,*
- $H(p)$: *La fonction de transfert de la chaine de retour,*

♦ *La fonction de transfert en boucle ouverte :*

$$\frac{S(p)}{\xi(p)} = G(p)H(p)$$

♦ *La fonction de transfert en boucle fermée :*

$$\frac{R(p)}{E(p)} = \frac{G(p)}{1 \pm G(p)H(p)}$$

♦ *La fonction de transfert de l'erreur :*

$$\frac{\xi(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 \pm G(p)H(p)}$$

3.10.3. Les diagrammes fonctionnels

3.10.3.1. Calcul de la fonction de transfert d'un système complexe

Lorsqu'on a à faire à un système complexe, la première des choses à faire est d'en dessiner son diagramme fonctionnel d'après les équations physiques de ses éléments. Ensuite on doit préciser les fonctions de transfert des différents blocs, puis éliminer les variables intermédiaires et dénouer les boucles entrelacées de manière à ne conserver que la relation entrée-sortie du système complet. Pour cela on fait appel aux théorèmes de transformation des diagrammes fonctionnels.

3.10.3.2. Théorèmes de transformation des diagrammes fonctionnels

Pour rester dans un contexte très général, on désignera chaque les bloc par sa fonction de transfert $G_1(p)$, $G_2(p)$ *ou* $G_{eq}(p)$ qui peuvent être constantes ou dépendre de la variable complexe p. On donne ici les principaux théorèmes, sans prétendre qu'ils sont exhaustifs.

3.10.3.3. Association de blocs

Pour les combinaisons de blocs on peut mentionner les règles de base suivantes :

i. Association d'éléments en cascade

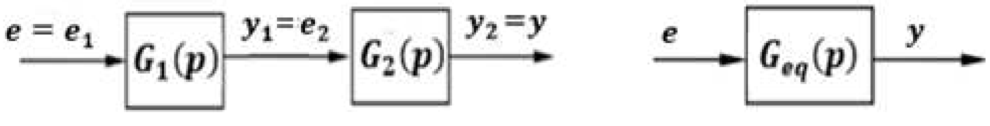


Figure 3.34 : Blocs en cascade.

$$G_{eq}(p) = G_1(p) \cdot G_2(p)$$

ii. Association d'éléments en parallèle

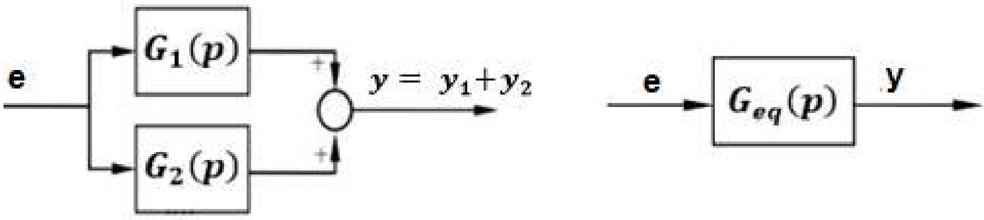


Figure 3.35 : Blocs en parallèle.

$$G_{eq}(p) = G_1(p) + G_2(p)$$

iii. Retrait d'un bloc d'une boucle d'action

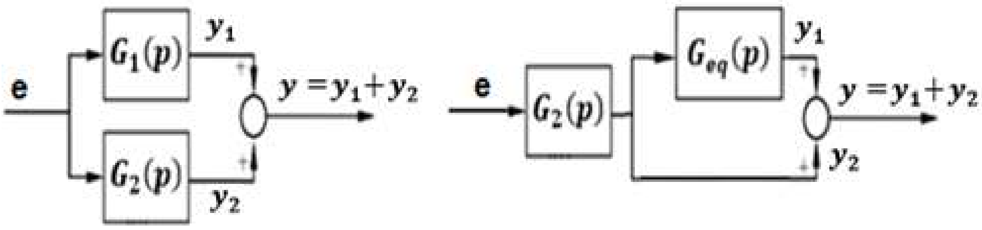


Figure 3.36 : Retrait d'un bloc d'une boucle d'action

$$G_{eq}(p) = G_1(p)/G_2(p)$$

iv. Elimination d'une boucle de retour

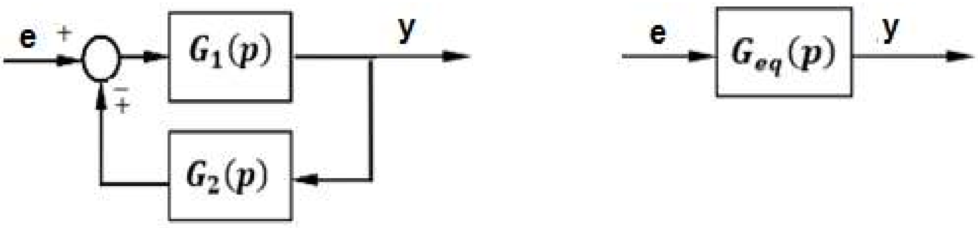


Figure 3.37 : Boucle à retour non unitaire

$$G_{eq}(p) = \frac{G_1(p)}{1 \pm G_1(p)G_2(p)}$$

- Elimination d'une boucle à retour unitaire

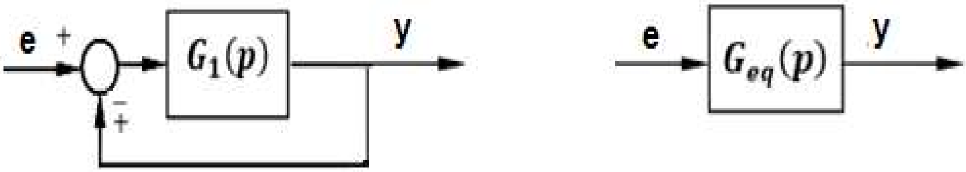


Figure 3.38 : Système asservi (Boucle à retour unitaire)

$$G_{eq}(p) = \frac{G_1(p)}{1 \pm G_1(p)}$$

v. Retrait d'un bloc d'une boucle de retour

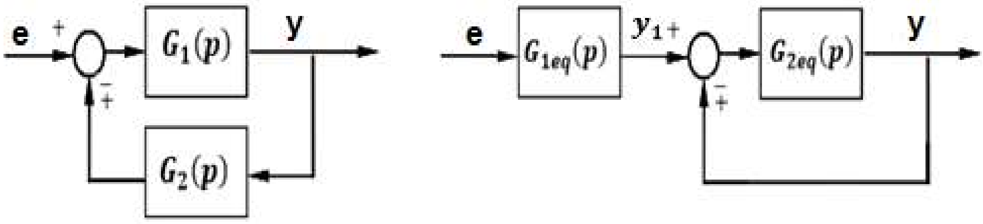


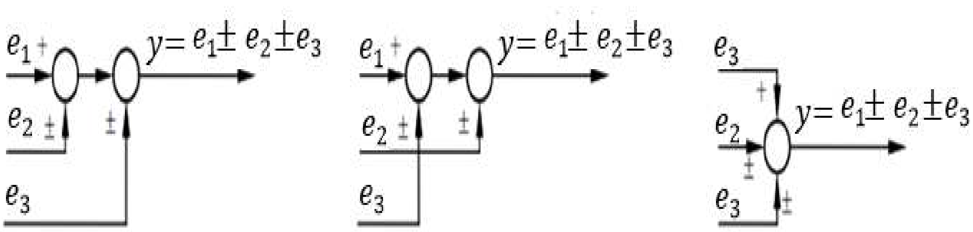
Figure 3.39 : Extraction d'un bloc hors d'une boucle de retour

$$\boldsymbol{G_{1eq}(p) = 1/G_2(p)} \qquad et \qquad \boldsymbol{G_{2eq}(p) = G_1(p)G_2(p)}$$

Par ces transformations, on peut faire disparaître des variables internes ou même faire apparaître des grandeurs virtuelles non physiques.

3.10.3.4. Déplacements de sommateurs

Pour les sommateurs on peut citer trois règles de base. On peut permuter des sommateurs en cascade ou les remplacer par un sommateur équivalent. Cette propriété découle de la commutativité de l'addition. On peut aussi avoir besoin de déplacer un sommateur en amont ou en aval d'un bloc.



$$\boldsymbol{y = e_1 \pm e_2 \pm e_3}$$

Figure 3.40 : Redisposition de sommateurs.

3.10.3.5. Déplacement d'un sommateur

i. **En amont d'un bloc**

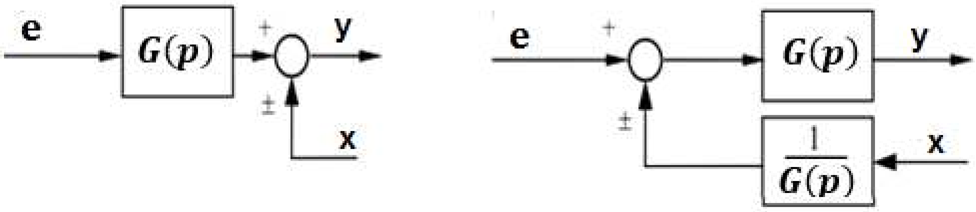


Figure 3.41 : Déplacement de sommateur en amont d'un bloc

$$\boldsymbol{Y(p) = E(p)G(p) \pm X(p) = G(p)\left(E(p) \pm \frac{X(p)}{G(p)}\right)}$$

$$\boldsymbol{Y(p) = E_1(p) \pm E_2(p) \pm E_3(p)}$$

ii. **En aval d'un bloc**

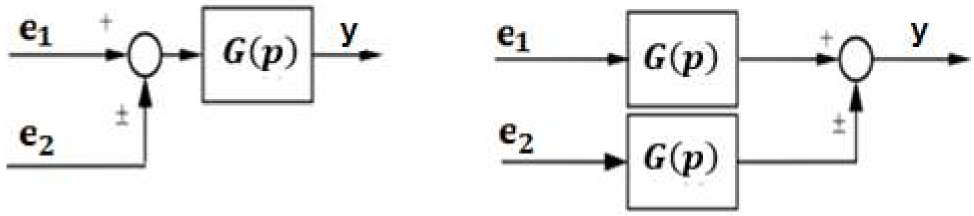


Figure 3.42 : Déplacement de sommateur en aval d'un bloc.

$$Y(p) = G(p)\big(E_1(p) \pm E_2(p)\big)$$

3.10.3.6. Déplacements d'un point de dérivation

i. **En aval d'un bloc**

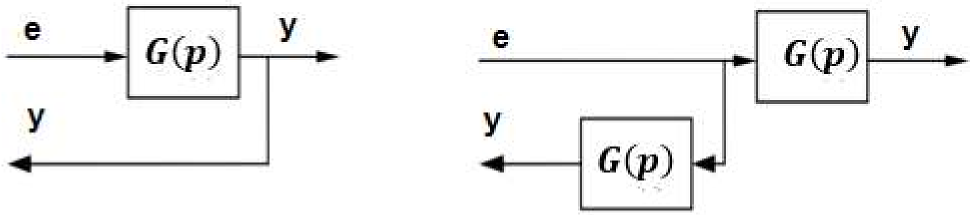


Figure 3.43 : Déplacement d'un point de dérivation en amont d'un bloc

$$Y(p) = G(p)E(p)$$

ii. **En amont d'un bloc**

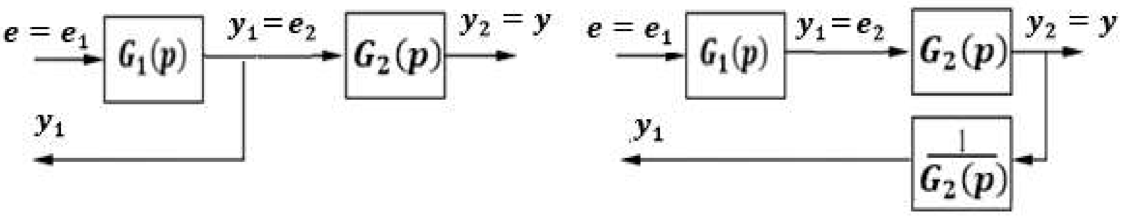


Figure 3.44 : Déplacement d'un point de dérivation en aval d'un bloc.

$$Y_1(p) = G_1(p)E_1(p) = G_1(p)G_2(p)\frac{1}{G_2(p)}E_1(p)$$

Pour les embranchements, les règles sont très voisines de celles des sommateurs ou comparateurs.

En appliquant ces règles, on peut par exemple réduire un schéma compliqué formé de blocs élémentaires à un bloc unique d'expression compliquée.

3.10.3.7. Transformation des diagrammes fonctionnels (SISO)

La transformation se fait suivant les étapes suivantes :

1) Associer tous les éléments en série
2) Associer tous les éléments en parallèle
3) Éliminer toutes les boucles de retour non principales
4) Faire passer les comparateurs à gauche et le point de dérivation à droite de la boucle principale.
5) Répéter les étapes 1 à 4 jusqu'à l'obtention de la forme canonique pour un signal d'entrée particulier.
6) Répéter les étapes de 1 à 5 pour chaque signal de sortie.

- **Exemple 5 :** Déterminez la fonction de transfert ***T(p)=S(p)/E(p).***

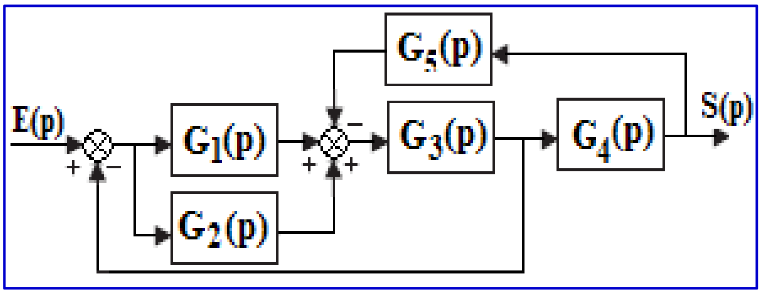


Figure 3.45 : Diagramme fonctionnel d'un S. A.

3.10.3.8. Transformation des diagrammes fonctionnels (MIMO)

Pour connaitre le comportement d'un système linéaire quand on lui applique plusieurs signaux simultanément en ses différents points, on traite chaque signal indépendamment des autres, et la sortie produite par tous les signaux agissant simultanément se calcule comme suit :

1) Rendre tous les signaux d'entrée nuls sauf un seul,
2) Mettre le diagramme sous forme canonique en utilisant les théorèmes précédents,
3) Calculer la réponse produite par le signal choisi agissant seul,
4) Répéter les étapes 1 à 3 pour chacun des signaux restants,
5) Ajouter algébriquement toutes les réponses calculées dans les étapes 1 à 3. Cette somme représente la grandeur de sortie totale obtenue quand tous les signaux d'entrée agissent ensemble.

Performances des systèmes linéaires

4.1. Analyse temporelle des systèmes du 1^{ier} et 2^{ième} ordre

4.1.1. But

C'est d'étudié

- **La stabilité** : plus exactement la stabilité relative ou degré de stabilité.
- **La précision** : Ou l'erreur permise en régime permanent.
- **La rapidité** : Ou la vitesse du régime transitoire.

4.2. Les différentes méthodes d'analyse

On dispose de deux approches pour caractériser les systèmes asservis continus linéaires :

L'approche temporelle (**Analyse Transitoire**) et l'approche fréquentielle (**Analyse Harmonique**). La première approche qui se base sur la résolution des équations intégro-différentielles linéaires à coefficients constants pour trouver la solution en régime transitoire et permanent est difficile à utiliser surtout pour les systèmes d'ordre supérieur, ainsi que pour déterminer la stabilité relative. Par contre la seconde démarche qui rassemble les méthodes graphiques (Lieux de **BODE**, lieu de **NYQUIST**, lieu de **BLACK**) est plus simple et directe. Les trois caractéristiques précédentes sont exprimées différemment selon que l'on utilise l'approche transitoire ou harmonique. En général, on définit les spécifications temporelles à partir de la réponse à :

- Un échelon, une Rampe, ou une Impulsion, etc.

Pour cela l'étude de quelques systèmes fondamentaux sert d'introduction.

i. Analyse Transitoire

4.3. Le système du premier ordre

4.3.1. Définition

On appelle système du premier ordre, tout système décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du type :

$$Ts'(t) + s(t) = Ke(t) \tag{4.1}$$

- **K** : **Le gain statique :** il est sans dimension si ***s(t)*** et ***e(t)*** sont de même nature.
- **T** : **La constante de temps :** Elle caractérise la ***rapidité*** du régime transitoire, son unité est la seconde.

4.3.1.1. Fonction de transfert

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{Tp+1} \tag{4.2}$$

4.3.2. Réponse aux entrées typiques

4.3.2.1. Réponse à un échelon

Soit : $e(t) = a_0 u(t) \rightleftharpoons E(p) = {a_0}/{p}$ $\quad et$

$$s(t) = a_0 q(t) = ka_0\left(1 - e^{-\left(\frac{t}{T}\right)}\right) \tag{4.3}$$

$q(t)$ *est appelée réponse indicielle* ***(réponse à un échelon unitaire).***

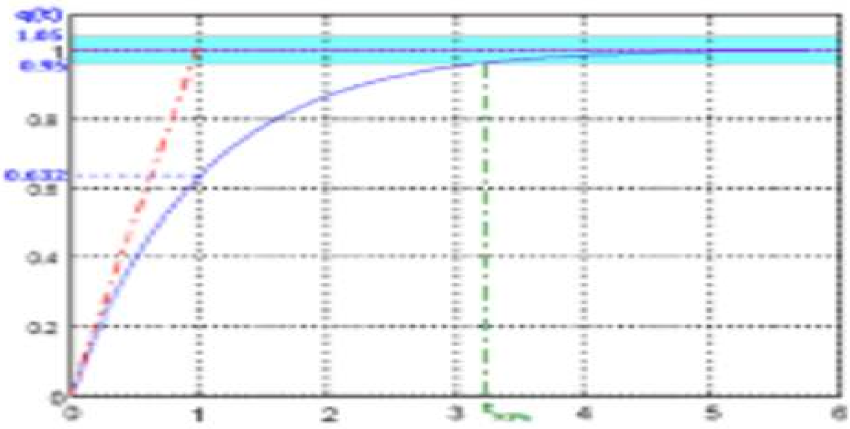


Figure 4.1 : Réponse indicielle (à un échelon unitaire) d'un système du 1ier ordre

4.3.2.2. Le temps de stabilisation (t_s) à 5% (ou à 2%)

- **Définition**

C'est le temps au bout duquel le système atteint son régime définitif à **±5% (±2)** prés et de ne jamais plus s'écarter.

$$\boxed{t_{s5\%} \cong \frac{1}{e^3} \cong 3T \qquad et \qquad t_{s2\%} \cong \frac{1}{e^4} \cong 4T} \tag{4.4}$$

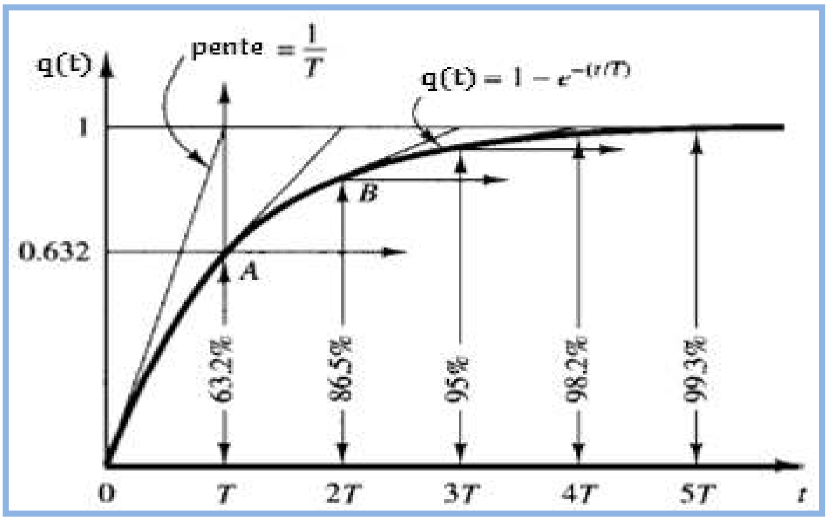


Figure 4.2 : Réponse à indicielle d'un système du 1ier ordre avec des ordres de précision

Le temps de réponse pour différentes valeurs de **n%** est donné dans le tableau 1.

Le temps de réponse est toujours proportionnel à la constante de temps du système et c'est en agissant sur la valeur des éléments qui la détermine que la réduction du temps de réponse peut être opérée.

n%	tr (n%)
10	2.3 τ
5	3 τ
2	3.9 τ
1	4.6 τ
0.1	6.9 τ

Tableau 1 : Le temps de réponse pour différentes valeurs de **n%**

4.3.2.3. Réponse à une rampe

Soit :

$$e(t) = a_0 t u(t) \rightleftharpoons E(p) = {}^{a_0}/_{p^2} \quad et \quad s(t) = a_0 q(t) = k a_0 \left(t - T + T e^{-\left(\frac{t}{T}\right)}\right) \quad (4.5)$$

On vérifie bien que : $s(t) = \int q(t)dt$ à une constante près.

4.3.2.4. Réponse à une impulsion

$$e(t) = a_0 \delta(t) \rightleftharpoons E(p) = a_0 \quad et \quad s(t) = k a_0 e^{-\left(\frac{t}{T}\right)} \Rightarrow \quad s(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (4.6)$$

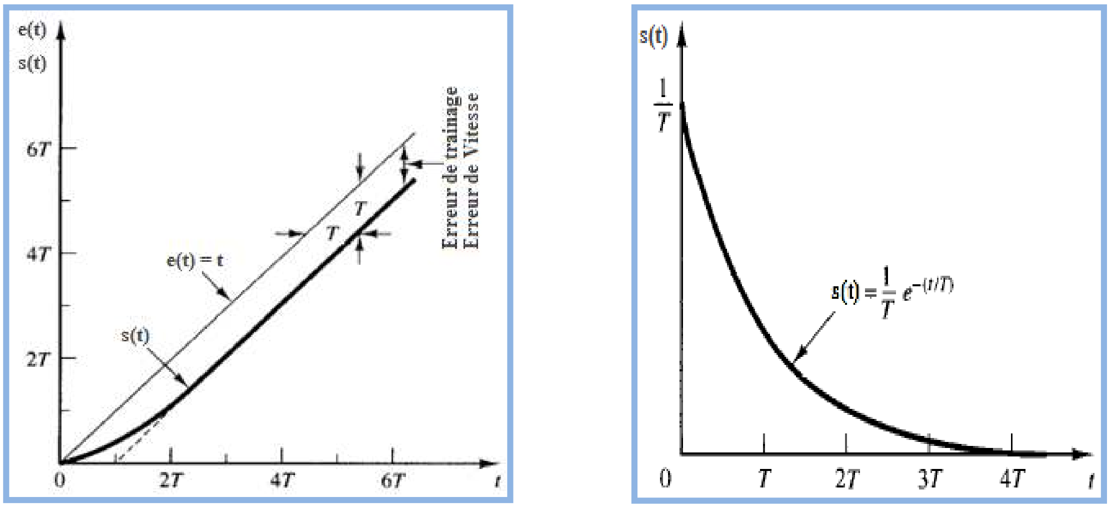


Figure 4.3 : (a) Réponse à une rampe (b) Réponse à une impulsion d'un système du 1ier ordre

4.4. Système du second ordre normalisé

4.4.1. Définition

On appelle système du deuxième ordre normalisé, tout système décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du type :

$$s''(t) + 2z\omega_n s'(t) + \omega_n^2 s(t) = k\omega_n^2 e(t) \qquad \textbf{(4.7)}$$

Dans laquelle :

- **k** : est le gain statique.
- ω_n : la pulsation naturelle, ou non amortie (rad / s).
- **z** (ξ) : est le facteur d'amortissement (sans dimension).

- **Exemples de système du 2e ordre**

4.4.2. Fonction de transfert

Si le système part du repos, c'est à dire toutes ses conditions initiales sont nulles :

$$(s(0) = s'(0) = s''(0) = e(0) = 0 \qquad si\ t \leq 0,\ \ alors :)$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2z\omega_n p + \omega_n^2} \qquad \textbf{(4.8)}$$

4.4.3. Réponse aux entrées typiques

4.4.3.1. Réponse à un échelon

$$e(t) = a_0 u(t) \rightleftharpoons E(p) = {}^{a_0}/_{p}$$

- **La valeur initiale**

$$s(0^+) = \lim_{p\to\infty} pS(p) = 0 \qquad et \qquad s'(0^+) = \lim_{p\to\infty} p[pS(p) - s(0)] = 0$$

$\Rightarrow$ Tangente à la réponse indicielle, au point 0 est horizontale.

La valeur Finale

$$s(\infty) = \lim_{p \to 0} pS(p) = ka_0$$

4.4.3.2. Les différentes réponses

Ce sont les racines du polynôme : $p^2 + 2z\omega_n p + \omega_n^2 = 0$ qui déterminent le type de réponse.

Calculons son discriminent réduit : $\Delta' = \omega_n^2(z^2 - 1)$

Donc si :

$$\begin{cases} z > 1 & \sqrt{\Delta'} = \pm\omega_n\sqrt{z^2 - 1} & \Rightarrow 2 \text{ racines réelles } (\textbf{régime hyper amorti}) \\ z = 1 & \sqrt{\Delta'} = 0 & \Rightarrow 1 \text{ racine double } (\textbf{régime critique}) \\ z < 1 & \sqrt{\Delta'} = \pm j\omega_n\sqrt{1 - z^2} & \Rightarrow 2 \text{ racines complexes } (\textbf{régime sous amorti}) \end{cases}$$

Si (z > 1) : Régime hyper amorti

$$S(p) = \frac{Ka_0}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)} \qquad T_{1,2} = \frac{1}{z\omega_n \pm \omega_n\sqrt{z^2 - 1}}$$

$$s(t) = Ka_0 + \frac{Ka_0}{T_2 - T_1}\left[T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}}\right]$$

Si (z = 1) : Régime critique

$$p_{1,2} = -1/T \qquad donc \qquad T = 1/\omega_n$$

$$s(t) = Ka_0\{1 - e^{-\omega_n t}[1 + \omega_n t]\} \quad \text{pour} \quad t \geq 0$$

<u>Si (z < 1) : Régime sous amorti oscillatoire</u>

$$p_{1,2} = -z\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - z^2}\ , \ \ soit \quad \omega_p = \omega_n\sqrt{1 - z^2} \quad \Rightarrow \quad p_{1,2} = -z\omega_n \pm j\omega_p$$

$$s(t) = Ka_0\left[1 - \frac{e^{-z\omega_n t}}{\sqrt{1 - z^2}} sin\left(\omega_n\sqrt{1 - z^2}\, t + arctg\left(\frac{\sqrt{1 - z^2}}{z}\right)\right)\right]$$

<u>N. B.</u> : ***Le régime transitoire est formé d'oscillations de pulsation :***

$$\omega_p = \omega_n\sqrt{1 - z^2}$$

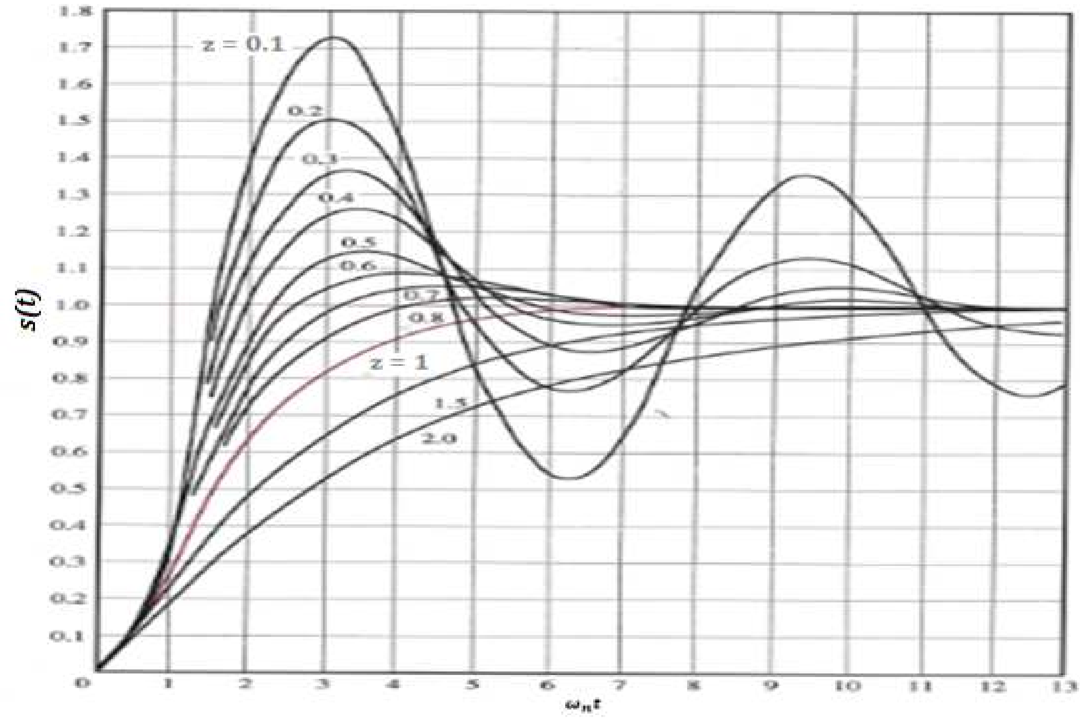


Figure (4.4) : Réponses indicielles de quelques systèmes du 2ème ordre

4.4.3.3. Les paramètres de la réponse indicielle

a. Les Fréquences :

a.1. La fréquence naturelle :

$$f_n = \omega_n / 2\pi$$

A cette fréquence le déphasage entre l'entrée et la sortie est de 90° (π / 2). C'est donc la fréquence à laquelle l'axe des imaginaires coupe le lieu de transfert.

a.2. La Fréquence Propre :

$$f_P = \omega_p / 2\pi$$

C'est la fréquence des oscillations du régime transitoire de la réponse à un échelon ou à une impulsion d'un système du 2° ordre.

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - z^2}$$

a.3. La Fréquence de résonance :

$$f_r = \omega_r / 2\pi \qquad [z < 0.7]$$

On appelle fréquence de résonance d'un système du 2ième ordre oscillatoire (**z < 1**), la fréquence f_r pour laquelle il se produit le maximum du module de la fonction de transfert :

$$\frac{d\|H(j\omega)\|}{d\omega} = 0 \quad pour \quad \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2z^2}$$

a.4. Le Facteur de résonance ou de Surtension Q ou M_r

La valeur maximale du gain (rapport des amplitudes) est appelée facteur de résonance ou de surtension **Q** ou **M_r,** et la fréquence pour laquelle a lieu ce maximum est la fréquence de résonance f_r**.** Il est lié au coefficient d'amortissement z par la relation :

$$Q = M_r = \frac{1}{2z\sqrt{1-z^2}}$$

N. B. : L'importance de cette notion du facteur de résonance **Q (M_r)** consiste dans la possibilité de sa généralisation aux systèmes d'ordre supérieur à 2.

b. Les autres spécifications de la réponse indicielle

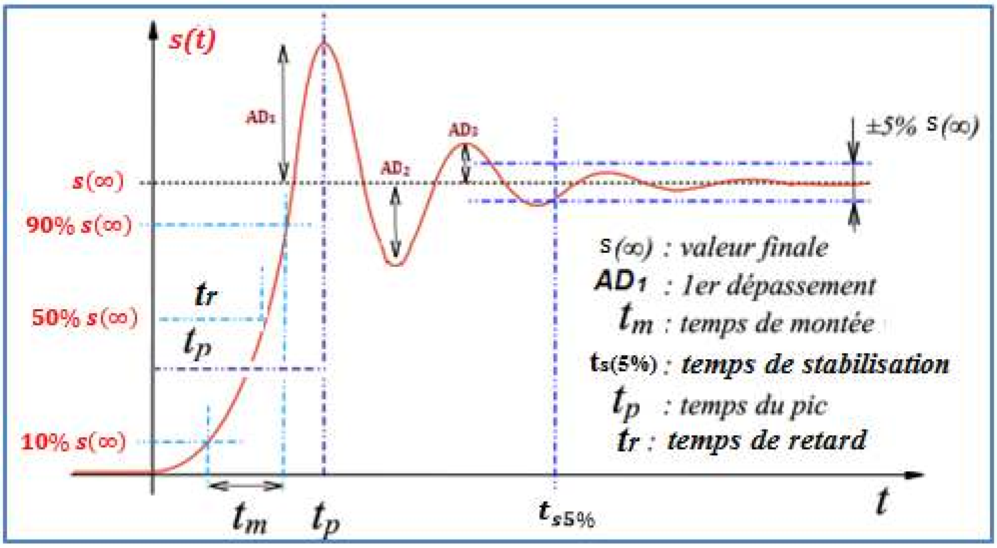


Figure (4.5) : Réponse indicielle du système du 2ème ordre avec quelques spécifications

- **t_r** : Temps de retard (Delay time)
- **t_m** : Temps de monté (Rise time)
- **t_s :** Temps de stabilisation de la réponse à : 2 % ou 5 % (Setting time)
- **t_{dn}** : Temps des dépassements (extremums) (Temps des pics **tp**).
- **A_{dn}** : Amplitude des dépassements (en % de la valeur finale) est donnée par :

$$A_{dn}\% = \frac{s(t_{dn}) - s(\infty)}{s(\infty)} \cdot 100\%$$

Pour calculer les A_{dn}, il faut trouver les extremums de $s(t)$, pour $z < 1$.

Si **z<1**

$$s(t) = Ka_0\left[1 - \frac{e^{-z\omega_n t}}{\sqrt{1-z^2}} sin\left(\omega_p t + arctg\left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right)\right)\right]$$

Pour $k = a_0 = 1$

$$s(t) = \left[1 - \frac{e^{-z\omega_n t}}{\sqrt{1-z^2}} sin\left(\omega_p t + arctg\left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right)\right)\right]$$

b.1. Recherche des extremums

b.1.1. Les lieux des extremums (ou des dépassements)

On les calcule à partir de :

$$\left.\frac{ds(t)}{dt}\right|_{t=t_{dn}} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{dn} = \frac{n\pi}{\omega_p}$$

b.1.2. Les amplitudes des dépassements

Donc les dépassements A_{dn} auront lieu aux instants t_{dn}, et ont pour ordonnées $s(t_{dn})$. On démontre que leur expression s'écrit sous la forme :

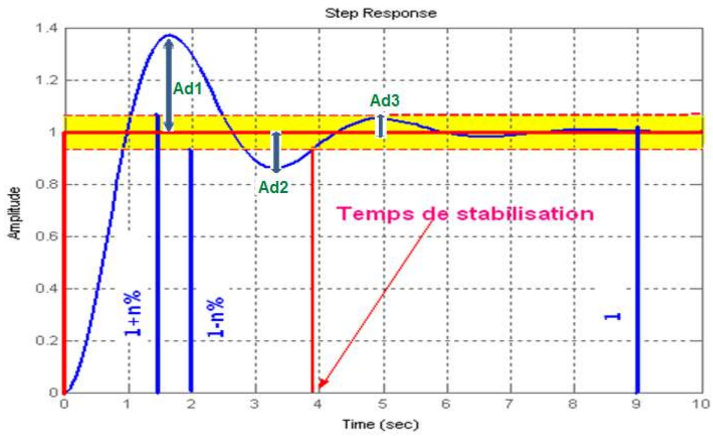


Figure (4.6) : Réponse indicielle du système du 2ème ordre avec quelques spécifications

$$s(t_{dn}) = Ka_0\left[1 - (-1)^n e^{\frac{-zn\pi}{\sqrt{1-z^2}}}\right]$$

Les dépassements A_{dn} ont pour amplitude :

$$A_{dn}\% = 100 e^{\frac{-zn\pi}{\sqrt{1-z^2}}}\% \qquad \text{(Indépendants de la pulsation naturelle } \omega_n\text{).}$$

N.B.

$$\frac{A_{d1}}{A_{d3}} = e^{\left(\frac{2z\pi}{\sqrt{1-z^2}}\right)}$$

d'où :

$$z = ln\left[\frac{A_{d1}}{A_{d3}}\right] \Big/ \sqrt{4\pi^2 + ln^2\left[\frac{A_{d1}}{A_{d3}}\right]}$$

b.1.3. Relation entre Q et Ad_1 %

Le dépassement maximal est souvent utilisé pour mesurer la stabilité relative d'un système de contrôle. Un système avec un dépassement important est généralement indésirable. À des fins de conception, le dépassement maximal est souvent indiqué sous forme de spécification temporelle. La réponse indicielle de la figure 4-5 montre que le dépassement maximal se produit au premier dépassement.

$$A_{d1}\% = 100e^{\frac{-z\pi}{\sqrt{1-z^2}}}\% \qquad \text{et} \qquad Q = 1/2z\sqrt{1-z^2}$$

$$Q = \frac{1+ln^2\left(\frac{100}{A_{d1}}\right)}{\pi^2} \Bigg/ \frac{2ln\left(\frac{100}{A_{d1}}\right)}{\pi}$$

c. Le temps de retard t_r (Delay time t_d) et le temps de stabilisation (setting time : t_s)

Il est très difficile de déterminer les expressions analytiques du temps de **retard t_d, du** temps de **mise en route t_r,** temps de **stabilisation t_s**, même pour le système du ***2^ième^*** ordre normalisé.

c.1. Le temps de retard (Delay time t_d)

Le temps de retard t_d est défini comme le temps requis à la réponse indicielle ***s(t),*** pour passer de ***0*** à ***50%*** de sa valeur finale.

c.1.1. Le calcul de t_d

Pour trouver la valeur du temps t_d, il faut résoudre l'équation :

$$s(t_d) = 0{,}5 \qquad \text{pour } z < 1 \;\; et \; z > 1$$

Or la solution analytique de cette équation n'existe pas. Il faut donc la résoudre soit numériquement soit en faisant des approximations. La seconde manière consiste à dessiner $\omega_n t_d$ en fonction de z, comme le montre la figure (4.7), puis approcher la courbe en question par une fonction polynomiale (**Méthode d'interpolation**) sur la plage $0 < z < 1$.

De la figure (4.7), le temps de retard pour le système du 2ième ordre normalisé peut être approché soit par une équation du premier ordre en **z** :

$$t_d \cong \frac{1 + 0{,}7z}{\omega_n} \qquad 0 < z < 1$$

Soit par une équation du 2ième ordre en z, pour une meilleure approximation.

$$t_d \cong \frac{1,1 + 0,125z + 0,469z^2}{\omega_n} \qquad 0 < z < 1$$

c.2. Le temps de mise en route ou de montée (Rise time t_r)

Est le temps requis à la réponse indicielle ***s(t)***, pour passer de **10 à 90% (ou de 5 à 95%)** ou bien de (**0 à 100%**) de sa valeur finale, comme le montre la figure (4.5). Ce dernier est considéré aussi comme l'inverse de la pente de la réponse indicielle à l'instant où cette dernière est à **50%** de sa valeur finale.

c.2.1. Le calcul de t_r

Théoriquement, pour calculer la valeur de t_r, il faut résoudre les équations :

$s(t_a) = 0,1$, $s(t_b) = 0,9$ pour $z < 1$, puis calculez $\omega_n t_r = \omega_n t_b - \omega_n t_a$.

Ici aussi, la solution analytique n'existe pas, on résout ces équations soit numériquement soit en faisant des approximations. La seconde manière consiste en premier lieu à représenter graphiquement $\omega_n t_r$ en fonction de z, comme le montre la figure (4.5), puis à approcher la courbe en question avec un polynôme, sur la plage des valeurs permises de z.

$$t_r = \frac{0,8 + 2,5z}{\omega_n} \qquad 0 < z < 1$$

De la même manière que précédemment une meilleure approximation pourrait être faite en recourant à une équation du 2$^{\text{ième}}$ ordre en **z**.

$$t_r \cong \frac{1 - 0,4167z + 2,917z^2}{\omega_n} \qquad 0 < z < 1$$

De ce qui précède nous concluons, que les **temps de <u>retard</u> et de <u>mise en route</u> t_r** pour le système du 2$^{\text{ième}}$ ordre normalisé ***<u>sont proportionnels</u> à z <u>et inversement proportionnels</u> à*** ω_n C'est à dire que l'augmentation (***diminution***) de la fréquence naturelle ω_n réduira (***augmentera***) t_r et t_d.

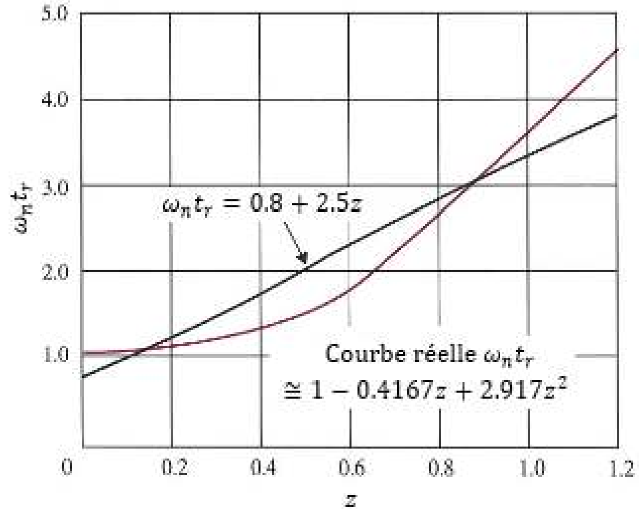


Figure (4.7) : Le temps de mise en retour normalisé en fonction de z

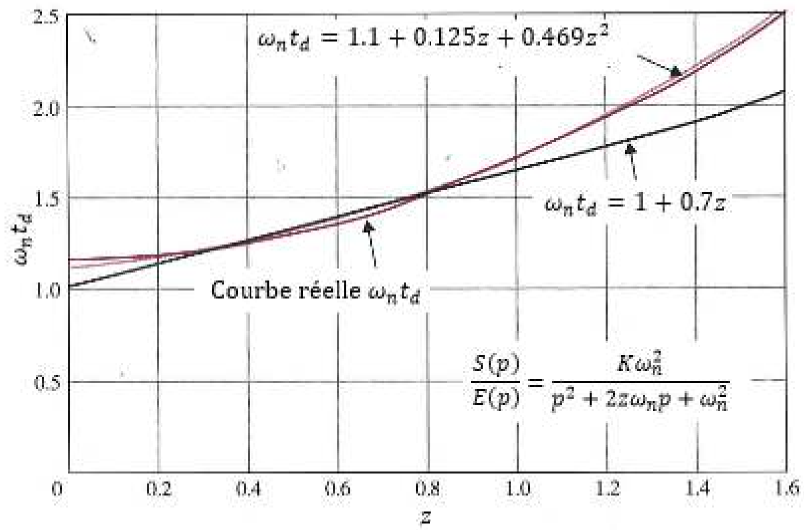


Figure (4.8) : Le temps de retard normalisé en fonction de z

c.3. Le temps de stabilisation à x %

De la figure **(4.9)**, nous voyons que le plus grand dépassement de la réponse indicielle dépasse les **5%** de sa valeur finale, et par conséquent la réponse indicielle peut entrer dans le tuyau $\pm$ **5** % par les deux côtés. Lorsque **z > 0,69,** le plus grand dépassement est inférieur à ***5%*** et par conséquent la réponse indicielle ne peut entrer dans le bande $\pm$ **5** % que par le bas.

Les figures **(4.9** a) et **(4.9** b) montrent les deux situations citées. Le temps de stabilisation présente donc une discontinuité pour $\boldsymbol{z = 0.69}$**.** La description analytique exacte du temps de stabilisation est difficile à obtenir. Toutefois, nous pouvons donner une approximation à $\boldsymbol{t_s}$ lorsque $\boldsymbol{0 < z < 0,69}$**,** en utilisant l'enveloppe supérieure de la sinusoïde amortie de ***s(t)***, comme le montre la figure (**4.9** a). Lorsque le temps de stabilisation correspond à l'intersection avec l'enveloppe supérieure de s(t), la relation suivante a lieu :

$$1 + \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t_s} = 1{,}05$$

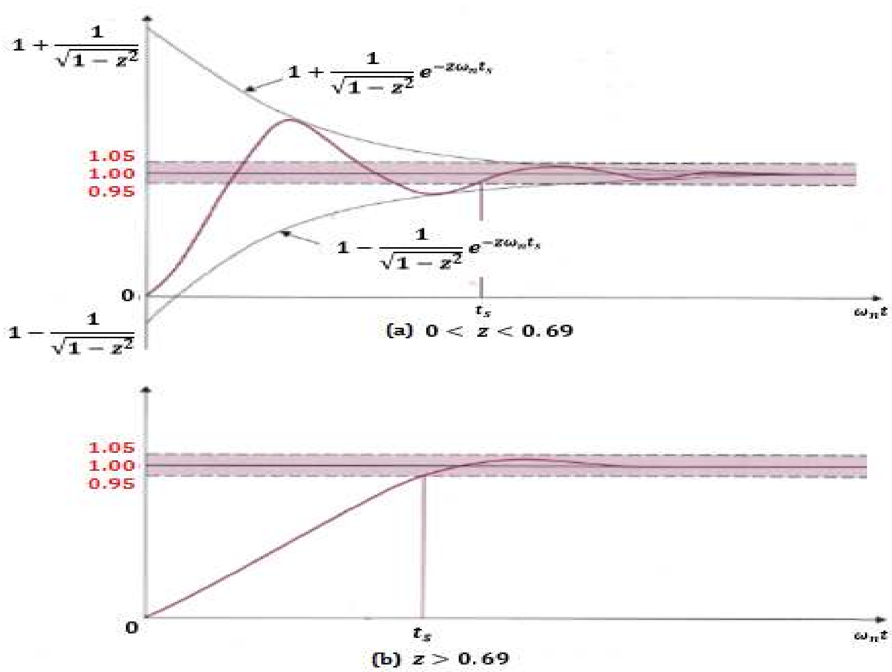


Figure (4.9) : Le temps de stabilisation de la réponse indicielle

La solution de l'une ou l'autre des équations précédentes nous donne :

$$\omega_n t_s = -\frac{1}{z} ln\left(0{,}05\sqrt{1-z^2}\right)$$

Le membre droit de cette équation varie entre 3,0 et 3,32 lorsque **z** varie de **0** à **0,69**. Par conséquent nous pouvons approcher le temps de stabilisation t_s pour le système du 2ième ordre normalisé par :

$$t_s \cong \frac{3,2}{z\omega_n} \qquad 0 < z < 0,69$$

L'approximation serait mauvaise pour les petites valeurs de z (z < **0,3)**. Lorsque l'amortissement est supérieur à **0,69**, la réponse indicielle entre dans la bande $\pm 5\%$ par le côté bas. Nous pouvons montrer en se servant de la courbe de la figure (4.5) que la valeur de $\omega_n t_s$ est toujours proportionnelle à z**.** L'approximation suivante est souvent utilisée pour t_s lorsque z > **0,69 :**

$$t_s \cong \frac{4,5z}{\omega_n} \qquad\qquad z > 0,69$$

Pour $z < 0,69$ le temps de stabilisation est inversement proportionnel à z et ω_n. Une manière pratique pour réduire le temps de stabilisation est d'augmenter ω_n, tout en maintenant z constant. Quoique la réponse devient de plus en plus oscillante le plus grand dépassement dépend seulement de z et peut être contrôlé seul.

Pour $z > 0,69$ le temps de stabilisation ts est proportionnel à z et inversement proportionnel à ω_n . En plus t_s peut être réduit en augmentant ω_n .

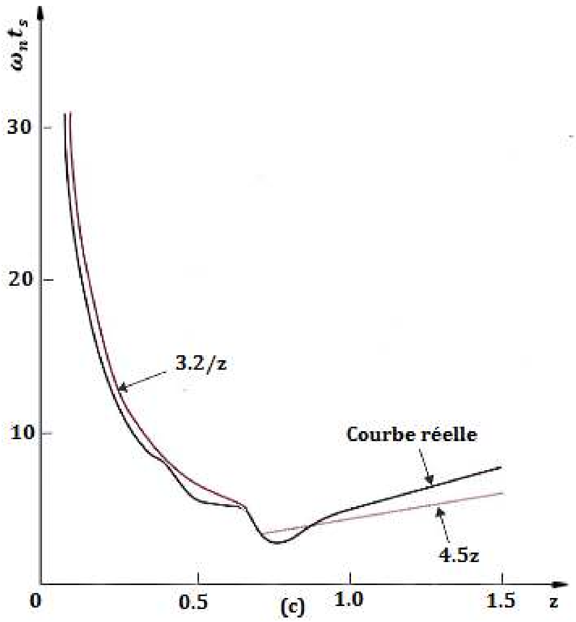


Figure (4. 9 c) :

Il convient de noter que le temps de stabilisation pour $z < 0,69$ est véritablement une mesure de la vitesse à laquelle la réponse indicielle s'élève jusqu'à sa valeur finale. Il semble que, dans ce cas, les temps de montée et de retard devraient être suffisants pour décrire le comportement de la réponse.

Comme son nom l'indique, le temps de stabilisation doit être utilisé pour mesurer la vitesse à laquelle la réponse indicielle se stabilise à sa valeur finale.

Il convient également de souligner que le seuil de *5 %* n'est en aucun cas un chiffre intangible. Des problèmes de conception plus stricts peuvent exiger que la réponse du système s'installe dans un nombre inférieur à *5%* (*2%*).

Il faut garder à l'esprit que, si les définitions de y_{max} , t_{max} , t_d , t_r , et t_s s'appliquent à un système d'ordre quelconque, le coefficient d'amortissement z et la fréquence naturelle non amortie ω_n ne s'appliquent strictement qu'aux systèmes d'ordre secondaire dont la fonction de transfert en boucle fermée est donnée par dans l'équation (4-8). Naturellement, les relations entre t_d , t_r , t_s et z et ω_n ne sont valables que pour le même modèle de système du second ordre. Toutefois, ces relations peuvent être utilisées pour mesurer la performance des systèmes d'ordre supérieur qui peuvent être approximés par des systèmes d'ordre secondaire, à condition que certains de leurs pôles d'ordre supérieur puissent être négligés.

4.5. Les systèmes à retard

4.5.1. Définition :

Ce sont les systèmes dont la réponse s (t) est donnée par :

$$\boldsymbol{s(t) = e(t - T)}$$

4.5.2. Exemple de systèmes à retard

- Retard à la commutation d’un relais
- Retard des lignes de transmission
- Retard dû au transfert de la matière

4.5.3. Fonction de transfert

$$\boldsymbol{S(p) = e^{-Tp}}$$

4.5.4. Réponse aux entrées typiques

i. **À un échelon**

$$\boldsymbol{e(t) = e_0 u(t) \qquad s(t) = e_0 u(t - T)}$$

ii. À une rampe

$$\boldsymbol{e(t) = a_0 t u(t) \qquad s(t) = a_0 (t - T) u(t - T)}$$

iii. À une impulsion :

$$\boldsymbol{e(t) = A\delta(t) \qquad s(t) = A\delta(t - T)}$$

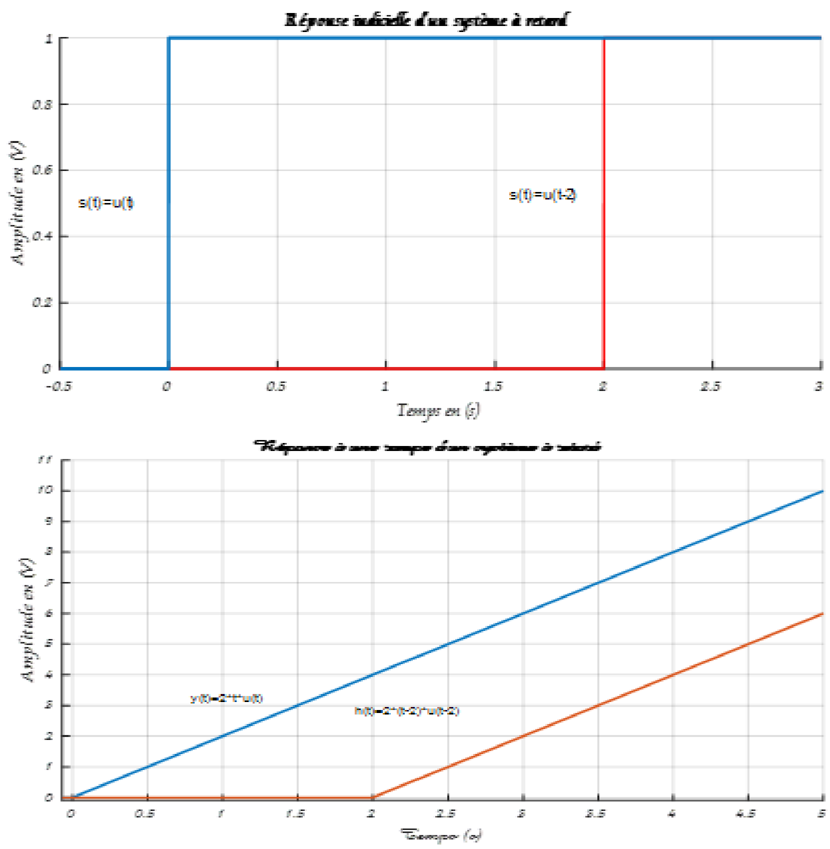


Figure (4. 10) : Réponse temporelles d'un système à retard

4.5.5. Retard et constante de temps

$$s(t+T) = s(t) + T\frac{ds(t)}{dt} + \frac{T^2}{2}\frac{d^2s(t)}{dt^2} + \cdots$$

$$Si \quad T \ll, \quad \text{alors} \quad s(t+T) = s(t) + T\frac{ds(t)}{dt}, \quad \text{ou} \quad \text{bien}$$

$$\frac{1}{1+Tp} = 1 - Tp + Tp^2 + \cdots \quad et \qquad e^{-Tp} = 1 - Tp - \frac{T^2p^{é}}{2}\cdots\cdots$$

4.5.6. Conclusion

Les caractéristiques d'un élément à retard T_0 et d'un système du premier ordre de constante de temps T_0 sont très voisine lorsque T_0 est suffisamment petite.

Par conséquent, et lorsque T_0 est suffisamment petite on pourra remplacer le retard T_0 par une constante de temps T_0 et vice versa.

4.6. Analyse fréquentielle

4.6.1. Objectifs

Définir la réponse en fréquence

- Différentes formes de représentation graphique de la réponse en fréquence :
- Diagramme de Bode, Nyquist, Nichols.
- Utilisation des réponses en fréquence pour l'analyse de la stabilité des systèmes
- Comment utiliser la réponse en fréquence pour définir un gain qui répond aux critères de stabilité.

L'évolution dynamique des systèmes asservis pendant le régime transitoire est souvent analysée par la réponse à des signaux tests. (Impulsion, Échelon, Rampe, parabole).

La méthode fréquentielle permet l'étude du comportement d'un système en régime permanent lorsqu'il est excité par un signal d'entrée de forme sinusoïdale, ***d'amplitude constante*** et de ***fréquence variable***.

4.6.2. Avantages

- Modélisation des fonctions de transferts à partir de mesures physiques,
- Design de compensateur entre le régime permanent et le régime transitoire,
- Détermination de la stabilité des systèmes non-linéaires.

Remarque :

En réalité les signaux d'excitation (d'entrée) sont toujours impurs (i.e. superposés à des signaux parasites) qu'on appelle **BRUITS** de fréquence différentes du signal utile.

Concept de la réponse fréquentielle

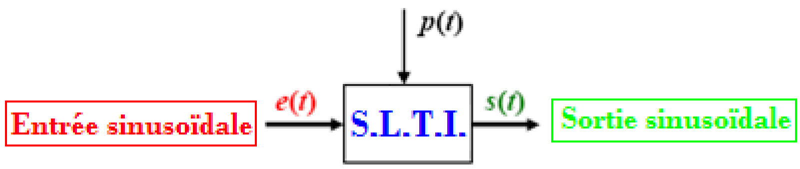


Figure (4.11) : Concept de la réponse fréquentielle

Le bloc S.L.I.T représente la fonction de transfert d'un système linéaire invariant dans le temps.

4.6.3. Mesure de la réponse fréquentielle

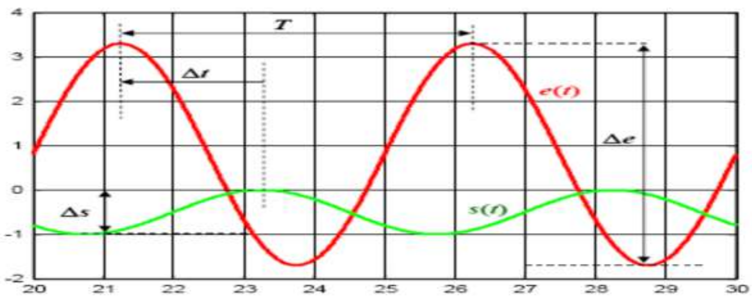


Figure (4.12) : Mesure de la réponse fréquentielle

En $\omega = 2\pi/T$ (régime sinusoïdal établi), H (jω) caractérisée par $\rho(\omega) = \Delta s/\Delta e$ et $\varphi(\omega) = 2\pi\Delta t/T$.

- **Remarque** : Δt souvent négatif … mais pas toujours

4.6.4. Relation fréquentiel - temporel

Compte tenu des théorèmes des valeurs initiale et finale, la réponse fréquentielle **H(jω)** nous informe sur l'effet du système **H** aux temps courts et aux temps longs.

Le "gain" de H aux temps courts est donné par : $\lim_{\omega\to\infty} \mathbf{H}(\mathbf{j}\boldsymbol{\omega})$.

Le "gain" de H aux temps longs est donné par : $\lim_{\omega\to 0} \mathbf{H}(\mathbf{j}\boldsymbol{\omega})$ ·

Le niveau de ρ(ω) en haute fréquence indique ainsi la valeur de l'amplification instantanée de **H**.

Le niveau de ρ(ω) en basse fréquence indique la valeur de l'amplification de **H** en régime permanent : gain statique.

- **Exemple :**

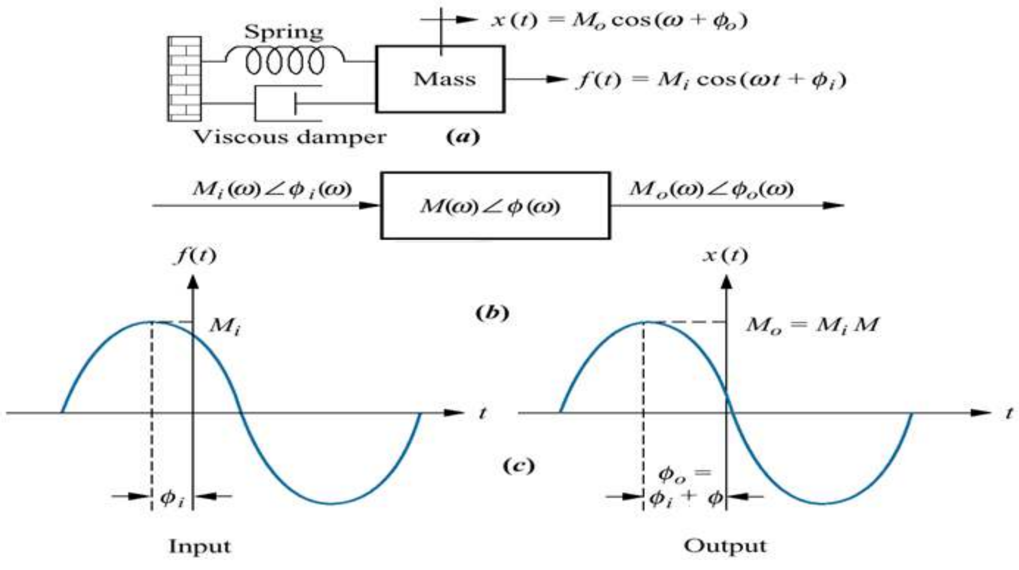


Figure (4.13) : Mesure de la réponse fréquentielle sur un système mécanique

4.6.5. Représentation des phaseurs avec l'équation d'Euler

- Signal d'entrée e(t) : $M_i(\omega)\angle\phi_i(\omega) \Rightarrow M_i(\omega)e^{j\phi_i(\omega)}$
- Signal de sortie s(t) : $M_o(\omega)\angle\phi_o(\omega) \Rightarrow M_o(\omega)e^{j\phi_o(\omega)}$
- Fonction de transfert G(p) : $M_G(\omega)\angle\phi_G(\omega) \Rightarrow M_G(\omega)e^{j\phi_G(\omega)}$
- Signal de sortie s(t) : $M_s(\omega)\angle\phi_s(\omega) \Rightarrow M_s(\omega)e^{j\phi_s(\omega)}$

$$M_o(\omega)e^{j\phi_o(\omega)} = M_i(\omega)e^{j\phi_i(\omega)} \times M_G(\omega)e^{j\phi_G(\omega)}$$
$$M_o(\omega)e^{j\phi_o(\omega)} = M_i(\omega) \times M_G(\omega) \cdot e^{j(\phi_i(\omega)+\phi_G(\omega))}$$

- Si e(t) est une sinusoïde: $e(t) = A\cos(\omega t) \quad \Longrightarrow \quad E(p) = \frac{Ap}{p^2+\omega^2}$

$$S(p) = E(p)\cdot G(p) = \frac{Ap}{p^2+\omega^2}\cdot G(p) = \frac{Ap}{(p+j\omega)(p-j\omega)}\cdot G(p)$$

La fonction de transfert G(p) peut s'écrire sous la forme stable :

$$G(p) = \frac{N(p)}{(p+p_1)(p+p_2)\cdots(p+p_n)}$$

Alors par décomposition en fraction partielle :

$$S(p) = \frac{K_1}{(p+j\omega)} + \frac{K_2}{(p-j\omega)} + \frac{K_3}{(p+p_1)} + \cdots + \frac{K_{n+2}}{(p+p_n)}$$

Dans le régime permanent, les termes de $\mathbf{K_3}$ à $\mathbf{K_{n+2}}$ peuvent être négligés car ce sont des exponentielles décroissantes. Alors S(p) se réduit à :

$$S_p(p) = \frac{K_1}{(p+j\omega)} + \frac{K_2}{(p-j\omega)}$$

Les termes K_1 et K_2 sont calculés par :

$$K_1 = \frac{Ap}{(p-j\omega)}\cdot G(p)\bigg]_{p\to -j\omega} = \frac{A(-j\omega)}{(-j\omega-j\omega)}\cdot G(-j\omega) = \frac{A}{2}\cdot G(-j\omega)$$

De la même manière :

$$K_2 = \frac{Ap}{(p+j\omega)}\cdot G(p)\bigg]_{p\to +j\omega} = \frac{A(j\omega)}{(j\omega+j\omega)}\cdot G(j\omega) = \frac{A}{2}\cdot G(j\omega)$$

La fonction G(jω) est un complexe, elle peut s'écrire sous sa forme d'Euler :

$$G(j\omega) = M_G(\omega)e^{j\phi_G(\omega)} \quad et \quad G(-j\omega) = M_G(\omega)e^{-j\phi_G(\omega)}$$

La réponse en régime permanent s'écrit :

$$S(p) = \frac{A}{2}\cdot\left[\frac{M_G(\omega)e^{-j\phi_G(\omega)}}{(p+j\omega)} + \frac{M_G(\omega)e^{j\phi_G(\omega)}}{(p-j\omega)}\right]$$

La transformée de Laplace inverse :

$$s_p(p) = \frac{A}{2}\cdot\left[M_G(\omega)e^{-j\phi_G(\omega)}\cdot e^{-j\omega t} + M_G(\omega)e^{j\phi_G(\omega)}\cdot e^{j\omega t}\right]$$

$$s_p(p) = \frac{AM_G}{2}\cdot\left[e^{-j\cdot(\omega t+\phi_G(\omega))} + e^{+j\cdot(\omega t+\phi_G(\omega))}\right]$$

$$s_p(p) = AM_G\cdot\cos\big(\omega t+\phi_G(\omega)\big)$$

4.6.6. Conclusion

La réponse en régime permanent est sinusoïdale, de même fréquence que l'entrée avec un gain multiplié par le gain de la fonction de transfert G(jω) et un déphasage correspondant à la somme des angles de phase de l'entrée et celui de la fonction de transfert.

Ainsi l'étude du système asservi en fréquence revient à étudier l'amplitude et la phase de la fonction de transfert. Pour déterminer la réponse en fréquence d'un système asservi il suffit de remplacer le complexe s par la valeur du complexe imaginaire jω.

Exemple: déterminer la réponse en fréquence de la fonction: $G(p) = \frac{1}{p+2}$

Il suffit de remplacer s =jω dans G(p) :

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 2} = \frac{(2 - j\omega)}{(2 + j\omega)(2 - j\omega)} = \frac{(2 - j\omega)}{[2^2 - (j\omega)^2]} = \frac{2}{4 + \omega^2} + \frac{-j\omega}{4 + \omega^2}$$

G(jω) est une quantité complexe qui s'écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{G(j\omega) = Re + j \cdot Im}$$

$$\boldsymbol{Module} \;\Rightarrow\; \|\boldsymbol{G(j\omega)}\| = \sqrt[2]{(\boldsymbol{Re})^2 + (\boldsymbol{Im})^2}$$

$$\boldsymbol{Phase} \;\Rightarrow\; \angle\boldsymbol{G(j\omega)} = \boldsymbol{tan^{-1}(Im/Re)}$$

Pour l'exemple précédent le module est égal à :

$$\|\boldsymbol{G(j\omega)}\| = \sqrt[2]{\left(\frac{\mathbf{2}}{4 + \omega^2}\right)^{\mathbf{2}} + \left(\frac{\omega}{4 + \omega^2}\right)^{\mathbf{2}}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{4 + \omega^2}}$$

Et la phase est égal à :

$$\angle\boldsymbol{G(j\omega)} = -\boldsymbol{tan^{-1}}\left(\frac{\boldsymbol{\omega/(\omega^2 + 4)}}{\boldsymbol{2/(\omega^2 + 4)}}\right) = -\boldsymbol{tan^{-1}}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\mathbf{2}}\right)$$

4.6.7. Représentations graphique de la réponse en fréquence

Il existe plusieurs types de représentations graphiques de la réponse en fréquence :

- ✓ Diagramme de Bode
- ✓ Diagramme de Nyquist
- ✓ Diagramme de Nichols

4.6.7.1. Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode consiste en **2 graphes** :

- Un graphique représentant le logarithme (décimal) du module de la fonction de transfert en fonction du logarithme (décimal) de la fréquence angulaire. L'unité est exprimée en décibels (dB) ;

- Un graphique représentant la phase en degré en fonction du logarithme de la fréquence angulaire.

$$20\log(\|G(j\omega)\|) \quad [dB] \quad en\ fonction\ de \quad \log(\omega)$$
$$\angle G(j\omega) \quad [deg] \quad en\ fonction\ de \quad \log(\omega)$$

<u>Rappel sur le logarithme décimal</u>

$$\log_{10}(10) = \log(10) = 1 \qquad \log(a/b) = \log(a) - \log(b)$$
$$\log(1) = 0 \qquad \log(a^b) = \mathrm{b} \times \log(a)$$
$$\log(a \times b) = \log(a) + \log(b) \qquad si\ \log(a) = b \implies a = 10^b$$

<u>Axe des fréquences angulaires</u>

- **<u>Nombre de décades</u> :** C'est la largeur de bande (ou distance) entre deux fréquences exprimé par le logarithme décimal de leur rapport

$$\log(\omega_2/\omega_1): \quad Nombre\ de\ décades$$

- Lorsque $\omega_2 = 10 \times \omega_1$ alors le nombre de décade est égal à 1.
- **<u>Nombre d'octaves</u>** : c'est la distance entre deux fréquences angulaires exprimée par le logarithme à base 2 du rapport des deux fréquences

$$\log_2(\omega_2/\omega_1): \quad Nombre\ d'octaves$$

  - Lorsque la fréquence $\omega_2 = 2\ \omega_1$ alors le nombre d'octave est égal à 1.

- **<u>Rappel :</u>**

$$\log_{\mathrm{x}}(a) = \ln(\mathrm{a})/\ln(\mathrm{x})$$

✓ **<u>Comment lire la valeur d'une fréquence angulaire dans une échelle logarithmique</u>**

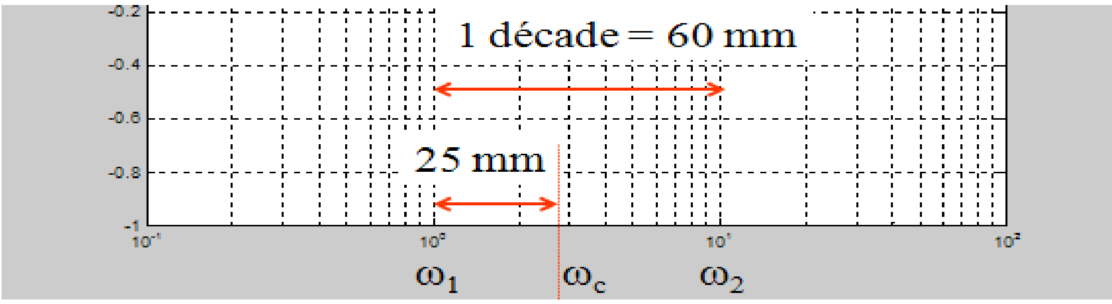


Figure (4.14) : Echelle logarithmique

$$\log(\omega_2/\omega_1) = 1\ décade \quad \implies \quad 60\ mm$$
$$\log(\omega_c/\omega_1) = \frac{25 \times 1}{60}\ décade \ \leftarrow \quad 25\ mm$$
$$alors \qquad \omega_c = 10^{\left(\frac{25}{60}\right)}\ rad/s$$

✓ **<u>Comment repérer une fréquence particulière sur un graphe</u>**

Si la distance millimétrique entre deux fréquences séparées par une décade (ω_1 = 10 rad/s et ω_2 =100 rad/s est égale à 75 mm sur le graphique, alors pour repérer la fréquence ω_c de 35.8 rad/s il faut calculer le nombre de décades entre ω_1 et ω_c :

$$\mathbf{log}\left(\frac{\boldsymbol{\omega_2}}{\boldsymbol{\omega_1}}\right) = \mathbf{log}\left(\frac{\mathbf{100}}{\mathbf{10}}\right) = \mathbf{1}\ \boldsymbol{décade} \quad \rightarrow \quad \mathbf{75}\ \boldsymbol{mm}$$

$$\mathbf{log}\left(\frac{\boldsymbol{\omega_c}}{\boldsymbol{\omega_1}}\right) = \mathbf{log}\left(\frac{\mathbf{35.8}}{\mathbf{10}}\right) = \mathbf{0.5559}\ \boldsymbol{décadeS} \quad \rightarrow \quad \mathbf{0.5559 \times 75}\ \boldsymbol{mm} \approx \mathbf{41.5}\ \boldsymbol{mm}$$

4.6.7.2. Diagramme de Bode asymptotique

La forme générale d’une fonction de transfert G(s) en boucle ouverte est donnée par l’expression suivante :

$$G(p) = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{\prod_1^m (1 + T_{z_i} p)}{\prod_1^n \left(1 + T_{p_j} p\right)} \qquad n \geq m$$

$$G(p) = \frac{K'}{p^\alpha} \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (p + z_i)}{\prod_{j=1}^n (p + p_j)} \qquad n \geq m$$

La réponse en fréquence est obtenue lorsque :

$$G(j\omega) = G(p)]_{p=j\omega}$$

La partie amplitude du graphique du diagramme de Bode est obtenue à partir du module de **G(jω)**:

$$G(j\omega) = \frac{\|K\| \cdot \|(1 + j \cdot T_{z_1} \cdot \omega)\| \cdot \|(1 + j \cdot T_{z_2} \cdot \omega)\| \cdots \cdot \|(1 + j \cdot T_{z_m} \cdot \omega)\|}{\|(j\omega)^\alpha\| \cdot \|(1 + j \cdot T_{p_1} \cdot \omega)\| \cdot \|(1 + j \cdot T_{p_2} \cdot \omega)\| \cdots \cdot \|(1 + j \cdot T_{p_n} \cdot \omega)\|}$$

$$G(j\omega) = \frac{\|K'\| \cdot \|(j\omega + z_1)\| \cdot \|(j\omega + z_2)\| \cdots \cdot \|(j\omega + z_m)\|}{\|(j\omega)^\alpha\| \cdot \|(j\omega + p_1)\| \cdot \|(j\omega + p_2)\| \cdots \cdot \|(j\omega + p_n)\|}$$

L’amplitude du diagramme de Bode sera alors :

$$\begin{aligned}\mathbf{20\,log}(\|\boldsymbol{G(j\omega)}\|) = {} & \mathbf{20\,log}(\|K\|) + \mathbf{20\,log}\left(\|(1 + j \cdot T_{z_1} \cdot \omega)\|\right) + \cdots \mathbf{20\,log}\left(\|(1 + j \cdot T_{z_m} \cdot \omega)\|\right) \\ & - \mathbf{20\,log}(\|(j\omega)^\alpha\|) - \mathbf{20\,log}\left(\|(1 + j \cdot T_{p_1} \cdot \omega)\|\right) + \cdots \mathbf{20\,log}\left(\|(1 + j \cdot T_{p_n} \cdot \omega)\|\right) [\boldsymbol{dB}]\end{aligned}$$

Ou bien

$$\begin{aligned}\mathbf{20\,log}(\|\boldsymbol{G(j\omega)}\|) = {} & \mathbf{20\,log}(\|K'\|) + \mathbf{20\,log}(\|(j\omega + z_1)\|) + \cdots \mathbf{20\,log}(\|(j\omega + z_m)\|) \\ & - \mathbf{20\,log}(\|(j\omega)^\alpha\|) - \mathbf{20\,log}(\|(j\omega + p_1)\|) + \cdots \mathbf{20\,log}(\|(j\omega + p_n)\|) [\boldsymbol{dB}]\end{aligned}$$

- *L’amplitude est obtenue par l’addition des amplitudes des éléments du numérateur et par soustraction des amplitudes des éléments du dénominateur.*

  ✓ **<u>L’intérêt du diagramme asymptotique est :</u>**

- Si nous connaissons le diagramme asymptotique des termes élémentaires de base nous pouvons tracer le diagramme asymptotique de fonctions de transfert complexes de manière très simple.
- Ayant un diagramme de Bode expérimental nous pouvons identifier approximativement la fonction de transfert du processus.

✓ **Diagramme asymptotique d'un élément gain : K**

$$G(p) = K = C^{ste} \qquad \Longrightarrow \qquad G(j\omega) = K$$
$$20\log(\|G(j\omega)\|) = 20\log(\|K\|)\ (dB)$$
$$\angle G(j\omega) = \angle K = \tan^{-1}(0/K) = 0\ \ deg$$

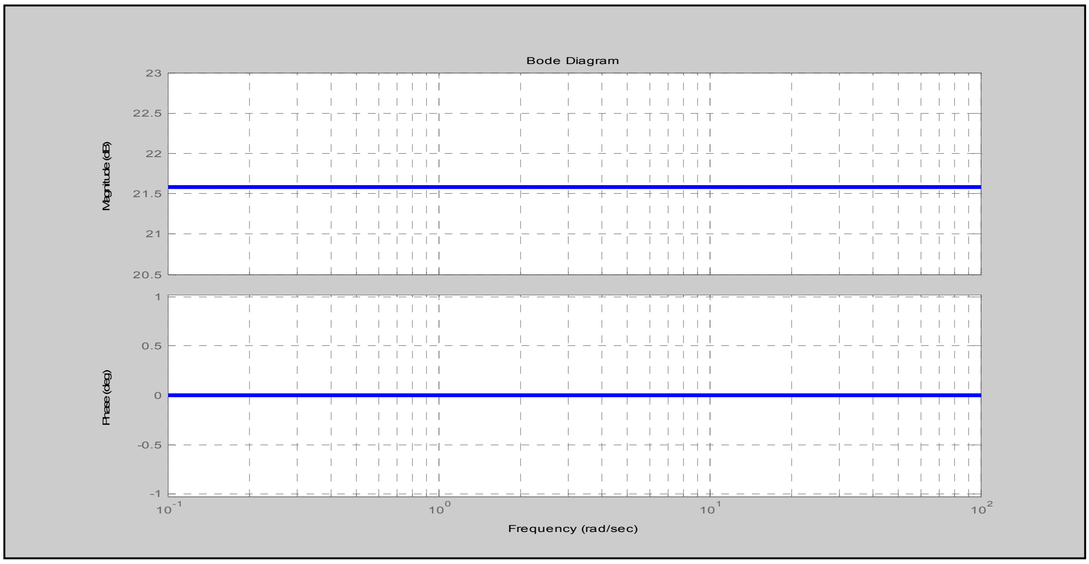


Figure (4.15) : Diagramme asymptotique d'un élément gain (**K**)

✓ **Diagramme asymptotique d'un élément différentiateur : G(s) = (p+a)**

$$G(j\omega) = j\omega + a = a\left(1 + j\frac{\omega}{a}\right)$$
$$lorsque\ \omega \to 0\ \ alors\ \ G(j\omega) \approx a\ \ et\ \ 20\log(\|G(j\omega)\|) = 20\log(\|a\|)\ \ dB$$
$$lorsque\ \omega \to \infty\ \ alors\ \ {}^{\omega}/_{a} \gg 1, G(j\omega) \approx a\left(j\frac{\omega}{a}\right) = j\omega$$
$$et\ 20\log(\|G(j\omega)\|) = 20\log(\omega)\ \ dB$$

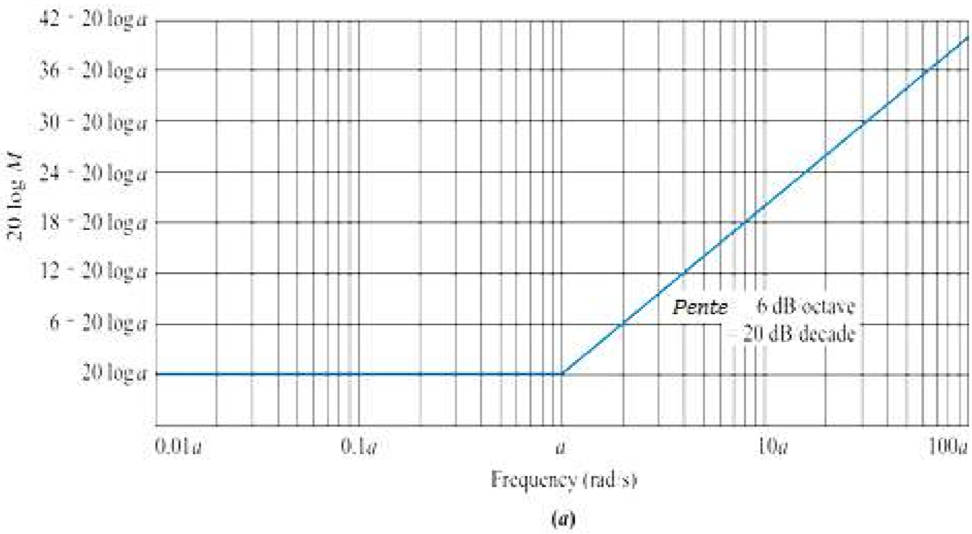


Figure (4.16) : Diagramme asymptotique d'un élément différentiateur

- **Diagramme de Phase** :

$$\omega \to 0 \;\; alors \; \boldsymbol{G(j\omega) \approx a, \angle G(j\omega) = 0 \; deg}$$
$$\omega \to \infty \; alors \; \boldsymbol{G(j\omega) \approx a\left(j\frac{\omega}{a}\right), \angle G(j\omega) = \angle(j\omega) = 90 \; deg}$$
$$\omega \to a \;\; alors \; \boldsymbol{G(j\omega) \approx (ja + a), \angle a(j+1) = 45 \; deg}$$

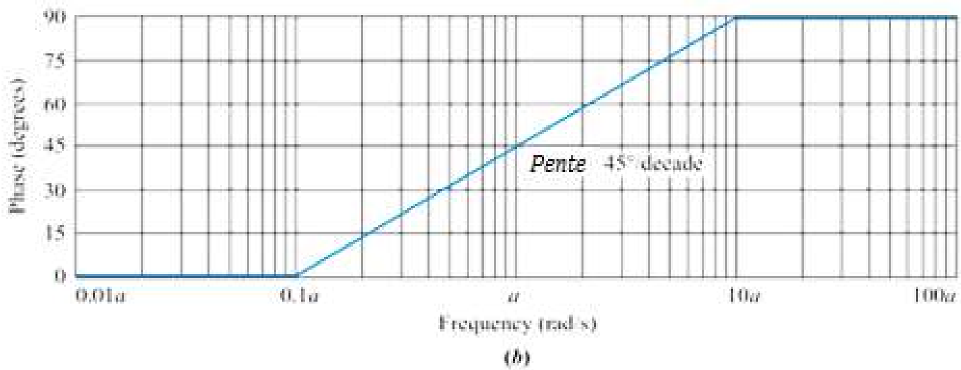


Figure (4.17) : Diagramme asymptotique de la phase un élément différentiateur

- <u>**Normalisation des diagrammes de Bode asymptotiques**</u>
- Exemple dans le cas de l'élément différentiateur :

G(p)= (p + a) alors **G'(p) = G(p)/a** est une fonction normalisée. Ce qui a pour effet que lorsque p =jω alors :

$$\boldsymbol{20\log(\|G'(j\omega)\|) = 20\log\left(\frac{\|G(j\omega)\|}{a}\right) = 20\log(\|G(j\omega)\|) - 20\log(a) \;\; et \; si \; \frac{\omega}{a} = \omega_{normalis\acute{e}e}}$$

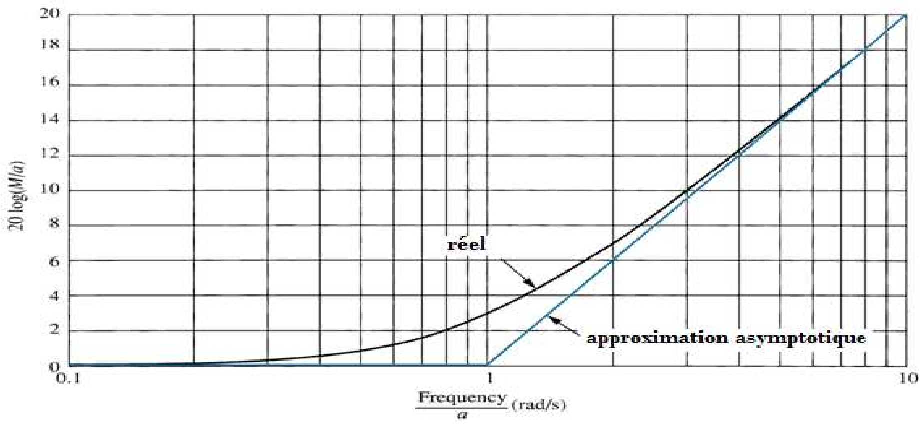


Figure (4.18) : Diagramme asymptotique et réel d'un élément différentiateur

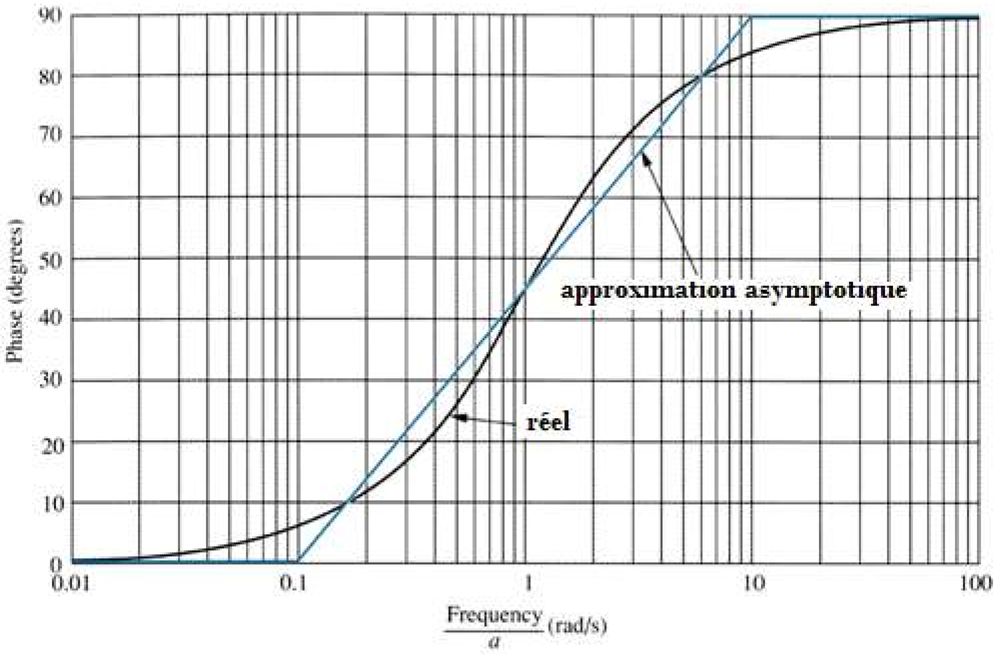


Figure (4.19) : Diagramme asymptotique et réel de la phase d'un élément différentiateur

Diagramme de Bode asymptotique des éléments normalisés suivants :

a. **G(p) = p**;

b. **G(p) = 1/p**;

c. **G(p) = (p + a)**;

d. **G(s) = 1/(p + a).**

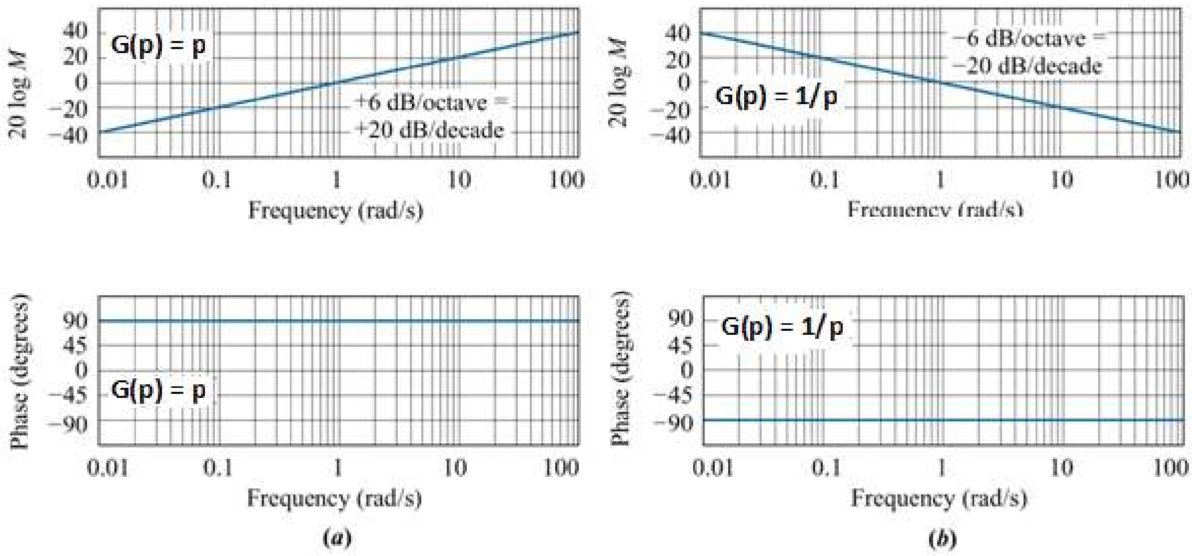


Figure (4.20) : Diagramme asymptotique et réel des éléments ***p*** et ***1/p***

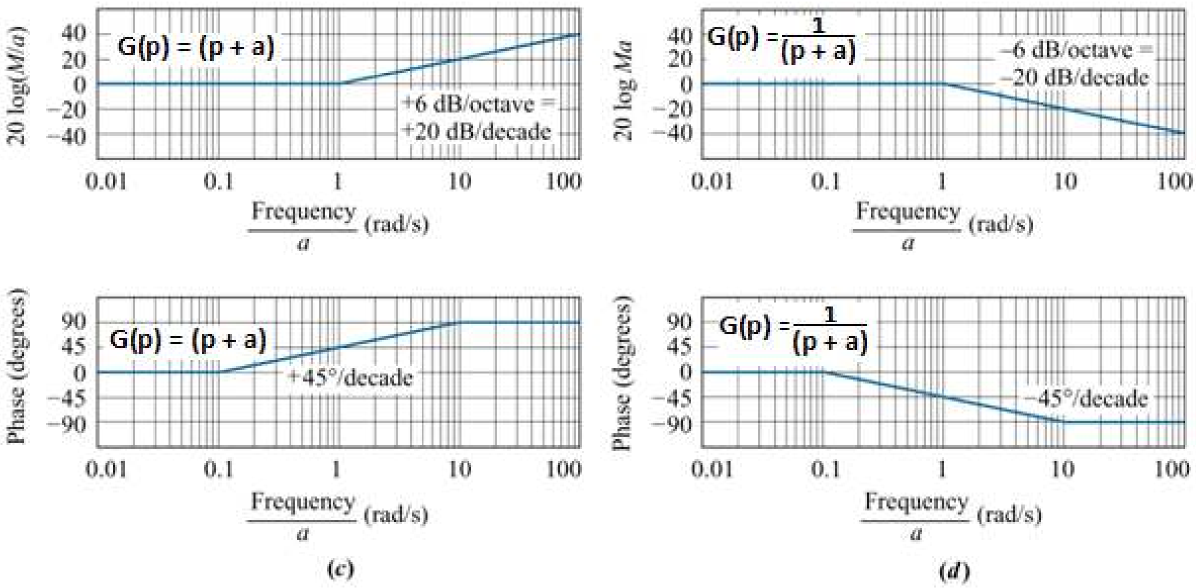


Figure (4.21) : Diagramme asymptotique des éléments ***p+a*** et ***1/(p+a)***

4.6.7.3. Diagramme de Nyquist

4.6.7.3.1. Définition du diagramme de Nyquist

Le diagramme de Nyquist, ou lieu de transfert dans le plan de Nyquist (ou en abrégé lieu de Nyquist), d'un système de réponse en fréquences $\boldsymbol{G(j\omega)}$ est le lieu des points définis en coordonnées polaires par un rayon vecteur égal à la valeur arithmétique du module $\boldsymbol{A(\omega) = |G(j\omega)|}$ (***N.B.*** : ***Le module n'est pas en décibels***) et d'argument $\boldsymbol{\varphi(\omega) = arg(G(j\omega))}$ (figure : 4.15). Ce lieu est gradué en pulsations ω pour les valeurs variant de zéro à l'infini. La courbe obtenue graduée en ω et est appelée lieu de réponse en fréquence du système dans le plan de

Nyquist, ou lieu de transfert dans le plan de Nyquist ou encore, lieu de Nyquist (voir figure 4-16 b et c).

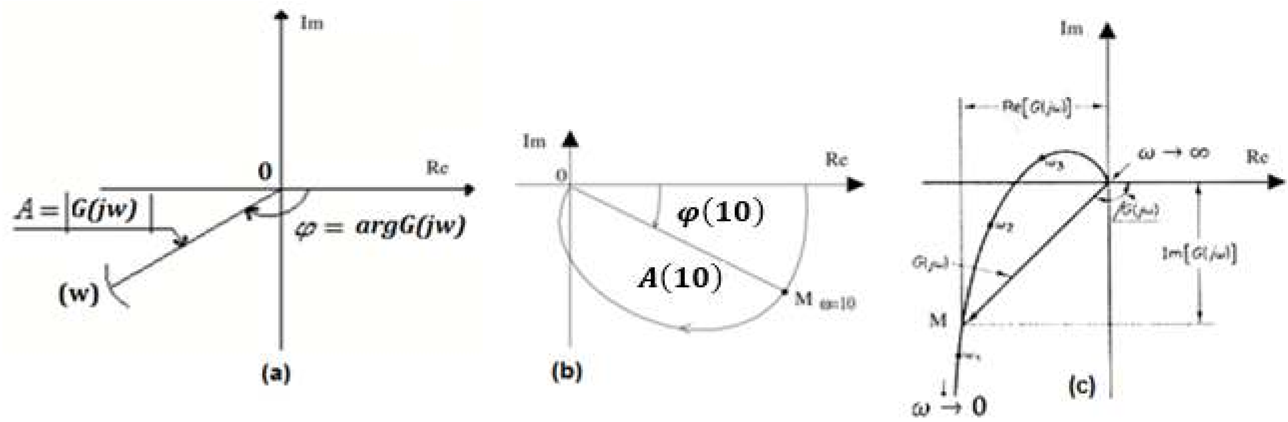


Figure 4-22 : Diagrammes de Nyquist (Lieux de Nyquist.)

Pour une pulsation de 10 rad/s, on lit sur la figure **4-22 b** l'amplitude $\boldsymbol{A(10)}$ en mesurant le segment OM et le déphasage $\boldsymbol{\varphi(10)}$ en mesurant l'angle polaire $\boldsymbol{\varphi}$: c'est une représentation en coordonnées polaires. La flèche sur le tracé indique le sens croissant des pulsations, le point 0 étant atteint lorsque $\omega \to \infty$. Le déphasage est en général négatif.

Notez que sur les diagrammes polaires, un angle de phase ***positif*** (négatif) est mesuré ***dans le sens inverse des aiguilles d'une montre*** (sens des aiguilles d'une montre) à partir de l'axe réel positif. Un exemple d'un tel tracé est présenté à la figure **4-22 c**. Chaque point du tracé polaire de $\boldsymbol{G(j\omega)}$ représente l'extrémité (M) d'un vecteur pour une valeur particulière de ω. Les projections de $\boldsymbol{G(j\omega)}$ sur les axes réel et imaginaire sont ses composantes réelles et imaginaires.

Un avantage de l'utilisation du diagramme de Nyquist est qu'il représente les caractéristiques de la réponse fréquentielle d'un système sur toute la gamme de fréquences sur une seule courbe. Mais son inconvénient est que le tracé n'indique pas clairement les contributions de chaque facteur individuel de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Les formes générales des parties à basse fréquence des diagrammes de Nyquist de type 0, de type l et de type 2 des systèmes à phase minimale sont illustrés à la figure **4-23a**. On peut voir que, si le degré du polynôme dénominateur de $\boldsymbol{G(j\omega)}$ est supérieur à celui du numérateur, alors les lieux $\boldsymbol{G(j\omega)}$ convergent dans le sens des aiguilles d'une montre vers l'origine. Lorsque $\omega \to \infty$, les lieux sont tangents à l'un ou l'autre des axes, comme le montre la figure **4-23b**.

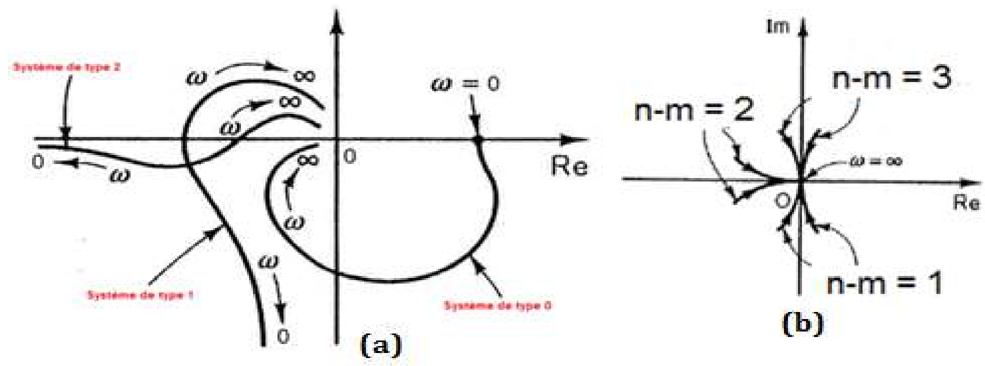


Figure 4-23 : Les allures des diagrammes de Nyquist

Dans le cas où les degrés des polynômes du dénominateur et du numérateur de $\boldsymbol{G(j\omega)}$ sont identiques, le tracé de Nyquist commence à une distance finie sur l'axe réel et se termine à un point fini sur l'axe réel.

Notez que toute forme compliquée dans les courbes du tracé de Nyquist est causée par la dynamique du numérateur, c'est-à-dire par les constantes de temps dans le numérateur de la fonction de transfert

4.6.7.3.2. Allure et construction des diagrammes de Nyquist

Allure des diagrammes de Nyquist

A partir des diagrammes de Bode d'une réponse en fréquences $\boldsymbol{G(j\omega)}$ il est facile de construire le diagramme de Nyquist de cette réponse. Son allure dépend, aux fréquences élevées, de la différence $(\boldsymbol{n-m})$ entre les degrés du dénominateur et du numérateur de la fonction de transfert $\boldsymbol{G(p)}$ et, aux fréquences basses, de l'ordre de multiplicité $\boldsymbol{\alpha}$ du pôle à l'origine de $\boldsymbol{G(p)}$.

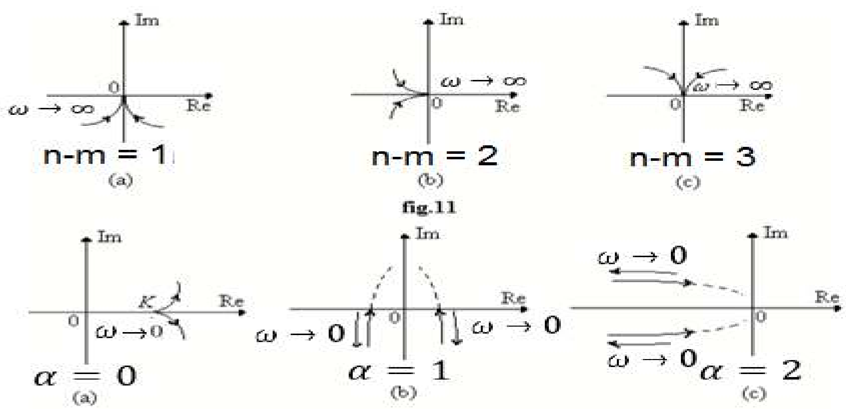


Figure 4-24 : L'allure des diagrammes de Nyquist

Méthode de construction

Pour obtenir le tracé du diagramme de Nyquist, on se sert habituellement des logiciels. Toutefois, on rappellera cependant la procédure qui permet d'obtenir rapidement un tracé manuel approximatif, et qui a pendant longtemps été la seule possible : on calcule certaines valeurs remarquables, puis on interpole "à l'œil" entre elles. La première étape est un calcul littéral qui permet d'exprimer – à partir de la fonction de transfert – la réponse harmonique sous forme d'un nombre complexe : partie réelle et partie imaginaire.

On calcule ensuite les valeurs limites pour les pulsations qui tendent vers zéro ou infini. Ensuite, on recherche les intersections avec les axes : on recherche les pulsations qui annulent la partie réelle ou la partie imaginaire. On peut encore s'aider en calculant la valeur de $\boldsymbol{G(j\omega)}$ pour quelques pulsations particulières. Autrefois, on appliquait encore les connaissances du calcul complexe pour déterminer des extrema de la partie réelle, de la partie imaginaire, du module ou de l'argument. On cherchait même les intersections avec des droites passant par l'origine, correspondant à une valeur particulière d'argument.

Quatre points importants doivent être pris en compte lors du tracé de la réponse en fréquence d'un système. Une fois que la fonction de transfert du système a été évaluée en termes de gain et de phase à ces points, la courbe complète peut ensuite être esquissée en joignant les points. Les points sont :

1. Début du tracé lorsque $\omega = 0$,
2. Fin de la courbe lorsque $\omega \to \infty$
3. L'intersection avec l'axe réel,
4. L'intersection avec l'axe imaginaire.

Donc, pour chacun de ces points, et pas plus, le gain et la phase de transfert du système est trouvé.

La fonction de transfert, $\boldsymbol{G(j\omega)}$, peut être considérée de deux façons. D'abord en termes de polarité c'est-à-dire le module et la phase, et deuxièmement en termes de coordonnées cartésiennes, c'est-à-dire des parties réelles et imaginaires. La technique des coordonnées cartésiennes est particulièrement utile dans la mesure où en ce qui concerne la recherche des points d'intersection avec les axes réel et imaginaire, en fixant respectivement la partie imaginaire et la partie réelle à zéro. Cependant, en considérant $\boldsymbol{G(j\omega)}$ en termes de coordonnées polaires, les facteurs individuels peuvent être traités séparément tant en termes de gain et la phase, comme le montre l'exemple suivant :

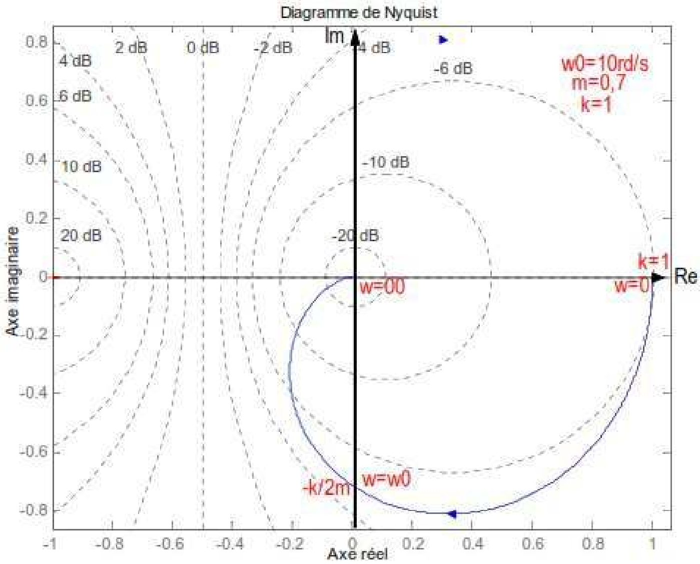


Figure 4-25 : Exemple d'un diagramme de Nyquist

4.6.7.4. Diagramme et abaque de Black

4.6.7.4.1. Définition du diagramme de Black

Dans le plan dénommé plan de Black, on représente une réponse en fréquences $\boldsymbol{T(j\omega)}$ en portant en abscisse l'argument $\boldsymbol{\varphi}$ de $\boldsymbol{T(j\omega)}$, exprimé en degrés et en ordonnée le module A de $\boldsymbol{T(j\omega)}$ exprimé en décibels (Figure **4-26**).

La courbe obtenue, appelée diagramme de Black ou lieu de transfert dans le plan de Black (ou en abrégé lieu de Black) est graduée en pulsations $\boldsymbol{\omega}$. Un tel lieu est une utilisation très commode, car un changement de gain $\boldsymbol{K}$ d'un système se traduit par une translation parallèle à l'axe des ordonnées. La multiplication de plusieurs réponses en fréquences se réduit d'autre part à une addition vectorielle.

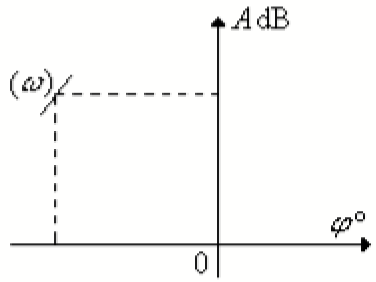


Figure 4-26 : diagramme de Black

4.6.7.4.2. Construction et allure des diagrammes de Black :

Il est plus approprié de dessiner le diagramme de Black d'une réponse en fréquence $\boldsymbol{T(j\omega)}$. La forme d'un tel lieu dépend, aux hautes fréquences, de la déviation $(\boldsymbol{n-m})$ entre les degrés du dénominateur et du numérateur de la fonction de transfert $\boldsymbol{T(p)}$ et, aux basses fréquences, de l'ordre de multiplicité $(\boldsymbol{\alpha})$ du pôle à l'origine de $\boldsymbol{T(p)}$.

Aux pulsations élevées :

$$[T(j\omega)]_{\omega\to\infty} \cong \frac{a_m}{b_n}\cdot\frac{1}{(j\omega)^{n-m}}$$

le module de $\boldsymbol{T(j\omega)}$ tend vers zéro $(-\infty\ dB)$.

Pour $(\boldsymbol{n-m}) = 1, 2, 3, \cdots$ les arguments de $T(j\omega)$ tendent respectivement vers : ***-90°, -180°, -270°, …*** lorsque ω tend vers l'infini. Aux fréquences élevées, les droites verticales qui possèdent ces abscisses sont donc des asymptotes pour les lieux de transfert dans le plan de Black, qui peuvent avoir les allures dessinées sur la figure **4-27 (**a, b, c) : celles-ci correspondent à des valeurs de $(\boldsymbol{n-m})$ respectivement égales à 1, 2 et 3.

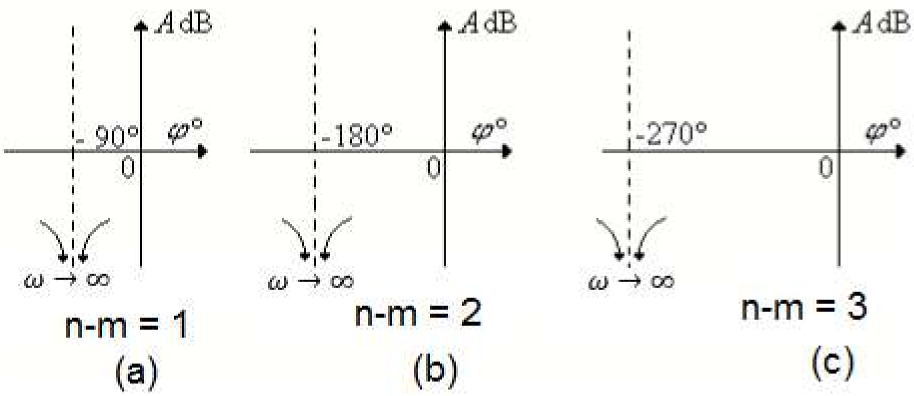


Figure 4-27 a, b, c : Les asymptotes pour les lieux de transfert

Aux basses fréquences :

$$[T(j\omega)]_{\omega\to 0} \cong K\cdot\frac{1}{(j\omega)^{\alpha}}$$

Si $\boldsymbol{\alpha = 0, T(j\omega)}$ tend vers le nombre réel K lorsque ω tend vers zéro et le lieu de Black a l'une des allures dessinées figure **4-28a**.

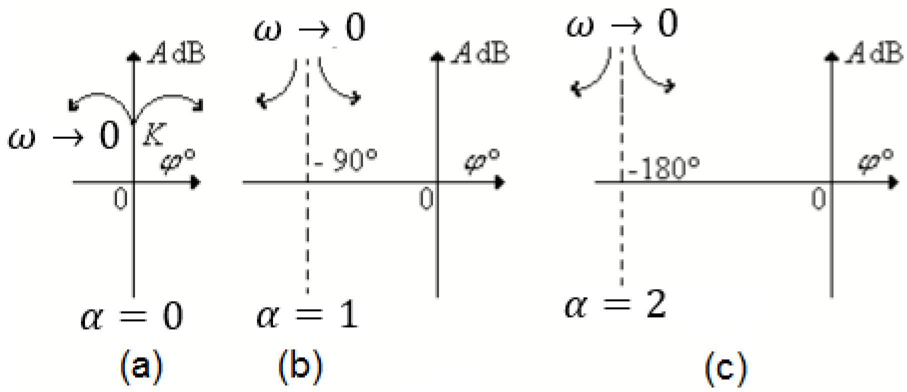


Figure 4-28 : Les lieux de Black

Si $\boldsymbol{\alpha = 1, 2, 3, \cdots}$ le lieu de Black possède aux pulsations basses des asymptotes verticales d'abscisses $\boldsymbol{-90°, -180°, -270°, \cdots}$ et il a, pour $\boldsymbol{\alpha = 1}$ *et* $\boldsymbol{\alpha = 2}$ par exemple l'une des allures de la figure **8b** et **8c**.

4.6.7.4.3. Abaque de Black

De la réponse en fréquence en boucle ouverte $\boldsymbol{T(j\omega)}$ d'un système asservi l'abaque de Black permet de déduire pour chaque pulsation $\boldsymbol{\omega}$ le module $\boldsymbol{\lambda}$ dB et l'argument $\boldsymbol{\varphi}$ degrés de la réponse en fréquences du système asservi à retour unitaire équivalent au système donné :

$$T'_u(j\omega) = \frac{T(j\omega)}{1 + T(j\omega)}$$

Si l'on écrit $T(j\omega)$ sous la forme exponentielle :

$$T(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi}$$

Avec

$$\begin{cases} A(\omega) = \|T(j\omega)\| \\ \varphi = arg\big(T(j\omega)\big) \end{cases}$$

$T'_u(j\omega)$ s'écrit sous la forme :

$$T'_u(j\omega) = B(\omega)e^{j\psi}$$

avec :

$$B(\omega) = \|T'_u(j\omega)\| = \frac{A}{(1 + A^2 + 2ACOS\varphi)^{1/2}}$$

$$\psi = argT'_u(j\omega) = arctg\frac{sin(\varphi)}{A + cos(\varphi)}$$

L'abaque de Black est donc obtenu en traçant dans le plan de Black :

- ✓ Les lieux des points pour lesquels :

$$20log_{10}B = \lambda\, dB = Cte$$

sont appelés ***contours d'amplitude.***

- ✓ Les lieux des points pour lesquels :

$$arctg\frac{sin(\varphi)}{A + cos(\varphi)} = \psi° = Cte$$

sont appelés ***contours de phase.***

Etant donné le lieu de Black $T(j\omega)$ de la réponse en fréquences en boucle ouverte d'un système asservi, tracé sur l'abaque de Black, si un point ***M*** de ce lieu, correspond à la pulsation ω_1, se trouve par exemple figure 4.23 à l'intersection des courbes $\lambda = -6\ dB\ et\ \psi = -40°$, de l'abaque de Black, ***-6 dB*** et – ***40°*** représentent l'amplitude et la phase de $T'_u(j\omega)$ à la pulsation ω_1.

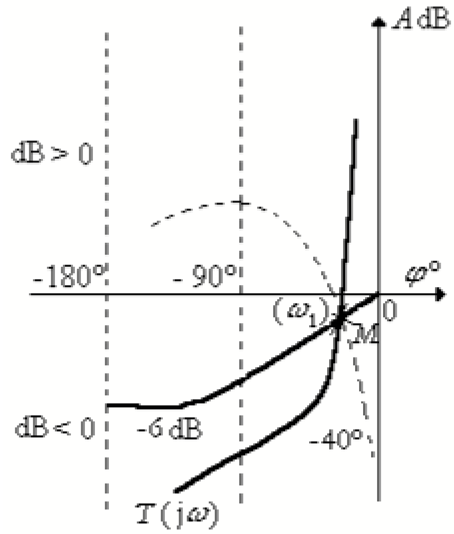


Figure 4-29 : Contours d'amplitude et de phase du lieu de Black

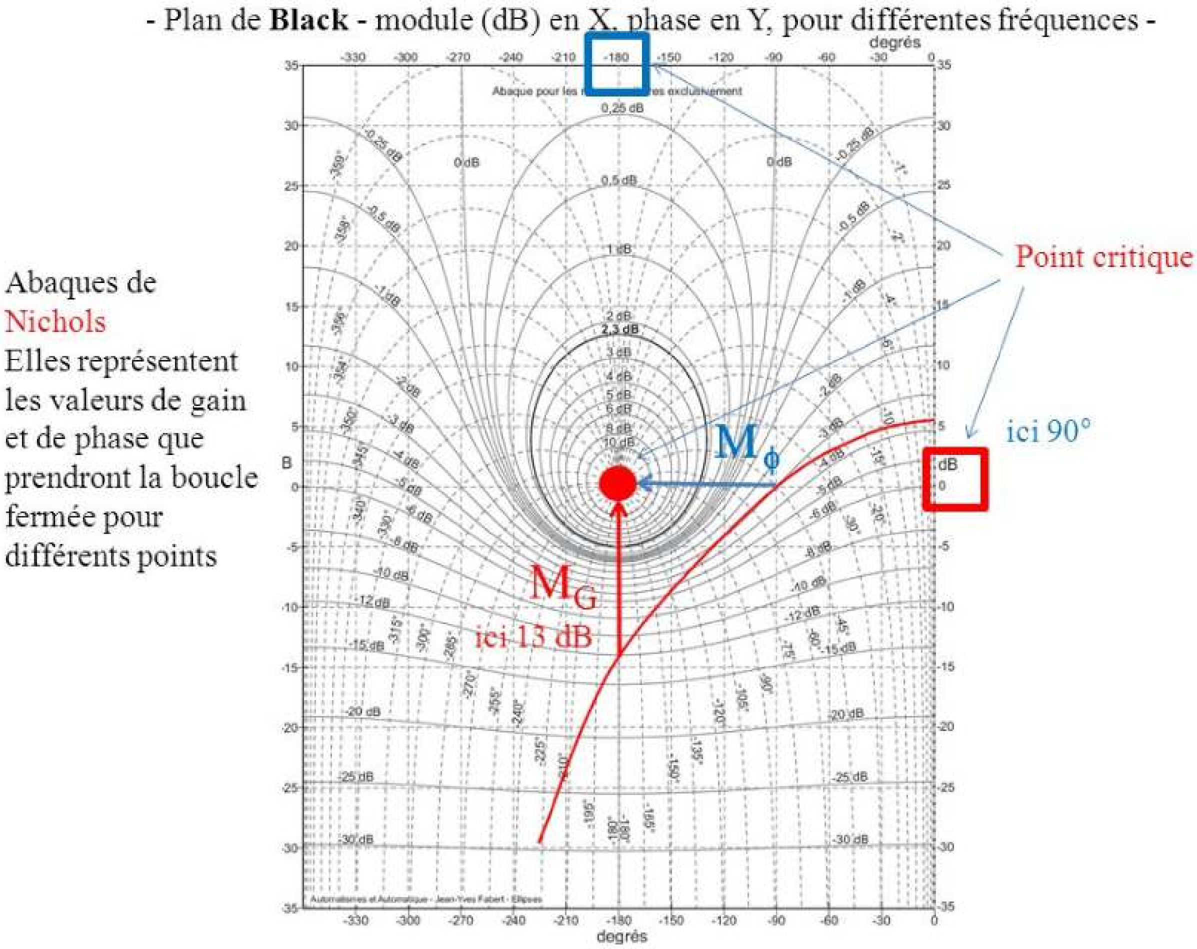


Figure 4-30 : Exemple d'un lieu de Black

La Stabilité

5.1. Introduction

Les systèmes asservis sont caractérisés par une boucle de retour destinée à améliorer leurs performances. Toutefois, il peut y arriver qu'une boucle rende le système instable. La méthode algébrique de ROUTH qui permet de tester la stabilité d'un système est l'objet de ce chapitre.

5.2. Définition

On dit qu'un système est stable lorsqu'il tend à revenir au repos dès que les excitations extérieures cessent, et instable quand il tend à s'écarter d'avantage ou s'il ne possède pas de position d'équilibre.

5.2.1. Explication

Étudier le comportement d'un système linéaire abandonné à lui-même, avec conditions initiales $s_0 = 0$, revient à considérer qu'il a été soumis à une impulsion $\delta(t)$.

Donc : $s(t) = L^{-1}\left[H(p)\right]$ Où

$$H(p) = \frac{b_0 + b_1 p + \cdots\cdots b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \cdots\cdots a_n p^n}$$

Avec $\mathbf{m \leq n}$

Ce qui implique que la nature de s(t) dépend des pôles de la fonction de transfert H (p), qui sont aussi les racines de l'équation caractéristique D (p) = 0.

H(p) peut avoir des pôles réels ou complexes, simples ou multiples selon la *fig. (1)*, qui nous conduit aux conclusions suivantes :

Si tous les zéros de l'équation caractéristique (pôles) ont leur partie réelle négative le système est stable.

Si D(p) a au moins une de ses racines à partie réelle positive ou a des racines multiples sur l'axe des imaginaires (jω) ; le système est instable.

Si les zéros de D(p) sont à partie réelle négative, excepté certaines situées sur l'axe (jω), le système est à sa limite de stabilité.

D'où la conclusion fondamentale :

Un système linéaire est stable à la condition nécessaire et suffisante que tous les pôles de sa fonction de transfert H (p) aient leur partie réelle négative c'est à dire dans le demi -plan gauche (DPG) du plan de **Laplace**.

Par ailleurs on démontre que la Condition **Nécessaire (mais non suffisante)** de stabilité d'un système linéaire est que tous les coefficients de son équation caractéristique doivent avoir le même signe **(> 0).** En plus aucun des coefficients ne doit être nul.

Cependant, et malgré que la positivité des coefficients de l'équation caractéristique est une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité des systèmes du 1^e et 2 ^e ordre elle n'est que nécessaire pour les systèmes d'ordre supérieur à 2.

4. Exemple 1

$$\mathbf{D(p) = p^3 + p^2 + 2\,p + 8 \;= (p + 2)\,(p - 0.5 + j\,\frac{15}{2}\,)\,(\,p - 0.5 - j\,\frac{15}{2}\,) = 0}$$

Nous voyons bien dans cet exemple, que malgré la présence et la positivité de tous les coefficients de l'équation caractéristique, le système est instable **(n = 3)**.

Donc, si l'équation caractéristique est d'ordre supérieur à deux **(n > à 2)** la possibilité d'instabilité du système reste toujours probable, même si tous les coefficients sont présents et positifs.

Donc pour analyser la stabilité d'un système linéaire, il faut tout d'abords examiner les coefficients de son équation caractéristique, si quelques-uns sont nuls ou négatifs, on pourra conclure directement que le système en question est **INSTABLE** ; Mais s'ils sont tous présents et de même signe, la possibilité de stabilité du système existe toujours, et on doit encore vérifier la condition suffisante au moyen de l'un des critères algébriques (**ROUTH** ou **HURWITZ**). Bien que ces deux critères soient équivalents, le critère de **ROUTH** est utilisé surtout en France, USA et en Angleterre alors que celui de **HURWITZ** en Allemagne et en URSS.

5.3. Critère de ROUTH

Pour qu'un système soit stable il faut et il suffit que chaque terme de la première colonne de la table de ROUTH de son équation caractéristique soit positif si (bn > 0).

Si cette condition n'est pas satisfaite le système est instable et le nombre de changement de signe dans la première colonne est égal au nombre de racines positives.

5.3.1. Table de ROUTH

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	***
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	***
p^{n-2}	$c_1 = \frac{a_{n-1} * a_{n-2} - a_n * a_{n-}}{a_{n-1}}$	$c_2 = \frac{a_{n-1} * a_{n-4} - a_n * a_{n-}}{a_{n-1}}$	c_3	c_4	***
p^{n-3}	$d_1 = \frac{c_1 * a_{n-3} - c_2 * a_{n-1}}{c_1}$	$d_2 = \frac{c_1 * a_{n-5} - c_3 * a_{n-1}}{c_1}$	d_3	d_4	***
***	***	***	***	***	***
p^1	***	***	***	***	***
p^0	***	***	***	***	***

<u>**N.B:**</u>

Il est à noter que lors de la construction de la table de **ROUTH**, les termes manquants sont pris comme zéros et on peut aussi multiplier ou diviser tous les éléments d'une ligne par une constante positive, afin de simplifier les calculs.

- **Exemple 2** :

Étudier la stabilité du système dont l'équation caractéristique est la suivante :

$$p^4 + 8\,p^3 + 18\,p^2 + 16\,p + 5 = 0$$

- **Réponse :**

Du fait que tous les coefficients sont présents et positifs, on ira vérifier la condition de **ROUTH**.

La table de ROUTH

p^4	1	18	5
~~p^3~~	~~8~~	~~16~~	~~0~~
p^3	1	2	0
p^2	16	5	0
p^1	1.6875	0	0
p^0	5	*	

Du fait que tous les coefficients de la première colonne sont positifs, notre système est donc stable.

>> roots ([1 8 18 16 5]) = [-5.0000, -1.0000, -1.0000 + 0.0000i, -1.0000 - 0.0000i]

iii. Exemple 3 :

Etudier la stabilité du système dont l'équation caractéristique est la suivante :

$$3\,p^{4} + 10\,p^{3} + 5\,p^{2} + 5\,p + 2 = 0$$

Réponse :

Du fait que tous les coefficients sont présents et positifs, on ira examiner sa table de ROUTH.

5. La table de ROUTH

p^4	3	5	2
~~p^3~~	~~10~~	~~5~~	~~0~~
p^3	2	1	0
p^2	3.5	2	0
p^1	-1/7	0	0
p^0	2	0	0

On observe 2 changements de signe sur la première colonne, ce qui implique qu'il existe 2 pôles à partie réelle positive (dans le DPD du plan de LAPLACE). Par conséquent notre système est **instable.**

>> roots ([3 10 5 5 2]) = [-2.9323 ; 0.0222 + 0.7142i ; 0.0222 - 0.7142i ; -0.4453]

5.3.2. Les cas particuliers :

5.3.2.1. Le premier cas

Lorsque le premier terme de n'importe qu'elle ligne de la table de ROUTH est nul, tandis que les autres termes ne le sont pas. Les termes de la ligne suivante deviennent infinis. Pour résoudre cette difficulté on a proposé la méthode qui consiste à modifier l'équation caractéristique originelle, en remplaçant dans celle-ci **(p)** par **(1 / z)** et appliquer de nouveau le teste de ROUTH. On démontre dans ce cas que le nombre de racines $\mathbf{z_i}$ et $\mathbf{p_i}$ à partie réelle positive est le même pour les deux équations.

Exemple 4

Étudier la stabilité du système dont l'équation caractéristique est la suivante :

$$\mathbf{p^5 + p^4 + 2p^3 + 2p^2 + 3p + 5 = 0}$$

roots ([1 1 2 2 3 5]) =[0.7207 + 1.1656i ; 0.7207 - 1.1656i ; -0.6018 + 1.3375i ; -0.6018 - 1.3375i ; -1.2378]

Réponse

Du fait que tous les coefficients sont présents et positifs, on ira examiner sa table de ROUTH.

$$\mathbf{Z^5 + 3\,Z^4 + 2\,Z^3 + 2\,Z^2 + Z + 1 = 0}$$

roots([5 3 2 2 1 1])=[-0.8079 ; 0.3837 + 0.6207i ; 0.3837 - 0.6207i ; -0.2798 + 0.6218i ; -0.2798 - 0.6218i]

La table de ROUTH

Z^5	5	2	1
Z^4	3	2	1
Z^3	-4/3	-2/3	*
Z^2	1/2	1	*
Z^2	3.5	*	*
Z^1	2	*	*
Z^0	1	*	*

On observe 2 changements de signe sur la première colonne, ce qui implique qu'il existe 2 pôles à partie réelle positive, (c.-à-d. dans le DPD du plan de LAPLACE). Par conséquent notre système est instable.

5.3.2.2. Le deuxième cas

Ce cas a lieu lorsque tous les éléments d'une ligne sont nuls. Ce qui veut dire que le système a une paire de racines réelles avec signe opposé et / ou des racines conjuguées sur l'axe **(jω)**. Dans ce cas pour terminer notre table de ROUTH, on doit inscrire à la place de la ligne en question les coefficients du polynôme dérivé par rapport à p du polynôme auxiliaire. Les coefficients de ce polynôme auxiliaire sont les termes de la dernière ligne non nulle. Les racines à partie réelle nulle sont les zéros du polynôme auxiliaire. Ce cas est très important car il nous permet de trouver à quelle condition un système est juste oscillant.

Exemple 4

Étudier la stabilité du système dont l'EC est la suivante :

$$\mathbf{p^6 + 2\,p^5 + 8\,p^4 + 12\,p^3 + 20\,p^2 + 16\,p + 16 = 0}$$

roots ([1 2 8 12 20 16 16]) = [-0.0000 + 2.0000i;-0.0000 - 2.0000i;-1.0000 + 1.0000i; -1.0000 - 1.0000i; 0.0000 + 1.4142i; 0.0000 - 1.4142i]

Réponse

Du fait que tous les coefficients sont présents et positifs, on ira examiner sa table de ROUTH.

La table de ROUTH :

p^6	1	8	20	16	
~~p^5~~	~~2~~	~~12~~	~~16~~		
p^5	1	6	8		
~~p^4~~	~~2~~	~~12~~	~~16~~		Le polynôme auxiliaire A(p) est donné par :
p^4	1	6	8		$A(p) = p^4 + 6p^2 + 8 = 0$
~~p^3~~	~~0~~	~~0~~			
~~p^3~~	~~4~~	~~12~~			$A'(p) = 4p^3 + 12p = 0$
p^3	1	3			$p_i = \pm j\sqrt{2}$ et $\pm 2j$
p^2	3	8			Ces racines sont aussi celles de l'équation caractéristique
p^1	1/3				
p^0	8				

5.3.2.3. Le troisième cas :

Souvent on a besoin de déterminer le domaine des valeurs d'un paramètre particulier du système pour lesquelles le système est stable.

Exemple 5

Étudier la stabilité du système dont la fonction de transfert en boucle ouverte est la suivante :

$$G(p) = \frac{k}{p^3 + 3p^2 + 3p + 1}$$

La table de ROUTH

P^3	**1**	**3**	
P^2	**3**	**1+k**	
P^1	$\frac{8-k}{3}$		Pour qu'il n'y ait pas de changement de signe dans la première colonne, il est nécessaire que :
P^0	**1 + k**		**(8-k)/3>0 et (1+k)>0** d'où **-1 < K < 8**

Exercices

1. L'équation caractéristique d'un système est :

$$\mathbf{p\,(p3 + 4p^2 + 2p + 3) + k\,(p+1) = 0}$$

En utilisant le critère de ROUTH, déterminer les valeurs de k, pour lesquelles ce système est stable.

- Soit un système à retour unitaire et dont la fonction de transfert en boucle ouverte est :

$$G(p) = \frac{k(1 + p)}{p^2(1 + 0.1p)(1 + 0.01p)}$$

En utilisant le critère de **ROUTH**, déterminer les valeurs de k, pour lesquelles le système est stable.

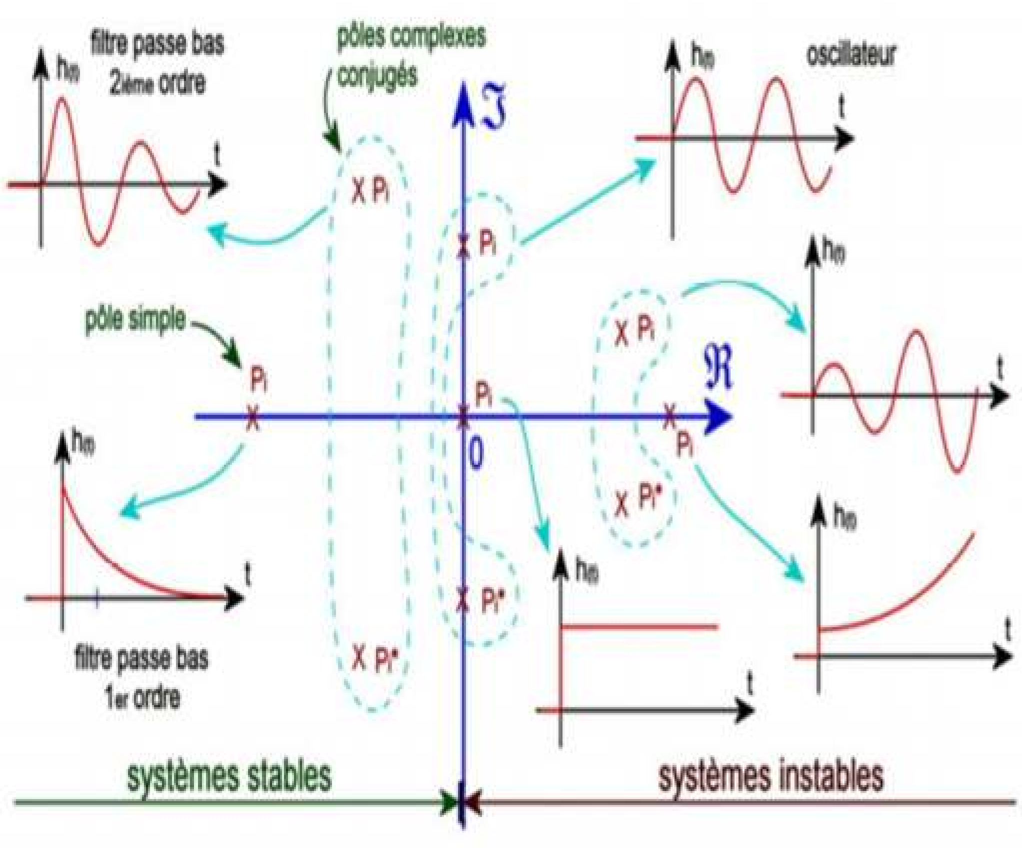


Figure 6.1: Différentes réponses impulsionnelles (Stabilité & Instabilité)

La précision d'un système asservi

6.1. Introduction

Puisque la fonction d'un asservissement est de copier aussi bien que possible la consigne e(t), alors un système asservi est d'autant meilleur que sa précision (erreur) : $[\xi(t) = entrée\ de\ référence - s(t)]$ est plus faible. Pour trouver les conditions à remplir pour obtenir ***la précision recherchée***, on a introduit des mesures quantitatives de l'efficacité du retour.

6.2. Erreurs statiques des systèmes linéaires continus

En général, les erreurs statiques (en régime permanent) des systèmes asservis dépendent ***des classes*** des systèmes et des ***signaux de référence***.

6.2.1. Définition de l'erreur statique (du point de vue configuration du système)

Avant de se lancer dans l'analyse de l'erreur en régime permanent, nous devons donner sa définition. D'habitude nous entendons par erreur, le signal que nous devons ramener si possible à zéro le plus rapidement possible. Considérons le système asservi à retour non unitaire de la figure (1), où e(t) est l'entrée, u(t) le signal de commande, r(t) le signal de retour et s(t) le signal de sortie. L'erreur du système est définie par :

$$\boxed{\xi(t) = \boldsymbol{entrée\ de\ référence - s(t)}} \quad \textbf{(6.1)}$$

Où le signal de référence est le signal que la sortie devra suivre. Lorsque le système est à retour unitaire [H(p) = 1], l'entrée de référence est e(t), et l'erreur est tout simplement :

$$\boxed{\boldsymbol{\xi(t) = e(t) - s(t)}} \quad \textbf{(6.2)}$$

Toutefois, l'erreur statique est définie par :

$$\boxed{\xi_{ss} = \lim_{t\to\infty} \xi(t) = \xi(\infty)} \quad \textbf{(6. 3)}$$

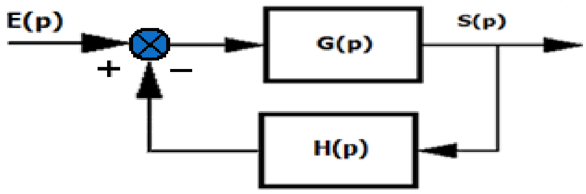


Figure 6.1 : Système asservis à retour non unitaire

Par contre, lorsque H(p) est différente de l'unité, le signal de commande u(t) de la figure 6.1 peut être ou non considéré comme l'erreur. Tout cela dépend de la forme de H(p), nous verrons plus loin comment définir le signal d'erreur, lorsque H(p) # 1. Mais il est à noter aussi que l'erreur n'est pas définie uniquement relativement à l'entrée. La figure 6.2 montre un système avec une entrée perturbatrice ***p(t)*** en plus de l'entrée habituelle ***e(t)***. La sortie due à ***p(t)*** agissant seule peut aussi être considérée comme une erreur. Et c'est pour ces raisons là que les définitions des erreurs ne sont pas unifiées dans la littérature. Pour établir une étude systématique de l'erreur statique pour les systèmes linéaires nous alors définir trois classes de systèmes et nous les traitons séparément.

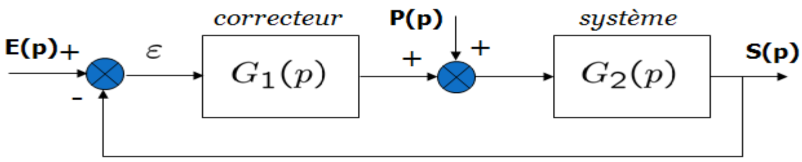


Figure 6.2 : Système asservi avec une entrée perturbatrice

6.3. Classification des systèmes :

6.3.1. Selon leur erreur en régime permanent

Soit le système asservi de la figure (3) donnée ci-dessous :

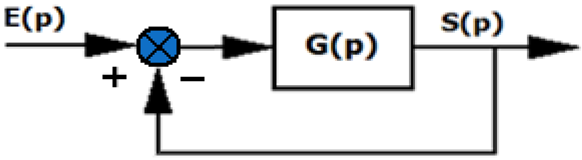


Figure 6.3 : Système asservis à retour unitaire

La fonction de transfert en boucle fermée est :

$$\boxed{F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G(p)}{1+G(p)}} \quad \textbf{(6.4)}$$

$$\boxed{S(p) = G(p).\xi(p)} \tag{6.5}$$

alors :

$$\boxed{\xi(p) = \frac{E(p)}{1+G(p)}} \tag{6.6}$$

L'erreur en régime permanent ξ_{ss} peut donc être déterminer en utilisant le théorème de la valeur finale.

$$\boxed{\xi_{ss} = \xi_{ss}(\infty) = \lim_{p \to 0} p\xi(p) = \lim_{p \to 0} p \frac{E(p)}{1+G(p)}} \tag{6.7}$$

L'équation (4) montre que l'erreur du régime permanent ξ_{ss} dépend de l'entrée ***E(p)*** et de la fonction de transfert ***G(p)*** de la chaîne directe. Les expressions de l'erreur ξ_{ss} pour les différents types de signaux standards sont données ci-dessous :

6.3.2. Selon les constantes d'erreur

a. Entrée en échelon unité

$$e(t) = e_0 u(t) \qquad donc \qquad E(p) = {e_0}/{p}$$

$$\xi_{ssp} = \lim_{p \to 0} p\xi(p) = \lim_{p \to 0} p \left[\frac{1}{1+G(p)}\right] \frac{e_0}{p} = \frac{e_0}{1+K_p}$$

Où :

$$K_p = \lim_{p \to 0} G(p)$$

b. Entrée en rampe unité

$$e(t) = e_0 t u(t) \qquad donc \qquad E(p) = {e_0}/{p^2}$$

$$\xi_{ssv} = \lim_{p \to 0} p\xi(p) = \lim_{p \to 0} p \left[\frac{1}{1+G(p)}\right] \frac{e_0}{p^2} = \lim_{p \to 0} \frac{e_0}{pG(p)}$$

Où :

$$K_v = \lim_{p \to 0} pG(p)$$

Kv est définit comme étant la constante d'erreur de vitesse.

c. Entrée en parabole unité

$$e(t) = e_0 t^2 u(t) \qquad donc \qquad E(p) = {e_0}/{p^3}$$

$$\xi_{ssa} = \lim_{p \to 0} p\xi(p) = \lim_{p \to 0} p \left[\frac{1}{1+G(p)}\right] \frac{e_0}{p^3} = \lim_{p \to 0} \frac{e_0}{p^2 G(p)} = \frac{e_0}{K_a}$$

Où : $$K_a = \lim_{p\to 0} p^2 G(p)$$

Ka est définit comme étant la constante d'erreur d'accélération.

6.4. Les différents types des systèmes de commande :

Comme on l'a déjà vu, toute fonction de transfert en boucle ouverte d'un système à retour unitaire, peut être écrite sous l'une des deux formes standards suivantes à savoir la forme des constantes de temps ou celle des pôles et zéros :

- **La forme des constantes de temps ou forme de BODE**

$$\mathbf{G(p)} = \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{p^\alpha}} \cdot \frac{(1+T_{z1}p)(1+T_{z2}p)\cdots\cdots(1+T_{zm}p)(1+T_{m1}p+T_{m2}p^2)\cdot e^{T_d p}}{(1+T_{p1}p)(1+T_{p2}p)\cdots\cdots(1+T_{pn}p)(1+T_{n1}p+T_{n2}p^2)}$$

- **La forme des pôles et zéros**.

$$G(p) = \frac{K'}{p^\alpha} \cdot \frac{(p+z_1)(p+z_2)\cdots\cdots(p+z_m)\cdots(p^2+a_{z1}p+ab_{z1})\cdot e^{T_d p}}{(p+p_1)(p+p_2)\cdots\cdots(p+p_n)\cdots(p^2+a_{p1}p+ab_{p1})}$$

Les équations (11.a) et (11.b) renferment le terme p^α au dénominateur, et lorsque p tends vers zéro, ce terme devient dominant dans la détermination de ξ_{ss} dans l'équation (7). Et c'est pour cela que les systèmes sont classés selon leur nombre d'intégration.

6.4.1. Les classes des systèmes

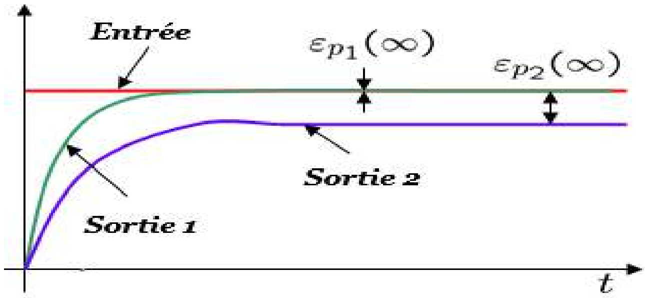
6.4.1.1. Classe zéro (α=0)

$$\xi_{ssp} = \lim_{p\to 0} p\xi(p) = \lim_{p\to 0} p \cdot \frac{E(p)}{1+G(p)} = \frac{e_0}{1+K_p}$$

$$\xi_{ssv} = \lim_{p\to 0} p\xi(p) = \lim_{p\to 0} p \cdot \frac{E(p)}{1+G(p)} = \lim_{p\to 0}\left[\frac{e_0}{p+pG(p)}\right] = \lim_{p\to 0}\frac{e_0}{pG(p)} = \frac{e_0}{K_v} = \infty$$

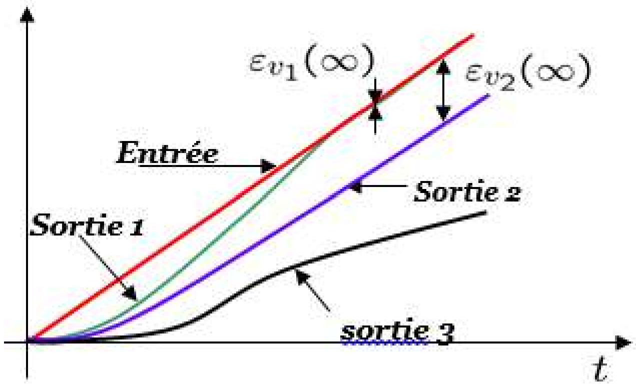
$$\xi_{ssa} = \lim_{p\to 0} p\xi(p) = \lim_{p\to 0} p \cdot \frac{E(p)}{1+G(p)} = \lim_{p\to 0} p\left[\frac{1}{1+G(p)}\right]\cdot\frac{e_0}{p^3} = \lim_{p\to 0}\frac{e_0}{p^2G(p)} = \frac{e_0}{K_a} = \infty$$

*Donc les systèmes sans intégration **(α=0)** ont une erreur de position constante inversement proportionnelle au gain statique K.*



Sortie 1 : Erreur de position nulle

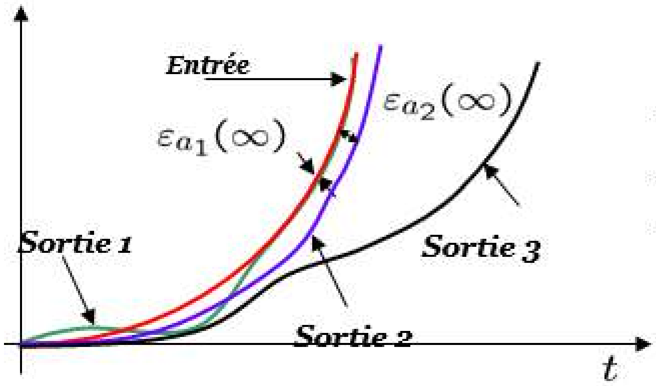
Sortie 2 : Erreur de position constante



Sortie 1 : Erreur de vitesse nulle

Sortie 2 : Erreur de vitesse constante

Sortie 3 : Erreur de vitesse infinie



Sortie 1 : Erreur d'accélération nulle

Sortie 2 : Erreur d'accélération constante

Sortie 3 : Erreur d'accélération infinie

6.4.1.2. Classe une (α=1)

$$\xi_{ssp} = \lim_{p \to 0} p\xi(p) = \lim_{p \to 0} p \cdot \frac{E(p)}{1 + G(p)} = \frac{e_0}{1 + K_p} = 0$$

$$\xi_{ssv} = \lim_{p \to 0} p\xi(p) = \lim_{p \to 0} p \cdot \frac{E(p)}{1 + G(p)} = \lim_{p \to 0} \left[\frac{e_0}{p + pG(p)}\right] = \lim_{p \to 0} \frac{e_0}{pG(p)} = \frac{e_0}{K_v}$$

$$\xi_{ssa} = \lim_{p \to 0} p\xi(p) = \lim_{p \to 0} p \cdot \frac{E(p)}{1 + G(p)} = \lim_{p \to 0} p\left[\frac{1}{1 + G(p)}\right] \cdot \frac{e_0}{p^3} = \lim_{p \to 0} \frac{e_0}{p^2 G(p)} = \frac{e_0}{K_a} = \infty$$

*Donc les systèmes de classe une **(α=1)** ont une erreur de position nulle, une erreur de vitesse (traînage) constante inversement proportionnelle au gain statique K et une erreur d'accélération infinie en régime permanent (définitif).*

6.4.1.2. Classe une (α=2)

$$\xi_{ssp} = \lim_{p\to 0} p\xi(p) = \lim_{p\to 0} p \cdot \frac{E(p)}{1+G(p)} = \frac{e_0}{1+K_p} = 0$$

$$\xi_{ssv} = \lim_{p\to 0} p\xi(p) = \lim_{p\to 0} p \cdot \frac{E(p)}{1+G(p)} = \lim_{p\to 0} \left[\frac{e_0}{p+pG(p)}\right] = \lim_{p\to 0} \frac{e_0}{pG(p)} = 0$$

$$\xi_{ssa} = \lim_{p\to 0} p\xi(p) = \lim_{p\to 0} p \cdot \frac{E(p)}{1+G(p)} = \lim_{p\to 0} p \left[\frac{1}{1+G(p)}\right] \cdot \frac{e_0}{p^3} = \lim_{p\to 0} \frac{e_0}{p^2 G(p)} = \frac{e_0}{K_a}$$

Par conséquent les systèmes de classe deux ***(α=2)*** *ont une erreur de position, une erreur de vitesse (traînage) nulle et une erreur d'accélération constante inversement proportionnelle au gain statique K.*

Les différents résultats précédents sont résumés dans le tableau qui suit :

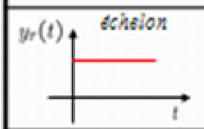
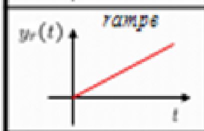
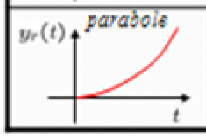
Entrée	Interprétation physique	Fonction	Transformée de Laplace	Utilisée pour évaluer
	*position constante*	1	$\frac{1}{p}$	*l'erreur de position*
	*vitesse constante*	t	$\frac{1}{p2}$	*l'erreur de vitesse*
	*accélération constante*	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{p^3}$	*l'erreur d'accélération*

Tableau 1 : Les erreurs

7. Résumé

$e_0 = 1$

		TYPE 0		TYPE 1		TYPE 2	
Entrée	Erreur Rég. Perm.	Constante d'erreur	Erreur	Constante d'erreur	Erreur	Constante d'erreur	Erreur
$u(t)$	$\frac{1}{1+K_p}$	$K_p =$ const.	$\frac{1}{1+K_p}$	$K_p = \infty$	0	$K_p = \infty$	0
$tu(t)$	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = 0$	∞	$K_v =$ const.	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = \infty$	0
$.5t^2u(t)$	$\frac{1}{K_a}$	$K_a = 0$	∞	$K_a = 0$	∞	$K_a =$ const.	$\frac{1}{K_a}$

Tableau 6.2 : Les erreurs

Conclusion

Dans le but d'obtenir un bon régime permanent on a intérêt à augmenter les constantes d'erreur K_p, K_v, et K_a décrivant l'habilité du système à réduire ou à éliminer l'erreur du régime permanent. Mais sans franchir les limites de stabilité. Quoique et à première vue, il semble que le nombre d'intégration est illimité en pratique les systèmes de classe supérieure à deux ne sont pas utilisés pour deux raisons :

- Ils sont plus difficiles à stabiliser
- Leurs erreurs dynamiques tendent à devenir plus importantes que celles des systèmes de classe 0, 1, et 2.

6.5. Influence d'une perturbation constante.

Soit le système dont le diagramme fonctionnel est le suivant :

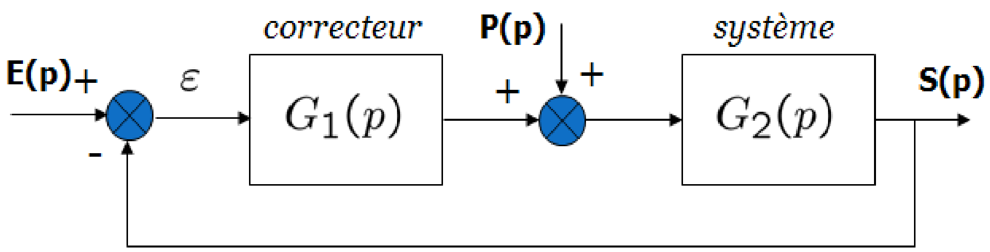


Figure 4 : Système à retour unitaire avec une entrée perturbatrice

$$S(p)_{/p} = \frac{G_2(p)P(p)}{1 + G_1(p)G_2(p)} = \xi_p(p)$$

$$\xi_p(p) = \frac{G_2(p)P(p)}{G_1(p)G_2(p)\left[1 + \frac{1}{G_1(p)G_2(p)}\right]} = \frac{P(p)}{G_1(p)\left[1 + \frac{1}{G(p)}\right]}$$

Où :

$$G_1(p) = \frac{K_1}{p^{\alpha_1}} \cdot \frac{N_1(p)}{D_1(p)} \qquad et \qquad G_2(p) = \frac{K_1}{p^{\alpha_2}} \cdot \frac{N_2(p)}{D_2(p)}$$

Et,

$$G(p) = \frac{K}{p^{\alpha}} \cdot \frac{N(p)}{D(p)} \quad \text{avec} \quad K = K_1 \cdot K_2 \quad \text{et} \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\xi_p(p) = \frac{P(p)}{G_1(p)\left[1 + \frac{1}{G(p)}\right]} = \frac{P(p)}{\frac{K_1}{p^{\alpha_1}} \cdot \frac{N_1(p)}{D_1(p)}\left[1 + \frac{K}{p^{\alpha}} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}\right]}$$

$$\xi_{ss} = \lim_{p \to 0} p\xi_p(p) = \lim_{p \to 0} \frac{P(0)}{\frac{K_1}{p^{\alpha_1}} \cdot \frac{N_1(0)}{D_1(0)}\left[1 + \frac{1}{\frac{K}{p^{\alpha}} \cdot \frac{N(0)}{D(0)}}\right]}$$

Discussion :

1. **($\alpha_1 = 0$)**

- **(α_2=0)** $\xi_{ss} = \frac{P_0 K}{K_1(1+K)}$
- **(α_2>1)** $\xi_{ss} = \frac{P_0}{K_1}$

2. **(α_1 >1)**

- **(α_2=0)** $[\text{Si } \alpha_1 + \alpha_1 \neq 0]$ alors $\xi_{ss} = 0$
- **(α_2>1)** $\xi_{ss} = 0$

Ainsi l'existence d'une erreur permanente non nulle dépend uniquement des intégrations placées en amont du point d'incidence de la perturbation. En plus lorsque l'erreur existe, sa valeur est d'autant plus petite que le gain **K_1** en amont est grand. Un système est astatique vis à vis d'une perturbation en échelon, s'il possède au moins un intégrateur placé en amont du point d'application de la perturbation.

L'erreur statique lorsqu'elle est finie mais non nulle, elle décroît lorsque le gain en boucle ouverte croit. Malheureusement, et comme on le verra plus loin que la ***stabilité se détériore lorsque le gain en boucle ouverte croit.*** Cette propriété est connue sous le nom de dilemme ***stabilité- précision*** qui en général nécessite un compromis.

L'annulation de l'erreur statique nécessite la présence dans la chaîne directe d'au moins :

- Une intégration, s'il s'agit d'une entrée en échelon,
- Deux intégrations s'il s'agit d'une entrée en rampe.

Références Bibliographiques

[1] OGATA, Katsuhiko. Modern control engineering. Book Reviews, 1999, vol. 35, no 1181, p. 1184.

[2] NISE, Norman S. Control systems engineering. John Wiley & Sons, 2020.

[3] GILLE, Jean-Charles, DECAULNE, Paul, et PÉLEGRIN, Marc. Théorie et calcul des asservissements linéaires. 1967.

[4] GILLE-MAISANI, Jean-Charles. Théorie et technique des asservissements. Dunod, 1956.

[5] GILLE, Jean-Charles, DECAULNE, Paul, et PÉLEGRIN, Marc. Dynamique de la commande linéaire. 1967.

[6] DISTEPHANO, J. J., STUBBERUD, A. R., et WILLIAMS, I. J. Systèmes asservis. Série SCHAUM, 1994. Tome 1 et Tome 2.

[7] GOLNARAGHI, FARID, AND BENJAMIN C. KUO. Automatic control systems. Prentice Hall Education, 2017.

[8] LEVINE, William S. (ed.). The Control Systems Handbook: Control System Advanced Methods. CRC press, 2018.

[9] RAVEN, Francis H. Automatic control engineering. McGraw-Hill, Inc., 1995.

[10] LIN, Ching-Fang, et al. Advanced control systems design, an overview. In: 1994 Proceedings of IEEE International Conference on Control and Applications. IEEE, 1994. p. 935-939.

[11] D'ANDRÉA-NOVEL, Brigitte et DE LARA, Michel Cohen. Commande linéaire des systèmes dynamiques. Presses des MINES, 2000.

[12] FOSSARD, André. Commande des systèmes multidimensionnels. 1972.

[13] SEVELY, Yves. Systèmes et asservissements linéaires échantillonnés. 1973.

[14] OWENS, David H. Feedback and multivariable systems. In: Fifth European Solid State Circuits, Conference-ESSCIRC 79. IEEE, 1979. p. 1-1.

[14] NAGRATH, I. J. Control systems engineering. New Age International, 2006.

Semestre: 6
Unité d'enseignement: UEF 3.2.1
Matière 1: Asservissements et régulation
VHS: 67h30 (Cours: 3h00, TD: 1h30)
Crédits: 6
Coefficient: 3

Objectifs de l'enseignement:

Donner aux étudiants une bonne connaissance des méthodes classiques d'étude des boucles d'asservissement, la modélisation d'un processus physique, l'analyse des performances en boucle ouverte et fermée ainsi que la synthèse des correcteurs.

Connaissances préalables recommandées

Electronique fondamentale 1, Maths 1, 2 et 3.

Contenu de la matière :

Le nombre de semaines affichées sont indiquées à titre indicatif. Il est évident que le responsable du cours n'est pas tenu de respecter rigoureusement ce dimensionnement ou bien l'agencement des chapitres.

Chapitre 1. Introduction sur les asservissements (2 Semaines)
Historique, intérêts, la notion de systèmes en Boucle Ouverte (BO) et en Boucle Fermée (BF), les asservissements, la représentation générale d'un asservissement, les régulateurs et les systèmes suiveurs, c'est quoi un retour (feedback) et quels sont ses effets sur les systèmes (gain total, stabilité, perturbations externes et internes, sensibilité, ...)?, exemples d'asservissements réels.

Chapitre 2. Rappels sur la Transformée de Laplace (1 Semaine)

Chapitre 3. Modélisation des systèmes asservis linéaires (2 Semaines)
Modèles mathématiques **:** Équations différentielles, équations récurrentes système d'équations d'état, réponse impulsionnelle, pôles et zéros, les réponses fréquentielles (modéliser des systèmes électriques, mécaniques (en translation et rotation), thermiques, fluidiques, et des systèmes mixtes, expliquer les propriétés**:** linéarité, stationnarité (invariance), la causalité, stabilité ; La fonction de transfert, diagrammes fonctionnels et algèbres des diagrammes fonctionnels.

Chapitre 4. Performances des systèmes linéaires (3 Semaines)
Analyse temporelle des systèmes du 1^{er} ordre et du 2^{e} ordre, performances temporelles: temps de montée, temps de réponse, constante du temps, dépassement, le temps de stabilisation, analyse fréquentielle, diagrammes de Bode, de Nyquist et de Black (marges de gain et de phases).

Chapitre 5. La Stabilité (2 Semaines)
Introduction, définition, explication, critère de Routh, Table de Routh, exemples d'évaluation de la stabilité, les cas particuliers, exemples.

Chapitre 6. La Précision d'un système asservi (1 Semaine)
Précision dynamique, précision statique, expression de l'erreur statique, l'erreur en régime permanent, la classe ou le type d'un asservissement (classes 0, 1 et 2), calcul des erreurs correspondant aux entrées canoniques, erreurs de position, de traînage et d'accélération, tableau récapitulatif et conclusions, le dilemme stabilité-précision, rejet des perturbations, tableau récapitulatif et conclusions.

Chapitre 7. Lieux des Racines **(2 semaines)**
Introduction, méthode de construction du lieu de racines, principe de la méthode (Règles pratiques pour la construction et exploitation du lieu des racines, Exemples), règles de construction du lieu (Conditions des angles et des modules, Le nombre des branches, Axe de symétrie, Points de départ et d'arrivée, Directions asymptotiques, parties de l'axe réel appartenant au lieu, points de branchement, Autres propriétés du lieu des racines), application de la méthode sur quelques exemples (Utilisation du logiciel MATLAB pour le tracé du lieu de racines, application à l'évaluation de la stabilité et à la compensation).

Chapitre 8. Exemples de projet de synthèse **(2 semaines)**
Synthèse de correcteurs à avance ou retard de phase, synthèse des régulateurs (les actions Proportionnelle, Intégrale et Dérivée), faire apparaitre leurs influences sur les réponses et l'amélioration des performances des systèmes.

Mode d'évaluation :
Contrôle continu : 40 % ; Examen final : 60 %.

Références bibliographiques:

1. M. Rivoire, « Cours d'automatique, Tome 1 : Signaux et systèmes », Edition Chihab.
2. M. Rivoire, « Cours d'automatique, Tome 2 : Asservissement-régulation-commande analogique », Edition Chihab.
3. K. Ogata, "Automatic Control Engineering'', Prentice Hall, fifth edition, 2010.
4. B.C. Kuo, "Automatic Control Systems", Prentice Hall, ninth edition, 2009.
5. J. Di Stefano, « Systèmes asservis : cours et problèmes », McGraw Hill Edition.
6 J.M. Allenbach, « Systèmes asservis volume 1 », Ecole d'Ingénieurs de Genève, édition 2005.
7. Brizeux, « Introduction a la correction des Systèmes asservis », PSI, 2010.
8. Ph. Mullhaupt, « Cours Introduction à la commande des systèmes dynamiques », Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2016.