الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

وزارة التعليم العالي
و البحث العلمي
جامعة 8 ماي 1945 قالمة
كلية الرياضيات و الإعلام الآلي
وعلوم المادة
قسم الرياضيات

MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de **MAGISTER**

Option
Mathématique pour le développement

Par

M^{r}. MAIZI Mohamed

Intitulé

Comportement asymptotique des polynômes extrémaux avec la condition généralisée de Szegő

<u>Dirigé par</u> : Dr. Fateh ELLAGGOUNE

Devant le jury

PRESIDENT:	Mohamed Zine AISSAOUI	M.C.A	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Fateh ELLAGGOUNE	M.C.A	Univ-Guelma
EXAMINATEURS :	Amar GUESMIA	M.C.A	Univ-Skikda
	Abderrazek CHAOUI	M.C.A	Univ-Guelma

Soutenu le 24/09/2013

Table des matières

ملخص

نقدم في هذه المذكرة دراسة لمشكلة السلوك التقاربي لفئة ما يسمى كثيرات الحدود المتعامدة. هذه المتتالية لكثيرات الحدود و التي نرمز لها بالرمز $\{L_n(z)\}$، سيتم تعريفها على النحو التالي:

$$L_n(z) = z^n + \dots;\ \int_S L_n(z)\overline{z^{\nu}}\,d\mu = 0;\ \nu \in \{0,1,\dots,n-1\}$$

أو

$$L_n(z) = \gamma_n z^n + \dots;\ \int_S L_n(z)\overline{z^{\nu}}\,d\mu = \frac{1}{\gamma_n}\delta_{n\nu};\ \nu \in \{0,1,\dots,n\}.$$

حيث μ قياس بوريل موجب، منتهي ذو حامل يحتوي على عدد غير منتهي النقاط في المستوي المركب.

والهدف من هذا العمل هو دراسة السلوك التقاربي لهذه الفئة من كثيرات الحدود المتعامدة المرفقة بقياسات و حوامل من الشكل التالي:

1- $S = \Gamma,$ (الفصل 3) حيث $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ دائرة الوحدة في المستوي المركب، μ مركزة على Γ و مستمرة مطلقا بالنسبة لقياس لوبيغ طول القوس $d\theta$ على Γ ، تحقق شرط زيغو:

$$d\mu(\theta) = \rho(\theta)\,d\theta,\ \rho \ge 0;\ \int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta)\,d\theta > 0,\ \rho \in L^1([-\pi,+\pi],d\theta)$$

و

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log(\rho(\theta))\,d\theta > -\infty.$$

2- $S = \Gamma \cup \{z_j\}_{j=1}^{m},$ (الفصل 4) حيث $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ دائرة الوحدة في المستوي

المركب، و النقاط $z_j \in ext(E),(j \in \{1,2,...,m\})$ ، $\mu = \beta + \sigma$ ، β مركزة على Γ و مستمرة مطلقا بالنسبة لقياس لوبيغ طول القوس $|d\zeta|$ على Γ، تحقق شرط زيغو المعمم و σ هو قياس متقطع مركز على $\{z_j\}_{j=1}^{m}$ بالكتل A_j عند النقاط z_j من أجل $j \in \{1,2,...,m\}$ أين δ_{z_j} تمثل قياس ديراك عند النقطـة z_j ، أي:

$$d\beta(\xi) = \rho(\xi)|d\xi|,\ \rho : E \to \mathbb{R}_+,\ \int_E \rho(\xi)|d\xi| < +\infty$$

$$\int_\Gamma p(\xi)(\log\rho(\xi))|d\xi| > -\infty$$

$$\sigma = \sum_{j=1}^{m} A_j \delta_{z_j},\ A_j > 0$$

<u>الكلمات المفتاحية:</u> السلوك التقاربي، كثيرات الحدود الحدية، شرط زيغو المعمم.

Abstract

We present in this memory, a study of the problem of asymptotic behavior of a class of polynomials so-called orthogonal or orthonormal. This system of polynomials denoted by $\{L_n(z)\}$, will be defined as follows :

$$L_n(z) = z^n + ...; \int_{\mathbb{S}} L_n(z).\overline{z^\nu} d\mu = 0; \; \nu \in \{0, 1, ..., n-1\}$$

or

$$L_n(z) = \gamma_n z^n + ...; \int_{\mathbb{S}} L_n(z).\overline{z^\nu} d\mu = \frac{1}{\gamma_n}\delta_{n\nu}; \; \nu \in \{0, 1, ..., n\}.$$

where μ is a finite positive Borel measure, with $supp(\mu) = \mathbb{S}$, such that it contains an infinite number of points in the complex plane.

The aim of this work is to study the asymptotic behavior of this class of orthogonal polynomials for measures μ and supports $\mathbb{S}$ of the following form :

1) $\mathbb{S} = \mathbb{T}$, (chapter 3); where $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ is the unit circle in the complex plane; μ is concentrated on $\mathbb{T}$ and is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure $d\theta$ on $[-\pi, +\pi]$, i.e :

$$d\mu(\theta) = \rho(\theta)d\theta, \; \rho \geq 0; \; \int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta)\, d\theta > 0, \; \rho \in L^1([-\pi, +\pi], \; d\theta)$$

moreover μ satisfies the Szegö condition :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log(\rho(\theta))d\theta > -\infty.$$

2) $\mathbb{S} = \mathbb{T} \cup \{z_j\}_{j=1}^{m}$, (chapter 4); where $\mathbb{T}$ is the unit circle in the complex plane; and the points $z_j \in ext(\mathbb{T})$; $\mu = \beta + \sigma$, β is concentrated on $\mathbb{T}$ and is absolutely continuous

with respect to the Lebesgue measure $|d\xi|$ on the unit circle $\mathbb{T}$, i.e :

$$d\beta(\xi) = \rho(\xi)\,|d\xi|\,,\ \ \rho : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^{+},\ \int\limits_{E} \rho(\xi)\,|d\xi| < +\infty$$

moreover β satisfies the generalised Szegö condition :

$$\int\limits_{\mathbb{T}} p(\xi)(\log \rho(\xi))\,|d\xi| > -\infty$$

σ is a discrete measure concentrated on $\{z_j\}_{j=1}^{m}$, with masses A_j at the points z_j; for $j \in \{1, ..., m\}$, i.e :

$$\sigma = \sum_{j=1}^{m} A_j \delta_{z_j},\ \ A_j > 0$$

where δ_{z_j} is the Dirac unit measure supported at the point z_j.

Key words : Asymptotic behaviour, Extremal polynomials, Generalized Szegö condition.

Résumé

On présente dans ce mémoire, une étude du problème du comportement asymptotique d'une classe de polynômes dits orthogonaux ou orthonormés. Cette suite de polynômes qu'on notera $\{L_n(z)\}$, sera définie comme suit :

$$L_n(z) = z^n + ...; \int_{\mathbb{S}} L_n(z).\overline{z^\nu} d\mu = 0; \ \nu \in \{0, 1, ..., n-1\}$$

ou

$$L_n(z) = \gamma_n z^n + ...; \int_{\mathbb{S}} L_n(z).\overline{z^\nu} d\mu = \frac{1}{\gamma_n}\delta_{n\nu}; \ \nu \in \{0, 1, ..., n\}.$$

où μ est une mesure de Borel positive, finie, avec $supp(\mu) = \mathbb{S}$, tel qu'il contient un nombre infini de points dans le plan complexe.

Le but de ce travail est d'étudier le comportement asymptotique de cette classe de polynômes orthogonaux pour des mesures μ et des supports $\mathbb{S}$ de la forme suivante :

1) $\mathbb{S} = \mathbb{T}$, (chapitre 3) ; où $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ est le cercle unité du plan complexe ; μ est concentrée sur $\mathbb{T}$ et absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $d\theta$ sur $[-\pi, +\pi]$, c'est-à-dire :

$$d\mu(\theta) = \rho(\theta) d\theta, \ \rho \geq 0; \ \int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta)\, d\theta > 0, \ \rho \in L^1([-\pi, +\pi], d\theta)$$

de plus μ vérifie la condition de Szegö :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log(\rho(\theta)) d\theta > -\infty.$$

2) $\mathbb{S} = \mathbb{T} \cup \{z_j\}_{j=1}^m$, (chapitre 4) ; où $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ est le cercle unité du plan complexe et les points $z_j \in ext(\mathbb{T})$; $\mu = \beta + \sigma$, β est concentrée sur $\mathbb{T}$ et absolument

continue par rapport à la mesure de Lebesgue de longueur d'arc $|d\xi|$ sur $\mathbb{T}$, c'est à dire :

$$d\beta\left(\xi\right)=\rho\left(\xi\right)\left|d\xi\right|,\ \rho:\mathbb{T}\rightarrow\mathbb{R}_{+},\ \int\limits_{E}\rho\left(\xi\right)\left|d\xi\right|<+\infty$$

de plus β vérifie la condition généralisée de Szegö :

$$\int\limits_{\mathbb{T}}p(\xi)(\log\rho\left(\xi\right))\left|d\xi\right|>-\infty$$

σ est une mesure discrète concentrée sur $\{z_j\}_{j=1}^{m}$, avec les masses A_j aux points z_j pour $j\in\{1,...,m\}$, c'est à dire :

$$\sigma=\sum_{j=1}^{m}A_j\delta_{z_j},\ A_j>0$$

où δ_{z_j} désigne la mesure de Dirac au point z_j.

Mots clés : Comportement asymptotique, Polynômes extrémaux, Condition généralisée de Szegö.

0.1 Introduction

La notion de système orthogonal de fonctions est apparue à travers l'étude de certains problèmes d'analyse fonctionnelle (équations intégrales, séries de Fourier, problème de Sturm-Liouville et, plus généralement, problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles) ; les polynômes orthogonaux sont les systèmes orthogonaux les plus simples et il ont beaucoup d'applications en physiques et en mathématiques. Leur théorie à été développer par Tchebyshev en partant du problème de l'interpolation par la méthode des moindres carrés au moyen des polynômes de degré donné. Ces systèmes de polynômes dits orthogonaux ou orthonormés et notés $\{L_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont définis comme suit :

$$L_n(z) = z^n + ...; \ \int_{\mathbb{S}} L_n(z)\,\overline{L_m(z)}d\mu(z) = 0; \ si\ n \neq m. \tag{0.1}$$

ou

$$L_n(z) = \gamma_n z^n + ...\text{avec}, \ \gamma_n > 0; \ \int_{\mathbb{S}} L_n(z)\,\overline{L_m(z)}d\mu(z) = \frac{1}{\gamma_n^2}\delta_{nm}; \ \forall n, \ m \in \{0, 1, ...\} \tag{0.2}$$

où μ est une mesure de Borel positive, fini, de support $\mathbb{S}$ qui est un sous ensemble infini du plan complexe $\mathbb{C}$.

Il y a plusieurs problèmes intéressant au sujet des polynômes orthogonaux, l'un des plus importants est celui de leur comportement asymptotique quand n tend vers l'infini, en d'autre termes trouver un équivalent de $L_n(z)$ pour n assez grand, c'est à dire :

$$\text{Etudier : } \lim_{n\to\infty} L_n(z); \ z \in K; \ K \text{ compact}, \ K \subset \mathbb{C}\backslash\mathbb{S}. \tag{0.3}$$

La formule asymptotique de $L_n(z)$ dépend en général de μ et de son support $\mathbb{S}$. On voit qu'en explicitant la mesure μ et son support $\mathbb{S}$ on retrouve tous les polynômes orthogonaux connus ; par exemple si $d\mu = \rho(x)dx$ et $\mathbb{S} = [-1, +1]$, on obtient les polynômes de Tchebyshev pour $\rho(x) = (1 - x^2)^{1/2}$ ou $\rho(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ et ceux de Legendre pour

$\rho(x) = 1$, etc....

Les comportements asymptotiques des polynômes orthogonaux sont appliqués dans les domaines suivants :

1) Fractions continues.

2) Développement des fonctions en séries de polynômes orthogonaux.

3) Convergence des approximants de padé.

4) Etude du problème de l'opérateur discret de Sturm-Liouville.

Dans ce mémoire on s'intéresse à l'asymptotique fort des polynômes orthogonaux $L_n(z)$, dans le cas où la mesure μ est concentrée à l'extérieur du cercle unité.

On définit dans le chapitre 1, les polynômes orthogonaux associés à une mesure donnée et la notion de comportement asymptotique de ces polynômes. On donnera ensuite une synthèse des principaux cas étudiés et qui s'avèrent les plus intéréssant pour notre étude, depuis 1921 jusqu'a 2006.

Le chapitre 2 met en lumière les outils fonctionnels de base pour étudier le problème de l'asymptotique fort des polynômes orthogonaux $L_n(z)$, qui sont l'espace de Hardy associés à l'extérieur du cercle unité et la fonction dite de Szegö, qui nous servent à définir l'espace de Hardy $H^2(G,\rho)$, où ρ est la densité de la partie absolument continue de la mesure μ.

Dans le chapitre 3 on présente une étude du comportement asymptotique des polynômes orthogonaux sur le cercle avec fonction poids ρ tel que :

$$\rho \in L^1(\mathbb{T})\,;\ \rho \geq 0;\ \int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta)\,d\theta > 0 \text{ et } \int_{-\pi}^{\pi} \log(\rho(\theta))d\theta > -\infty.$$

Tous les résultats cités sont tirés essentiellement de l'article de Szegö [51] .

Dans le chapitre 4 on détaille le travail de Denisov et Kupin [9] . Puis on présente une étude du problème du comportement asymptotique des polynômes orthogonaux avec la condition généralisée de Szegö des polynômes $\{\psi_n\}$ associés à une mesure μ, positive finie définie sur la tribu borélienne de $\mathbb{C}$ et concentrée sur l'ensemble $\mathbb{T} \cup \{z_j\}_{j=1}^m$ où $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ le cercle unité et $z_1, z_2, \ldots, z_m$ m points fixes à l'extérieur de $\mathbb{T}$. μ est définie comme suit :

$$\mu = \beta + \sum_{j=1}^{m} A_j \delta_{z_j}$$

où $\beta = \beta_{ac} + \beta_s$ est une mesure de probabilité borélienne sur le cercle unité $\mathbb{T}$ et δ_{z_j} désigne la mesure de Dirac au point z_j avec les masse $A_j > 0$, pour $j \in \{1, \ldots, m\}$. β_{ac} désigne la partie absolument continue de β et β_s la partie singulière.

Chapitre 1

Éléments de la théorie des polynômes orthogonaux

1.1 Concepts des polynômes orthogonaux

1.1.1 Orthogonalité des fonctions

Soient deux fonctions $g(x)$ et $h(x)$ définies sur un intervalle réel ou complexe $[a,b]$, on définit leur produit scalaire par :

$$\langle g,h\rangle = \int_a^b g(x)\overline{h}(x)dx \tag{1.1}$$

où $\overline{h}(x)$ est le conjugué de $h(x)$.

Les fonctions $g(x)$ et $h(x)$ sont orthogonales si leur produit scalaire est nul. De même, une famille de fonction $\phi_0,\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n$; avec n fini ou infini, constitue une famille orthogonale si :

$$\langle \phi_k,\phi_l\rangle = \int_a^b \phi_k(x)\overline{\phi_l}(x)dx = 0 \ si \ k\neq l \qquad k,\ l\in\{0,1,\ldots,n\}\,. \tag{1.2}$$

Par extension, soit μ une mesure de Borel (mesure non négative) sur un intervalle réel $[a,\ b]$, on définit le produit scalaire de deux fonction $g(x)$ et $h(x)$ suivant la distribution $d\mu$ par :

$$\langle g, h\rangle_\mu = \int_a^b g(x)h(x)d\mu(x). \tag{1.3}$$

Nous rappelons que l'espace $L^2_\mu[a,b]$ est constitué des fonctions $f(x)$ telles que :

$$\int_a^b |f(x)|^2 d\mu(x) < \infty. \tag{1.4}$$

Deux fonctions $g(x)$ et $h(x)$ éléments de $L^2_\mu[a,b]$ sont orthogonales si leur produit scalaire est nul ($\langle g, h\rangle_\mu = 0$).

Très souvent, la distribution $d\mu(x)$, est déterminée à travers une fonction poids $\rho(x)$:

$$d\mu(x) = \rho(x)dx \tag{1.5}$$

Une famille de fonctions libre et infinie $\{f_k\}$ peut être orthogonalisé en une autre famille $\{\varphi_k\}$. La méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt se résume par les étapes suivantes :

- Prendre $\varphi_1 = f_1$,
- Faire $\varphi_2 = \varphi_1 - \lambda_{21}\varphi_1$; λ_{2l} est choisi de telle sorte que $\langle \varphi_1, \varphi_2\rangle = 0$, donc

$$\langle f_1 - \lambda_{21}\varphi_1, \varphi_1\rangle = 0,\ \text{d'où } \lambda_{21} = \frac{\langle f_2, \varphi_1\rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1\rangle} \tag{1.6}$$

par récurrence, on détermine :

$$\varphi_k = f_k - \sum_{l=1}^{k-1} \lambda_{kl}\varphi_l \tag{1.7}$$

avec

$$\lambda_{kl} = \frac{\langle f_k, \varphi_l \rangle}{\langle \varphi_l, \varphi_l \rangle} \tag{1.8}$$

Avec le procédé d'orthogonalisation de Schmidt, on peut construire à partir de toute famille libre de fonctions $g_0(x), g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)$, une famille orthogonale de fonctions $\phi_0(x), \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$. On démontre que :

$$\phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{D_{k-1} D_k}} D_k(x) \text{ pour } k \geq 1; \tag{1.9}$$

Les déterminants D_k sont définis positifs. Leur expression est donnée ci-après :

$$D_k = \begin{vmatrix} \langle g_0, g_0 \rangle & \langle g_0, g_1 \rangle & \ldots & \ldots & \ldots & \langle g_0, g_k \rangle \\ \langle g_1, g_0 \rangle & \langle g_1, g_1 \rangle & \ldots & \ldots & \ldots & \langle g_1, g_k \rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle g_{k-1}, g_0 \rangle & \langle g_{k-1}, g_1 \rangle & \ldots & \ldots & \ldots & \langle g_{k-1}, g_k \rangle \\ g_0(x) & g_1(x) & \ldots & \ldots & \ldots & g_k(x) \end{vmatrix} \tag{1.10}$$

avec $D_{-1} = 1$ et $D_0(x) = g_0(x)$

1.1.2 Familles de polynômes orthogonaux

Considérons l'espace $L^2_\mu[a,b]$ des fonctions telles que :

$$\int_a^b |f(x)|^2 d\mu < \infty$$

où μ une mesure de Borel (non négative) sur l'intervalle $[a,b]$ telle que $\mu[a,b] < \infty$.

$d\mu$ est une distribution et, si les moments $C_k = \int_a^b x^k d\mu(x)$ existent, alors l'orthogonalisation de la famille de polynômes : $1, x, x^2, \ldots, x^k, \ldots\ldots.$ par le procédé de Schmidt conduit à la famille de polynômes : $p_0(x), p_1(x), \ldots\ldots\ldots, p_k(x), \ldots$ déterminée de façon univoque par les conditions suivantes :

- $p_k(x)$ est un polynôme de degré k dont le coefficient du monôme x^k est positif
- Le système $\{p_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ est orthogonal dans l'espace $L^2_\mu[a,b]$; c'est à dire :

$$\int_a^b p_k(x)p_l(x)d\mu(x) = 0 \text{ si } k \neq l \tag{1.11}$$

L'existence des moments traduit le fait que les monômes x^k appartiennent à $L^1_\mu[a,b]$.

Cette définition des polynômes orthogonaux reste valable si la distribution est du type $\rho(x)dx$. Dans ce cas, $\rho(x)$ est une fonction non négative et mesurable au sens de Lebesgue : c'est la fonction poids. Avec une distribution de type $\rho(x)dx$, le système $\left\{[\rho(x)]^{\frac{1}{2}}\, p_k(x)\right\}$ est orthonormé. On détermine les expressions analytiques des polynômes orthogonaux $p_k(x)$ avec les équations (1.10), qui deviennent :

$$p_k(x) = \frac{1}{\sqrt{D_{k-1}D_k}}.\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & \cdots & c_k \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & \cdots & c_{k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{k-1} & c_k & c_{k+1} & \cdots & \cdots & c_{2k-1} \\ 1 & x & x^2 & \cdots & \cdots & x^k \end{vmatrix} \tag{1.12}$$

Par exemple, on construit les polynômes orthogonaux classiques par l'orthogonalisation de la famille des polynômes : $1, x, x^2, \ldots, x^k, \ldots\ldots.$ dans les conditions suivantes :

- Polynômes de Jacobi $P_k^{(\alpha,\beta)}(x)$:

  $a =_- 1,\ b = 1,\ \rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ avec $\alpha > -1$ et $\beta > -1$.
- Polynômes de Laguerre $L_k^\alpha(x)$:

  $a = 0,\ b = +\infty,\ \rho(x) = e^{-x}x^\alpha$, avec $\alpha > -1$
- Polynômes d'Hermite $H_k(x)$:

  on a $a = -\infty,\ b = +\infty$, et $\rho(x) = e^{-x^2}$

Les polynômes de Legendre $P_k(x)$ et les polynômes ultrasphérique $P_k^{(\lambda)}(x)$ sont probablement les cas spéciaux mieux connus des polynômes de Jacobi, correspondance à $\alpha = \beta = 0$, et $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$, respectivement.

Tous les polynômes classiques satisfont à une équation différentielle de la forme :

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \tag{1.13}$$

où $a_j(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à j pour $j = 0, 1, 2$. par exemple, le polynôme $y = H_k(x)$ est une solution de

$$y'' - 2xy' + 2ky = 0,$$

et la fonction $y = e^{-x^2/2}H_k(x)$ satisfait à l'équation

$$y'' + (2k + 1 - x^2)y = 0.$$

Une autre caractéristique commune des PO classiques est qu'ils satisfont une récurrence à trois termes relation de la forme

$$P_k(x) = (a_k x + b_k)P_{k-1}(x) - c_k P_{k-2}(x), \qquad k = 2, 3, ..., \tag{1.14}$$

où $a_k > 0$ et $c_k > 0$. Dans le cas de Hermite, on a $a_k = 2,\ \ b_k = 0$ et $c_k = 2(k-1)$.

En outre, tous les PO classiques peuvent être définis par une fonction de génération :

$$F(x, w) = \sum_{k \geq 0} p_k(x)\rho^k. \tag{1.15}$$

Par exemple, les polynômes d'Hermite peuvent être définis par la fonction génératrice

$$e^{2xz - z^2} = \sum_{k \geq 0} \frac{H_k(x)}{k!} z^k.$$

Les polynômes orthogonaux plus général et moins classiques ont été introduits avec des généralisations en poids : continu ou discret ; dans les courbes d'orthogonalité : intervalle réel ou autrement ; dans les dimensions : les variables simples ou multiples, etc.

1.1.3 Propriété extrémale

Soit $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes algébriques de degré au plus n et soit $\hat{\mathcal{P}}_n$ son sous-ensemble contenant uniquement des polynômes unitaires de degré n, c'est à dire :

$$\hat{\mathcal{P}}_n = \{z^n + q(z) \ / \ q(z) \in \mathcal{P}_{n-1}\}. \tag{1.16}$$

Un résultat général sur les polynômes orthogonaux par rapport à un produit scalaire donné $\langle .,. \rangle$ défini par

$$\langle g, h \rangle = \int g(z)\overline{h(z)}d\mu(z) \qquad \qquad \left(g, \ h \in L^2(d\mu)\right), \tag{1.17}$$

où $d\mu$ est une mesure positive de Borel fini dans le plan complexe $\mathbb{C}$, avec un ensemble infini comme son support, peut être exprimée comme un problème extrémal.

Soit $\{P_n\}$ être un système des polynômes orthonormés, c'est à dire :

$$P_n(z) = \gamma_n z^n + \text{ les termes du degré inférieurs, } \gamma_n > 0, \tag{1.18}$$

satisfaire

$$\langle P_n, P_m \rangle = \delta_{n,m}, \qquad m, \ n \in \{0, 1, ...\}$$

où $\delta_{n,m} = 1$ si $n = m$ et $\delta_{n,m} = 0$ autrement.

et $\pi_n(z) = \dfrac{1}{\gamma_n} P_n(z) = z^n +$ les termes du degré inférieurs, $(n \in \mathbb{N}_0)$ soient les polynômes orthogonaux moniques correspondants.

Théorème 1.1

Le polynôme $\pi_n(z) = \dfrac{1}{\gamma_n} P_n(z) = z^n + ...,$ *est le polynôme monic unique du degré* n

de la norme minimale de $L^2(d\mu)$, c'est-à-dire :

$$\min_{P\in\hat{\mathcal{P}}_n}\int |P(z)|^2\, d\mu(z) \;=\int |\pi_n(z)|^2\, d\mu(z) \;=\frac{1}{\gamma_n^2}. \tag{1.19}$$

Cette propriété extrémale est complètement équivalent à l'orthogonalité, de sorte qu'il caractérise polynômes orthogonaux. Beaucoup de questions concernant polynômes orthogonaux peuvent être résolues en utilisant uniquement cette propriété extrémale. Notez également que le théorème précédent donne le polynôme de la meilleure approximation de la z^n monôme dans la classe $\mathcal{P}_{n-1}$. Il est évidemment exprimée sous la forme $z^n-\pi_n(z)$.

Preuve du théorème 1.1

soit $P_n(z)=z^n+....$ un polynôme normalisé, on a $P_n(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(z)$, d'où $c_n=\dfrac{1}{\gamma_n}$ car le coefficient dominant de $P_n(z)$ est égale à 1, et de l'orthonormalité des $\varphi_k(z),\ k\in\{0,...,n\}$ découle

$$\|P_n(z)\|^2_{L^2(\mu)}=\sum_{k=0}^{n}|c_k|^2=\frac{1}{\gamma_n^2}+\sum_{k=0}^{n-1}|c_k|^2.$$

On voit que la dernière expression est minimale si et seulement si $c_0=...=c_{n-1}=0$.

Cette caractérisation des polynômes orthogonaux nous permet de définir une classe plus large de polynômes appelés polynômes extrémaux qui sera définie ci dessous.

1.1.4 Polynômes extrémaux

Soit $0<p\leq\infty$, on appelle polynôme extrémal (ou L^p-extrémal) de degré n, le polynôme normalisé noté $T_{n,p}(z)$ solution du problème extrémal suivant :

$$\|T_{n,p}\|_{L^p(\mu)}:=\min_{Q\in\mathcal{P}_{n-1}}\|z^n+Q\|_{L^p(\mu)}=m_{n,p}(\mu), \tag{1.20}$$

où $\mathcal{P}_n$ désigne l'ensemble des polynômes de degré au plus égale à n.

1.2 Comportement asymptotique

Il y a plusieurs problèmes intéressants au sujet des polynômes extrémaux $T_{n,p}$ relativement à la mesure μ,l'un des plus importants et plus difficiles est celui de leur comportement asymptotique quand $n \to \infty$, c'est-à-dire :

$$\textit{Etudier : } \lim_{n\to\infty} T_{n,p}(z)\,;\; z \in \mathbb{S} \textit{ ou } z \in K;\; K \textit{ compact de } \mathbb{C}\backslash\mathbb{S};\; \textit{avec } \mathbb{S} = \mathbb{S}(\mu) = \textit{supp}(\mu).$$

La solution de ce problème dépend en général de la mesure μ et de son support $\mathbb{S}$.

On peut trouver dans la littérature plusieurs techniques pour résoudre le problème du comportement asymptotique des polynômes orthogonaux extrémaux ou L^p-extrémal. La technique que nous utilisons consiste à générer et à étudier certaines séquences de problèmes extrémaux dans les espaces de Hardy. Les limites des valeurs optimales associées. à ces problèmes extrémaux nous donnent, en général, la formule asymptotique des polynômes L^p extrémaux. Ces techniques ont été développées principalement par Gueronimus, Widom, Kaliaguine, Benzine, Khaldi, ...

1.3 Synthèse de quelques cas étudiés

Beaucoup de mathématiciens ont étudié le problème du comportement asymptotique des polynômes orthogonaux ou des L_p polynômes extrémaux. Dans cette section, nous allons résumer selon la mesure μ et son support $\mathbb{S}$, le comportement asymptotique d'une classe assez large de polynômes orthogonaux ou extrémaux relativement à la mesure μ et qui s'avèrent la plus intéressante pour notre étude.

1) $\mathbb{S} = [-\pi, \pi]\,$; μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[-\pi, \pi]\,$; c'est à dire :

$$d\mu = \rho(\theta)\,d\theta;\;\; \rho \in L^1([-\pi, \pi]\,,\; d\theta)\,;\;\; \rho \geq 0.$$

Ce cas correspond au comportement asymptotique des polynômes orthogonaux sur le cercle avec fonction poids. Ce cas a été étudié par Szegő [51] en 1921 et la formule asymptotique qu'il a obtenu est :

$$T_n(z) \approx \frac{z^n}{\overline{S}_\rho(\frac{1}{z})};\ |z| > 1, \tag{1.21}$$

où S_ρ est une fonction holomorphe dans le disque unité ouvert, construite par Szegö et porte son nom. Szegö a utilisé la propriété extrémal des polynômes orthogonaux pour trouver la formule (1.21). Sa méthode a été reprise et développée pour trouver la formule asymptotique d'autres types de polynômes orthogonaux.
Krein ([32]), et Gueronimus ([12]), ont généralisé cette étude dans le cas où μ est non absolument continue.

2) $\mathbb{S} = [-1, +1]$; $d\mu = \rho(x)\,dx$; $\rho \geq 0$; $\rho \in L^1([-1, +1], dx)$.

Ce cas correspond au comportement asymptotique des polynômes orthogonaux sur le segment avec fonction poids. Szegö dans ([51]) a établi une relation entre les polynômes orthogonaux sur le cercle et ceux du segment, en utilisant cette relation, il a déduit la formule asymptotique des polynômes orthogonaux sur le segment de celle du cercle. Cette formule a la même forme que la formule (1.21).

3) $\mathbb{S} = E$,où E est un contour de Jordan rectifiable; μ est absolument continue par rapport à la mesure $|d\xi|$ sur l'arc c'est à dire :

$$d\mu = \rho(\xi)\,|d\xi|;\ \xi \in E;\ \rho \in L^1(E, |d\xi|);\ \rho \geq 0.$$

La formule asymptotique a toujours la forme suivante :

$$T_n(z) = [C(E)\,\Phi(z)]^n\,\varphi(z)\,[1 + \varepsilon_n(z)] \tag{1.22}$$

où, $C(E)$ est une constante qui dépend de E, Φ est l'application conforme du domaine $\Omega = ext(E)$ vers l'extérieur du cercle unité; φ est une fonction holomorphe dans Ω, solution d'un problème extrémal, et enfin $\varepsilon_n \to 0$ uniformément sur les compacts de Ω.

Szegö ([52]) en 1921, avait étudié ce problème mais dans le cas où $\rho \equiv 1$, et E est analytique.Cette théorie s'est développée en considérant des classes de fonctions poids et de contours de plus en plus larges. On peut citer par exemple : Smirnov ([47], [48]), Korovkine ([31]), Geronimus ([11], pour $0 < p < \infty$); Souétine ([49]).

4) $\mathbb{S} = \bigcup\limits_{i=1}^{N} E_i$ où tout E_i est un contour de Jordan rectifiable ou un arc. μ est absolument continue sur chaque E_i.

Ce cas a été profondément étudié en 1969 par H. Widom ([59]).

5) $\mathbb{S} = \mathbb{T} \cup \{z_j\}_{j=1}^{m}$; où $\mathbb{T}$ est le cercle unité, $z_j \in ext\,(\mathbb{T})$, μ est une mesure de la forme $\mu = \beta + \sigma$, où β est concentrée sur $\mathbb{T}$ assez générale, et γ est une mesure discrète concentrée sur les points z_j avec les masses A_j c'est à dire :

$$\sigma = \sum_{j=1}^{m} A_j \delta_{z_j};\ A_j > 0.$$

δ_{z_j} est la mesure de Dirac au point z_j.

Ce cas a été étudié en 1994 par X. Li et K. Pan [34], et a été appliqué à l'étude de la distribution des zéros des polynômes orthogonaux associés à μ.

6) $\mathbb{S} = E \cup \{z_j\}_{j=1}^{m}$; où E est un arc rectifiable, deux fois lisse dont la dérivée seconde vérifie une condition de Lipchitz, $(E \in C^{2+})$; $z_j \in ext\,(E)$; μ est une mesure de la forme $\mu = \beta + \sigma = \beta + \sum_{j=1}^{m} A_j \delta_{z_j};\ A_j > 0$; où β concentrée sur E et $d\beta = \rho(\xi)\,|d\xi|$; $|d\xi|$ étant la mesure de Lebesgue longueur d'arc sur E, σ est une mesure discrète concentrée sur les points z_j avec les masses A_j.

Ce cas a été étudié par Gonchar [13] (1975) pour le cas $E = [-1, +1]$, et a été appliqué au problème de la convergence des approximants de Padé de fonctions méromorphes ; Kaliaguine en 1995 [18] a étudié le cas de l'arc.

7) $\mathbb{S} = [-1, +1] \cup \{z_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\mu = \beta + \sigma$, β concentrée sur $[-1, +1]$ et non absolument continue, σ étant une mesure discrète concentrée sur les points z_j avec les masses A_j.

Ce problème a été étudié profondément et dans sa forme la plus générale en 2001 par

F. Peherstorfer et P. Yuditskii [41] .

8) $\mathbb{S} = \mathbb{T} \cup \{z_j\}_{j=1}^{\infty}$; où $\mathbb{T}$ est le cercle unité du plan complexe $\mathbb{C}$; $z_j \in ext\,(\mathbb{T})$, μ est une mesure de la forme : $\mu = \dfrac{\beta}{2\pi} + \sigma = \dfrac{\beta}{2\pi} + \sum\limits_{j\geq 1} A_j \delta_{z_j}$; $A_j > 0$, $\sum\limits_{j\geq 1} A_j < +\infty$; β concentrée sur $\mathbb{T}$ et absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $d\theta$ sur $[-\pi, +\pi]$; σ une mesure discrète concentrée sur les points z_k avec les masses A_j.

Ce cas a été étudié par Khaldi et Benzine [22] en 2000.

9) $\mathbb{S} = E \cup \{z_j\}_{j=1}^{\infty}$; où E est un contour de Jordan rectifiable possédant quelque propriétés de régularité ; $z_j \in ext(E)$; μ est une mesure de la forme : $\mu = \beta + \sigma = \beta + \sum\limits_{j\geq 1} A_j \delta_{z_j}$; $A_j > 0$, $\sum\limits_{j\geq 1} A_j < +\infty$; β est concentrée sur E et absolument continue par rapport à la mesure longueur d'arc.

Ce cas a été étudié en 2000 par R. Khaldi et R. Benzine ([22]) . Avec affaiblissement des Conditions sur β et σ. Ce problème a été résolu en 2007 par R. Khaldi et F. Aggoune ([28]) . La formule asymptotique prend dans ce cas la forme suivante :

$$T_n(z) = [C(E)\,\Phi(z)]^n\,(\varphi(z)\,B_\infty(z))\,[1 + \varepsilon_n(z)]\,, \tag{1.23}$$

où, $C(E)$, Φ et φ sont les mêmes fonctions citées dans la partie **3**). B_∞ est un produit de Blashke infini c'est-à-dire :

$$B_\infty = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\Phi(z) - \Phi(z_j)}{\Phi(z)\overline{\Phi(z_j)} - 1} . \frac{|\Phi(z_j)|^2}{\Phi(z_j)} . \tag{1.24}$$

10) $\mathbb{S} = E \cup \{z_j\}_{j=1}^{m}$, où E est un contour de Jordan rectifiable possédant quelques propriétés de régularité ; $z_j \in ext(E)$; $\mu = \beta + \sum_{j=1}^{m} A_j \delta_{z_j}$, $A_j > 0$; où β est concentrée sur E et absolument continue par rapport à la mesure longueur d'arc.

Pour $p > 0$, ce cas a été étudie en 1993 par V. Kaliaguine ([19]) , C'est une généralisation du résultat de Ya. L. Geronimus ([11]) .

11) $\mathbb{S} = E \cup \{z_j\}_{j=1}^{\infty}$, E est un contour de Jordan rectifiable régulier ; $z_j \in ext\,(E)$. $\mu = \beta + \sum\limits_{j\geq 1} A_j \delta_{z_j}$.

Pour $p \geq 1$ et sous certaines conditions sur β et σ, ce problème a été résolu en 2004 par R. Khaldi ([23]) .

12) $\mathbb{S} = \mathbb{T} \cup \{z_j\}_{j=1}^{\infty}$; où $\mathbb{T}$ est le cercle unité, $z_j \in ext(\mathbb{T})$, $\mu = \beta + \sum_{j\geq 1} A_j \delta_{z_j}$ et $p > 0$. Ce problème a été étudié par R. Khaldi ([24] , 2005) . C'est une généralisation du résultat de X. Li et K. Pan ([33] , $1 < p < \infty$, 1991) .

13) $\mathbb{S} = E \cup \{z_j\}_{j=1}^{m}$, $E = \bigcup_{j=1}^{s} E_j$ est l'union de contours et arcs dans le plan complexe de la classe C^{2+}, avec $E_j \cap E_k = \emptyset$, $j \neq k$, $z_j \in ext(E)$ et $\mu = \beta + \sum_{j=1}^{m} A_j \delta_{z_j}$, $A_j > 0$.

En 2000, V. Kaliaguine et A. Kononova ([20]) donnent le résultat dans le cas général.

14) $\mathbb{S} = E \cup \{z_j\}_{j=1}^{\infty}$; $E = \bigcup_{j=1}^{S} E_j$ est l'union de contours et arcs dans le plan complexe de la classe C^{2+}, avec $E_j \cap E_k = \emptyset$, $j \neq k$, $z_j \in ext(E)$ et $\mu = \beta + \sum_{j\geq 1} A_j \delta_{z_j}$, $A_j > 0$, $\sum_{j\geq 1} A_j < \infty$.

Ce problème a été étudié en 2007 par R. Khaldi et F. Aggoune ([26]), La formule asymptotique prend dans ce cas la forme suivante :

$$\begin{aligned} T_n(z) &= C^n(E).\Phi^n(z) \left[\frac{D(z)}{D(\infty)} \prod_{j\geq 1} \frac{\Phi(z) - \Phi(z_j)}{\Phi(z)\overline{\Phi(z_j)} - 1} \frac{|\Phi(z_j)|^2}{\Phi(z_j)} + \varepsilon_n(z) \right], \quad (1.25) \\ \varepsilon_n(z) &\to 0 \textit{ uniformément sur les compacts de } \Omega = ext(E). \end{aligned}$$

15) $\mathbb{S} = E$, E est un contour de Jordan analytique, la mesure étant variable de la forme :

$$d\mu_n = \frac{d\mu}{|Y_n|^p} \quad (1.26)$$

où μ est une mesure de Borel positive concentrée E, $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de polynômes tel que, pour tout n, Y_n est de degré n, de zéros $w_{n,i}$, $i \in \{1, ..., n\}$ appartient à l'extérieur du contour $|\Phi(z)| = R > 1$, où Φ est la transformation conforme de l'extérieur de E vers l'extérieur du cercle unité.

Ce cas a été étudié en 2005 par M. Bello Hernandez, J. Minguez Ceniceros ([5]) .

16) $\mathbb{S} = E \cup \{z_j\}_{j=1}^{N}$, E est un contour de Jordan analytique et les points $z_j \in ext(E)$, la mesure étant variable de la forme :

$$\mu_n = \beta_n + \sigma = \frac{\beta}{|Y_n|^p} + \sum_{j=1}^{N} A_j \delta_{z_j};\ A_j > 0, \tag{1.27}$$

où σ et $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ sont les même citées dans la partie (**16**).

Ce problème a été étudie en 2007 par R. Khaldi et F. Aggoune ([27]), les formules asymptotiques des $T_{n,p}^{N}$ à l'infini sont donnés par la formule suivante :

$$T_{n,p}^{N}(z) = \left[\frac{\Delta_p(\sigma,\omega)}{\Delta_p(\sigma,z)} + \varepsilon_n(z)\right], \tag{1.28}$$

$\varepsilon_n(z) \rightarrow 0$ *uniformément sur les compacts de* $int(B)$.

17) $\mathbb{S} = \mathbb{T}$; $\mathbb{T}$ est le cercle unité. Ce problème a été étudié en 2006 par S. Denisov et S. Kupin ([9]) , pour une mesure plus générale μ appartient à la classe polynomiale de Szegö définie par

$$d\mu\left(e^{i\theta}\right) = \mu_{ac}^{'}\left(e^{i\theta}\right) d\theta + d\mu_s\left(e^{i\theta}\right),$$

μ_s est singulière et la partie absolument continue μ_{ac}' de μ vérifie la condition généralisée de Szegö

$$\int_0^{2\pi} p\left(e^{i\theta}\right) \log \mu_{ac}'\left(e^{i\theta}\right) d\theta > -\infty,$$

où p est un polynôme trigonométrique, non négatif sur le cercle unité $\mathbb{T}$.

Chapitre 2

Espaces de Hardy et Fonctions de Szegö

Les espaces H^p ainsi dénommés en références à G. H. Hardy ([15]), ont un grand nombre de propriétés intéressantes, en ce qui concerne les problèmes de factorisation, les valeurs frontières et la représentation du type de Cauchy à partir de mesures sur la frontière. Les espaces de Hardy ont été introduis en analyse en 1915 dans le disque unité ouvert, constituent l'outil fonctionnel de base pour étudier les comportements asymptotiques des polynômes extrémaux. Utilisant les propriétés de la transformation conforme entre le disque unité ouvert et l'intérieur d'un contour de Jordan rectifiable, V.J.Smirnov ([46, 47, 48]) a étudié ces espaces à l'intérieur d'un contour de Jordan rectifiable. En 1951, W.Rudin ([45]) a généralisé l'étude de ces espaces dans un ouvert connexe quelconque en se basant sur une caractérisation des espaces de Hardy dans le disque unité ouvert. Cette caractérisation se résume dans le fait qu'une fonction appartenant à l'espace de Hardy dans le disque unité ouvert si et seulement si elle admet un majorant harmonique dans le disque.

On recommande les ouvrages de K. Hoffman ([17]), P Kossis ([30]) etde S. Zygmund ([60]) , pour une étude approfondie des espaces de Hardy dans le disque unité ouvert.

2.1 Préliminaires

On désignera par $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$ et par $\mathbb{T}$ $(\partial\mathbb{D})$ le cercle unité de $\mathbb{C}$.

2.1.1 Fonctions holomorphes, harmoniques et sous-harmoniques.

On note $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ L'ensemble des fonctions holomorphes dons $\mathbb{D}$.

On présente dans cette partie quelques propriétés de certain sous-espaces de l'espace vectoriel $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$. On munit $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ de la topologie de la convergence uniforme. Ainsi équipé, $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ est un espace topologique métrisable. Soit $\mathcal{K}$ un compact de $\mathbb{D}$, on note $p_{\mathcal{K}}$ la semi norme définie par $p_{\mathcal{K}}(f) = \sup_{\mathcal{K}} |f|$. En prenant $(\mathcal{K}_n)_{n\in I}$ une suite exhaustive de compacts de $\mathbb{D}$, on pose :

$$\delta(f) = \sum_{n\in I} \left(2^{-n}\right) \frac{p_{\mathcal{K}_n}(f)}{1 + p_{\mathcal{K}_n}(f)}.$$

On pose enfin pour tout $f, g \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$, $d(f,g) = \delta(f-g)$. Alors d est une distance sur $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ et la topologie définie par cette distance est la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Mieux encore, $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact est un espace de Fréchet i.e. $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ est un espace vectoriel topologique réel, localement convexe, métrisable et complet.

Primitive de fonction holomorphe

Les équivalences que donnent le théorème suivant se trouvent en particulier dans [15].

Théorème 2.1 *Pour tout ouvert non vide Ω de $\mathbb{C}$, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. Ω est homéomorphe à $\mathbb{D}$.

2. Ω est simplement connexe.

3. Pour toute fonction holomorphe sur Ω et pour tout lacet γ dans Ω : $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

4. Toute fonction holomorphe sur Ω possède une primitive (holomorphe) dans Ω.

5. Toute fonction holomorphe f sur Ω ne s'annulant pas sur Ω possède une détermination holomorphe de $\log f$, i. e., *il existe g holomorphe sur Ω vérifiant $f = e^g$.*

Il y a de multiples façons de présenter les fonctions harmoniques et sous-harmoniques, en voici une qui a simplement pour but de rappeler les propriétés qui nous servirons.

Définition 2.1.

Soit f est une fonction continue sur $\mathbb{D}$.

1. On dit que f est harmonique sur $\mathbb{D}$ si f vérifie la propriété de la moyenne i.e. : pour tout $z_0 \in \mathbb{D}$, il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $r < r_0$

$$f(z_0) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt$$

2. Si f est de plus à valeur réelle, on dit qu'elle est sous-harmonique si les Propositions suivantes sont vraies

a) f est semi-continue supérieurement i.e. pour tout $c \in \mathbb{R}$ $\{z \in \mathbb{D},\; f(z) < c\}$ est un ouvert de $\mathbb{D}$.

b) f vérifie la propriété de la sous-moyenne : pour tout $z_0 \in \mathbb{D}$, il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $r < r_0$

$$f(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt \tag{2.1}$$

Voici deux propriétés qui nous seront utiles quand nous aborderons les espaces de Hardy.

Proposition 2.2.

1. Soit f analytique dans $\mathbb{D}$ et soit $p > 0$. Alors la fonction g continue sur $\mathbb{D}$ à valeurs réelles définie par $g(z) = |f(z)|^p$ est sous-harmonique.

2. Soit $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$. Alors $\log^+|f|$ est une fonction continue à valeurs réelles sous-harmonique sur $\mathbb{D}$.

Preuve :

1. d'après b) il suffit de vérifier (2.1). Soit $z_0 \in \mathbb{D}$. Si $f(z_0) = 0$, (2.1) est automatique.

Supposons que $f(z_0) \neq 0$. D'après le principe des zéros isolés et le Théorème (2.1), il existe alors $r_0 > 0$ tel qu'il existe une détermination holomorphe du logarithme sur $D(z_0, r_0)$ avec $\overline{D(z_0, r_0)} \subset \mathbb{D}$ et ainsi on peut définir $z \mapsto f(z)^p$ comme une fonction holomorphe dans $D(z_0, r_0)$. En particulier, pour tout $r < r_0$, on a :

$$(f(z_0))^p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(z_0 + re^{it}))^p dt,$$

ce qui implique naturellement

$$|f(z_0)|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|^p dt.$$

2. si $z_0 \in \mathbb{D}$ est tel que $|f(z_0)| \leq 1$,l'inégalité (2.1) est trivialement vérifiée. Si $z_0 \in \mathbb{D}$ est tel que $|f(z_0)| > 1$, par continuité de $|f|$, il existe $r_0 > 0$ tel que $|f(z)| > 1$ sur $D(z_0, r_0) \subset \mathbb{D}$. Par conséquent pour tout $r < r_0$, $\log^+ |f(z)| = \log |f(z)|$ pour tout $z \in D(z_0, r)$. Comme $\log |f|$ est une fonction harmonique sur $D(z_0, r_0)$ (2.1) est vérifiée (c'est même une égalité) pour $r < r_0$.

Corollaire.

Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $R > 0$. Pour toute fonction f continue sur $\Gamma(\alpha, R)$ où $\Gamma(\alpha, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| = R\}$, il existe une unique fonction g continue sur $\overline{D(\alpha, R)} := \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| \leq R\}$, harmonique sur $D(\alpha, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| < R\}$ et telle que $g_{|\Gamma(a,R)} = f$. De plus, si $z = \alpha + re^{i\theta}$ avec $0 \leq r < R$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on a :

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{r/R}(\theta - t) f(\alpha + Re^{it}) dt.$$

Proposition 2.3.

Soit f une fonction continue à valeurs réelles sous-harmonique sur $\mathbb{D}$ et soit

$$m(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})dt \text{ pour } r \in [0,1[\,.$$

Alors $r \mapsto m(r)$ est une fonction croissante sur $[0,1[$.

Preuve :

Soient $0 \leq r_1 < r_2 < 1$. Comme f continue sur $\mathbb{D}$, d'après le Corollaire , il existe une unique fonction U harmonique sur $D(0,r_2)$, continue sur $\overline{D(0,r_2)}$ tel que U et f coincident sur le cercle $\Gamma(0,r_2)$. Comme f est sous-harmonique, on a $f(z) \leq U(z)$ pour tout $z \in \overline{D(0,r_2)}$. On a donc :

$$\begin{aligned} m(r_1) &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(r_1e^{it})dt = U(0) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(r_2e^{it})dt = m(r_2). \end{aligned}$$

Ces deux résultats impliques donc, en particulier, que si $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ alors pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\int_0^{2\pi} \left|f(r_1e^{it})\right|^p dt \leq \int_0^{2\pi} \left|f(r_2e^{it})\right|^p dt.$$

2.1.2 Formule de Poisson

Le noyau de Poisson est la fonction suivante :

$$P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}e^{int}. \text{ pour } r \in [0,1[\,,\ t \text{ réel.} \tag{2.2}$$

De (2.2),et du théoréme de Fubini nous déduisons

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)dt = 1,\ \ (r \in [0,1[)\,.$$

Pour voir ceci, on peut inverser l'intégrale et la série qui définit $P_r(t)$ ou encore remarquer que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)dt = \hat{P}_r(0)$, le 0-ième coefficient de Fourier de la fonction continue P_r.

Si $z = re^{i\theta}$ un calcul simple montre que

$$\begin{aligned} P_r(\theta - t) &= 1 + 2\sum_{n\geq 1} r^n \cos\left(n(\theta - t)\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) \\ &= \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta - t)+r^2}.\ \ (r \in [0,1[\,,\ \theta \in \mathbb{R})\,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Il résulte de (2.3) qu'un noyau de Poisson est une fonction uniformément continue sur $[0, 2\pi]$, 2π-périodique, positive et paire.

Soient $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, la transformée de Poisson est alors donnée par

$$P[f](re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it})dt$$

On remarque que si f est réelle alors $P[f]$ est la partie réelle de

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} f(e^{it})dt$$

qui est une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ ([45]) ; $P[f]$ est donc harmonique sur $\mathbb{D}$. Comme $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im}\ f$ sont des éléments de $L^1(\mathbb{T})$ à valeurs réelles, on obtient que $P[f] = P[\operatorname{Re} f] + P[\operatorname{Im}\ f]$ est la somme de deux fonctions harmoniques sur $\mathbb{D}$ et est donc harmonique sur $\mathbb{D}$.

2.1.3 Espace $L^p(\mathbb{T})$

Si F est une fonction quelconque définie sur $\mathbb{T}$ et si on définit la fonction f par :

$$f(\theta) = F\left(e^{i\theta}\right) \tag{2.4}$$

f est alors définie sur $\mathbb{R}$, périodique, de période 2π, c'est à dire : $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique, de période 2π, il existe une fonction F définie sur $\mathbb{T}$ vérifiant (2.4).

On peut ainsi identifier les fonctions définies sur $\mathbb{T}$ avec les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, et de période 2π.

Avec ces conventions définissons $L^p(\mathbb{T})$, Pour $1 \leq p < +\infty$, comme la famille de toutes les (classes d'équivalence de) fonctions à valeurs complexes, mesurables au sens de Lebesgue, de période 2π, définies sur $\mathbb{R}$, pour lesquelles la norme :

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \, dt \right\}^{\frac{1}{p}} \text{ est finie.} \tag{2.5}$$

L'espace $L^2(\mathbb{T})$

Théorème 2.2 (de Plancherel-Parseval)

Si $f \in L^2(\mathbb{T})$ et si $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est la suite de ses coefficients de Fourier ($c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-int}dt$) alors

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T})} := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 dt \right)^{1/2} dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2.$$

De plus f est la somme de sa série de Fourier $(S_n(f))_{n\geq 0}$ (où $S_n(f)(e^{it}) = \sum_{|k|\leq n} c_k e^{ikt}$) avec $\lim_{n\to\infty} \|f - S_n\|_2 = 0$.

Remarque 2.1

Lorsque $f \notin L^2(\mathbb{T})$ f n'est pas en général égal à la somme de série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$.

Théorème 2.3 (de Riesz-Fischer)

Toute suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{C}$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n|^2 < \infty$ est la suite des coefficients de Fourier d'une fonction $g \in L^2(\mathbb{T})$.

2.2 Espaces de Hardy

2.2.1 Construction des espaces de Hardy du disque

Pour $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ Pour $p \in \,]0,\infty[$ et $r \in [0,1[$ posons

$$M_p(f,r) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt \right\}^{1/p}, \text{ et } M_\infty(f,r) = \sup_{t\in[0,\ 2\pi[} |f(re^{it})|.$$

Pour $0 < p \leq \infty$, L'espace de Hardy du disque noté $H^p(\mathbb{D})$ est l'ensemble des fonctions de $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ telles que

$$\sup_{0\leq r<1} M_p(f,r) < \infty.$$

Ainsi, $H^\infty(\mathbb{D})$ n'est autre que l'ensemble des fonctions analytiques et bornées sur $\mathbb{D}$.

Comme pour $p \in \,]0,\infty[$, la fonction $|f|^p$ est sous-harmonique dès que $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$, cela entraîne que pour $p \in \,]0,\infty]$ les fonctions $M_p(f,r)$ sont des fonctions croissantes en r. Par conséquent, pour $0 < p \leq \infty$, $H^\infty(\mathbb{D})$ est l'ensemble des fonctions de $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ telles que $\lim_{r\to 1^-} M_p(f,r) < \infty$. La norme naturelle dont on munit $H^p(\mathbb{D})$ est

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{D})} = \lim_{r\to 1^-} M_p(f,r) \text{ si } p \in \,]0,\infty[\text{ et } \|f\|_{H^\infty(\mathbb{D})} = \lim_{r\to 1^-} M_\infty(f,r) \tag{2.5}$$

Pour tout $p \in [1,\infty]$, cette norme confère à $H^p(\mathbb{D})$ une structure d'espace de Banach.

Comme conséquence du lemme de Fatou, les fonctions de $H^p(\mathbb{D})$ possèdent une limite radiale dans $L^p(\mathbb{T})$, c'est-à-dire que pour presque tout $t \in [0, 2\pi[$, $\lim_{r\to 1^-} f(re^{it})$ existe et si l'on définit la fonction f^* par $f^*(e^{it}) := \lim_{r\to 1^-} f(re^{it})$, alors $f^* \in L^p(\mathbb{T})$. De plus, on a l'égalité suivante :

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{D})} := \|f^*\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

Étant holomorphes, les fonctions de $H^p(\mathbb{D})$ vérifient $\triangle f = 0$ où $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. En notant $R(\mathbb{D})$ l'ensemble des fractions rationnelles 0 pôles en dehors du disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$, on définit $H^p(\mathbb{T})$ comme la fermeture dans $L^p(\mathbb{T})$ de $R(\mathbb{D})$ (il est pratique d'employer un abus de langage en disant qu'une fonction de $L^p(\mathbb{T})$ "appartient à $R(\mathbb{D})$" si c'est la restriction d'une fonction de $R(\mathbb{D})$).

Pour une fonction $g \in H^p(\mathbb{T})$, le noyau de Poisson $P_r : t \longmapsto \operatorname{Re}\left(\dfrac{1+re^{it}}{1-re^{it}}\right)$ permet de résoudre le problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} \triangle f = 0 \\ \lim_{r\to 1^-} f(re^{it}) = g(e^{it}), \text{ pour presque tout } t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

qui a pour solution

$$f\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) g(e^{it}) dt.$$

On peut vérifier que $f \in H^p(\mathbb{D})$ et que $f^* = g$.

On peut alors identifier isométriquement $H^p(\mathbb{D})$ et $H^p(\mathbb{T})$, au sens où l'on a construit un isomorphisme isométrique entre $H^p(\mathbb{D})$ et $H^p(\mathbb{T})$.

Une définition équivalente de $H^p(\mathbb{T})$ est la suivante :

$$H^p(\mathbb{T}) := \{f^* \in L^p(\mathbb{T}) : \hat{f}^*(n) = 0,\ n < 0\},$$

où $\hat{f}^*(n)$ est le n^{eme} coefficient de Fourier de f^*.

Il existe enfin une autre façon de définir les espaces de Hardy du disque $H^p(\mathbb{D})$, où

$p \in \left]0, \infty\right[$, à l'aide de majorants harmoniques

$$H^p(\mathbb{D}) := \{f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) : \exists\, u_f \text{ harmonique telle que } |f(z)|^p \leq u_f(z),\ z \in \mathbb{D}\}.$$

Ces deux définitions sont équivalentes. En effet, pour $f \in H^p(\mathbb{D})$ et $f^* \in H^p(\mathbb{T})$ sa limite radiale, le plus petit majorant harmonique de $|f|^p$ existe et s'exprime à l'aide du noyau de Poisson :

$$u_f\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\left|f^*(e^{it})\right|^p dt.$$

Réciproquement, si f possède un majorant harmonique, d'après le principe du maximum,

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right|^p dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_f\left(e^{it}\right) dt < \infty.$$

Dans le cas du disque, on appelle fonction intérieure une fonction de $H^\infty(\mathbb{D})$ dont la limite radiale est de module 1 presque partout. Les produits de Blaschke élémentaires $b_\lambda(z) := \dfrac{z-\lambda}{1-\overline{\lambda}z}$ sont des exemples de fonctions intérieures. Une fonction extérieure F est une fonction de $H^p(\mathbb{D})$ de la forme

$$F(z) = c \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log\varphi\left(e^{it}\right) dt\right)$$

où $|c| = 1$ et φ est une fonction positive mesurable telle que $\log\varphi \in L^1(\mathbb{T})$. Les fonctions extérieures ne s'annulent donc pas et vérifient

$$\left|F^*\left(e^{it}\right)\right| = \varphi\left(e^{it}\right),\ \text{mpp } e^{it} \in \mathbb{T}$$

où mpp $e^{it} \in \mathbb{T}$ signifie pour presque tout $e^{it} \in \mathbb{T}$ relativement à la mesure de Lebesgue sur le cercle unité.

Pour toute fonction $f \in H^p(\mathbb{D})$, de limite radiale f^*, il existe une factorisation en un produit de fonctions intérieure et extérieure. Notons

$$E(f) := \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\left|f\left(e^{it}\right)\right|dt\right),$$

la fonction extérieure de même module que f^*, unique à une constante unimodulaire près.

Comme $I(f) := f/E(f)$ est holomorphe, et sa limite radiale est de module 1 presque partout, $I(f)$ est une fonction intérieure qui a les mêmes z´eros que f. Toute fonction de $H^p(\mathbb{D})$ peut se factoriser de façon unique à multiplication par les constantes unimodulaires près :

$$f := cI(f)E(f), \text{ où } |c| = 1.$$

On peut préciser davantage la structure de $I(f)$. Soit $(\lambda_n)_n$ la suite éventuellement finie des zéros de f. Alors nécessairement cette suite vérifie la condition (dite de Blaschke)

$$\sum_{n\geq 0}(1-|\lambda_n|) < \infty,$$

ce qui force les zéros d'une fonction de $H^p(\mathbb{D})$ à se rapprocher rapidement du bord du disque et ce qui implique que le produit de Blaschke associés à la suite des zéros de f

$$B(z) := z^m\prod_{\lambda_n\neq 0}\frac{-\overline{\lambda}_n}{|\lambda_n|}\frac{z-\lambda_n}{1-\overline{\lambda}_n z}$$

converge. De plus, il existe une mesure positive v étrangère à la mesure de Lebesgue telle que :

$$I(f) = \left(\prod_{n\geq 0}\frac{z-\lambda_n}{1-\overline{\lambda}_n z}\right)\exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}dv(t)\right).$$

La fonction intérieure $I(f)$ contient les informations sur la répartition des zéros de f.

Les limites radiales de la fonction extérieure $E(f)$ et de f sont de même module presque partout. Cette factorisation est unique aux constantes unimodulaires près.

2.2.2 L'espace de Hardy$H^2(\mathbb{D})$

L'importance particulière de l'espace $H^2(\mathbb{D})$ est due au fait qu'il s'agit d'un espace de Hilbert et qu'on peut l'identifier à un sous ensemble de $L^2(\mathbb{T})$, D'autre part $H^2(\mathbb{D})$ est l'espace fonctionnel de base qu'on utilisera pour étudier le comportement asymptotique des polynômes orthogonaux.

Les propriétés fondamentales de $H^2(\mathbb{D})$ sont résumées par le théorème suivant :

Théorème 2.4

1. Une fonction $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ de la forme

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n z^n,$$

appartient à $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si

$$\sum_{n\geq 0} |\alpha_n|^2 < \infty.$$

Dans ce cas

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{n\geq 0} |\alpha_n|^2\right)^{1/2}.$$

2. Si $f \in H^2(\mathbb{D})$, $f^* \in L^2(\mathbb{T})$ et le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de f^* est α_n si $n \geq 0$ et 0 si $n < 0$.

De plus

$$\lim_{s\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f^*(e^{it}) - f(se^{it})|^2 dt = 0$$

et f est l'intégrale de Poisson ainsi que l'intégrale de Cauchy de f^*. c'est-à-dire :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{f^*(\xi)}{\xi - z} d\xi,\ z = re^{i\theta},\ r \in [0,1[;$$

où $\mathbb{T}$ est le cercle unité orienté positivement.

3. L'application $f \mapsto f^*$ est un isomorphisme isométrique de $H^2(\mathbb{D})$ dans $H^2(\mathbb{T}) := \{g \in L^2(\mathbb{T}) : \hat{g}(n) = 0,\ n\ < 0\}$.

4. $H^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$< f, g >_{H^2(\mathbb{D})} = < f^*, g^* >_{L^2(\mathbb{T})} := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^*(e^{it}) \overline{g^*(e^{it})} dt.$$

Preuve :

1. Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n z^n$ pour $z \in \mathbb{D}$. On a donc, pour $r \in [0, 1[$ et $t \in \mathbb{R}$, $f(re^{it}) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n r^n e^{int}$. D'après le théorème de **Plancherel-Parseval**, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_{n \geq 0} |\alpha_n|^2 r^{2n}.$$

Par convergence monotone discrète, on a :

$$\lim_{r \to 1-} \sum_{n \geq 0} |\alpha_n|^2 r^{2n} = \sum_{n \geq 0} |\alpha_n|^2.$$

Comme $\|f\|_2^2 = \lim\limits_{r \to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt$, on obtient f appartient à $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si $\sum_{n \geq 0} |\alpha_n|^2 < \infty$ et $\|f\|_2 = \left(\sum_{n \geq 0} |\alpha_n|^2\right)^{1/2}$.

2. $f^* \in L^2(\mathbb{T})$ si $f \in H^2(\mathbb{D})$. Supposons $f \in H^2(\mathbb{D})$ et pour $0 < s < 1$ on définit les fonctions f_s sur $\mathbb{T}$ par $f_s(e^{it}) = f(se^{it}) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n s^n e^{int}$. Comme $\sum_{n \geq 0} |\alpha_n|^2 < \infty$, le **théorème de Riesz-Fischer** nous garantit l'existence d'une fonction $g \in L^2(\mathbb{T})$ telle que $\hat{g}(n) = \alpha_n$ si $n \geq 0$ et 0 si $n < 0$. Les coefficients de Fourier de $g - f_s$ valent $(1 - s^n)\alpha_n$ si $n \geq 0$ et 0 si $n < 0$. Une nouvelle application de l'égalité de Plancherel-Parseval donne :

$$\|g - f_s\|_2^2 = \sum_{n \geq 0} (1 - s^n)^2 |\alpha_n|^2.$$

Par convergence monotone décroissante discrète,

$$\lim_{s \to 1^-} \sum_{n \geq 0} (1 - s^n)^2 |\alpha_n|^2 = 0.$$

On a donc $\lim_{s \to 1^-} \|g - f_s\|_2 = 0$. Pour $0 < s < 1$, la fonction f_s définie par $f_s(z) = f(sz)$ est holomorphe dans $D(0, \frac{1}{s})$. On a donc, pour $z \in \mathbb{D}$,

$$f_s(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{f_s(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

La fonction f_s étant en particulier harmonique sur $D(0, \frac{1}{s})$,

On a aussi, pour $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$,

$$f_s(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f_s(e^{it}) dt.$$

L'inégalité de Schwarz et le fait que $P_r(\theta - t) \leq \dfrac{1+r}{1-r}$, nous donne

$$\begin{aligned} \left| f_s(re^{i\theta}) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) g(e^{it}) dt \right| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)(f_s(e^{it}) - g(e^{it})) dt \right| \\ &\leq \frac{1+r}{1-r} \|f_s - g\|_2, \end{aligned}$$

et

$$\left| f_s(re^{i\theta}) - \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{g(\xi)}{\xi - re^{i\theta}} d\xi \right| = \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{f_s(\xi) - g(\xi)}{\xi - re^{i\theta}} d\xi \right| \leq \frac{1}{1-r} \|f_s - g\|_2.$$

Comme $\lim\limits_{s \to 1^-} \|g - f_s\|_2 = 0$, on a donc

$$f(re^{i\theta}) = \lim_{s \to 1^-} f_s(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) g(e^{it}) dt = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{g(\xi)}{\xi - re^{i\theta}} d\xi.$$

En particulier, f est la fonction harmonique définie comme l'intégrale de Poisson de la mesure $\mu \ll m$ définie par $d\mu(t) = g(e^{it})dt$ avec $g \in L^1(\mathbb{T})$ puisque $g \in L^2(\mathbb{T})$. $f^*(e^{it}) = g(e^{it})$ m-presque partout. On en déduit que $f^* \in L^2(\mathbb{T})$, $\hat{f^*}(n) = \alpha_n$ si $n \geq 0$ et que $\hat{f^*}(n) = 0$ si $n < 0$. Enfin on a aussi :

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)f^*(e^{it})dt = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{f^*(\xi)}{\xi - re^{i\theta}}d\xi,$$

3. Puisque $\lim_{s\to 1^-} \|f^* - f_s\|_2 = 0$, on a $\|f\|_2 := \lim_{s\to 1^-} \|f_s\|_2 = \|f^*\|_2$. Comme $\hat{f^*}(n) = 0$ pour tout $n < 0$,l'application $\Phi : f \mapsto f^*$ est bien une isométrie de $H^2(\mathbb{D})$ dans $H^2(\mathbb{T})$. Par définition l'application Φ est linéaire. Etant isométrique, elle est automatiquement injective. Enfin, si $g \in H^2(\mathbb{T})$, g est de la forme $g(e^{it}) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n e^{int}$ avec $\|g\|_2^2 = \sum_{n\geq 0} |\alpha_n|^2 < \infty$. Alors la fonction f définie sur $\mathbb{D}$ par $f(z) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n z^n$ appartient à $H^2(\mathbb{D})$ d'après 1. L'application Φ est donc surjective. Ainsi Φ est bien un isomorphisme isométrique.

4. Par définition, $< f, f >_{H^2(\mathbb{D})} = \|f^*\|_2^2$. Comme $\|f^*\|_2 = \|f\|_2$, la norme sur $H^2(\mathbb{D})$ se déduit bien du produit scalaire que nous avons fixé. De plus $H^2(\mathbb{D})$ est complet Ainsi $H^2(\mathbb{D})$ est bien un espace de Hilbert.

2.2.3 Espace de Hardy à l'exterieure du disque unité

On désignera par : $G = \{w \in \mathbb{C} : |w| > 1\} \cup \{\infty\}$, $\mathcal{H}ol\,(G)$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans G (∞ y compris) et par $\mathbb{T}_r = \{w \in \mathbb{C} : |w| = r\}$.

Définition 2.3.(Espace $H^2\,(G)$)

Soit $f \in \mathcal{H}ol\,(G)$, on dit que $f \in H^2\,(G)$ s'il existe une constante C positive, indépendante de r, telle que :

$$\int_{\mathbb{T}_r} |f\,(w)|^2\,|dw| \leq C;\ \forall r \in \,]1, 2]\,.$$

Si $f \in H^2(G)$, *on note par :*

$$\|f\|^2_{H^2(G)} = \sup_{1<r\leq 2} \int_{\mathbb{T}_r} |f(w)|^2 |dw|. \tag{2.6}$$

Remarque 2.2

La définition de l'espace de Hardy dans le disque unité ouvert est équivalente à celle donnée dans la définition (2.3).

En effet d'après (2.5) on a :

$$f \in H^2(\mathbb{D}) \Longleftrightarrow \sup_{0\leq r<1} \int_{\mathbb{T}_r} |f(z)|^2 |dz| \text{ est finie.}$$

Poroposition 2.4

Soit $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$, *définissons* g *par :*

$$\begin{cases} g(w) = f\left(\dfrac{1}{w}\right), \text{ pour } w \in G\backslash\{\infty\}, \\ g(\infty) = f(0); \end{cases}$$

Alors

$$f \in H^2(\mathbb{D}) \quad \Leftrightarrow \quad g \in H^2(G).$$

Notons par :

$$L^2(\mathbb{T}_r, |dz|) = \left\{ f : \mathbb{T}_r \to \mathbb{C} : \int_{\mathbb{T}_r} |f(z)|^2 |dz| < \infty \right\}; \ r \in \mathbb{R}^*_+$$

où $|dz|$ est la mesure longueur d'arc.

Ceci étant les propriétés de l'espace $H^2(G)$ sont résumées dans le théorème suivant :

Théorème 2.5

Soit $f \in H^2(G)$ *alors :*

1) $\lim_{r\to 1^+} f(re^{i\theta})$ *existe en presque tous les points du cercle unité, Cette limite est appelée* *limite radiale et elle se note* $\tilde{f}$.

2) $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{T}, |dw|)$ *et* $\int\limits_{\mathbb{T}} \left|\tilde{f}(w)\right|^2 |dw| = \|f\|^2_{H^2(G)} = \lim\limits_{r\to 1^+} \int\limits_{\mathbb{T}_r} |f(w)|^2 |dw|$.

3) L'espace $H^2(G)$ *est un espace de Hilbert complexe pour le produit scalaire*

$$\langle f, g\rangle_{H^2(G)} = \int\limits_{\mathbb{T}} \tilde{f}(w).\overline{\tilde{g}(w)}\,|dw|.$$

4) $\forall w \in G\backslash\{\infty\},\ f(w) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\tilde{f}(\xi)}{\xi - w}\frac{d\xi}{w}.$

Preuve

1) Soit $f \in H^2(G)$, alors : $\exists\ C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\int\limits_{\mathbb{T}_r} |f(w)|^2 |dw| \leq C; \forall r \in]1,\ 2]$.

En éffectuant le changement de variables $w = \dfrac{1}{w'}$, on a : $dw = -\dfrac{1}{w'^2}dw'$, ceci nous donne :

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{T}_r} |f(w)|^2 |dw| &= \int\limits_{\mathbb{T}_{r'}} \left|f\left(\frac{1}{w'}\right)\right|^2 \frac{1}{|w'|^2}|dw'| \\ &= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(\frac{1}{r'e^{i\theta}}\right)\right|^2 \frac{1}{r'^2} r' d\theta \\ &= \frac{1}{r'}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(\frac{1}{r'e^{i\theta}}\right)\right|^2 d\theta;\ r' \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[\end{aligned}$$

donc :

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(\frac{1}{r'e^{i\theta}}\right)\right|^2 d\theta \leq r'.C \leq C$$

possons :

$$\tilde{f}(r'e^{i\theta}) = f\left(\frac{1}{r'e^{i\theta}}\right);$$

alors $\tilde{f} \in H^2(\mathbb{D})$, ce qui implique que $\lim\limits_{r'\to 1^-} \tilde{f}\left(r'e^{i\theta}\right)$ existe presque partout pour $\theta \in [-\pi; \pi]$;

or

$$\lim_{r'\to 1^-} \tilde{f}\left(r'e^{i\theta}\right) = \lim_{r'\to 1^-} \tilde{f}\left(\frac{1}{r'e^{i\theta}}\right) = \lim_{r\to 1^+} f\left(re^{i\theta}\right);$$

ce qui donne le point 1).

Les points 2) et 3) sont une conséquence immédiate de 1) et du théorème (2.4).

2.3 Fonction de Szegő

2.3.1 Fonction de Szegő associées au disque unité

Les fonctions de Szegő rentrent dans le cadre général de la représentation des fonctions positives.

Soient $F \in H^2(\mathbb{D})$ et F^* sa limite radiale. Si l'on pose $f(\theta) = \left|F^*(e^{i\theta})\right|$, alors $f \in L^2(\mathbb{T})$, et on montre que $\log(f) \in L^1(\mathbb{T})$.

Réciproquement étant donnée une fonction $f \in L^2(\mathbb{T})$, f presque partout positive et $\log(f) \in L^1(\mathbb{T})$, on montre qu'il existe une infinité de fonctions F de la classe $H^2(\mathbb{D})$ tel que $f(\theta) = \left|F^*(e^{i\theta})\right|$ presque partout pour $\theta \in [-\pi, \pi]$. On s'intérèsse à une fonction particulière F de la classe décrite auparavant, dite fonction de Szegő, qui est l'objet du théorème suivant :

Théorème 2.6

Soit f une fonction non négative intégrable au sens de Lebesgue sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ et vérifiant la condition de Szegő

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log f(\theta) d\theta > -\infty$$

Alors la fonction définie par :

$$S_f(z) := \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log f(\theta) d\theta\right\}, \qquad (|z| < 1)$$

dite fonction de Szegő associée à $\mathbb{D}$ et à la fonction poids f, possède les propriétés suivantes :

(i) $S_f \in H^2(\mathbb{D})$;

(ii) $S_f(z) \neq 0$ *pour* $|z| < 1$;

(iii) $\left|S_f^*(e^{ix})\right|^2 = f(x)$ *presque partout sur* $[-\pi, \pi]$;

où S_f^* *est la limite radiale de* S_f ;

(iv) $S_f(0) > 0$.

Preuve

Construction de S_f

Considérons l'intégrale de Poisson associée à la fonction $\log(f)$ qu'on note par :

$$u(r, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(x - \theta) + r^2} \log f(\theta)\, d\theta.$$

La fonction u est harmonique dans le disque unité $\mathbb{D}$ puisque $\log(f) \in L^1([-\pi, \pi], d\theta)$ ([45]).

Considérons maintenant la fonction holomorphe $h(z)$ dont $u(r, x)$ est la partie réelle et éxigeons que $h(0)$ soit réelle pour avoir l'unicité de h. La fonction cherchée sera donc

$$g(z) = \exp\left\{\frac{1}{2} h(z)\right\}$$

on montre facilement que :

$$\operatorname{Re} S_f(z) = \operatorname{Re} g(z); \;\; (z = re^{ix}, \;\; r \in [0, 1[)$$

alors

$$S_f(z) = g(z)$$

(i) Montrons que :

$$\exists c > 0 \text{ tel que} : \forall r \in [0,1[\,;\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|S_f(re^{ix})\right|^2 dx \leq c$$

en effet

$$\begin{aligned}
|S_f(z)| &= \left|\exp\left\{\frac{1}{2}\left(\operatorname{Re} h(z) + \operatorname{Im} h(z)\right)\right\}\right| \\
&= \exp\left\{\frac{1}{2}\operatorname{Re} h(z)\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{1}{2}u(r,x)\right\}.
\end{aligned}$$

Par suit, pour $z = re^{ix}$, $r \in [0,1[$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|S_f(re^{ix})\right|^2 &= \exp\{u(r,x)\} \\
&= \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}\log f(\theta)\,d\theta\right\} \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}d\theta \text{ (inégalité de Jensen [53]).}
\end{aligned}$$

En intégrant par rapport à x on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|S_f(re^{ix})\right|^2 dx &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}d\theta\right)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}dx\right)d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta = C, \qquad \forall r \in [0,1[\,.
\end{aligned}$$

ce qui donne le point (i).

(ii) est évident.

(iii) $S_f \in H^2(\mathbb{D})$, notons par S_f^* la limite radiale de S_f ; et comme :

$$\left|S_f\left(re^{ix}\right)\right|^2 = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log(f(\theta))\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}d\theta\right\}$$

il vient :

$$\begin{aligned}\left|S_f^*\left(e^{ix}\right)\right|^2 &= \lim_{r\to 1^-}\left|S_f\left(re^{ix}\right)\right|^2 \\ &= \exp\left\{\lim_{r\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}\log f(\theta)\,d\theta\right\} \\ &= \exp\{\log f(x)\}, \; \textit{presque partout sur } [-\pi,\pi]; \text{ (voir } [45], [54], [60]).\end{aligned}$$

(iv) $S_f(0) = \exp\left\{\frac{1}{2}h(0)\right\} > 0$. ($h(0) \in \mathbb{R}$ par construction).

2.3.2 Fonction de Szegő associée à l'extérieur du cercle unité

Théorème 2.7

Soit f une fonction non négative intégrable de Lebesgue sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$ et vérifiant la condition de Szegö :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\log f(t)dt > -\infty.$$

Alors il existe une fonction unique notée S_f^{ext} et appelée fonction de Szegö associée à l'extérieur de $\mathbb{T}$ et à la fonction poids f, possédant les propriétés suivantes :

(i) $S_f^{ext} \in H^2(G)$;

(ii) $S_f^{ext}(w) \neq 0$ *pour tout* $w \in G$;

(iii) $\left|\left(S_f^{ext}\right)^*\left(e^{ix}\right)\right|^2 = f(x)$ *presque partout sur* $[-\pi,\pi]$;

où $\left(S_f^{ext}\right)^*$ *est la limite radiale de* S_f^{ext};

(iv) $S_f^{ext}(\infty) > 0.$

Preuve

Considérons la fonction de *Szegö* S_f introduite dans le théorème (2.6) et construisons la fonction S_f^{ext} de la façon suivante :

$S_f^{ext}(w) = S_f\left(\dfrac{1}{w}\right)$ pour $w \in G\backslash\{\infty\}$.

$S_f^{ext}(\infty) = S_f(0)$.

Alors les propriétés de S_f et la proposition (2.4) nous donne les propriétés de S_f^{ext}.

Notons que la forme explicite de S_f^{ext} est exactement la fonction :

$$S_f^{ext}(w) = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{w+e^{-i\theta}}{w-e^{-i\theta}}\log f(\theta)\,d\theta\right\}, \qquad (|w|>1).$$

2.4 Espace de Hardy $H^2(G,\rho)$

Définition 2.4

Soient $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \cup \{\infty\}$, ρ *une fonction poids vérifiant :* $\rho \in L^1([-\pi,\pi], d\theta)$, $\rho \geq 0$ *et* $\log(\rho) \in L^1([-\pi,\pi], d\theta)$, S *la fonction de Szegö associée au domaine* G *et la fonction poids* ρ. *On dit que* $f \in H^2(G,\rho)$, *si et seulement si* $f(z)$ *est analytique dans* G *et* $(f.S) \in H^2(G)$.

• l'espace $L^2(\mathbb{T}, \rho\,|d\xi|)$ est l'espace des fonctions f définies sur le cercle unité $\mathbb{T}$, avec les valeurs de $\mathbb{C}$ et pour lequel $\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^2\rho(\theta)\,d\theta < +\infty$.

• Pour tout $f \in L^2(\mathbb{T}, \rho\,|d\xi|)$ et pour tout $g \in L^2(\mathbb{T}, \rho\,|d\xi|)$ *notons :*

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{T},\rho|d\xi|)} = \langle f,\ f\rangle_{L^2(\mathbb{T},\rho|d\xi|)},$$

$$\langle f,g\rangle_{L^2(\mathbb{T},\rho|d\xi|)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{i\theta}\right)\overline{g\left(e^{i\theta}\right)}\rho(\theta)\,d\theta$$

Alors $\left(L^2(\mathbb{T}, \rho\,|d\xi|), \|.\|_{L^2(\mathbb{T},\rho|d\xi|)}\right)$ est un espace de Hilbert complexe.

• Nous résumons les propriétés de base de l'espace $H^2(G,\rho)$ dans le théorème et le lemme suivant :

Théorème 2.8

Soit $f \in H^2(G,\rho)$, *alors* f *admet en presque tous les points de* $\mathbb{T}$ *une limite radiale notée* $\tilde{f}$ *;* $(\tilde{f}(e^{i\theta}) = \lim_{z \to e^{i\theta}} f(z))$. $\tilde{f}$ *vérifie aussi :*

a) $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{T}, \rho\,|d\xi|)$,

b) $\left(H^2(G,\rho), \|.\|_\rho\right)$ *est un espace de Hilbert, où*

$$\begin{aligned} \|f\|_\rho^2 &= \langle f, f \rangle_\rho, \\ \langle f, g \rangle_\rho &= \left\langle \tilde{f}, \tilde{g} \right\rangle_{L^2(\mathbb{T},\rho|d\xi|)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}\left(e^{i\theta}\right) \overline{\tilde{g}\left(e^{i\theta}\right)} \rho(\theta)\, d\theta \end{aligned}$$

pour $f \in H^2(G,\rho)$ *et* $g \in H^2(G,\rho)$,

c) si $f \in H^2(G,\rho)$, *alors pour tout compact* $K \subset G$, *il existe une constante* $C(K)$ ($C(K)$ *ne dépend que de* K) *tel que*

$$\sup_{z \in K} |f(z)| \leq C(K)\, \|f\|_\rho .$$

Lemme 2.1

Soit $\{f_n\}$ *une suite de fonctions de* $H^2(G,\rho)$ *et*

i) $f_n \to f$ *uniformément sur les compacts de* G,

ii) $\|f_n\|_\rho \leq M$ *(constant).*

Alors $f \in H^2(G,\rho)$ et $\|f\|_\rho \leq \liminf \|f_n\|_\rho$.

2.5 Topologie de $\mathcal{H}ol(\Omega)$

La convergence sur les sous-ensembles compacts, est la convergence qui intervient le plus naturellement en rapport avec les opérations de limite sur les fonctions holomorphes. Pour définir cette notion, on commence par énoncer une propriété des sous ensembles ouverts du plan complexe, qui nous permet de construire une métrique sur $\mathcal{H}ol(\Omega)$.

Théorème 2.9 ([8, 45])

Tout ouvert Ω du plan est la réunion d'une suite $\{K_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, de compacts tels que :

1) K_n soit inclus dans l'intérieur de K_{n+1} pour $n \in \mathbb{N}$.

2) Tout sous-ensemble compact de Ω soit inclus dans l'un des K_n.

3) Toute composante de $S^2 - K_n$ contienne une composante de $S^2 - \Omega$,pour $n \in \mathbb{N}$, (S^2 étant la sphère de Riemann).

Pour f et g deux fonctions de $\mathcal{H}ol(\Omega)$, définissons :

$$d(f,g) = \sum_{n \geq 1} \left(2^{-n}\right) \frac{d_n(f,g)}{1 + d_n(f,g)}, \text{ où } d_n(f,g) = \sup_{z \in K_n} \{|f(z) - g(z)|\}.$$

On montre dans [45] que $(\mathcal{H}ol(\Omega), d)$ est un espace métrique complet et qu'une suite de fonctions de $\mathcal{H}ol(\Omega)$ converge au sens de la métrique d si et seulement si elle converge uniformément sur chaque sous-ensemble compact de Ω. Cette dernière caractérisation de la convergence au sens de la métrique d, nous permet de donner et justifier la définition suivante :

Définition 2.5

Soient $\{f_n\}$ une suite de $\mathcal{H}ol(\Omega)$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On dit que $\{f_n\}$ converge vers f dans le sens de $\mathcal{H}ol(\Omega)$, si $\{f_n\}$ converge uniformément vers f sur chaque sous-ensemble compact de Ω.

2.5.1 Familles normales

Définition 2.6 [45]

Supposons $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}ol(\Omega)$, pour un ouvert convexe Ω du plan complexe. Nous appelons $\mathcal{F}$ une famille normale (où de Montel), si toute suite d'éléments de $\mathcal{F}$ contient une sous-suite qui converge uniformément sur les sous-ensemble compacts de Ω. On n'exige pas que la fonction limite appartienne à $\mathcal{F}$.

Le théorème suivant nous donne une propriété très utile de compacité des familles normales.

Théorème 2.10 [45]

Supposons que $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}ol\,(\Omega)$ *et que* $\mathcal{F}$ *soit uniformément bornée sur tout compact inclus dans* Ω*. Alors* $\mathcal{F}$ *est une famille normale.*

2.5.2 Convergence dans $H^p(G, \rho)$

Théorème 2.11 [19]

Soit $\{f_n\}$ *une suite de fonctions de classe* $H^p\,(G, \rho)$ *vérifiant :*

1) f_n *converge vers une fonction* f *dans le sens de* $\mathcal{H}ol\,(G)$ *. (qui est alors holomorphe dans* G*)*

2) $\|f_n\|^p_{H^p(G,\rho)} \leq C;\ \forall n \in \mathbb{N};$ *(*C *étant une constante)*

Alors :

$$f \in H^p\,(G, \rho)\,,$$

et de plus

$$\|f\|^p_{H^p(G,\rho)} \leq \liminf \|f_n\|^p_{H^p(G,\rho)}$$

Chapitre 3

Comportement asymptotique des polynômes orthogonaux sur le cercle

3.1 Introduction

On présente dans ce paragraphe une étude du problème de comportement asymptotique des polynômes orthonormés sur le cercle avec fonction poids. Tout les résultats cités dans ce paragraphe sont largement inspirés de l'article de Szegö [51].

Cet article est une référence de base dans l'étude des comportements asymptotiques des polynômes orthogonaux. Szegö a considéré des fonctions poids assez générales. Sa méthode a été largement utilisée, avec des améliorations convenables, pour étudier les comportements asymptotiques des polynômes orthogonaux pour d'autres types d'ensembles et de mesures (contour, arc, mesures non absolument continues...).

3.2 Polynômes orthonormés sur le cercle

Soit $\rho \in L^1(\mathbb{T})$ tel que $\rho \geq 0$ et $\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta)\, d\theta > 0$. On désigne par $L^2_\rho(\mathbb{T})$ la classe des fonctions g définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, périodiques de période 2π, mesurables au sens de Lebesgue dans $[-\pi, \pi]$, pour lesquelles $\int_{-\pi}^{\pi} |g(\theta)|^2 \rho(\theta)\, d\theta < +\infty$. Si φ et ψ

sont deux fonctions dans $L^2_\rho(\mathbb{T})$; alors l'espace $\left(L^2_\rho(\mathbb{T}), \langle .,. \rangle_{L^2_\rho(\mathbb{T})}\right)$ devient un espace de Hilbert complexe pour le produit scalaire suivant :

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{L^2_\rho(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta) \overline{\psi(\theta)} \rho(\theta) \, d\theta;$$

notons sa norme par

$$\|\varphi\|^2_{L^2_\rho(\mathbb{T})} = \langle \varphi, \varphi \rangle_{L^2_\rho(\mathbb{T})}.$$

Définition 3.1

Soit ρ une fonction poids vérifiant : $\rho \in L^1(\mathbb{T})$; ρ non négative et $\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta) \, d\theta > 0$. On dit que le système de polynômes $\{\varphi_n(z) : n \in \mathbb{N} \; ; \; z \in \mathbb{C}\}$ est un système orthonormal relativement au cercle et à la fonction poids ρ, si $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie les conditions suivantes :

1) $\varphi_n(z)$ est un polynôme de degré n exactement dont le coefficient de z^n est réel et strictement positif.

2) Le système $\{\tilde{\varphi}_n(\theta) = \varphi_n\left(e^{i\theta}\right)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est orthonormé dans $L^2_\rho(\mathbb{T})$; c'est-à-dire :

$$\langle \tilde{\varphi}_n, \tilde{\varphi}_m \rangle_{L^2_\rho(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n\left(e^{i\theta}\right) \overline{\varphi_m\left(e^{i\theta}\right)} \rho(\theta) \, d\theta = \delta_{n,m}; \; n, \; m \in \{0, 1, ...\}. \tag{3.1}$$

Remarque 3.1

Si on définit la fonction ρ_1 par $\rho_1(e^{i\theta}) = \rho(\theta)$ on obtient :

$$\langle \tilde{\varphi}_n, \tilde{\varphi}_m \rangle_{L^2_\rho(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \varphi_n\left(e^{i\theta}\right) \overline{\varphi_m\left(e^{i\theta}\right)} \rho_1\left(e^{i\theta}\right) |dz| = \delta_{n,m}; \; n, \; m \in \{0, 1, ...\} ; \; z = e^{i\theta}.$$

Donc l'orthogonalité (3.1) *est l'orthogonalité sur le cercle avec la présence d'une fonction poids ρ_1 ; ce qui justifie le titre du paragraphe 3.1.*

Proposition 3.1

Soit ρ une fonction poids vérifiant : $\rho \in L^1(\mathbb{T})$; ρ non négative et $\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta) \, d\theta > 0$; alors il existe un système de polynômes orthogonaux unique $\{\varphi_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ relativement au *cercle et à la fonction poids ρ, c'est-à-dire vérifiant les conditions 1) et 2) de la définition* (3.1).

Preuve

La construction du système $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pourra se faire de plusieurs façon ; citons deux façons qui nous serons utiles plus tard.

<u>Première construction</u>:

Considérons le système $\{z^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et posons

$$\tilde{\psi}_n(\theta) = \psi_n\left(e^{i\theta}\right) = \left(e^{i\theta}\right)^n = z^n;\ n \in \mathbb{N}.$$

Alors $\tilde{\psi}_n \in L^2_\rho(\mathbb{T})$ car :

$$\left\|\tilde{\psi}_n\right\|^2_{L^2_\rho(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\tilde{\psi}_n(\theta)\right|^2 \rho(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\rho(\theta)\, d\theta < +\infty;$$

de plus le système $\left\{\tilde{\psi}_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ est libre dans $L^2_\rho(\mathbb{T})$. Donc en appliquant le procédé d'orthogonalisation de Grahm Schmidt au système $\left\{\tilde{\psi}_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$; on obtient :

$\exists\ \{\tilde{\varphi}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$; $\tilde{\varphi}_n \in L^2_\rho(\mathbb{T})$ tel que :

a) $\tilde{\varphi}_n = \lambda_{n,n}\tilde{\psi}_n + \lambda_{n,n-1}\tilde{\psi}_{n-1} + ... + \lambda_{n,0}\tilde{\psi}_0;\quad \lambda_{n,n} > 0.$

b) $\langle\tilde{\varphi}_n, \tilde{\varphi}_m\rangle_{L^2_\rho(\mathbb{T})} = \delta_{n,m};\ n,\ m \in \{0, 1, ...\}$

Développons a) et b) :

a) $\tilde{\varphi}_n(\theta) = \sum\limits_{k=0}^{n}\lambda_{n,k}\tilde{\psi}_k(\theta)$

$\qquad = \sum\limits_{k=0}^{n}\lambda_{n,k}\psi_k\left(e^{i\theta}\right)$

donc : $\varphi_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n}\lambda_{n,k}z^k;\quad \lambda_{n,n} > 0,\ z = e^{i\theta}.$

b) $\langle\tilde{\varphi}_n, \tilde{\varphi}_m\rangle_{L^2_\rho(\mathbb{T})} = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\tilde{\varphi}_n(\theta)\,\overline{\tilde{\varphi}_m(\theta)}\rho(\theta)\, d\theta$

$\qquad = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi_n\left(e^{i\theta}\right)\overline{\varphi_m\left(e^{i\theta}\right)}\rho(\theta)\, d\theta,$

$$= \delta_{n,m};\ n,\ m \in \{0,1,...\}$$

Deuxième construction:

Exigeons que $\log(\rho) \in L^1(\mathbb{T})$; ceci nous permet de considérer la fonction de Szegö S_ρ associée à ρ et au disque unité $\mathbb{D}$.

Considérons le système $\{h_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ défini par :

$$h_n(z) = S_\rho(z).z^n;\ n \in \mathbb{N}$$

Alors on a :

a) $h_n \in H^2(\mathbb{D});\ n \in \mathbb{N}$

En effet :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|h_n(re^{i\theta})\right|^2 d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|S_\rho(re^{i\theta})\right|^2 r^{2n} d\theta \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|S_\rho(re^{i\theta})\right|^2 d\theta;\ pour : r \in [0,1[\\
&< +\infty;\ \text{car } S_\rho \in H^2(\mathbb{D}).
\end{aligned}$$

b) $\{h_n\}$ est libre dans $H^2(\mathbb{D})$.

Ceci nous permet d'appliquer le procédé d'orthogonalisation de Grahm Schmidt au système $\{h_n\}$ dans l'espace de Hilbert $H^2(\mathbb{D})$; on obtient :

$\exists\ \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}.}$; $r_n \in H^2(\mathbb{D})$ tel que :

1) $r_n = k_n h_n + k_{n,n-1}h_{n-1} + ... + k_{n,0}h_0;\quad k_n > 0.$ (on a confondu $k_{n,n}$ avec k_n)

2) $\langle r_n, r_m\rangle_{H^2(\mathbb{D})} = \delta_{n,m};\ n,\ m \in \{0,1,...\}$

Développons 1) et 2) :

1) $r_n(z) = S_\rho(z).q_n(z)$; avec $q_n(z) = k_n z^n + \sum\limits_{p=0}^{n-1} k_{n,p} z^p;\ k_n > 0.$

Le système de polynômes $\{q_n(z);\ n \in \mathbb{N}\ ;\ z \in \mathbb{C}\}$ est le système cherché ; q_n est un polynôme de degré n exactement dont le coefficient de z^n est réel et strictement positif.

$$
\begin{aligned}
2)\ \langle \tilde{q}_n, \tilde{q}_m \rangle_{L^2_\rho(\mathbb{T})} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} q_n\left(e^{i\theta}\right)\overline{q_m\left(e^{i\theta}\right)}\rho\left(\theta\right)d\theta;\ (\text{avec } \tilde{q}_n(\theta) = q_n(e^{i\theta})\ \forall n \in \mathbb{N}).\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} q_n\left(e^{i\theta}\right)\overline{q_m\left(e^{i\theta}\right)}\left|S^*_\rho(e^{i\theta})\right|^2 d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r_n\left(e^{i\theta}\right)\overline{r_m\left(e^{i\theta}\right)}d\theta\\
&= \langle r_n, r_m \rangle_{H^2(\mathbb{D})} = \delta_{n,m};\ n,\ m \in \{0, 1, ...\}
\end{aligned}
$$

L'unicité nous donne : $\varphi_n \equiv q_n$.

Pour trouver la formule asymptotique des polynômes orthogonaux $\{\varphi_n\}$, Szegö a utilisé une propriété fondamentale des polynômes $\{\varphi_n\}$, dite Propriété extrémale. Notons par $P_{n,1}$ l'ensemble des polynômes normalisés de degré n.

Théorème 3.1

P*osons* $\varphi_n(z) = k_n z^n + k_{n,n-1}z^{n-1} + ... + k_{n,0};\ k_n > 0.$

Le polynôme $\frac{1}{k_n}\varphi_n(z)$ *vérifie : (pour* $z = e^{i\theta}$*)*

$$
\frac{1}{k_n^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{k_n}\varphi_n(z)\right|^2 \rho\left(\theta\right)d\theta = \min_{Q_n \in P_{n,1}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|Q_n(z)\right|^2 \rho\left(\theta\right)d\theta \overset{notation}{=} m_n\left(\rho\right)
$$

Preuve

C'est un cas particulier du théorème (1.1) en remarquons que $\frac{1}{k_n}\varphi_n(z)$ est un polynôme normalisé de degrè n.

3.3 Comportement asymptotique des polynômes orthonormés sur le cercle avec fonction poids :$(|z| > 1)$

Notons par $\mathcal{M}$ l'ensemble des fonctions poids ρ vérifiant les conditions suivantes : $\rho \in L^1(\mathbb{T})$; $\rho \geq 0$ et $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta)\, d\theta > 0$ et la condition de Szegö :

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \log(\rho(\theta)) d\theta > -\infty.$$

Lemme 3.1 ([51])

Soit ρ une fonction poids sur le cercle unité telle que $\rho \in \mathcal{M}$, $m_n(\rho) = \dfrac{1}{k_n^2}$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} m_n(\rho) = \{S_\rho(0)\}^2 ;$$

où S_ρ est la fonction de Szegö associée au cercle unité et à la fonction poids ρ;

Théorème 3.2 ([51])

Soit ρ une fonction poids sur le cercle unité telle que $\rho \in \mathcal{M}$, et $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ le système de polynômes orthonormés associé à ρ et au cercle unité. Alors :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_n(z)}{z^n} = \frac{1}{\overline{S}_\rho(z^{-1})}; \qquad (|z| > 1) \tag{3.2}$$

avec

$$\overline{S}_\rho(z^{-1}) := \overline{S_\rho\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}.$$

La convergence est uniforme pour $|z| \geq R > 1$.

Preuve

Notons : $\varphi_n^*(z) = z^n \overline{\varphi_n}(z^{-1}) = z^n \overline{\varphi_n\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}$.

Considérons la fonction $S_\rho(z)\varphi_n^*(z)$ qui est analytique dans le disque unité ouvert $\mathbb{D}$, on a :

$$S_\rho(z)\varphi_n^*(z) = S_\rho(0)\, k_n + \sum_{p\geq 1} d_{np} z^p; \;\; car \;\; \varphi_n^*(0) = k_n$$

alors :

$$(S_\rho(z)\varphi_n^*(z) - 1) = (S_\rho(0)\, k_n - 1) + \sum_{p\geq 1} d_{np} z^p \tag{3.3}$$

et d'après le théorème (2.4) on a :

$$\|S_\rho \varphi_n^* - 1\|^2_{H^2(\mathbb{D})} = |S_\rho(0)\, k_n - 1|^2 + \sum_{p\geq 1} |d_{np}|^2 .$$

Donc :

$$\sum_{p\geq 1} |d_{np}|^2 \leq \|S_\rho \varphi_n^* - 1\|^2_{H^2(\mathbb{D})} \tag{3.4}$$

Montrons que : $\|S_\rho \varphi_n^* - 1\|^2_{H^2(\mathbb{D})} = 2 - 2S_\rho(0)\, k_n$.

Pour $r < 1$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|S_\rho(re^{i\theta})\varphi_n^*(re^{i\theta}) - 1\right|^2 d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|S_\rho(re^{i\theta})\right|^2 \left|\varphi_n^*(re^{i\theta})\right|^2 d\theta + 1 \\ & -2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_\rho(re^{i\theta})\varphi_n^*(re^{i\theta}) d\theta\right\}. \end{aligned}$$

Comme la fonction $S_\rho(z)\varphi_n^*(z)$ est analytique dans $\mathbb{D}$, alors $\mathrm{Re}\left\{S_\rho(re^{i\theta})\varphi_n^*(re^{i\theta})\right\}$ est harmonique dans $\mathbb{D}$, et ainsi :

$$2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_\rho(re^{i\theta})\varphi_n^*(re^{i\theta}) d\theta\right\} = 2S_\rho(0)\, k_n.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\lim_{r\to1^-}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|S_\rho(re^{i\theta})\right|^2\left|\varphi_n^*(re^{i\theta})\right|^2d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\rho\left(\theta\right)\left|\varphi_n^*(e^{i\theta})\right|^2d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\varphi_n(e^{i\theta})\right|^2\rho\left(\theta\right)d\theta=1\end{aligned}$$

Par suite, on obtient :

$$\left\|S_\rho\varphi_n^*-1\right\|_{H^2(\mathbb{D})}^2=\lim_{r\to1^-}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|S_\rho(re^{i\theta})\varphi_n^*(re^{i\theta})-1\right|^2d\theta=2-2S_\rho\left(0\right)k_n.$$

L'inégalité de Cauchy et la relation (3.4) nous donne :

$$\left|\sum_{p\geq1}d_{np}z^p\right|^2\leq\left(\sum_{p\geq1}\left|d_{np}\right|^2\right)\left(\sum_{p\geq1}(|z|^2)^p\right)\leq\left(2-2S_\rho\left(0\right)k_n\right)\left(\frac{|z|^2}{1-|z|^2}\right).$$

En considérant le lemme (3.1) , on obtient :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{p\geq1}d_{np}z^p\right|^2=0 \tag{3.5}$$

uniformément pour $|z|\leq r<1$.

En utilisant les relations (3.3) et (3.5) on trouve pour $|z|<1$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_\rho(z)\varphi_n^*(z)-1\right)=0,$$

alors :

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n^*\left(z\right)=\frac{1}{S_\rho\left(z\right)};\qquad\left(|z|<1\right),$$

donc :

$$\lim_{n\to\infty}z^n\overline{\varphi_n}\left(z^{-1}\right)=\frac{1}{S_\rho\left(z\right)};\qquad\left(|z|<1\right),$$

Finalement :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_n\left(z\right)}{z^n}=\frac{1}{\overline{S}_\rho\left(z^{-1}\right)};\qquad\left(\left|z\right|>1\right).$$

Ce qui donne la relation (3.2) du théorème.

Chapitre 4

Comportement asymptotique des polynômes orthogonaux avec la condition généralisée de Szegö

4.1 Introduction

Soit $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ le cercle unité et $z_1, z_2, \ldots, z_m$ m points fixes à l'extérieur de $\mathbb{T}$. Considéront une mesure sur $\mathbb{T} \cup \{z_j\}_{j=1}^{m}$ de la forme

$$\mu = \beta + \sum_{j=1}^{m} A_j \delta_{z_j}$$

où $\beta = \beta_{ac} + \beta_s$ est une mesure de probabilité borélienne sur le cercle unité $\mathbb{T}$ et δ_{z_j} désigne la mesure de Dirac au point z_j avec les masse $A_j > 0$, pour $j \in \{1, \ldots, m\}$. β_{ac} désigne la partie absolument continue de β et β_s la partie singulière.

Notons $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n et par $\psi_n(z) = \gamma_n z^n + \ldots \in$

$\mathcal{P}_n$ $(\gamma_n > 0)$ le polynôme de degré n orthonormé par rapport à β c'est à dire,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi_n(z)\overline{z^k}d\beta(\theta) + \sum_{j=1}^{m} A_j\psi_n(z_j)\overline{z_j^k} = \frac{1}{\gamma_n}\delta_{kn},\ k \in \{0, 1, \ldots, n\},\ z = e^{i\theta}. \tag{4.1}$$

où δ_{kn} est le symbole de la Kronecker, γ_n s'appelle coefficient dominant . Le coefficient dominant k_n joue un rôle important dans la théorie des polynômes orthogonaux, et plusieurs propriétés dépendent de son comportent asymptotique.

Soit $\varphi_n(z) = k_n z^n + \ldots \in \mathcal{P}_n$ $(k_n > 0,\ n \in \{0, 1, ...\})$ le polynôme orthonormé de degré n relativement à la mesure β i.e.,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_n(z)\overline{z^k}d\beta(\theta) = \frac{1}{k_n}\delta_{kn},\ k \in \{0, 1, \ldots, n\},\ z = e^{i\theta}. \tag{4.2}$$

Pour un polynôme $p \in \mathcal{P}_n$, posons $p^*(z) = z^n\overline{p(1/\overline{z})}$. On peut vérifier que, pour $z \in \mathbb{T},\ |p^*(z)| = |p(z)|$.

Il est bien connu par les formules de récurrence

$$\begin{aligned} k_n\varphi_{n+1} &= k_{n+1}z\varphi_n + \varphi_{n+1}(0)\varphi_n^* \\ k_n\varphi_{n+1}^* &= k_{n+1}\varphi_n^* + \overline{\varphi_{n+1}(0)}z\varphi_n \end{aligned}$$

que les polynômes orthonormés $\{\varphi_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont uniquement déterminées par les paramètres de Geronimus $a_n = \overline{-\varphi_{n+1}(0)}/k_{n+1},\ n \in \{0, 1, \ldots\}$.

On dit qu'une mesure de probabilité β appartient à la classe de Nevai (N) (notée $\beta \in (N)$) si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.Il s'ensuit d'après le théorème de Rahmanov [42, 43] que la condition $\beta' > 0$ p.p. sur $\mathbb{T}$ implique que $\beta \in (N)$. La classe des mesures de probabilité avec $\beta' > 0$ p.p. sur $\mathbb{T}$ est appelé la classe Erdős, noté (E). Enfin, β est une mesure Rahmanov (i.e. $\beta \in (R)$) si

$$\lim_{n\to\infty} |\varphi_n|^2 d\beta = dm$$

où m est la mesure de Lebesgue de probabilité sur $\mathbb{T}$ i.e.

$$dm(t) = dt/(2\pi it) = (1/2\pi)d\theta,\ t = e^{i\theta} \in \mathbb{T}.$$

Pour ces calasses de mesures nous avons les inclusions suivantes :

$$(E) \subset (N) \subset (R).$$

Nous disons qu'une mesure β appartient à la classe de Szegö (notée $\beta \in (S)$) si la dérivée de Radon-Nikodym β'_{ac} de β par rapport à la mesure de probabilité de Lebesgue m satisfait la usuel de Szegö :

$$\int_0^{2\pi} \log \beta'_{ac}(e^{i\theta})d\theta > -\infty.$$

Si $\beta \in (S)$, alors on peut construire la fonction Szegö

$$S(z) = \exp\left\{ \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log \beta'_{ac}(e^{i\theta})d\theta \right\}$$

ayant les propriétés suivantes

1) S est analytique dans le disque unité ouvert $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $S(z) \neq 0$ sur $\mathbb{D}$, et $S(0) > 0$.

2) $|S(t)| = \beta'_{ac}(t)$ p.p. sur $\mathbb{T}$.

Il est bien connu (Szegö [54] ; Geronimus [12]) que si $\beta \in (S)$ alors

$$\lim_{n\to\infty} S(z)\varphi_n^*(z) = 1$$

pour tout $z \in \mathbb{D}$. Par ailleurs,

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|S\varphi_n^* - 1|^2 d\theta\right\} = 0.$$

Il est intéressant de mettre en place les mêmes asymptotique pour différentes catégories de mesures. Récemment en 2006 Denisov et Kupin dans [9] ont obtenu des résultats similaires pour une large classe de mesures définies comme suit :

Soit p un polynôme trigonométrique tel que $p(t) \geq 0,\ t \in \mathbb{T}$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que

$$p(t) = \prod_{k=1}^{N}(t - \xi_k)^{2m_k},$$

où $\{\xi_k\}$ sont des points sur $\mathbb{T}$ et $m_k > 0$ sont leurs multiplicités

Nous disons qu'une mesure β appartient à la classe polynômial de Szegö (notée $\beta \in (pS)$) si la dérivée de Radon-Nikodym β'_{ac} de la partie absolue de β par rapport à la mesure de Lebesgue m satisfait la condition généralisée de Szegö :

$$\int_0^{2\pi} p(e^{i\theta}) \log \beta'_{ac}(e^{i\theta}) d\theta > -\infty.$$

Il est facile de voir que$(S) \subset (pS) \subset (E)$.

Pour une mesure $\beta \in (pS)$, Kupin et Denisov dans [9], ont obtenues l'asymptotique ponctuelles dans le disque unité ouvert $\mathbb{D}$ pour les polynômes orthogonaux associés $\{\varphi_n(z)\}$ et prouvé leurs asymptotiques au sens L^2 sur le cercle unité. Dans le cas où la mesure $\beta \in (pS)$ est perturbé par des points masses à l'extérieur du cercle unité, le problème est connu comme difficile et est un problème ouvert dans l'analyse. Dans ce chapitre, nous étudions le comportement asymptotique ponctuelles à l'intérieur du disque unité de polynômes orthogonaux par rapport à une mesure de classe polynômial de Szegö et perturbé par une suite de Blaschke fini de masses ponctuelles à l'extérieur du cercle de l'unité.

4.2 Préliminaires

Donnons d'abord quelques notations.

Pour $\beta \in (pS)$, nous introduisons les fonctions

$$\tilde{S}(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(e^{i\theta}, z)\log \beta'_{ac}(e^{i\theta})d\theta\right\}, \tag{4.3}$$

$$\tilde{\varphi}_n^*(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(e^{i\theta}, z)\log |\varphi_n^*(e^{i\theta})|d\theta\right\}, \tag{4.4}$$

$$\tilde{\psi}_n^*(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(e^{i\theta}, z)\log |\psi_n^*(e^{i\theta})|d\theta\right\}, \tag{4.5}$$

où $K(e^{i\theta},\ z)$ est le noyau de Schwarz modifiée définie par

$$K(t, z) = \frac{t+z}{t-z}\frac{q(t)}{q(z)},$$

et $q(t) = \prod_{k=1}^{N}(t-\beta_k)^{2m_k}/t^{N'},\ N' = \sum_k m_k,\ t = e^{i\theta} \in \mathbb{T}$.

Les fonctions $\{\tilde{\varphi}_n^*\}$ et $\{\tilde{\psi}_n^*\}$ sont appelés les polynômes orthogonaux modifiés inversée par rapport à β et μ respectivement, et satisfaire le Lemme suivant :

Lemme 4.1 ([9]) Soit $\beta \in (pS)$, les fonctions $\tilde{S}(z), \tilde{\varphi}_n^*(z)$ définis par (4.3) (4.4) et (4.5). Alors

(i) $|\tilde{S}(t)|^2 = \beta'_{ac}$ *p.p.* sur $\mathbb{T}$,

(ii) $|\tilde{\varphi}_n^*(t)| = |\varphi_n^*(t)|$ *p.p.* sur $\mathbb{T}$,

(iii) $|\tilde{\psi}_n^*(t)| = |\psi_n^*(t)|$ *p.p. sur* $\mathbb{T}$.

On commence d'abord par présenter le résultat de Denisov et Kupin ([9]) sur le comportement asymptotique des polynôme extrémaux :

Théorème 4.1 ([9]) Soit $\beta \in (pS)$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{S}(z)\tilde{\varphi}_n^*(z) = 1$$

pour chaque $z \in \mathbb{D}$.

Théorème 4.2 ([9]) Soit $\mu \in (pS)$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\tilde{S}(e^{i\theta})\tilde{\varphi}_n^*(e^{i\theta}) - 1|^2 d\theta = 0.$$

Remarque 4.1 ([9]) Notons que d'après l'inégalité suivante

$$\|\tilde{S}\tilde{\varphi}_n^*\|_{L^2(\mathbb{T})} - \|1\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \|\tilde{S}\tilde{\varphi}_n^* - 1\|_{L^2(\mathbb{T})}$$

et le fait que le membre droit de l'inégalité tend vers 0 lorsque $n \to \infty$ (voir le théorème 4.2), alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S(e^{i\theta})\varphi_n(e^{i\theta})|^2 d\theta = 1,$$

vérifie et implique

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi_n(e^{i\theta})|^2 d\beta_s = 0,$$

car $\|\varphi_n\|^2_{L^2(\sigma)} = 1$.

4.3 Résultats essentiels

Nous rappelons le ratio asymptotique de deux polynômes orthonormés $\{\psi_n(z)\}$ et $\{\varphi_n(z)\}$.

Théorème 4.3 ([**34**]) Si $\mu \in (N)$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)} = B(z),$$

uniformément pour $|z| \geq 1$. Où

$$B(z) = \prod_{k=1}^{m} \frac{(z - z_k)}{(\overline{z_k} z - 1)} \frac{|z_k|}{z_k}$$

est le produit de Blaschke fini.

Maintenant, nous prouvons presenter les résultats essentiels de ce chapitre, nous commençons d'abord par établir l'asymptotique ponctuelles dans le disque unité ouvert pour les polynômes orthogonaux $\{\psi_n(z)\}$.

Théorème 4.4 Soit la mesure $\mu = \beta + \sum_{k=1}^{m} A_k \delta_{z_k}$, tel que $\beta \in (pS)$.

Nous associons à la mesure μ les fonctions $\tilde{S}$ et $\tilde{\psi}_n^*$ donnée par (4.3), (4.5), alors nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{S}(z)\tilde{\psi}_n^*(z) = 1,$$

pour tout $z \in \mathbb{D}$.

Preuve. Considérons la suite des fonctions

$$h_n(z) = \frac{\tilde{\psi}_n^*(z)}{\tilde{\varphi}_n^*(z)} = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(e^{i\theta}, z) \log \left| \frac{\psi_n^*(e^{i\theta})}{\varphi_n^*(e^{i\theta})} \right| d\theta \right\},$$

en utilisant le lemme 4.1, on trouve

$$h_n(z) = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(e^{i\theta}, z) \log \left| \frac{\psi_n(e^{i\theta})}{\varphi_n(e^{i\theta})} \right| d\theta \right\}.$$

En passant à la limite quand $n \to \infty$ et en utilisant le théorème 4.3 et le fait que $|B(e^{i\theta})| = 1$, nous obtenons

$$\lim_{n\to\infty} h_n(z) = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(e^{i\theta}, z) \log |B(e^{i\theta})| d\theta \right\} = 1. \tag{4.6}$$

Enfin, (4.6) et le théorème 4.1 implique

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{S}(z)\tilde{\psi}_n^*(z) = \lim_{n\to\infty}[\tilde{S}(z)\tilde{\varphi}_n^*(z)]h_n(z) = 1.$$

Cela permet d'obtenir la preuve du théorème.

Pour démontrer le deuxième résultat essentiel, nous introduisons le Lemme suivant

Lemme 4.2 Sous les hypothèses du théorème 4.4, on a

$$\lim_{n\to\infty} 2\,\mathrm{Re}\int_0^{2\pi} \tilde{S}(e^{i\theta})\tilde{\psi}_n^*(e^{i\theta})d\theta = 4\pi.$$

Preuve. Il est prouvé dans [1,p.22] pour $\tilde{\varphi}_n^*$ que

$$2\,\mathrm{Re}\int_0^{2\pi} \tilde{S}(e^{i\theta})\tilde{\varphi}_n^*(e^{i\theta})d\theta = 4\pi\,\mathrm{Re}[\tilde{S}(\xi_0)\tilde{\varphi}_n^*(\xi_0)],$$

pour un certain $\xi_0 \in \mathbb{D}$, la démonstration repose sur le fait que (voir le théorème 4.1),

$$\lim_{n\to\infty}[\tilde{S}(z)\tilde{\varphi}_n^*(z)] = 1, \mathrm{car}, z \in \mathbb{D},$$

puis par le théorème 4.4, il est également vrai pour $\tilde{\psi}_n^*$.

Finalement, nous donnons l'asymptotique des polynômes orthogonaux modifiés par rapport à μ dans $L^2(\mathbb{T})$.

Théorème 4.5 Sous les hypothèses du théorème 4.4, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\tilde{S}(e^{i\theta})\tilde{\psi}_n^*(e^{i\theta}) - 1|^2 d\theta = 0.$$

Preuve. Tout d'abord, nous transformons l'intégrale dans le théorème à la somme suivante :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\tilde{S}(e^{i\theta})\tilde{\psi}_n^*(e^{i\theta}) - 1|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\tilde{S}(e^{i\theta})\tilde{\psi}_n^*(e^{i\theta})|^2 d\theta - 2\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{S}(e^{i\theta})\tilde{\psi}_n^*(e^{i\theta}) d\theta + 1. \tag{4.7}$$

Nous commençons par le second terme de la partie droite de (4.7). D'après le lemme 4.2, on vérifie que

$$\lim_{n\to\infty} 2\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{S}(e^{i\theta})\tilde{\psi}_n^*(e^{i\theta}) d\theta = 2. \tag{4.8}$$

Maintenant, pour le premier terme de la partie droite de (4.7), nous avons l'estimation

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\tilde{S}(e^{i\theta})\tilde{\psi}_n^*(e^{i\theta})|^2 d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S(e^{i\theta})\psi_n^*(e^{i\theta})|^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{\psi_n(e^{i\theta})}{\varphi_n(e^{i\theta})}\right|^2 |S(e^{i\theta})\varphi_n(e^{i\theta})|^2 d\theta \\ &\leq \sup_{t\in\mathbb{T}} \left|\frac{\psi_n(t)}{\varphi_n(t)}\right|^2 \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi_n(e^{i\theta})|^2 \mu'_{ac} d\theta\right], \end{aligned} \tag{4.9}$$

Car $\sup_{t\in\mathbb{T}} \left|\frac{\psi_n(t)}{\varphi_n(t)}\right|^2 \to |B(t)|$ quand $n \to \infty$ (Théorème 4.3) et

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi_n(e^{i\theta})|^2 \mu'_{ac} d\theta \to 1$ quand $n \to \infty$ (voir la remarque 4.1), puis par passage à la limite quand $n \to \infty$ dans l'inégalité (4.9), nous obtenons

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\tilde{S}(e^{i\theta})\tilde{\psi}_n^*(e^{i\theta})|^2 d\theta \leq |B(t)| = 1. \tag{4.10}$$

Enfin, en passant à la limite lorsque $n \to \infty$ en (4.7) et en utilisant (4.8) et (4.10), on obtien

$$0 \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\tilde{S}(e^{i\theta})\tilde{\psi}_n^*(e^{i\theta}) - 1\right|^2 d\theta$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\tilde{S}(e^{i\theta})\tilde{\psi}_n^*(e^{i\theta}) - 1|^2 d\theta \leq 0.$$

Cela permet d'obtenir la preuve du théorème.

Remarque 4.2 En conséquence du théorème 4.5, nous avons

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\psi_n(e^{i\theta})|^2 d\beta_s = 0$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^m A_j |\psi_n(z_j)|^2 = 0$

Cela est évident, puisque d'après le théorème 4.3, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\psi_n(e^{i\theta})|^2 d\beta_{ac} = 1$$

et

$$\|\psi_n\|^2_{L^2(\mu)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\psi_n(e^{i\theta})|^2 d\beta + \sum_{j=1}^m A_j |\psi_n(z_j)|^2 = 1.$$

Notons que la relation (ii) implique que les points $z_j,\ j \in \{1, .., m\}$ attirent les zéros des polynômes orthonormés $\psi_n(z)$.

Bibliographie

[1] **M. P. Alfaro, M. Bello Hernandez, J. M. Montaner, J. L. Varona,** Some asymptotique properties for orthogonal polynomials with respect to varying measures. *J. Approx. Theory, 135 (2005), 22-34.*

[2] **A. I. Aptekarev,** Asymptotical properties of polynomials orthogonal on a system of contours, and periodic motions of Toda lattices. *Math. USSR Sbornik, 53 (1986), 233-260.*

[3] **M. Bello Hernandez and G. Lopez Lagomazino,** Ratio and relative asymptotics of polynomials orthogonal on an arc of the unit circle. *Journ. Approx. Theory 92 (1998). 216-244.*

[4] **M. Bello Hernandez, F. Marcellan, J. Minguez Ceniceros,** Pseudo-uniform convexity in H^p and somme extrémal problems on Sobolev spaces, *Complex Variables Theory and Application, 48 (2003), 429-440.*

[5] **M. Bello Hernandez, J. Minguez Ceniceros,** Asymptotiques for extrémal polynomials with varying measures, *Electronic Transactions on Numerical Analysis, 19 (2005). 29-36.*

[6] **S. N. Bernstein,** Sur les polynômes orthogonaux relatifs à un segment fini I, II, *J. Math. Pures Appl. 9 (1930), 127-177; 10 (1931), 219-286.*

[7] **B.de la Calle Ysern, G. Lopez Lagamasino,** *S*trong asymptotiques of orthogonal polynomials with varying measures and Hermite-Padé approximants, *Journ.of Comput. appl Math. 99 (1998) 91-103.*

[8] **J. B. Conway,** "Functions of one complex variable". *Springer-Verlag. New York (1973).*

[9] **S. Denisov and S. Kupin,** Asymptotics of the orthogonal polynomials for the Szegö class with a polynomials weight, *J. Approx. Theory, 134 (2006) 8-28.*

[10] **JP. Gasper and F. Cyrot-Lackman**, Denstity of state from moment Applications to the impurity band, *J. Phys, Solid State Phy, 6 (1973) 3077-3096.*

[11] **Ya. L. Geronimus,** Some extrémal problems in $L_p(\sigma)$ spaces. *Math. Sbornik. 31 (1952) 3-26 [In Russian].*

[12] **Ya. L. Geronimus, "**Polynomials orthogonal on a circle and interval". *Pergamon Press New York (1960).*

[13] **A. A. Gonchar,** On the convergence of Pade approximants for some classes of meromorphic functions, *Mat. Sb. 97(139) (1975), 607-629.*

[14] **A. A. Gonchar and G. Lopez ,** On Markov's theorem for multi-point Pade approximations, *Mat. Sb. 105(147) (1978), 512-524.*

[15] **G. H. Hardy,** On the mean modulus of an analytic function. *Proc. London Mat. Soc. 14 (1915) 269-277.*

[16] **V. Heine,** Electronic structure from the point of veiw of the local atomic environment, *Solid State Phy, 34, (1980), Academic press, New York.*

[17] **K. Hoffman,** "Banach spaces of analytic functions". *Englewood Cliffs. N.J-Prentice-Hall. Inc. (1962).*

[18] **V. A. Kaliaguine,** A note on the asymptotics of orthogonal polynomials on a complex arc : the case of a measure with a discrete part. *J. Approx. Theory, 80(1995), 138-145 .*

[19] **V.A., Kaliaguine,** On asymptotiques of L_p extrémal polynomials on a complex curve $(0 < p < \infty)$, *J. Approx. Theory, 74 (1993), 226-236.*

[20] **V. A. Kaliaguine and A. A. Kononova,** Strong asymptotics for polynomials orthogonal on a system of complex arcs and curves : Szegö condition on and a mass

points off the system, *Publication du Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Optimisation de Lille I, ANO 410, (2000), pp :1-17.*

[21] **M. V. Keldysh**, Selected papers, *Academic press. Moscow, 1985. [in Russian]*

[22] **Khaldi. R and Benzine. R,** On a generalization of an asymptotic formula of orthogonal polynomials. *International Journal of Applied Mathematics. 4 (2000) 261-274.*

[23] **R. Khaldi,** Strong asymptotiques for L_p extremal polynomials off a complex curve, *J. Appl. Math. 2004 (2004), no 5, 371-378.*

[24] **R. Khaldi,** Strong asymptotiques of L_p extremal polynomials off the unit circle. *Demonstratio Math. Vol. 38, No.3, (2005), 623-632.*

[25] **R. Khaldi,** Szegö asymptotic of extrémal on the segment $[-1, +1]$. The case of a measure with finite discrete part. *Georgian Mathematical Journal, vol. 14 (2007), N°4, 673-680.*

[26] **R. Khaldi and F. Aggoune,** On extremal polynomials on a system of curves and arcs. *J. Eng. Appl. Sc, Vol. 2, No.2, (2007), 372-376.*

[27] **R. Khaldi and F. Aggoune,** extremal polynomials with varying measures, *Inter. Math, For, Vol. 2, No.39, (2007), 1927-1934.*

[28] **R. Khaldi and F. Aggoune,**On the asymptotics of orthogonal polynomials on the curve with a denumbrable mass points, *Rev. Ana. Num. Thé. Approx, Tome. 36 (2007), N°* 1, 89-95.

[29] **A. Kolmogorov et S. Fomine,** "Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle". *Editions Mir. Moscou (1977).*

[30] **P. Koossis,** "Introduction to H^p Spaces". *London Math. Soc. Lecture Notes Series. Vol 40. Cambridge Univ. Press, Cambridge (1980).*

[31] **P. P. Korovkin,** On polynomials orthogonal on a rectifiable curve with respect to a weight function. *Math. Sbornik. 9 (1941) 469-484 [In Russian].*

[32] **M. G. Krein,** On generalisation of some investigations of G. Szegö. V. Smirnoff and A. Kolmogorov. *C. R. (Doklad) Acad. Sci. URSS. 46 (1945) 91-94.*

[33] **X. Li and K. Pan,** Asymptotics of L_p extrémal polynomials on the unit circle. *J. Appr. Theory, 67 (1991) 270-283.*

[34] **X. Li and K. Pan,** Asymptotic behavior of orthogonal polynomials corresponding to measure with discrete part off the unit circle. *Journal of Approximation Theory. 79 (1994) 54-71.*

[35] **D. S. Lubinsky and E. B. Saff,** Strong Asymptotics for L_p-extrémal Polynomials $(1 < p)$ Associated with Weight on $[-1, 1]$, *Lecture Notes in Math. 1287 (1987), 83-104.*

[36] **F. Marcellan et P. Maroni,** Sur l'adjonction d'une masse de Dirac à une forme régulière et semi classique. *Ann. Math. Pura Appl., IV, Ser. 162 (1992). 1-22.*

[37] **F. Nazarov, A. Volberg, and P. Yuditskii,** Asymptotics of orthogonal polynomials via the Koosis theorem, *Math. Res. Lett. 13 (2006), no. 6, 975–983.*

[38] **P. Nevai,** Orthogonal Polynomials, *Mem. Amer. Math. Soc. 213 (1979).*

[39] **P. Nevai,** "Orthogonal Polynomials. Theory and Practice," *NATO ASI Series, Series C : Math, and Physical Sciences, Vol, 294, Kluwer, Dordrecht, 1990.*

[40] **M. Nuttal and S. R. Singh**, Oorthogonal polynomials and Pade"approximations associated with a systems of arcs, *J.Approx. Theory 21 (1977), pp :1-42.*

[41] **F. Peherstorfer and P. Yuditskii,** Asymptotics of orthogonal polynomials in the presence of a denumerable set of mass points, *Pro. Amer. Math. Soc., 11 : (2001) 3213-3220.*

[42] **E. A. Rakhmanov,** On the asymptotics of ratio of orthogonal polynomials I, *Math. USSR Sb. 32 (1977). 199-213.*

[43] **E. A. Rakhmanov,** On the asymptotics of ratio of orthogonal polynomials II, *Math. USSR Sb. 46 (1983). 105-117.*

[44] **T. G. Rivlin,** Best uniform approximation by polynomials in the complex plane. in "Approximation Theory III" (E. W. Cheney, Ed.), pp. 75-86. Academic Press, New York, 1980.

[45] **W. Rudin,** "Real and Complex Analysis ," *McGraw-Hill, New York, 1976.*

[46] **V. J. Smirnov and N. A. Lebedev,** "The Constructive Theory of Functions of a complex Variable," *Nauka, Moscow, 1964 [in Russian]; M.I.T. Press, Cambridge, MA, 1968 [Engl. transl.].*

[47] **V. J. Smirnov,** Sur la théorie des polynômes orthogonaux à une variable complexe, *Journal de la Société Physico-Mathématique de Leningrad, Vol. 2 (1928), pp. 155-179.*

[48] **V. J. Smirnov,** Sur les formules de Cauchy et de Green et quelques problèmes qui s'y rattachent, *Bulletin de l'Académie des Sciences de L' U.R.S.S., 1932, pp.337-372.*

[49] **P. Souetine,** Polynômes orthogonaux sur un contour. *Russian Math. Surveys. T. 21 (1966) [En Russe].*

[50] **H. Stahl and V. Totik,** General orthogonal polynomials, *Vol. 43, Cambridge university press (1992).*

[51] **Szegö. G,** Uber die Enttwickelung einer analytischen Funktion nach den polynômen einers orthogonal systems. *Mathematische Annalen. 82 (1921) 188-212.*

[52] **Szegö. G,** Uber Orthogonale polynôme die zu einer gegebenen Kurve der Komplexen Ebene gehoren. *Mathematische zeitchrift. 9 (1921) 218-270.*

[53] **Szegö. G and Grenander. U,** Toeplitz forms and their applications. *Berkley Los Angeles (1958).*

[54] **G. Szegö,** "Orthogonal Polynomials". *4th ed. Amer. Math. Soc. Colloquium. Publ. ed. American Math. Society, Providence, RI. 23 (1975).*

[55] **J. P. Tiran,** and DETAILLE, C. Chebychev polynomials on circular arc in the complex plane, *preprint, Namur University, Belgium, 1990.*

[56] **V. Totik**, Weighted Approximation with Varying Weight, *Lecture Notes in Math.,Vol. 1569, Springer-Verlag, Berlin, 1994.*

[57] **V. S. Vidensky,** Uniform approximation in the complex plane. *Uspehi Math. Nauk. 11, No. 5 (1956), 169-175. [In Russian]*

[58] **J. L. Walsh,** Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain, *3th ed., American Math. Society Colloquium Publications, Vol. XX, Amer. Math. Society, Providence 6, Rhode Island, 1960.*

[59] **H. Widom,** Extrémal polynomials associated with a system of curves in the complex plane, *Adv. in Math. 3 (1969), 127-232.*

[60] **Zygmund. A,** Trigonometric series. *2nd ed. New york. Cambridge University Press (1959).*