

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma



Faculté de Mathématiques, Informatiques et Sciences de la Matière
Département de Mathématiques
Laboratoire de domiciliation Laboratoire de Mathématique et Modélisation

THÈSE
En Vue de l'Obtention du Diplôme de
Doctorat en Troisième Cycle

Domaine : Mathématiques et Informatiques Filière : Mathématiques Appliquée
Spécialité : Equations Différentielles et Applications

Présentée par

TOUATI BRAHIM Noureddine

Intitulée

Etude qualitative de quelques EDPs en temps avec amortissement

Soutenue le : 11 Mai 2025

Devant le Jury composé de :

Nom et Prénom **Grade**

Mr ELLAGGOUNE Fateh	Pr	Univ. De 8 Mai 1945 Guelma	Président
Mr CHAOUI Abderrazek	Pr	Univ. De 8 Mai 1945 Guelma	Encadreur
Mr ZENNIR Khaled	MCA	Univ. de Qassim KSA	Co-encadreur
Mr BELOUL Said	Pr	Univ. de Echahid Hamma Lakhdar El Oued	Examineur
Mr MESBAHI Salim	Pr	Univ. de FERHAT Abbes Setif	Examineur
Mme BEREHAIL Amel	MCA	Univ. De 8 Mai 1945 Guelma	Examineur

Année Universitaire : 2024/2025

Dédicace

À mes chers parents, mes chers professeurs, mes chers amis, mes collègues le plus estimés... À tous ceux qui ont contribué ou m'ont aidé tout au long de ma vie scolaire ou universitaire... À vous tous, j'offre cette thèse de doctorat, que je prie Dieu le Tout-Puissant de l'accepter sincèrement de notre part et qu'Il en fasse bénéficier.

TOUATI BRAHIM NOUREDDINE

ملخص

تعتبر المعادلات التفاضلية الجزئية التطورية واحدة من الركائز الأساسية للرياضيات الحديثة. تتضمن هذه الأطروحة، في جزئها الأول، دراسة عددية لمعادلة بيبهارمونيك غير الخطية المكافئة ذات الدرجة الأعلى، باستخدام عناصر محدودة مختلطة لتقسيم الفضاء، مقترنة بطريقة روث لتقسيم الزمن.

أما الجزء الثاني فقد تضمن دراسة مشكلتين موجيتين في ظل ظروف حدودية مختلفة (ظروف غير محلية، وجود عامل تأخير،...) حيث أثبتنا وجود حلول محلية وكلية مبنية على نموذج فادوقاليركين. النهج وعدم المساواة في الطاقة. لقد أظهرنا أيضاً استقرار الحلول، أحياناً باستخدام نظرية بوريشيف-توميلوف، وأحياناً أخرى باستخدام دالة لياونوف.

الكلمات المفتاحية: معادلة ثنائية التوافقيات المكافئة، مصطلح الذاكرة، النتائج، الصياغة المختلطة، طريقة العناصر المحدودة، معادلة الموجة، مسألة النقل، نهج مجال التردد، نظرية بوريشيف-توميلوف

Résumé

Les EDP évolutives sont considérées comme l'un des piliers fondamentaux des mathématiques modernes. Cette thèse contient, dans sa première partie, une étude numérique d'une équation non linéaire parabolique d'ordre supérieur p -biharmonique, en utilisant les éléments finis mixtes pour la discrétisation de l'espace, combinés avec la méthode de Roth pour la discrétisation du temps.

Quant à sa deuxième partie, elle comprenait une étude de deux problèmes d'ondes sous différentes conditions aux limites (conditions non locales, présence d'un facteur de retard,...) où nous avons prouvé l'existence locale et globale de solutions en se basant sur l'approche du Faedo-Galerkin et les inégalités énergétiques. Nous avons également démontré la stabilité des solutions, tantôt en utilisant le théorème de Borichev-Tomilov, tantôt en utilisant la fonctionnelle de Lyapunov.

Mots-clés : Équation p -biharmonique parabolique, terme mémoire, résultats, formulation mixte, méthode des éléments finis, équation d'onde, problème de transmission, approche du domaine fréquentiel, théorème de Borichev–Tomilov .

Abstract

Evolutionary PDEs are considered as one of the fundamental pillars of modern mathematics. This thesis contains, in its first part, a numerical study of a higher-order parabolic nonlinear p -biharmonic equation, using mixed finite elements for the discretization of space, combined with the Roth method for the discretization of time.

As for its second part, it included a study of two wave problems under different boundary conditions (nonlocal conditions, presence of a delay factor, ...) where we proved the local and global existence of solutions based on the Faedo-Galerkin approach and energy inequalities. We also proved the stability of the solutions, sometimes using the Borichev-Tomilov theorem, sometimes using the Lyapunov functional.

Keywords: Parabolic p -biharmonic equation, memory term, results, mixed formulation, finite element method, wave equation, transmission problem, frequency domain approach, Borichev–Tomilov theorem .

Table des matières

1 Les Préliminaires	6
1.1 Espaces fonctionnels	9
1.2 La méthode des éléments finis	14
1.3 La méthode des éléments finis mixtes	16
1.4 Transmission	18
2 Sur l'étude du problème p biharmonique parabolique dégénéré avec mémoire	27
2.1 Problème semi-discrétisé	29
2.2 Estimations a priori	31
2.3 Formulation Mixte	36
2.4 Discrétisation Complète	38
3 Stabilité forte pour un problème de transmission viscoélastique	41
3.1 Introduction	42
3.2 Bien-fondé	45
3.3 Stabilité forte du système	52
4 Étude de l'existence et comportement de la solution de l'équation des ondes avec termes de retard et de logarithmique	57
4.1 Préliminaires	59
4.2 Existence d'une solution locale	61
4.2.1 Estimates A Priori	63
4.3 Existence Globale	65
4.4 Résultat de stabilité	68

Introduction

Les équations différentielles aux dérivées partielles sont considérées comme l'une des spécialités qui retiennent le plus l'attention des chercheurs, car elles leur permettent de modéliser les phénomènes qui nous entourent et de donner des explications et des solutions aux dilemmes d'autres sciences. Cet intérêt croissant pour les équations aux dérivées partielles inclut leur étude théorique et la tentative de répondre à des questions mathématiques liées à l'existence et à l'unité de la solution, à la régularité la stabilité des solutions, au comportement asymptotique des solutions, à l'explosion(Blow up) des solutions... etc. . C'est d'une part, et d'autre part, les études numériques des EDP ont rencontré un intérêt sans précédent, car les solutions approchées permettent de résoudre d'énormes problèmes dans la réalité (mécanique, pétrole, constructions d'ingénierie complexes, ...). Dans cette thèse, nous tenterons d'éclairer les deux côtés, tantôt à travers une étude théorique des équations d'onde dans différentes conditions, et tantôt à travers des études approchées d'un problème dégénéré parabolique non linéaire d'ordre supérieur en combinant les éléments finis avec la méthode de Roth.

Soit \mathcal{O} un domaine ouvert borné de \mathbb{R}^n , où la frontière $\partial\mathcal{O}$ est Lipschitz-continue, et $I = [0, T]$. Cette thèse examine le problème parabolique dégénéré p-biharmonique intégral-différentiel suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\beta(\varphi)(t, x)}{\partial t} + \Delta_p^2\varphi(t, x) &= f(t, x) - K(t)(\varphi) \quad \text{dans } I \times \mathcal{O}, \\ \varphi &= 0, \quad \nabla\varphi = 0 \quad \text{sur } \Sigma = I \times \partial\mathcal{O}, \\ \varphi(0, x) &= \varphi^0 \quad \text{dans } \mathcal{O}, \end{aligned} \tag{1}$$

Où

$$\Delta_p^2\varphi := \Delta (|\Delta\varphi|^{p-2}\Delta\varphi),$$

Nous détaillerons ses conditions dans le deuxième chapitre.

Durant ces dernières décennies, les Equations aux Dérivées Partielles (EDP) d'ordre élevé ont connu des progrès significatifs. Le problème (2.1) est motivé par des applications en élasticité, notamment dans la modélisation des ondes dans les ponts suspendus (voir [42]). Il

est également-utile pour améliorer la qualité visuelle des images dégradées, particulièrement pour $1 < p < 2$ (voir [58]). Lorsque $p = 2$, le problème devient $\Delta^2 u = f$, modélisant la déformation d'une plaque mince sous une charge perpendiculaire f .

Notre travail explorera le problème parabolique p-biharmonique en intégrant un terme mémoire. Nous appliquerons la méthode de Rothe combinée avec la méthode des éléments finis mixtes (MFE) pour approximer la solution. Les résultats incluent des estimations qualitatives en fonction de p ($p \geq 2$) et une estimation d'erreur optimale soutenue par des évaluations numériques.

Pour ce faire, nous adopterons l'organisation suivante :

- Section 2 : Notations et outils préliminaires,
- Section 3 : Problème semi-discrétisé,
- Section 4 : Estimations a priori, convergence et existence de solutions faibles pour (2.1),
- Section 5 : Formule mixte détaillée,
- Section 6 : Schéma entièrement discret et estimation d'erreur pour φ et ψ ,

Enfin, des tests numériques démontrent l'efficacité de l'approche, a noter que ce travail est publié dans l'article[57].

Certes, l'émergence de la théorie du contrôle est largement associée au développement de la technologie et de l'industrie, en particulier en ce qui concerne la dérivée fractionnaire généralisée de Caputo. La nécessité de réguler ou de maintenir certaines caractéristiques cinématiques des machines ou des objets sous contrôle a conduit à la création d'un cadre mathématique pour la théorie du contrôle.

En théorie du contrôle, on étudie souvent des ensembles d'objets (systèmes) dont le comportement est décrit par une certaine loi. Le problème de contrôle consiste à trouver une méthode permet-tant de modifier le comportement d'un processus pour transférer le système d'un état donné à un autre, tout en satisfaisant des exigences supplémentaires. Ces exigences peuvent inclure :

- une valeur donnée pour le temps de contrôle T ,
- la minimisation du temps de contrôle (problème de vitesse),
- la minimisation d'un critère (problème de contrôle optimal),
- ou la satisfaction de certaines qualités du processus de transition.

S'agissant du le problème de stabilisation, qui analyse la présence d'une solution asymptotiquement stable sur un intervalle de temps infini, est également central. A. M. Lyapunov, l'un des fondateurs de la théorie classique de la stabilité, a établi des bases solides pour

l'analyse mathématique de la stabilité, en particulier pour les systèmes hyperboliques.

Quant aux problèmes de transmission pour les équations hyperboliques, ils ont été étudiés par Dautray et Lions [28], qui ont prouvé l'existence et la régularité des solutions pour le problème linéaire. Par la suite, dans [52], des auteurs ont étudié le problème de transmission des ondes viscoélastiques avec un amortissement dans la seconde équation, analysant la propagation des ondes dans des matériaux composés d'éléments élastiques et viscoélastiques. Ils ont montré que la partie viscoélastique produit une décroissance exponentielle des solutions.

Dans cet travail, nous utiliserons des méthodes modernes pour étudier le modèle suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - \tau_1 u_{xx}(x, t) + \int_0^t g(t-s) u_{xx} ds = 0 & \text{dans } (0, l_0) \times (0, +\infty), \\ \rho v_{tt}(x, t) - \tau_2 v_{xx}(x, t) = 0 & \text{dans } (l_0, L) \times (0, +\infty), \end{cases} \quad (2)$$

Nous détaillerons ses conditions dans le le troisième chapitre, a noter que ce travail est publié dans l'article [56].

Cette introduction présentera alors une analyse d'une équation d'ondes viscoélastique avec un terme de retard, intégrant une non-linéarité logarithmique.

Le problème considère un domaine borné $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ (avec $N \geq 1$) et implique un amortissement viscoélastique, un terme d'amortissement avec retard temporel, ainsi qu'un terme source logarithmique. Les conditions initiales et aux limites sont spécifiées, et le problème est étudié sous certaines hypothèses sur le noyau g , représentant l'effet de mémoire et le problème est donné sous la forme.

$$\begin{cases} \vartheta_{tt} + \vartheta + \Delta^2 \vartheta - \int_0^t g(t-s) \Delta^2 \vartheta(s) ds + \mu_1 \vartheta_t(x, t) + \mu_2 \vartheta_t(x, t - t_0) = \alpha \vartheta \ln \vartheta & \text{dans } \mathcal{O} \times (0, \infty), \\ \vartheta(x, t) = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{O} \times [0, \infty), \\ \vartheta(x, 0) = \vartheta_0(x), \quad \vartheta_t(x, 0) = \vartheta_1(x) & \text{dans } \mathcal{O}, \\ \vartheta_t(x, -t_0) = f_0(x, t_0) & \text{dans } \mathcal{O}, \end{cases} \quad (3)$$

Nous détaillerons ses conditions dans le le Quatrième chapitre.

Les principaux thèmes incluent :

1. Problèmes viscoélastiques, issus des travaux de Dafermos sur les taux de décroissance, ces problèmes ont gagné en importance en raison de leurs applications en science des matériaux. Les recherches se sont concentrées surtout sur l'existence des solutions, leur comportement, ainsi que sur les relations constitutives et les prévisions de durée de vie des matériaux viscoélastiques.

2. Non-linéarité logarithmique, mise en évidence pour sa pertinence dans des domaines tels que la mécanique quantique, la cosmologie et la physique nucléaire, cette étude examine des équations où des termes logarithmiques apparaissent naturellement. Des travaux antérieurs ont établi l'existence et la stabilité des solutions pour des équations connexes.

3. Termes de retard dans les EDP, les effets de retard temporel introduisent des défis tels que l'instabilité potentielle. Des études précédentes ont démontré comment des conditions spécifiques ou des mécanismes de contrôle supplémentaires peuvent stabiliser des systèmes avec retard. L'importance de conditions comme $\mu_2 < \mu_1$ pour la stabilité énergétique est discutée.

L'analyse reposera de ce fait sur des hypothèses concernant le noyau g (par exemple, la monotonie et les propriétés de décroissance) pour garantir la stabilité et le caractère bien posé du problème. Et l'introduction prépare le terrain pour les sections suivantes, qui s'appuient sur ces hypothèses pour établir les principaux résultats.

Chapitre 1

Les Préliminaires

La méthode mixte des éléments finis H^1 -Galerkin est une méthode développée pour les éléments finis mixtes. Cette méthode, proposée, a l'avantage de ne pas soumettre le choix des espaces d'éléments finis aux conditions de cohérence LBB.

Nous nous référons à quelques références intéressées par l'étude de problèmes en utilisant la méthode des éléments finis mixtes H^1 -Galerkin [20, 21, 47, 48, 62].

Dans la référence [19], Che et ses collaborateurs, ont proposé la méthode des éléments finis mixtes H^1 -Galerkin pour l'équation suivante de type viscoélasticité non linéaire, basée sur la méthode H^1 -Galerkin et la méthode des éléments mixtes étendus.

$$\begin{aligned} u_{tt} - \nabla \cdot (a(x, u)\nabla u_t + b(x, u)\nabla u) &= f(x, t), (x, t) \in \Omega \times J, \\ u(x, t) &= 0, (x, t) \in \partial\Omega \times J \\ u(x, 0) &= u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x) \quad x \in \Omega \end{aligned}$$

Où $J = (0; T]$ avec $0 < T < \infty$.

Les données fournies $u_0(x), u_1(x), a(x, u), b(x, u)$ et f sont suffisamment régulières.

Dans la référence [49], Pani a étudié et analysé la méthode des éléments finis mixtes H^1 -Galerkin pour les équations aux dérivées partielles paraboliques suivantes avec des parties elliptiques non auto-adjointes.

$$\begin{aligned} p_t - (ap_x)_x + b_x + cp &= f(x, t), (x, t) \in (0, 1) \times J \\ p(0, t) &= p(1, t), t \in \bar{J} \\ p(x, 0) &= p_0, x \in (0, 1) \end{aligned}$$

Où $J = (0; T]$ avec $T < 1$, les coefficients a, b, c sont des fonctions régulières dépendant de x et a est borné inférieur par $a_0 \geq 0$.

La méthode de Rothe est un outil efficace qui peut être cité dans la discrétisation des équations d'évolution linéaires ou non linéaires.

celle de Rothe, ou méthode des lignes, est l'une des méthodes les plus populaires pour résoudre les équations aux dérivées partielles; cette méthode est utilisée dans la discrétisation temporelle des équations d'évolution où les dérivées par rapport à une variable sont remplacées par les quotients de différence correspondants, ce qui conduit finalement à des systèmes d'équations différentielles pour les fonctions des variables restantes.

La méthode de Rothe a été présentée par E. Rothe en 1930 et a été adoptée et développée par de nombreux auteurs, par exemple O.A. Ladyzenskaja [38, 39] et K. Rektorys [50, 51] pour résoudre des problèmes paraboliques linéaires et quasi-linéaires du second ordre.

Récemment, la méthode de Rothe a été étudiée pour les équations hyperboliques linéaires et quasi-linéaires, comme on peut le voir dans [11], elle s'applique également à différents types de problèmes, Le schéma de discrétisation de la méthode de Rothe est donné comme suit :

Nous subdivisons l'intervalle $[0, T]$ en n sous-intervalles de longueur $\tau = \frac{T}{n}$ et nous notons par u_h^i les valeurs de u_h à $t = i\tau$, pour $i = 1, \dots, n$.

Nous définissons les premières et deuxièmes différences finies comme : $\delta p_h^i = \frac{p_h^i - p_h^{i-1}}{\tau}$ et $\delta^2 p_h^i = \frac{\delta p_h^i - \delta p_h^{i-1}}{\tau}$ pour tout $t = t_i$.

Nous obtenons un système formé de n équations en x où l'inconnue est $u^i(x)$, ainsi nous approximations le problème posé à tout point $t = t_i$, pour tout $i = \overline{1, n}$, par un nouveau problème discret.

Nous déterminons les fonctions u^n solutions du système obtenu.

Nous construisons les fonctions de Rothe définies par :

$$u^n = u^{i-1} + (t - t_{i-1}) \delta u^i \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i], \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\delta u^n = \delta u^{i-1} + (t - t_{i-1}) \delta^2 u^i \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i], \quad 1 \leq i \leq n$$

Et les fonctions auxiliaires

$$\bar{u}^n = \begin{cases} u^i & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ u^0 & t \in [-\tau, 0] \end{cases}$$

Dans ce chapitre, nous déterminons les notions fondamentales de l'analyse fonctionnelle, celles des espaces de Sobolev et des espaces de Bochner.

Ensuite, nous rappelons également les définitions, propriétés et théorèmes fondamentaux pour ce travail : Cauchy-Lipschitz, Lax-Milgram, inégalité de Young, inégalité de Gronwall, etc. Nous donnons également un aperçu des éléments finis et des éléments finis mixtes.

La plupart de ces rappels sont principalement tirés de livres. [5, 13, 10, 37].

1.1 Espaces fonctionnels

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^d avec $d \geq 1$ et T un nombre réel strictement positif :

Espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.1. [10] Pour $1 \leq p < \infty$, on note par $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables de Ω et u dans \mathbb{R} telles que :

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$$

Avec la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Remarque 1.1. Si $p = 2$, $L^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables dont le carré est intégrable sur Ω , pour le produit scalaire défini par :

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx.$$

Avec la norme

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Remarque 1.2. Si $p = \infty$, on définit l'espace $L^\infty(\Omega)$ comme l'espace de toutes les fonctions u qui sont essentiellement bornées sur Ω , avec la norme correspondante

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{esssup}_{x \in \Omega} |u(x)| = \inf\{C \geq 0 : |u(x)| \leq C \text{ pp over } \Omega\}$$

Définition 1.2. On dit que u , une fonction de $L^2(\Omega)$, est faiblement dérivable dans $L^2(\Omega)$ s'il existe $w_i \in L^2(\Omega)$ pour tout $i = 1, \dots, N$, tels que :

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} w_i v, \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega)$$

Où $\frac{\partial u}{\partial x_i} = w_i$ et $C_c^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact sur Ω .

Espaces de Sobolev

Définition 1.3. [5] Pour un entier $m \geq 0$, l'espace $H^m(\Omega)$ est l'espace de Sobolev d'ordre m , construit à partir de $L^2(\Omega)$:

$$H^m(\Omega) = \{u : u \in L^2(\Omega) \text{ et, } \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } |\alpha| \leq m, D^\alpha u \in L^2(\Omega)\}$$

ici, D^α est la dérivée partielle faible.

$H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)$$

et pour la norme

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Proposition 1.1. Si $m = 1$, l'espace de Hilbert $H^1(\Omega)$ est équipé du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 1.4. Nous posons

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\},$$

c'est l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

Remarque 1.3. L'espace $H^{-1}(\Omega)$ est le dual de l'espace $H_0^1(\Omega)$.

Le produit de dualité entre $H_0^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$ est défini comme suit :

$$\langle u, \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \varphi(x)u(x) dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (1.13)$$

Définition 1.5. Pour $1 \leq p < \infty$ et $m \in \mathbb{N}$, nous définissons l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ comme suit :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N} \text{ tel que } |\alpha| \leq m\}$$

avec la norme

$$\|u\|_{m,p} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

Remarque 1.4. Si $p = 2$, on a :

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega).$$

Quelques propriétés et théorèmes fondamentaux

Lemma 1.1. (Inégalité de Young)

Si $a, b \geq 0$ et $1 \leq p, q \leq \infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors :

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

Lemma 1.2. (Inégalité ϵ)

Pour tout $\epsilon \geq 0$ et si $a, b \geq 0$, alors

$$2ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{\epsilon}b^2$$

Ou en d'autres termes

$$2ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{\epsilon}b^2$$

Et $C_\epsilon = C(\epsilon^{-1})$ avec ϵ petit.

Lemma 1.3. Soit $p > 2$, Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$(x - y) (|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y) \geq \frac{2|y - x|^p}{p(2^{p-1} - 1)}$$

Lemma 1.4. Pour tout $\psi \in L^q(\mathcal{O})$, on a :

$$\| |\psi|^{p-1} \|_{L^q} = \|\psi\|_{L^p}^{p-1}.$$

Lemma 1.5. (Principe de sommation d'Abel)

$$2a(a - b) = a^2 - b^2 + (a - b)^2, \quad \forall a, b$$

Pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, il existe une constante $C(\Omega)$ telle que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Theoreme 1.1. [10] (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Pour tous $u, v \in L^2(\Omega)$, nous avons :

— Forme continue

$$\left| \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |v(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

— Forme discrète

$$\left| \sum_{i=1}^N u_i v_i dx \right| \leq \left(\sum_{i=1}^N |u_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N |v_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Theoreme 1.2. (Inégalité de Hölder) C'est une généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Pour $1 \leq p, q < \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, nous avons :

— Forme continue

$$\left| \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |v(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

— Forme discrète

$$\left| \sum_{i=1}^N u_i v_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^N |u_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^N |v_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Theoreme 1.3. (Inégalité de Triangular)

$$\left(\int_{\Omega} (u(x) + v(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\Omega} (u(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Omega} (v(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Lemma 1.6. [18] (Inégalité de Gronwall, forme continue) Soient u, v, w des fonctions à valeurs réelles sur $I = [a, +\infty]$. Nous supposons que u et w sont des fonctions continues, que $u(t) \geq 0$, que v est croissante et que $w(t)$ satisfait l'inégalité suivante :

$$w(t) \leq v(t) + \int_a^t u(s)w(s)ds, \quad \forall t \in [a, +\infty]$$

Alors

$$w(t) \leq v(t) \exp \left(\int_a^t u(s) ds \right), \forall t \in [a, +\infty]$$

Lemma 1.7. [18] (Inégalité de Gronwall, forme discrète)

Soit u_i, w_n des réels non négatifs et $v_n \geq v_{n-1}$, si

$$w_n \leq v_n + \sum_{i=0}^{n-1} u_i w_i, \quad \forall n \geq 0$$

alors

$$w_n \leq v_n \exp \left(\sum_{i=0}^{n-1} u_i \right), \quad \forall n \geq 0$$

Theoreme 1.4. [5] (formule de green)

Soit Ω un domaine ouvert régulier et borné de classe C^2 , et $n(x)$ son normal extérieur.

Soit $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^2(\Omega)$, nous avons

$$\int_{\Omega} \Delta u v dx = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma.$$

Définition 1.6. On dit que $a(.,.)$ est une forme bilinéaire continue si elle satisfait à

$$\exists M > 0 \quad \forall u, v \in V : |a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\|. \quad (1.1)$$

Définition 1.7. (Coercivité d'une forme bilinéaire $a(.,.)$)

On dit qu'une forme bilinéaire $a(.,.)$ est coercive si elle satisfait à

$$\exists \alpha > 0 \quad \forall u \in V : |a(u, u)| \geq \alpha \|u\|^2 \quad (1.2)$$

Theoreme 1.5. (Lax-Milgram) Soit V un espace de Hilbert, et soit $a(.,.) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive, et $L(\cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue.

Alors, il existe un unique $u \in V$ tel que :

$$\forall v \in V, a(u, v) = l(v)$$

1.2 La méthode des éléments finis

Introduction

La méthode des éléments finis est l'un des outils numériques qui repose sur la formulation variationnelle (et donc sur les solutions faibles), ce qui signifie que cette méthode propose de créer un algorithme discret basé sur des formules faibles.

Elle permet ainsi de rechercher une solution approximative à un problème différentiel partiel sur un domaine compact avec des conditions aux limites ou à l'intérieur du domaine compact.

La méthode des éléments finis remplace l'espace des fonctions test de dimension infinie dans la formulation variationnelle par un espace de fonctions test approximatives de dimension finie. Ensuite, elle aborde des aspects tels que l'existence et l'unicité de la solution, la stabilité et la convergence des méthodes numériques, ainsi que l'estimation de l'erreur entre la solution exacte et la solution approximative. Pour une explication plus détaillée de cette méthode, voir [41].

Principe général de la méthode des éléments finis : résolution d'un système matriciel

L'approche générale de la méthode des éléments finis est la suivante.

Soit un domaine ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$, avec une frontière $\partial\Omega$. La formulation variationnelle de l'équation différentielle partielle (EDP) est généralement formulée comme suit : Trouver $u \in V$ tel que :

$$a(u, v) = l(v), \forall v \in V$$

Pour trouver la solution approchée de u , nous utilisons une approximation interne, comme indiqué ci-dessous :

Soit Υ_h une partition de Ω constituée d'un nombre fini d'éléments \mathcal{T} , telle que :

$$\begin{aligned}\bar{\Omega} &= \cup \mathcal{T} \in \Upsilon_h \bar{\mathcal{T}} \\ \mathcal{T} \cap \mathcal{L} &= \emptyset \dots \mathcal{T} \neq \mathcal{L}\end{aligned}$$

Nous notons $h_{\mathcal{T}} := \text{diam } \mathcal{T}$ le diamètre de \mathcal{T} et $h := \max_{\mathcal{T} \in \Upsilon_h} h_{\mathcal{T}}$ le pas de la maille. Grâce à cela, nous allons créer un espace d'approximation $V_h \subset V$ de dimension finie. Ainsi, V_h sera l'ensemble des fonctions continues sur Ω et affines sur chaque élément de la maille.

Par exemple, en dimension 1, si nous choisissons Ω comme l'intervalle $]a, b[$, nous divisons cet intervalle en $N + 1$ sous-intervalles de longueur $h_i = x_{i+1} - x_i$ pour $1 \leq i \leq N$, et nous prenons $h = \max_{1 \leq i \leq N} h_i$.

L'espace d'approximation V_h peut être déterminé comme suit :

$$V_h = \left\{ \Phi_h \in C^0([a, b]) \text{ such that } \Phi_h|_{[x_i, x_{i+1}]} \text{ is linear } \forall i = \overline{1, N+1} \right\}$$

et que $\{\Phi_i(x)\}_{i=1}^{N+1}$ soient les fonctions de base pour l'espace V_h , choisies comme suit :

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

et

$$\Phi_i(x_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{si } k = i \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour la deuxième dimension, nous choisissons Ω comme un rectangle (par exemple : $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$) et nous prenons Υ_h comme une triangulation constituée de triangles \mathcal{T} tels qu'aucun nœud de chaque triangle ne se trouve à l'intérieur d'un côté d'un autre triangle. L'espace d'approximation V_h peut être déterminé comme suit :

$$V_h = \left\{ \Phi_h \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ tel que } \Phi_h|_{\mathcal{T}} \text{ est un polynôme de degré un } \forall \mathcal{T} \in \Upsilon_h \right\}$$

où sa base est déterminée par les fonctions $\{\Phi_j\}_{j=1}^N$ qui satisfont :

$$\phi_j(x_k, y_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{si } k = j \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le problème approximatif dans le cas général est écrit comme suit : Trouver $u_h \in V_h$ tel que :

$$a(u_h, v_h) = l(v_h), \forall v_h \in V_h \tag{1.3}$$

Soit $\{\phi_j\}_{j=1}^N$ les fonctions de base pour l'espace V_h .

Nous écrivons l'approximation u_h de u sous la forme suivante :

$$u_h = \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j \in V_h$$

Par conséquent, le problème (1.3) devient : Trouvez $\bar{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N]$ tel que :

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j a(\phi_j, v_h) = l(v_h), v_h \in V_h$$

en tenant compte des linéarités de $a(\cdot, \cdot)$ et $l(\cdot)$, trouvez $\bar{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N]$ tel que :

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j a(\phi_j, \phi_k) = l(\phi_k), \forall k = 1, \dots, N$$

Ainsi, on obtient le système linéaire à résoudre

$$\begin{pmatrix} a(\phi_1, \phi_1) & a(\phi_1, \phi_2) & \cdots & a(\phi_1, \phi_N) \\ a(\phi_2, \phi_1) & a(\phi_2, \phi_2) & \cdots & a(\phi_2, \phi_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\phi_N, \phi_1) & a(\phi_N, \phi_2) & \cdots & a(\phi_N, \phi_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l(\phi_1) \\ l(\phi_2) \\ \vdots \\ l(\phi_N) \end{pmatrix}$$

Convergence

Lemma 1.8. (Lemme de Céa.) Soit la solution exacte u et la solution approximative u_h .

Nous avons l'erreur suivante :

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|.$$

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} d(u, v_h)$$

Ici, M et α sont des constantes qui satisfont 1.1 et 1.2 respectivement, et d est la distance induite par la norme $\|\cdot\|$.

1.3 La méthode des éléments finis mixtes

Introduction

Parmi les méthodes numériques proposées pour résoudre les équations aux dérivées partielles, la méthode des éléments finis mixtes est considérée comme l'une des méthodes préférées par rapport aux méthodes traditionnelles, car l'un de ses avantages est la préservation

des grandeurs physiques telles que la quantité de masse, la température et la quantité de mouvement.

Cette méthode permet de résoudre des problèmes mixtes dont les inconnues sont deux fonctions représentant, d'une part, l'état du système considéré, et d'autre part, un multiplicateur de Lagrange associé à une contrainte que l'état doit satisfaire.

Principe Général de la Méthode des Éléments Finis Mixtes : Résolution d'un Système de Matrice

Soit V et W deux espaces de Hilbert, le problème variationnel mixte s'énonce comme suit : Trouver $(u, w) \in V \times W$ tel que :

$$\begin{cases} a(u, v) + c(w, v) = l_V(v) & \forall v \in V \\ c(u, w) = 0 & \forall w \in W \end{cases}$$

Ici, $a(\cdot, \cdot)$ et $c(\cdot, \cdot)$ sont deux formes bilinéaires sur $V \times V$ et $V \times W$ respectivement, et $l_V(\cdot)$ est une forme linéaire sur V .

Theoreme 1.6. (*Inf-sup stabilité*) Pour $u \in V$, nous avons

$$\gamma \leq C \inf_{0 \neq \eta \in W} \sup_{0 \neq u \in V} \frac{c(u, \eta)}{\|u\|_V \|\eta\|_W}$$

Ce théorème implique que le problème mixte est bien posé.

En d'autres termes, il admet une solution unique $(u, w) \in V \times W$ qui satisfait $\|u\|_V^2 + \|w\|_W^2 \leq \lambda \|f\|_V^2$, où λ est une constante positive.

Pour l'approximation interne, nous substituons les deux espaces V et W , qui ont souvent une dimension infinie, par deux sous-espaces V_h et W_h dont la dimension est finie.

Nous allons également essayer d'obtenir une solution approximative au problème mixte suivant :

Trouver $(u_h, w_h) \in V_h \times W_h$ tel que :

$$\begin{cases} a(u_h, v_h) + c(w_h, v_h) = l_V(v_h) & \forall v_h \in V_h \\ c(u_h, \eta_h) = 0 & \forall \eta_h \in W_h \end{cases}$$

Ainsi, nous pouvons écrire le problème mixte approximatif sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} A_h & C_h^T \\ C_h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_h \\ w_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_h \\ 0 \end{pmatrix}$$

Où $A_h : V_h \rightarrow V_h$ et $C_h : V_h \rightarrow W_h$ sont des opérateurs définis comme suit :

$$(A_h u_h, v_h)_V = a(u_h, v_h) \text{ et } (C_h \eta_h, v_h)_W = c(\eta_h, v_h) \forall u_h, v_h \in V_h, \forall \eta_h \in W_h$$

$$\text{Et } (f_h, v_h)_V = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Convergence

$c(., .)$ vérifie la condition inf-sup sur $V_h \times W_h$, c'est-à-dire que le problème mixte approximé est bien posé. Nous affirmons l'existence et l'unicité de la solution à ce problème mixte approximé, ainsi que la convergence vers la solution du problème mixte. Cette convergence est expliquée dans le théorème suivant.

Theoreme 1.7. *Il existe une constante positive C indépendante de h telle que :*

$$\|u - u_h\|_V + \|w - w_h\|_W \leq C \left\{ \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V + \inf_{\eta_h \in W_h} \|w - \eta_h\|_W \right\}$$

1.4 Transmission

Dans cette section, nous introduisons des opérateurs non bornés et rassemblons certaines propriétés qui seront fréquemment utilisées.

Opérateurs Linéaires Non Bornés sur les Espaces de Banach

Soient X et Y deux espaces de Banach.

Définition 1.8. *Un opérateur linéaire non borné de X dans Y est une application linéaire $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ définie sur un sous-espace $D(A) \subset X$ avec des valeurs dans Y . L'ensemble $D(A)$ est appelé le domaine de l'opérateur A .*

Si $X = Y$, nous dirons simplement que A est un opérateur linéaire non borné sur X .

Définition 1.9. *On dit que A est borné si $D(A) = X$ et s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que :*

$$\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X; \forall x \in X$$

1.4 Transmission

L'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés de X vers Y est noté par $\mathcal{L}(X, Y)$. De plus, l'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés de X vers X est noté par $\mathcal{L}(X)$. La norme d'un opérateur linéaire borné est définie par :

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$$

Définition 1.10. Soit $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire non borné. Nous définissons

$$\text{Graph de } A : G(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset X \times Y$$

$$\text{Range de } A : R(A) = \{Ax : x \in D(A)\} \subset Y$$

$$\text{noyau de } A : N(A) = \{x \in D(A) : Ax = 0\} \subset X$$

Définition 1.11. Un opérateur linéaire non borné A est un opérateur fermé si son graphe $G(A)$ est fermé dans $X \times Y$.

Définition 1.12. Soit $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire non borné. On dit que A est un opérateur défini densément dans X , ou que A est un opérateur avec un domaine dense dans X , si $D(A)$ est dense dans X , c'est-à-dire $\overline{D(A)} = X$.

Définition 1.13. Soit $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ un opérateur défini densément dans X . L'opérateur adjoint de A est l'opérateur $A^* : D(A^*) \subset Y' \rightarrow X'$ défini par :

$$D(A^*) = \{y \in Y' : \exists C \geq 0 \text{ tel que } \langle Ax, y \rangle_{Y \times Y'} \leq C \|x\|_x \text{ pour tout } x \in D(A)\}$$

et

$$\langle x, A^*y \rangle_{X \times X'} = \langle Ax, y \rangle_{Y \times Y'} \forall x \in D(A), \forall y \in D(A^*)$$

Définition 1.14. Un opérateur linéaire borné $A : X \rightarrow Y$ est dit compact si $A(B_X)$ a une fermeture compacte dans Y .

L'ensemble de tous les opérateurs compacts de X dans Y est noté $K(X, Y)$. De plus, l'ensemble $K(X, X)$ est noté $K(X)$.

Theoreme 1.8. (Alternative de Fredholm). Soit $A \in K(X)$. Alors :

1. $N(I - A)$ est de dimension finie.
2. $N(I - A)$ est fermé et $R(I - A) = N(I - A^*)^\perp$.
3. $N(I - A) = 0 \Leftrightarrow R(I - A) = X$.
4. $\dim N(I - A) = \dim N(I - A^*)$.

Remarque 1.5. L'alternative de Fredholm traite de la résolubilité de l'équation $u - Au = f$.

L'ensemble résolvant et le spectre des opérateurs linéaires

Soit X un espace de Banach, et A un opérateur fermé non borné sur X .

Définition 1.15. *L'ensemble résolvant de A est donné par :*

$$\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - A : D(A) \rightarrow X \text{ est bijectif} \}$$

et son spectre par :

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

Si $\lambda \in \rho(A)$, alors $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est appelé le résolvant de A (à λ).

Remarque 1.6. *Les nombres dans $\rho(A)$ sont appelés valeurs régulières de A .*

Theoreme 1.9. *Les ensembles $\rho(A)$ et $\sigma(A)$ sont respectivement ouverts et fermés.*

Définition 1.16. *Le spectre ponctuel de A est défini par :*

$$\begin{aligned} \sigma_p(A) &= \{ \lambda \in \mathbb{C} : \exists v \in D(A) \setminus \{0\} : Av = \lambda v \} \\ &= \{ \lambda \in \mathbb{C} : N(\lambda I - A) \neq \{0\} \} \subset \rho(A) \end{aligned}$$

Remarque 1.7. *Si $\lambda \in \sigma_p(A)$, alors il existe un vecteur $v \neq 0$ tel que $(\lambda I - A)v = 0$, c'est-à-dire $Av = \lambda v$. Un tel vecteur est appelé un vecteur propre de A et le nombre correspondant λ est une valeur propre de A .*

Définition 1.17. *Le spectre continu $\sigma_c(A)$ est l'ensemble de tous les nombres $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que : $N(\lambda I - A) = 0$, $R(\lambda I - A) \neq X$, mais $\overline{R(\lambda I - A)} = X$.*

Définition 1.18. *Le spectre résiduel $\sigma_r(A)$ est l'ensemble de tous les nombres $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que : $N(\lambda I - A) = 0$ et $\overline{R(\lambda I - A)} \neq X$.*

Remarque 1.8. *Il est évident que les ensembles $\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$, $\sigma_r(A)$ sont disjoints, et que*

$$\sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A) = \sigma(A)$$

Proposition 1.2. *(Spectre de l'opérateur adjoint) Soit H un espace de Hilbert, et $A \in \mathcal{L}(H)$.*

Alors :

- (i) $\lambda \in \rho(A) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \rho(A^*)$,
- (ii) $\lambda \in \sigma_p(A) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*) \cup \sigma_r(A^*)$,
- (iii) $\lambda \in \sigma_r(A) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$, (iv) $\lambda \in \sigma_c(A) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_c(A^*)$

Opérateurs M-dissipatifs sur les espaces de Hilbert

Soit H un espace de Hilbert équipé du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$.

Définition 1.19. *On dit qu'un opérateur linéaire non borné $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ est dissipatif si :*

$$\forall x \in D(A), \quad \langle Ax, x \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0$$

Remarque 1.9. *Pour un espace de Hilbert complexe, la condition précédente est remplacée par*

$$\forall x \in D(A), \quad \Re \langle Ax, x \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0$$

Définition 1.20. *Un opérateur linéaire non borné $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ est m-dissipatif (ou maximal dissipatif) si :*

1. A est dissipatif,
2. $\lambda I - A$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$, c'est-à-dire, pour tout $y \in H$ et tout $\lambda > 0$, il existe $x \in D(A)$ tel que $\lambda x - Ax = y$.

Theoreme 1.10. *Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire dissipatif non borné.*

L'opérateur A est m-dissipatif si et seulement s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que : $\lambda_0 I - A$ soit surjectif, c'est-à-dire $R(\lambda_0 I - A) = H$.

1. A est un opérateur fermé.
2. $D(A)$ est dense dans H , c'est-à-dire $\overline{D(A)} = H$.
3. $]0, +\infty[\subseteq \rho(A)$.

Semi-groupes d'opérateurs linéaires dans les espaces de Banach

Dans cette section, nous introduisons les semi-groupes et leurs générateurs.

Soit X un espace de Banach, et H un espace de Hilbert équipé du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_H$ et de la norme induite. $\| \cdot \|_H$.

Semi-groupes fortement continus générés par des opérateurs dissipatifs

Nous considérons le problème de Cauchy linéaire suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (C)$$

Où A est un opérateur non borné sur X . En utilisant la théorie des semi-groupes d'opérateurs, nous établissons certains résultats concernant l'existence et l'unicité de la solution de (C).

Définition 1.21. Une famille d'opérateurs linéaires bornés $(S(t))_{t \geq 0}$ sur X est un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X si :

1. $S(0) = I$,
2. $S(t+s) = S(t)S(s)$ pour tout $s, t \geq 0$.

Remarque 1.10. Il découle immédiatement de la définition que :

$$S(t)S(s) = S(s)S(t), \forall t, s \geq 0$$

Un semi-groupe $((S(t))_{t \geq 0})$ est uniformément continu si

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t) - I\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = 0$$

Définition 1.22. Un semi-groupe $((S(t))_{t \geq 0})$ est un semi-groupe C_0 (ou un semi-groupe fortement continu) si :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)x - x\|_{\mathcal{H}} = 0$$

Theoreme 1.11. Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe C_0 . Alors, il existe deux constantes $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0$$

Remarque 1.11. Si $\omega = 0$

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq M, \forall t \geq 0$$

Alors $(S(t))_{t \geq 0}$ est appelé un semi-groupe C_0 uniformément borné. Si $\omega = 0$ et $M = 1$, c'est-à-dire :

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 1, \forall t \geq 0$$

1.4 Transmission

Alors $(S(t))_{t \geq 0}$ est appelé un semi-groupe fortement continu (ou semi-groupe C_0) de contractions.

Nous définissons maintenant le générateur du semi-groupe.

Définition 1.23. Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe C_0 . Le générateur infinitésimal du semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ est l'opérateur linéaire A défini par :

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe dans } X \right\}$$

Et

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}, \forall x \in D(A)$$

Remarque 1.12. Parfois, nous désignons également $S(t)$ par e^{At} .

Theoreme 1.12. Soit $(S(t))_{t \geq 0}$, un C_0 -semigroup et A est infinitésimal générateur.

Alors :

$$S(t)x \in D(A)$$

Et

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax$$

Pour $x \in D(A)$ et $t \geq 0$

Remarque 1.13. D'après le théorème ci-dessus, la solution du problème de valeur initiale (C) admet la représentation suivante :

$$u(t) = S(t)u_0 = e^{At}u_0 \forall t \geq 0$$

Les théorèmes suivants donnent une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur soit le générateur d'un semi-groupe C_0

Theoreme 1.13. (Théorème Hill-Yosida dans les espaces de Banach) Un opérateur linéaire non borné $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions si et seulement si :

1. $D(A)$ est dense dans X ($\overline{D(A)} = X$),
2. A est un opérateur fermé,

3. Le résolvant L 'ensemble $\rho(A)$ de A contient \mathbb{R}_+ et pour chaque $\lambda > 0$,

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$$

Theoreme 1.14. (Lumer-Phillips) *Un opérateur linéaire non borné $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions si et seulement si A est un opérateur m -dissipatif.*

L'existence et l'unicité de la solution du problème de valeur initiale (C) sont justifiées par le théorème suivant.

Theoreme 1.15. (Hill-Yosida) *Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire non borné. Si A est le générateur infinitésimal de $(S(t))_{t \geq 0}$, un C_0 -semigroupe de contractions (ou si A est un opérateur m -dissipatif), alors :*

1. *Si $U_0 \in D(A)$, alors le problème de valeur initiale (C) a une solution forte unique*

$$U \in C^0(\mathbb{R}_+, D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}_+, H)$$

2. *Si $U_0 \in H$, alors le problème de valeur initiale (C) a une solution forte unique*

$$U \in C^0(\mathbb{R}_+, H)$$

Stabilité des semigroupes

La théorie de la stabilité des semigroupes fournit des outils puissants pour l'étude de la convergence vers 0 des solutions faibles et fortes du problème de Cauchy linéaire où A génère le semigroupe C_0 de contractions $(S(t))_{t \geq 0}$ sur un espace de Hilbert H .

Dans cette section, nous introduisons les notions de stabilité qui seront utilisées tout au long de cette thèse.

Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un semigroupe C_0 de contractions sur H et soit A son générateur infinitésimal.

Définition 1.24. (Stabilité forte) *On dit que le semigroupe $(S(t))_{t \geq 0}$ est fortement (ou asymptotiquement) stable si pour tout $x \in H$*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e^{tA}x\|_H = 0$$

Définition 1.25. (Stabilité Polynomiale) *On dit que le semigroupe $(S(t))_{t \geq 0}$ est exponentiellement (ou uniformément) stable s'il existe $\alpha, M > 0$ tels que :*

$$\|S(t)x\|_H \leq Me^{-\alpha t}, \forall t \geq 0, \forall x \in H$$

Définition 1.26. (*Stabilité polynomiale*) On dit que le semigroupe $(S(t))_{t \geq 0}$ est polynomialement stable s'il existe $\beta, C > 0$ tels que :

$$\|S(t)x\|_H \leq \frac{C}{t^\beta} \|x\|_H, \forall t \geq 0, \forall x \in H$$

Le théorème suivant (un critère général d'Arendt-Batty) donne des conditions nécessaires pour une forte stabilité du semigroupe C_0 .

Theoreme 1.16. (*Arendt-Batty*) Soit A le générateur d'un semigroupe C_0 uniformément borné $(S(t))_{t \geq 0}$ sur un espace de Hilbert H . Si :

(i) A n'a pas de valeurs propres sur $i\mathbb{R}$.

(ii) L'intersection du spectre $\sigma(A)$ avec $i\mathbb{R}$ est au plus un ensemble dénombrable.

Alors, le semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ est fortement (ou asymptotiquement) stable, c'est-à-dire que $\|S(t)z\|_H \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$. pour tout $z \in H$.

Lorsque le C_0 -semi-groupe est asymptotique, nous examinons le type de stabilité (exponentielle ou polynomiale) du semi-groupe.

Theoreme 1.17. (*Huang-Pruss*) Soit $S(t) = e^{At}$ un C_0 -semi-groupe de contractions sur un espace de Hilbert H . Alors $(S(t))_{t \geq 0}$ est exponentiellement stable si et seulement si :

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta : \beta \in \mathbb{R}\} = i\mathbb{R}$$

Et

$$\overline{\lim}_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty$$

Ce théorème est équivalent au théorème suivant :

Theoreme 1.18. Soit $S(t) = e^{At}$ un semi-groupe C_0 de contractions sur un espace de Hilbert H . Alors $(S(t))_{t \geq 0}$ est exponentiellement stable si et seulement si :

$$\sup\{\operatorname{Re} \lambda, \lambda \in \sigma(A)\} < 0$$

Et

$$\sup_{\operatorname{Re} \lambda \neq 0} \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty$$

Theoreme 1.19. (*Borichev-Tomilov*) Soit $S(t) = e^{At}$ un C_0 -semi-groupe sur un espace de Hilbert H . Si :

$$i\mathbb{R} \subset \rho(A) \text{ et } \sup_{|\beta| \geq 1} \frac{1}{|\beta|} \|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$$

Pour un certain l' , alors il existe c tel que :

$$\|e^{At}u_0\|^2 \leq \frac{c}{t^{l'}} \|u_0\|_{D(A)}^2, \forall t > 0, \forall u_0 \in D(A)$$

Chapitre 2

Sur l'étude du problème p biharmonique parabolique dégénéré avec mémoire

Soit \mathcal{O} un domaine ouvert borné de \mathbb{R}^n , dont le bord $\partial\mathcal{O}$ est Lipschitz-continu, et $I = [0, T]$. L'objectif du présent chapitre est d'examiner le problème integro-différentiel parabolique dégénéré p -biharmonique suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\beta(\varphi)(t, x)}{\partial t} + \Delta_p^2\varphi(t, x) &= f(t, x) - K(t)(\varphi) \quad \text{dans } I \times \mathcal{O} \\ \varphi &= 0, \quad \nabla\varphi = 0 \text{ sur } \Sigma = I \times \partial\mathcal{O} \\ \varphi(0, x) &= \varphi^0 \text{ sur } \mathcal{O} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ou

$$\Delta_p^2\varphi := \Delta(|\Delta\varphi|^{p-2}\Delta\varphi)$$

Nous considérons $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ comme une fonction strictement monotone croissante, continuellement différentiable, satisfaisant les conditions suivantes :

$$0 < \gamma \leq \beta'(s), \quad |\beta(s)| \leq C(1 + |s|^{p-1}), \quad \beta(0) = 0$$

et

$$(K(t)(\varphi), \psi) = \int_{\mathcal{O}} \int_0^t a(t-s)k(s, x, \Delta\varphi(s, x))ds\Delta\psi(t, x)dx$$

ou $k : I \times \mathcal{O} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue par rapport à la troisième variable et satisfait :

$$\begin{cases} \text{i) } |k(t, x, s)| \leq C (1 + |s|^{p-1}) \\ \text{ii) } (k(t, x, s_1) - k(t, x, s_2)) (s_1 - s_2) \geq C' |s_1 - s_2|^p \end{cases}$$

$f \in \mathcal{C}(I, L^q(\mathcal{O}))$ tel qua $\|f(t_1) - f(t_2)\|_{L^q(\mathcal{O})} \leq L |t_1 - t_2|, \forall t_1, t_2 \in I, L > 0$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ avec $p > 2$. $\varphi^0 \in W_0^{2,p}(\mathcal{O})$ et $a \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}_+^*)$. De plus

$$\rho = \inf_{s \in [0, T]} |a(s)|$$

2.1 Problème semi-discrétisé

Nous divisons l'intervalle $[0, T]$ en n sous-intervalles où $\lambda = \frac{T}{n}$, $t_i = i\lambda$, $\varphi^i(x) = \varphi(t_i, x)$ et $\delta\beta(\varphi^i) = \frac{\beta(\varphi^i) - \beta(\varphi^{i-1})}{\lambda}$. Ensuite, pour $i = 1, \dots, n$, le schéma d'approximation récurrent est :

$$\langle \beta(\varphi^i) - \beta(\varphi^{i-1}), \psi \rangle + \lambda \left\langle \left(|\Delta\varphi^i|^{p-2} \Delta\varphi^i \right), \Delta\psi \right\rangle + \lambda \langle K(\varphi), \psi \rangle = \lambda \langle f^i, \psi \rangle, \quad \forall \psi \in W_0^{2,p}(\mathcal{O}) \quad (2.2)$$

Notation 2.1. Introduisons les fonctions par morceaux linéaires en temps

$$\varphi_n : [0, T] \rightarrow L^2(\mathcal{O}),$$

$$\varphi_n : t \mapsto \begin{cases} \varphi^0 & t = 0 \\ \varphi^{i-1} + (t - t_{i-1}) \delta\varphi^i & t \in (t_{i-1}, t_i] \quad 1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

et la fonction par morceaux constante en temps

$$\bar{\varphi}_n : t \mapsto \begin{cases} \varphi^0 & t = 0 \\ \varphi^i & t \in (t_{i-1}, t_i], \quad 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Theoreme 2.1. Soit $f^i \in L^q(\mathcal{O})$, alors pour $i = 1, \dots, n$, le problème (2.2) admet une solution faible unique φ^i dans $W_0^{2,p}(\mathcal{O})$.

Démonstration. Introduisons l'opérateur $A : W_0^{2,p}(\mathcal{O}) \rightarrow (W_0^{2,p}(\mathcal{O}))^*$ défini par :

$$\langle A\varphi^i, \psi \rangle = \langle \beta(\varphi^i), \psi \rangle + \lambda \langle \Delta_p^2 \varphi^i, \psi \rangle + \lambda \int_{\mathcal{O}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} a(t_i - s) k(s, x, \Delta\varphi^i) \Delta\psi ds dx \quad \forall \psi \in W_0^{2,p}(\mathcal{O}), \quad (2.3)$$

et

$$\langle A\varphi^i, \psi \rangle = \langle B\varphi^i, \psi \rangle + \lambda \langle K_i(\varphi^i), \psi \rangle \quad \forall \psi \in W_0^{2,p}(\mathcal{O}), \quad (2.4)$$

où

$$\Delta_p^2 \varphi := \Delta(|\Delta u|^{p-2} \Delta u), \quad \langle B\varphi^i, \psi \rangle = \langle \beta(\varphi^i), \psi \rangle + \lambda \langle \Delta_p^2 \varphi^i, \psi \rangle,$$

et la fonctionnelle linéaire

$$\langle F, \psi \rangle = \lambda \langle f^i, \psi \rangle + \langle \beta(\varphi^{i-1}), \psi \rangle - \lambda \int_{\mathcal{O}} \int_0^{t_{i-1}} a(t_i - s) k(s, x, \Delta\bar{\varphi}_n) \Delta\psi ds dx.$$

2.1 Problème semi-discrétisé

Nous appliquons maintenant la théorie des opérateurs monotones. et nous devons prouver que A est un opérateur héli-continue et coercitif.

Définissons pour tous $\varphi, \psi, w \in W_0^{2,p}(\mathcal{O})$ la fonction réelle :

$$z \mapsto \langle A(\varphi^i + zw), \psi \rangle, \quad z \in [0, 1].$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \langle A(\varphi^i + zw), \psi \rangle &= \lim_{z \rightarrow 0} [\langle \beta(\varphi^i + zw), \psi \rangle + \lambda \langle \Delta_p^2(\varphi^i + zw), \psi \rangle + \lambda \langle K_i(\varphi^i + zw), \psi \rangle] \\ &= \langle \beta(\varphi^i), \psi \rangle + \lambda \langle \Delta_p^2 \varphi^i, \psi \rangle + \lambda \lim_{z \rightarrow 0} \langle K(\varphi^i + zw), \psi \rangle \end{aligned}$$

nous avons :

$$\lim_{z \rightarrow 0} \langle K_i(\varphi^i + zw), \psi \rangle = \lim_{z \rightarrow 0} \int_{\mathcal{O}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} a(t_i - s) k(s, x, \Delta(\varphi^i + zw)) ds \Delta \psi dx.$$

Ensuite :

$$\lim_{z \rightarrow 0} \langle K_i(\varphi^i + zw), \psi \rangle = \int_{\mathcal{O}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} a(t_i - s) k(s, x, \Delta \varphi^i) ds \Delta \psi dx, \quad (2.5)$$

donc l'opérateur A est héli-continu. En utilisant le lemme [1.3](#), nous obtenons :

$$\begin{aligned} (B(\varphi^i) - B(\psi^i), \varphi^i - \psi^i) &= (\beta(\varphi^i) - \beta(\psi^i), \varphi^i - \psi^i) + \lambda (\Delta_p^2 \varphi^i - \Delta_p^2 \psi, \varphi^i - \psi) \\ &\geq \gamma \|\varphi^i - \psi^i\|^2 + \lambda (\Delta_p^2 \varphi^i - \Delta_p^2 \psi, \varphi^i - \psi) \\ &\geq \lambda (\Delta_p^2 \varphi^i - \Delta_p^2 \psi, \varphi^i - \psi^i) \\ &= \lambda \int_{\mathcal{O}} |\Delta \varphi^i|^{p-2} \Delta \varphi^i (\Delta \varphi^i - \Delta \psi^i) dx \\ &\quad - \lambda \int_{\mathcal{O}} |\Delta \psi^i|^{p-2} \Delta \psi (\Delta \varphi^i - \Delta \psi^i) dx \\ &\geq \frac{2}{p(2^{p-1} - 1)} \int_{\mathcal{O}} |\Delta \varphi^i - \Delta \psi^i|^p dx \\ &\geq \frac{2}{p(2^{p-1} - 1)} \int_{\mathcal{O}} |\Delta \varphi^i - \Delta \psi^i|^p dx \\ &\geq \frac{2}{p(2^{p-1} - 1)} \|\Delta \varphi^i - \Delta \psi^i\|_{L^p}^p. \end{aligned} \quad (2.6)$$

D'autre part, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \langle K_i(\varphi^i) - K_i(\psi^i), \varphi^i - \psi^i \rangle &= \int_{\mathcal{O}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} a(t_i - s) [k(s, x, \Delta\varphi^i) - k(s, x, \Delta\psi^i)] ds \Delta(\varphi^i - \psi^i) dx \\
 &\geq C\rho \int_{\mathcal{O}} |\Delta\varphi^i - \Delta\psi^i|^p dx \\
 &\geq C \|\Delta\varphi^i - \Delta\psi^i\|_{L^p}^p.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Donc à partir de (2.6) et (2.7), nous obtenons :

$$\langle A\varphi^i - A\psi^i, \varphi^i - \psi^i \rangle \geq C \|\Delta\varphi^i - \Delta\psi^i\|_{L^p}^p.$$

Maintenant, en utilisant les inégalités de Calderon-Zygmund et de Poincaré, nous obtiendrons que la norme $\|\cdot\|_{W_0^{2,p}(\mathcal{O})}$ est équivalente à la semi-norme $\|\Delta(\cdot)\|_{L^p(\mathcal{O})}$ dans l'espace $W_0^{2,p}(\mathcal{O})$. Cela nous permet d'écrire :

$$\langle A(\varphi^i) - A(\psi^i), \varphi^i - \psi^i \rangle \geq C \|\varphi^i - \psi^i\|_{W_0^{2,p}(\mathcal{O})}^p,$$

D'où nous concluons la monotonie de A . De même

$$\langle A(\varphi^i), \varphi^i \rangle \geq C \|\varphi^i\|_{W_0^{2,p}(\mathcal{O})}^p,$$

Ce qui prouve la coercivité de A .

Enfin, en utilisant le Lemma 1.4 et l'inégalité de Hölder, nous avons :

$$\begin{aligned}
 |\langle F, \psi \rangle| &= \left| \lambda \langle f^i, \psi \rangle + \langle \beta(\varphi^{i-1}), \psi \rangle - \lambda \int_{\mathcal{O}} \int_0^{t_{i-1}} a(t_i - s) k(s, x, \Delta\bar{\varphi}_n) \Delta\psi ds dx \right| \\
 &\leq \lambda \|f^i\|_{L^q} \|\psi\|_{L^p} + C \|\varphi^{i-1}\|_{L^p}^{p-1} \|\psi\|_{L^p} + |\mathcal{O}|^{\frac{1}{q}} \|\psi\|_{L^p} + CT\rho \|\psi\|_{L^p} \\
 &\leq C \|\psi\|_{L^p}.
 \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que $W_0^{2,p}(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^p(\mathcal{O})$, nous arrivons à :

$$|\langle F, \psi \rangle| \leq C \|\psi\|_{W_0^{2,p}(\mathcal{O})}.$$

Ainsi, $F \in (W_0^{2,p}(\mathcal{O}))^*$. Cela achève la preuve. □

2.2 Estimations a priori

Theoreme 2.2. *Pour $p \in [2, +\infty[$. Alors le problème (2.2) admet une solution faible φ .*

2.2 Estimations a priori

Nous démontrons le Théorème [2.2](#) en nous appuyant sur les lemmes suivants :

Lemma 2.1. *Il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend pas de n telle que :*

$$\begin{aligned} \|\varphi^k\|_{L^2(\mathcal{O})} &\leq C, \quad k = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^k \lambda \|\Delta\varphi^i\|_{L^p(\mathcal{O})}^p &\leq C, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Démonstration. En multipliant l'équation [\(2.2\)](#) par φ^i et en intégrant sur \mathcal{O} , puis en faisant la somme sur $i = 1, \dots, k$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \int_{\mathcal{O}} (\beta(\varphi^i) - \beta(\varphi^{i-1})) \varphi^i dx + \lambda \sum_{i=1}^k \int_{\mathcal{O}} |\Delta\varphi^i|^p dx &= \lambda \sum_{i=1}^k \int_{\mathcal{O}} f^i \varphi^i dx \\ &\quad - \lambda^2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} \int_{\mathcal{O}} k(t_j, x, \Delta\varphi^j) \Delta\varphi^i dx. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Nous estimons chaque terme de [\(2.8\)](#) séparément, nous introduisons la notation suivante :

$$\Phi_g(z) = \int_0^z g(s) ds, \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Si $g(0) = 0$ et que g est une fonction monotone non décroissante avec un coefficient de Lipschitz L_g .

Alors Φ_g est convexe et (cf. [\[54\]](#)) et :

$$\frac{g^2(z)}{2L_g} \leq \Phi_g(z) \leq \frac{L_g z^2}{2}.$$

De plus, on peut facilement vérifier que :

$$g(z_1)(z_2 - z_1) \leq \Phi_g(z_2) - \Phi_g(z_1) \leq g(z_2)(z_2 - z_1),$$

Pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, ce qui découle du caractère monotone de g . Cette relation peut être appliquée pour $g = \beta^{-1}$ avec $L_g = \frac{1}{\gamma}$.

Pour le premier terme à gauche, nous déduisons que :

$$\sum_{i=1}^k \int_{\mathcal{O}} (\beta(\varphi^i) - \beta(\varphi^{i-1})) \varphi^i \geq \int_{\mathcal{O}} \Phi_{\beta^{-1}\beta}(\varphi_k) - \int_{\mathcal{O}} \Phi_{\beta^{-1}\beta}(\varphi^0) \geq C_0 \|\varphi_k\|_{L^2}^2 - C. \quad (2.9)$$

Par l'inégalité de Young avec le paramètre ϵ et l'inégalité de Hölder, nous avons

$$\begin{aligned} \lambda \left| \sum_{i=1}^k \int_{\mathcal{O}} f^i \varphi^i dx \right| &\leq \lambda \sum_{i=1}^k \left(\int_{\mathcal{O}} |f^i|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathcal{O}} |\varphi^i|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sum_{i=1}^k \lambda \frac{C}{\epsilon} \int_{\mathcal{O}} |f^i|^q dx + \sum_{i=1}^k \lambda C \epsilon \int_{\mathcal{O}} |\varphi^i|^p dx. \end{aligned}$$

Nous savons que l'incorporation de $W_0^{2,p}(\mathcal{O})$ dans $L^p(\mathcal{O})$ est continue, alors

$$\begin{aligned} \lambda \left| \sum_{i=1}^k \int_{\mathcal{O}} f^i \varphi^i dx \right| &\leq C \sum_{i=1}^k \lambda + C \epsilon \sum_{i=1}^k \lambda \int_{\mathcal{O}} |\Delta \varphi^i|^p dx \\ &\leq C + C \epsilon \lambda \sum_{i=1}^k \|\Delta \varphi^i\|_{L^p(\mathcal{O})}^p. \end{aligned} \tag{2.10}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \left| \lambda^2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} \int_{\mathcal{O}} k(t_j, x, \Delta \varphi^j) \Delta \varphi^i dx \right| &\leq \lambda^2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{i-1} C \int_{\mathcal{O}} \left| (1 + |\Delta \varphi^j|^{p-1}) \Delta \varphi^i \right| dx \\ &\leq \lambda^2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{i-1} C \left(\int_{\mathcal{O}} |\Delta \varphi^j|^{(p-1)q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathcal{O}} |\Delta \varphi^i|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \lambda^2 \sum_{i=1}^k i C \int_{\mathcal{O}} |\Delta \varphi^i| dx \\ &\leq \lambda^2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{i-1} \frac{C}{\epsilon} \int_{\mathcal{O}} |\Delta \varphi^j|^p dx + \sum_{i=1}^k i \lambda^2 C \epsilon \int_{\mathcal{O}} |\Delta \varphi^i|^p dx + \lambda^2 \sum_{i=1}^k i C \epsilon \int_{\mathcal{O}} |\Delta \varphi^i|^p dx + C \frac{|\mathcal{O}|}{\epsilon} \\ &\leq C \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{i-1} \lambda^2 \|\Delta \varphi^j\|_{L^p(\mathcal{O})}^p + C \epsilon \lambda \sum_{i=1}^k \|\Delta \varphi^i\|_{L^p(\mathcal{O})}^p + C. \end{aligned} \tag{2.11}$$

En substituant (2.9), (2.10) et (2.11) dans (2.8), nous obtiendrons :

$$C_0 \|\varphi_k\|_{L^2}^2 + (1 - C \epsilon) \lambda \sum_{i=1}^k \|\Delta \varphi^i\|_{L^p(\mathcal{O})}^p \leq + C \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{i-1} \lambda^2 \|\Delta \varphi^j\|_{L^p(\mathcal{O})}^p + C.$$

Maintenant, en choisissant ϵ de telle sorte que $(1 - C \epsilon) > 0$ et en utilisant le lemme de Gronwall, nous obtiendrons le résultat attendu. \square

Lemma 2.2. *Nous avons l'estimation suivante :*

$$\|\partial_t \varphi_n\|_{W^{-2,q}(\mathcal{O})}^2 \leq C. \tag{2.12}$$

Démonstration. La notation (2.1) nous permet d'écrire (2.2) comme :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}} \partial_t \beta(\varphi_n(t)) \psi dx + \int_{\mathcal{O}} \Delta_p^2 \overline{\varphi}_n(t) \psi dx &= \int_{\mathcal{O}} f^n(t) \psi dx \\ + \lambda \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} \int_{\mathcal{O}} k(t_j, x, \Delta \varphi^j) \psi dx, \quad \forall \psi \in W_0^{2,p}(\mathcal{O}), \end{aligned} \quad (2.13)$$

Où pour $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $f^n(t) = f^i$, $1 \leq i \leq n$. Maintenant, en tenant compte que pour $p > 2$, $\Delta_p^2 : W_0^{2,p}(\mathcal{O}) \rightarrow W^{-2,q}(\mathcal{O})$ est bornée, l'inégalité de Hölder nous donne :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{O}} \partial_t \beta(\varphi_n) \psi dx \right| &\leq \left| \int_{\mathcal{O}} f^n \psi dx \right| + \lambda \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} \int_{\mathcal{O}} k(t_j, x, \Delta \varphi^j) |\Delta \psi| dx + \left| \int_{\mathcal{O}} \Delta_p^2 \overline{\varphi}_n(t) \psi dx \right| \\ &\leq \|f^n\|_{L^q(\mathcal{O})} \|\psi\|_{L^p(\mathcal{O})} + \lambda C \sum_{j=0}^{i-1} \left(\int_{\mathcal{O}} |\Delta \psi| + |\Delta \varphi^j|^{(p-1)} |\Delta \psi| dx \right) + C \|\psi\|_{L^p(\mathcal{O})} \\ &\leq C \|f\|_{C(I, L^q(\mathcal{O}))} \|\Delta \psi\|_{L^p(\mathcal{O})} + \lambda C \sum_{j=0}^{i-1} \|\Delta \varphi^j\|_{L^p(\mathcal{O})}^{\frac{p}{q}} \|\Delta \psi\|_{L^p(\mathcal{O})} + C \|\Delta \psi\|_{L^p(\mathcal{O})}, \end{aligned}$$

l'inégalité ϵ -Young implique :

$$\left| \int_{\mathcal{O}} \partial_t \beta(\varphi_n) \psi dx \right| \leq C \|\Delta \psi\|_{L^p(\mathcal{O})} + \left(\sum_{j=0}^{i-1} \frac{C}{\epsilon} \lambda \|\Delta \varphi^j\|_{L^p(\mathcal{O})}^p + \sum_{j=0}^{i-1} C \epsilon \lambda |\mathcal{O}| \right) \|\Delta \psi\|_{L^p(\mathcal{O})}.$$

En choisissant $\epsilon = 1$ et en utilisant le Lemme [2.1](#), nous avons :

$$\left| \int_{\mathcal{O}} \partial_t \beta(\varphi_n) \psi dx \right| \leq C \|\Delta \psi\|_{L^p(\mathcal{O})}, \quad \forall \psi \in W_0^{2,p}(\mathcal{O}).$$

Ainsi,

$$\|\partial_t \varphi_n\|_{W^{-2,q}(\mathcal{O})}^2 \leq \|\partial_t \beta_n(\varphi)\|_{W^{-2,q}(\mathcal{O})} = \sup_{\psi \in W_0^{2,p}(\mathcal{O})} \frac{|\int_{\mathcal{O}} \partial_t \beta_n(\varphi) \psi dx|}{\|\Delta \psi\|_{L^p(\mathcal{O})}} \leq C.$$

Cela complète la preuve. □

Preuve du Théorème [2.2](#) À partir des Lemmes [2.1](#) et [2.2](#), nous pouvons déduire que :

$$\begin{aligned} \|\partial_t \varphi_n\|_{L^q(I, W^{-2,q}(\mathcal{O}))} &\leq C, \\ \|\overline{\varphi}_n\|_{L^p(I, W_0^{2,p}(\mathcal{O}))}^p &= \int_0^T \|\Delta \overline{\varphi}_n(t)\|_{L^p(\mathcal{O})}^p dt \leq C, \end{aligned}$$

Et

$$\|\overline{\varphi}_n\|_{C(I, L^2(\mathcal{O}))} \leq C.$$

2.2 Estimations a priori

Ensuite, le Lemme 1.3 dans [35] implique qu'il existe $\varphi \in C(I, W^{-2,q}(\mathcal{O})) \cap L^p(I, W_0^{2,p}(\mathcal{O}))$ tel que $\partial_t \beta(\varphi) \in L^q(I, W^{-2,q}(\mathcal{O}))$ et une sous-séquence de φ_n notée également φ_n , où

$$\begin{aligned} \varphi_n &\longrightarrow \varphi \text{ dans } C(I, W^{-2,q}(\mathcal{O})), \\ \varphi_n(t) &\rightarrow \varphi(t) \text{ dans } W_0^{2,p}(\mathcal{O}), \\ \overline{\varphi_n} &\rightarrow \varphi \text{ dans } L^p(I, W_0^{2,p}(\mathcal{O})), \\ \partial_t \varphi_n &\rightarrow \partial_t \varphi \text{ dans } L^q(I, W^{-2,q}(\mathcal{O})), \\ f^n &\rightarrow f \text{ dans } L^q(I, L^q(\mathcal{O})), \end{aligned} \tag{2.14}$$

La continuité de β donne :

$$\beta_n \rightarrow \beta(\varphi) \text{ dans } \mathcal{C}([0, T], L^2(\mathcal{O})) \quad n \rightarrow \infty.$$

Nous savons que $\Delta_p^2 : W_0^{2,p}(\mathcal{O}) \rightarrow W^{-2,q}(\mathcal{O})$ est un opérateur hémicontinu (voir [29]), nous obtiendrons :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}} \Delta_p^2 \overline{\varphi_n}(t) \psi dx &\longrightarrow \int_{\mathcal{O}} \Delta_p^2 \varphi(t) \psi dx = \int_{\mathcal{O}} |\Delta \varphi(t)|^{p-2} \Delta \varphi(t) \Delta \psi dx \\ &\forall \psi \in W_0^{2,p}(\mathcal{O}), \end{aligned}$$

Pour $n \rightarrow \infty$. De manière similaire, voir [21], nous pouvons vérifier que :

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} \int_{\mathcal{O}} k(t_j, x, \Delta \varphi^j) \Delta \psi dx &\rightarrow \int_0^t a(t-s) k(s, x, \Delta \varphi) \Delta \psi ds \text{ dans } L^q(I, W^{-2,q}(\mathcal{O})) \\ &\text{pour } \lambda \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Sur la base des hypothèses sur f , la propriété (2.14)₅ découle de l'estimation suivante :

$$\|f^n(t) - f(t)\|_{L^q(\mathcal{O})} \leq \frac{C}{n}.$$

Maintenant, en intégrant l'équation (2.13) sur $[0, T]$, nous obtiendrons :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \partial_t \beta(\varphi_n) \psi dx dt + \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \Delta_p^2 \overline{\varphi_n}(t) \psi dx dt &= \int_0^T \int_{\mathcal{O}} f^n \psi dx dt \\ + \lambda \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} k(t_j, x, \Delta \varphi^j) \Delta \psi dx dt, &\quad \forall \psi \in W_0^{2,p}(\mathcal{O}). \end{aligned} \tag{2.15}$$

En prenant la limite quand $n \rightarrow \infty$ dans (2.15), nous obtiendrons :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \frac{\partial \beta(\varphi)}{\partial t} \psi \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \Delta_p^2 \varphi \psi \, dx \, dt &= \int_0^T \int_{\mathcal{O}} f \psi \, dx \, dt \\ &+ \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \left(\int_0^t a(t-s) k(s, x, \Delta \varphi) \, ds \right) \Delta \psi \, dx \, dt, \quad \forall \psi \in W_0^{2,p}(\mathcal{O}). \end{aligned}$$

Ainsi, la preuve est complétée.

Theoreme 2.3. *Pour $p \in [2, +\infty[$, le problème (2.1) admet une solution unique.*

Démonstration. Soient φ_1 et φ_2 des solutions faibles de (2.1). En soustrayant les formulations variationnelles correspondantes l'une de l'autre et en testant avec $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$, nous obtenons : $\forall \psi \in W_0^{2,p}(\mathcal{O})$,

$$\langle \partial_t \beta(\varphi_1) - \partial_t \beta(\varphi_2), \psi \rangle + \lambda \langle (|\Delta \varphi_1|^{p-2} \Delta \varphi_1) - (|\Delta \varphi_2|^{p-2} \Delta \varphi_2), \Delta \psi \rangle + \lambda \langle K(\varphi_1) - K(\varphi_2), \psi \rangle = 0. \quad (2.16)$$

En intégrant deux fois dans le temps, nous obtiendrons :

$$\begin{aligned} \int_0^\xi \langle \beta(\varphi_1) - \beta(\varphi_2), \psi \rangle + \lambda \int_0^\xi \int_0^t \langle (|\Delta \varphi_1|^{p-2} \Delta \varphi_1) - (|\Delta \varphi_2|^{p-2} \Delta \varphi_2), \Delta \psi \rangle \\ + \lambda \int_0^\xi \int_0^t \langle K(\varphi_1) - K(\varphi_2), \psi \rangle = 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

en utilisant (2.6) et (2.7), nous obtiendrons :

$$\begin{aligned} \int_0^\xi \langle \beta(\varphi_1) - \beta(\varphi_2), \psi \rangle + \lambda \int_0^\xi \int_0^t \langle (|\Delta \varphi_1|^{p-2} \Delta \varphi_1) - (|\Delta \varphi_2|^{p-2} \Delta \varphi_2), \Delta \psi \rangle \\ + \lambda \int_0^\xi \int_0^t \langle K(\varphi_1) - K(\varphi_2), \psi \rangle \geq C \|\Delta \varphi_1 - \Delta \varphi_2\|_{L^p(\mathcal{O})}^p. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ainsi, $\varphi_1 = \varphi_2$, ce qui complète la preuve. \square

2.3 Formulation Mixte

Dans cette section, une analyse de la formulation mixte (M.F) a été proposée. En considérant que si $\Phi(w) = |w|^{p-2}w$, alors :

$$\Phi^{-1}(w) = \text{sgn}(w) |w|^{\frac{1}{p-1}} w = |w|^{q-2} w.$$

Prenons la variable suivante :

$$\zeta^i = |\Delta\varphi^i|^{p-2} \Delta\varphi^i.$$

En prenant $V = W_0^{2,p}(\mathcal{O})$ et $W = L^q(\mathcal{O})$, nous écrivons également la formulation mixte du problème (2.1) comme suit : nous souhaitons déterminer une paire $(\varphi^i, \psi^i) \in V \times W$ telle que :

$$\begin{cases} a(\zeta^i, \psi) - b(\varphi^i, \zeta) = 0 & \forall \psi \in V \\ b(\zeta^i, u) = L_Y(u) & \forall u \in W, \end{cases} \quad (2.19)$$

Où

$$\begin{aligned} a(\zeta^i, \psi) &:= \langle |\zeta^i|^{q-2} \zeta^i, \psi \rangle, \\ b(\zeta^i, u) &:= -\langle \Delta\zeta^i, u \rangle, \\ L_Y(u) &:= \langle -f^i + \delta\beta(\varphi^i), u \rangle + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \langle k(t_i, x, \Delta\bar{\varphi}_n), u \rangle, \end{aligned}$$

Où $f^i = f(t_i, x)$.

Proposition 2.1. *Il existe $\delta, C \geq 0$ tel que pour $\varphi \in V$, nous avons :*

$$\delta \leq C \inf_{0 \neq u \in W} \sup_{0 \neq \varphi^i \in V} \frac{b(\varphi^i, u)}{\|\varphi^i\|_V \|u\|_W}.$$

Démonstration. Pour $\varphi^i \in W_0^{2,p}(\mathcal{O})$ et en prenant $\eta = |\Delta\varphi^i|^{p-2} \Delta\varphi^i$, en utilisant le lemme 1.4 nous avons :

$$\|\eta\|_{L^q(\mathcal{O})} = \left\| |\Delta\varphi^i|^{p-1} \right\|_{L^q(\mathcal{O})} = \|\Delta\varphi^i\|_{L^p(\mathcal{O})}^{p-1},$$

et

$$b(\varphi^i, \eta) = \|\Delta\varphi^i\|_{L^p(\mathcal{O})}^p,$$

par conséquent :

$$b(\varphi^i, \eta) = \|\Delta\varphi^i\|_{L^p(\mathcal{O})}^{p-1} \|\Delta\varphi^i\|_{L^p(\mathcal{O})} = \|\Delta\varphi^i\|_{L^p(\mathcal{O})} \|\eta\|_{L^q(\mathcal{O})}.$$

Cela implique :

$$\|\Delta\varphi^i\|_{L^p(\mathcal{O})} \leq C \frac{b(\varphi^i, \eta)}{\|\eta\|_{L^q(\mathcal{O})}}.$$

2.4 Discrétisation Complète

Nous concluons donc que :

$$\delta \leq C \inf_{0 \neq \eta \in W} \sup_{0 \neq \varphi^i \in V} \frac{b(\varphi^i, \eta)}{\|\varphi^i\|_V \|\eta\|_W}.$$

Cela complète la démonstration. \square

2.4 Discrétisation Complète

Soit Γ_D une partition en triangles non chevauchants D , telle que $\bar{\mathcal{O}}$ soit l'union de ces triangles ($\bar{\mathcal{O}} = \cup_{D \in \Gamma_D} \bar{D}$). De plus, pour deux triangles D et K dans Γ_D , leur intersection $D \cap K$ peut être un sommet, une arête, une face ou l'intégralité de K et D .

Cette triangulation suit le concept de régularité défini par Ciarlet, où la constante de régularité de forme d'un triangle D est déterminée comme suit :

$$\exists \xi > 0; \xi = \inf_{D \in \Gamma_D} \frac{h_D}{\rho_D} \quad \forall D \in \Gamma_h,$$

Où ρ_D est le diamètre de la plus grande boule contenue dans D et h_D est le diamètre de D .

Considérons $\mathbf{P}^k(\Gamma_h)$ comme l'ensemble représentant des polynômes par morceaux de degré k définis sur la triangulation Γ_h .

$$\mathbf{P}^k(\Gamma_h) = \{\phi : \phi|_D \in \mathbf{P}^k(D), \forall D \in \Gamma_h\}.$$

Les espaces finis discrets sont donnés comme suit :

$$V^h = \mathbf{P}^k(\Gamma_h) \cap C^0(\bar{\mathcal{O}}), \text{ et } V_0^h = \{\phi \in V^h; \phi|_{\partial\mathcal{O}} = 0\},$$

Où R est l'opérateur de projection de Ritz tel que :

$$\int_{\mathcal{O}} \nabla(R\psi) \nabla \phi = \int_{\mathcal{O}} \nabla \psi \nabla \phi dx, \quad \forall \phi \in V^h \cap H_0^1(\mathcal{O}).$$

La taille de la maille h est donnée par :

$$h = \max_{T \in \Gamma_D} h_D.$$

Nous écrivons le schéma MFE entièrement discret pour (2.19) comme suit : trouver une paire $(\varphi_h^i, \zeta_h^i) \in V_0^h \times V^h$

$$\begin{cases} a(\zeta_h^i, \psi) - b_h(\varphi_h^i, \psi) = 0 \\ b_h(\zeta_h^i, u) = L(u) \quad \forall (\psi, u) \in V^h \times V_0^h, \end{cases} \quad (2.20)$$

En utilisant la formulation de Green, nous avons :

$$b_h(\varphi_h, \psi) = \sum_{T \in \Gamma_h} \int_D \nabla \varphi_h \nabla \psi \, dx = \int_{\mathcal{O}} \nabla \varphi_h \nabla \psi \, dx, \quad (2.21)$$

En substituant (2.21) dans (2.20), nous écrivons le problème (2.20) comme suit : trouver une paire $(\varphi_h^i, \zeta_h^i) \in V_0^h \times V^h$

$$\begin{cases} \int_{\mathcal{O}} |\zeta_h^i|^{q-2} \zeta_h^i \psi \, dx - \int_{\mathcal{O}} \nabla \varphi_h^i \nabla \psi \, dx = 0, \\ \int_{\mathcal{O}} \nabla \zeta_h^i \nabla u \, dx = \langle f^i - \delta \beta(\varphi^i), u \rangle - \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \langle k(t_i, x, \Delta \bar{\varphi}_n), u \rangle \quad \forall (\psi, u) \in V^h \times V_0^h, \end{cases}$$

en procédant de manière similaire à [?] et en utilisant les propriétés de $a(\cdot, \cdot)$ (voir [53], proposition. 3.1) et le Lemme 3 dans [?], nous pouvons obtenir le proposition suivant :

Proposition 2.2. *Pour $m \geq 2$, il existe $C \geq 0$ tel que :*

$$\begin{aligned} \|\varphi^i - \varphi_h^i\|_{W_h^{2,p}(\mathcal{O})}^{p-1} + \|w^i - w_h^i\|_{L^q(\mathcal{O})} &\leq C \left(h^{\frac{q}{2}(m+1)} |w^i|_{W^{m+1,q}(\mathcal{O})}^{\frac{q}{2}} + h^{m+1} |w^i|_{W^{m+1,q}(\mathcal{O})} \right. \\ &\quad \left. + h^{m-1} |\varphi^i|_{W^{m+1,p}(\mathcal{O})} + h^{m+1} |\Delta \varphi^i|_{W^{m+1,q}(\mathcal{O})} \right). \end{aligned}$$

Remarque 2.1. *D'après la proposition 2.2, si $(\varphi, w) \in W^{m,p}(\Omega) \times W^{m,q}(\Omega)$ pour $m \geq 2$, nous déduisons que :*

$$\|\varphi^i - \varphi_h^i\|_{W^{2,p}(\Omega)}^{p-1} + \|w^i - w_h^i\|_{L^q(\Omega)} \leq Ch^{m-1}$$

puis

$$\|\varphi^i - \varphi_h^i\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq Ch^{\frac{m-1}{p-1}}$$

cela implique que pour $m = 2$ l'erreur se comporte comme :

$$\|\varphi^i - \varphi_h^i\|_{W^{2,p}(\Omega)} \lesssim Ch^{\frac{1}{p-1}}$$

Ce qui signifie que la méthode MFE que nous avons proposée converge avec des taux meilleurs que prévu.

Nous remarquons que les taux diminuent à mesure que p augmente. Pour améliorer cela, nous pouvons, par exemple, utiliser une analyse qui utilise des quasi-normes [6].

Exemple 2.1. *Dans cet exemple, notre attention est dirigée vers un essai numérique montrant l'efficacité et la précision de la méthode des éléments finis mixtes de Galerkin.*

2.4 Discrétisation Complète

Cet essai consiste à approximer la fonction inconnue $u(t, x, y)$ en utilisant un polynôme linéaire, spécifiquement lorsque $r = k = 1$ et $p = 4$.

La fonction a dans le terme de mémoire est désignée comme $a(t, s) = 1$ et $K(t, x, s) = |s|^2 s$.

Dans ce cas de test particulier, le domaine de calcul comprend le rectangle $\mathcal{O} = \{(x, y) : (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)\}$, tandis que l'intervalle de temps considéré s'étend de 0 à 1. La solution exacte est $u(t, x, y) = \sin(x\pi) \sin(y\pi) \exp(-t)$.

Les fonctions ζ_h^i et φ_h^i sont représentées dans la Figure 2.1 et la Figure 2.2.

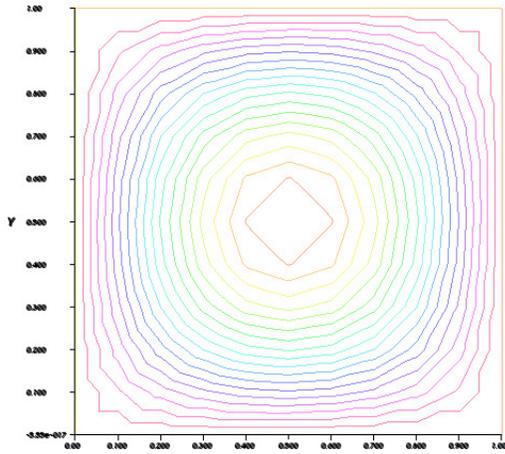


FIGURE 2.1 – le graph de φ_h^i en $t_i = 1$

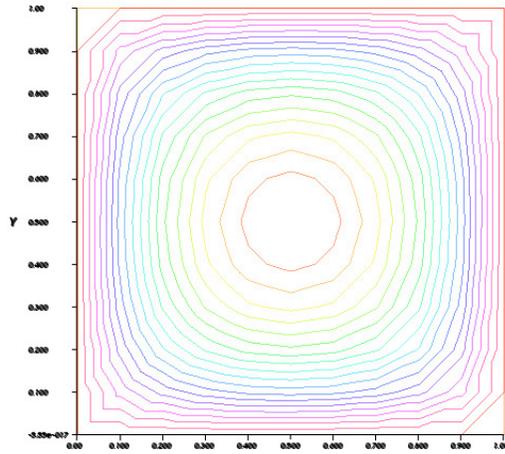


FIGURE 2.2 – le graphi de ζ_h en $t_i = 1$

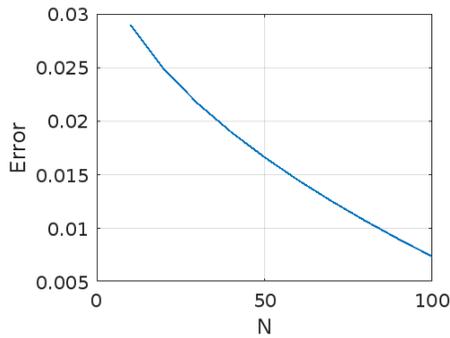


FIGURE 2.3 – La $\|\zeta^i - \zeta_h^i\|_{L^q}$ norm error en $t_i = 1$

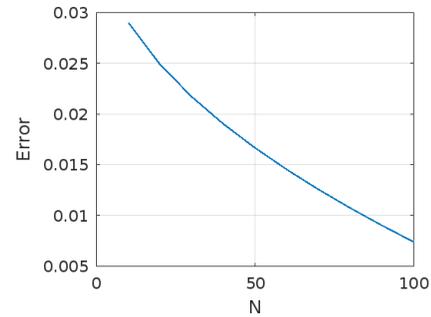


FIGURE 2.4 – La $\|\varphi^i - \varphi_h^i\|_{W_0^{2,p}}$ norm error en t_i

Chapitre 3

Stabilité forte pour un problème de transmission viscoélastique

3.1 Introduction

L'émergence de la théorie du contrôle est largement associée au développement de la technologie et de l'industrie, notamment en ce qui concerne la dérivée fractionnaire généralisée de Caputo. Le besoin de réguler ou de maintenir, dans le cadre du contrôle des frontières non locales, les valeurs actuelles de certaines caractéristiques cinématiques des machines ou d'autres objets de contrôle a conduit à la création d'un appareil mathématique de la théorie du contrôle.

Dans la théorie du contrôle, on considère des ensembles d'objets (systèmes) dont le comportement est décrit par une certaine loi. Le problème de contrôle consiste à trouver un moyen de modifier le comportement du processus afin de transférer le système d'un état donné à un autre, en satisfaisant des exigences supplémentaires. Parmi ces exigences, on peut considérer : la valeur spécifiée du temps de contrôle T ; la minimisation du temps de contrôle (problème de vitesse) ; la minimisation de certains critères (problème de contrôle optimal) ; la satisfaction de certaines qualités du processus de transition. Il existe également un problème de stabilisation qui étudie la présence d'une solution asymptotiquement stable sur un intervalle de temps infini. L'un des fondateurs de la théorie classique de la stabilité est A. M. Lyapunov, dont les travaux fondamentaux dans ce domaine ont jeté les bases des méthodes mathématiques rigoureuses pour analyser la stabilité du mouvement, notamment pour les systèmes hyperboliques.

Dautray et Lions, dans [28], ont étudié le problème de transmission relatif aux équations hyperboliques, établissant l'existence et la régularité des solutions pour le problème linéaire. Par la suite, dans [52], les auteurs ont exploré le problème de transmission associé aux ondes viscoélastiques, incorporant l'amortissement dans la deuxième équation et analysant la propagation des ondes à travers des matériaux composés d'éléments élastiques et viscoélastiques. Leur étude a démontré que la composante viscoélastique induit une décroissance exponentielle de la solution. Dans cet chapitre, nous avons utilisé des méthodes plus modernes et considéré le modèle suivant :

$$\begin{cases} \zeta_{tt}(z, t) - \tau_1 \zeta_{zz}(z, t) + \int_0^t g(t-s) \zeta_{zz} ds = 0 \text{ in } (0, \ell_0) \times]0, +\infty[\\ \rho \vartheta_{tt}(z, t) - \tau_2 \vartheta_{zz}(z, t) = 0 \text{ in } (\ell_0, L) \times]0, +\infty[, \end{cases} \quad (3.1)$$

Où ρ, τ_1 et τ_2 sont des constantes positives représentant respectivement la densité et les tensions des cordes ζ et ϑ , la fonction $g \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ est supposée être une fonction positive

3.1 Introduction

décroissante définie sur \mathbb{R}^+ et satisfait aux conditions suivantes :

$$\tau_1 - \int_0^t g(s) ds > 0, \quad g(0) > 0, \quad g'(t) \leq 0,$$

et les conditions initiales sont :

$$\begin{cases} \zeta(z, 0) = \zeta_0(z), \zeta_t(z, 0) = \zeta_1(z) \\ \vartheta(z, 0) = \vartheta_0(z), \vartheta_t(z, 0) = \vartheta_1(z). \end{cases} \quad (3.2)$$

La condition de transmission est :

$$\zeta(\ell_0, t) = \vartheta(\ell_0, t); \quad \rho \left(\tau_1 - \int_0^t g(t-s) ds \right) \zeta_z(\ell_0) = \tau_2 \vartheta_z(\ell_0); \quad \forall t \in]0, +\infty[,$$

suivie par des conditions de compatibilité :

$$\zeta_0(\ell_0) = \vartheta_0(\ell_0), \zeta_1(\ell_0) = \vartheta_1(\ell_0), \quad \rho \tau_1 \zeta_{0z}(\ell_0) = \tau_2 \vartheta_{0z}(\ell_0).$$

Et les conditions aux limites

$$\zeta(0, t) = 0, \quad \tau_2 \vartheta_z(L, t) + \gamma \rho \partial_t^{\alpha, \eta} \vartheta(L, t) = 0 \quad \forall t \in]0, +\infty[,$$

comme dans [23], la notation $\partial_t^{\alpha, \eta}$ représente la dérivée fractionnaire généralisée de Caputo d'ordre $\alpha \in (0, 1]$ par rapport à la variable temporelle t . Elle peut être définie comme :

$$\partial_t^{\alpha, \eta} \vartheta(t) = \begin{cases} \vartheta_{tt}, & \text{pour } \alpha = 1, \eta \geq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \exp(-\eta(t-s)) \frac{d\vartheta}{ds}(s) ds, & \text{pour } \alpha \in (0, 1), \eta \geq 0. \end{cases}$$

L'équation des ondes simple

$$\zeta_{tt} = \zeta_{zz}, \quad z \in (0, L), \quad t > 0,$$

est considérée dans [44] avec un contrôle non local aux limites

$$\zeta(0, t) = 0, \quad \zeta_z(L, t) + \gamma \partial_t^{\alpha, \eta} \zeta(L, t) = 0.$$

L'auteur a examiné la question du taux de décroissance de l'énergie associée et a trouvé une forte stabilité asymptotique sous certaines conditions et un taux de décroissance de type polynomial dans d'autres conditions.

De plus, dans [2], l'équation de la poutre d'Euler-Bernoulli avec dissipation aux limites de type non local est examinée. La stabilité non uniforme est montrée par l'analyse spectrale. Les résultats de stabilité de divers problèmes de transmission amortie en thermo élasticité sont étudiés sous différents points de vue, nous passons en revue ici les travaux [40, 61, 8, 63].

3.1 Introduction

Lemma 3.1. [44] *Considérons la fonction μ définie comme :*

$$\mu(\xi) = |\xi|^{(2\alpha-1)/2}, \quad -\infty < \xi < +\infty, 0 < \alpha < 1.$$

Alors, la relation entre l'entrée ζ et la sortie O du système est décrite par :

$$\begin{aligned} \partial_t \phi(\xi, t) + (\xi^2 + \eta) \phi(\xi, t) - U(t)\mu(\xi) &= 0, \quad -\infty < \xi < +\infty, \eta \geq 0, t > 0 \\ \phi(\xi, 0) &= 0 \\ O(t) &= (\pi)^{-1} \sin(\alpha\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi) \phi(\xi, t) d\xi, \end{aligned}$$

ce qui peut être exprimé comme :

$$O = I^{1-\alpha, \eta} U,$$

où

$$[I^{\alpha, \eta} f](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} e^{-\eta(t-\tau)} f(\tau) d\tau.$$

Cette tâche est organisé comme suit. Dans le Théorème [3.1], nous énonçons la fonctionnelle d'énergie associée et sa dérivée pour assurer la dissipativité du système. Ensuite, après avoir introduit les espaces nécessaires et le produit scalaire de notre problème, le bien-fondé de notre modèle est analysé dans la Section [3.2], Théorème [3.2], en utilisant la théorie des semi-groupes. Dans la Section [3.3], nous montrons la forte stabilité de l'énergie lorsque le temps tend vers l'infini, comme indiqué dans le Théorème [3.3]

3.2 Bien-fondé

Nous sommes maintenant en mesure de reformuler le système (3.1). En effet, en utilisant le Lemme 3.1, le système (3.1) devient

$$\left\{ \begin{array}{ll} \zeta_{tt}(z, t) - \tau_1 \zeta_{zz}(z, t) + \int_0^t g(t-s) \zeta_{zz} ds = 0 & \text{dans } (0, \ell_0) \times]0, +\infty[, \\ \rho \vartheta_{tt}(z, t) - \tau_2 \vartheta_{zz}(z, t) = 0 & \text{dans } (\ell_0, L) \times]0, +\infty[, \\ \partial_t \phi(\xi, t) + (\xi^2 + \eta) \phi(\xi, t) - \vartheta_t(L, t) \mu(\xi) = 0 & \text{dans } (-\infty, \infty) \times]0, +\infty[, \\ \zeta(\ell_0, t) = \vartheta(\ell_0, t), \rho \left(\tau_1 - \int_0^t g(t-s) ds \right) \zeta_z(\ell_0) = \tau_2 \vartheta_z(\ell_0) & \text{sur }]0, +\infty[, \\ \zeta(0, t) = 0 & \text{sur }]0, +\infty[, \\ \tau_2 \vartheta_z(L, t) + \omega \rho \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi) \phi(\xi, t) d\xi = 0 & \text{sur }]0, +\infty[, \\ \zeta(z, 0) = \zeta_0(z), \zeta_t(z, 0) = \zeta_1(z) & \text{sur } (0, \ell_0), \\ \vartheta(z, 0) = \vartheta_0(z), \vartheta_t(z, 0) = \vartheta_1(z) & \text{sur } (\ell_0, L), \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Où $\omega = (\pi)^{-1} \sin(\alpha\pi)\gamma$.

Theoreme 3.1. *Pour une solution (ζ, ϑ, ϕ) de (3.3), nous définissons l'énergie comme suit :*

$$\begin{aligned} E(t) = & \frac{1}{2} \int_0^{\ell_0} |\zeta_t|^2 dz + \frac{1}{2} \int_{\ell_0}^L \left(|\vartheta_t|^2 + \frac{\tau_2}{\rho} |\vartheta_z|^2 \right) dz + \frac{\omega}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(\xi, t)|^2 d\xi \\ & + \frac{1}{2} (g \circ \zeta_z)(t) + \frac{1}{2} \left(\tau_1 - \int_0^t g(s) ds \right) \int_0^{\ell_0} |\zeta_z(t)|^2 dz, \end{aligned} \quad (3.4)$$

Et l'énergie $E(t)$ satisfait :

$$E'(t) = -\omega \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2 + \eta) |\phi(\xi, t)|^2 d\xi + \frac{1}{2} (g' \circ \zeta_z)(t) - \frac{1}{2} g(t) \int_0^{\ell_0} |\zeta_z(t)|^2 dz \leq 0, \quad (3.5)$$

avec

$$(g \circ \zeta_z)(t) = \int_0^t g(t-s) \int_0^{\ell_0} |\zeta_z(s) - \zeta_z(t)|^2 dz ds.$$

Démonstration. En multipliant (3.3)₁ par $\bar{\zeta}_t$, puis en ajoutant son conjugué, nous obtiendrons

$$\frac{1}{2} [(\zeta_{tt} \bar{\zeta}_t + \bar{\zeta}_{tt} \zeta_t) - \tau_1 (\zeta_{zz} \bar{\zeta}_t + \bar{\zeta}_{zz} \zeta_t) + I] = 0, \quad (3.6)$$

Avec $I = \int_0^t g(t-s) \zeta_{zz} ds \bar{\zeta}_t + \int_0^t g(t-s) \bar{\zeta}_{zz} ds \zeta_t$.

En intégrant par parties sur $(0, \ell_0)$ l'équation (3.9), nous avons

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{\ell_0} |\zeta_t|^2 dz + \tau_1 \int_0^{\ell_0} |\zeta_z|^2 dz \right] - \tau_1 \Re (\zeta_z(\ell_0) \bar{\zeta}_t(\ell_0)) + \frac{1}{2} \int_0^{\ell_0} Idz = 0, \quad (3.7)$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell_0} Idz &= \int_0^{\ell_0} \int_0^t g(t-s) \zeta_{zz}(s) \bar{\zeta}_t(s) ds dz + \int_0^{\ell_0} \int_0^t g(t-s) \bar{\zeta}_{zz}(s) \zeta_t(s) ds dz \\ &= \int_0^t g(t-s) \left[\zeta_z(\ell_0) \bar{\zeta}_t(\ell_0) - \int_0^{\ell_0} (\zeta_z(s) - \zeta_z(t)) \bar{\zeta}_{tz}(t) dz \right] ds \\ &\quad - \int_0^t g(t-s) \int_0^{\ell_0} \zeta_z(t) \bar{\zeta}_{tz}(t) dz ds \\ &\quad + \int_0^t g(t-s) \left[\bar{\zeta}_z(\ell_0) \zeta_t(\ell_0) - \int_0^{\ell_0} (\bar{\zeta}_z(s) - \bar{\zeta}_z(t)) \zeta_{tz}(t) dz \right] ds \\ &\quad - \int_0^t g(t-s) \int_0^{\ell_0} \bar{\zeta}_z(t) \zeta_{tz}(t) dz ds \\ &= \int_0^t g(t-s) \left[2\Re (\zeta_z(\ell_0) \bar{\zeta}_t(\ell_0)) + \frac{d}{dt} \int_0^{\ell_0} |\zeta_z(s) - \zeta_z(t)|^2 dz \right] ds \\ &\quad - \int_0^t g(s) \left(\frac{d}{dt} \int_0^{\ell_0} |\zeta_z(t)|^2 dz \right) ds, \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ce qui implique qu'en multipliant $(3.3)_1$ par $\bar{\zeta}_t$, puis en ajoutant son conjugué, nous obtenons :

$$\frac{1}{2} [(\zeta_{tt} \bar{\zeta}_t + \bar{\zeta}_{tt} \zeta_t) - \tau_1 (\zeta_{zz} \bar{\zeta}_t + \bar{\zeta}_{zz} \zeta_t) + I] = 0, \quad (3.9)$$

Avec $I = \int_0^t g(t-s) \zeta_{zz} ds \bar{\zeta}_t + \int_0^t g(t-s) \bar{\zeta}_{zz} ds \zeta_t$.

En intégrant par parties sur $(0, \ell_0)$ l'équation (3.9) , nous avons

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{\ell_0} |\zeta_t|^2 dz + \tau_1 \int_0^{\ell_0} |\zeta_z|^2 dz \right] - \tau_1 \Re (\zeta_z(\ell_0) \bar{\zeta}_t(\ell_0)) + \frac{1}{2} \int_0^{\ell_0} Idz = 0, \quad (3.10)$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ell_0} Idz &= \int_0^{\ell_0} \int_0^t g(t-s) \zeta_{zz}(s) \bar{\zeta}_t(s) ds dz + \int_0^{\ell_0} \int_0^t g(t-s) \bar{\zeta}_{zz}(s) \zeta_t(s) ds dz \\
&= \int_0^t g(t-s) \left[\zeta_z(\ell_0) \bar{\zeta}_t(\ell_0) - \int_0^{\ell_0} (\zeta_z(s) - \zeta_z(t)) \bar{\zeta}_{tz}(t) dz \right] ds \\
&\quad - \int_0^t g(t-s) \int_0^{\ell_0} \zeta_z(t) \bar{\zeta}_{tz}(t) dz ds \\
&\quad + \int_0^t g(t-s) \left[\bar{\zeta}_z(\ell_0) \zeta_t(\ell_0) - \int_0^{\ell_0} (\bar{\zeta}_z(s) - \bar{\zeta}_z(t)) \zeta_{tz}(t) dz \right] ds \\
&\quad - \int_0^t g(t-s) \int_0^{\ell_0} \bar{\zeta}_z(t) \zeta_{tz}(t) dz ds \\
&= \int_0^t g(t-s) \left[2\Re(\zeta_z(\ell_0) \bar{\zeta}_t(\ell_0)) + \frac{d}{dt} \int_0^{\ell_0} |\zeta_z(s) - \zeta_z(t)|^2 dz \right] ds \\
&\quad - \int_0^t g(s) \left(\frac{d}{dt} \int_0^{\ell_0} |\zeta_z(t)|^2 dz \right) ds,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ell_0} Idz &= 2 \int_0^t g(t-s) \Re(\zeta_z(\ell_0) \bar{\zeta}_t(\ell_0)) ds + \frac{d}{dt} \left[\int_0^t g(t-s) \int_0^{\ell_0} |\zeta_z(s) - \zeta_z(t)|^2 dz ds \right] \\
&\quad - \frac{d}{dt} \left[\int_0^t g(s) \int_0^{\ell_0} |\zeta_z(t)|^2 dz ds \right] - \int_0^t g'(t-s) \int_0^{\ell_0} |\zeta_z(s) - \zeta_z(t)|^2 dz ds \\
&\quad + \int_0^t g(s) \int_0^{\ell_0} |\zeta_z(t)|^2 dz ds \\
&= 2 \int_0^t g(t-s) \Re(\zeta_z(\ell_0) \bar{\zeta}_t(\ell_0)) ds + \frac{d}{dt} (g \circ \zeta_z)(t) - \frac{d}{dt} \left[\int_0^t g(s) \int_0^{\ell_0} |\zeta_z(t)|^2 dz ds \right] \\
&\quad - (g' \circ \zeta_z)(t) + \int_0^t g(s) \int_0^{\ell_0} |\zeta_z(t)|^2 dz ds.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Enfin, l'équation (3.9) sera :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{\ell_0} |\zeta_t|^2 dz + \tau_1 \int_0^{\ell_0} |\zeta_z|^2 dz \right] \\
&\quad - \tau_1 \Re(\zeta_z(\ell_0) \bar{\zeta}_t(\ell_0)) + \int_0^t g(t-s) \Re(\zeta_z(\ell_0) \bar{\zeta}_t(\ell_0)) ds \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (g \circ \zeta_z)(t) - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_0^t g(s) \int_0^{\ell_0} |\zeta_z(t)|^2 dz ds \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} (g' \circ \zeta_z)(t) + \frac{1}{2} \int_0^t g(s) \int_0^{\ell_0} |\zeta_z(t)|^2 dz ds = 0.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Nous utilisons la méthode appliquée dans [33], puis (3.3)₂ devient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_{\ell_0}^L |\vartheta_t|^2 dz + \frac{\tau_2}{\rho} \int_{\ell_0}^L |\vartheta_z|^2 dz \right] + \frac{\tau_2}{\rho} \Re(\vartheta_z(\ell_0) \bar{\vartheta}_t(\ell_0)) - \frac{\tau_2}{\rho} \Re(\vartheta_z(L) \bar{\vartheta}_t(L)) = 0, \tag{3.14}$$

3.2 Bien-fondé

en ajoutant (3.13) et (3.14), puis en utilisant les conditions de transmission, nous obtiendrons :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{\ell_0} |\zeta_t|^2 dz + \tau_1 \int_0^{\ell_0} |\zeta_z|^2 dz \right] + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_{\ell_0}^L |\vartheta_t|^2 dz + \frac{\tau_2}{\rho} \int_{\ell_0}^L |\vartheta_z|^2 dz \right] \\ & - \frac{\tau_2}{\rho} \Re(\vartheta_z(L) \bar{\vartheta}_t(L)) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (g \circ \zeta_z)(t) - \frac{d}{dt} \left[\int_0^t g(s) \int_0^{\ell_0} |\zeta_z(t)|^2 dz ds \right] \\ & - \frac{1}{2} (g' \circ \zeta_z)(t) + \int_0^t g(s) \int_0^{\ell_0} |\zeta_z(t)|^2 dz ds = 0. \end{aligned}$$

À partir des conditions aux limites, nous avons :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{\ell_0} |\zeta_t|^2 dz + \tau_1 \int_0^{\ell_0} |\zeta_z|^2 dz \right] + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_{\ell_0}^L |\vartheta_t|^2 dz + \frac{\tau_2}{\rho} \int_{\ell_0}^L |\vartheta_z|^2 dz \right] \\ & + \omega \Re \left(\bar{\vartheta}_t(L) \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\varepsilon) \phi(\varepsilon, t) d\varepsilon \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} (g \circ \zeta_z)(t) - \frac{d}{dt} \left[\int_0^t g(s) \int_0^{\ell_0} |\zeta_z(t)|^2 dz ds \right] \right) \\ & - \frac{1}{2} \left((g' \circ \zeta_z)(t) + \int_0^t g(s) \int_0^{\ell_0} |\zeta_z(t)|^2 dz ds \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Nous appliquons la méthode utilisée dans [33], puis (3.3)₃ devient

$$\frac{\omega}{2} \frac{d}{dt} \|\phi\|_2^2 + \omega \int_{-\infty}^{+\infty} (\varepsilon^2 + \eta) |\phi(\varepsilon, t)|^2 d\varepsilon - \omega \Re \left(\vartheta_t(L) \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\varepsilon) \bar{\phi}(\varepsilon, t) d\varepsilon \right) = 0. \quad (3.16)$$

En ajoutant (3.15) et (3.16), nous obtiendrons :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{\ell_0} |\zeta_t|^2 dz + \tau_1 \int_0^{\ell_0} |\zeta_z|^2 dz \right] + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_{\ell_0}^L |\vartheta_t|^2 dz + \frac{\tau_2}{\rho} \int_{\ell_0}^L |\vartheta_z|^2 dz \right] \\ & + \frac{\omega}{2} \frac{d}{dt} \|\phi\|_2^2 + \omega \int_{-\infty}^{+\infty} (\varepsilon^2 + \eta) |\phi(\varepsilon, t)|^2 d\varepsilon - \frac{1}{2} \left((g' \circ \zeta_z)(t) + \int_0^t g(s) \int_0^{\ell_0} |\zeta_z(t)|^2 dz ds \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} (g \circ \zeta_z)(t) - \frac{d}{dt} \left[\int_0^t g(s) \int_0^{\ell_0} |\zeta_z(t)|^2 dz ds \right] \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Par conséquent, le Théorème (3.1) est un résultat de l'équation (3.17). \square

Nous discutons du caractère bien posé de (3.3). Pour ce faire, nous introduisons l'espace suivant :

$$H_*^1(0, \ell_0) = \{u \in H_1(0, \ell_0) : u(0) = 0\}. \quad (3.18)$$

Ensuite, nous reformulons (3.3) dans un cadre de semigroupe. Soit $\tilde{\zeta} = \zeta_t$, $\tilde{\vartheta} = \vartheta_t$ et posons

$$\mathcal{H} = \{H_*^1(0, \ell_0) \times L_2(0, \ell_0) \times H^1(\ell_0, L) \times L_2(\ell_0, L) \times L_2(-\infty, +\infty) : u(\ell_0) = v(\ell_0)\},$$

équipé du produit scalaire suivant :

$$\begin{aligned} \langle U, U_1 \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_0^{\ell_0} (\tilde{\zeta} \bar{\zeta}_1) dz + \int_{\ell_0}^L \left(\tilde{\vartheta} \bar{\vartheta}_1 + \frac{\tau_2}{\rho} \vartheta_z \bar{\vartheta}_{1z} \right) dz + \omega \int_{-\infty}^{+\infty} \phi \bar{\phi}_1 d\xi \\ &+ \frac{1}{2} (g \circ (\zeta_z, \vartheta_z)) + \frac{1}{2} \left(\tau_1 - \int_0^t g(s) ds \right) \int_0^{\ell_0} \zeta_z \bar{\vartheta}_z dz, \end{aligned} \quad (3.19)$$

Où

$$(g \circ (\zeta_z, \vartheta_z))(t) = \int_0^t g(t-s) \int_0^{\ell_0} (\zeta_z(s) - \zeta_z(t)) (\bar{\vartheta}(s)_z - \bar{\vartheta}(t)_z) dz ds.$$

Pour tout $U = (\zeta, \tilde{\zeta}, \vartheta, \tilde{\vartheta}, \phi)^T$ et $U_1 = (\zeta_1, \tilde{\zeta}_1, \vartheta_1, \tilde{\vartheta}_1, \phi_1)^T$. Soit $U = (\zeta, \tilde{\zeta}, \vartheta, \tilde{\vartheta}, \phi)^T$ et réécrivons (3.3) comme :

$$\begin{cases} U' = \mathcal{A}U, \\ U(0) = U_0 = (\zeta_0, \zeta_1, \vartheta_0, \vartheta_1, \phi_0), \end{cases} \quad (3.20)$$

Où l'opérateur \mathcal{A} est défini par :

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} \zeta \\ \tilde{\zeta} \\ \vartheta \\ \tilde{\vartheta} \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\zeta} \\ \tau_1 \zeta_{zz} - \int_0^t g(t-s) \zeta_{zz} ds \\ \tilde{\vartheta} \\ \frac{\tau_2}{\rho} \vartheta_{zz} \\ -(\xi^2 + \eta) \phi + \tilde{\vartheta}(L) \mu(\xi) \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Le domaine de \mathcal{A} est :

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{array}{l} (\zeta, \tilde{\zeta}, \vartheta, \tilde{\vartheta}, \phi)^T \text{ dans } \mathcal{H} : \zeta \in H^2(0, L) \cap H_*^1(0, \ell_0), \tilde{\zeta} \in H_*^1(0, \ell_0) \\ \vartheta \in H^2(\ell_0, L), \tilde{\vartheta} \in H^1(\ell_0, L), \zeta(\ell_0) = \vartheta(\ell_0), \\ \rho \left(\tau_1 - \int_0^t g(t-s) ds \right) \zeta_z(\ell_0) = \tau_2 \vartheta_z(\ell_0) \\ \tilde{\zeta}(\ell_0) = \tilde{\vartheta}(\ell_0), -(\xi^2 + \eta) \phi + \tilde{\vartheta}(L) \mu(\xi) \in L^2(-\infty, +\infty) \\ \tau_2 \vartheta_z(L) + \omega \rho \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi) \phi(\xi) d\xi = 0 \\ |\xi| \phi \in L^2(-\infty, +\infty) \end{array} \right\}. \quad (3.22)$$

Le caractère bien posé du problème (3.3) est garanti par le théorème suivant.

Theoreme 3.2. (*Existence et unicité*)

1. Si $U_0 \in D(\mathcal{A})$, alors le système (3.20) admet une solution forte unique

$$U \in C^0(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}).$$

2. Si $U_0 \in \mathcal{H}$, alors le système (3.20) admet une solution faible unique

$$U \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}).$$

Démonstration. Nous devons montrer que \mathcal{A} est un opérateur maximal monotone. Pour commencer, nous avons :

$$E(t) = \frac{1}{2} \langle U, U \rangle_{\mathcal{H}},$$

Ce qui donne :

$$E'(t) = \frac{1}{2} \left(\langle U', U \rangle_{\mathcal{H}} + \overline{\langle U', U \rangle_{\mathcal{H}}} \right) = \mathcal{R} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}}.$$

D'autre part, nous avons :

$$E'(t) \leq 0. \quad (3.23)$$

Pour la maximalité, soit $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)^T \in \mathcal{H}$ et cherchons $U = (\zeta, \tilde{\zeta}, \vartheta, \tilde{\vartheta}, \phi)^T \in D(\mathcal{A})$ satisfaisant $\lambda U - \mathcal{A}U = F$, pour $\lambda > 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \lambda \zeta - \tilde{\zeta} = f_1, \\ \lambda \tilde{\zeta} - \tau_1 \zeta_{zz} + \int_0^t g(t-s) \zeta_{zz} ds = f_2, \\ \lambda \vartheta - \tilde{\vartheta} = f_3, \\ \lambda \tilde{\vartheta} - \frac{\tau_2}{\rho} \vartheta_{zz} = f_4, \\ \lambda \phi + (\xi^2 + \eta) \phi - \tilde{\vartheta}(L) \mu(\xi) = f_5. \end{cases} \quad (3.24)$$

En supposant que nous avons trouvé ζ et ϑ avec la régularité appropriée, alors :

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta} &= \lambda \zeta - f_1, \\ \tilde{\vartheta} &= \lambda \vartheta - f_3. \end{aligned}$$

Il est clair que $\tilde{\zeta} \in H_*^1(0, \ell_0)$ et $\tilde{\vartheta} \in H^1(\ell_0, L)$. De plus, par (3.24)₅, nous pouvons trouver ϕ comme :

$$\phi = \frac{f_5(\xi) + \mu(\xi) \tilde{\vartheta}(L)}{\xi^2 + \eta + \lambda}. \quad (3.25)$$

D'après (3.24)₂ et (3.24)₄, les fonctions ζ et ϑ satisfont le système

$$\begin{aligned} \lambda^2 \zeta - \tau_1 \zeta_{zz} + \int_0^t g(t-s) \zeta_{zz} ds &= f_2 + \lambda f_1, \\ \lambda^2 \vartheta - \frac{\tau_2}{\rho} \vartheta_{zz} &= f_4 + \lambda f_3. \end{aligned} \quad (3.26)$$

3.2 Bien-fondé

Cela signifie que résoudre le système (3.26) équivaut à trouver $\zeta \in H^2 \cap H_*^1(0, \ell_0)$ et $\vartheta \in H^2(\ell_0, L)$ tel que :

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell_0} \left(\lambda^2 \zeta \bar{w} - \left(\tau_1 \zeta_{zz} - \int_0^t g(t-s) \zeta_{zz} ds \right) \bar{w} \right) dz &= \int_0^{\ell_0} (f_2 + \lambda f_1) \bar{w} dz \\ \int_{\ell_0}^L \left(\lambda^2 \vartheta \bar{\chi} - \frac{\tau_2}{\rho} \vartheta_{zz} \bar{\chi} \right) dz &= \int_{\ell_0}^L (f_4 + \lambda f_3) \bar{\chi} dz. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Alors :

$$\begin{aligned} &\int_0^{\ell_0} \left(\lambda^2 \zeta \bar{w} + \left(\tau_1 - \int_0^t g(t-s) ds \right) \zeta_z \bar{w}_z \right) dz + \int_{\ell_0}^L \left(\lambda^2 \vartheta \bar{\chi} + \frac{\tau_2}{\rho} \vartheta_z \bar{\chi}_z \right) dz + \tilde{\omega} \lambda v(L) \bar{\chi}(L) \\ &= \int_0^{\ell_0} (f_2 + \lambda f_1) \bar{w} dz + \int_{\ell_0}^L (f_4 + \lambda f_3) \bar{\chi} dz - \omega \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(\xi)}{\xi^2 + \eta + \lambda} f_5(\xi) d\xi \bar{\chi}(L) + \tilde{\omega} f_3(L) \bar{\chi}(L), \end{aligned} \quad (3.28)$$

où

$$\tilde{\omega} = \omega \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2(\xi)}{\xi^2 + \eta + \lambda} d\xi.$$

Par conséquent, le problème (3.28) est équivalent au problème

$$a((\zeta, \vartheta), (w, \chi)) = L(w, \chi),$$

où la forme bilinéaire

$$a : [H_*^1(0, \ell_0) \times H^1(\ell_0, L)]^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

et la forme linéaire

$$L : H_*^1(0, \ell_0) \times H^1(\ell_0, L) \rightarrow \mathbb{R},$$

sont définies par :

$$\begin{aligned} a((\zeta, \vartheta), (w, \chi)) &= \int_0^{\ell_0} \left(\lambda^2 \zeta \bar{w} + \left(\tau_1 - \int_0^t g(t-s) ds \right) \zeta_z \bar{w}_z \right) dz \\ &+ \int_{\ell_0}^L \left(\lambda^2 \vartheta \bar{\chi} + \frac{\tau_2}{\rho} \vartheta_z \bar{\chi}_z \right) dz + \tilde{\omega} \lambda \vartheta(L) \bar{\chi}(L), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} L(w, \chi) &= \int_0^{\ell_0} (f_2 + \lambda f_1) \bar{w} dz + \int_{\ell_0}^L (f_4 + \lambda f_3) \bar{\chi} dz \\ &- \omega \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(\xi)}{\xi^2 + \eta + \lambda} f_5(\xi) d\xi \bar{\chi}(L) + \tilde{\omega} f_3(L) \bar{\chi}(L). \end{aligned}$$

Il est facile de confirmer la continuité et la coercivité de a , ainsi que la continuité de L . En appliquant le théorème de Lax-Milgram.

Nous déduisons que pour tout $(w, \chi) \in H_*^1(0, \ell_0) \times H^1(\ell_0, L)$, le problème (3.28) possède une solution unique $(\zeta, \vartheta) \in H_*^1(0, \ell_0) \times H^1(\ell_0, L)$. Et en utilisant la régularité elliptique

3.3 Stabilité forte du système

classique, il découle de (3.27) que $(\zeta, \vartheta) \in H^2(0, \ell_0) \times H^2(\ell_0, L)$.

Par conséquent, l'opérateur $\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$. Finalement, le résultat du Théorème 3.2 découle du théorème de Hille-Yosida. \square

3.3 Stabilité forte du système

Dans cette section, nous utilisons les critères généraux d'Arendt-Batty de [23] pour démontrer la stabilité forte du C_0 -semi-groupe e^{tA} associé au système (3.1), même en l'absence de la compacité du résolvant de \mathcal{A} . Notre principal résultat est encapsulé dans le théorème suivant.

Theoreme 3.3. *Le C_0 -semi-groupe e^{tA} est fortement stable dans \mathcal{H} , c'est-à-dire, pour tout $\zeta_0 \in \mathcal{H}$, la solution de (3.20) satisfait :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \| e^{tA} \zeta_0 \|_{\mathcal{H}} = 0.$$

Pour prouver ce théorème, nous avons besoin de ce lemme.

Lemma 3.2. *\mathcal{A} n'a pas de valeur propre sur $i\mathbb{R}$.*

Démonstration. Nous distinguons les cas où $i\lambda = 0$ et $i\lambda \neq 0$.

Étape 01 Résolution de $\mathcal{A}U = 0$. À partir de (3.21) nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\zeta} = 0 \\ \tau_1 \zeta_{zz} - \int_0^t g(t-s) \zeta_{zz} ds = 0 \\ \tilde{\vartheta} = 0 \\ \frac{\tau_2}{\rho} \vartheta_{zz} = 0 \\ -(\xi^2 + \eta) \phi + \tilde{\vartheta}(L) \mu(\xi) = 0. \end{array} \right. \quad (3.29)$$

Cela implique que $\tilde{\zeta} = \tilde{\vartheta} = \phi = 0$

Et grâce aux conditions aux limites dans (3.22) nous avons $\zeta = \vartheta = 0$.

Ainsi, λ n'est pas une valeur propre de \mathcal{A} .

Étape 02 Nous allons raisonner par l'absurde, supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $U \neq 0$ tels que :

$$i\lambda U - \mathcal{A}U = 0.$$

3.3 Stabilité forte du système

Alors, nous avons :

$$\begin{cases} i\lambda\zeta - \tilde{\zeta} = 0 \\ i\lambda\tilde{\zeta} - \tau_1\zeta_{zz} + \int_0^t g(t-s)\zeta_{zz}ds = 0 \\ i\lambda\vartheta - \tilde{\vartheta} = 0 \\ i\lambda\tilde{\vartheta} - \frac{\tau_2}{\rho}\vartheta_{zz} = 0 \\ i\lambda\phi + (\xi^2 + \eta)\phi - \tilde{\vartheta}(L)\mu(\xi) = 0. \end{cases} \quad (3.30)$$

Alors, à partir de (3.5) nous avons :

$$\phi = 0.$$

En utilisant (3.30)₅

$$\tilde{\vartheta}(L) = 0.$$

Ainsi, par (3.30)₃ et (3.22)₄ nous obtiendrons :

$$\vartheta(L) = 0, \vartheta_z(L) = 0. \quad (3.31)$$

En insérant (3.30)₃ dans (3.30)₄, nous obtiendrons :

$$-\lambda^2\vartheta - \frac{\tau_2}{\rho}\vartheta_{zz} = 0. \quad (3.32)$$

La solution de l'équation (3.32) est donnée par $\vartheta(z) = c_1 \cos\left(\frac{\lambda}{r}z\right) + c_2 \sin\left(\frac{\lambda}{r}z\right)$, $r = \sqrt{\frac{\tau_2}{\rho}}$.

En utilisant les conditions aux limites (3.31), nous concluons que :

$$\vartheta \equiv 0.$$

De plus, des conditions de transmission, nous obtiendrons :

$$\zeta(\ell_0) = \zeta_z(\ell_0) = 0.$$

D'une manière similaire, pour

$$r = \sqrt{\tau_1 - \int_0^t g(t-s)ds}.$$

Nous concluons que :

$$\zeta \equiv 0.$$

Par conséquent, $U = 0$. Cela signifie que, \mathcal{A} ne possède pas de valeurs propres purement imaginaires. \square

3.3 Stabilité forte du système

Lemma 3.3. *Nous observons les cas suivants :*

- Lorsque $\lambda = 0$ et $\eta \neq 0$, l'opérateur $i\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif.
- Lorsque $\lambda \neq 0$, l'opérateur $i\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif.

Démonstration. **Cas 01 :** Pour $\lambda \neq 0$. Soit $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)^T \in \mathcal{H}$, et soit $U = (\zeta, \tilde{\zeta}, \vartheta, \tilde{\vartheta}, \phi)^T \in D(\mathcal{A})$, tel que :

$$i\lambda U - \mathcal{A}U = F. \quad (3.33)$$

Équivalente nous avons :

$$\begin{cases} i\lambda\zeta - \tilde{\zeta} = f_1 \\ i\lambda\tilde{\zeta} - \tau_1\zeta_{zz} + \int_0^t g(t-s)\zeta_{zz}ds = f_2 \\ i\lambda\vartheta - \tilde{\vartheta} = f_3 \\ i\lambda\tilde{\vartheta} - \frac{\tau_2}{\rho}\vartheta_{zz} = f_4 \\ i\lambda\phi + (\xi^2 + \eta)\phi - \tilde{\vartheta}(L)\mu(\xi) = f_5. \end{cases} \quad (3.34)$$

En insérant (3.34)₁ et (3.34)₃ dans (3.34)₂ et (3.34)₄, nous obtiendrons :

$$\begin{cases} -\lambda^2\zeta - \tau_1\zeta_{zz} + \int_0^t g(t-s)\zeta_{zz}ds = f_2 + i\lambda f_1 \\ -\lambda^2\vartheta - \frac{\tau_2}{\rho}\vartheta_{zz} = f_4 + i\lambda f_3. \end{cases} \quad (3.35)$$

Résoudre le système (3.35) revient à trouver $\zeta \in H^2 \cap H_*^1(0, \ell_0)$ et $\vartheta \in H^2(\ell_0, L)$ tels que :

$$\begin{cases} \int_0^{\ell_0} \left(-\lambda^2\zeta\bar{w} - \left(\tau_1\zeta_{zz} - \int_0^t g(t-s)\zeta_{zz}ds \right) \bar{w} \right) dz = \int_0^{\ell_0} (f_2 + i\lambda f_1) \bar{w} dz \\ \int_{\ell_0}^L \left(-\lambda^2\vartheta\bar{\chi} - \frac{\tau_2}{\rho}\vartheta_{zz}\bar{\chi} \right) dz = \int_{\ell_0}^L (f_4 + i\lambda f_3) \bar{\chi} dz. \end{cases} \quad (3.36)$$

Nous trouvons les fonctions ζ et ϑ satisfaisant le système suivant :

$$\begin{aligned} & \int_0^{\ell_0} \left(-\lambda^2\zeta\bar{w} + \left(\tau_1 - \int_0^t g(t-s)ds \right) \zeta_z\bar{w}_z \right) dz + \int_{\ell_0}^L \left(-\lambda^2\vartheta\bar{\chi} + \frac{\tau_2}{\rho}\vartheta_z\bar{\chi}_z \right) dz + \tilde{\omega}i\lambda\vartheta(L)\bar{\chi}(L) \\ & = \int_0^{\ell_0} (f_2 + i\lambda f_1) \bar{w} dz + \int_{\ell_0}^L (f_4 + i\lambda f_3) \bar{\chi} dz - \omega \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(\xi)}{\xi^2 + \eta + i\lambda} f_5(\xi) d\xi \bar{\chi}(L) + \tilde{\omega} f_3(L) \bar{\chi}(L). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Nous pouvons réécrire (3.37) comme :

$$-\langle L_\lambda U, V \rangle_{H_R^1} + \langle U, V \rangle_{H_R^1} = l(V), \quad (3.38)$$

Où

$$H_R^1(0, L) = \{(\zeta, \vartheta) \in H_*^1(0, \ell_0) \times H^1(\ell_0, L) / \zeta(\ell_0) = \zeta(\ell_0)\},$$

3.3 Stabilité forte du système

Avec le produit interne défini par :

$$\langle U, V \rangle_{H_R^1} = \int_0^{\ell_0} \left(\tau_1 - \int_0^t g(t-s) ds \right) \zeta_z \bar{w}_z dz + \frac{\tau_2}{\rho} \int_{\ell_0}^L \vartheta_z \bar{\chi}_z dz + \tilde{\xi} i \lambda \vartheta(L) \chi(\bar{L}),$$

Et

$$\langle L_\lambda U, V \rangle_{H_R^1} = \lambda^2 \int_0^{\ell_0} \zeta \bar{w} dz + \lambda^2 \int_{\ell_0}^L \vartheta \bar{\chi} dz.$$

En utilisant l'incorporation compacte de $(L^2(0, \ell_0) \times L^2(\ell_0, L))$ dans $(H_R^1(0, L))'$ et de $(H_R^1(0, L))$ dans $(L^2(0, \ell_0) \times L^2(\ell_0, L))$, nous déduisons que l'opérateur L_λ est compact de $L^2(0, \ell_0) \times L^2(\ell_0, L)$ dans $L^2(0, \ell_0) \times L^2(\ell_0, L)$.

Par conséquent, par l'alternative de Fredholm, prouver l'existence de U solution de (3.38) revient à prouver que 1 n'est pas de L_λ .

En effet, si 1 est une valeur propre, alors il existe $U \neq 0$ tel que :

$$\langle L_\lambda U, V \rangle_{H_R^1} = \langle U, V \rangle_{H_R^1}, \forall V \in H_R^1. \quad (3.39)$$

En particulier pour $U = V$, on en déduit que :

$$\lambda^2 \left[\|\zeta\|_{L^2(0, \ell_0)}^2 + \|\vartheta\|_{L^2(\ell_0, L)}^2 \right] = \left(\tau_1 - \int_0^t g(t-s) ds \right) \|\zeta_z\|_{L^2(0, \ell_0)}^2 + \frac{\tau_2}{\rho} \|\vartheta_z\|_{L^2(\ell_0, L)}^2 + \tilde{\xi} i \lambda |\vartheta(L)|^2.$$

Ainsi, nous avons :

$$\vartheta(L) = 0. \quad (3.40)$$

À partir de (3.39) et (3.22), nous obtiendrons :

$$\vartheta_z(L) = 0. \quad (3.41)$$

Et

$$\begin{cases} -\lambda^2 \zeta - r_1 \zeta_{zz} = 0, \\ -\lambda^2 \vartheta - r_2 \vartheta_{zz} = 0, \end{cases} \quad (3.42)$$

Où $r_1 = \tau_1 - \int_0^t g(t-s) ds$ et $r_2 = \frac{\tau_2}{\rho}$. Les solutions générales pour (3.42) sont de la forme :

$$\begin{cases} \zeta(z) = c_1 \cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{r_1}} z\right) + c_2 \sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{r_1}} z\right), \\ v(z) = c_3 \cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{r_2}} z\right) + c_4 \sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{r_2}} z\right). \end{cases} \quad (3.43)$$

En utilisant les conditions aux limites $\zeta(0) = 0$ et $\vartheta(L) = \vartheta_z(L) = 0$, nous obtiendrons

3.3 Stabilité forte du système

$c_1 = c_3 = c_4 = 0$. De plus, en utilisant les conditions de transmission $\zeta(\ell_0) = \vartheta(\ell_0)$ et $r_1\zeta_z(\ell_0) = r_2\vartheta_z(\ell_0)$, nous trouvons $c_2 = 0$.

Alors $U = 0$. Par conséquent, $i\lambda - \mathcal{A}$ est surjectif pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$. \square

Cas 02 $\lambda = 0$ et $\eta \neq 0$. Le système (3.34) se simplifie comme suit :

$$\begin{cases} -\tilde{\zeta} = f_1 \\ -\tau_1\zeta_{zz} + \int_0^t g(t-s)\zeta_{zz}ds = f_2 \\ -\tilde{\vartheta} = f_3 \\ -\frac{\tau_2}{\rho}\vartheta_{zz} = f_4 \\ (\xi^2 + \eta)\phi - \tilde{\vartheta}(L)\mu(\xi) = f_5. \end{cases} \quad (3.44)$$

Avec les deuxième et quatrième équations de (3.44), on obtient

$$\begin{cases} \zeta(z) = -\frac{1}{r_1} \int_0^x \int_0^s f_2(r) dr ds + Cx, \\ \vartheta(z) = -\frac{1}{r_2} \int_{\ell_0}^x \int_{\ell_0}^s f_4(r) dr ds + C'x + C''. \end{cases} \quad (3.45)$$

À partir des équations (3.44)₃ et (3.44)₅, on a :

$$-\gamma\eta^{\alpha-1}f_3(L) + r_2\vartheta_z(L) + \omega \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(\xi)f_5(\xi)}{\xi^2 + \eta} d\xi = 0.$$

On trouve

$$C' = \frac{1}{r_2} \left[\int_{\ell_0}^L f_4(r) dr + \gamma\eta^{\alpha-1}f_3(L) - \omega \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(\xi)f_5(\xi)}{\xi^2 + \eta} d\xi \right].$$

Par les conditions de transmission aux limites, on obtient :

$$\begin{aligned} \zeta(\ell_0) = \vartheta(\ell_0) &\Rightarrow \ell_0 C - C'' = \frac{1}{r_1} \int_0^{\ell_0} \int_0^s f_2(r) dr ds + C'\ell_0. \\ r_1\zeta_z(\ell_0) = r_2\vartheta_z(\ell_0) &\Rightarrow Cr_1 = \int_0^{\ell_0} \int_0^s f_2(r) dr + C'r_2. \end{aligned}$$

On trouve :

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{r_1} \left[\int_0^{\ell_0} \int_0^s f_2(r) dr + C'r_2 \right], \\ C'' &= \ell_0(C - C') - \frac{1}{r_1} \int_0^{\ell_0} \int_0^s f_2(r) dr. \end{aligned}$$

En conséquence, \mathcal{A} est surjective, ce qui conclut la preuve. Preuve du Théorème (3.3) Selon le Lemme (3.2), l'opérateur \mathcal{A} ne possède pas de valeurs propres purement imaginaires.

De plus, le Lemme (3.3) établit que $R(i\lambda - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $R(i\lambda - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$ pour $\lambda = 0$ et pour tout $\eta > 0$.

Par conséquent, le théorème du graphe fermé de Banach implique que : $\sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ si $\eta > 0$, et $\sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ si $\eta = 0$, ce qui complète la preuve.

Chapitre 4

Étude de l'existence et comportement de la solution de l'équation des ondes avec termes de retard et de logarithmique

Dans cet chapitre, nous examinons le problème d'onde viscoélastique suivant avec terme retardé

$$\begin{cases} \vartheta_{tt} + \vartheta + \Delta^2 \vartheta - \int_0^t g(t-s) \Delta^2 \vartheta(s) ds + \mu_1 \vartheta_t(x, t) + \mu_2 \vartheta_t(x, t - t_0) = \alpha \vartheta \ln \vartheta & \text{dans } \mathcal{O} \times (0, \infty), \\ \vartheta(x, t) = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{O} \times [0, \infty), \\ \vartheta(x, 0) = \vartheta_0(x), \quad \vartheta_t(x, 0) = \vartheta_1(x) & \text{dans } \mathcal{O}, \\ \vartheta_t(x, -t_0) = f_0(x, t_0) & \text{dans } \mathcal{O}, \end{cases} \quad (4.1)$$

Où \mathcal{O} est régulier et borné dans \mathbb{R}^N , avec $N \geq 1$, μ_1 est un nombre non négatif, $\mu_2 \in \mathbb{R}$, et $t_0 > 0$ représente le retard temporel. Les fonctions ϑ_0 , ϑ_1 , et f_0 sont données et appartiennent à des espaces fonctionnels appropriés.

Problèmes viscoélastiques

Depuis les travaux pionniers de Dafermos en 1970 [25, 26], qui ont exploré les taux de décroissance générale, les problèmes de viscoélasticité ont suscité un intérêt considérable. Une vaste gamme de résultats concernant l'existence et le comportement à long terme des solutions a été développée depuis lors.

L'importance des propriétés des matériaux viscoélastiques est devenue de plus en plus évidente, en grande partie grâce à la croissance rapide des industries du caoutchouc et des

plastiques. Au cours des vingt dernières années, des avancées substantielles ont été réalisées dans l'analyse des relations constitutives, des théories de défaillance, et des prédictions de durée de vie des matériaux et structures viscoélastiques, comme le souligne [24]. Hrusa [34] a également étudié une équation viscoélastique non linéaire unidimensionnelle de la forme

$$\vartheta_{tt} - c\vartheta_{xx} + \int_0^t m(t-s) (\psi(\vartheta_x(s)))_x ds = f(x, t).$$

Problèmes impliquant la non-linéarité logarithmique

La non-linéarité logarithmique revêt une grande importance en physique, car elle apparaît naturellement dans plusieurs domaines, notamment la cosmologie inflationnaire, les théories de champs supersymétriques, la mécanique quantique et la physique nucléaire [5, 30].

Ce type de problème a des applications variées dans différents champs de la physique, tels que la physique nucléaire, l'optique et la géophysique [7, 9, 31]. Une contribution notable est venue de Birula et Mycielski [9], qui ont exploré le problème suivant

$$\begin{cases} \vartheta_{tt} - \vartheta_{xx} + \vartheta - \varepsilon\vartheta \ln |\vartheta|^2 = 0, & \text{dans } [a, b] \times (0, T), \\ \vartheta(a, t) = \vartheta(b, t) = 0, & \text{dans } (0, T), \\ \vartheta(x, 0) = \vartheta_0(x), \quad \vartheta_t(x, 0) = \vartheta_1(x), & \text{dans } [a, b]. \end{cases}$$

L'équation est une version relativiste de la mécanique quantique logarithmique et peut également être obtenue en prenant la limite $p \rightarrow 1$ dans l'équation des cordes p -adiques [32, 59].

Dans [12], Cazenave et Haraux ont étudié

$$\vartheta_{tt} - \Delta\vartheta = \vartheta \ln (|\vartheta|^k), \quad \text{dans } \mathbb{R}^3, \quad (4.2)$$

où ils ont prouvé l'existence et l'unicité des solutions pour le problème de Cauchy. Gorka [31] a appliqué des méthodes de compacité pour démontrer l'existence globale de solutions faibles pour tout $(\vartheta_0, \vartheta_1) \in H_0^1 \times L^2$ dans le problème de valeurs initiales-frontières (4.2) pour le cas unidimensionnel.

Problème avec terme retardé

Les équations aux dérivées partielles (EDP) avec effets de retard temporel ont suscité un intérêt considérable dans les recherches récentes ; voir par exemple, [1, 55] et les références qui y sont citées.

Dans [27], les auteurs ont démontré qu'un simple retard dans le contrôle aux frontières peut

entraîner une instabilité. Pour stabiliser les systèmes hyperboliques avec entrée retardée, des mécanismes de contrôle supplémentaires sont nécessaires ; voir [45, 46, 60] pour des études connexes.

Dans [45], les auteurs ont étudié un système d'équations d'ondes avec un terme d'amortissement linéaire aux frontières soumis à un retard. Plus précisément, ils ont considéré le système suivant :

$$\begin{cases} \vartheta_{tt} - \Delta\vartheta = 0, & x \in \mathcal{O}, t > 0, \\ \vartheta(x, t) = 0, & x \in \Gamma_0, t > 0, \\ \frac{\partial\vartheta}{\partial\nu}(x, t) = \mu_1\vartheta_t(x, t) + \mu_2\vartheta_t(x, t - \tau), & x \in \Gamma_1, t > 0, \\ \vartheta(x, 0) = \vartheta_0(x), \vartheta_t(x, 0) = \vartheta_1(x), & x \in \mathcal{O}, \\ \vartheta(x, t - \tau) = g_0(x, t - \tau), & x \in \mathcal{O}, t \in (0, \tau), \end{cases} \quad (4.3)$$

Et ont prouvé, sous l'hypothèse

$$\mu_2 < \mu_1, \quad (4.4)$$

Que l'énergie est exponentiellement stable, cependant si la condition (4.4) n'est pas satisfaite, ils ont identifié une séquence de retards pour laquelle la solution de (4.3) devient instable. La méthode principale utilisée dans [45] repose sur une inégalité d'observabilité combinée à une estimation de Carleman, nous considérons les hypothèses suivantes :

(H1) $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction C^1 décroissante, satisfaisant :

$$g(0) > 0 \quad \text{et} \quad 1 - \int_0^\infty g(s) ds = l > 0$$

(H2) Il existe une fonction décroissante et différentiable $\zeta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, avec $\zeta(0) > 0$ et une constante $1 \leq p < \frac{3}{2}$ telles que :

$$g'(t) \leq -\zeta(t)g^p(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

4.1 Préliminaires

Dans cette section, nous présentons des éléments qui seront utilisés pour prouver notre résultat principal.

Lemma 4.1. ([22], *Inégalité de Sobolev logarithmique*). Soit $\vartheta \in H_0^1(\mathcal{O})$ et r un nombre réel positif qui sera défini plus tard.

Alors, nous avons

$$\int_{\mathcal{O}} \vartheta^2 \ln |\vartheta| dx \leq \frac{1}{2} \|\vartheta\|_2^2 \ln \|\vartheta\|_2^2 + \frac{r^2}{2\pi} \|\nabla \vartheta\|_2^2 - (1 + \ln r) \|\vartheta\|_2^2. \quad (4.5)$$

Lemma 4.2. ([12], *Inégalité de Gronwall logarithmique*). Soient $c > 0$, $f \in L^1(0, T; \mathbb{R}^+)$ et supposons que la fonction $\vartheta : [0, T] \rightarrow [1, \infty)$ vérifie :

$$\vartheta(t) \leq c \left(1 + \int_0^t f(s) \vartheta(s) \ln \vartheta(s) ds \right), \quad t \in [0, T].$$

Alors,

$$\vartheta(t) \leq c \exp \left(c \int_0^t f(s) ds \right), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Lemma 4.3. [3] Les inégalités suivantes sont valides :

$$-\alpha d_0 \sqrt{|\mathcal{O}| c_*^3} \|\Delta \vartheta\|_2^{\frac{3}{2}} \leq \int_{\mathcal{O}} \vartheta^2 \ln |\vartheta|^\alpha dx \leq \alpha c_*^3 \|\Delta \vartheta\|_2^3, \quad \forall \vartheta \in H_0^2(\mathcal{O}), \quad (4.6)$$

Où $d_0 = \sup_{0 < s < 1} \sqrt{s} |\ln s|$, $|\mathcal{O}|$ est la mesure de Lebesgue de \mathcal{O} , et c_* est la plus petite constante d'injection.

$$\left(\int_{\mathcal{O}} |\vartheta|^3 dx \right)^{\frac{1}{3}} \leq c_* \|\Delta \vartheta\|_2, \quad \forall \vartheta \in H_0^2(\mathcal{O}), \quad (4.7)$$

(où c_* existe grâce à l'injection de $H_0^2(\mathcal{O})$ dans $L^\infty(\mathcal{O})$).

Lemma 4.4. ([30], [43]) Supposons que g vérifie (H1).

Alors, pour $\vartheta \in H_0^1(\mathcal{O})$, nous avons

$$\int_{\mathcal{O}} \left(\int_0^t g(t-s) (\vartheta(t) - \vartheta(s)) ds \right)^2 dx \leq c (g \circ \nabla \vartheta)(t)$$

et

$$\int_{\mathcal{O}} \left(\int_0^t g'(t-s) (\vartheta(t) - \vartheta(s)) ds \right)^2 dx \leq -c (g' \circ \nabla \vartheta)(t).$$

Corollaire 4.1. Supposons que g vérifie (H1).

Alors, pour $\vartheta \in H_0^2(\mathcal{O})$, nous avons

$$\int_{\mathcal{O}} \left(\int_0^t g(t-s) (\vartheta(t) - \vartheta(s)) ds \right)^2 dx \leq c (g \circ \Delta \vartheta)(t)$$

Et

$$\int_{\mathcal{O}} \left(\int_0^t g'(t-s) (\vartheta(t) - \vartheta(s)) ds \right)^2 dx \leq -c (g' \circ \Delta \vartheta)(t).$$

Démonstration. La preuve découle directement de l'utilisation du Lemma (4.4) et de l'inégalité de Poincaré.

4.2 Existence d'une solution locale

Dans cette section, nous allons prouver l'existence locale d'une solution pour le problème (4.1).

Tout d'abord, nous transformons le problème (4.1) en un problème équivalent (4.8) ci-dessous.

Pour établir l'existence d'une solution au problème (4.8), nous introduisons une nouvelle variable définie par

$$z(x, \rho, t) = \vartheta_t(x, t - t_0\rho), \quad x \in \mathcal{O}, \quad \rho \in (0, 1), \quad t > 0.$$

Cela conduit à l'équation :

$$t_0 z_t(x, \rho, t) + z_\rho(x, \rho, t) = 0, \quad \text{dans } \mathcal{O} \times (0, 1) \times (0, +\infty).$$

Ainsi, le problème (4.1) devient équivalent à ce qui suit :

$$\begin{cases} \vartheta_{tt} + \vartheta + \Delta^2 \vartheta - \int_0^t g(t-s) \Delta^2 \vartheta(s) ds + \mu_1 \vartheta_t(x, t) + \mu_2 z(x, 1, t) = \alpha \vartheta \ln \vartheta, & \text{dans } \mathcal{O} \times (0, \infty), \\ t_0 z_t(x, \rho, t) + z_\rho(x, \rho, t) = 0 & \text{dans } \mathcal{O} \times (0, 1) \times (0, \infty), \\ z(x, \rho, 0) = f_0(x, -\rho t_0) & \text{dans } \mathcal{O} \times (0, 1), \\ \vartheta(x, t) = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{O} \times [0, \infty), \\ \vartheta(x, 0) = \vartheta_0(x), \quad \vartheta_t(x, 0) = \vartheta_1(x) & \text{dans } \mathcal{O}. \end{cases} \quad (4.8)$$

Définition 4.1. Une fonction

$$\vartheta \in C([0, T], H_0^2(\mathcal{O})) \cap C^1([0, T], L^2(\mathcal{O})) \cap C^2([0, T], H^{-2}(\mathcal{O}))$$

Est définie comme une solution faible de (4.8) sur $[0, T]$. Pour chaque $\vartheta \in H_0^2(\mathcal{O})$ et $t \in [0, T]$, nous avons :

$$\begin{aligned} & (\vartheta_{tt}, \vartheta) + (\vartheta, \vartheta) + (\Delta \vartheta, \Delta \vartheta) + \mu_1 (\vartheta_t, \vartheta) - \int_0^t g(t-s) (\nabla \vartheta(s), \nabla \vartheta) ds \\ & + \mu_2 (z(x, 1, t), \vartheta) = (\alpha \vartheta \ln |\vartheta|, \vartheta), \\ & \vartheta(x, 0) = \vartheta_0, \quad \vartheta_t(x, 0) = \vartheta_1, \quad z(x, \rho, 0) = f_0(x, -\rho t_0). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Theoreme 4.1. Supposons que (H_1) et (H_2) soient vérifiées et que $(\vartheta_0, \vartheta_1, f_0) \in H_0^2(\mathcal{O}) \times L^2(\mathcal{O}) \times L^2(\mathcal{O})$. Alors le problème (4.9) admet une solution.

4.2 Existence d'une solution locale

Démonstration. Pour prouver le théorème (4.1), nous utilisons la méthode standard de Faedo-Galerkin pour établir l'existence de la solution locale.

Nous introduisons une suite de fonctions $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ comme une base orthogonale de $H_0^2(\mathcal{O})$, où chaque w_j satisfait :

$$-\Delta w_j = \lambda_j w_j, \quad x \in \mathcal{O}, \quad w_j = 0, \quad x \in \partial\mathcal{O}.$$

Soit $W_k = \text{span}\{w_1, \dots, w_k\}$ l'espace vectoriel généré par les k premiers vecteurs de la base $\{w_j\}_j^{\infty}$.

Par normalisation, nous avons $\|w_j\|_2 = 1$.

Maintenant, nous définissons pour $1 \leq j \leq k$ la suite $v_j(x, \rho)$ comme suit :

$$v_j(x, 0) = w_j(x).$$

Nous prolongeons $v_j(x, 0)$ par $v_j(x, \rho)$ sur $L^2(\mathcal{O} \times [0, 1])$, et notons $V_k = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$.

Soit $(\vartheta^k, z^k) = (\vartheta^k(t), z^k(t))$ la solution approximative du problème (4.9), telle que :

$$\vartheta^k(x, t) = \sum_{j=1}^k c_j^k(t) w_j(x), \quad z^k(x, \rho, t) = \sum_{j=1}^k b_j^k(t) v_j(x, \rho),$$

Qui satisfait le système suivant pour $1 \leq j \leq k$:

$$\begin{aligned} & (\vartheta_{tt}^k, w_j) + (\vartheta^k, w_j) + (\Delta \vartheta_t^k, \Delta w_j) + \mu_1 (\vartheta_t^k, \nabla w_j) \\ & - \int_0^t g(t-s) (\Delta \vartheta^k(s), \Delta w_j) ds + \mu_2 (z^k(x, 1, t), w_j) \\ & = (\alpha \vartheta^k \ln |\vartheta^k|, w_j), \end{aligned}$$

Pour $t \in [0, T]$, qui est un système non linéaire d'équations différentielles ordinaires et sera complété par les conditions initiales suivantes :

$$\vartheta^k(x, 0) = \vartheta_0^k = \sum_{j=1}^k \mathcal{M}_j^k w_j \rightarrow \vartheta_0 \quad \text{lorsque } k \rightarrow \infty \quad \text{dans } H_0^2(\mathcal{O}), \quad \text{pour tout } w_j \in W_k, \quad (4.10)$$

$$\vartheta_t^k(x, 0) = \vartheta_1^k = \sum_{j=1}^k \chi_j^k w_j \rightarrow \vartheta_1 \quad \text{lorsque } k \rightarrow \infty \quad \text{dans } L^2(\mathcal{O}), \quad \text{pour tout } w_j \in W_k, \quad (4.11)$$

Et

$$z^k(x, \rho, 0) = f_0^k = \sum_{j=1}^k \mathcal{B}_j^k v_j \rightarrow f_0 \quad \text{lorsque } k \rightarrow \infty \quad \text{dans } L^2(\mathcal{O} \times (0, 1)), \quad \text{pour tout } v_j \in V_k. \quad (4.12)$$

4.2 Existence d'une solution locale

D'après la théorie standard des équations différentielles ordinaires, nous déduisons que le système (4.10)-(4.12) admet une solution $(c_j^k(t), b_j^k(t))$ sur l'intervalle de temps $[0, t_k]$, où $t_k > 0$.

Par conséquent, nous obtiendrons une solution approchée $\vartheta^k(t)$ pour le problème (4.9) dans l'espace de dimension finie V_k , sur l'intervalle de temps $[0, t_k]$.

4.2.1 Estimates A Priori

Nous commençons par multiplier l'équation (4.10) par $\partial_t c_j^k$ et en faisant la somme sur j :

$$-\mu_1 \|\vartheta_t^k\|^2 + \frac{1}{2} g' \circ \Delta \vartheta^k(t) - \frac{g(t)}{2} \|\Delta \vartheta^k\|^2 - \mu_2 \int_{\mathcal{O}} \vartheta_t^k z^k(x, 1, t) dx \leq 0.$$

En intégrant cette inégalité sur $(0, T)$ et en appliquant l'intégration par parties, nous obtenons

$$\mathcal{E}^k(t) \leq \mathcal{E}^k(0), \quad (4.13)$$

Où $\mathcal{E}^k(t)$ est un fonctionnel d'énergie défini comme :

$$\mathcal{E}^k(t) = \|\vartheta_t^k\|^2 + \|\Delta \vartheta^k\|^2 + \|\vartheta^k\|^2 + (g \circ \vartheta^k)(t) + \int_0^1 \|z^k\|_2^2 d\rho.$$

En appliquant l'inégalité de Sobolev logarithmique, nous réécrivons (4.13) comme :

$$\begin{aligned} & \|\vartheta_t^k\|_2^2 + \left(l - \frac{\alpha c_p r^2}{2\pi} \right) \|\Delta \vartheta^k\|_2^2 + \left\{ \frac{\alpha + 2}{2} + \alpha(1 + \ln r) \right\} \|\vartheta^k\|^2 \\ & + (g \circ \Delta \vartheta)(t) + \frac{\zeta}{2} \int_{\mathcal{O}} \int_0^1 |z^k(x, \rho, t)|^2 d\rho dx \leq \frac{1}{2} \|\vartheta^k\|^2 \ln \|\vartheta^k\|^2 + C, \end{aligned}$$

Où C est une constante dépendant uniquement des données initiales.

En choisissant :

$$e^{-\frac{3\alpha-2}{2\alpha}} < r < \left(\frac{2\pi l}{\alpha c_p} \right)^{\frac{1}{2}},$$

Nous nous assurons que :

$$\frac{\alpha + 2}{2} + \alpha(1 + \ln r) > 0$$

Et

$$l - \frac{\alpha c_p r^2}{2\pi} > 0.$$

Ainsi, nous obtiendrons :

$$\|\vartheta_t^k\|_2^2 + \|\Delta \vartheta^k\|_2^2 + \|\vartheta^k\|_2^2 + (g \circ \vartheta^k)(t) + \int_0^1 \|z^k\|_2^2 d\rho \leq C (1 + \|\vartheta^k\|^2 \ln \|\vartheta^k\|^2). \quad (4.14)$$

4.2 Existence d'une solution locale

En utilisant l'égalité

$$\vartheta^k(x, t) - \vartheta(x, 0) = \int_0^t \vartheta_t(x, s) ds, \quad \forall x \in \mathcal{O},$$

Et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$, nous trouvons :

$$\|\vartheta^k\|_2^2 \leq 2\|\vartheta^k(0)\|_2^2 + 2CT \int_0^t \|\vartheta_t^k(s)\|^2 ds. \quad (4.15)$$

En substituant le résultat de l'inégalité (4.14) dans (4.15), nous aurons :

$$\|\vartheta^k\|_2^2 \leq 2C' \left(1 + \int_0^t \|\vartheta^k\|^2 \ln \|\vartheta^k\|^2 ds \right), \quad (4.16)$$

Où $C' = \max\{2CT, 2\|\vartheta^k(0)\|_2^2\}$.

En appliquant le Lemme (4.2) à l'inégalité (4.16), nous obtiendrons l'estimation

$$\|\vartheta^k\| \leq C_1.$$

De plus, à partir de l'inégalité (4.14), nous obtenons l'estimation

$$(g \circ \vartheta^k)(t) + \|\vartheta_t^k\|_2^2 + \|\Delta \vartheta^k\|_2^2 + \|\vartheta^k\|_2^2 + \int_0^1 \|z^k\|_2^2 d\rho \leq C_2,$$

Où $C_2 = C(1 + C_1 \ln C_1)$. Cela conduit à

$$\begin{aligned} \|\vartheta_t^k\|_2^2 &\leq C_3, \\ \|\vartheta^k\|_2^2 &\leq C_3, \\ \|\Delta \vartheta^k\|_2^2 &\leq C_3, \\ \int_0^1 \|z^k\|_2^2 d\rho &\leq C_3. \end{aligned}$$

Ainsi, nous concluons que

$$\begin{cases} \vartheta^k \text{ est bornée dans } L^\infty(0, T; H_0^2(\mathcal{O})), \\ \vartheta_t^k \text{ est bornée dans } L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{O})), \\ z^k \text{ est borné dans } L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{O} \times (0, 1))). \end{cases} \quad (4.17)$$

Par (4.17), nous pouvons inférer l'existence d'une sous-séquence $\{\vartheta^\mu, z^\mu\}$ de $\{\vartheta^k, z^k\}$ telle que :

$$\begin{aligned} \vartheta^\mu &\rightharpoonup \vartheta \text{ faiblement}^* \text{ dans } L^\infty(0, T; H_0^2(\mathcal{O})), \\ \vartheta_t^\mu &\rightharpoonup \vartheta_t \text{ faiblement}^* \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{O})), \\ z^\mu &\rightharpoonup z \text{ faiblement}^* \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{O} \times (0, 1))). \end{aligned} \quad (4.18)$$

En utilisant le théorème d'Aubin-Lions, nous trouvons que :

$$\vartheta^\mu \longrightarrow \vartheta \text{ fortement dans } L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{O})),$$

et

$$\vartheta^\mu \longrightarrow \vartheta \text{ presque partout dans } \mathcal{O} \times (0, T).$$

Puisque la fonction $f(x) = x \ln |x|$ est continue sur la droite réelle, nous pouvons extraire une sous-séquence ϑ^μ qui satisfait la convergence

$$\vartheta^\mu \ln |\vartheta^\mu|^\alpha \longrightarrow \vartheta \ln |\vartheta|^\alpha \text{ presque partout dans } \mathcal{O} \times (0, T).$$

En suivant les étapes utilisées par Al-Gharabli et Guesmia dans [3], nous concluons que :

$$\vartheta_{tt} \in L^\infty([0, T], H^{-2}(\mathcal{O})).$$

Ainsi, nous avons complété la preuve du Théorème (4.1). □

4.3 Existence Globale

Dans cette section, nous énonçons et prouvons le théorème d'existence globale de la solution pour le problème (4.8).

Nous définissons l'énergie modifiée comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) = & \frac{1}{2} \left\{ \|\vartheta_t\|_2^2 + \left(1 - \int_0^t g(s) ds\right) \|\Delta\vartheta\|_2^2 + \frac{\alpha+2}{2} \|\vartheta\|^2 \right\} \\ & + \frac{1}{2} (g \circ \Delta\vartheta)(t) - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}} \vartheta^2 \ln |\vartheta|^\alpha dx + \frac{\zeta}{2} \int_{\mathcal{O}} \int_0^1 |z(x, \rho, t)|^2 d\rho dx. \end{aligned}$$

Lemma 4.5. *Soit (ϑ, z) une solution du problème (P1).*

Alors, nous avons :

$$\mathcal{E}'(t) \leq -C_0 \left(\|\vartheta_t\|^2 + \|z(x, 1, t)\|^2 + \frac{g(t)}{2} \|\Delta\vartheta\|^2 - \frac{1}{2} (g' \circ \Delta\vartheta)(t) \right) \leq 0, \quad (4.19)$$

où $(\mu_1 - |\mu_2|) > 0$.

Démonstration. Nous commençons par multiplier la première équation de (4.8) par u_t et en intégrant sur \mathcal{O} . Ensuite, nous multiplions la deuxième équation de (4.8) par $\left(\frac{\zeta}{t_0}\right) z$ et intégrons sur $(0, 1) \times \mathcal{O}$ par rapport à ρ et x .

Cela nous donne :

$$\mathcal{E}'(t) = -\mu_1 \|\vartheta_t\|^2 + \frac{1}{2} (g' \circ \Delta\vartheta)(t) - \frac{g(t)}{2} \|\Delta\vartheta\|^2 - \mu_2 \int_{\mathcal{O}} \vartheta_t z(x, 1, t) dx - \frac{\zeta}{t_0} \int_{\mathcal{O}} \int_0^1 z z_\rho(x, \rho, t) d\rho dx. \quad (4.20)$$

Ensuite, nous estimons les deux derniers termes à droite de l'équation (4.20) :

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta}{t_0} \int_{\mathcal{O}} \int_0^1 z z_\rho(x, \rho, t) d\rho dx &= -\frac{\zeta}{2t_0} \int_{\mathcal{O}} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \rho} z^2(x, \rho, t) d\rho dx \\ &= \frac{\zeta}{2t_0} \int_{\mathcal{O}} (z^2(x, 0, t) - z^2(x, 1, t)) dx \\ &= \frac{\zeta}{2t_0} (\|\vartheta_t\|^2 - \|z(x, 1, t)\|^2). \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Young, nous avons :

$$-\mu_2 \int_{\mathcal{O}} \vartheta_t z(x, 1, t) dx \leq \frac{|\mu_2|}{2} (\|\vartheta_t\|^2 + \|z(x, 1, t)\|^2).$$

Ainsi, nous obtiendrons :

$$\mathcal{E}'(t) \leq -\left(\mu_1 - \frac{\zeta}{2t_0} - \frac{|\mu_2|}{2}\right) \|\vartheta_t\|^2 \quad (4.21)$$

$$+ \frac{1}{2}(g' \circ \Delta\vartheta)(t) - \frac{g(t)}{2} \|\Delta\vartheta\|^2 \quad (4.22)$$

$$- \left(\frac{\zeta}{2t_0} - \frac{|\mu_2|}{2}\right) \|z(x, 1, t)\|^2. \quad (4.23)$$

Étant donné que $t_0|\mu_2| < \zeta < t_0(2\mu_1 - |\mu_2|)$, nous obtiendrons :

$$\mathcal{E}'(t) \leq -C_0 \left(\|\vartheta_t\|^2 + \|z(x, 1, t)\|^2 - \frac{1}{2}(g' \circ \Delta\vartheta)(t) + \frac{g(t)}{2} \|\Delta\vartheta\|^2 \right) \leq 0.$$

$$\text{Où } C_0 = \min \left\{ \mu_1 - \frac{\zeta}{2t_0} - \frac{|\mu_2|}{2}, \frac{\zeta}{2t_0} - \frac{|\mu_2|}{2}, 1 \right\}. \quad \square$$

Introduisons les fonctionnelles :

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{1}{2} \left(\left(1 - \int_0^t g(s) ds\right) \|\Delta\vartheta\|_2^2 + \|\vartheta\|_2^2 + (g \circ \Delta\vartheta)(t) - \int_{\mathcal{O}} \vartheta^2 \ln |\vartheta|^\alpha dx \right) \\ &\quad + \frac{\alpha}{4} \|\vartheta\|_2^2 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Et

$$I(t) = \left(1 - \int_0^t g(s) ds\right) \|\Delta\vartheta\|_2^2 + \|\vartheta\|_2^2 + (g \circ \Delta\vartheta)(t) - 3 \int_{\mathcal{O}} \vartheta^2 \ln |\vartheta|^\alpha dx. \quad (4.25)$$

Lemma 4.6. *Supposons que (H1) et (H2) restent valides. Soit $u_0 \in H_0^2(\mathcal{O})$ et $u_1 \in L^2(\mathcal{O})$ tels que :*

$$I(0) > 0 \text{ et } 3\alpha c_*^3 \sqrt{\frac{6E(0)}{l^3}} < 1. \quad (4.26)$$

Alors,

$$I(t) > 0 \text{ pour tout } t \in [0, T]. \quad (4.27)$$

Démonstration. D'après la définition de I et J , nous avons :

$$J(t) = \frac{1}{6} I(t) + |\vartheta|_2^2 + (g \circ \Delta\vartheta)(t) + \left(1 - \int_0^t g(s)ds\right) |\Delta\vartheta|_2^2 + \frac{\alpha}{4} |\vartheta|_2^2. \quad (4.28)$$

Puisque la fonctionnelle I est continue sur $[0, T]$ et que $I(0) > 0$, il existe $\tau \in (0, T]$ tel que : $I(t) > 0$ pour tout $t \in [0, \tau)$.

Nous considérons deux cas :

Cas 1 : Lorsque $\tau = T$, (4.27) est vérifiée.

Cas 2 : Lorsque $\tau < T$, nous montrons par l'absurde que $I(\tau) > 0$. Supposons que $I(\tau) = 0$.

Si $\|\Delta\vartheta(\tau)\|_2^2 = 0$, alors (4.6)-(4.7) impliquent :

$$\int_0^\tau g(s) \|\Delta\vartheta(s)\|_2^2 ds = 0. \quad (4.29)$$

En conséquence, si $g \neq 0$ sur l'intervalle $[0, \tau)$, nous obtiendrons :

$$\|\Delta\vartheta(s)\|_2^2 = 0, \text{ sur } [0, \tau).$$

Ceci conduit à :

$$I(t) = 0, \forall t \in [0, \tau).$$

Cela contredit le fait que $I > 0$ sur $[0, \tau)$. S'il existe $\tau^* \in [0, \tau)$ tel que $g(\tau^*) = 0$,

Alors, soit $\tau_1 \in [0, \tau)$ le plus petit réel tel que : $g(\tau_1) = 0$.

Puisque $g(0) > 0$ et que g est positif, décroissant et continu sur \mathbb{R}_+ , alors $g = 0$ sur $[\tau_1, +\infty)$.

Par conséquent, d'après (4.29), nous en déduisons que :

$$\int_0^\tau g(s) \|\Delta\vartheta(s)\|_2^2 ds = \int_0^{\tau_1} g(s) \|\Delta\vartheta(s)\|_2^2 ds = 0.$$

Comme mentionné précédemment, cela contredit le fait que $I > 0$ sur $[0, \tau)$.

Par conséquent, nous concluons que : $\|\Delta\vartheta(\tau)\|_2^2 > 0$.

D'après (4.25), nous avons :

$$I(\tau) \geq l \|\Delta\vartheta(\tau)\|_2^2 - 3\alpha \int_{\mathcal{O}} \vartheta^2(\tau) \ln |\vartheta(\tau)| dx. \quad (4.30)$$

Remarque 4.1. Nous avons $I(t) > 0$ sur $[0, \tau)$, et

$$\|\Delta\vartheta(t)\|_2^2 \leq \frac{6}{l} J(t) \leq \frac{6}{l} E(t) \leq \frac{6}{l} E(0), \quad \forall t \in [0, \tau). \quad (4.31)$$

4.4 Résultat de stabilité

En utilisant (4.6) dans le Lemme (4.3), nous obtiendrons :

$$I(\tau) > l\|\Delta\vartheta(\tau)\|_2^2 - 3\alpha c_*^3\|\Delta\vartheta(\tau)\|_2^3.$$

En utilisant (4.31), nous obtiendrons :

$$I(\tau) > l\left(1 - 3\sqrt{\frac{6E(0)}{l^3}}\right)\|\Delta\vartheta(\tau)\|_2^2.$$

Sous la condition (4.26) du Lemme, nous en déduisons que $I(\tau) > 0$, ce qui contredit l'hypothèse $I(\tau) = 0$. Ainsi, $\tau = T$ et donc :

$$I(t) > 0, \forall t \in [0, T].$$

Ceci complète la preuve du Lemme (4.2). □

Theoreme 4.2. *Soit (ϑ, z) une solution locale de (4.8). Alors (ϑ, z) est globale.*

Démonstration. Pour prouver le théorème (4.2), en utilisant le lemme (4.6), nous avons :

$$J(t) \geq 0, \forall t \in [0, \tau].$$

Alors

$$J(t) \leq \frac{1}{2}\|\vartheta_t(t)\|_2^2 + \frac{\zeta}{2} \int_{\mathcal{O}} \int_0^1 |z(x, \rho, t)|^2 d\rho dx \leq \mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0), \quad \forall t \in [0, \tau].$$

Ainsi, la preuve du théorème (4.2) est établie. □

4.4 Résultat de stabilité

Dans cette section, nous analysons le comportement asymptotique de la solution au problème (4.1). Pour établir notre résultat principal, nous construisons une fonctionnelle de Lyapunov F qui est équivalente à \mathcal{E} . Pour ce faire, nous définissons plusieurs fonctionnelles qui nous aideront à obtenir l'estimation désirée.

Lemma 4.7. *Soit (ϑ, z) une solution du système (4.8). Alors, le fonctionnel*

$$\Psi_1(t) = \int_{\mathcal{O}} \vartheta_t u dx \tag{4.32}$$

Satisfait l'estimation :

$$\begin{aligned} \Psi_1'(t) &\leq \left(1 + \frac{\mu_1}{4\delta_1}\right)\|\vartheta_t\|_2^2 - (1 - \mu_1\delta_1 - |\mu_2|\delta_1)\|\vartheta\|_2^2 - \left(\frac{1}{2} - (1 + \delta)(1 - l)^2\right)\|\Delta\vartheta\|_2^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)c(g \circ \Delta\vartheta)(t) + \int_{\mathcal{O}} \vartheta^2 \ln |\vartheta|^\alpha dx + \frac{|\mu_2|}{4\delta_1}\|z(x, 1, t)\|_2^2. \end{aligned} \tag{4.33}$$

4.4 Résultat de stabilité

Démonstration. Nous différencions le fonctionnel Ψ_1 par rapport à t , obtenons :

$$\Psi_1'(t) = \|\vartheta_t\|_2^2 + \int_{\mathcal{O}} \vartheta_{tt} \vartheta dx.$$

En utilisant la première équation du système (4.8), nous pouvons facilement observer que :

$$\begin{aligned} \Psi_1'(t) &= \|\vartheta_t\|_2^2 + \int_{\mathcal{O}} \left(\int_0^t g(t-s) \Delta^2 \vartheta(s) ds - \vartheta - \mu_1 \vartheta_t(x, t) - \mu_2 z(x, 1, t) + \alpha \vartheta \ln |\vartheta| \right) u dx \\ &= \|\vartheta_t\|_2^2 - \|\vartheta\|_2^2 - \|\Delta \vartheta\|_2^2 + \int_0^t g(t-s) \Delta \vartheta(s) \Delta \vartheta(t) ds - \mu_1 \int_{\mathcal{O}} \vartheta_t u dx \\ &\quad - \mu_2 \int_{\mathcal{O}} z(x, 1, t) u dx + \alpha \int_{\mathcal{O}} \vartheta^2 \ln |\vartheta| dx. \end{aligned} \quad (4.34)$$

□

Maintenant, nous estimons certains termes dans la dernière égalité. En utilisant l'inégalité de Young, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}} \Delta \vartheta(t) \cdot \int_0^t g(t-s) \Delta \vartheta(s) ds \, dx &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}} |\Delta \vartheta(t)|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}} \left(\int_0^t g(t-s) \Delta \vartheta(s) ds \right)^2 \, dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}} |\Delta \vartheta(t)|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}} \left(\int_0^t g(t-s) |\Delta \vartheta(s) - \Delta \vartheta(t)| + g(t-s) |\Delta \vartheta(t)| ds \right)^2 \, dx \end{aligned}$$

Nous utilisons le lemme (4.4), l'inégalité de Young et le fait que $\int_0^t g(s) ds \leq \int_0^\infty g(s) ds = 1 - l$, et nous obtenons pour tout $\delta > 0$

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{O}} \left(\int_0^t g(t-s) |\Delta \vartheta(s) - \Delta \vartheta(t)| + g(t-s) |\Delta \vartheta(t)| ds \right)^2 \, dx \\ &\leq \int_{\mathcal{O}} \left(\int_0^t g(t-s) |\Delta \vartheta(s) - \Delta \vartheta(t)| ds \right)^2 \, dx + \int_{\mathcal{O}} \left(\int_0^t g(t-s) |\Delta \vartheta(t)| ds \right)^2 \, dx \\ &\quad + 2 \int_{\mathcal{O}} \left(\int_0^t g(t-s) |\Delta \vartheta(s) - \Delta \vartheta(t)| ds \right) \times \left(\int_0^t g(t-s) |\Delta \vartheta(t)| ds \right) \, dx \\ &\leq (1 + \delta) \int_{\mathcal{O}} \left(\int_0^t g(t-s) |\Delta \vartheta(t)| ds \right)^2 \, dx + \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \int_{\mathcal{O}} \left(\int_0^t g(t-s) |\Delta \vartheta(s) - \Delta \vartheta(t)| ds \right)^2 \, dx \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) c(g \circ \Delta \vartheta)(t) + (1 + \delta)(1 - l)^2 \int_{\mathcal{O}} |\Delta \vartheta(t)|^2 \, dx \end{aligned} \quad (4.35)$$

Par conséquent, nous arrivons à :

$$\int_{\mathcal{O}} \Delta u(t) \cdot \int_0^t g(t-s) \Delta u(s) ds \, dx \leq \frac{1}{2} (1 + (1 + \delta)(1 - l)^2) \|\Delta u\|_2^2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) c(g \circ \Delta u(t)). \quad (4.36)$$

Ensuite, l'inégalité de Young implique que, pour tout $\delta_1 > 0$, nous avons :

$$-\mu_1 \int_{\mathcal{O}} u_t u dx \leq \mu_1 \delta_1 \|u\|_2^2 + \frac{\mu_1}{4\delta_1} \|u_t\|_2^2, \quad (4.37)$$

Et

$$-\mu_2 \int_{\mathcal{O}} z(x, 1, t) u dx \leq |\mu_2| \delta_1 \|u\|_2^2 + \frac{|\mu_2|}{4\delta_1} \|z(x, 1, t)\|_2^2. \quad (4.38)$$

En insérant les estimations (4.36), (4.37) et (4.38) dans (4.34), on obtient alors le résultat souhaité. \square

Lemma 4.8. *Soit (u, z) une solution du système (4.8). Alors, le fonctionnel*

$$\Psi_2(t) = \int_{\mathcal{O}} \int_0^1 \exp(-2\tau\rho) z^2(x, \rho, t) d\rho dx. \quad (4.39)$$

vérifie l'inégalité suivante :

$$\Psi_2'(t) \leq -\rho \Psi_2(t) + \frac{1}{2\tau} \|u_t\|_2^2 - \frac{c}{2\tau} \|z(x, 1, t)\|_2^2 \quad (4.40)$$

Démonstration. En différentiant (4.39) par rapport à t et en utilisant la deuxième équation du système (4.8), nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathcal{O}} \int_0^1 \exp(-2t_0\rho) z^2(x, \rho, t) d\rho dx \right) &= -\frac{1}{t_0} \int_{\mathcal{O}} \int_0^1 \exp(-2t_0\rho) z z_\rho(x, \rho, t) d\rho dx \\ &= -\int_{\mathcal{O}} \int_0^1 \rho \exp(-2t_0\rho) z^2(x, \rho, t) d\rho dx \\ &\quad - \frac{1}{2t_0} \int_{\mathcal{O}} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \rho} (\exp(-2t_0\rho) z^2(x, \rho, t)) d\rho dx \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant une intégration par parties, la formule ci-dessus conduit à :

$$\Psi_2'(t) \leq -\rho \Psi_2(t) + \frac{1}{2t_0} \int_{\mathcal{O}} \vartheta_t^2(x, t) dx - \frac{c}{2t_0} \int_{\mathcal{O}} z^2(x, 1, t) dx$$

Où c est une constante positive.

Lemma 4.9. *Soit (ϑ, z) une solution du problème (4.8), alors le fonctionnel*

$$\Psi_3(t) = -\int_{\mathcal{O}} u_t \int_0^t g(t-s)(\vartheta(t) - \vartheta(s)) ds dx \quad (4.41)$$

Satisfait pour tout $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ et $\delta_i > 0, i = 2, \dots, 8$ l'estimation

$$\begin{aligned} \Psi_3'(t) &\leq \left(\delta_2 + \mu_1 \delta_5 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\vartheta_t\|_2^2 + \left(\delta_3 + \delta_4 + \frac{1}{2}(1 + \delta_5)(1 - l)^2 + \delta_8 \right) \|\Delta\vartheta\|_2^2 \\ &\quad + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4\delta_3} + \frac{1}{4\delta_4} + \frac{1}{4\delta_5} + \frac{\mu_1}{4\delta_6} + \frac{|\mu_2|}{4\delta_7} + \frac{1}{4\delta_8} \right) c(g \circ \Delta\vartheta)(t) + \frac{c}{4\delta_2} (-g' \circ \Delta\vartheta)(t) \\ &\quad + c_{\varepsilon_0, \delta_8} (g \circ \Delta\vartheta)^{\frac{1}{1+\varepsilon_0}}(t) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Démonstration. Nous dérivons (4.41) par rapport à t et en utilisant la première équation du système (4.8), nous obtiendrons :

$$\begin{aligned} \Psi'_3(t) &= - \int_{\mathcal{O}} \vartheta_{tt} \int_0^t g(t-s)(\vartheta(t) - \vartheta(s)) ds dx - \int_{\mathcal{O}} \vartheta_t \int_0^t g'(t-s)(\vartheta(t) - \vartheta(s)) ds dx \\ &\quad - \int_{\mathcal{O}} \vartheta_t \int_0^t g(t-s) u_t(t) ds dx \end{aligned} \quad (4.43)$$

En utilisant le lemme (4.4) et l'inégalité de Young pour tout $\delta > 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} - \int_{\mathcal{O}} \vartheta_t \int_0^t g'(t-s)(\vartheta(t) - \vartheta(s)) ds dx &\leq \delta_2 \|\vartheta_t\|_2^2 + \frac{1}{4\delta_2} c(-g' \circ \vartheta)(t) \\ &\leq \delta_2 \|\vartheta_t\|_2^2 + \frac{1}{4\delta_2} c(-g' \circ \Delta\vartheta)(t) \quad (\text{par l'inégalité de Poincaré}). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Ensuite, en utilisant la première équation du système (4.8), nous obtiendrons :

$$\begin{aligned} - \int_{\mathcal{O}} \vartheta_{tt} \int_0^t g(t-s)(\vartheta(t) - \vartheta(s)) ds dx &= \underbrace{\int_{\mathcal{O}} \vartheta \int_0^t g(t-s)(\vartheta(t) - \vartheta(s)) ds dx}_{=\mathcal{I}_1} \\ &\quad + \underbrace{\int_{\mathcal{O}} \Delta^2 \vartheta \int_0^t g(t-s)(\vartheta(t) - \vartheta(s)) ds dx}_{=\mathcal{I}_2} \\ &\quad - \underbrace{\int_{\mathcal{O}} \int_0^t g(t-s) \Delta^2 \vartheta(s) \int_0^t g(t-s)(\vartheta(t) - \vartheta(s)) ds dx}_{=\mathcal{I}_3} \\ &\quad + \underbrace{\mu_1 \int_{\mathcal{O}} \vartheta_t \int_0^t g(t-s)(\vartheta(t) - \vartheta(s)) ds dx}_{=\mathcal{I}_4} \\ &\quad + \underbrace{\mu_2 \int_{\mathcal{O}} z \int_0^t g(t-s)(\vartheta(t) - \vartheta(s)) ds dx}_{=\mathcal{I}_5} \\ &\quad - \underbrace{\alpha \int_{\mathcal{O}} \vartheta \ln |\vartheta| \int_0^t g(t-s)(\vartheta(t) - \vartheta(s)) ds dx}_{=\mathcal{I}_6} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Ensuite, nous estimons les termes du côté droit de l'équation (4.45) en utilisant l'inégalité de Young, l'inégalité de Poincaré, et le lemme (4.4), nous obtiendrons :

$$\mathcal{I}_1 \leq \delta_3 \|\Delta\vartheta\|_2^2 + \frac{1}{4\delta_3} c(g \circ \Delta\vartheta)(t), \quad (4.46)$$

$$\mathcal{I}_2 \leq \delta_4 \|\Delta\vartheta\|_2^2 + \frac{1}{4\delta_4} c(g \circ \Delta\vartheta)(t), \quad (4.47)$$

$$\mathcal{I}_4 \leq \mu_1 \delta_6 \|u_t\|_2^2 + \frac{\mu_1}{4\delta_6} c(g \circ \Delta\vartheta)(t), \quad (4.48)$$

And

$$\mathcal{I}_5 \leq |\mu_2| \delta_7 \|z(x, 1, t)\|_2^2 + \frac{|\mu_2|}{4\delta_7} c(g \circ \Delta\vartheta)(t). \quad (4.49)$$

Par conséquent, pour \mathcal{I}_3 , nous utilisons l'inégalité de Young et effectuons le même calcul que dans (4.35), ce qui donne pour tout $\delta_5 > 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_3 &\leq \frac{1}{2} c(g \circ \Delta\vartheta)(t) + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}} \left(\int_0^t g(t-s) \Delta\vartheta(s) ds \right)^2 dx \\ &\leq \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4\delta_5} \right) c(g \circ \Delta\vartheta)(t) + \frac{1}{2} (1 + \delta_5) (1-l)^2 \|\Delta\vartheta\|_2^2 \end{aligned} \quad (4.50)$$

Ensuite, pour \mathcal{I}_6 , voir la référence [3], nous avons :

$$\mathcal{I}_6 \leq \delta_8 \|\Delta\vartheta\|_2^2 + \frac{c}{4\delta_8} (g \circ \Delta\vartheta)(t) + c_{\varepsilon_0, \delta_8} (g \circ \Delta\vartheta)^{\frac{1}{1+\varepsilon_0}}(t) \quad (4.51)$$

En insérant l'inégalité (4.44) et les inégalités (4.46)-(4.51) dans (4.43), puis obtenir (4.37)

□

Lemma 4.10. *Soit (ϑ, z) une solution du système (4.8) et supposons que (H1) – (H3) et (4.26) soient vérifiés et que $\varepsilon_0 \in (0, 1)$. Alors, pour k suffisamment petit, il existe trois constantes positives η_1 , η_2 et η_3 telles que la fonctionnelle*

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{E}(t) + \eta_1 \Psi_1(t) + \eta_2 \Psi_2(t) + \eta_3 \Psi_3(t)$$

Satisfait :

$$\mathcal{A} \sim \mathcal{E} \quad (4.52)$$

et, pour tout $\tau > 0$, il existe une constante positive ν tel que :

$$\mathcal{A}'(t) \leq -\nu \mathcal{E}(t) + c(g \circ \Delta u)(t) + c_{\varepsilon_0} (g \circ \Delta u)^{\frac{1}{1+\varepsilon_0}}(t), \quad \forall t \geq \tau. \quad (4.53)$$

Démonstration. Nous commençons par établir (4.52). En utilisant des calculs similaires à ceux effectués précédemment, nous avons :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}(t) - E(t)| &= |\eta_1 \Psi_1(t) + \eta_2 \Psi_2(t) + \eta_3 \Psi_3(t)| \\
&= \left| \eta_1 \int_{\mathcal{O}} u_t u dx + \eta_2 \int_{\mathcal{O}} \int_0^1 \exp(-2\tau\rho) z^2(x, \rho, t) d\rho dx + \eta_3 \int_{\mathcal{O}} u_t \int_0^t g(t-s)(u(t) - u(s)) ds dx \right| \\
&\leq \frac{\eta_1}{2} \|u_t\|_2^2 + \frac{\eta_1}{2} \|u\|_2^2 + \eta_2 \int_{\mathcal{O}} \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx + \frac{\eta_3}{2} \|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2} c(g \circ \Delta u)(t) \\
&\leq C(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) \left(\|u_t\|_2^2 + \int_{\mathcal{O}} \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx + \|\Delta u\|_2^2 + c(g \circ \Delta u)(t) \right) \\
&\leq C(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) \left(\|u_t\|_2^2 + \int_{\mathcal{O}} \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx + J(t) \right) \quad (\text{grâce à (4.27) et (4.28)}) \\
&\leq C(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) E(t)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$(1 - c(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)) E(t) \leq \mathcal{A}(t) \leq (1 + c(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)) E(t)$$

Par conséquent, nous choisissons η_1, η_2 et η_3 suffisamment petits pour que :

$$1 - c(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) > 0$$

Ainsi, (4.52) est vérifiée.

Ensuite, nous montrons l'inégalité (4.53).

Remarque 4.2. Comme g est une fonction positive et $g(0) > 0$, alors, pour tout $\tau > 0$, nous avons :

$$0 < g_\tau = \int_0^\tau g(s) ds \leq \int_0^t g(s) ds, \quad \forall t \geq \tau.$$

En utilisant (4.19), (4.33), (4.40) et (4.42), pour tout $t \geq \tau$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}'(t) &\leq \mathcal{E}'(t) + \eta_1 \Psi_1'(t) + \eta_2 \Psi_2'(t) + \eta_3 \Psi_3'(t) \\
&\leq \alpha_1 \|\vartheta_t\|_2^2 + \alpha_2 \|\Delta \vartheta\|_2^2 + \alpha_3 \|\vartheta\|_2^2 + \alpha_4 c(g \circ \Delta \vartheta)(t) \\
&\quad + \alpha_5 c(g' \circ \Delta \vartheta)(t) + \alpha_6 \|z(x, 1, t)\|_2^2 + \eta_1 \int_{\mathcal{O}} \vartheta^2 \ln |\vartheta|^{\alpha} dx \\
&\quad - \eta_2 \rho \Psi_2(t) + \eta_3 c_{\varepsilon_0, \delta_8} (g \circ \Delta \vartheta)^{\frac{1}{1+\varepsilon_0}},
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Où

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \eta_1 \left(1 + \frac{\mu_1}{4\delta} \right) + \frac{\eta_2}{2t_0} + \eta_3 (\delta_2 + \mu_1 \delta_5 - g_\tau), \\
\alpha_2 &= -\eta_1 \left(\frac{1}{2} - (1 + \delta)(1 - l)^2 \right) + \eta_3 \left(\delta_3 + \delta_4 + \frac{1}{2}(1 + \delta_5)(1 - l)^2 + \delta_8 \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= -\eta_1(1 - \mu_1\delta_1 - |\mu_2|\delta_1), \\ \alpha_4 &= \frac{\eta_1}{2}\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) + \eta_3\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4\delta_3} + \frac{1}{4\delta_5} + \frac{\mu_1}{4\delta_6} + \frac{|\mu_2|}{4\delta_7} + \frac{1}{4\delta_8}\right), \\ \alpha_5 &= \frac{C_0}{2} - \frac{\eta_3}{4\delta_2},\end{aligned}$$

Et

$$\alpha_6 = \eta_1 \frac{|\mu_2|}{4\delta_1} - \eta_2 \frac{c}{2t_0} - C_0.$$

En utilisant le Lemma (4.1) et l'inégalité de Poincaré, nous ajoutons $-\frac{\nu}{2} \int_{\mathcal{O}} \vartheta^2 \ln |\vartheta|^\alpha dx + \frac{\nu}{2} \int_{\mathcal{O}} \vartheta^2 \ln |\vartheta|^\alpha dx$ à l'inégalité (4.54), nous avons :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}'(t) &\leq \alpha_1 \|\vartheta_t\|_2^2 + \alpha_2 \|\Delta\vartheta\|_2^2 + \alpha_3 \|\vartheta\|_2^2 + \alpha_4 c(g \circ \Delta\vartheta)(t) \\ &\quad + \alpha_5 c(g' \circ \Delta\vartheta)(t) + \alpha_6 \|z(x, 1, t)\|_2^2 + \frac{\nu}{2} \int_{\mathcal{O}} \vartheta^2 \ln |\vartheta|^\alpha dx \\ &\quad + \alpha \frac{(\eta_1 - \frac{\nu}{2})}{2} \|\vartheta\|_2^2 \ln \|\vartheta\|_2^2 + \alpha \left(\eta_1 - \frac{\nu}{2}\right) \frac{r^2 c_p}{2\pi} \|\Delta\vartheta\|_2^2 - \alpha \left(\eta_1 - \frac{\nu}{2}\right) (1 + \ln r) \|\vartheta\|_2^2 \\ &\quad - \eta_2 \rho \Psi_2(t) + \eta_3 c_{\varepsilon_0, \delta_8} (g \circ \Delta\vartheta)^{\frac{1}{1+\varepsilon_0}}.\end{aligned}\tag{4.55}$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{A}'(t) &\leq \alpha_1 \|\vartheta_t\|_2^2 + \left(\alpha_2 + \alpha \left(\eta_1 - \frac{\nu}{2}\right) \frac{r^2 c_p}{2\pi}\right) \|\Delta\vartheta\|_2^2 + \alpha_3 \|\vartheta\|_2^2 + \alpha_4 c(g \circ \Delta\vartheta)(t) \\ &\quad + \alpha_5 c(g' \circ \Delta\vartheta)(t) + \alpha_6 \|z(x, 1, t)\|_2^2 + \frac{\nu}{2} \int_{\mathcal{O}} \vartheta^2 \ln |\vartheta|^\alpha dx \\ &\quad + \left(\alpha_3 + \frac{(\eta_1 - \frac{\nu}{2})}{2} \ln \|\vartheta\|_2^2 - \left(\eta_1 - \frac{\nu}{2}\right) (1 + \ln r)\right) \|\vartheta\|_2^2 \\ &\quad - \eta_2 \rho \Psi_2(t) + \eta_3 c_{\varepsilon_0, \delta_8} (g \circ \Delta\vartheta)^{\frac{1}{1+\varepsilon_0}},\end{aligned}\tag{4.56}$$

En choisissant $\delta, \delta_i, i = 1, \dots, 8, \eta_i, i = 1, \dots, 3$ et α suffisamment petits, nous pouvons obtenir (4.53) (voir [3], [36]). Alors, la preuve du Lemma (4.10) est établie. \square

Lemma 4.11. *Soit (ϑ, z) une solution du système (4.8), alors il existe une constante non négative m tel que :*

$$|\mathcal{E}'(t)| \leq m.$$

Démonstration. En utilisant (4.24), (4.28) et le Lemma (4.6), nous avons :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \|\vartheta_t\|_2^2 + J(t) \geq \frac{1}{2} \|\vartheta_t\|_2^2 + \frac{l}{6} \|\Delta\vartheta(t)\|_2^2,$$

Alors, l'inégalité ci-dessus conduit à :

$$\|\vartheta_t\|_2^2 \leq 2\mathcal{E}(0), \quad \|\Delta\vartheta\|_2^2 \leq \frac{6}{l} \mathcal{E}(0).\tag{4.57}$$

Par conséquent, en utilisant le Lemma (4.19) et l'inégalité de Young, nous obtiendrons :

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{E}'(t)| &\leq C_0 \left(\|\vartheta_t\|_2^2 + \|\vartheta_t(x, t - t_0)\|_2^2 + \frac{g(t)}{2} \|\Delta\vartheta\|_2^2 - \frac{1}{2} (g' \circ \Delta\vartheta)(t) \right) \\
 &\leq C_0 \left(\|\vartheta_t\|_2^2 + \|\vartheta_t(x, t - t_0)\|_2^2 + \frac{g(t)}{2} \|\Delta\vartheta\|_2^2 - \frac{1}{2} \int_0^t g'(t-s) (\|\Delta\vartheta(t)\|_2^2 + \|\Delta\vartheta(s)\|_2^2) \right) \\
 &\leq C_0 \left(4\mathcal{E}(0) + \frac{6}{l} \left[\frac{g(t)}{2} \mathcal{E}(0) + 2g(0)\mathcal{E}(0) - 2g(t) \right] \right).
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

Alors, nous prenons $m = \sup_{0 < t < T} \left\{ C_0 \left(4\mathcal{E}(0) + \frac{6}{l} \left[\frac{g(t)}{2} \mathcal{E}(0) + 2g(0)\mathcal{E}(0) - 2g(t) \right] \right) \right\}$, ce qui complète la preuve du Lemma (4.11). \square

Lemma 4.12. [3] *Assumons que (H1) – (H3) tiennent et que (ϑ, z) est une solution du système (4.8). Alors :*

$$\zeta(t)(g \circ \Delta\vartheta)(t) \leq c(-\mathcal{E}'(t))^{\frac{1}{2p-1}},$$

Et, pour tout $\epsilon_0 \in (0, 1)$,

$$\zeta(t)(g \circ \Delta\vartheta)^{\frac{1}{1+\epsilon_0}}(t) \leq c_{\epsilon_0} (-\mathcal{E}'(t))^{\frac{1}{(2p-1)(1+\epsilon_0)}}.$$

Theoreme 4.3. *Soit (ϑ, z) une solution du système (4.8) avec $\epsilon \in (0, 2p - 1)$ et $\tau > 0$. Supposons que les conditions du Lemma (4.6) soient vérifiées. Alors, pour α suffisamment petit, il existe une constante positive M tel que l'énergie \mathcal{E} satisfait :*

$$\mathcal{E}(t) \leq M \left(1 + \int_{\tau}^t \zeta^{2p-1+\epsilon}(s) ds \right)^{\frac{-1}{2p-2+\epsilon}}, \quad \forall t \geq \tau. \tag{4.59}$$

Démonstration. Multipliant maintenant l'inégalité (4.53) par $\zeta(t)$,

$$\zeta(t)\mathcal{A}'(t) \leq -\nu\zeta(t)\mathcal{E}(t) + c\zeta(t)(g \circ \Delta\vartheta)(t) + c_{\epsilon_0}\zeta(t)(g \circ \Delta\vartheta)^{\frac{1}{1+\epsilon_0}}(t), \quad \forall t \geq \tau.$$

Alors, en utilisant le Lemma (4.12), la dernière inégalité devient

$$\begin{aligned}
 \zeta(t)\mathcal{A}'(t) &\leq -\nu\zeta(t)\mathcal{E}(t) + c(-\mathcal{E}'(t))^{\frac{1}{2p-1}} + c(-\mathcal{E}'(t))^{\frac{1}{(2p-1)(1+\epsilon_0)}} \\
 &\leq -\nu\zeta(t)\mathcal{E}(t) + c(-\mathcal{E}'(t))^{\frac{\epsilon_0}{(2p-1)(1+\epsilon_0)}} (-\mathcal{E}'(t))^{\frac{1}{(2p-1)(1+\epsilon_0)}} \\
 &\quad + c(-\mathcal{E}'(t))^{\frac{1}{(2p-1)(1+\epsilon_0)}} \\
 &\leq -\nu\zeta(t)\mathcal{E}(t) + c(-\mathcal{E}'(t))^{\frac{1}{(2p-1)(1+\epsilon_0)}}, \quad \forall t \geq \tau
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

Multipliez la dernière inégalité par $\zeta^\theta(t)\mathcal{E}^\theta(t)$, où $\theta = (2p - 1)(1 + \epsilon_0) - 1$, et remarquez que $\zeta' \leq 0$ pour obtiendrons :

$$\zeta^{\theta+1}(t)\mathcal{E}^\theta(t)\mathcal{A}'(t) \leq -\nu\zeta^{\theta+1}(t)\mathcal{E}^{\theta+1}(t) + c(\zeta E)^\theta(t) (-\mathcal{E}'(t))^{\frac{1}{\theta+1}}, \quad \forall t \geq \tau$$

4.4 Résultat de stabilité

L'utilisation de l'inégalité de Young, avec $q = \theta + 1$ et $q^* = \frac{\theta + 1}{\theta}$, donne, pour tout $\varepsilon' > 0$,

$$\begin{aligned}\zeta^{\theta+1}(t)\mathcal{E}^\theta(t)\mathcal{A}'(t) &\leq -\nu\zeta^{\theta+1}(t)\mathcal{E}^{\theta+1}(t) + c(\varepsilon'\zeta^{\theta+1}(t)\mathcal{E}^{\theta+1} - c\varepsilon'\mathcal{E}'(t)) \\ &= -(\nu - \varepsilon'c)\zeta^{\theta+1}(t)\mathcal{E}^{\theta+1} - c\mathcal{E}'(t), \quad \forall t \geq \tau\end{aligned}$$

Nous choisissons alors $0 < \varepsilon' < \frac{\nu}{c}$ et rappelons que $\zeta' \leq 0$ et $\mathcal{E}' \leq 0$, pour obtenir, pour $c_1 = \nu - \varepsilon'c$,

$$(\zeta^{\theta+1}\mathcal{E}^\theta\mathcal{A})'(t) \leq \zeta^{\theta+1}(t)\mathcal{E}^\theta(t)\mathcal{A}'(t) \leq -c_1\zeta^{\theta+1}(t)\mathcal{E}^{\theta+1}(t) - c\mathcal{E}'(t), \quad \forall t \geq \tau$$

Ce qui implique :

$$(\zeta^{\theta+1}\mathcal{E}^\theta\mathcal{A} + c\mathcal{E})'(t) \leq -c_1\zeta^{\theta+1}(t)\mathcal{E}^{\theta+1}(t), \quad \forall t \geq \tau$$

Soit $\mathcal{N} = \zeta^{\theta+1}\mathcal{E}^\theta\mathcal{A} + c\mathcal{E}$, nous rappelons qu'avec (4.52), $\mathcal{A} \sim \mathcal{E}$, donc nous avons $\mathcal{N} \sim \mathcal{E}$ et

$$\mathcal{N}'(t) \leq -c\zeta^{\theta+1}(t)\mathcal{N}^{\theta+1}(t) = -c\zeta^{(2p-1)(1+\varepsilon_0)}(t)\mathcal{N}^{(2p-1)(1+\varepsilon_0)}(t), \quad \forall t \geq \tau$$

Ainsi,

$$\mathcal{N}'(t)\mathcal{N}^{-(2p-1)(1+\varepsilon_0)} \leq -c\zeta^{(2p-1)(1+\varepsilon_0)}.$$

En intégrant sur (τ, t) et en utilisant le fait que \mathcal{N} et \mathcal{E} sont équivalents, nous obtenons (4.59) avec $\varepsilon = (2p - 1)\varepsilon_0$. □

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, Nous avons mis en évidence un certain nombre des EDP évolutives, En utilisant parfois des méthodes numériques approchées telles que la méthode de Routh combinée à les éléments finis mixtes, et parfois en utilisant des approches analytiques telles que les semi-groupes, La méthode Faedo-Galerkin et l'approche de stabilité des solutions de de Lyapunov. En tant que projets futurs, Nous aspirons à étendre nos études aux EDP à exposant variables, Et nous visons également à étudier les questions mathématiques liées à l'intelligence artificielle et à l'informatique quantique.

Bibliographie

- [1] Abdallah, C., Dorato, P., Benites-Read, J., & Byrne, R. (1993, June). Delayed positive feedback can stabilize oscillatory systems. In 1993 American Control Conference (pp. 3106-3107). IEEE.
- [2] Achouri, Z., Amroun, N. E. and Benaïssa, A. The Euler-Bernoulli beam equation with boundary dissipation of fractional derivative type, *Math. Methods Appl. Sci.* 40 (11), 3837—3854, 2017.
- [3] Al-Gharabli, M. M., Guesmia, A., & Messaoudi, S. (2019). Existence and a general decay results for a viscoelastic plate equation with a logarithmic nonlinearity. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 18.
- [4] Allaire, G. (2005). *Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. Editions Ecole Polytechnique.
- [5] Barrow, J. D., & Parsons, P. (1995). Inflationary models with logarithmic potentials. *Physical Review D*, 52(10), 5576.
- [6] Barrett, J. W., Liu, W. B. (1994). Quasi-norm error bounds for the finite element approximation of a non-Newtonian flow. *Numerische Mathematik*, 68, 437-456.
- [7] Bartkowski, K., & Górká, P. (2008). One-dimensional Klein–Gordon equation with logarithmic nonlinearities. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 41(35), 355201.
- [8] Bayoud, M., Zennir, Kh. and Sissaoui, H. Transmission problem with 1-D mixed type in thermoelasticity and infinite memory, *Appl. Sci.* 20, 18–35, 2018.
- [9] Białynicki-Birula, I., & Mycielski, J. (1975). Wave equations with logarithmic nonlinearities. *Bull. Acad. Pol. Sci. Cl*, 3(23), 461-466.
- [10] Brézis, H. (2011). *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1983. (English Translation) < em > Functional Analysis.

- [11] Cannon, J. R. (1963). The solution of the heat equation subject to the specification of energy. *Quarterly of Applied Mathematics*, 21(2), 155-160.
- [12] Cazenave, T., & Haraux, A. (1980). Équations d'évolution avec non linéarité logarithmique. In *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques* (Vol. 2, No. 1, pp. 21-51).
- [13] Ciarlet, P., Luneville, E. (2022). *La méthode des éléments finis : de la théorie à la pratique*. ISTE Group.
- [14] Chaoui, A., and Djaghout, M. (2024). Galerkin mixed finite element method for parabolic p-biharmonic equation with memory term. *SeMA Journal*, 81(3), 495-509.
- [15] Chaoui, A., and Guezane-Lakoud, A. (2015). Solution to an integrodifferential equation with integral condition. *Applied Mathematics and Computation*, 266, 903-908.
- [16] Chaoui, A., and Hallaci, A. (2018). On the solution of a fractional diffusion integrodifferential equation with Rothe time discretization. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 39(6), 643-654.
- [17] Chaoui, A., and Rezgui, N. (2018). Solution to fractional pseudoparabolic equation with fractional integral condition. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2*, 67, 205-213.
- [18] Chaudhary, S., Srivastava, V., Kumar, V. S., Srinivasan, B. (2017). Finite element approximation of nonlocal parabolic problem. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 33(3), 786-813.
- [19] Che, H., Wang, Y., Zhou, Z. (2011). An Optimal Error Estimates of H1-Galerkin Expanded Mixed Finite Element Methods for Nonlinear Viscoelasticity-Type Equation. *Mathematical Problems in Engineering*, 2011(1), 570980.
- [20] Che, H., Zhou, Z., Jiang, Z., Wang, Y. (2013). H1-Galerkin expanded mixed finite element methods for nonlinear pseudo-parabolic integro-differential equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 29(3), 799-817.
- [21] Chen, F., Zhou, Z. (2017). An H 1-Galerkin Mixed Finite Element Approximation of a Nonlocal Hyperbolic Equation. *Mathematical Modelling and Analysis*, 22(5), 643-653.
- [22] Chen, H., Luo, P., & Liu, G. (2015). Global solution and blow-up of a semilinear heat equation with logarithmic nonlinearity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 422(1), 84-98.

- [23] Choi, J. U, Maccamy, R. C., Fractional order Volterra equations with applications to elasticity, *J. Math. Anal. Appl.*, 139, 448–464, 1989
- [24] Christensen, R. M. (2003). *Theory of viscoelasticity*. Courier Corporation.
- [25] Dafermos, C. M. (1970). Asymptotic stability in viscoelasticity. *Archive for rational mechanics and analysis*, 37, 297-308.
- [26] Dafermos, C. M. (1970). An abstract Volterra equation with applications to linear viscoelasticity. *Journal of Differential Equations*, 7(3), 554-569.
- [27] Datko, R., Lagnese, J., & Polis, M. (1986). An example on the effect of time delays in boundary feedback stabilization of wave equations. *SIAM journal on control and optimization*, 24(1), 152-156.
- [28] R. Dautray, L. L. Lions, *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques*, vol. 1. Masson, Paris, 1984.
- [29] Djaghout, M., Chaoui, A., Zennir, K. (2022). On Discretization of the Evolution p-Bi-Laplace Equation. *Numerical Analysis and Applications*, 15(4), 303-315.
- [30] Enqvist, K., & McDonald, J. (1998). Q-balls and baryogenesis in the MSSM. *Physics Letters B*, 425(3-4), 309-321.
- [31] Górká, P. (2009). LOGARITHMIC KLEIN-GORDON EQUATION. *Acta Physica Polonica B*, 40(1).
- [32] Górká, P., Prado, H., & Reyes, E. G. (2011). Nonlinear equations with infinitely many derivatives. *Complex Analysis and Operator Theory*, 5(1), 313-323.
- [33] Halim, A., and Benaissa, A., Optimal Energy Decay for a Transmission Problem of Waves Under a Nonlocal Boundary Control, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 23(5), 1201-1225, 2019.
- [34] Han, X., & Wang, M. (2010). General decay estimate of energy for the second order evolution equations with memory. *Acta applicandae mathematicae*, 110(1), 195-207.
- [35] Kacur, J. (1985). *Method of Rothe in Evolution Equations (Teubner Texte zur Mathematik (Teubner Texts in Mathematics) vol 80)*. BSB BG Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig.
- [36] Kirane, M., & Said-Houari, B. (2011). Existence and asymptotic stability of a viscoelastic wave equation with a delay. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 62(6), 1065-1082.

- [37] Krein, S. G. (1971). Linear differential equations in Banach space. In Amer. Math Soc.
- [38] Ladyzenskaja, O. A., On solution of nonstationary operator equations. Math. Sb. 39(4), (1956).
- [39] Ladyzenskaja, O. A., Solution of the third boundary value problem for quasilinear parabolic equations. Trudy Mosk. Mat. Obs. 7, (1957)(in Russian).
- [40] Laouar, L. K., Zennir, Kh. and Boulaaras, S., The sharp decay rate of thermoelastic transmission system with infinite memories, Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser 69, 403-423, 2020.
- [41] Larson, M. G., Bengzon, F. (2013). The finite element method : theory, implementation, and applications (Vol. 10). Springer Science and Business Media.
- [42] Lazer, A. C., McKenna, P. J. (1990). Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridges : some new connections with nonlinear analysis. Siam Review, 32(4), 537-578.
- [43] Messaoudi, S. A. (2008). General decay of the solution energy in a viscoelastic equation with a nonlinear source. Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications, 69(8), 2589-2598.
- [44] Mbodje, B., Wave energy decay under fractional derivative controls, IMA Journal of Mathematical Control and Information, 23(2), 237--257, 2006.
- [45] Nicaise, S., & Pignotti, C. (2006). Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks. SIAM Journal on Control and Optimization, 45(5), 1561-1585.
- [46] Nicaise, S., & Pignotti, C. (2008). Stabilization of the wave equation with boundary or internal distributed delay.
- [47] Pani, A. K. and Fairweather, G., H^1 -Galerkin mixed finite element methods for parabolic partial integro-differential equations IMA Journal of Numerical Analysis, 22(2)
- [48] Pani, A. K., Sinha, R. K., Otta, A. K. (2004). An H^1 -Galerkin mixed method for second order hyperbolic equations. Int. J. Numer. Anal. Model, 1(2), 111-130.
- [49] Pani, A. K., An H^1 -Galerkin mixed finite element method for parabolic difference equations, SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 35, no. 2, pp. 712-727, 1998.
- [50] Rektorys, K., On application of direct variational methods to the solution of parabolic boundary value problems of arbitrary order in space variables. Czech. Math. J. 21, 318-339, (1971).

- [51] Rektorys, K., The method of discretization in time and partial differential equations. D. Reidel Publishing Company, 1982.
- [52] Rivera, J. E. M., Oquendo, H. P., The transmission problem of viscoelastic waves. *Acta Appl. Math.* 62(1), 1–21, 2000.
- [53] Sandri, D. O. M. I. N. I. Q. U. E. (1993). Sur l'approximation numerique des ecoulements quasi-newtoniens dont la viscosite suit la loi puissance ou la loi de Carreau. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 27(2), 131-155.
- [54] Slodicka, M., Dehilis, S. (2010). A nonlinear parabolic equation with a nonlocal boundary term. *Journal of computational and applied mathematics*, 233(12), 3130-3138.
- [55] Suh, H., & Bien, Z. (1980). Use of time-delay actions in the controller design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25(3), 600-603.
- [56] Touati Brahim, N., Beniani, A., Chaoui, A., Hajjej, Z., Papadopoulos, P., and Zennir, K. (2024). Strong Stability for a Viscoelastic Transmission Problem Under a Nonlocal Boundary Control. *Axioms*, 13(10), 714.
- [57] Touati Brahim, N., Chaoui, A., and Henka, Y. (2024). On the study of parabolic degenerate p-biharmonic problem with memory. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 1-18.
- [58] Theljani, A., Belhachmi, Z., Moakher, M. (2019). High-order anisotropic diffusion operators in spaces of variable exponents and application to image inpainting and restoration problems. *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, 47, 251-271.
- [59] Vladimirov, V. S. (2005). The equation of the-adic open string for the scalar tachyon field. *Izvestiya : Mathematics*, 69(3), 487.
- [60] Xu, G. Q., Yung, S. P., & Li, L. K. (2006). Stabilization of wave systems with input delay in the boundary control. *ESAIM : Control, optimisation and calculus of variations*, 12(4), 770-785.
- [61] Zennir, Kh., Feng, B., One spatial variable thermoelastic transmission problem in viscoelasticity located in the second part, *Math. Meth. Appl. PSci.* 41(6), 6895–6906, 2018.
- [62] Zhou, Z. (2010). An H1-Galerkin mixed finite element method for a class of heat transport equations. *Applied Mathematical Modelling*, 34(9), 2414-2425.
- [63] Zitouni, S., Ardjouni, A., Zennir, Kh., R. Amiar, Well-posedness and decay of solution for a transmission problem in the presence of infinite history and varying delay, *Nonl. Studies.* 25(2), 445–465, 2018.