الجمهوريـة الجزائريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة 8 ماي 1945 قالمـة

كلية الرياضيات، الاعلام ألآلي وعلوم المادة
قسم الرياضيات
مخبر الرياضيات التطبيقية والنمذجة

أطروحة

لنيل شهادة الدكتوراه في الطور الثالث

الميدان: رياضيات واعلام آلي الشعبة: رياضيات تطبيقية

التخصص: رياضيات تطبيقية

من إعداد:
منصوري محمد عبد الرزاق

بعنوان

دراسة تحليلية لطيف وشبه طيف المؤثرات الخطية

بتاريخ: 17 أفريل 2025 أمام لجنة المناقشة المكونة من:

الاسم واللقب	الرتبة		
السيد: عيساوي محمد الزين	أستاذ التعليم العالي	جامعة 8 ماي 1945 قالمة	رئيسا
السيد: قباي حمزة	أستاذ التعليم العالي	جامعة8 ماي 1945 قالمة	مشرفا
السيد :خلاف عمار	أستاذ محاضر قسم أ	المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات قسنطينة	مشرفا مساعدا
السيد: غانم رضوان	أستاذ التعليم العالي	جامعة باجي مختار عنابة	ممتحنا
السيد: دبار رابح	أستاذ محاضر قسم أ	جامعة8 ماي 1945 قالمة	ممتحنا
السيد: الزبسة عبد العالي	أستاذ محاضر قسم أ	جامعة8 ماي 1945 قالمة	ممتحنا

السنة الجامعية: **2025/2024**

الفَهـــرَس

شكر وتقدير

في هذه اللحظة المباركة، أود أن أعبر عن خالص شكري وتقديري العميق لله عز وجل، الذي أنعم علينا بنعمه التي لا تحصى وعطاياه التي لا تنفد. أسأل الله أن يجعل هذا العمل خالصًا لوجهه الكريم وأن يرضى به عنا.

أتقدم بجزيل الشكر والامتنان لمشرفي الفاضلين ، الدكتور خلاف عمار والبروفيسور قباي حمزة ، اللذان كان لهما دور كبير - بعد الله - في توجيه البحث وإرشاد الباحث منذ بداية الفكرة حتى إتمام هذه الأطروحة على نحو لائق. كما أود أن أعبر عن امتناني لكل من ساهم في إثراء هذا العمل بأفكارهم وإرشاداتهم.

أنا ممتن للأساتذة الكرام الذين شرفوني بحضور جلسة المناقشة، سواء كرؤساء أو أعضاء في لجنة الفحص، على قبولهم لهذه الأطروحة وعلى مساهماتهم القيمة التي ساعدت في تحسين وتوضيح المسائل المطروحة، والتي ستساهم في تعزيزها في المستقبل. أسأل الله أن يتقبل هذا العمل خالصًا لوجهه الكريم وأن يجعله في ميزان حسناتنا.

إقرار تأليف

أنا، محمد عبد الرزاق منصوري، عضو في مختبر الرياضيات التطبيقية والنمذجة ،(LMAM) أؤكد أن العمل المقدم في هذه الأطروحة، بعنوان "دراسة تحليلية لطيف وشبه طيف المؤثرات الخطية"، هو نتيجة بحثي الأصلي الذي أجريته خلال سعيي للحصول على درجة دكتوراه الفلسفة في الرياضيات التطبيقية في جامعة قالمة (08 ماي 1945).

أعلن أن هذا العمل، باستثناء المواد المنشورة علناً في مقالات علمية أو المقدمة في مؤتمرات وفعاليات وطنية أو دولية، التي ساهمت في تلبية متطلبات الحصول على درجة الدكتوراه الخاصة بي، لم يتم مشاركته أو تقديمه أو نشره من قبل، سواء جزئيًا أو كليًا، من قبلي أو من قبل أي عضو آخر في المجتمع العلمي.

أقر بالمساهمات القيمة من زملاء الباحثين في تشكيل هذه المخطوطة وتطوير التفكير العلمي فيها. أضمن أن الاعتراف المناسب والتقدير قد تم تقديمهما لجميع المساهمات الخارجية.

علاوة على ذلك، قمت باستشهاد وإدراج جميع المصادر والمراجع والمواد الببليوغرافية المستخدمة في هذا العمل بدقة وفقًا لأهميتها وملاءمتها.

الملخص

يعتمد عملنا على تعريف جديد لشبه الطيف المعمم، تم تقديمه لأول مرة في مخبر الرياضيات التطبيقية والنمذجة، (LMAM) بهدف إيجاد حل جديد لمشكلة التلوث الطيفي. بعد وضع التعريفات والأسس الأولية، كان هدفنا تطوير نظرية أساسية حول تقارب شبه الطيف المعمم وتعميم النظرية الكلاسيكية. وقد تحقق ذلك في دراستنا الأولى، حيث أثبتنا أن شبه الطيف المعمم هو المفتاح لتجاوز مشكلة التلوث الطيفي.

بعد ذلك، كان من الضروري دراسة الخاصية H، وهي محورية في تعريف الطيف في كل من النظريات الكلاسيكية والمعممة. بدون هذه الخاصية، تصبح جميع نتائج التقارب، سواء كانت كلاسيكية أو حديثة، عديمة الفائدة عملياً. في دراستنا الثانية، حققنا نتائج رائعة تتعلق بهذه الخاصية في نظرية شبه الطيف المعمم، والتي يمكن تمديدها لتشمل المؤثرات المحدودة وغير المحدودة في النظرية الكلاسيكية. وبذلك، أثبتنا أن النهج الجديد شامل وعملي، ويقدم أفضل طريقة للقضاء على مشكلة التلوث الطيفي.

الكلمات المفتاحية نظرية المؤثرات، نظرية الطيف، شبه الطيف المعمم، الطيف المعمم، مجموعات المستويات الناظمية، مسافة هوسدورف.

Abstract

Our work builds on a new definition of the generalized pseudo-spectrum, first introduced at LMAM , aimed at finding a novel solution to the spectral pollution problem. After establishing the initial definitions and foundations, our task was to develop a fundamental theory regarding the convergence of the generalized pseudo-spectrum and to generalize the classical theory. This was achieved in our first study, where we proved that the generalized pseudo-spectrum is the key to overcoming spectral pollution.

Following this, it was crucial to study property $\boldsymbol{H}$, which is central to defining the spectrum in both classical and generalized theories. Without this property, all convergence results, whether classical or modern, become practically useless. In our second study, we achieved remarkable results concerning this property in the generalized pseudo-spectrum theory, which can be extended to include both bounded and unbounded operators in the classical theory. Thus, we have demonstrated that the new approach is comprehensive and practical, providing the best method for eliminating the spectral pollution problem.

Keywords Operators Theory , spectrum Theory ,Generalized pseudo-spectrum, Generalized spectrum, resolvent level sets , Pseudo-Spectrum of Operators Pencils,Hausdorff distance.

Résumé

Notre travail s'appuie sur une nouvelle définition du pseudo-spectre généralisé, introduite pour la première fois au LMAM, visant à trouver une solution innovante au problème de la pollution spectrale. Après avoir établi les définitions et les fondements initiaux, notre tâche était de développer une théorie fondamentale concernant la convergence du pseudo-spectre généralisé et de généraliser la théorie classique. Cela a été réalisé dans notre première étude, où nous avons prouvé que le pseudo-spectre généralisé est la clé pour surmonter la pollution spectrale.

Ensuite, il était crucial d'étudier la propriété $\boldsymbol{H}$, qui est centrale pour définir le spectre dans les théories classique et généralisée. Sans cette propriété, tous les résultats de convergence, qu'ils soient classiques ou modernes, deviennent pratiquement inutiles. Dans notre deuxième étude, nous avons obtenu des résultats remarquables concernant cette propriété dans la théorie du pseudo-spectre généralisé, qui peuvent être étendus pour inclure à la fois les opérateurs bornés et non bornés dans la théorie classique. Ainsi, nous avons démontré que la nouvelle approche est complète et pratique, fournissant la meilleure méthode pour éliminer le problème de la pollution spectrale.

Mots-clés : Théorie des Opérateurs, Théorie du Spectre, Pseudo-Spectre Généralisé, Spectre Généralisé, Ensembles de Niveaux de la Résolvante, Distance de Hausdorff.

1

المقدمة

1.1 المقدمة

تعتمد العديد من الأبحاث الرياضية والعلمية على طيف المؤثرات الخطية. يوفر هذا المفهوم إطاراً لدراسة وفهم الظواهر المعقدة في الأنظمة الطبيعية وكذلك التحويلات الخطية. بالإضافة إلى ذلك، يساعد في تحديد الخصائص والسلوكيات الرياضية والفيزيائية للأنظمة، ويدعم تطوير العديد من النظريات والتطبيقات العملية.

تستخدم العديد من التخصصات، مثل التفاضل والتكامل، الديناميكا الحرارية، الفيزياء الكمية،

الديناميكا الكلاسيكية، التحليل الرياضي، وغيرها، طيف المؤثرات. يعمل فهمنا لطيف المؤثرات على تحسين قدرتنا على تفسير وتقييم العمليات الرياضية والفيزيائية المعقدة من خلال تزويدنا بفهم عميق للخصائص والسلوكيات للأنظمة.

تعتبر فضاء المؤثرات المحدودة $\mathscr{L}(X)$ المزودة بالنظيم المعرف على الفضاء البانخي $(X, \|\cdot\|_X)$ بـ :

$$\forall A \in \mathscr{L}(X), \quad \|A\| = \sup\{\|Ax\|_H : \|x\|_X \leq 1\}$$

.

ليكن B مؤثر مغلق في الفضاء البناخي X. مجموعة القيم الناظمية معرفة بـ :

$$\rho(B) = \left\{z \in \mathbb{C} : (B - zI)^{-1} \in \mathscr{L}(X)\right\},$$

وكذلك مجموعة الطيف معرفة بـ :

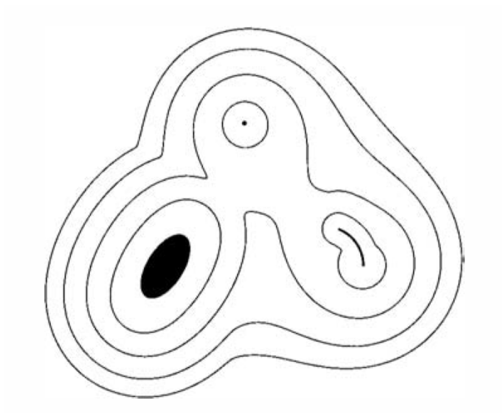
$$\mathrm{sp}(B) = \mathbb{C} \setminus \rho(B).$$

في معظم الحالات ، يواجه حساب الطيف للمؤثرات الخطية صعوبات كبيرة وقيود عملية جوهرية. ولهذا السبب، يستخدم العديد من العلماء أدوات حوسبية وطرق التحليل العددي لإنشاء تقريبات تسهل حساب الطيف. لكن ماتم ملاحظته تطبيقيا عدم استقرار طيف المؤثرات الخطية، حيث يظهر أن القيم التقريبية المتحصل عليها باستخدام التقنيات العددية تختلف بشكل كبير عن القيم الحقيقية للطيف. مما أدى لظهور مشكلة خطيرة معروفة باسم "مشكلة التلوث الطيفي". وكنتيجة لذه المشكلة تم تطوير مصطلح جديد يعرف باسم "شبه الطيف للمؤثرات الخطية".

لكل $0 < \varepsilon$، يتم تعريف مجموعة شبه طيف المؤثر المغلق B في الفضاء البناخي X بـ :

$$\sigma_\varepsilon(B) = \left\{z \in \mathbb{C} : \left\|(B - z)^{-1}\right\| > \frac{1}{\varepsilon}\right\} \cup \sigma(B)$$

والذي يمكن تلخيص فكرته بشكل مختصر في محاولة دراسة الجوارات الخاصة بالقيم الطيفية ، حيث تمثل المجموعة الطيفية في هذه الحالة مجموعة جزئية من مجموعة شبه الطيف قمنا بإرفاق الصورة المقابلة حتى تتوضح الفكرة أكثر .



شكل 1.1: رسم تخطيطي للهندسة الخاصة بشبه الطيف (Pseudospectra) لمؤثر في فضاء باناخ. تشير المنطقة السوداء والقوس السميك والنقطة كذلك إلى مكونات مختلفة من الطيف ، و تمثل تلك الخطوط المحيطة حدود $\sigma_\varepsilon(B)$ من أجل قيم مختلفة لـ ϵ

على وجه الخصوص، ليكن B مؤثراً تفاضلياً، لتكن سلسلة الإسقاطات $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ المعرفة على $\mathscr{H}$، حيث $P_k : \mathscr{H} \to \mathscr{H}_k$ و$\mathscr{H}_k$ هي فضاءات جزئية مغلقة من $\mathscr{H}$. تسعى طرق التقطيع التقليدية، مثل الفروقات المحدودة والعناصر المحدودة، المستخدمة في مسائل الطيف، إلى تحقيق المساواة التالية:

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_\varepsilon(P_k B P_k) = \sigma_\varepsilon(B)$$

إذا رمزنا إلى $B_k = P_k B P_k$، فإن السؤال الرئيسي في نظرية تقريب شبه الطيف هو دراسة نمط تقارب $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ نحو B من أجل إثبات تقارب $\sigma_\epsilon(B_k)$ نحو $\sigma_\epsilon(B)$.

في حالة $B \in \mathscr{L}(X)$، تم إثبات أنه إذا كانت $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ تتقارب نحو B في نظيم $\mathscr{L}(X)$، فإن

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_\epsilon(B_k) = \sigma_\epsilon(B)$$

بشرط أن يكون التطبيق $\|(B-\lambda)^{-1}\| \mapsto \lambda$ غير ثابت على أي مجموعة مفتوحة من $\rho(B)$.

تم البرهان أيضًا أنه بالنسبة لمؤثر مغلق غير محدود B، يتحقق التقارب تحت نفس الشرط باستعمال نوع من التقارب يسمى تقارب النظيم الناظمي المعمم (gnr). ومع ذلك، فإن هذا النوع من التقارب يمكن تحقيقه عمليًا فقط في بعض الحالات الخاصة والقليلة .

لذلك، أصبح من الضروري تطوير نهج أكثر عملية لفحص تقارب شبه الطيف للمؤثرات غير المحدودة،. أدى هذا الاحتياج إلى تقديم مفهوم الطيف المعمم وشبه الطيف المعمم.

لبكن U و V مؤثران محدودان على الفضاء الهيلبرتي $\mathscr{H}$. يتم تعريف الطيف المعمم كما يلي:

$$\mathrm{sp}(V,U)=\{\lambda\in\mathbb{C}: U-\lambda V \text{ غير قابل للعكس}\},$$

ومجموعة القيم الناظمية المعممة كما يلي:

$$\rho(U,V)=\mathbb{C}\setminus \mathrm{sp}(U,V).$$

و شبه طيف المؤثرات المعممة كما يلي :

$$\forall\epsilon>0,\quad \sigma_\epsilon(U,V)=\left\{z\in\mathbb{C}:\quad \|(U-zV)^{-1}V\|>\epsilon^{-1}\right\}\bigcup \mathrm{sp}(U,V).$$

في المرجع [34] ، تم إثبات أن كل مشكلة طيفية مرتبطة بالمؤثر المغلق B يمكن تحويلها إلى مشكلة طيفية معممة مكافئة. وهذا يعني وجود مؤثرين محدودين U و V معرفين على X بحيث:

$$\sigma(U,V)=\sigma(B)\quad \text{و}\quad \sigma_\epsilon(U,V)=\sigma_\epsilon(B).$$

مما يعني أنه يمكننا ربط نظرية شبه الطيف الكلاسيكية بنظرية شبه الطيف المعمم ، ويمكن استعمال هذه الميزة لحل المشكل المتعلق بالتقارب في حالة المؤثر الغير محدود B بربطه بالمؤثرين المحدودين U و V .

نرغب في إثبات تقارب $\sigma_\epsilon(U_k,V_k)$ نحو $\sigma_\epsilon(U,V)$ ،علما أن سلاسل المؤثرات $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ و $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ تتقارب نظاميا نحو U و V على التوالي. لتحقيق هذا، نعرف مسافة هوزدورف بين مجموعتين متراصتين غير فارغتين $K_1,K_2\subset\mathbb{C}$ على النحو التالي:

$$d_{\mathrm{H}}(K_1,K_2):=\max\left\{\sup_{z\in K_1}\mathrm{dist}(z,K_2),\sup_{z\in K_2}\mathrm{dist}(z,K_1)\right\}\tag{4}$$

تم إثبات تحت شروط معينة أن:

$$d_{\mathrm{H}}\left(\overline{\sigma_\epsilon(U_n,V_n)}\cap K,\overline{\sigma_\epsilon(U,V)}\cap K\right)\longrightarrow 0,$$

حيث $n\to\infty$.

تم استعمال مؤثر شرودينغر المعرف على الفضاء هيلبرت $\mathscr{H}=L^2(0,+\infty)$ كنموذج للتطبيق العددي. بعدها قمنا بالتركيز على دراسة شرط أساسي موجود في جميع النظريات المتعلقة بتقارب شبه الطيف للمؤثرات المعممة وكذلك شبه الطيف للمؤثرات في النظرية الكلاسيكية . هذا الشرط، الممثل بحرف H، ينص على أنه لكل مجموعة جزئية $\Omega\subset\rho(U,V)$، $\|(U-zV)^{-1}V\|$ ليست ثابتة.

التعميم الشامل للنظرية الكلاسيكية يتطلب استكشاف وتحديد الظروف التي يتحقق فيها هذا الشرط وفي أي فضاءيتحقق ذلك . تم البرهان أنه عندما تكون U و V مؤثرات في $\mathscr{L}(X)$، و V هو إما مؤثر متراص متباين أو قابل للقلب، فإن الشرط H يتحقق. حيث X هو فضاء محدب بانتظام في هذه الحالة . بحثنا يعزز فهمنا بشكل كبير للشبه الطيف.

2.1 خطة الأطروحة

تنظم هذه الأطروحة على النحو التالي:

في الجزء الأول، نستكشف المفهوم العام لشبه الطيف للمؤثرات الخطية المحدودة وغير المحدودة. يتكون هذا الجزء من عدة فصول. يركز الفصل الأول على شبه الطيف للمؤثرات المحدودة، حيث يتم مناقشة خصائصه الرئيسية ضمن النظرية الكلاسيكية. بعد ذلك، يستكشف الفصل الثاني شبه الطيف للمؤثرات غير المحدودة، حيث يتم تلخيص الأعمال المهمة وتسليط الضوء على التحديات في نظريات التقارب مقارنةً بشبه الطيف للمؤثرات المحدودة. كما نوضح دوافع بحثنا ونسلط الضوء على النظريات الهامة المثبتة في النظرية الكلاسيكية.

الجزء الثاني مخصص لنظرية شبه الطيف المعمم. ينقسم هذا الجزء إلى أربعة فصول. في الفصل الأول، نناقش نظرية الطيف المعمم والمفاهيم الأساسية والنظريات الأساسية التي ستساعدنا لاحقاً. بالمثل، يركز الفصل الثاني على المفاهيم الأساسية لشبه الطيف المعمم للمؤثرات. أما الفصلين الأخيرين، فتتركز كل منهما على بحوثنا الجديدة في هذا المجال: الأول على نظرية تقارب شبه الطيف المعمم للمؤثرات، والثاني على خاصية H التي تمثل أساس جميع البحوث في هذا المجال.

القسم I

شبه الطيف للمؤثر الخطي

مقدمة

في هذا الجزء، سنغوص في المفاهيم الأساسية لشبه الطيف للمؤثرات الخطية المحدودة وغير المحدودة ضمن النظرية الكلاسيكية. نهدف إلى توفير فهم شامل لهذه المفاهيم من خلال استكشاف تعريفاتها، وخصائصها، والنتائج المترتبة عليها. سيتم التركيز بشكل كبير على خاصية H، التي تلعب دوراً حاسماً في دراسة شبه الطيف. ستتم دراسة هذه الخاصية بالتفصيل لإبراز أهميتها والشروط التي اللازمة لتحققها ، والذي يمنحنا فهما دقيقا وأكثر عمقا لنظرية شبه الطيف للمؤثرات الخطية.

2

شبه الطيف للمؤثرات المحدودة

في هذا الفصل، سنغطي التعريفات الأساسية المتعلقة بشبه الطيف للمؤثرات الخطية المحدودة ضمن النظرية الكلاسيكية، مع التركيز على أهمية خاصية H. سيتم مناقشة هذه الخاصية بتفصيل أكبر في الفصول القادمة.

لنعتبر $\mathscr{L}(X)$ فضاء المؤثرات الخطية المحدودة المعرف على الفضاء الباناخي $(X, \|\cdot\|_X)$، المرفق بالنظيم :

$$\forall A \in \mathscr{L}(X), \quad \|A\| = \sup\{\|Ax\|_X : \|x\|_X \leq 1\}.$$

ليكن $B \in \mathscr{L}(X)$ ، نعرف مجموعة القيم الناظمية بـ :

$$\rho(B) = \left\{z \in \mathbb{C} : (B - z)^{-1} \in \mathscr{L}(X)\right\}.$$

وطيف المؤثر B بـ :

$$\mathrm{sp}(B) = \mathbb{C} \setminus \rho(B).$$

يهدف هذا الفصل إلى تأسيس المفاهيم الأساسية اللازمة لفهم كيفية تعريف واستخدام شبه الطيف. وسيكون هذا الفهم أساسيا بينما نتعمق في دراسة شبه الطيف المعمم ونستكشف خصائص تقاربه.

1.2 المؤثر الناظمي

لنكن $B \in \mathscr{L}(X)$، حيث $\mathscr{L}(X)$ تمثل فضاء المؤثرات الخطية المحدودة على الفضاء الباناخي X. نستخدم $\sigma(B)$ للدلالة على طيف B، و $\rho(B)$ للدلالة على مجموعة القيم الناظمية لـ B. المؤثر الناظمي لـ B، نرمز له بـ $R(\mu, B)$، معرف بـ :

$$R(\mu, B) = (B - \mu)^{-1}.$$

تعتبر هذه الدالة $R(\cdot, B)$ تحليلية على المجموعة المفتوحة $\rho(B) \subset \mathbb{C}$. يُذكر تحويل كوشي التكاملي: إذا كان

$$\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - \mu_0| \leqslant r\} \subseteq \rho(B),$$

حيث $\mu_0 \in \rho(B)$ و $r > 0$، فإن

$$R(\mu_0, B) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\mu-\mu_0|=r} \frac{R(\mu, B)}{\mu - \mu_0} d\mu = \int_0^1 R(\mu_0 + re^{2\pi i t}, B) dt.$$

بالتالي،

$$\|R(\mu_0, B)\| = \left\| \int_0^1 R(\mu_0 + re^{2\pi i t}, B) dt \right\| \leqslant \int_0^1 \|R(\mu_0 + re^{2\pi i t}, B)\| dt.$$

هذه المتباينة توضح أن الدالة $R(\cdot, B)$ تتوافق مع مبدأ الحد الأعظمي . ينشأ السؤال حول ما إذا كانت الدالة $\|R(\cdot, B)\|$ يمكن أن تكون ثابتة على مجموعة مفتوحة بأكملها ضمن $\rho(B)$.

في البداية، من المهم أن نلاحظ أن دالة تحليلية تأخذ قيمًا في فضاء باناخي X يمكن أن تكون لها قيمة ثابتة على مجموعة مفتوحة بأكملها دون أن تكون ثابتة في حد ذاتها. يمكن توضيح هذا المفهوم بالمثال التالي.

مثال 1. نعتبر الفضاء $\mathbb{C}^2$ مجهزاً بالنظام $\|(z_1,z_2)\| = \left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)^{1/2}$. ليكن $\mathscr{L}(\mathbb{C}^2)$ فضاء المصفوفات 2×2 المزود بالنظيم المصفوفاتي المرفق به . نعرف الدالة

$$f:\mathbb{C}\to\mathscr{L}(\mathbb{C}^2),$$
$$z\mapsto\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & z\end{pmatrix}.$$

لكل $z\in\mathbb{C}$ بحيث $|z|\leqslant 1$، نجد أن $\|f(z)\|=1$. وهذا يوضح كلامنا سابقا حيث أن النظيم الخاص بالدالة ثابت لكن الدالة غير ثابتة

بما أن $R(\cdot,B)$ تحليلية على مجموعة مفتوحة محدودة $U\subseteq\rho(B)$، حيث أن $\overline{U}\subset\rho(B)$ ، فإن $\|R(\cdot,B)\|$ يحقق أقصى قيمته على الحدود ∂U لـ U . أي من أجل كل $z_0\in\rho(T)$ وكل $r>0$ حيث $\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|\le r\}\subseteq\rho(T)$ ، فإن

$$\left\|(z_0I-T)^{-1}\right\|\le\sup_{0\le\theta\le2\pi}\left\|\left(re^{i\theta}I-T\right)^{-1}\right\|.$$

هذا يعني أنه إذا كان النظيم $\|R(.,B)\|$ غير ثابت من أجل كل عدد مركب z بجوار z_0 فإنه توجد متتالية $(z_n)_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}$ حيث $z_n\to z_0$ من أجل $n\to\infty$ و

$$\left\|(z_nI-T)^{-1}\right\|>\left\|(z_0I-T)^{-1}\right\|$$

من اجل كل . $n\in\mathbb{N}-\{0\}$.

نعرف الفرضية التالية بالنسبة للمؤثر B:

$$\begin{cases}\text{لا توجد مجموعة مفتوحة في } \rho(B)\\ \text{حتى تكون الدالة } \|R(\cdot,B)\| \text{ ثابتة.}\end{cases}\qquad\text{(H)}$$

تشير النتائج الحديثة [5] إلى أن الفرضية (H) محققة دوما في فضاءالمؤثرات المحدودة المعرفة على فضاء هيلبرت . قد لا تنطبق هذه الفرضية بشكل عام عند التعامل مع فضاءات باناخ، وهذا الموضوع سنتعمق فيه لاحقًا. على وجه التحديد، في حال كان X فضاء باناخ ذو بُعد محدود و $B\in\mathscr{L}(X)$، فالفرضية (H) محققة أيضا . إذا كان المؤثر B غير محدود فلا نعلم أي نظرية يمكن أن تثبت الفرضية (H) تحت أي

شرط من الشروط ، لهذا تعتبر هذه الفرضية مجال بحث مستفيض لفائدتها العظيمة في نظريات التقارب وقلة النتائج فيها ، والذي جعلنا نخصص لها مقالا وفصلا كاملا فيما بعد .

2.2 شبه الطيف

بعد التأكيد على خاصية (H)، التي تعزز تعريفنا لشبه الطيف للمؤثرات الخطية، يهدف هذا القسم إلى تقديم التعريفات الأساسية والخصائص المهمة التي تعد حجر الأساس في هذا البحث ، وستُوسع لتشمل شبه الطيف المعمم.

لنقدم مفهوم شبه الطيف للمؤثرات بدقة، نبدأ بتعريف طيف النقط التقريبي كما صاغه Nevanlinna [40, p. 19]:

$$\Sigma_\epsilon(B)=\{\mu\in\mathbb{C}: \exists x\in X, \|x\|=1 \text{ بحيث } \|(B-\mu)x\|<\epsilon\}.$$

يوفر هذا التعريف الخصائص الأساسية التي ستلعب دورًا حاسمًا في المناقشات القادمة لدينا. إن تتبع التطور التاريخي والمنطقي لهذا المفهوم ، يقودنا لفهم أعمق لشبه الطيف.

لكل $\epsilon>0$، $(\Sigma_\epsilon(B))_{\epsilon>0}$ تشكل متتالية مجموعات مفتوحة متداخلة التي تتوسع مع زيادة قيمة ϵ. Nevanlinna [40, p. 24] يثبت بدقة استمرارية الملاصقة $\overline{\Sigma_\epsilon(B)}$: إذا كانت $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب نحو B، حيث $B_n\in\mathscr{L}(X)$، فإن

$$\lim_{n\to\infty}\overline{\Sigma_\epsilon(B_n)}=\overline{\Sigma_\epsilon(B)}.$$

الفرضية المتضمنة في برهانه، أن المؤثر B يستوفي الخاصية (H).

تم تصور مفهوم شبه الطيف أساسا لتحليل الحساسية الطيفية في المصفوفات غير النظامية. في سياق المؤثرات المحدودة، يتعلق هذا المفهوم بمجموعة جميع القيم الذاتية ϵ التي قدمها لانداو [25].

تعريف 1. ليكن $B\in\mathscr{L}(X)$ و $\epsilon>0$. يُعرف شبه الطيف $\omega_\epsilon(B)$ للمؤثر Bبـ :

$$\omega_\epsilon(B)=\{\mu\in\mathbb{C}: \left\|(B-\mu)^{-1}\right\|\geqslant\epsilon^{-1}\}\cup\sigma(B),$$

حيث $\sigma(B)$ تمثل طيف B.

في السياق الذي يفترض فيه أن المؤثر B يستوفي الشرط (H)، سنقوم بدراسة تعاريف متعددة ومتكافئة. سيتم التأكيد على أهمية هذا الشرط أثناء البرهان .

نظرية 1. ليكن $B \in \mathscr{L}(X)$ حيث X فضاء بناخي ، و B يستوفي الفرضية (H) . $\omega_\epsilon(B)$ يملك التعاريف المتكافئة التالية:

$$\{\mu \in \mathbb{C}; \left\|(B-\mu)^{-1}\right\| \geqslant \epsilon^{-1}\} \cup \sigma(B), \tag{1}$$

$$\left\{\mu \in \mathbb{C}; \exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ حيث } \|x_n\| = 1, \lim_{n\to\infty} \|(B-\mu)x_n\| \leqslant \epsilon\right\} \cup \sigma(B), \tag{2}$$

$$\mathrm{cl}\{\mu \in \mathbb{C}; \mu \in \sigma(A+E) \text{ مع } \|E\| \leqslant \epsilon\}, \tag{3}$$

$$\mathrm{cl}\,\Sigma_\epsilon(B) \cup \sigma(B). \tag{4}$$

برهان. لإثبات النظرية 1، نقوم ببرهان التكافؤات $(2) \Leftrightarrow (1)$، والنتائج الضمنية $(3) \Rightarrow (4)$، $(4) \Rightarrow (1)$، و$(1) \Rightarrow (3)$ بشكل متتابع.

$(2) \Leftrightarrow (1)$:

لنفرض أن $\mu \in \rho(B)$ و$\|(B-\mu)^{-1}\| \geq \epsilon^{-1}$، إذن هناك $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث $\|y_n\| = 1$ و

$$\lim_{n\to+\infty} \|(B-\mu)^{-1}y_n\| = \|(B-\mu)^{-1}\| \geq \epsilon^{-1}.$$

لنفترض

$$x_n = (\|B-\mu\|)^{-1}(B-\mu)^{-1}y_n,$$

إذًا لدينا $\|x_n\| = 1$ لكل $n \in \mathbb{N}$ و

$$\lim_{n\to+\infty} \|(B-\mu)x_n\| = \lim_{n\to+\infty} \left(\|(B-\mu)^{-1}y_n\right)^{-1} \leq \epsilon^{-1}.$$

من هذا نستنتج أن $(2) \Rightarrow (1)$.

لإثبات $(1) \Rightarrow (2)$، نحتاج فقط إلى أخذ

$$y_n = (\|(B-\mu)x_n\|)^{-1}(B-\mu)x_n.$$

ثم نحصل على

$$\left\|(B-\mu)^{-1}\right\| \geqslant \lim_{n\to\infty} \left\|(B-\mu)^{-1}y_n\right\| = \lim_{n\to\infty} (\|(B-\mu)x_n\|)^{-1} \geqslant \epsilon^{-1}.$$

$(3) \Rightarrow (4)$:

من الواضح أن

$$\sigma(B) \subset \{\mu \in \mathbb{C}, \mu \in \sigma(B+E) \quad \text{مع} \quad \|E\| \leqslant \epsilon\}.$$

لنفرض $\mu \in \Sigma_\epsilon(B)$، لذا يوجد $x_0 \in X$ بحيث $\|x_0\| = 1$ و

$$\|(B-\mu)x_0\| < \epsilon,$$

لنفرض $y_0 = -(\mu - B)x_0$. يوجد $y^* \in X^*$ بحيث $\|y^*\| = 1$ و$\langle y^*, x_0\rangle = 1$. نأخذ $E \in \mathscr{L}(X)$ بحيث

$$Ex = \overline{\langle y^*, x\rangle} y_0.$$

إذًا،

$$(E+B-\mu)x_0 = y_0 + (B-\mu)x_0 = 0$$

و

$$\|Ex\| \leqslant |\langle y^*, x\rangle| \, \|y_0\| < \epsilon \|x\|.$$

لذلك،

$$\Sigma_\epsilon(B) \cup \sigma(B) \subseteq \{\mu \in \mathbb{C}, \mu \in \sigma(B+E) \quad \text{مع} \quad \|E\| \leqslant \epsilon\}.$$

$(1) \Rightarrow (3)$:

لنفرض $E \in \mathscr{L}(X)$ مع $\|E\| \leqslant \epsilon$ و$\mu \in \sigma(B+E)$. نفترض أن $\mu \in \rho(B)$ و

$$\left\|(B-\mu)^{-1}\right\| < \epsilon^{-1}.$$

إذًا، $\left\|(B-\mu)^{-1}E\right\| < 1$، مما يعني أن $(B-\mu)^{-1}E$ قابل للقلب. وبالتالي،

$$E + B - \mu = (B-\mu)\left[(B-\mu)^{-1}E + I\right]$$

قابل للقلب أيضًا، مما يتناقض مع $\mu \in \sigma(B+E)$. لذلك،

$$\mu \in \left\{\mu \in \mathbb{C}; \left\|(B-\mu)^{-1}\right\| \geqslant \epsilon^{-1}\right\} \cup \sigma(B).$$

$(1) \Rightarrow (4)$:

لنفرض أن $\mu \in \rho(B)$ و

$$\left\|(B-\mu)^{-1}\right\| \geqslant \epsilon^{-1}.$$

نظراً للفرضية (H)، فإن معيار الدالة العكسية غير ثابت. لذلك، يوجد μ' قريب بشكل اعتباطي من μ بحيث

$$\left\|(B-\mu')^{-1}\right\| > \epsilon^{-1}.$$

وبالتالي، يوجد $y \in X$ بمعيار وحدة بحيث

$$\left\|(B-\mu')^{-1}y\right\| > \epsilon^{-1}.$$

لنفرض

$$x = \left(\left\|(B-\mu')^{-1}y\right\|\right)^{-1}(B-\mu')^{-1}y.$$

إذاً،

$$\left\|(B-\mu')x\right\| < \epsilon,$$

مما يعني أن $\mu' \in \Sigma_\epsilon(B)$. لذلك، $\mu \in \mathbf{cl}\,\Sigma_\epsilon(B)$، و$(4) \Rightarrow (1)$. بهذا نكون قد أكملنا إثبات النظرية. □

ملاحظة 1. تلعب الفرضية (H) دوراً حاسماً في إثبات $(4) \Rightarrow (1)$، مما يثبت أنه لا غنى عنها في البرهان.

تكمن أهمية النظريتين التاليتين في الدراسة العملية للطيف وشبه الطيف للمؤثرات الخطية في ارتباطهما الوثيق بمعالجة مشكلة التلوث الطيفي:

1. تضمن النظرية الأولى أن شبه الطيف $\sigma_\epsilon(B)$ لمؤثر B يكون مستقراً مع اقتراب ϵ من ϵ_0، ومع اقتراب ϵ من الصفر، يتقارب شبه الطيف $\sigma_\epsilon(B)$ إلى الطيف $\sigma(B)$. هذه الاستقرارية مهمة جداً لتجاوز مشكلة التلوث الطيفي، حيث تضمن أن الاضطرابات الصغيرة في الطرق العددية لا تؤدي إلى انحرافات كبيرة في الطيف.

2. تؤكد النظرية الثانية أنه إذا تقاربت متتالية من المؤثرات $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}(X)$ نحو المؤثر B ناظميا في الفضاء $\mathscr{L}(X)$، فإن شبه الطيف $\sigma_\epsilon(B_n)$ لهذه المؤثرات التقريبية يتقارب إلى شبه الطيف $\sigma_\epsilon(B)$

للمؤثر الأصلي. يضمن هذا التقارب أن الطرق العددية المستخدمة لتقريب المؤثرات ليست متأثرة سلباً بالتلوث الطيفي، حيث تعكس التقريبات بدقة شبه الطيف للمؤثر الأصلي.

نظرية 2. لنفرض أن $B \in \mathscr{L}(X)$ يحقق الفرضية (H)، إذاً

$$\lim_{\epsilon\to\epsilon_0} \sigma_\epsilon(B) = \sigma_{\epsilon_0}(B), \quad \forall \epsilon_0 > 0 \quad \text{و} \quad \lim_{\epsilon\to 0^+} \sigma_\epsilon(B) = \sigma(B)$$

برهان. انظر [24] □

نظرية 3. لنفرض أن B هو مؤثر في $\mathscr{L}(X)$ و $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من المؤثرات في $\mathscr{L}(X)$. نفترض $B_n \xrightarrow{\|\cdot\|} B$ عندما $n \to \infty$، حيث ي B يحقق الفرضية (H). إذاً،

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_\epsilon(B_n) = \sigma_\epsilon(B).$$

برهان. انظر [24] □

في الختام، تؤسس هذه النظريات إطارا نظريا قويا للاستفادة من شبه الطيف للتقليل من التلوث الطيفي. من خلال ضمان استقرار وتقارب التقريبات العددية، تمكن هذه النتائج من تحليل المؤثرات الخطية بدقة وموثوقية. يمكن للممارسين بالتالي استخدام طرق عددية بثقة لاستقصاء الخصائص الطيفية، مما يقلل من خطر الأخطاء الكبيرة نتيجة للتلوث الطيفي.

في الدراسات العملية، نتعامل أكثر مع المؤثرات الغير المحدودة و بالتالي السؤال الذي يطرح نفسه : هل يمكن تحقيق نتائج مماثلة لشبه الطيف للمؤثرات الخطية غير المحدودة؟ هذا السؤال يشكل نقطة التركيز في الفصل القادم.

3

شبه الطيف للمؤثرات غير المحدودة

في هذا الفصل، ينتقل اهتمامنا إلى دراسة شبه الطيف للمؤثرات غير المحدودة المغلقة. باستناد إلى الطرق المناقشة سابقًا، يهدف بحثنا إلى توسيع هذه النهج إلى مجال المؤثرات غير المحدودة. سنتعمق في التحديات والتعقيدات المميزة التي تنشأ في هذا السياق الأوسع، بهدف توضيح التفاصيل الدقيقة الكامنة. من خلال مواجهة هذه التحديات بشكل مباشر، نسعى إلى إدخال مفهوم شبه الطيف المعمم. يهدف هذا الإطار الجديد إلى التغلب على القيود المرتبطة بالتعريف القياسي، مما يوفر فهمًا أكثر دقة لشبه الطيف في مجال المؤثرات غير المحدودة.

1.3 تعريفات شبه الطيف

ليكن B مؤثراً خطياً مغلقاً على فضاء باناخ X، وليكن $\epsilon > 0$. شبه الطيف للمؤثر B، يتم تعريفه بطرق متعددة. هنا، نستعرض اثنين من التعريفات الأكثر استخداماً:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \sigma_\epsilon(B) = \left\{ z \in \rho(B) : \|(B - zI)^{-1}\| > \epsilon^{-1} \right\} \cup \sigma(B). \tag{1}$$

$$\forall \epsilon > 0, \quad \omega_\epsilon(B) = \left\{ z \in \rho(B) : \|(B - zI)^{-1}\| \geq \epsilon^{-1} \right\} \cup \sigma(B). \tag{2}$$

المجموعة $\omega_\epsilon(B)$ مغلقة لكل $\epsilon > 0$. حيث،

$$\lim_{\epsilon \to 0} \omega_\epsilon(B) = \omega(B).$$

بالمقابل، المجموعة $\sigma_\epsilon(B)$ مفتوحة لكل $\epsilon > 0$. حيث،

$$\lim_{\epsilon \to 0} \sigma_\epsilon(B) = \sigma(B).$$

باستعراض تعريفات $\sigma_\epsilon(B)$ و$\omega_\epsilon(B)$، تتضح العلاقة بينهما. تحديداً، يمكن التعبير عن $\omega_\epsilon(B)$ كاتحاد $\sigma_\epsilon(B)$ والمجموعة $\{z \in \rho(B) : \|(B - zI)^{-1}\| = \epsilon^{-1}\}$. وهذا يثير السؤال عما إذا كانت $\omega_\epsilon(B)$ هي ملاصقة $\sigma_\epsilon(B)$.

للتعمق أكثر ، نعيد ذكر الفرضية (H) من الفصل السابق:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{لا توجد مجموعة مفتوحة في } \rho(B) \\ \text{حتى تكون الدالة } \|R(\cdot, B)\| \text{ ثابتة.} \end{array} \right. \tag{H}$$

توطئة 1. ليكن المؤثر المغلق B الذي يستوفي الفرضية (H) ، من أجل كل $\epsilon > 0$، المساواة التالية محققة :

$$\mathrm{cl}(\sigma_\epsilon(B)) = \omega_\epsilon(B)$$

هنا، $\mathrm{cl}(\sigma_\epsilon(B))$ تمثل ملاصقة $\sigma_\epsilon(B)$.

برهان. لإثبات المساواة $\mathrm{cl}(\sigma_\epsilon(B)) = \omega_\epsilon(B)$، نبرهن الاستلزام في كلا الاتجاهين:

- بما أن $\sigma_\epsilon(B) \subset \omega_\epsilon(B)$ والمجموعة $\omega_\epsilon(B)$ مغلقة، نستنتج أن $\mathrm{cl}(\sigma_\epsilon(B)) \subset \omega_\epsilon(B)$.

- في المقابل، إذا كان $z \in \sigma(B)$ أو $z \in \rho(B)$ حيث $\|R(z,B)\| > \epsilon^{-1}$، فإنه بناءً على تعريف $\sigma_\epsilon(B)$، يكون $z \in \sigma_\epsilon(B)$، وبالتالي $z \in \mathrm{cl}(\sigma_\epsilon(B))$.

إذا كان $z \in \rho(B)$ و $\|R(z,B)\| = \epsilon^{-1}$ (أي أن $z \in \omega_\epsilon(B) \setminus \sigma_\epsilon(B)$)، فإنه بموجب الافتراض (H)، توجد متتالية $(z_n)_{n\geq 1} \subset \rho(B)$ بحيث $z_n \to z$ من أجل $n \to \infty$ و $\|R(z_0,B)\| <$ $\|R(z_n,B)\|$ لكل $n \geq 1$. هذا يعني أن $z_n \in \sigma_\epsilon(B)$ و $z_n \to z$، ومنه $z \in \mathrm{cl}(\sigma_\epsilon(B))$.

لذلك، نستنتج أن $\mathrm{cl}(\sigma_\epsilon(B)) = \omega_\epsilon(B)$. □

توفر النظرية التالية تعاريف متعددة مكافئة للمجموعة $\omega_\epsilon(B)$، وهي ضرورية لبراهيننا اللاحقة. يوفر لنا وجود تعاريف متعددة أدوات متنوعة لتقنيات الإثبات فيما بعد .

نظرية 4. ليكن B مؤثر خطي مغلق على فضاء بناخ X، وليكن $\epsilon > 0$. المجموعة $\sigma_\epsilon(B)$، المعرفة سابقاً، لها ثلاث تعاريف مكافئة أخرى:

- $\{z \in \mathbb{C} : \exists E \in \mathscr{L}(X), \quad \|E\| < \epsilon$ و $z \in \sigma(B+E)\}$

- $\{z \in \mathbb{C} : \exists E \in \mathscr{L}(X)\|E\| < \epsilon$ و $z \in \sigma_p(B+E)\} \cup \sigma(B)$

- $\{z \in \mathbb{C} : \exists x \in X\|x\| = 1$ و $\|(zI-B)x\| < \epsilon\} \cup \sigma(B)$

برهان. برهان هذه النظرية مماثل للبرهان في حالة المؤثرات المحدودة إلى حد كبير. لمزيد من التفاصيل، يُرجى الرجوع إلى [24]. □

يمكننا أيضًا تقديم عدة تعريفات مكافئة لـ $\omega_\epsilon(B)$ تحت افتراض أن الخاصية (H) محققة، كما هو موضح في النظرية التالية:

نظرية 5. ليكن B مؤثر خطي مغلق في فضاء بناخ X، وليكن $\epsilon > 0$. إذا كانت الفرضية (H) محققة، فإن المجموعة $\omega_\epsilon(B)$ المعرفة سابقًا لها خمس تعريفات مكافئة أخرى للتعريف الأساسي:

$$cl(\{z \in \mathbb{C}: \quad \exists E \in \mathscr{L}(\mathscr{H}), \|E\| < \epsilon; \quad z \in \sigma(B+E)\}) \tag{3}$$

$$cl\left(\{z \in \mathbb{C}: \quad \exists E \in \mathscr{L}(\mathscr{H}), \|E\| < \epsilon; \quad z \in \sigma_p(B+E)\}\right) \cup \sigma(B) \tag{4}$$

$$cl(\{z \in \mathbb{C}: \quad \exists x \in H \|x\| = 1; \quad \|(zI-B)x\| < \epsilon\}) \cup \sigma(B) \tag{5}$$

$$cl(\{z \in \mathbb{C}: \quad \exists E \in \mathscr{L}(\mathscr{H}), \|E\| \leq \epsilon; \quad z \in \sigma(B+E)\}) \tag{6}$$

$$cl\left(\{z \in \mathbb{C}: \quad \exists E \in \mathscr{L}(\mathscr{H}), \|E\| \leq \epsilon; \quad z \in \sigma_p(B+E)\}\right) \cup \sigma(B) \tag{7}$$

$$\left\{z \in \mathbb{C}: \quad \exists (x_n)_n \subset H \|x_n\| = 1; \quad \lim_{n\to+\infty} \|(zI-B)x_n\| \leq \epsilon\right\} \cup \sigma(B) \tag{8}$$

برهان. انظر [24] □

ملاحظة 2.
- تمكنا من استنباط التعريفات (3)، (4)، و (5) من المساواة $\mathrm{cl}(\sigma_\epsilon(B)) = \omega_\epsilon(B)$ ومن النظرية 4. لمزيد من التفاصيل حول استنباط التعريفات (6)، (7)، و (8)، يرجى الرجوع إلى [24] و [18].
- تفتح الفرضية (H) بابًا أساسيًا في نظرية شبه طيف المؤثرات المحدودة والغير المحدودة. ركز العديد من الباحثين على تحديد الشروط الضرورية والكافية لتحقيقها في مختلف الفضاءات. سنستكشف هذا الموضوع بالتفصيل لاحقًا.

2.3 دراسة تحليلية للخاصية H

في الفصل السابق، تمت دراسة الخاصية (H) في سياق المؤثرات المحدودة. في هذا الفصل، سنقوم بالتفصيل في دراسة الخاصية (H)، بهدف الإلمام بجميع النظريات والسيناريوهات التي يمكن أن تتحقق فيها الخاصية (H) ضمن نظرية المؤثرات المغلقة الغير المحدودة. يجدر بالذكر أن مجموعة المؤثرات المحدودة هي جزء فرعي من مجموعة المؤثرات المغلقة. لذلك، تم التركيز في هذا الفصل على الخاصية (H) وذلك لتوفير فهم شامل لنظريات كل من المؤثرات المغلقة والمؤثرات المحدودة.

من المعروف من الفصل السابق أن الفرضية (H) غير محققة دائمًا في نظرية المؤثرات المحدودة. ونظراً لذلك، فإنه من غير المرجح أن تكون محققة في نظرية المؤثرات غير المحدودة. لذا، من الأفضل البدء من هذه النقطة. السؤال الأول الذي يطرح نفسه هو ما إذا كانت الفرضية (H) محققة في فضاءات أوسع وأكبر من الفضاء الهيلبرتي $\mathscr{H}$ بالنسبة للمؤثرات المحدودة، أو انها محققة في فضاءات هيلبرت يالنسبة للمؤثرات الغير محدودة بطريقة مشابهة لنظرية المؤثرات المحدودة، أم أن الأمر مختلف.

علاوة على ذلك، ينبغي أن ننظر في الفضاءات الخاصة التي يمكن أن نبرهن فيها صحة هذه الفرضية وتحت أي شروط ، ومن الضروري أن تكون هذه الشروط عملية وقابلة للتطبيق .

ليكن B مؤثر مغلق في فضاء باناخي محدب بانتظام X. يتم تعريف مفهوم الفضاء الباناخي المحدب بانتظام كما يلي (انظر [26]):

تعريف 2. نقول عن X بأنه فضاء محدب بانتظام إذا كان، لكل $\varepsilon > 0$، هناك $\beta > 0$ بحيث لكل $x, y \in X$:

$$\forall \lambda \in B_1(0) : \|x+\lambda y\| \leq 1 \text{ و } \|y\| > \varepsilon \implies \|x\| < 1-\beta.$$

هنا، $B_1(0)$ يشير إلى كرة الوحدة المفتوحة.

للعلم الفضاءات الهيلبرتية وفضاءات L_p من أجل $1 < p < \infty$ هي فضاءات محدبة بانتظام، تم البرهان على ذلك من قبل ج. كلاركسون في عام 1936. أظهر ج. جلوبيفنيك أن L_1 محدب بانتظام أيضا في عام 1975. وبشكل مثير للاهتمام، فإن ℓ_1، المزود بالنظيم $\|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_2$، غير محدب بانتظام . علاوة على ذلك، يفتقر L_∞ إلى هذه الخاصية .

توطئة 2. ليكن B مؤثراً مغلقاً في فضاء بناخ محدب بانتظام X. إذا وُجدت مجموعة مفتوحة $U \subset \rho(B)$ وثابت $M > 0$ بحيث

$$\left\|(B-\mu)^{-1}\right\| = M, \quad \mu \in U, \tag{9}$$

فإن $\left\|(B-\mu)^{-1}\right\| \geq M$ لكل $\mu \in \rho(B)$.

برهان. يعتمد البرهان على [28, Lem 1.1] ويمتد ليشمل [28, Lem 3.0] ليشمل الفضاءات المحدبة بانتظام .

بدون فقدان العمومية، نفترض $M=1$. ليكن $\mu_0\in U$. حينها يمكن كتابة المؤثر الناظمي كما يلي:

$$f(\lambda):=(B-(\mu_0+\lambda))^{-1}=\sum_{j=0}^{\infty}B_j\lambda^j,\quad B_0:=(B-\mu_0)^{-1},\quad B_j:=B_0^{j+1} \tag{10}$$

من أجل كل $\lambda\in\mathbb{C}$ حيث $\|B_0\|=1<1/|\lambda|$. يضمن هذا وجود جوار لـ $\lambda=0$ حيث تكون f تحليلية و$\|B_0\|=1\leq\|f\|$. بتطبيق [28, Lem 1.1]، نجد أنه من أجل كل $j>0$، يوجد $r_j>0$ بحيث $\|B_0\|=1\geq\|B_0+\lambda B_j\|$ لكل $r_j\geq|\lambda|$. وبالتالي، من اجل كل $u\in X$ حيث $\|u\|=1$، لدينا:

$$\forall\lambda\in B_1(0):\quad \|B_0u+\lambda r_jB_ju\|\leq 1 \tag{11}$$

توجد متتالية $\{e_k\}_k\subset X$ بحيث $\|e_k\|=1$ و

$$\lim_{k\to\infty}\left\|(B-\mu_0)^{-1}e_k\right\|=\lim_{k\to\infty}\|B_0e_k\|=\|B_0\|=1 \tag{12}$$

نبدأ بتعريف $x_k:=B_0e_k$. وفقًا للمعادلة (12)، فإن $\|x_k\|\to 1$. الآن، لنفترض وجود $\varepsilon>0$ ومجموعة جزئية لانهائية $I\subset\mathbb{N}$ حيث $y_k:=r_1B_1e_k$ و $\|y_k\|>\varepsilon$ لكل $k\in I$. من خلال (11) مع $j=1$ و $u=e_k$ نجد :

$$\forall\lambda\in B_1(0):\quad \|x_k+\lambda y_k\|\leq 1$$

التحدب المنتظم للفضاء X يعني وجود $\beta>0$ بحيث $\|x_k\|<1-\beta$ لكل $k\in I$، وهذا يتناقض مع $\|x_k\|\to 1$. لذلك، $\|y_k\|\to 0$، وبالتالي:

$$\lim_{k\to\infty}\left\|(B-\mu_0)^{-2}e_k\right\|=\lim_{k\to\infty}\|B_1e_k\|=0 \tag{13}$$

الآن، لأخذ $\mu\in\rho(B)$ عشوائيًا، باستخدام المتطابقة الأولى للمؤثر الناظمي مرتين، نحصل على:

$$(B-\mu)^{-1}-(B-\mu_0)^{-1}=(\mu-\mu_0)(B-\mu)^{-1}(B-\mu_0)^{-1}=(\mu-\mu_0)(I+(\mu-\mu_0)(B-\mu)^{-1})(B-\mu_0)^{-2}$$

لذا لدينا:

$$\left\|(B-\mu)^{-1}\right\|\geq\left\|(B-\mu_0)^{-1}e_k\right\|-|\mu-\mu_0|\left\|I+(\mu-\mu_0)(B-\mu)^{-1}\right\|\left\|(B-\mu_0)^{-2}e_k\right\|$$

وأخيرًا، من (12) و(13) نجد $\left\|(B-\mu)^{-1}\right\|\geq 1=M$، وهذا هو المطلوب □

يوفر هذا إثباتًا آخر للنتيجة التالية، كما ورد في المراجع [5, 41, 43].

نظرية 6. في فضاء بناخ محدب بانتظام، إذا كان المؤثر المغلق B محدودًا أو يولد زمرة C_0، فإن الفرضية محققة(H) .

برهان. يصاغ مباشرة من التوطئة 2 حيث $\|R(\cdot,B)\|$ يتناقص كلتا الحالتين. بالنسبة لمؤثر محدود B، لدينا $\|(B-\mu)^{-1}\| \leq 1/(|\mu|-\|B\|)$ لكل $\mu \in \mathbb{C}$ مع $\|B\| > |\mu|$. أما بالنسبة لمؤثر B الذي يولد زمرة C_0، فإن مبرهنة هايل-يوشيدا تعني وجود $C > 0$ و $\omega \in \rho$ بحيث $\|(B-\mu)^{-1}\| \leq C/(\mu-\omega)$ لكل μ حقيقي أكبر من ω. □

تقدم هذه التوطئة تلخيصًا موجزًا لجميع الحالات المعروفة ضمن نظريتي المؤثرات المحدودة وغير المحدودة. يمكن الملاحظة أن النتائج المتحصل عليها بالنسبة للخاصية H قليلة ومجحفة مما يحد من فعالية نظرية شبه طيف المؤثرات الخطية في الجانب التطبيقي ، والذي يقودنا لامحالة إيجاد طريقة أفضل لتجنب هذه الصعوبات .

3.3 تقارب شبه الطيف

في هذا القسم، نستكشف تقارب شبه الطيف لمتتاليات المؤثرات غير المحدودة. يمكن أن يكون سلوك الطيف غير متوقع عند التقارب، حتى بالنسبة للمؤثرات المحدودة التي تتقارب ناظميا ، ومع ذلك، تصبح مسائل الثبات أكثر قابلية للتحكم عند استعمال شبه الطيف. على سبيل المثال، ندرس التقارب

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_\varepsilon(B_k) = \sigma_\varepsilon(B)$$

تحت نوع تقارب يتم تعريفه يتناسب مع تقارب المجموعات .

في هذا القسم، ندرس تقارب شبه الطيف متتالية المؤثرات المغلقة B_k نحو B ، المعرفة على فضاءات هيلبرت $\mathscr{H}$ و $\mathscr{H}_k$، والتي قد تكون مختلفة بينها. لتعريف تقارب المؤثرات في هذا السياق، نعتمد على المفهوم المقدم في المصدر [8].

ليكن $\mathscr{H}$ و $\mathscr{H}_k$ فضاءات جزئية من فضاء هيلبرت أكبر $\mathscr{G}$. لنعتبر $P := P_{\mathscr{H}}$ و $P_k := P_{\mathscr{H}_k}$ الإسقاطات العمودية على الفضاءات الجزئية المحددة سابقا على الترتيب. نقول أن B_k يتقارب إلى

Bحسب مفهوم نظيم الناظم المعم (gnr) إذا وجد $\mu_0 \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \rho(B_k)\cap\rho(B)$ حيث:

$$(B_k-\mu_0)^{-1}P_k \longrightarrow (B-\mu_0)^{-1}P$$

نرمز لهذا التقارب بـ $B_k \xrightarrow{gnr} B$.

تقارب شبه الطيف في هذه الحالة يُعبّر عنه باستخدام مسافة هاوسدورف، والتي تُعرف من أجل كل مجموعتين متراصتين غير فارغتين K_1 و K_2 من $\mathbb{C}$ بـ :

$$d_{\mathrm{H}}(K_1,K_2) := \max\left\{\sup_{z\in K_1}\operatorname{dist}(z,K_2), \sup_{z\in K_2}\operatorname{dist}(z,K_1)\right\},$$

حيث

$$\operatorname{dist}\left(z,K_j\right) := \inf_{w\in K_j}|z-w|$$

من أجل كل $z\in\mathbb{C}$.

نظرية 7. لتكن B و B_k مؤثرات مغلقة معرفة على فضاءات هيلبرت $\mathcal{H}$ و $\mathcal{H}_k$ على التوالي، مع تقاطع غير خالي لمجموعات قيمهم النظامية . نفترض $K\subset\mathbb{C}$متراص و $\varepsilon>0$. تحت االشروط التالية:

(i) $\overline{\sigma_\varepsilon(B)}\cap K = \overline{\sigma_\varepsilon(B)\cap K}\neq\emptyset$

(ii) $\mu\mapsto\left\|(B-\mu)^{-1}\right\|$ غير ثابت على أي نطاق مفتوح من $\rho(B)$

(iii) $B_k \xrightarrow{gnr} B$

لدينا التقارب التالي:

$$d_{\mathrm{H}}\left(\overline{\sigma_\varepsilon(B_k)}\cap K, \overline{\sigma_\varepsilon(B)}\cap K\right)\longrightarrow 0, \quad \text{عندما} \quad k\to\infty$$

حيث d_{H} يمثل مسافة هاوسدورف.

للبرهان على النظرية 7 نبدأ بإثبات عدة توطئات. أولاً، نقدم مفهوم منطقة الحدود لمتتالية المؤثرات المغلقة B_k المعرفة على $\mathcal{H}_k$. يُعرف هذا المفهوم كما يلي:

$$\Delta_{\mathrm{b}}\left(\{B_k\}_k\right) := \left\{\mu\in\mathbb{C} : \exists k_\mu\in\mathbb{N}, \exists M_\mu>0, \forall k\geq k_\mu : \mu\in\rho(B_k) \text{ و } \left\|(B_k-\mu)^{-1}\right\|\leq M_\mu\right\},$$

وفقاً للتعريف في [29]. للتبسيط، يتم تمثيل المؤثرات بـ $R(\mu) := (B-\mu)^{-1}$ و $R_k(\mu) := (B_k-\mu)^{-1}$.

توطئة 3. بفرض أن $B_k \xrightarrow{gnr} B$، نحصل على :

- مجموعة القابلية $\Delta_b(\{B_k\}_k) = \rho(B)$.
- من أجل كل $\mu \in \rho(B)$ لدينا : $\|R_k(\mu)P_k - R(\mu)P\| \longrightarrow 0$، من أجل $k \to \infty$

توطئة 4. تحت نفس التعريف السابق لـ B و B_k، حيث $B_k \xrightarrow{gnr} B$. إذا كان $K \subset \sigma_\varepsilon(B)$ متراصًا، فهناك $k_0 \in \mathbb{N}$ بحيث $K \subset \sigma_\varepsilon(B_k)$ من أجل كل $k \geq k_0$.

في التوطئة أدناه، نعبر عن $\omega_\delta(\Omega)$ بالمجاور المفتوح الذي نصف قطره δ للمجموعة $\Omega \subset \mathbb{C}$، و $\overline{\omega_\delta}(\Omega)$ ملاصقتها .

توطئة 5. تحت افتراضات (i)-(iii) من النظرية 7; نعرّف

$$\Lambda := \overline{\sigma_\varepsilon(B)} \cap K, \quad \text{و} \quad \Lambda_k := \overline{\sigma_\varepsilon(B_k)} \cap K$$

ومنه من أجل كل $\delta > 0$، يوجد $k_\delta \in \mathbb{N}$ بحيث

$$\Lambda_k \subset \overline{\omega_\delta}(\Lambda), \quad \text{و} \quad \Lambda \subset \overline{\omega_\delta}(\Lambda_k), \qquad \forall k \geq k_\delta$$

البرهان على النظرية 7

لكل $\delta > 0$ مُعطى، ووفقًا للتوطئة 5 ، لكل $k \geq k_\delta$، لدينا:

$$\begin{aligned} d_H\left(\overline{\sigma_\varepsilon(B_k)} \cap K, \overline{\sigma_\varepsilon(B)} \cap K\right) &= d_H(\Lambda_k, \Lambda) = \max\left\{\sup_{z \in \Lambda_k} \operatorname{dist}(z, \Lambda), \sup_{z \in \Lambda} \operatorname{dist}(z, \Lambda_k)\right\} \\ &\leq \max\left\{\sup_{z \in \overline{\omega_\delta}(\Lambda)} \operatorname{dist}(z, \Lambda), \sup_{z, \in \overline{\omega_\delta}(\Lambda_k)} \operatorname{dist}(z, \Lambda_k)\right\} \\ &\leq \delta. \end{aligned}$$

خاتمة للباب الأول

من الناحية العملية، تحقيق التقارب المعرف بـ $B_k \xrightarrow{gnr} B$ يشكل تحديات كبيرة ونادرًا ما يكون قابلاً للتحقيق. وبالتالي، تفتقر النظرية المذكورة أعلاه إلى القابلية للتطبيق العملي بسبب تكلفتها الحسابية العالية والمتطلبات الصارمة. يتناول بحثنا هذا ربط نظرية شبه الطيف للمؤثر غير المحدود B بنظرية شبه الطيف المعمم للمؤثرين المحدودين U و V. تتيح لنا هذه الطريقة تجنب التعقيدات المرتبطة بنظرية المؤثرات غير المحدودة واستخدام إطار عمل أكثر سهولة باستعمال المؤثرات المحدودة. بينما تبسط هذه الطريقة حلا لمعظم مشاكل التقارب، فإنها تتطلب تطوير نظرية شاملة ومستقلةتعمم المبادئ الأساسية لنظرية الطيف التقليدية.

القسم II

الطيف المعمم وشبه الطيف المعمم

مقدمة

في هذا الجزء، سنتعمق في المبادئ الأساسية للطيف المعمم وشبه الطيف المعمم للمؤثرات الخطية المحدودة لتعميم النظرية الكلاسيكية. هدفنا هو تقديم استكشاف شامل لهذه المفاهيم، بما في ذلك مختلف التعاريف والخواص والنظرية الأساسية للتقارب . سيكون التركيز بشكل خاص على الخاصية H، التي جانب محوري في دراسة شبه الأطياف المعمم. سنجري تحليلًا دقيقًا لهذه الخاصية لتسليط الضوء على أهميتها والشروط التي تسمح بتحققها ، سيكون الفصلين الأخرين مخصصين لبحثينا الجديدين في هذا المجال

4

الطيف المعمم

يعد الطيف المعمم اداة بارزة مستقلة لدراسة الظواهر الديناميكية والفيزيائية ، كما يمكن اعتبارة كتعميم لنظرية اللطيف الكلاسيكية والذي من خلاله يمكننا تجاوز مشكل التلوث الطيفي ، وحل مختلف المشا كل التي واجهت نظرية الطيف الكلاسيكي .

في هذا الفصل، نهدف إلى تقديم التعريفات الأساسية والمفاهيم الرئيسية الضرورية لتأسيس نظرية الطيف المعمم. سنقوم بالتركيز على مختلف الخواص الأساسية ذات الصلة التي سنوظفها في الأقسام اللاحقة.

1.4 تعريف الطيف المعمم

ليكن $(X, \|\cdot\|)$ فضاء باناخ (Banach space) و $\mathscr{L}(X)$ يمثل فضاء المؤثرات الخطية المحدودة من X إلى X، المزود بالنظيم :

$$\|B\|_{\mathscr{L}(X)} = \sup\{\|Bx\| : x \in X, \ \|x\| = 1\}.$$

ليكن U وV مؤثرين من $\mathscr{L}(X)$. يُعرف الطيف المعمم $\mathrm{sp}(U, V)$ على النحو التالي:

$$\mathrm{sp}(U, V) = \{\mu \in \mathbb{C} : U - \mu V \text{ غير قابل للعكس}\}.$$

بناءً على ذلك، يتم تعريف مجموعة القيم الناظمية المعممة $\rho(U, V)$ بـ :

$$\rho(U, V) = \mathbb{C} \setminus \mathrm{sp}(U, V).$$

بالإضافة إلى ذلك، يُعرف الطيف النقطي المعمم $\mathrm{sp}_p(U, V)$ بـ :

$$\mathrm{sp}_p(U, V) = \{\mu \in \mathbb{C} : \exists u \in X \setminus \{0\} \ Uu = \mu V u\}.$$

من أجل كل $z \in \rho(U, V)$، يتم تعريف المؤثر الناظمي المعمم $R(z, U, V)$ بـ :

$$R(z, U, V) = (U - zV)^{-1}.$$

من الجدير بالذكر أنه إذا كان V قابلا، للقلب فإن

$$\mathrm{sp}(U, V) = \mathrm{sp}(V^{-1}U).$$

ومع ذلك، إذا لم يكن V^{-1} موجوداً (بمعنى أن V^{-1} ليس محدوداً على X)، يمكن أن يظهر الطيف المعمم $\mathrm{sp}(U, V)$ سلوكيات مختلفة—قد يكون محدوداً، مساوياً لـ $\mathbb{C}$، أو حتى فارغاً.

ليكن B مؤثر غير محدود (ليس بالضرورة مغلق، كما تم مناقشته في [[10]]) معرف من X إلى X.في القسم القادم، سيتم توضيح أن كل مسألة طيفية مرتبطة بـ B يمكن أن تترجم بشكل مكافئ كمسئلة طيفية معممة. وهذا يضمن وجود مؤثرين محدودين (U, V) معرفين على X حيث

$$\sigma(B) = \mathrm{sp}(U, V).$$

بالإضافة إلى ذلك، سيتم البرهان أنه إذا كان μ قيمة ذاتية لمؤثر B، فإنه توجد ثنائية (U,V) يكون من أجلها μ قيمة ذاتية معممة للزوج (U,V) ، تحقق

$$\ker(B-\mu) = \ker(U-\mu V).$$

2.4 المؤثرات الغير محدودة والطيف المعمم

لنعتبر مؤثرًا غير محدودًا B معرفًا على مجال $D(B) \subseteq X$. النظرية التالية توضح أنه يمكن تمثيل طيف أي مؤثر غير محدود باستخدام مؤثرين محدودين ضمن إطار نظرية الطيف المعمم في $\mathscr{L}(X)$.

نظرية 8. إذا كان $\rho(B) \neq \emptyset$، فإنه يوجد مؤثران $U,V \in \mathscr{L}(X)$ بحيث

$$\sigma(B) = \mathrm{sp}(U,V).$$

بشكل خاص، μ هي قيمة ذاتية لـ B إذا وفقط إذا كانت μ قيمة ذاتية معممة للزوج (U,V). علاوة على ذلك، لدينا

$$\ker(B-\mu) = \ker(U-\mu V).$$

برهان. لنعتبر $\alpha \in \rho(U)$. نعرف U وV كما يلي:

$$\begin{cases} V = (B-\alpha)^{-1}, \\ U = B(B-\alpha)^{-1}. \end{cases}$$

من الواضح أن U وV ينتميان إلى $\mathscr{L}(X)$. إذا كانت $\mu \in \rho(B)$، فإن:

$$\begin{aligned} \mu \in \rho(B) &\Rightarrow (B-\mu)^{-1} \in \mathscr{L}(X) \\ &\Rightarrow (B-\mu)(B-\alpha)^{-1} \in \mathscr{L}(X) \\ &\Rightarrow [(B-\mu)(B-\alpha)^{-1}]^{-1} \in \mathscr{L}(X) \\ &\Rightarrow [B(B-\alpha)^{-1} - \mu(B-\alpha)^{-1}]^{-1} \in \mathscr{L}(X) \\ &\Rightarrow (U-\mu V)^{-1} \in \mathscr{L}(X) \\ &\Rightarrow \mu \in \rho(U,V). \end{aligned}$$

بالمقابل، إذا كانت $\mu \in \rho(U,V)$:

$$\mu \in \rho(U,V) \Rightarrow (U-\mu V)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$$

$$\Rightarrow (B-\mu) \text{ هو مؤثر تقابلي }.$$

وبذلك، يكون $(B-\mu I)$ تقابليًا، مما يعني $\mu \in \rho(B)$.

إذا كانت μ قيمة ذاتية معممة للزوج (U,V)، فإنه يوجد $x \in X \setminus \{0\}$ بحيث $Ux = \mu Vx$:

$$Ux = \mu Vx \Rightarrow B(B-\alpha)^{-1}x = \mu(B-\alpha)^{-1}x$$

$$\Rightarrow x = (\mu-\alpha)(B-\alpha)^{-1}x.$$

نظرًا لأن $(B-\alpha I)^{-1}$ مؤثر محدود من X إلى $D(B)$، فإن $x \in D(B)$. عند تطبيق $(B-\alpha)$ على $Ux = \mu Vx$، نجد أن $Bx = \mu x$ ، نستنتج:

$$\ker(B-\mu I) = \ker(U-\mu V).$$

□

اختيار الزوج (U,V) بناءً على المؤثر الناظمي لـ B ليس الخيار الوحيد المتاح. علاوة على ذلك، بالنسبة لمؤثر محدود B، فإن الزوج (B,I) يمثله ضمن إطار نظرية الطيف المعمم.

من المهم تسليط الضوء على أن العديد من المؤثرات غير المحدودة في التحليل الدالي أو الرياضيات التطبيقية هي مؤثرات تفاضلية (انظر، على سبيل المثال، [20] و [15]). ومع ذلك، في سياق نظرية الطيف المعمم، يعمل الزوج (U,V) كبديل للمؤثرات التكاملية (انظر الفصل الخامس و [4]).

3.4 الأسس النظرية للطيف المعمم

نبدأ هذا القسم باشتقاق نتائج معممة من النظرية الكلاسيكية حيث $V = I$. لنعتبر U و V مؤثرين في $\mathscr{L}(X)$.

نظرية 9. إذا كان $z \in \rho(U,V)$ و $\mu \in \mathbb{C}$ بحيث

$$|z-\mu| < \|R(z,U,V)V\|^{-1},$$

فإن $\mu \in \rho(U,V)$.

برهان. لنعتبر $z \in \rho(U,V)$. من أجل كل $\mu \in \mathbb{C}$، لدينا

$$T-\mu S=(U-zV)\,[I-(\mu-z)R(z,U,V)V]. \tag{1}$$

إذا كان $|z-\mu|\,\|R(z,U,V)V\|<1$، فإننا وفقًا لمبرهنة متسلسلة نيومان (انظر [1]) نحصل على

$$[I-(\mu-z)R(z,U,V)V]^{-1}\in \mathscr{L}(X),$$

مما يعني

$$R(\mu,U,V)=[I-(\mu-z)R(z,U,V)V]^{-1}\,R(z,U,V).$$

إذًا، $\mu \in \rho(U,V)$. □

توطئة 6. المجموعة $\mathrm{sp}(U,V)$ مغلقة في $\mathbb{C}$.

برهان. البرهان هو نتيجة مباشرة للنظرية السابقة. □

نظرية 10. الدالة

$$R(\cdot,U,V):\rho(U,V)\to \mathscr{L}(X)$$

تحليلية، وتحقق

$$\frac{d}{dz}R(z,U,V)=R(z,U,V)\,V\,R(z,U,V).$$

برهان. لنعتبر $z\in\rho(U,V)$. نفترض μ داخل القرص المفتوح الذي مركزه z ونصف قطره $r=\|R(z,U,V)V\|^{-1}$. وفقًا لنظرية 9، لدينا

$$\begin{aligned} R(\mu,U,V) &= [I-(\mu-z)R(z,U,V)V]^{-1}R(z,U,V)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}(\mu-z)^k(R(z,U,V)V)^kR(z,U,V).\end{aligned}$$

الآن،

$$\left\|\frac{R(\mu,U,V)-R(z,U,V)}{\mu-z}-R(z,U,V)VR(\mu,U,V)\right\|$$

$$= \left\| \sum_{k=2}^{+\infty} (\mu - z)^k (R(z,U,V)V)^k R(z,U,V) \right\|$$
$$\leq \frac{|\mu - z| \, \|R(z,U,V)V\|^2 \|R(z,U,V)\|}{1 - |\mu - z| \|R(z,U,V)V\|}.$$

وهذا يعني أن

$$\lim_{\mu \to z} \frac{R(\mu,U,V) - R(z,U,V)}{\mu - z} = R(z,U,V)VR(z,U,V).$$

□

كل النظريات والخصائص الموضحة في هذا الفصل تمدد الجوانب الأساسية لنظرية الطيف في السياق الكلاسيكي. وبالتالي، فإن تعريف الطيف المعمم يوازي النظرية الكلاسيكية، مما يسهل الربط بين الطيف الكلاسيكي للمؤثر غير المحدود B والطيف المعمم للمؤثرات المحدودة U و V.

5

شبه الطيف المعمم

بعد تأسيس الجوانب الأساسية المتعلقة بتعريف شبه الطيف المعمم، يعيد هذا الفصل النظر في التركيز الرئيسي لدراستنا: نظرية شبه الطيف للمؤثرات الخطية. هدفنا هو توضيح التعريفات والمبادئ الأساسية التي تعتبر محورية لفهم شامل للنظرية، ووضع الأساس للإثباتات اللاحقة.

فيما يلي ، سنقتصر دراستنا لشبه الطيف المعمم على فضاء هلبرت $\mathscr{H}$، حيث سنوضح أسباب هذا الاختيار لاحقًا.

1.5 المقدمة

لنعتبر $(\mathscr{H}, \|\cdot\|)$ فضاء هلبرت. نعتبر مؤثرين $U, V \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. نذكر أن مسألة الطيف المعمم تُصاغ كما يلي: إيجاد الزوج $(\mu, x) \in \mathbb{C} \times \mathscr{H}$ بحيث

$$Ux = \mu Vx. \tag{1}$$

وبذلك، يتم تعريف مجموعة القيم الناظمية المعممة كالتالي

$$\rho(U,V) = \{z \in \mathbb{C} : (U - zV)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})\}, \tag{2}$$

ويُعطى الطيف المعمم بـ

$$\mathrm{sp}(U,V) = \mathbb{C} \setminus \rho(U,V), \tag{3}$$

حيث يتم تعريف الطيف النقطي المعمم بـ

$$\mathrm{sp}_p(U,V) = \{\mu \in \mathbb{C} : \exists x \in \mathscr{H} \setminus \{0\},\ Ux = \mu Vx\}. \tag{4}$$

نعتبر الزوج (U,V) منتظماً إذا كان $\rho(U,V) \neq \emptyset$. فيما يلي ، نفترض أن الزوج (U,V) منتظم.

في هذا الفصل، نقدم تعريفًا جديدًا لشبه الطيف المعمم المقترح في الدراسة [34] للمؤثرين (U,V). بعد ذلك، سنستكشف الارتباط الذي يربطه بتعريف مماثل لشبه الطيف مؤثر غير محدود معرف على $\mathscr{H}$.

2.5 شبه الطيف المعمم

لنفترض $U, V \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. يُعطى التعريف المقترح في [34] لشبه الطيف المعمم المرتبط بالزوج (U,V) على النحو التالي:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \sigma_\varepsilon(U,V) = \left\{z \in \mathbb{C} : \|(U - zV)^{-1}V\| > \varepsilon^{-1}\right\} \cup \mathrm{sp}(U,V).$$

هذا التعريف يمكن مقارنته مع التعريف المقدم في [46] و [44]، الذي يُعبر عنه على النحو التالي:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \Sigma_\varepsilon(U,V) = \left\{z \in \mathbb{C} : \|(U - zV)^{-1}\| > \varepsilon^{-1}\right\} \cup \mathrm{sp}(U,V). \tag{5}$$

لذلك، من الواضح أن

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \sigma_\varepsilon(U,V) \subseteq \Sigma_{\frac{\varepsilon}{\|V\|}}(U,V).$$

وعلاوة على ذلك، فإن مجموعة $\Sigma_{\frac{\varepsilon}{\|V\|}}(U,V)$ أكبر من $\sigma_\varepsilon(U,V)$، حتى عندما $\|U\| = 1$. أساسياً، إذا تم ضرب U و V بمؤثر قابل للقلب C في $\mathscr{L}(\mathscr{H})$، يجب أن يظل شبه الطيف المعمم ثابتًا. تم تأسيس هذه الخاصية المتجانسة بدقة بواسطة هذا التعريف ، على عكس التصورات الأخرى، يمكن أن نعبر عليها كما يلي :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \sigma_\varepsilon(CU, CV) = \Lambda_\varepsilon(U,V). \tag{6}$$

يمكن الملاحظة أنه إذا كان $V = I$، نرجع للحالة الكلاسكية كما يلي :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \sigma_\varepsilon(U,I) = \Sigma_\varepsilon(U).$$

وعندما يكون V مؤثرًا قابلًا للقلب في $\mathscr{L}(\mathscr{H})$، نحصل على العلاقة :

$$\mathrm{sp}(U,V) = \mathrm{sp}(V^{-1}U).$$

يمكن أن نحصل على علاقة مماثلة بين $\sigma_\varepsilon(U,V)$ و $\sigma_\varepsilon(V^{-1}U)$، حيث

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \Lambda_\varepsilon(U,V) = \sigma_\varepsilon(V^{-1}U). \tag{7}$$

خاصية أخرى حاسمة هي أن المجموعات $\sigma_\varepsilon(U,V)$ تكون متداخلة، أي

$$\sigma_\varepsilon(U,V) \subset \sigma_{\varepsilon'}(U,V) \quad \text{عندما} 0 < \varepsilon \le \varepsilon',$$

وتقاطعها من أجل كل $\varepsilon > 0$ يعطي الطيف المعمم $\mathrm{sp}(U,V)$:

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma_\varepsilon(U,V) = \mathrm{sp}(U,V).$$

النظرية التالية تعالج جميع الجوانب المناقشة في (6)-(7).

نظرية 11. لتكن U و V و C ثلاثة مؤثرات في $\mathscr{L}(\mathscr{H})$، حيث C قابل للقلب . لدينا النتائج التالية :

1. من اجل كل $\varepsilon > 0$، $\sigma_\varepsilon(U,V) = \sigma_\varepsilon(CU, CV)$.

2. إذا كان V قابل للقلب ، $\sigma_\varepsilon(U,V)=\sigma_\varepsilon(V^{-1}U)$.

3. على وجه الخصوص، إذا كان $V=I$، فإن $\sigma_\varepsilon(U,I)=\sigma_\varepsilon(U)$.

برهان. ليكن $z\in\rho(U,V)$. لنبدأ بإثبات (1). لدينا:

$$(U-zV)^{-1}C^{-1}=(C\,U-zC\,V)^{-1},$$

مما يعني $\mathrm{sp}(U,V)=\mathrm{sp}(C\,U,C\,V)$. علاوة على ذلك، من الواضح أن:

$$\|(C\,U-C\,V)^{-1}C\,V\|=\|(U-zV)^{-1}V\|.$$

بالنسبة لـ (2)، إذا كان V قابل للقلب ، فلدينا:

$$(U-zV)^{-1}V=(V^{-1}U-zI)^{-1},$$

مما ينتج عنه النتيجة المطلوبة. □

ليكن $B\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$. نعبر بـ $r(B)$ عن نصف قطر الطيفي المرتبط بالمؤثر B. علاوة على ذلك، من أجل كل $z\in\mathrm{sp}(B)$، نعلم أن :

$$r\,(B)=\frac{1}{\mathrm{dist}(z,\mathrm{sp}(B))}.$$

يمكن ان نرمز له كذلك بـ : $r\left((B-zI)^{-1}\right)$. النظرية القادمة تمثل أحد النتائج الرئيسية لهذا الفصل.

نظرية 12. ليكن $U,V\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$.من أجل كل $z\in\rho(U,V)$،لدينا :

$$r(R(U,V,z)V)=\frac{1}{\mathrm{dist}(z,\mathrm{sp}(U,V))}.$$

برهان. لنفترض $z\in\rho(U,V)$. إذا فرضنا أن U و V غير قابلة للقلب ، نلاحظ أنه إذا كان $z_0=0\in$ $\mathrm{sp}(R(U,V,z)V)$ ، فإن V ستكون قابلة للقلب .

من اجل كل $z_0\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ، لدينا

$$R(U,V,z)V-z_0I=-z_0R(U,V,z)\left[U-\left(z+\frac{1}{z_0}\right)V\right]. \qquad (8)$$

بالتالي ، $z_0 \in \rho(R(U,V,z)V)$ إذا وفقط إذا كان $z+\frac{1}{z_0} \in \rho(U,V)$.وبالتالي من أجل كل $z \in \rho(U,V)$:

$$\mu \in \mathrm{sp}(U,V) \setminus \{0\} \Leftrightarrow \frac{1}{\mu - z} \in \mathrm{sp}(R(U,V,z)V) \setminus \{0\}.$$

بالإضافة إلى ذلك ، $-\frac{1}{z} \in \mathrm{sp}(R(U,V,z)V)$ ، لأنه إذا لم يكن كذلك ، نستنتج

$$R(U,V,z)V + \frac{1}{z}I = \frac{1}{z}R(U,V,z)U \tag{9}$$

، مما يعني أن $R(U,V,z)U$ قابل للقلب ، مما يتناقض مع عدم قابلية القلب لـ U.

لذلك ، نستنتج:

$$r(R(U,V,z)V) = \sup\left\{\frac{1}{|\mu - z|} : \mu \in \mathrm{sp}(U,V)\right\} = \frac{1}{\mathrm{dist}(z,\mathrm{sp}(U,V))}.$$

إذا كان V قابل للقلب ، لدينا :

$$\mathrm{sp}(V^{-1}U) = \mathrm{sp}(U,V),$$

وبالتالي:

$$R(U,V,z)V = (V^{-1}U - zI)^{-1},$$

وبالتالي:

$$\rho(R(U,V,z)V) = \rho((V^{-1}U - zI)^{-1}) = \frac{1}{\mathrm{dist}(z,\mathrm{sp}(V^{-1}U))} = \frac{1}{\mathrm{dist}(z,\mathrm{sp}(U,V))}.$$

إذا فرضنا أن U قابل للقلب و V غير قابل للقلب، فإننا نحصل على $\mathrm{sp}(U,V) \neq \emptyset$. يمكننا الملاحظة أن $0 \in \mathrm{sp}(R(U,V,z)V)$ ، ومن المعادلة (8) نحصل على:

$$\mathrm{sp}(R(U,V,z)V) = \left\{0, \frac{1}{\mu - z} : \mu \in \mathrm{sp}(U,V)\right\}.$$

نعلم أيضًا أن $0 \in \rho(U,V)$ و $-\frac{1}{z} \in \rho(R(U,V,z)V)$ (من المعادلة (9)). لذلك ، علينا أن نثبت أن $\mathrm{sp}(R(U,V,z)V)$ ليست مجموعة تحوي عنصر وحيد هو صفر. إذا فرضنا أن $\mathrm{sp}(R(U,V,z)V) = \{0\}$ ، فبالنسبة إلى أي $w \in \mathbb{C} \setminus \{z\}$ ، عندما نضع $z_0 = \frac{1}{w - z}$ ، فإننا نحصل على $z_0 \in \rho(R(U,V,z)V)$. وبالتالي ، من المعادلة (8) ، $w \in \rho(U,V)$ ، مما يعني أن $\rho(U,V) = \mathbb{C}$ ، وهذا يتناقض مع $\mathrm{sp}(U,V) \neq \emptyset$. □

3.5 شبه الطيف المعمم وطيف المؤثر الغير محدود

بالقسم الحالي، سنقدم تعريفًا بديلًا لشبه الطيف للمؤثر الغير المحدود B المعرف على $\mathscr{H}$. نبدأ باعتبار فئة من المؤثرات المعرفة بالعلاقة

$$B = V^{-1}U,$$

حيث $V, U \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ و V^{-1} هو مؤثر غير محدود يكون مجاله $D(V^{-1}) \subset \mathscr{H}$.

نفترض الشروط المسماة بـ(H'):

$$\left\| \begin{array}{l} \overline{D(B)} = \mathscr{H}, \\ D(B) = D(B^*), \\ D(B) \subset D(V^{-1}) \subset D((V^{-1})^*). \end{array} \right.$$

نظرية 13. إذا كان $B = V^{-1}U$ وفق الشروط (H')، نحصل على

$$\sigma_\epsilon(U, V) = \sigma_\varepsilon(B). \tag{10}$$

برهان. انظر [34]. □

ليكن B مؤثر غير محدود معرف على $D(B) \subset \mathscr{H}$. في الفصل الأول، أثبتنا أن كل مؤثر غير محدود يمكن تمثيله باستخدام مؤثرين محدودين (U, V)، النظرية التالية تربط بين شبه الطيف لمؤثر غير محدود B وشبه الطيف المعمم للمؤثرين (U, V).

نظرية 14. من أجل كل $\varepsilon > 0$، لدينا

$$\sigma_\varepsilon(U, V) = \sigma_\varepsilon(B).$$

برهان. من $\rho(B) = \rho(U, V)$، حيث $V = (B - \alpha I)^{-1}$ و $U = B(B - \alpha I)^{-1}$، نحصل على

$$\forall z \in \rho(U, V), \quad \|(U - zI)^{-1}\| = \|(U - zV)^{-1}V\}.$$

□

النظرية 14 تحمل أهمية كبيرة حيث تمكننا من التعامل وحساب شبه الطيف لمؤثر غير محدود باستخدام مفهوم شبه الطيف المعمم للمؤثرات المحدودة.

6

تقارب شبه الطيف المعمم

مقدمة

يعد الطيف المعمم وشبه الطيف المعمم حجر الأساس للعديد من الأبحاث الرياضية والفيزيائية مؤخرا، أنظر [9,21-5,7]. تظهر هذه المفاهيم بشكل أساسي في العديد من مجالات الرياضيات التطبيقية ، أين تم دراسة العديد من النتائج النظرية والتطبيقية لها. حيث تم تقديمه قبل بضع سنوات من قبل L.N.Trefethen (أنظر [44, 35]) قد تم إعتبار هذا المفهوم وبشكل مستقل وتحت أسماء مختلفة في المقالات السابقة ، حيث يستخدم على نطاق واسع في مختلف التخصصات مثل ميكانيكا السوائل وسلاسل ماركوف ونظرية

التحكم. في هذا القسم نثبت أنه من أجل كل $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_\epsilon(U_n, V_n) = \sigma_\epsilon(U, V), \tag{1}$$

حيث $(U_n)_{n\geq1}(V_n)_{n\geq1}$ متتالية مؤثرات من $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ تتقارب ناظميا نحو U و V . على الترتيب ، بالإضافة إلى ذلك المعادلة (1) يتم البرهان عليها بالتقارب وفق مسافة هوزدورف (distance convergence Hausdorff) ،

$$d_H\left(\overline{\sigma_\epsilon(U_n, V_n)} \cap K, \overline{\sigma_\epsilon(U, V)} \cap K\right) \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty,$$

من اجل كل مجموعة متراصة $K \subset \mathbb{C}$ و $\overline{\sigma_\epsilon(U, V)}$ ملاصقة المجموعة $\sigma_\epsilon(U, V)$. نأخذ في الحسبان أن هذا التقارب محقق وفق الشروط التالية : نظيم المؤثر الناظمي

$$z :\to \|(U - zV)^{-1}V\|$$

غير ثابت من أجل كل مجموعة جزئية من $\rho(U, v)$. للعلم هذا الشرط يعد حجر الأساس ومحل الكثير من الأبحاث في النظرية الكلاسيكية أنظر [41, 12].

في الحالة لما $V = I$ أي في النظرية الكلاسيكية تم البرهان على المساواة (1) في [8] ، تحت شرط تقارب متتالية المؤثرات $(U_n)_{n\geq1}$ ناظميا نحو U. بالاضافة لذلك تم التوصل للتقارب في حالة المؤثرات الغير محدودة وذلك تحت شرط محدد من التقارب لمزيد من التفاصيل أنظر [8, 24, 22, 23] . تم تقسيم هذه المقالة كالتالي ، في القسم الأول نقدم الخواص الأساسية للطيف المعمم وشبه الطيف المعمم المستعملة في المقالة . في القسم الثاني نقدم النتائج النظرية الأساسية في هذا البحث ، حيث نعرف لأول مرة مجموعة القيم الناظمية المعممة وكذلك الطيف المعمم لمتتالية المؤثرات $(U_n)_{n\geq1}$ و $(V_n)_{n\geq1}$ هذه النتائج أكبر دليل على أن التعريف المستعمل في [34] هو الأنسب لتعميم النظرية الكلاسيكية لطيف المؤثرات الخطية .

1.6 النظرية الأساسية لتقارب شبه الطيف المعمم

في هذا القسم ، نقوم بإثبات تقارب شبه طيف المؤثرات المعمم باستعمال مسافة هوزدورف (distance Hausdorff) ، المعرفة من أجل كل مجموعتين غير خاليتين ومتراصتين $K_1, K_2 \subset \mathbb{C}$ بـ :

$$d_H(K_1, K_2) = \max\left\{\sup_{z\in K_1} \operatorname{dist}(z, K_1), \sup_{z\in K_2} \operatorname{dist}(z, K_2)\right\},$$

حيث من أجل كل $z \in \mathbb{C}$: $\operatorname{dist}(z, K_j) = \inf_{y\in K_j} |z-y|$. ليكن $U_n, U \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ ، نعبر عن التقارب الناظمي بالعبارة $U_n \xrightarrow{n} V$.

النظرية التالية هي النتيجة الأساسية لهذا البحث ، سيتم تقسيم البرهان إلى سلسلة توطئات للتسهيل على القارئ فهمه .

نظرية 15. (النظرية الأساسية للتقارب).

ليكن $U, V, U_n, V_n \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ ، $\epsilon > 0$ و $K \subset \mathbb{C}$ مجموعة متراصة حيث $\rho(U,V) \neq \emptyset$:

i) $\overline{\sigma_\epsilon(U,V)} \cap K = \overline{\sigma_\epsilon(U,V) \cap K} \neq \emptyset$ ،

ii) $z \mapsto \|R(z,U,V)V\|$ غير ثابتة من أجل كل مجموعة جزئية من $\rho(U,V)$،

iii) $V_n \xrightarrow{n} V$ و $U_n \xrightarrow{n} U$.

فإنه لدينا :

$$d_H\left(\overline{\sigma_\epsilon(U_n,V_n)} \cap K, \overline{\sigma_\epsilon(U,V)} \cap K\right) \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty \cdot$$

ملاحظة 3. الشرط i) ، بشكل عام لا يمكن إضعافه للشرط $\overline{\sigma_\epsilon(U,V)} \cap K \neq \emptyset$ أو إلى $\sigma_\epsilon(U,V) \cap K \neq \emptyset$ لأنه إذا كان $V = I$ الشرطين لا يضمنان التقارب ، أنظر [23] و [8] لتفاصيل أكثر . من أجل $S = I$ الشروط i) ، ii) و iii) تم تعميمها من النظرية الكلاسيكية أنظر [22] و [23].

لتكن $(U_n)_{n\geq 1}, (V_n)_{n\geq 1} \subset \mathscr{L}(\mathscr{H})$ ، نقدم التعريف الخاص بالمجموعة الناظمية المعممة لمتتالية المؤثرات $(U_n)_{n\geq 1}, (V_n)_{n\geq 1}$ بـ :

$$\rho(\{U_n\},\{V_n\}) = \Big\{\lambda \in \mathbb{C}, \exists n_\lambda \in \mathbb{N}, m_\lambda \in \mathbb{R}^+ : \lambda \in \rho(U_n,V_n) \text{ and } \|R(\lambda, U_n, V_n)\| \leq m_\lambda \forall n \geq n_\lambda\Big\}$$

والطيف المعمم لمتتالية المؤثرات $(U_n)_{n\geq 1},(V_n)_{n\geq 1}$ بـ :

$$\sigma(\{U_n\},\{V_n\}) = \mathbb{C}\setminus\rho(\{U_n\},\{V_n\})$$

تم تعميم هذه التعريف وتقديمها للمرة الأولى في هذا البحث

توطئة 7. ليكن $(U_n),(V_n)\subset\mathscr{L}(\mathscr{H})$ و $U,V\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$ حيث U_n,V_n تتقارب ناظميا نحو U و V على الترتيب . لدينا النتائج التالية :

1) $\rho(\{U_n\},\{V_n\}) = \rho(U,V)$،

2) من اجل كل $\lambda\in\rho(U,V)$، $R(\lambda,U_n,V_n)V_n$ تقارب نحو $R(\lambda,U,V)S$ في الفضاء $\mathscr{L}(\mathscr{H})$.

برهان. أولا ، ليكن $\lambda\in\rho(U,V)$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ لدينا :

$$U_n-\lambda V_n = (U-\lambda V)\left[(U-\lambda V)^{-1}(U_n-U)+\lambda(U-\lambda V)^{-1}(V-V_n)+I\right].$$

نضع $F_n=(U-\lambda V)^{-1}(U-U_n)-\lambda(U-\lambda V)^{-1}(V-V_n)$ ، باستعمال تقارب U_n و V_n نحو U و V ، يوجد $n_\lambda\in\mathbb{N}$ حيث $\|F_n\|<\frac{1}{2}$ من أجل كل $n\geq n_\lambda$. هذا يعني أن $I-F_n$ قابل للقلب (سلسلة نيومان Neumann series) ، ومنه $U_n-\lambda V_n$ أيضا قابل للقلب ولدينا :

$$(U_n-\lambda V_n)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(F_n)^k(U-\lambda V)^{-1}.$$

من اجل ذلك نضع $m_\lambda = 2\left\|(U-\lambda V)^{-1}\right\|$ ، من اجل كل $n\geq n_\lambda$ نجد :

$$\left\|(U_n-\lambda V_n)^{-1}\right\|\leq m_\lambda.$$

هذا يعني أن $\lambda\in\rho(\{U_n\},\{V_n\})$.

ليكن الآن $\lambda\in\rho(\{U_n\},\{V_n\})$. إذن يوجد $n_\lambda\in\mathbb{N}$ and $m_\lambda>0$ حيث $\lambda\in\rho(U_n,V_n)$ و $\|R(\lambda,U_n,V_n)\|\leq m_\lambda$. يمكننا التحصل على العلاقة :

$$U-\lambda V = (U_n-\lambda V_n)\left[(U_n-\lambda V_n)^{-1}(U-U_n)-\lambda(U_n-\lambda V_n)^{-1}(V-v_n)+I\right].$$

نضع $E_n=\lambda(U_n-\lambda V_n)^{-1}(V-V_n)-(U_n-\lambda V_n)^{-1}(U-U_n)$. إذن يوجد $n'_\lambda\in\mathbb{N}$ حيث $n'_\lambda>n_\lambda$. إذن، من أجل كل $n\geq n'_\lambda$ لدينا $\|E_n\|<\frac{1}{2}$ ، هذا يعني أن $I-E_n$ قابل للقلب ومنه $U-\lambda V$ قابل

للقلب أيضا ، ومنه $\lambda \in \rho(U,V)$.

الآن سنقوم بالبرهان على النتيجة الثانية ، ليكن $\lambda \in \rho(U,V)$

$$\begin{aligned} \|R(\lambda,U,V)V - R(\lambda,U_n,V_n)V_n\| &= \left\|(U_n-\lambda V_n)^{-1}V_n - (U-\lambda V)^{-1}V\right\| \\ &\leq \left\|(U_n-\lambda V_n)^{-1}\right\| \|V_n - V\| \\ &\quad + \left\|(U_n-\lambda V_n)^{-1} - (U-\lambda V)^{-1}\right\| \|V\|. \end{aligned}$$

بما أن $\lambda \in \rho(\{U_n\},\{V_n\})$ ، فإنه يوجد $m_\lambda > 0$ حيث

$$\left\|(U_n-\lambda V_n)^{-1}\right\| \leq m_\lambda,$$

من أجل كل $n \geq n_\lambda$. إذن لم يتبقى لنا إلا البرهان على أن

$$\left\|(U_n-\lambda V_n)^{-1} - (U-\lambda V)^{-1}\right\| \longrightarrow 0.$$

بما أن :

$$\begin{aligned} \left\|(U_n-\lambda V_n)^{-1} - (U-\lambda V)^{-1}\right\| &\leq \left\|(U_n-\lambda V_n)^{-1}\right\| \left\|(U-\lambda V)^{-1}\right\| \\ &\quad \times \|(U-U_n) - \lambda(V-V_n)\|. \end{aligned}$$

نتحصل في الأخير على المطلوب □

توطئة 8. لتكن $K \subset \sigma_\epsilon(U,V)$ مجموعة متراصة . إذن يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ ، حيث من أجل كل $n \geq n_0$: $K \subset \sigma_\epsilon(U_n,V_n)$.

برهان. باستعمال تراص المجموعة $K \subset \sigma_\epsilon(U,V)$ ، نبرهن أنه من أجل كل $\lambda \in \sigma_\epsilon(U,V)$ يوجد $r_\lambda > 0$ و $n_\lambda \in \mathbb{N}$ حيث من أجل كل $n \geq n_\lambda$: $B_{r_\lambda}(\lambda) \subset \sigma_\epsilon(U_n,V_n)$. تم تقسيم البرهان لحالتين :

i) $\lambda \in \mathrm{sp}(T,S)$ ii) $\lambda \in \sigma_\epsilon(U,V) \cup \rho(U,V)$

الحالة i) : نستعمل البرهان بالخلف ، نفرض أنه يوجد $\lambda \in \mathrm{sp}(U,V)$ حيث من اجل كل $r > 0$ يوجد $n \geq n'$ و $\lambda_n \in B_r(\lambda)$ مع $\lambda_n \notin \sigma_\epsilon(U_n,V_n)$ ، إذا قمنا بربط n' و r بـ $r_{n'} = \dfrac{1}{n'}$ نجد مجموعة غير منتهية $I \subset \mathbb{N}$ وعناصر غير منتهية $\lambda_n \in \mathrm{re}(U_n,V_n)$, $n \in I$ حيث :

$$\forall n \in I : \|R(\lambda_n,U_n,V_n)V_n\| \leq \frac{1}{\epsilon} \quad \text{و} \quad \lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda. \tag{2}$$

بما أن $\lambda \notin \rho(U,V)$ فإن $\lambda \notin \rho(\{U_n\},\{V_n\})$ (أنظر التوطئة 7)، ومنه يوجد $I_1 \subset I$ و $I_2 \subset I$ حيث :

$$\forall n \in I_1 : \ \lambda \in \sigma_\epsilon(U_n, V_n) \quad \text{أو} \quad \forall n \in I_2 \ \ \|R(\lambda, U_n, V_n)V_n\| \to \infty.$$

الخيار الأول يتناقض مع (2) لأنه من أجل كل $n \in I_1$ لدينا : (أنظر النظرية 12)

$$\|R(\lambda_n, U_n, V_n)V_n\| \geq \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda_n, \sigma(U_n, V_n))} \geq \frac{1}{|\lambda - \lambda_n|} \to \infty.$$

الخيار الثاني يتناقض أيضا مع (2) ، لأنه من أجل كل $n \in I_2$ لدينا :

$$\|R(\lambda_n, U_n, V_n)V_n\| \geq \|R(\lambda, U_n, V_n)V_n\| - \|R(\lambda, U_n, V_n)V_n - R(\lambda_n, U_n, V_n)V_n\|$$

والطرف الثاني يتقارب نحو الصفر من أجل $n \longrightarrow \infty$ ، كما يلي :

$$\|R(\lambda, U_n, V_n)V_n - R(\lambda_n, U_n, V_n)V_n\| \leq |\lambda - \lambda_n| \, \|R(\lambda_n, U_n, V_n)V_n R(\lambda, U_n, S_n)V_n\|$$

$$\leq |\lambda - \lambda_n| \|R(\lambda_n, U_n, V_n)V_n\| \times \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda - \lambda_n|^k \|R(\lambda_n, U_n, V_n)\|^k \|R(\lambda_n, U_n, V_n)V_n\|$$

$$\leq \frac{\|R(\lambda_n, U_n, V_n)V_n\|^2 \, |\lambda - \lambda_n|}{1 - \|R(\lambda_n, U_n, V_n)V_n\| \, |\lambda - \lambda_n|} \leq \frac{|\lambda_n - \lambda| \frac{1}{\epsilon^2}}{1 - |\lambda_n - \lambda| \frac{1}{\epsilon}} \to 0.$$

الحالة ii) : ليكن $\lambda \in \sigma_\epsilon(U,V) \cap \operatorname{re}(U,V)$. يمكننا كتابة $\|R(\lambda, U, V)V\| = \frac{1}{\epsilon} + \alpha$ من أجل $\alpha > 0$. بما أن $\lambda \in \operatorname{re}(U,V)$ فإن $\lambda \in \rho(\{U_n\},\{V_n\})$ (توطئة 7)، إذن يوجد $\tilde{n}_\lambda \in \mathbb{N}$ و M_λ حيث $\lambda \in \operatorname{re}(U_n, V_n)$ و $\|R(\lambda, U_n, V_n)V_n\| \leq M_\lambda$ من أجل كل $n \geq \tilde{n}_\lambda$. بما أن $R(\lambda, U_n, V_n)V_n$ تتقارب نحو $R(\lambda, U, V)S$ في الفضاء $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ من التوطئة 7. ومنه يوجد $n_\lambda \geq \tilde{n}_\lambda$ حيث

$$\|R(\lambda, U, V)V - R(\lambda, U_n, V_n)V_n\| \leq \frac{\alpha}{2},$$

من أجل كل $n \geq n_\lambda$. بما أن $\rho(U_n, V_n)$ مجموعة مفتوحة (التوطئة 6) من أجل كل عدد موجب $r_\lambda < \frac{1}{M_\lambda}$ و $n \geq n_\lambda$ لدينا $B_{r_\lambda}(\lambda) \subset \rho(U_n, V_n)$. الآن من أجل كل $\mu \in B_{r_\lambda}(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda, U_n, V_n)V_n - R(\mu, U_n, V_n)V_n\| &\leq \frac{\|R(\mu, U_n, V_n)V_n\|^2 |\mu - \lambda|}{1 - \|R(\mu, U_n, V_n)V_n\| |\mu - \lambda|} \\
&\leq \frac{\|R(\mu, U_n, V_n)V_n\|^2 r_\lambda}{1 - \|R(\mu, U_n, V_n)V_n\| r_\lambda}.
\end{aligned}$$

إذن من أجل r_λ صغير بما يكفي ، نجد أن

$$\|R(\lambda, U_n, V_n)S_n - R(\mu, U_n, V_n)V_n\| \leq \frac{\alpha}{2}.$$

ليكن الآن $\mu \in B_{r_\lambda}(\lambda)$ و $n \geq n_\lambda$. إذن نجد :

$$\begin{aligned}\|R(\mu, U_n, V_n)S_n\| &\geq \|R(\lambda, U, V)V\| - \|R(\lambda, U_n, V_n)V_n - R(\mu, U_n, V_n)V_n\| \\ &\quad - \|R(\lambda, U, V) - R(\lambda, U_n, V_n)\| \\ &> (\frac{1}{\epsilon} + \alpha) - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\epsilon},\end{aligned}$$

هذا يستلزم أن $\mu \in \sigma_\epsilon(U_n, V_n)$ هذا يعني أن $B_{r_\lambda}(\lambda) \subset \sigma_\epsilon(U_n, V_n)$ وهذا هو المطلوب □

في التوطئة التالية ، نستعمل الترميز

$$\omega_\delta(\Omega) := \{z \in \mathbb{C} : \text{dist}(z, \Omega) < \delta\}.$$

توطئة 9. لتكن الفرضيات الخاصة بالنظرية 15 محققة . نعرف المجموعة

$$\Lambda = \overline{\sigma_\epsilon(U, V)} \cap K, \qquad \Lambda_n = \overline{\sigma_\epsilon(U_n, V_n)} \cap K.$$

إذن من أجل كل $\delta > 0$ يوجد $n_\lambda \in \mathbb{N}$ حيث :

$$\Lambda_n \subset \overline{\omega_\delta}(\Lambda), \qquad \Lambda \subset \overline{\omega_\delta}(\Lambda_n).$$

برهان. ليكن $\delta > 0$. نقسم البرهان لحالتين :

الحالة الأولى: لنفترض أن $K \subset \mathbb{C}$ مجموعة متراصة بحيث $K \subset \sigma_\epsilon(U, V)$. من الواضح أن:

$$\Lambda = \overline{\sigma_\epsilon(U, V)} \cap K \subset \sigma_\epsilon(U, V).$$

بما أن Λ متراصة ، من التوطئة 8 يوجد n_μ بحيث من أجل كل $n \geq n_\mu$،

$$\Lambda \subset \sigma_\epsilon(U_n, V_n).$$

وبالتالي، $\Lambda \subset \overline{\sigma_\epsilon(U_n, V_n)}$، وكنتيجة لذلك

$$\Lambda \subset \Lambda_n \subset \overline{\omega_\delta(\Lambda_n)}$$

. من ناحية أخرى، بما أن $K \subset \sigma_{\epsilon}(U,V)$، فمن الواضح أنه من أجل كل $n \geq n_{\mu}$ ،

$$\overline{\sigma_{\epsilon}(U_n,V_n)} \cap K \subset \sigma_{\epsilon}(U,V)$$

، وبالتالي $\Lambda_n \subset \sigma_{\epsilon}(U,V)$. لذلك،

$$\Lambda_n \subset \Lambda \subset \overline{\omega_{\delta}(\Lambda)}.$$

الحالة الثانية: لنفترض أن $K \subset \mathbb{C}$ مجموعة متراصة بحيث أن K ليست جزءًا من $\sigma_{\epsilon}(U,V)$. نبدأ بإثبات الاحتواء الأول. من الواضح أن:

$$\Lambda_n \subset \omega_{\delta}(\Lambda) \cup \left(\overline{\sigma_{\epsilon}(U_n,V_n)} \cap (K \setminus \omega_{\delta}(\Lambda))\right).$$

لذا، من خلال إظهار أن:

$$\overline{\sigma_{\epsilon}(U_n,V_n)} \cap (K \setminus \omega_{\delta}(\Lambda)) = \emptyset,$$

نحصل على:

$$\Lambda_n \subset \omega_{\delta}(\Lambda) \cup \left(\overline{\sigma_{\epsilon}(U_n,V_n)} \cap (K \setminus \omega_{\delta}(\Lambda))\right) \subset \omega_{\delta}(\Lambda) \subset \overline{\omega_{\delta}(\Lambda)}.$$

ليكن $\mu \in K \setminus \omega_{\delta}(\Lambda)$. إذن $\mu \in K \setminus \Lambda$ وبناءً عليه:

$$\mu \notin \overline{\sigma_{\epsilon}(U,V)} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \|R(z,U,V)V\| \geq \frac{1}{\epsilon} \right\}.$$

لذلك،

$$\forall \mu \in K \setminus \omega_{\delta}(\Lambda) : \quad \|R(\mu,U,V)V\| < \frac{1}{\epsilon}.$$

ليكن $\alpha \in \mathbb{R}$ بحيث:

$$\alpha = \frac{\frac{1}{\epsilon} - \|R(\mu,U,V)V\|}{2}.$$

بما أن $\|R(\mu,U_n,V_n)V_n\|$ تتقارب إلى $\|R(\mu,U,V)V\|$ في $\mathscr{L}(\mathscr{H})$، فإنه يوجد $n_{\mu'} \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geq n_{\mu'}$، لدينا:

$$\begin{aligned} \|R(\mu,U_n,V_n)V_n\| &\leq \|R(\mu,U,V)V\| + \|R(\mu,U_n,V_n)V_n - R(\mu,U,V)V\| \\ &\leq \frac{1}{\epsilon} - 2\alpha + \alpha = \frac{1}{\epsilon} - \alpha. \end{aligned}$$

علاوة على ذلك، بالمتابعة بشكل مماثل للبرهان الخاص بالتوطئة 8، ومنه يوجد $n_{\mu'} > n_\mu$ و $r_\mu > 0$ بحيث لكل $n \geq n_\mu$، لدينا $B_{r_\mu}(\mu) \subset \rho(U_n, V_n)$، ولكل $\mu \in B_{r_\mu}(\mu)$، لدينا

$$\|R(\mu, U_n, V_n)S_n - R(\mu, U_n, V_n)V_n\| < \alpha.$$

بالتالي،

$$\begin{aligned}\|R(\mu, U_n, V_n)V_n\| &\leq \|R(\mu, U_n, V_n)V_n - R(\mu, U_n, V_n)V_n\| + \|R(\mu, U_n, V_n)V_n\| \\ &< \alpha + \frac{1}{\epsilon} - \alpha = \frac{1}{\epsilon}.\end{aligned}$$

الآن، من تراص $K \setminus \omega_\delta(\Lambda)$، نستنتج وجود $n_\delta \in \mathbb{N}$ مستقل تماما عن μ. لذلك، يوجد n_δ بحيث لكل $\mu \in K \setminus \omega_\delta(\Lambda)$، لدينا $\|R(\mu, U_n, V_n)S_n\| < \frac{1}{\epsilon}$. وهذا يعني أن

$$\left(\overline{\sigma_\epsilon(U_n, V_n)} \cap (K \setminus \omega_\delta(\Lambda))\right) = \emptyset.$$

نثبت الإحتواء الثاني بواسطة البرهان بالخلف . نفترض وجود $\delta > 0$ ومجموعة لا نهائية $I \subset \mathbb{N}$ بحيث $(\mu_n)_{n\in I} \subset \Lambda$ و $(\mu_n)_{n\in I}$ ليست مجموعة جزئية من $\omega_\delta(\Lambda_n)$. بما أن Λ متراصة ، يوجد $\mu_0 \in \Lambda$ ومجموعة لا نهائية $I_1 \subset \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \in I_1$، $I_1 \subset I$ و μ_n تتقارب نحو μ_0. من الشرط (i) من النظرية 15، لدينا

$$\Lambda = \overline{\sigma_\epsilon(U, V)} \cap K = \overline{\sigma_\epsilon(U, V) \cap K} \neq \emptyset.$$

لذلك، يوجد $\widetilde{\mu}_0 \in \sigma_\epsilon(U, V) \cap K$ بحيث أن $|\widetilde{\mu}_0 - \mu_0| < \frac{\delta}{2}$. وفقًا للتوطئة 8، يوجد $n_{\widetilde{\mu}_0} \in \mathbb{N}$ بحيث $\widetilde{\mu}_0 \in \sigma_\epsilon(U_n, V_n) \cap K \subset \Lambda_n$ لكل $n \geq n_{\widetilde{\mu}_0}$. ومنه ،

$$|\mu_n - \widetilde{\mu}_0| \leq |\mu_n - \mu_0| + |\mu_0 - \widetilde{\mu}_0| < \delta$$

من أجل n كبير بما يكفي من I_1. وهذا يتعارض مع الافتراض بأن $(\mu_n)_{n\in I}$ ليست جزءًا من $\omega_\delta(\Lambda_n)$.

□

إثبات النظرية 15

نأخذ $\delta > 0$ عشوائيًا. باستخدام التوطئة 9 نحصل من أجل كل $n \geq n_\delta$ على :

$$d_H\left(\overline{\sigma_\epsilon(U_n, V_n)} \cap K, \overline{\sigma_\epsilon(U, V)} \cap K\right) = d_H(\Lambda_n, \Lambda).$$

لذا،

$$\begin{aligned} d_H(\Lambda_n,\Lambda) &= \max\left\{\sup_{x\in\Lambda_n}\operatorname{dist}(z,\Lambda),\sup_{x\in\Lambda}\operatorname{dist}(z,\Lambda_n)\right\} \\ &\leq \max\left\{\sup_{x\in\overline{\omega_\delta(\Lambda)}}\operatorname{dist}(z,\Lambda),\sup_{x\in\overline{\omega_\delta(\Lambda_n)}}\operatorname{dist}(z,\Lambda_n)\right\} \\ &\leq \delta, \end{aligned}$$

مما يثبت التقارب.

مثال 2. نعرف المسألة الطيفية المعممة كما يلي:

$$Uu=\mu Vu.$$

في حالة

$$U=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad V=\begin{bmatrix}2&0&3\\0&0&0\\3&0&1\end{bmatrix}.$$

من الواضح أن U و V غير قابلين للقلب . لذا، فإن النظرية 3.2 من [8] لا يمكن تطبيقها .
لتكن أن $(a_n)_{n\geq 0}$ متتالية أعداد حقيقية موجبة تماماً تتقارب نحو 1. من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ نعرف

$$U_n=a_nU,\quad V_n=\sqrt{a_n}V.$$

أولاً، من الواضح أن U_n و V_n تتقارب ناظميا نحو U و V على الترتيب.ومنه ، من خلال بعض الحسابات البسيطة على المصفوفات ، نحصل على

$$\|R(z,U,V)V\|=\frac{4|2z-1|}{|7z^2+z|}+\frac{15}{|7z+1|},\quad z\in\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{-1}{7},0\right\},$$

و

$$\|R(z,U,V)\|=\max\left\{1,\frac{4}{|7z+1|},\frac{3}{|7z+1|}+\frac{|2z-1|}{|7z^2+z|}\right\},\quad z\in\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{-1}{7},0\right\}.$$

الآن، من الواضح أن الشرط ii) من النظرية 15 محقق أيضًا. كذلك ، $\lim_{z\to\infty}\|R(z,U,V)\|=1$.

الآن، يعُرّف الطيف شبه المعمم كما يلي:

$$\sigma_\epsilon(U,V)=\left\{z\in\mathbb{C}:\frac{4|2z-1|}{|7z^2+z|}+\frac{15}{|7z+1|}>\epsilon^{-1}\right\}\bigcup\left\{\frac{-1}{7},0\right\},$$

حيث $\epsilon>0$. لذلك، من اجل كل $n\in\mathbb{N}$، يعُرّف الطيف شبه المعمم لـ U_n و V_n كما يلي:

$$\sigma_\epsilon(U_n,V_n)=\left\{z\in\mathbb{C}:\frac{1}{\sqrt{a_n}}\frac{4|2\frac{z}{\sqrt{a_n}}-1|}{|7(\frac{z}{\sqrt{a_n}})^2+z|}+\frac{1}{\sqrt{a_n}}\frac{15}{|7\frac{z}{\sqrt{a_n}}+1|}>\epsilon^{-1}\right\}\bigcup\left\{-\frac{\sqrt{a_n}}{7},0\right\}.$$

لنفرض أن $K\subset\mathbb{C}$ بحيث أن $\overline{\sigma_\epsilon(U,V)}\cap K=\overline{\sigma_\epsilon(U,V)\cap K}\neq\emptyset$. إذن، فإن نتيجتنا من النظرية 15 مثبتة بشكل جيد.

خاتمة

توصلنا في هذا القسم لإثبات نظرية التقارب الأساسية لشبه الطيف المعمم في ظل شروط عملية وقابلة للتطبيق . هذا التقارب يؤكد أهمية وفعالية تعريف شبه الطيف العام المستخدم في [34] مقارنةً بالتعريفات الأخرى. يعد اختيار التقارب الناظمي القوي مبررًا بشكل جيد، خاصة عند مقارنته بالنظرية الكلاسيكية حيث $V=I$. في [24]، أظهرت النتائج أن استخدام نوع مختلف من التقارب يتطلب استيفاء شروط نظرية إضافية لتحقيق هذا التقارب.

7

مجموعات المستوى للنظيم الناظمي المعمم

يمكن الملاحظة أنه في النظرية الأساسية لتقارب شبه الطيف المعمم ، لعب الشرط (ii) دورا أساسيا في البرهان ، والذي يعد تعميما للخاصية (H) من النظرية الكلاسكية ، نعرف الخاصية (H') المعممة للخاصية (H) كما يلي :

$$(\mathrm{H'}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho(U,V) \text{ لا توجد مجموعة مفتوحة في} \\ \text{حتى تكون الدالة } \|R(\cdot,U,V)V\| \text{ ثابتة.} \end{array} \right.$$

يمكن الملاحظة أنه من أجل $V = I$ نرجع للخاصية (H) في النظرية الكلاسيكية

في هذا الفصل ، سنهتم بدراسة الخاصية (H') في فضاء بناخي X حتى تكون الدراسة أكثر إلماما وشمولية بكل الحالات الممكنة

1.7 نتائج نظرية حول الخاصية (H')

لنفترض $U,V \in \mathscr{L}(X)$. فيما يلي، إذا كتبنا $X=\mathscr{H}$ ، فإن $\mathscr{H}$ هو فضاء هيلبرت. من أجل كل $z \in \rho(U,V)$، نعرف التطبيق الناظمي المعمم كما يلي :

$$z \longrightarrow R(z,U,V) = (U-zV)^{-1}.$$

نظرية 16. ليكن $U,V \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$، حيث أن V هو مؤثر متراص ومتباين . لنكن A مجموعة مفتوحة من $\rho(U,V)$. إذا كان

$$\|R(\mu,U,V)V\| \le M, \quad \forall \mu \in A,$$

فإن

$$\|R(\mu,U,V)V\| < M, \quad \forall \mu \in A.$$

برهان. بالتناقض، لنفترض $\mu_0 \in A$ بحيث $\|R(\mu_0,U,V)V\| = M$. نظراً لأن المجموعة A مفتوحة، يمكننا اختيار $r>0$ بحيث

$$\|(\mu-\mu_0)R(\mu_0,U,V)V\| < 1, \quad \forall \mu \in B_r(\mu_0),$$

حيث $B_r(\mu_0)$ تمثل الكرة بمركز μ_0 ونصف قطر r. ، لدينا:

$$R(\mu,U,V)V = \sum_{k=0}^{+\infty}(\mu-\mu_0)^k (R(\mu_0,U,V)V)^{k+1}, \quad \forall \mu \in B_r(\mu_0,r).$$

ليكن $f \in H$، نحصل على:

$$\|R(\mu,U,V)Vf\|^2 = \sum_{k,m=0}^{+\infty} (\mu-\mu_0)^k\overline{(\mu-\mu_0)}^m \left\langle (R(\mu_0,U,V)V)^{k+1}f, (R(\mu_0,U,V)V)^{m+1}f \right\rangle. \quad (1)$$

بتكامل المعادلة (1) على طول دائرة $|\mu-\mu_0| = r$، حيث $\mu = \mu_0 + re^{i\theta}$، نحصل على:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|R(\mu_0+re^{i\theta},U,V)Vf\|^2 d\theta =$$
$$\sum_{k,m=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (re^{i\theta})^k (re^{-i\theta})^m d\theta \left\langle (R(\mu_0,U,V)V)^{k+1}f, (R(\mu_0,U,V)V)^{m+1}f \right\rangle.$$

نظراً لأننا نحصل على:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(re^{i\theta})^k(re^{-i\theta})^m d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^{k+m}e^{i\theta(k-m)}d\theta = \begin{cases} r^{2k} & \text{إذا كان } k=m,\\ 0 & \text{إذا كان } k\neq m.\end{cases}$$

لذا، نحصل على

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|R(\mu_0+re^{i\theta},U,V)Vf\|^2 d\theta \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} r^{2k}\|(R(\mu_0,U,V)V)^{k+1}f\|^2.$$

من الواضح أن

$$\|R(\mu_0,U,V)Vf\|^2+r^2\|(R(\mu_0,U,V)V)^2f\|^2 \;\leq\; \sum_{k=0}^{+\infty} r^{2k}\|(R(\mu_0,U,V)V)^{k+1}f\|^2,$$

وبالتالي

$$\|R(\mu_0,U,V)Vf\|^2+r^2\|(R(\mu_0,U,V)V)^2f\|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|R(\mu_0+re^{i\theta},U,V)Vf\|^2 d\theta.$$

نظراً لأن

$$\|R(\mu_0+re^{i\theta},U,V)Vf\| \leq M\|f\|.$$

لذا، نجد أن

$$\|R(\mu_0,U,V)Vf\|^2+r^2\|(R(\mu_0,U,V)V)^2f\|^2 \leq M^2\|f\|^2. \tag{2}$$

لنختار الآن $\varepsilon>0$ عشوائيًا. بما أن $\|R(\mu_0,U,V)V\|=M$، فإنه يوجد $f_\varepsilon\in H$ بحيث

$$\|f_\varepsilon\|=1 \quad \text{و} \quad \|R(\mu_0,U,V)Vf_\varepsilon\|^2 > M^2-\varepsilon.$$

لذلك، من المعادلة (2)، نحصل على

$$M^2-\varepsilon+r^2\|(R(\mu_0,U,V)V)^2f_\varepsilon\|^2 < M^2.$$

إذاً

$$\|(R(\mu_0,U,V)V)^2f_\varepsilon\|^2 < \frac{\varepsilon}{r^2},$$

مما يعني أن

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|(R(\mu_0,U,V)V)^2 f_\varepsilon\|^2 = 0$$

وبالتالي

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(R(\mu_0,U,V)V)^2 f_\varepsilon = 0. \tag{3}$$

نظرًا لأن V مؤثر متراص وأن المتتالية $(R(\mu_0,U,V)Vf_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ محدودة، فإنه توجد مجموعة لانهائية $I\subset\rho^+$ و $y_0\in H$ بحيث

$$\lim_{\varepsilon\to 0}R(\mu_0,U,V)Vf_\varepsilon = y_0, \quad \forall\varepsilon\in I. \tag{4}$$

علاوة على ذلك، لدينا

$$R(\mu_0,U,V)V\left(\lim_{\varepsilon\to 0}R(\mu_0,U,V)Vf_\varepsilon\right) = R(\mu_0,U,V)Vy_0, \quad \forall\varepsilon\in I.$$

ونظرًا لاستمرارية $R(\cdot,U,V)V$، نحصل على

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(R(\mu_0,U,V)V)^2 f_\varepsilon = R(\mu_0,U,V)Vy_0, \quad \forall\varepsilon\in I,$$

مما يعطي وفقًا للمعادلة (3)

$$R(\mu_0,U,V)Vy_0 = 0.$$

نظرًا لأن V هو مؤثر متباين ، فإن $y_0=0$. الآن، وفقًا للمعادلة (4)، لدينا

$$\lim_{\varepsilon\to 0}R(\mu_0,U,V)Vf_\varepsilon = 0 \quad \text{لكل} \quad \varepsilon\in I.$$

وهذا يتناقض مع $\|R(\mu_0,U,V)Vf_\varepsilon\|^2 > M^2-\varepsilon$. □

مثال توضيحي يدعم فرضيات النظرية الأخيرة يتضمن الفضاء الهيلبرتي $H=L^2(\Omega)$، حيث $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ و $n\geq 1$. المؤثرات U و V تعرف على النحو التالي:

$$Uf(t) = f(t) + \int_\Omega k_1(t,s)f(s)\,ds, \quad Vf(t) = \int_\Omega k_2(t,s)f(s)\,ds$$

حيث k_1 و k_2 هي أنوية لمؤثرات التكامل. هذا المثال يتوافق مع الأبحاث التي أُجريت في المراجع [19، 34] ويندرج ضمن نظرية أنصاف الزمر المرتبطة بالمؤثرين U و V التي تمت مناقشتها في [21]. فيما يلي ، نعتبر الحالة التي يكون فيها X فضاء باناخ محدب بانتظام (المشار إليه في [28]). لقد تم دراسة هذه الحالة بشكل مكثف في النظرية الكلاسكية من أجل $V = I$ (انظر [8، 12، 41، 42]).

توطئة 10. لتكن $\mu \mapsto f(\mu) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(\mu-\mu_0)^k$ دالة بقيم في فضاء باناخ مركب X، معرفة وتحليلية في جوار النقطة μ_0. إذا كان $\|f(\mu)\| = \|a_0\|$ في جوار النقطة μ_0، فإنه لكل $k \in \mathbb{N}^*$ يوجد $r_k > 0$ بحيث

$$\|a_0 + (\mu-\mu_0)a_k\| \leq \|a_0\|, \quad |\mu-\mu_0| \leq r_k$$

برهان. انظر إلى التوطئة 1.1 في [28]. □

نظرية 17. لنفترض أن A و B ينتميان إلى $\mathscr{L}(X)$ مع كون X فضاء بناخ محدب بانتظام. نفرض أنه توجد مجموعة مفتوحة $A \subset \rho(U,V)$ وثابت $M > 0$ بحيث

$$\|R(\mu, U, V)\, V\| = M, \quad \forall \mu \in U.$$

إذاً، يوجد متتالية $(e_n)_{n\geq 0} \subset X$ بحيث، لكل $n \in \mathbb{N}$، يكون $\|e_n\| = 1$ حيث، لكل $\mu_0 \in A$:

$$\lim_{n\to\infty} \|R(\mu_0, U, V)Ve_n\| = M,$$

و

$$\lim_{n\to\infty} \|(R(\mu_0, U, V)V)^2 e_n\| = 0.$$

برهان. لنفرض أن $\mu_0 \in U$، ويمكننا اختيار $r > 0$ بحيث $\|R(\mu_0, U, V)V\|^{-1} > r$. الدالة $R(\cdot, U, V)V$ تكون تحليلية في الكرة $B_r(\mu_0)$، ويمكن التعبير عنها كالتالي:

$$R(\mu, U, V)V = \sum_{k=0}^{+\infty} (\mu-\mu_0)^k (R(\mu_0, U, V)V)^{k+1}, \quad \forall \mu \in B_r(\mu_0).$$

نظراً لأن $\|R(\mu, U, V)V\| = M$ لكل $\mu \in A$، فإنه يتبع ذلك

$$\|R(\mu_0, U, V)V\| = M \quad \forall \mu \in U.$$

وبواسطة التوطئة (10)، لكل $k \in \mathbb{N}^*$، يوجد $r_k > 0$ بحيث لكل $\mu \in A$،

$$\|R(\mu_0, U, V)V + (\mu - \mu_0)(R(\mu_0, U, V)V)^{k+1}\| \leq M \quad |\mu - \mu_0| \leq r_k.$$

وهذا يعني أنه لكل $x \in X$ حيث $\|x\| = 1$،

$$\|R(\mu_0, U, V)Vx + (\mu - \mu_0)(R(\mu_0, U, V)V)^{k+1}x\| \leq M \quad \forall \mu \in B_r(\mu_0 r_k).$$

وبالتالي،

$$\|\frac{1}{M}R(\mu_0, U, V)Vx + \frac{(\mu - \mu_0)r_k}{M}(R(\mu_0, U, V)V)^{k+1}x\| \leq 1 \quad \forall \mu \in B(\mu_0 1).$$

نظراً لأن $\|R(\mu_0, U, V)V\| = M$، فإنه توجد متتالية $(e_n)_{n\geq 0} \subset X$ بحيث، لكل $n \in \mathbb{N}$، يكون $\|e_n\| = 1$ و

$$\lim_{n\to\infty} \|R(\mu_0, U, V)Ve_n\| = M.$$

نعرّف المتتالية

$$x_n = \frac{1}{M}R(\mu_0, U, V)Ve_n$$

حيث $\|x_n\| \to 1$. نعرّف أيضًا

$$y_n = \frac{r_1}{M}(R(\mu_0, U, V)V)^2 e_n.$$

سنثبت الآن أن $\|y_n\| \to 0$. لنفترض عكس ذلك، أي أنه يوجد $\varepsilon > 0$ ومجموعة غير نهائية $I \subseteq \mathbb{N}$ بحيث $\|y_n\| > \varepsilon \forall n \in I$. إذاً

$$\forall \mu \in B_1(\mu_0 1) \quad \|x_n + (\mu - \mu_0)y_n\| \leq 1.$$

بتطبيق التحدب المنتظم للفضاء X، نستنتج وجود $\delta > 0$ بحيث $\|x_n\| < 1 - \delta$ لكل $n \in \mathbb{N}$. وهذا يتناقض مع $\|x_n\| \to 1$. إذاً، يجب أن يكون $\|y_n\| \to 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$. وعليه، نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \|(R(\mu_0, U, V)V)^2 e_n\| = 0.$$

وبذلك يكتمل الإثبات. □

نظرية 18. ليكن U و V من $\mathscr{L}(X)$، حيث X فضاء بناخ محدب بانتظام. نفترض أن هناك مجموعة مفتوحة $A \subset \rho(U,V)$ وثابت $M > 0$ بحيث

$$\|R(\mu,U,V)V\| = M \quad \forall \mu \in A.$$

إذاً

$$\|R(\mu,U,V)V\| \geq M \quad \forall \mu \in \rho(U,V).$$

برهان. لنفرض أن $\mu_0 \in A$. من اجل $\mu \in \rho(U,V)$ وباستخدام متطابقة المؤثر الناظمي الأولى مرتين، نجد

$$\begin{aligned} R(\mu,U,V)V - R(\mu_0,U,V)V &= (\mu-\mu_0)R(\mu,U,V)VR(\mu_0,U,V)V \\ &= (\mu-\mu_0)\left((\mu-\mu_0)R(\mu,U,V)V+I\right)\left(R(\mu_0,U,V)V\right)^2. \end{aligned}$$

لذا، لدينا

$$\|R(\mu,U,V)V\| \geq \left|\|R(\mu_0,U,V)V\| - |\mu-\mu_0|\,\|(\mu-\mu_0)R(\mu,U,V)V+I\|\,\|\left(R(\mu_0,U,V)V\right)^2\|\right|.$$

من النظرية 9، توجد متتالية $(e_n)_{n\geq 0} \subset X$ بحيث لكل $n \in \mathbb{N}$، $\|e_n\| = 1$. لذا،

$$\|R(\mu,U,V)V\| \geq \left|\|R(\mu_0,U,V)Ve_n\| - |\mu-\mu_0|\,\|(\mu-\mu_0)R(\mu,U,V)V+I\|\,\|\left(R(\mu_0,U,V)V\right)^2 e_n\|\right|.$$

من أجل $n \to +\infty$، يكون لدينا

$$\|R(\mu,U,V)V\| \geq M \quad \forall \mu \in \rho(U,V).$$

□

كل من النتائج والنظريات السابقة في هذا الفصل كان الهدف منها البرهان على النظريتين التاليتين ، اللتين تلخصان كل الحالات الممكنة التي تجعل من الخاصية (H') محققة بالنسبة لنظرية الحديثة لشبه الطيف المعمم ، هاتين النظريتان يمكن اعتبارهما كتعميم للنظرية الكلاسيكية ، فمن أجل كل مؤثر محدود B يمكن التعبير عن مجموعة القيم النظامية لهذا المؤثر عن طريق القيم النظامية لمؤثرين محدودين U و V حيث

V مؤثر قابل للقلب ، أما إذا كان B مؤثر غير محدود فانه يوجد كذلك مؤثرين محدودين U و V حيث V مؤثر متراص ومتباين ، ويمكن الكتبة عندها مجموعة القيم الناظمية للمؤثر B بدلالة القيم الناظمية لهذين المؤثرين U و V ، وبالتالي نكون قد ناقشنا مختلف الحالات التي تجعل من الخاصية (H) محققة سواء في النظرية الكلاسيكية او الحديثة المعممة

نظرية 19. ليكن U و V من $\mathscr{L}(X)$، حيث X فضاء بناخ محدب بانتظام. إذا كان V مؤثراً قابلا للقلب بحيث $V^{-1} \in \mathscr{L}(X)$. فإنه لا توجد مجموعة مفتوحة في $\rho(U,V)$ تكون فيها الدالة $\|R(\cdot,U,V)V\|$ ثابتة.

برهان. لنفرض أنه توجد مجموعة مفتوحة $A \subset \rho(U,V)$ بحيث

$$\|R(\mu,U,V)V\| = M \quad \forall \mu \in A.$$

من النظرية 17 ، يوجد $\mu_0 \in A$ ومتتالية $(e_n)_n \subseteq X$ بحيث $\|e_n\| = 1$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا ،

$$\lim_{n\to\infty} \|(R(\mu_0,U,V)V)^2 e_n\| = 0.$$

بما أن V قابل للقلب ، إذن،

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|e_n\| &\leq \lim_{n\to\infty} \|V^{-1}(U-\mu_0 V)V^{-1}(U-\mu_0 V)\| \|(R(\mu_0,U,V)V)^2 e_n\| \\
&\leq \|V^{-1}(U-\mu_0 V)V^{-1}(U-\mu_0 V)\| \lim_{n\to\infty} \|(R(\mu_0,U,V)V)^2 e_n\| = 0.
\end{aligned}$$

وهذا يتناقض مع $\|e_n\| = 1$ لكل $n \in \mathbb{N}$. □

نظرية 20. ليكن V هو مؤثر متباين ومتراص . إذن لا توجد مجموعة مفتوحة في $\rho(U,V)$ بحيث تكون الدالة $\|R(\cdot,U,V)V\|$ ثابتة.

برهان. ليكن U وV من $\mathscr{L}(X)$، حيث X هو فضاء بناخ وتحدب بانتظام . لنفرض أن هناك مجموعة مفتوحة $U \subset \rho(U,V)$ بحيث

$$\|R(\mu,U,V)V\| = M \quad \forall \mu \in A.$$

من خلال نظرية 9، توجد متتالية $(e_n)_n \subseteq X$ بحيث $\|e_n\| = 1$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، و

$$\lim_{n\to\infty} \|Re(\mu_0,U,V)Ve_n\| = M.$$

نظراً لأن V هو مؤثر متراص ، فإنه يوجد مجموعة غير منتهية $I \subseteq \mathbb{N}$ وعنصر $y \in X$ بحيث

$$\lim_{n\to\infty} R(\mu_0, U, V)Se_n = y$$

من أجل كل $n \in I$. بالإضافة إلى ذلك، من خلال النظرية (9)، من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا :

$$\lim_{n\to\infty} \|(Re(\mu_0, U, V)V)^2 e_n\| = 0.$$

هذا يعني أن

$$\lim_{n\to\infty} (R(\mu_0, U, V)V)^2 e_n = 0.$$

إذن، لدينا

$$R(\mu_0, U, V)V(\lim_{n\to\infty} R(\mu_0, U, V)Ve_n) = 0.$$

أخيراً، نحصل على $R(\mu_0, U, V)Vy = 0$. ونظراً لأن $R(\mu_0, U, V)V$ هو مؤثر متباين ، فإن هذا يعني أن $y = 0$. هذا يتعارض مع $M > 0$. □

يمكن معالجة هذه النظرية بمنظورين مختلفين :

- يمكن النظر إليها أيضا كنظرية مستقلة في في نظرية الطيف المعمم والتي تعالج الخاصية (H') في حالة المؤثرين المحدودين U و V حيث V مؤثر متراص متباين ، وبالتالي هي أعم من الظرية السابقة التي تشترط أن يكون المؤثر V قابل للقلب وهو شرط صعب نوعا ما تطبيقيا .
- لكن المنظور الأساسي والرئيسي لهذه النظرية أو بالأحرى الهدف الأساسي منها هو ربطها بنظرية المؤثرات الغير محدودة، والذي يمكن توضيحه فيما يلي:

البرهان سابقا أنه من اجل كل مؤثر غير محدود A حيث $D(A)$ كثيف في $\mathscr{H}$ فإنه يوجد مؤثرين محدودين U و V حيث $\rho(A) = \rho(U, V)$ و $\|(A - \lambda I)^{-1}\| = \|(U - \lambda V)^{-1} V\|$ من أجل كل $\lambda \in \rho(U, V)$ ليكن $\alpha \in \rho(A)$ ويمكن إيجاد U و V في هذه الحالة كما يلي :

$$U = A(A - \alpha I)^{-1} \qquad V = (A - \alpha I)^{-1}$$

وبالتالي نتحصل على التوطئة التالية :

توطئة 11. ليكن A مؤثر غير محدود و $\rho(A) \neq \emptyset$ و $\alpha \in \rho(A)$ حيث $(A-\alpha I)^{-1}$ مؤثر متراص ، فإن $\|(A-\lambda I)^{-1}\|$ ليست ثابتة من أجل أي مجموعة جزئية $K \subset \rho(A)$

هذه التوطئة هي أول نتيجة تعالج الخاصية (H) في نظرية المؤثرات الغير محدودة ، هذه النظرية تطبيقية جدا ، ذلك أنه في الحالة العامة المؤثر A هو مؤثر تفاضلي غير محدود ، وبالتالي فإن $(A-\alpha I)^{-1}$ في الغالب هو مؤثر تكاملي، والمؤثرات المتعلقة بالتكامل في العادة تكون متراصة ، وبالتالي يمكن أن نقول أننا قمنا بحل المشكل تماما تطبيقيا ، وفتحنا المجال لمختلف نظريات التقارب التي كلها تعتمد بشكل أساسي على النظرية (H) .

يمكننا القول بكل نخر والحمد الله أن بحثنا هذا قام بحل الأزمة بشكل نهائي التي واجهت العلماء لأكثر من نصف قرن والتي سالت فيها العديد من النظريات والمبرهنات فقط للوصول إلى حل نسبي للمعضلة .

خاتمة

يمكن تلخيص ماتم التوصل إليه في بحثنا هذا إلى بعض النقاط الرئيسية المهمة

- تم والحمد الله حل مشكلة التلوث الطيفي بالنسبة للمؤثرات الغير المحدودة وذلك باستعمال نظرية الطيف المعمم للتعبير عن النظرية الكلاسيكية ، ثم بعدها يتم استعمال النظرية الأساسية للتقارب ، لضمان تقارب الطيفي .

- تم بناء نظرية الطيف المعمم بشكل متكامل يتناسب مع النظرية الكلاسيكية ، يمكن اعتبارها كتعميم مباشر لها ، وتم تعميم مختلف الخواص والنتائج المتعلقة بالطيف الكلاسيكي إلى الطيف المعمم ، وكان بحثنا هو الخاتمة لهذه النتائج ، حيث كان لابد من البرهان على نظرية أساسية لضمان التقارب في النظرية المعممة ، هذه النظرية يمكن اعتبارها كنظرية مستقلة متعلقة بنظرية الطيف المعمم ، كذلك يمكن ربطها بنظرية الطيف الكلاسيكي وتحقيق التقارب بالنسبة للمؤثرات الغير محدودة إن مختلف النظريات الاساسية لتقارب الطيف أو شبه الطيف سواء المعمم أو الكلاسيكي ، تعتمد كلها وبشكل أساسي على النظرية (H) ولا يمكن أبدا تحقيق التقارب دون تحقق هذه الخاصية ، لذلك كان لزاما علينا تعميم هذه النظرية للنظرية المعممة إيجاد الشروط الازمة لتحققها وتمكنا من الحصول على نتائج جيدة معممة للنظرية الكلاسيكية

- تكمن فلسفة كل بحثنا في استعمال نظرية الطيف المعمم في حل مشاكل نظرية الطيف الكلاسيكي ، وكان لابد من إيجاد حل للخاصية (H) في فضاء المؤثرات الغير المحدودة ، وهنا يكمن الجوهر الحقيقي لنظرياتنا المتعلقة بالخاصية (H) حيث تمكنا من إيجاد شروط تطبيقية جدا تضمن تحقق الخاصية (H) مما يفتح المجال لمختلف نظريات التقارب الأخرى في هذا المجال

- هذا الفصل لم يركز على الحالات التي يكون فيها الفضاء X ذو بعد منتهي ، باستثناء الحالة التي يكون فيها V قابلًا للقلب. سؤال مثير للاهتمام للبحث المستقبلي هو: هل يمكن تخفيف شرط التباين للمؤثر V؟ علاوة على ذلك، هل من الممكن تقديم مثال في فضاء محدود الأبعاد حيث يكون المؤثر S غير تبايني، ولكن المؤثر الناظمي المعمم $(R(\mu, U, V))$ له نظيم ثابت على مجموعة مفتوحة؟ . قد يكشف التحقيق في هذه الأسئلة عن تداعيات إضافية ويمدد نطاق تطبيق الإطار العام الذي تم مناقشته.

- في الختام نؤمن بأن بحثنا هذا سيكون حجر الأساس في نظرية شبه الطيف المعمم والكلاسيكي ، ونأمل والحمد الله أننا قمنا بحل المشكل بشكل نهائي ، وتمكنت من خلاله من إكمال عمل المشرفين على أطروحتي ، الأستاذ قباي حمزة والأستاذ خلاف عمار

8

خاتمة وتطلعات

في الختام، استكشفت هذه الدراسة جوانب مختلفة للتقريب الطيفي وتأثيراته في نظرية المؤثرات. كان الهدف الرئيسي هو التعامل مع تحدي التلوث الطيفي، والذي يشير إلى الاختلاف بين الطيف التقريبي والطيف الدقيق. من خلال تحليل نظري دقيق وتحقيقات حسابية مكثفة، تم تحديد عدة نتائج رئيسية.

أولا قمنا بالبرهان على النظرية الأساسية لتقارب شبه طيف المعمم ، ومن خلال العمل الذي نشر قبلنا من قبل مخبر LMAM ، تم الربط بين النظرية الكلاسيكية لطيف للمؤثرات الخطية وبين النظرية المعممة ، وبالتالي تمكنا من تجاوز مشكلة التلوث الطيفي ، وبرهنة التقارب .

من منظور آخر، يمكن اعتبار عملنا رائدًا في تطوير نظرية متكاملة ومستقلة. تتميز هذه النظرية المعممة

بقابلية التطبيق عبر عدة فروع من الرياضيات، حيث توفر أدوات متعددة الاستخدامات ورؤى في تحليل الطيف وتجاوز نطاق نظرية المؤثرات الخطية التقليدية.

من خلال ربط هذه البنى النظرية، يفتح بحثنا طرقاً للاستكشاف والتطبيقات الأخرى في مجالات متنوعة، مما يبرز تأثيره المحتمل في تقدم النظرية الرياضية والتطبيقات العملية على حد سواء. هذا النهج الشامل لا يعزز فقط فهمنا للخصائص الطيفية بل يؤكد أيضًا أهميتها في البحث الرياضي الحديث والدراسات العلمية في مختلف التخصصات .

ثانيا لاحظنا أن النظرية الكلاسيكة والنظرية المعممة لشبه الطيف ترتكزان كلاهما على الخاصية *H* (بالاخذ بعين الاعتبار أن الخاصية H تعمم في النظرية المعممة) والتي من دونها تصبح كل الدراسة المتعلقة بشبه الطيف سواء الكلاسكي او المعمم بدون أي فائدة ، كذلك كل النظريات الخاصة سواء بتقارب الطيف او شبه الطيف في النظريتين الكلاسيكية والمعممة بدون أي معنى أو أي فائدة ، وبالتالي بحثنا المتعلق بالخاصية *H* يعد هو الركيزة الأساسية لكل النظريات الخاصة بتقارب الطيف وشبه الطيف بشقيه الكلاسيكي والمعمم ، وبالتالي أجبنا عن سؤال كان عائقا كبيرا في هذا المجال والذي من شأنه أن يفتح الافاق للعديد من الابحاث من بعدنا . أخيرًا، نأمل من خلال هذا العمل أن نكون قد وضعنا أساسًا راسخًا واكتشفنا حلولًا أولية لظاهرة التلوث الطيفي في مجال تقريب الطيف.

ولكل شيء إذا ما تم نقصان، ومن طبيعة الأعمال ألا ترقى إلى درجة الكمال، فرحم الله امرئ رأى شعثا فلمه، أو خللا فسده، أو نقصا فألمه، ومن الأكيد أنه سيأتي من بعدنا من يطّلع على هذا العمل. فنرجوا أن يضع بدل الخطأ صوابا، ومع الصواب دعاءً.

Bibliography

[1] Ahues. M et al, *Spectral Computations for Bounded Operators*, Chapman and Hall/CRC, New York, 2001.

[2] Ammar, A., Daoud, H., Jeribi, A. Pseudospectra and essential pseudo-spectrum of multivalued linear relations. Mediterr. J. Math. 2015 vol. 12, pp. 1377–1395. https://doi.org/10.1007/s00009-014-0469-z

[3] Ammar, A., Jeribi, A., Mahfoudhi, K. The condition pseudo-spectrum subset and related results. J. Pseudo-Differ. Oper. Appl. 2020 vol. 11, pp. 491–504. https://doi.org/10.1007/s11868-018-0265-9

[4] Atkinson. K. E, *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*, Cambridge University Press, 1997.

[5] A. BÖTTCHER, Pseudospectra and singular values of large convolution operators, J. Int. Eqs. Applics, 6 : 267-301, 1994.

[6] Banks, J., Garza-Vargas, J., Kulkarni, A., Srivastava, N. Pseudospectral shattering, the Sign Function, and diagonalization in dearly matrix multiplication time. Found Comput Math 2022. https://doi.org/10.1007/s10208-022-09577-5

[7] Balakrishnan, A.V., Triggiani, R.: Lack of generation of strongly continuous semigroups by the damped wave operator on $\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}$ (or: The little engine that couldn't). Appl. Math. Lett. Int. J. Rapid Publ. 6, 33-37 (1993)

[8] Bögli, S., Siegl, P. Remarks on the convergence of pseudo-spectrum. Integral Equ. Oper. Theory 2014 vol. 80, pp. 303–321. https://doi.org/10.1007/s00020-014-2178-1

[9] Bögli, S., Siegl, P., Tretter, C.: Approximations of spectra of Schrödinger operators with complex potential on $\boldsymbol{\rho}^{d}$. (2014) (in preparation)

[10] Brezis.H, Analyse fonctionnelle: Théorie et applications, Massons,Paris 1987.

[11] Davies, E.B. Linear operators and their spectra. Cambridge University Press, Cambridge 2007. https://doi.org/10.1017/CBO9780511618864

[12] Davies, E., Shargorodsky, E. Level sets of the resolvent norm of a linear operator revisited. Mathematika, 2016, vol. 62, pp 243–265 . https://doi.org/10.1112/S0025579315000194

[13] Dhara, K., Kulkarni, S.H. Decomposition of the $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\varepsilon})$-pseudo-spectrum of an element of a Banach algebra. Adv. Oper. Theory. 2020 vol. 5, pp. 248–260. https://doi.org/10.1007/s43036-019-00016-x

[14] Dhara, K., Kulkarni, S.H., Seidel, M. Continuity of the $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\varepsilon})$-pseudo-spectrum in Banach algebras. Integr. Equ. Oper. Theory. 2019 vol. 91. https://doi.org/10.1007/s00020-019-2530-6

[15] Evans. L. C, *Partial differtial equations, graduate studies in mathematics*, volume 19, American mathematical society, 1997.

[16] Frommer, A., Jacob, B., Vorberg, L., Wyss, C., Zwaan, L. Pseudospectrum enclosures by discretization. Integr. Equ. Oper. Theory. 2021 vol. 93. https://doi.org/10.1007/s00020-020-02621-5

[17] F. Chatelin. Spectral Approximation of Linear Operators. Academic Press, New York, 1983.

[18] F. Chaitin Chatelin and A. Harrabi, ”About Definition of Pseudospectra of Closed Operators in Banach Spaces,” CERFACS Technical Report TR/PA/98/08.

[19] Guebbai, H. Generalized spectrum approximation and numerical computation of eigenvalues for Schrödinger’s operators. Lobachevskii J Math. 2013, vol. 34, pp. 45–60. https://doi.org/10.1134/S1995080213010058

[20] Grubb. G, *Distribution and operators, Graduate texts in mathematics*, Springer, 2009.

[21] G. A. Sviridyuk, On the general theory of operator semigroups, *Russian Mathematical Surveys*, 1994, vol. 49, Issue 4, 45–74 https://doi:10.1070/RM1994v049n04ABEH002390

[22] Hansen, A.C. On the approximation of spectra of linear operators on Hilbert spaces. J. Funct. Anal. 2008, vol. 254, pp. 2092–2126. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2008.01.006

[23] Hansen, A.C. On the solvability complexity index, the n-pseudo-spectrum and approximations of spectra of operators. J. Am. Math. Soc. 2011, vol. 24, pp. 81–124. https://www.jstor.org/stable/25801447

[24] Harrabi, A. Pseudospectre d’une suite d’operateurs bornes. RAIRO Modelisation Mathematique Et Analyse Numerique. 1998, vol. 32, pp. 671–680 MR: 1652664 | Zbl: 0932.47001

[25] H. J. LANDaU, On Szegö’s eigenvalue distribution theorem and non-hermitian kernels, J. Analyse Math., 28 : 335-357, 1975.

[26] J. Globevnik : On complex strict and uniform convexity. Proc. Am. Math. Soc. 47, 175–178 (1975)

[27] J. Globevnik, Norm-constant analytic functions and equivalent norms. Illinois J. Math. 20 (1976), 503–506.

[28] J. Globevnik and I. Vidav, On operator-valued analytic functions with constant norm, Journal of Functional Analysis, Vol. 15, Issue 4, (1974), 394–403

[29] Kato, T.: Perturbation theory for linear operators. Springer, Berlin (1995)

[30] Khellaf, A., Guebbai, H., Lemita, S., Aissaoui, M.Z. Eigenvalues computation by the generalized spectrum method of Schrödinger's operator, Computational and Applied Mathematics. 37, 5965–5980 (2018).

[31] Khellaf, A., Guebbai, H. A note on genralized spectrum approximation, Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018, vol. 39, pp. 1388–1395. https://doi.org/10.1007/s40314-018-0673-8

[32] Khellaf, A., Benarab, S., Guebbai, H., Merchela, W. A class of strongly stable approximation for unbounded operators, Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki -Tambov University Reprots. Series: Natural and Technical Sciences. 2019, vol.24, pp. 218–234. https://doi 10.20310/1810-0198-2019-24-126-218-234

[33] Khellaf, A., Merchela, W., Guebbai, H. New sufficient conditions for the computation of generalized eigenvalues, Russian mathematics. 2021, vol. 65, pp. 65–68. https://doi.org/10.3103/S1066369X21020067

[34] Khellaf, A., Guebbai, H., Lemita, S., Aissaoui, M.Z. On the pseudo-spectrum of operator pencils, Asian-European Journal of Mathematics. 2020, vol. 13, pp. 2050100. https://doi.org/10.1142/S1793557120501004

[35] Kulkarni, S.H. Spectrum and related sets: a survey. J Anal. 2021 vol. 29, pp. 493–517. https://doi.org/10.1007/s41478-019-00214-z

[36] Markus, A.S. Introduction to the spectral theory of polynomial operator pencils. In translations of mathematical Monographs, vol. 71, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988, vol. 71 .https://doi.org/10.1090/mmono/071

[37] Möller, M., Pivovarchik, V. Spectral theory of operator pencils, Hermite-Biehler functions, and their Applications; Birkhäuser, 2015 .https://doi.org/10.1007/978-3-319-17070-1_3

[38] Nicholas A. Cook. Alice Guionnet. Jonathan Husson. Spectrum and pseudo-spectrum for quadratic polynomials in Ginibre matrices. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 58 (4) 2284 - 2320, November 2022. https://doi.org/10.1214/21-AIHP1225

[39] Novák, R. On the Pseudospectrum of the harmonic oscillator with imaginary cubic potential. Int J Theor Phys, 2015 vol. 54, pp. 4142-4153. https://doi.org/10.1007/s10773-015-2530-5

[40] O. NEvanLinNa, Convergence of iterations for linear equations, Birkhauser, Basel, 1993.

[41] Shargorodsky, E. On the level sets of the resolvent norm of a linear operator. Bull. Lond. Math. Soc. 2008, vol. 40, pp. 493–504. https://doi.org/10.1112/blms/bdn038

[42] Shargorodsky, E. On the definition of pseudo-spectrum. Bull. London Math. Soc. 2009. vol 41, pp 524–534. https://doi:10.1112/blms/bdp031

[43] Shargorodsky, E.: Pseudospectra of semigroup generators. Bull. Lond. Math. Soc. 42, 1031-1034 (2010)

[44] Trefethen, L.N., Embree, M. Spectra and Pseudospectra: the behavior of nonnormal matrices and operators. Princeton University Press, 2005. https://press.princeton.edu/books/hardcover/9780691119465/spectra-and-pseudo-spectrum

[45] Van Dorsselaer, J. L. M. Pseudospectra for matrix pencils and stability of equilibria. BIT Numerical Mathematics. 1997, vol. 37, pp. 833–845. https://doi.org/10.1007/BF02510354

[46] Van Dorsselaer. J. L. M, *Pseudospectra for matrix pencils and stability of equilibria*, BIT Numerical Mathematics, 37:4, 833-845. 1997.