REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEIUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE 8 MAI 1945 - GUELMA -

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
ET DES SCIENCES DE LA MATIÈRE
- Département de Mathématiques -

MEMOIRE

Présenté
En vue de l'obtention :

Du Diplôme **DE MAGISTER « Ecole Doctorale»** *En Mathématiques*
Option : *Mathématiques De Développement.*

Par :

Mme. HAMIDANE BESMA

INTITULÉ

PROBABILITÉ DE RUINE ET VALUE-AT-RISK EN FINANCE ET ASSURANCE

Dirigé Par : *Dr Mohamed Riad REMITA*
Devant le jury

PRESIDENT :	*Mr Aissaoui Mohamed Zine*	*M.C.A.*	*U. 8 Mai 1945 / Guelma.*
RAPPORTEUR :	*Mr Remita Mohamed Riad*	*M.C.A.*	*U. Badji Mokhtar /Annaba.*
EXAMINATRICE :	*Mme Djellab Natalia*	*Prof.*	*U. Badji Mokhtar / Annaba.*

GUELMA -02-06- 2013

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEIUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE 8 MAI 1945 - GUELMA -

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
ET DES SCIENCES DE LA MATIÈRE
- Département de Mathématiques -

MEMOIRE

Présenté
En vue de l'obtention :

Du Diplôme **DE MAGISTER « Ecole Doctorale»** *En Mathématiques*
Option : *Mathématiques De Développement.*

Par :

*M^me^*. HAMIDANE BESMA

INTITULÉ

PROBABILITÉ DE RUINE ET VALUE-AT-RISK EN FINANCE ET ASSURANCE

Dirigé Par *: Dr Mohamed Riad REMITA*
Devant le jury

PRESIDENT :	*Mr Aissaoui Mohamed Zine*	*M.C.A.*	*U. 8 Mai 1945 / Guelma.*
RAPPORTEUR :	*Mr Remita Mohamed Riad*	*M.C.A.*	*U. Badji Mokhtar /Annaba.*
EXAMINATRICE :	*Mme Djellab Natalia*	*Prof.*	*U. Badji Mokhtar / Annaba.*
EXAMINATEUR :	*Mr Ellaggoune Fateh*	*M.C.A.*	*U. 8 Mai 1945 / Guelma.*

GUELMA -02-06- 2013

« Le monde s'offre à l'esprit comme un cryptogramme dont le décryptement réside dans la maitrise de la science. »

« CITATION PHILOSOPHIQUE »

DEDICACE

Ce travail est dédié à mes parents qui m'ont soutenu tout au long de mes études, et qui ont su me donner confiance, espoir et amour mille mercis.

***A mon mari** Nabil, **mon partenaire et compagnon d'âme qui ma toujours soutenu et encouragé pendant mes études**.*

***A mes sœurs** Nacira**,** Samira, Nesrine**, mes plus chères de mon cœur**.*

A mes beaux - frères** Sofiane **qui ma toujours soutenu, aidé et conseillé**, **ainsi que** Abd el Nour **mon cher frère.

A mes petites sacrées nièces** Malak **et** Maram**.

***A mon adorable neveu** Mohamed Seif el Dine.*

A la mémoire de mes grands parents paternels et maternels.

A toute ma famille de prés et de loin et en particulier mes beaux parents.

A tous mes amis et en particulier les intimes** Amel, Sonia, Sihem **et ceux de ma promotion de poste-graduation.

A toute la famille du département de mathématique «** Annaba **et** Guelma **» enseignants et collègues qui ont été mes compagnons de lutte vers le savoir.

A tous ceux et celles qui m'ont encouragé à aller au bout de ma tâche.

Merci à tous et à toute

BESMA

REMERCIEMENTS

Au nom de DIEU Le Plus Clément et Le Plus Miséricordieux.

Tout d'abord, je remercie *ALLAH* ***Le Tout Puissant qui m'a accordée la volonté et le courage pour réaliser ce mémoire.***

Je tiens à adresser mes remerciements les plus chaleureux et ma profonde gratitude au *Docteur M^{ed} Riad REMITA* ***maître de conférence A, à l'université Badji Mokhtar de Annaba, pour m'avoir proposé le sujet de ce mémoire. C'est grâce à sa grande disponibilité, ses conseils, ses orientations, et ses encouragements que j'ai pu mener à bien ce travail, me faisant ainsi bénéficier de son savoir et de son expérience.***

Je tien à exprimer également mes remerciements au Docteur *Aissaoui Mohamed Zine* ***maître de conférence A, à l'université 08 Mai 1945 de Guelma, pour m'avoir fait le grand honneur de présider le jury.***

De même je remercie vivement Docteur *Natalia Djelab*, ***professeur à l'université Badji Mokhtar de Annaba et le Docteur*** *Ellaggoune Fateh* ***maître de conférence A, à l'université 08 Mai 1945 de Guelma, pour l'honneur qu'ils mon fait de bien vouloir accepter de faire partie du jury.***

Je tien également à remercier mes collègues de travail au sein de la direction de l'industrie, petite et moyenne entreprise et de la promotion d'investissement –Annaba–, à leur tête le Directeur *Amamra Abd el Ouaheb*, ***qui m'ont encouragée à finir ce travail et qui m'ont accompagnée dans tous les moments de joie et de tristesse.***

Enfin, que toute personne ayant contribué à la réalisation de ce modeste travail soit persuadée de ma totale reconnaissance.

RESUME

Au cours des siècles, de nombreux événements (*risques*), qu'il s'agisse de catastrophes naturelles ou d'accidents liés à l'activité humaine, sont inhérents notre vie. Donc, il est impératif de prendre en compte et d'anticiper les possibilités de survenance de tels phénomènes, afin d'en limiter les impacts humains, environnementaux et économiques. Pour cela aussi, les institutions financières (*les banques et les compagnies d'assurance*) cherchent toujours à des nouvelles règles pour gérer et évaluer ses risques et leurs pertes potentielles et pour équilibrer un investissement risqué. Et dans le contexte de libéralisation des marchés de capitaux et du développement des instruments financiers dérivés, les organismes de surveillance ont exigé des institutions de développer divers outils pour mesurer et pallier les effets de ce risque. La ***VaR***, acronyme désignant la ***value-at-risk*** introduite par ***J.P Morgan*** en ***1996***, en est l'un des derniers nés et des plus en vogue actuellement. La définition probabiliste de la ***VaR*** est claire mais ses méthodes de calcul sont multiples et il convient d'adopter la plus adéquate selon la nature du portefeuille d'actifs sous gestion. Les outils mathématiques mis en œuvre peuvent aussi être pointus et requièrent une parfaite maîtrise pour fournir un résultat pertinent. Ce mémoire retrace l'historique et les modèles de calcul de la ***VaR*** les plus largement mis en place au sein des institutions qui s'y soumettent. Mais malheureusement cette mesure présente quelques inconvénients, du fait qu'elle n'est pas cohérente et aussi elle ne se base sur aucune information sur la queue droite de la distribution. La convenance de ces axiomes est toujours un sujet pour la discussion, néanmoins, ils établissent un critère pour présenter de nouvelles mesures de risque alternatives telles l'Expected Shortfall (*ES*), la Conditional Tail Expectation (*CTE*) et la Tail Value-at-Risk (*TVaR*).

Mots clés : *risque, banque, assurance, finance, VaR, probabilités, gestion, mathématiques, portefeuille, inconvénients.*

ملخص

على مر القرون ، العديد من الأحداث "المخاطر" سواء كانت كوارث طبيعية أو حوادث متعلقة بالنشاط البشري ، أصبحت متأصلة بحياتنا.لذلك أصبح لا بد من الضروري الأخذ بعين الاعتبار و توقع جُـلَّ إمكانية حدوث مثل هذه الظواهر ، وذلك بغية الحد من الآثار البشرية، البيئية و الاقتصادية. من أجل ذلك، فإن المؤسسات المالية (*بنوك و شركات تأمين*) فهي دائمة البحث عن قواعد جديدة من أجل تسيير و تقييم أمثل للمخاطر، و كذا الخسائر المحتملة و تحقيق التوازن لاستثمار محفوفٍ بالمخاطر. و في سياق تحرير أسواق رأس المال و تطوير المنشآت الاقتصادية المختلفة، عمدت هيأت الرقابة إلى مؤسسات من أجل تطوير مختلف الوسائل بغية قياس و التخفيف من آثار هذه المخاطر. « ***VaR*** » اختصار لكلمة " *القيمة المعرضة للخطر*"، التي تم عرضها و اعتمادها من طرف البنك العالمي ***جي بي مورغان*** سنة ***1996***، و التي أضحت حالياًمن أحدث ما تم خلقه و الأكثر شعبيةً. إن التعريف الاحتمالي لـــلـــ **:** « ***VaR*** » واضح ، ولكن طرق حسابها عديدة و يتوجب اعتماد الأنسب منها حسب محفظة الأصول الخاضعة للتسيير و بأدوات الرياضيات المستخدمة يُمكِنُهَا من أن تكون دقيقة و حادة و تَطَلُب تمكن جيد لتقديم نتيجة متوافقة. هذه الأطروحة تعرضت إلى تاريخ و طرق حساب الـ « ***VaR*** » الأكثر و الأوسع نطاق استعمالاً على مستوى المؤسسات. ولكن للأسف هذه الأداة لديها بعض العيوب، بالنظر إلى كونها غير متسقة كما أنها لا تعتمد على أي معلومة عن ذيل التوزيع.مدى ملائمة هذه البديهيات هو دائماً موضوع للمناقشة، بيد أنها أنشأة معياراً لطرح معايير بديلة و جديدة للخطر منها **:** العجز المتوقع « ***ES*** » ، توقع الذيل المشروط « ***CTE*** » ، ذيل القيمة المعرضة للخطر« T***VaR*** » .

الكلمات المفتاح : *خطر ، بنك ، تأمين ، مالية ، قيمة معرضة للخطر، احتمالات ، تسيير ، رياضيات ، محفظة ، عيوب.*

Abstract

Over the centuries, many events (*risk*), whether natural disasters or accidents related to human activity, are inherent life. Therefore, it is imperative to take into account and anticipate the possibilities of occurrence of such phenomena, in order to limit human impacts, environmental and economic. To do so, financial institutions (*banks and insurance companies*) are always looking for new rules to manage and evaluate risks and their potential losses and to balance a risky investment. In the context of markets liberalization and financial derivatives development, governmental supervising institutions asked from these institutions to set up several tools to measure and solve effects of this risk. The ***VaR***, acronym for ***value at risk*** introduced by ***J.P Morgan*** in ***1996***, is one of the latest and most used nowadays. The probabilistic definition is clear but its methods are numerous and the most fitted one to the kind of portfolio managed, has to be chosen. Mathematical tools can also be sharp and require to be perfectly managed to provide a relevant result. This memory presents the history and the most commonly used models in the calculus of the ***VaR***. But unfortunately this measure has some drawbacks, because it is not consistent and as it is not based on any information on the right tail of the distribution. The suitability of these axioms is always a topic for discussion; however, they establish a criterion for introducing new measures of risk alternatives such the Expected Shortfall (*ES*), the Conditional Tail Expectation (*CTE*) and the Tail Value-at-Risk (*TVaR*).

Keywords : *risk, banking, insurance, finance, VaR, probabilities, management, mathematics, portfolio disadvantages.*

SOMMAIRE

Chapitre I:

LA GESTION DU RISQUE

Chapitre 2 :

Historique de la VaR « Value-at-Risk »

Chapitre 3 :

La Value-at-Risk

Chapitre 4 :

Calcul de la VaR en VBA-Excel

INTRODUCTION

Historiquement, les besoins en modélisation des risques se sont fait sentir à la suite des différentes crises des institutions bancaires dans les ***90*** citons (*Orange Contry, Barings et Metallgesellschaft*). Alors, des réglementations ont été formulées pour prévenir des pertes irréversibles, dues à des mauvaises supervisions, à des chutes de valeurs sur les marchés des actifs financiers, à des faillites de contreparties ou à des risques plus opérationnels, et ainsi définir un montant de réserves, ces erreurs qui peuvent impacter toute une économie, en provoquant des milliers de pertes d'emplois ou en dilapidant les économies d'épargnants.

Le **R**isk **M**anagement « *Gestion de **R**isque* » étudie les facteurs quantifiables ou non du risque qui menace le rendement d'un produit. Il apporte des solutions stratégiques (*Organisation, Procédures*) et tactiques (*Méthodes quantitatives de gestion*).

Aujourd'hui la **G**estion des **R**isques est devenue incontournable pour les entreprises, en particulier dans le domaine bancaire et des institutions financières. En effet, depuis quelques années l'accroissement de la volatilité sur les marchés, la complexité croissante des produits financiers négociés, combinée à des cas spectaculaires de faillites, a donné un regain d'intérêt évident au **R**isk **M**anagement. De nombreuses actions et réflexions ont été suscitées dans les milieux scientifiques et professionnels afin d'instaurer un système plus rigoureux de **G**estion des **R**isques.

De ce fait la **G**estion des **R**isques est une procédure qui vise à connaitre et à maitriser le risque inhérent à l'activité d'une entreprise. Un gestionnaire de risque a comme objectif de connaitre et gérer un risque futur.

Plusieurs crises financières démontrent, encore aujourd'hui, que cette **G**estion des **R**isques n'est pas toujours parfaite et bien maîtrisée. Les marchés financiers se complexifient toujours davantage et la **G**estion des **R**isques doit suivre la cadence.

Dans les années ***90***, il paraissait alors indispensable d'introduire une nouvelle mesure de risque globale qui s'adapte à tout type de produit financier et qui soit compréhensible par tous. Ainsi, la valeur exposée au Risque, plus communément appelée ***VaR*** (***Value-at-Risk),*** appelée parfois ***Valeur-à-Risque*** ou encore ***Valeur-en-Risque*** est une tentative de synthétiser en un seul nombre le risque total d'un portefeuille d'actifs financiers et ce en unités monétaires. Cette mesure d'abord utilisée en ***assurance*** (*Concept de ruine*) puis dans les salles de marché où la banque *JPMorgan-RiskMetrics* a contribué à sa création et cette mesure a été par la suite largement acceptée par les trésoriers d'entreprise, les gérants de fonds ainsi que les institutions financières.

Théoriquement, cette mesure correspond au quantile de la distribution des *pertes et profits* (*Profit and Losses ou P&L*) associée à la détention d'un portefeuille d'actifs sur un horizon donné. Comme l'explique *Barry Schachter* [***1998***], l'incroyable engouement que connaît la ***VaR*** aussi bien dans l'industrie du risque que dans le milieu académique peut s'expliquer par son extrême simplicité et son caractère généralisé.

Il existe plusieurs méthodes pour calculer la ***VaR***, Cette mesure qui' est un outil très puissant et incontournable. La méthode historique est généralement retenue par les institutions financières puisqu'elle est simple à mettre en œuvre et ne fait aucune hypothèse sur les distributions de *pertes et profits (P&L) ou sur l'évolution des paramètres de marché.*

Cependant, la crise a mis en évidence les *limites* de cette méthode. De nombreuses banques ont en effet enregistré des pertes au-delà des ***VaR*** estimées sur leurs activités de négociation. C'est pourquoi, beaucoup se tournent vers un substitut de la **VaR** historique, à savoir la ***Tail-VaR*** ou « *Expected Schortfel* ». Cette dernière a l'avantage d'être une mesure de risque cohérente, tout en restant simple à mettre en œuvre. Du coté de la réglementation, la ***VaR*** a toujours son rôle dans le calcul des exigences de fonds propres mais depuis ***juillet 2009*** le Comité de *Bâle* recommande de calculer une ***VaR*** stressée en complément de celle-ci. Cette nouvelle mesure est dite « *stressée* » car son calcul repose sur une période d'observation de stress financier.

Le présent mémoire est divisé en quatre parties principales. Dans un premier temps, je présenterai le domaine de la **G**estion de **R**isk qui va nous permettre de comprendre dans quel domaine s'inscrit cette ***Value-at-Risk.*** Ensuite je présenterai cet outil, plus particulièrement ses spécificités et ses origines avant de passer sur son fonctionnement et ses méthodes de calcule. Enfin j'expliciterai ces limites ainsi qu'une étude de cas.

CHAPITRE : 1
CHAPITRE : 1

LA GESTION DU RISQUE
LA GESTION DU RISQUE

1/ La gestion du risque :

Ce travail traite principalement un indicateur de risque, la ***Value at Risk*** « ***VaR*** ». Avant tout, il est important de comprendre la globalité du domaine de la gestion des risques et de son utilité.

1.1 Définition du mot risque :

La notion de risque est difficile à appréhender. Nous parlons généralement de risque pour traduire une exposition à un danger. Dans le domaine financier, nous pouvons assimiler ce risque à une perte probable de valeur. Chacun désire connaître quel montant il peut perdre, qu'il s'agisse d'un trader de *Wall Street*, d'une banque ou encore d'un épargnant.

- ***Petit Larousse*** **:** « *Danger, inconvénient possible* ».
- ***Robert*** **:** « *Danger éventuel, plus ou moins prévisible* » ou « *Le fait de s'exposer à un danger, dans l'espoir d'obtenir un avantage* ».
- ***Littré*** : « *Péril dans lequel entre l'idée de hasard* »

Selon le référentiel ***ISO*** Guide ***73*** – Vocabulaire du management du risque qui a été revu lors du développement de la norme ***ISO 31000 :2009*** – *Management du risque* — Principes et lignes directrices, la nouvelle définition abandonne la vision de l'ingénieur (« *le risque est la combinaison de probabilité d'évènement et de sa conséquence* ») pour coupler les risques aux objectifs de l'organisation **:** « *le risque est l'effet de l'incertitude sur les objectifs* ».

Le risque, en assurance **:** s'entend de la possibilité que survienne un sinistre ou tout autre événement défavorable susceptible d'influer sur la capacité d'une entreprise à exercer ses activités et à l'égard duquel elle peut présenter une réclamation.

Le risque, en finance **:** Il est très difficile de définir de façon générale la notion de risque. Le risque est lié à la survenance d'un événement que l'on ne peut prévoir qui a des conséquences importantes sur le bilan de la banque.

- ***Définition*** (***Risque en Finance***) **:** *Le risque est la probabilité que le rendement réel d'un investissement sera différent de celui attendu.*

  Il est également défini comme un phénomène subjectif impliquant l'exposition. Mais en général, le risque est défini en termes de changements des valeurs entre deux dates. Parce qu'il est lié à la variabilité de la valeur future d'une position en raison de changements du marché ou, plus généralement, des événements incertains.

- ***Définition*** (***Risque en Mathématiques***) **:** *Un risque,* X *est une variable aléatoire représentant la perte nette d'un investisseur à un certain moment particulier dans le futur.* $X < 0$ *représente un gain et un* $X > 0$ *représente une perte.*

Il importe donc d'adopter une définition précise, qui se démarque des différentes acceptions du langage courant. Nous dirons qu'un risque est une situation (*ensemble d'événements simultanés ou consécutifs*) dont l'occurrence est incertaine et dont la réalisation affecte les objectifs de l'entité (*individu, famille, entreprise, collectivité*) qui le subit. Certains risques pourront avoir des effets positifs. Ce sont ceux que l'on recherche, et que l'on appelle « *chance* » ou « *opportunités* ». D'autres auront assurément des effets négatifs. Ce sont ceux que l'on craint.

Nos activités génèrent directement certains risques. On les qualifiera d'endogènes. D'autres naissent dans notre environnement et nous affectent par contrecoup. On les appellera exogènes. Un risque se caractérise donc par deux grandeurs **:**

- Sa probabilité d'occurrence, ou fréquence **f**. Ses effets, ou gravité **G**.
- Un risque se mesure par le produit de ces deux grandeurs, sa criticité **C :** **C = f x G.**

1.2 L'optimisation du couple rentabilité / risque :

Le fondement du risque se base sur un arbitrage entre la rentabilité et le risque. Il est commun de dire que sans prendre de risque, on ne peut rien gagner. Cette image représente parfaitement le domaine de la finance. Sans prendre de risque nous ne pouvons pas obtenir une rentabilité. Tout investissement présente un risque, qui sera plus ou moins élevé selon les différents types d'actifs financiers. Chaque individu possède sa propre aversion aux risques. Si un jeune cadre dynamique aura davantage tendance à investir dans des actifs dangereux comme des actions, un retraité investira peut-être dans des obligations d'états lesquelles présentent un risque nettement plus faible afin de garantir son capital retraite.

De cela, le but d'une banque, ce n'est pas de prendre le moins de risque possible, mais d'atteindre une rentabilité maximale pour un risque donné.

La mesure des risques va permettre de calculer les ***fonds propres*** « *voir annexe 01* » nécessaires pour assurer chaque opération financière. C'est donc un outil qui a plusieurs vocations. Il permet bien sûr de dimensionner les risques encourus en fonction du montant de ces ***fonds propres***. Mais c'est aussi un outil indispensable pour calculer des mesures de performances. Au niveau global, la mesure de performance la plus utilisée est le rendement des ***fonds propres*** (*Return on Equity ou ROE*). A des niveaux beaucoup plus fins (*jusqu'au niveau transactionel*), les banques utilisent des mesures de performance ajustée du risque (*risk-adjusted performance measure ou RAPM*). Par exemple, le rapport du rendement espéré sur le capital en risque est une mesure *RAPM*.

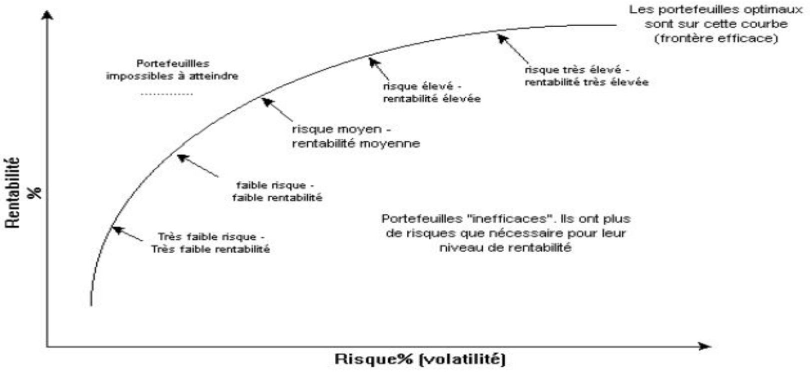
Il est donc important de considérer la mesure des risques non pas uniquement comme un outil réglementaire, mais comme un outil stratégique de décision pour la banque, car

« [...] *la gestion d'une banque consiste en une gestion globale et coordonnée, sous contraintes internes et externes, de la rentabilité et des risques liés aux activités de l'établissement (**Augros**[01] et **Quéruel**[02] [**2000**]).* »

Cet arbitrage entre le risque et le rendement a été parfaitement illustré par ***Harry Markowitz*** détenteur d'un prix Nobel d'économie.

Figure -1-

Plan de Markowitz



Source : membres.lycos.fr/alplk/SLIP_theorie.htm.

On voit clairement le rapport entre le risque et le rendement. La courbe du graphique ci-dessus est appelée ***frontière efficiente***. Au-delà de cette ligne, le rapport rendement risque n'est pas possible à atteindre. Une telle situation se traduirait par un investissement massif et la loi de l'offre et de la demande stabiliserait cette dernière au niveau de la frontière efficiente.

Les mesures du risque ont bien évolué depuis que ***Markowitz*** a avancé sa célèbre théorie de la diversification de portefeuille à la fin des années ***1950***, théorie qui devait révolutionner la gestion de portefeuille moderne. L'écart-type était alors la mesure du risque d'un portefeuille efficient. Mais pour un titre, cette mesure n'est pas appropriée.

En effet, dans le cas d'un titre individuel, le risque est représenté par la covariance de son rendement avec celui des autres titres qui constituent un portefeuille bien diversifié. L'écart-type du rendement d'un titre comprend les risques diversifiable et non diversifiable. Or, seul le risque non diversifiable est rémunéré par le marché. Ce risque est représenté par la covariance entre le rendement du titre et les rendements des titres qui constituent un portefeuille hautement diversifié.

Les théories du risque qui ont emboîté le pas à celle de ***Markowitz*** se sont attachées aux facteurs qui déterminent le risque d'un titre de même qu'à l'équilibre des marchés financiers. En effet, le modèle de ***Markowitz*** exige l'estimation de **N** variances et de $\frac{N^2 - N}{2}$ covariances si on suppose que le nombre de titres qui composent le portefeuille est de **N**. Quand **N** devient important, l'estimation de la matrice variance-covariance se présente comme un exercice très laborieux et les risques d'erreurs d'estimation sont loin d'être négligeables, ce qui peut donner lieu à une frontière efficiente pour le moins erronée. Force est donc de simplifier les facteurs de risque. Au lieu de les associer aux rendements des titres, il semble plus approprié d'identifier un nombre limité de facteurs de risque dont dépendent conjointement les rendements. De plus, le modèle de ***Markowitz*** ne se donnait pas pour tâche d'expliquer le processus de détermination des niveaux d'équilibre des rendements, les tenants plutôt pour acquis. Le modèle de ***Markowitz*** comportait donc de nombreuses failles auxquelles il fallait pallier.

Durant les années ***1960***, ***Sharpe*** a proposé le modèle de l'évaluation des actifs financiers, soit le ***MEDAF*** « *Le Modèle d'Equilibre des Actifs Financiers* » ou le ***CAPM*** « *Capital Asset Pricing Model* » en anglais. Ce modèle est mono factoriel en ce sens qu'il ne distingue qu'un seul facteur explicatif du risque d'un titre, soit la corrélation entre le rendement de ce titre et celui du portefeuille du marché. C'est ce qu'on appelle le ***risque systématique*** du titre, catégorie de risque qui n'est pas diversifiable. Le ***risque non systématique***, ou ***risque idiosyncratique***, est celui qui est particulier à la compagnie qui émet le titre. Étant diversifiable, il n'est pas rémunéré par le marché. À l'intérieur de la théorie du ***CAPM***, le risque systématique d'un titre équivaut à son bêta, qui est une mesure relative du risque établie en comparaison avec le bêta du portefeuille du marché qui, lui, est égal à **1**.

Au milieu des années ***1970*** est apparu un autre modèle du risque basé sur l'absence d'arbitrage **:** ***l'APT***, acronyme de l'expression : *Arbitrage Pricing Theory*. Ce modèle, proposé par ***Ross*** [(03)], reconnaît que le risque est un phénomène multidimensionnel qui s'explique par plusieurs facteurs « variables ». Le modèle ***APT*** est donc multifactoriel. Le bêta d'un titre pour un facteur donné est la sensibilité relative du rendement du titre à ce facteur. L'une des faiblesses du modèle ***APT*** est qu'il reste muet quant à l'identité des facteurs qui déterminent le rendement des titres.

Au début des années ***1990***, une nouvelle mesure du risque a fait son entrée : la **VaR**, soit l'acronyme de ***Value at Risk***. On reconnaissait en effet de plus en plus les limites des mesures traditionnelles du risque. Il fallait se donner des mesures du risque de baisse de la valeur des actifs. Pour ce faire, il fallait trouver des mesures qui sont davantage reliées à l'ensemble de la distribution des flux monétaires d'un portefeuille. C'est dans ce contexte qu'une mesure nominale du risque a été proposée **:** la **VaR**. Cette mesure a d'abord servi à quantifier le risque de marché auquel sont soumis les portefeuilles bancaires. En effet, en ***1997***, l'Accord de ***Bâle*** a imposé aux banques, de détenir un montant de capital réglementaire pour pallier aux risques de marché. Or, ce capital est calculé à partir de la **VaR**. Cette mesure est ensuite devenue de plus en plus populaire pour évaluer le risque de portefeuilles institutionnels ou individuels. Elle permet entre autres d'évaluer les risques de type asymétrique, comme celui qui est associé aux options, l'écart-type et le bêta ne permettant pas de prendre en compte ce risque de façon satisfaisante.

1.3 Typologie des risques :

Voici une liste non exhaustive des différents risques financiers que peut rencontrer un établissement financier **:**

- ***Risque de marché* :** Les risques de marché sont les pertes éventuelles liées aux variations du prix d'une position suite au changement des facteurs déterminant son prix. Par exemple, la volatilité, le cours des actifs financiers à proprement parler, les cours de change ou encore les taux d'intérêts. Autrement dit, c'est l'exposition d'un portefeuille due aux mouvements et aux changements des facteurs du marché.

Définition : Le risque de marché désigne le risque de perte lié à l'évolution des niveaux ou des volatilités des prix de marché. Ces risques peuvent être exprimés sous deux formes **:**

1) ***Risques absolus***, mesurés en unité monétaire.
2) ***Risques relatifs*** exprimés par rapport à un benchmark (*notion de tracking error ou déviation par rapport à un indice*).

❖ ***Risque de crédit* :** Les risques de crédit proviennent principalement de deux sources. *Premièrement*, ils traduisent les risques qu'une contrepartie ne respecte pas ses engagements contractuels (*par exemple, une faillite*). *Deuxièmement*, les risques de crédit comprennent les réductions de valeurs d'instruments financiers émis par des tiers. Autrement dit, c'est l'exposition au risque qu'une contrepartie fasse défaut à ses engagements **:** payer la dette d'un créancier, ou les coupons d'une obligation émise, restructuration de la dette.

Définition : Le risque de crédit désigne le risque de pertes engendrées par une situation dans laquelle les contreparties sont incapables ou ne désirent pas remplir leurs obligations contractuelles.

- ✓ Le risque de crédit peut être exprimé sous forme d'exposition (*exposure*) c'est à dire de montant soumis au risque ou de taux de recouvrement (*recovery rate*) qui désigne la proportion remboursée par l'emprunteur.
- ✓ Dans le cas du risque de crédit, les facteurs de risques sont nombreux **:** statut du défaut (*partiel ou total*), exposition au défaut, et les pertes étant donnée le défaut sont difficiles à calculer.

↳ Ce qui explique que la **VaR** est rarement utilisée en tant que telle dans le domaine de crédit.

❖ ***Risque de liquidité* :** C'est le risque lié à la détention d'un actif peu liquide, ce qui ne permet plus de faire une couverture aux prix du marché, et nécessite une durée beaucoup plus grande pour la liquidation des positions. C'est le cas particulièrement pour le marché des ***OTC*** « *Un marché de gré à gré — ou over-the-counter (OTC) en anglais (hors Bourse) — est un marché sur lequel la transaction est conclue directement entre le vendeur et l'acheteur, c.-à-d. un marché organisé directement entre les opérateurs en dehors des bourses organisées et qui se déroule par des réseaux de télécommunication électroniques* ».

Définition : La notion de risque de liquidité regroupe deux types de risques **:**

1) ***Le risque de liquidité d'actif*** (*asset liquidity risk*) **:** survient lorsque une transaction ne peut pas intervenir au prix prévu du fait de la taille relative de la position au regard du volume des transactions usuelles (*Jorion, 2007*).
2) ***Le risque de liquidité de financement*** (*funding liquidity risk ou cash flow risk)* **:** fait référence à l'impossibilité de faire face à ses obligations de paiement, impliquant des liquidations de position et donc la transformation de pertes "*papier*" en pertes réalisées (*Jorion, 2007*).

❖ ***Risque de modèle* :** Les pertes dues à l'utilisation d'un modèle erroné, ou pas assez précis pour le pricing, et la gestion du risque.

❖ ***Risque opérationnel* :** Les risques opérationnels comportent l'ensemble des pertes liés à une erreur interne aux institutions financières. Prenons l'exemple d'une erreur humaine qui entrainerait des pertes de valeurs. Autrement dit, il comprend un grand nombre de sources de risque, allant de la fraude au risque technologique, au risque lié au changement de législature entre les différentes filières d'une banque dans plusieurs pays. En raison de la diversité et la disparité de ces sources, le risque opérationnel est très difficile à quantifier.

Définition : Le risque opérationnel est le risque qui résulte de processus internes inappropriés, ou de systèmes défectueux ou d'événements externes (*Jorion, 2007*).Les risques opérationnels couvrent notamment **:**

1) ***Risque de modèle*** (*model risk*).
2) ***Risque de personne ou de personnel*** (*people risk*).
3) ***Risque légal*** (*legal risk*).

1.4 Le champ d'application de la gestion des risques :

Un risque se caractérise par sa probabilité d'occurrence, ou fréquence **f**, et par ses effets, ou gravité **G**. On distingue cinq zones de risques sur le diagramme **f x G**, dont les limites – *assez floues* – dépendent de l'appréciation subjective de chacun du risque tolérable.

Figure -2-

1. La zone des risques de fréquence assez élevée et de gravité relativement faible, appelés ***risques de fréquence***. La prévention s'applique à ces risques, dont les exemples ne manquent pas (*risques domestique, sécurité routière, chutes, etc*).

2. La zone des risques de gravité forte et probabilité d'occurrence faible, appelés ***risques de gravité***. Ce sont là les risques de catastrophe, pour lesquels l'assurance joue à plein son rôle.

3. La zone des risques de fréquence et de gravité faibles, dits ***risques négligeables***. Ce sont les petits risques de la vie courante, avec lesquels il nous faut apprendre à vivre.

4. La zone des risques de fréquence et de gravité élevées, dits ***risques inacceptables***. Les situations générant ces risques sont évidemment à éviter **!**

Enfin la zone des risques à fréquence et gravité « *moyennes* » qui constituent le vaste champ d'application de la ***Gestion des Risques***. C'est dans cette zone que les stratégies radicales d'acceptation, d'évitement ou de fatalisme assuré ne s'appliquent plus. C'est ici que l'art du gestionnaire de risque s'exerce **:** par quels moyens, et à quel coût peut-on rendre ces risques acceptables **?** Jusqu'où peut-on aller en termes de dépenses de prévention **?** Quelles sont les techniques les plus adaptées, à la fois en termes techniques (*baisse de la criticité du risque*), mais aussi en termes financiers **?** C'est l'art de peser l'incertitude, de la rendre tolérable, en fait de ne prendre que les risques qui en valent la peine.

1.5 Une source de profit :

Traiter le risque n'est pas une fin en soi. Ce qui compte, c'est trouver l'optimum entre les coûts de traitement et le coût du risque. Le choix d'un programme de gestion des risques se fait donc selon deux critères **:**

• *Un critère technique* **:** quels sont les instruments les plus efficaces pour traiter un risque, compte tenu de la nature de ce risque et de sa gravité présumée **?**

• *Un critère financier* **:** les instruments sélectionnés sont-ils d'un coût raisonnable par rapport à la criticité (*fréquence x gravité*) du risque **?**

La sélection des meilleurs instruments techniques n'est pas suffisante. Il faut aussi savoir choisir les plus économiques. Voyons comment.

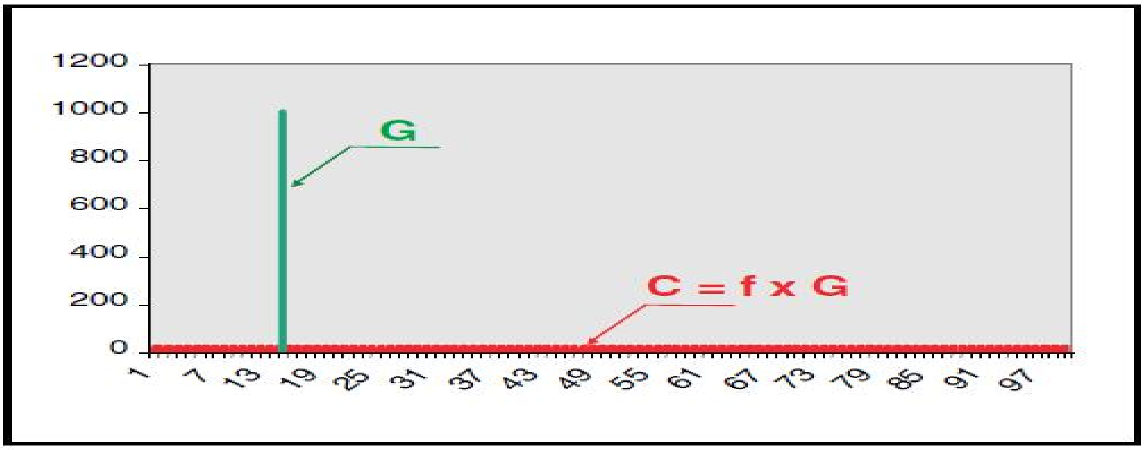


Figure -3-

Un risque se mesure par sa criticité **C**, produit de sa fréquence **f** et de sa gravité **G**. La criticité représente le lissage dans le temps d'une perte **G** qui ne se produira statistiquement qu'avec une fréquence **f**. Sur le long terme, la somme des criticités égale la gravité. En d'autres termes, la criticité représente un flux de ***trésorerie*** négatif « *voir annexe 01* » et virtuel traduisant l'existence d'un risque.

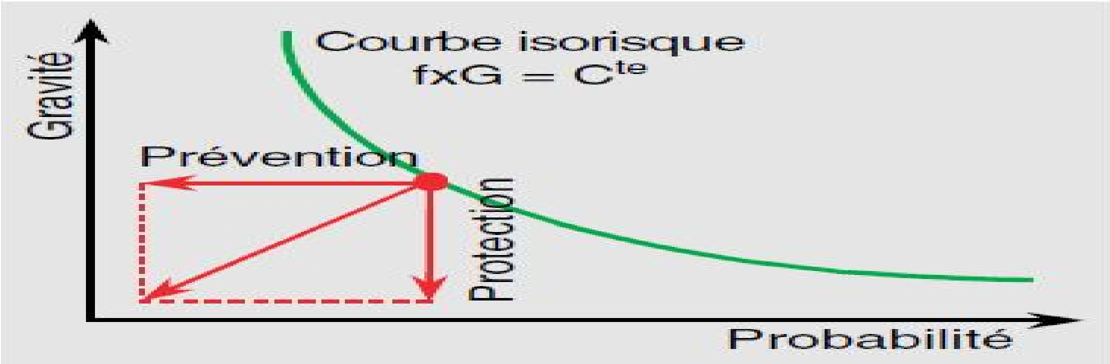


Figure -4-

C'est ce flux de ***trésorerie*** qu'il importe de réduire, soit en réduisant la probabilité d'apparition du risque (*prévention*), soit en limitant ses effets (*protection*). La réduction du conduit à une nouvelle criticité **f' x G'** plus faible que la criticité initiale, la prévention ayant fait chuter la probabilité de **f** à **f' < f** et ayant réduit la gravité de **G** à **G' < G.**

Le flux négatif virtuel de ***trésorerie*** se trouve donc réduit, passant de **C = f x G** à **C' = f' x G'**, ce qui génère évidemment un gain de ***trésorerie*** virtuel égal à **C - C'**.Le risque de perte ayant été réduit, son lissage dans le temps devient lui aussi plus faible.

Ce gain a cependant un coût. Il a fallu prendre des dispositions préventives et protectives, c'est-à-dire investir et accroître les frais de fonctionnement. En terme de ***trésorerie*** et de compte de résultat, ces dispositions représentent une charge annuelle égale à la somme des amortissements des investissements et des frais de fonctionnements liés aux dispositions prises.

Si **I** est l'investissement supposé amorti linéairement sur **n** années, et **FF** les frais de fonctionnement, le coût annuel des dispositions prises est égal à **I/n + FF**.

D'un côté, nous avons gagné **C - C' = (f x G) - (f' x G')**.

De l'autre, nous avons dépensé **I/n + FF**.

Le jeu en valait la chandelle si et seulement si le gain annuel lissé excède le coût annuel moyen, soit si :

(f x G) - (f' x G') > I/n + FF

Cette inéquation résume à elle seule la Gestion des Risques, art de contrôler techniquement et financièrement les incertitudes.

1.6 Les Processus d'implantation du management des risques d'entreprise :

Le management des risques contient trois grands processus .Ces processus permettent d'estimer et de transférer des risques dans le but d'atteindre les objectifs d'une organisation. Ainsi, « *cette approche présente des opportunités qui permettent d'exploiter des éventuels avantages concurrentiels.*» Si ces processus identifient les risques, ils sont utiles aussi pour les évaluer.

1.6.1 Évaluation des risques :

L'évaluation des risques a comme fonction « *d'examiner et de déterminer la probabilité d'occurrence ou de survenance d'un évènement.*» .C'est un processus primordial lors de la prise de décision dans une entreprise. Pour évaluer correctement un risque il faut également mesurer l'importance des effets des événements probables. Ainsi on catégorisera le risque d'un événement en fonction de sa probabilité d'occurrence et de son niveau d'importance. Les risques peuvent être dus à des facteurs externes ou internes.

Les facteurs externes sont les suivants **:**

- *Facteurs d'ordre économique* **:** Changement du niveau de compétition, des forces du marché, de l'économie.
- *Facteurs d'ordre naturel et environnemental* **:** Catastrophes naturelles.
- *Facteurs d'ordre politique* **:** Changement de gouvernement, de législation.
- *Facteurs d'ordre social* **:** Changements démographiques, de priorités sociales.
- *Facteurs d'ordre technologique* **:** Virage technologique.

Les facteurs internes sont les suivants **:**

- *L'infrastructure* **:** Réparations inattendues, problèmes.
- *Le personnel* **:** Accidents de travail, grèves.
- *Les processus* **:** Problèmes de qualité, technologie.

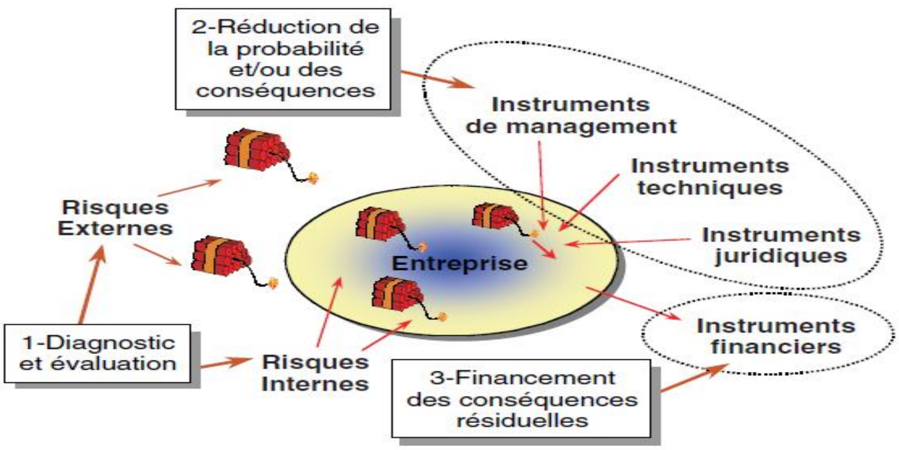


Figure -5-

Pour être capable de bien évaluer un risque, le gestionnaire doit être capable de bien comprendre ce qu'est une décision. Une décision est un choix important à effectuer lorsqu'on fait partie d'une entreprise. Tous les gestionnaires doivent savoir comment bien prendre une décision afin de porter fruit à l'entreprise. Un gestionnaire qui prend toujours de bonnes décisions peut être considéré comme un excellent gestionnaire. Dans le processus de décision, il faut toujours analyser les avantages et désavantages du choix à entreprendre.

De plus, il est aussi important pour le gestionnaire de bien comprendre ce qu'est un risque. Un risque est une action entreprise par une personne en espérant d'avoir un gain mais aussi possibilité de perte. Les risques sont importants dans les entreprises puisqu'ils permettent aux gestionnaires de surmonter des défis. Sans des risques, une entreprise ne peut croître correctement dans ce monde qui est constamment en évolution.

Il faut être capable de bien intégrer la notion de risque ainsi que la notion de décision pour être capable de bien évaluer les risques dans une entreprise.

☞ ***Principales étapes d'évaluation des risques :***

Il y a trois étapes qui sont comprises dans l'évaluation des risques **:**

- *L'identification des facteurs* **:** Permet de se familiariser avec les facteurs qui pourraient causer un problème à l'entreprise. C'est dans cette étape que le gestionnaire doit collecter tout l'information pertinente.
- *Classement par priorité* **:** Consiste à bien classer tout l'information pertinente de chaque facteur et les regrouper avec les facteurs de risques concernés.
- *Classification* **:** Consiste en classifier l'information dans un schéma de classification afin de pouvoir mieux comprendre et analyser les risques de l'entreprise. Ce schéma va permettre de mieux reconnaître les facteurs de risques dans l'entreprise.

1.6.2 La formalisation des risques :

La formalisation des risques consiste la deuxième étape du management des risques. Elle permet d'utiliser les méthodes scientifiques comme les méthodes techniques de recherche opérationnelle.

Ce processus contient quatre étapes **:**

- Modéliser les différentes sources de risques ;
- Lier les sources à des mesures financières ;
- Développer un portfolio des stratégies pour remédier à ces risques ;
- Optimiser les investissements avec ce portfolio des stratégies.

1.7 Identification et quantification des risques :

Il n'existe pas de méthode infaillible d'identification des incertitudes. L'humilité est la règle et toute prétention à l'exhaustivité est vaine. L'expérience montre cependant que des méthodes existent. Elles se classent en trois grandes catégories **:**

- Risques associés aux fonctions.
- Risques associés aux processus.
- Risques associés aux ressources.

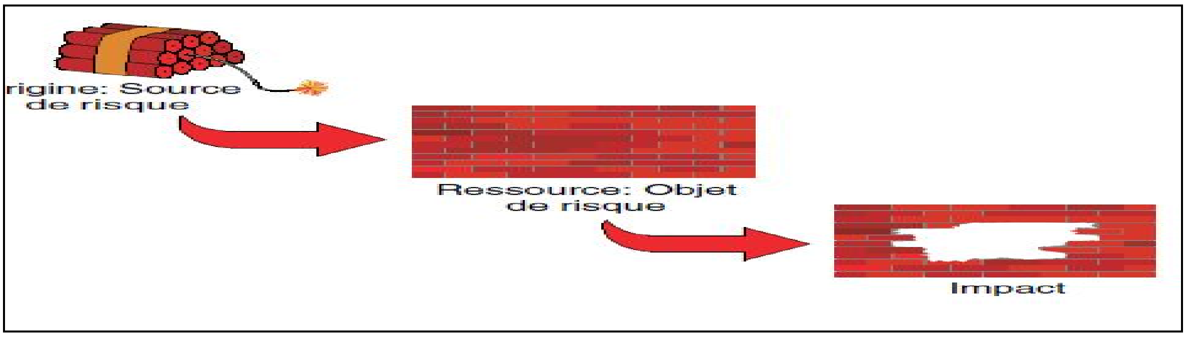


Figure -6-

On remarque tout d'abord que ces méthodes identifient les risques en fonction des cibles (*objets de risque*), et non pas des sources de risque. Un risque qui n'a pas d'impact sur une fonction ou une ressource de l'entreprise n'a pas d'intérêt à être identifié. Ceci exclut donc les méthodes laborieuses d'identification de tout ce qui peut se produire avant d'analyser les impacts de ces risques sur l'entité concernée.

Les méthodes qui identifient les risques par fonctions ou par processus sont assez voisines. L'entité est analysée selon son organisation (*direction, commercial, ressources humaines, finances, systèmes d'information, production...*) ou décomposée en processus principaux associés aux métiers et à la stratégie, puis en sous-processus suffisamment fins pour être analysés. Par exemple, le processus de production se compose des achats, des stocks, de la logistique, des méthodes, de la maintenance, de la production elle-même, etc.

Les risques sont alors identifiés en terme de dysfonctionnement des sous-processus, selon des méthodes inductives qui consistent à identifier des sous-ensembles matériels, fonctionnels, géographiques, organisationnels, etc.

On distinguera les processus contribuant directement (*processus productifs*) ou indirectement (*processus fonctionnels*) aux objectifs fondamentaux, en distinguant par ailleurs les processus continus et les processus discrets.

Un ***processus est continu*** lorsqu'il ne peut être décomposé en opérations élémentaires et que ses différentes composantes concourent ensemble à l'élaboration progressive d'un produit simple. La production d'un tel processus se mesure en quantité (volume, poids, etc.) par unité de temps. Les processus productifs industriels continus les plus connus concernent les industries dites de process (*chimie, pétrochimie, industries sucrière, papeteries, cimenteries, etc.*).

Les ***processus fonctionnels*** continus concernent surtout la production et la distribution des fluides, des énergies, mais on pourra aussi qualifier de processus continus la logistique amont ou aval, le traitement de l'information ou la formation du personnel.

Un ***processus est discret*** lorsqu'il se décompose aisément en un ensemble d'opérations élémentaires successives ou concomitantes permettant la production en série de produits composés. La production se mesure ici en nombre de pièces par unité de temps.

Les industries manufacturières traditionnelles utilisent essentiellement des processus discrets.

1.8 La gestion du risque :

La gestion du risque permet à une organisation de s'assurer qu'elle connaît et comprend les risques auxquels elle s'expose. La gestion du risque amène également l'entreprise/organisme à dresser et à mettre en œuvre un plan destiné à prévenir les sinistres ou à en réduire l'incidence. Un plan de gestion du risque comprend des stratégies et des techniques visant à reconnaître ces menaces et à les endiguer.

1.8.1 Stratégies de gestion du risque :

On pourra utiliser un graphe de ***Kiat*** tel que celui présenté ci-dessous, sur lequel des cercles concentriques définissent les zones d'acceptation ou de non acceptation du risque.

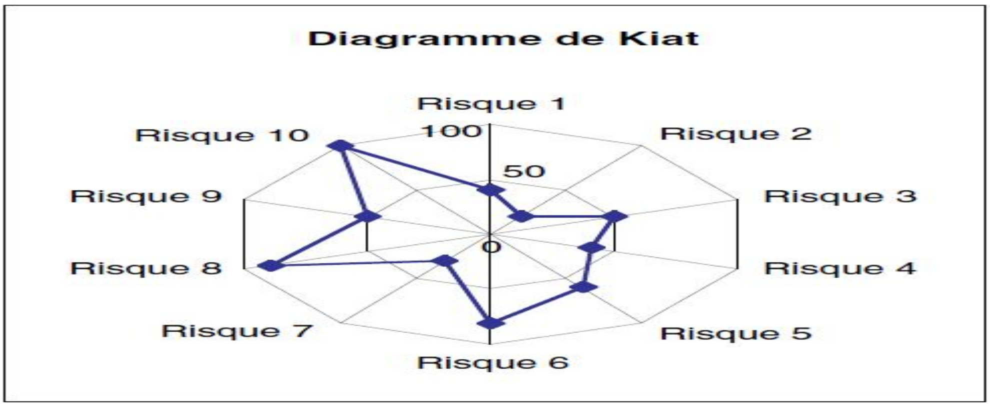


Figure -7-

Les risques étant classés en fonction de leur criticité vient le temps de la phase **:** leur traitement. L'objectif n'est pas de supprimer tous les risques potentiels afférents au projet, mais de définir et mettre en œuvre des dispositions appropriées à chaque « *risque inacceptable* » afin de les ramener à un niveau acceptable, voir à un niveau nul. Cela nécessite donc de définir et de mettre en œuvre, risque par risque.

Réduire un risque, c'est soit réduire sa probabilité d'occurrence (*prévention*), soit réduire ses conséquences (*protection*). Pour cela, on peut utiliser, seuls ou en combinaison :

- ***Des instruments techniques* :**
  - De prévention, tels que des détecteurs, des équipements de sécurité, des contrôles d'accès,
  - De protection, tels que des murs coupe-feu, des stockages cloisonnés, des équipements de protection individuels, des sauvegardes informatiques, des stocks de pièces détachées ou de produits finis, la partition des moyens, voire leur duplication (*exemple : back-up informatique*),

- ***Des instruments d'organisation* :**
  - De prévention, par exemple des procédures opératoires, des consignes de sécurité, l'externalisation de certaines fonctions, la formation redondante,
  - De protection, tels que des plans de sauvegarde ou de survie, des fournisseurs redondants,

- ***Des instruments juridiques*** **:** tels que des clauses contractuelles de limitation de responsabilités, des contrats de travail.

Ces instruments se classent en sept (***07***) catégories **:**

7 instruments de réduction :
1 – Suppression du risque (f=0)
2 – Prévention (f ↘)
3 – Protection (G ↘)
4 – Ségrégation par partition (G ↘)
5 – Ségrégation par duplication (G ↘)
6 – Transfert contractuel (f ↘)
7 – Stratégies aval (G ↘)

- ***La Suppression (f = 0)*** **:** Traitement radical, la suppression (*ou évitement*) élimine le risque par renoncement à une activité à laquelle ce risque est associé. La suppression agit donc sur la fréquence, qu'elle annule.

Cet instrument n'est pas aussi absurde qu'il peut paraître de prime abord. En effet, l'analyse des risques pesant sur une activité, en particulier une activité nouvelle, peut conduire à son abandon, s'il apparaît que les pertes potentielles sont supérieures aux gains escomptés. Combien de projets n'auraient-ils pas été abandonnés si une telle analyse avait été faite **!** Il est en effet rare qu'une décision – *même vitale pour l'entreprise* – soit prise après une étude objective du caractère aléatoire des paramètres qui conditionnent sa réussite.

La suppression peut ne concerner qu'une partie d'un processus. On peut par exemple abandonner un procédé au profit d'un autre, déplacer une activité sur un autre site, renoncer à la commercialisation d'un produit sur un marché où la contrefaçon est trop à craindre, etc.

- ***La Prévention (f ↘)*** **:** la prévention agit sur la probabilité d'occurrence d'un événement dommageable. En général, ces mesures sont prises pour des événements ayant une fréquence assez importante. Elles agissent sur l'un au moins des événements de la chaîne conduisant à l'événement dommageable.

- ***La Protection (G↘)*** **:** La protection vise à limiter les conséquences d'un sinistre. On distingue deux types d'instruments de protection **:**

• Ceux qui sont mis en place et actifs avant le sinistre ;
• Ceux qui sont mis en place mais ne sont activés qu'au moment du sinistre.

- ***La ségrégation par partition (G ↘)*** **:** Cet instrument de réduction des risques consiste à ne pas « *mettre tous ses œufs dans le même panier* ». Par exemple **:**

• Couper un stockage en deux parties distinctes séparées par un mur coupe-feu, voire dans deux bâtiments différents,
• Produire avec deux machines de plus faible capacité plutôt qu'avec une seule de capacité double,
• Fabriquer un même produit sur différents ateliers, voire différentes usines,
• Ne pas s'approvisionner auprès d'un seul fournisseur,
• Ne pas mettre les sauvegardes informatiques à côté des ordinateurs,
• Ne pas faire voyager toute une équipe dans le même avion.

Bien entendu, un sinistre affectera néanmoins l'entreprise, puisque la totalité des ressources est nécessaire, mais la perte sera moindre. Par ailleurs, la ségrégation par partition a un coût, par perte d'économie d'échelle, et par des frais de fonctionnement généralement plus élevés. Il importe donc de bien peser les avantages et les inconvénients de cet instrument avant de le mettre en œuvre.

- ***La ségrégation par duplication*** ***(G ↘)*** **:** Au contraire de la ségrégation par partition, la ségrégation par duplication permet d'annuler totalement les conséquences d'un sinistre, puisque le « double » n'entre en service que lorsque la ressource dupliquée est hors d'usage. Le cas le plus fréquent de ségrégation par duplication se trouve dans le domaine informatique, où l'on n'hésite pas à maintenir inactif un « miroir » du système informatique en service, compte tenu des conséquences estimées d'une interruption du traitement de l'information, mais aussi du coût sans cesse décroissant des matériels informatiques.

Cette technique de réduction des risques est utilisable dans bien d'autres domaines. Par exemple :

- Ne pas concentrer le savoir-faire entre les mains d'une seule personne, mais imposer sa documentation et sa diffusion,
- Avoir des pièces de rechange d'avance, voire dupliquer l'outil de production,
- Avoir plus de véhicules que nécessaire,
- Qualifier plus de fournisseurs que nécessaire.

Compte tenu de son coût d'immobilisation de ressources non productives, la ségrégation par duplication se justifie particulièrement dans le cas de risques de forte gravité.

- ***Le transfert contractuel pour réduction*** ***(f ↘)*** **:** Instrument qui peut apparaître machiavélique, le transfert contractuel pour réduction consiste à faire prendre le risque par une autre entité juridique qui exécute une prestation ou fournit un produit en lieu et place de l'entité ayant ainsi transféré le risque. Le risque est réduit lorsque le prestataire est plus compétent dans le domaine concerné que l'entreprise elle-même. On peut alors espérer que sa gestion des risques spécifiques à son métier sera meilleure et que les sinistres seront moins importants ou moins nombreux, et en tous cas totalement supportés par le prestataire.

Les risques ne sont cependant pas éliminés. En effet, certains risques sont transférés sur le prestataire, mais ils existent toujours. Ils peuvent même parfois revenir frapper l'entité qui croyait s'en être débarrassée, en particulier lorsque cette entité est plus importante, et donc plus responsable et plus solvable que le prestataire, et que des dommages aux personnes ou au bien public ont été causés par ce dernier.

- ***Les stratégies de crise*** ***(G ↘)*** **:** Les stratégies de crise sont évidemment des instruments de réduction des risques. Elles sont sans effet sur la fréquence et n'agissent que sur la gravité. Ce sont des instruments très puissants, mais malheureusement peu souvent envisagés avant le sinistre. Ce n'est que lorsque l'entreprise est en situation de crise qu'elle essaye – *dans la panique* – de trouver les moyens d'en limiter les effets induits et qu'elle n'avait pas envisagés.

Les stratégies de crise doivent être élaborées à froid, sur des scénarios recensés et hiérarchisés, en donnant bien entendu priorité aux sinistres de gravité pour lesquels la réduction des conséquences prend tout son sens, et sans prendre en compte les assurances, dont les effets – *exclusivement financiers* – ne se feront généralement sentir que bien après que la crise soit calmée.

Elles comportent quatre volets complémentaires **:**

1. ***Le Plan de Secours*** **:** Il s'agit de l'ensemble des dispositions devant immédiatement être prises pour limiter les impacts du sinistre. Selon la nature de ce dernier, ce pourra être des mesures de lutte contre le feu, un rappel des produits défectueux, la mise en place d'une cellule de gestion de crise, la recherche rapide des causes du sinistre, etc.

2. ***Le Plan de Redéploiement Temporaire*** **:** Souvent oublié, il consiste à définir les objectifs immédiats de l'entreprise, affaiblie par le sinistre, et ne pouvant de ce fait remplir tous ses objectifs antérieurs. Ce sera en particulier l'abandon temporaire de certaines activités ou de certains clients au profit d'activités ou de clients jugés plus importants. Dans certains cas, ce plan peut déboucher sur une décision stratégique durable.

3. ***Le Plan de Redémarrage*** **:** Il rassemble l'ensemble des moyens humains et techniques, et les dispositions d'organisation devant permettre de satisfaire le Plan de Redéploiement Temporaire.

4. ***Le Plan de Communication*** **:** Pour être efficace et crédible, l'ensemble des mesures prises doit être expliqué en interne (*salariés*) comme en externe (*autorités, médias, clients, fournisseurs*).

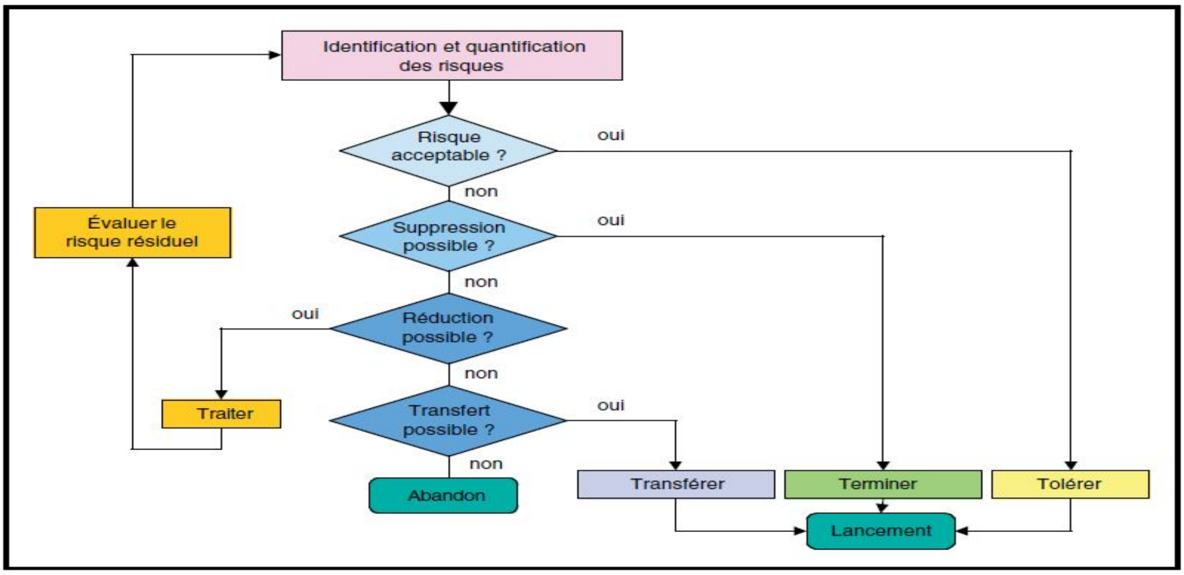


Figure -8-

Enfin, toutes les mesures de réduction seront classées dans « *un plan de réduction de risque* » et assignés d'un pilote, d'un budget (*s'il y a lieu*), d'une date objectif de fin de réalisation, d'un niveau de risque initial ainsi que celui escompté à l'issue des corrections apportées, de remarques... Parmi les mesures de contrôle du risque, on n'oubliera pas **:**

• Le transfert contractuel pour réduction, permettant de réduire le risque en transférant l'activité concernée à un partenaire plus compétent,

• Le transfert contractuel permettant de faire partager tout ou partie des conséquences du risque à un tiers impliqué dans le projet.

En dernier recours, lorsque le risque ne peut être ramené à un niveau acceptable, il y aura lieu d'envisager de le refuser, c'est-à-dire renoncer au projet sous sa forme envisagée.

Dans le cas où le projet est lancé, il est alors nécessaire de suivre le plan de gestion des risques décidé en amont, afin de **:**

• Vérifier que les mesures de traitement sont prises et efficaces, en particulier lorsque l'expérience fait apparaître que leur quantification initiale (*fréquence et gravité*) doit être revue,

• Identifier de nouveaux risques,

• Surveiller le déclenchement des évènements redoutés afin de réagir le plus rapidement possible,

• Alimenter le retour d'expérience.

Ce dernier point est particulièrement important. En effet, la capitalisation de l'expérience facilite l'identification des risques des projets ultérieurs, mais fournit aussi des informations très précieuses sur la quantification de ces risques. Ce retour d'expérience est encore plus important en ce qui touche les risques humains et organisationnels qui sont mal répertoriés.

Cependant, la capitalisation d'expérience reste exceptionnelle pour plusieurs raisons **:**

• La formalisation du retour d'expérience a un coût que le chef de projet répugne à supporter alors que son projet est achevé,

• Les acteurs du projet sont réaffectés à d'autres missions dès la clôture du projet et n'ont pas le temps de rédiger les documents,

• Les rapports de fin de projet ne sont pas lus,

• Il est toujours difficile pour le chef de projet, d'admettre que des incidents – *assimilables à des erreurs* – se sont passés sur son projet.

Cette capitalisation doit donc être financièrement détachée du projet, et confiée à une entité fonctionnelle (*audit interne par exemple*) qui développera les méthodes d'analyse (*interview des acteurs*) et les supports de capitalisation (*base de données documentaires*) qui lui sont nécessaires.

1.9 Avantages de la gestion du risque :

La gestion du risque permet de recenser les risques de façon claire et structurée. Une organisation qui comprend clairement tous les risques auxquels elle est exposée peut les jauger et les classer en ordre de priorité et prendre les mesures appropriées pour réduire les pertes. La gestion du risque comporte d'autres avantages pour l'entreprise / organisme, notamment **:**

- Économiser les ressources **:** le temps, l'actif, le revenu, les biens et les personnes sont toutes d'importantes ressources que l'on peut économiser en réduisant au minimum les sinistres.
- Protéger la réputation et l'image publique de l'entreprise.

- Prévenir ou réduire la responsabilité légale et accroître la stabilité des opérations.
- Protéger les personnes contre les blessures.
- Protéger l'environnement.
- Améliorer la capacité de l'entreprise / organisme à se préparer à diverses situations.
- Réduire la responsabilité civile et professionnelle.
- Contribuer à définir clairement les besoins d'assurance.

2/ La variance comme mesure de risque ?

2.1 *Le risque en statistique :*

En statistique inférentielle l'objectif général est de prendre une décision. Pour cela, on se base sur un critère $\boldsymbol{\theta}$ inconnu, mais que l'on peut estimer. Mais afin de juger de la pertinence de la prise de décision, on se donne classiquement une fonction de coût, ***L***, définie comme une fonction associant à un couple ($\boldsymbol{\theta}$, ***d***) une grandeur réelle. Cette fonction $\boldsymbol{L} : \boldsymbol{\Theta} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ a pour objectif d'associer une pénalité, à la prise de décision **d** lors que le paramètre (*ou le critère de décision*) prend la valeur $\boldsymbol{\theta}$. On peut aussi voir cette fonction de coût comme une *erreur*.

Il est possible de relier ce coût à une espérance d'utilité. L'utilité est alors une mesure de proximité entre la décision ***d*** (*correspond en statistique à l'estimation* $\hat{\boldsymbol{\theta}}$) et la vraie valeur $\boldsymbol{\theta}$. On introduit alors également une fonction de coût moyen, ou de risque,

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta}\ ,\ \boldsymbol{d}) = \mathbb{E}\left[L\left(\theta\ , d(X)\right)\right] = \int L\left(\theta\ , d(x)\right) f_{\theta}(x)dx$$

Où la règle de décision est ***d(x)***, pour chaque résultat d'une expérience aléatoire. La fonction de coût la plus classique est celui introduit par ***Legendre*** et ***Gauss***, à savoir le *coût quadratique*,

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\theta}\ ,\boldsymbol{d}) = [\ \theta - d]^2$$

↳ On en déduit un critère usuel de mesure d'incertitude associé à un estimateur $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, le ***mean square error***,

$$mse(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbb{E}\left[\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2\right] = \mathrm{Var}\left(\hat{\theta}\right) + \left(biais\left(\hat{\theta}, \theta\right)\right)^2$$

Aussi, pour un estimateur sans biais, c'est la ***Variance*** que permet de quantifier l'erreur associée à cette estimation.

2.2 Le risque en finance :

L'idée précédente a été reprise par ***Harry Markowitz*** dans les années ***50*** dans le contexte de la gestion de portefeuilles. Il visait à prendre en compte l'effet de diversification que recherche les investisseur, en montrant que les investisseurs construisent de façon optimale les portefeuilles efficients en minimisant le risque, mesuré par la variance, pour un niveau de rendement espéré. Il y a généralement deux manières de justifier cette approche. Classiquement, dans la théorie de l'espérance de l'utilité.

Les agents cherchent à maximiser l'espérance d'utilité du rendement de leur portefeuille ***X***, $\mathbb{E}\,(u(\mathbf{X}))$. Or si les variations de rendements sont faibles, on peut effectuer un développement limité, en posant :

$$\mathbf{X} = \mathbb{E}\,(X) + \varepsilon \text{.....et}$$

$$u(\mathbf{X}) \approx u(\mathbb{E}(X)) + u'(\mathbb{E}(X))\,\varepsilon + \frac{u''(\mathbb{E}(X))}{2}\,\varepsilon^2$$

Soit, en prenant l'espérance **:**

$$\mathbb{E}\,(u(\mathbf{X})) \approx u(\mathbb{E}(X)) + \frac{u''(\mathbb{E}(X))}{2}\,\mathrm{Var}(X)$$

Car par construction : ε est centré c.-à-d. $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$ et $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}\,(\varepsilon) = \mathbb{E}(\varepsilon^2)$

Si l'agent est averse au risque, son utilité sera concave, $u'' \leq 0$, et il pénalisera les investissements risqués, au sens où leur variance sera trop importante.

La seconde approche consiste à supposer les rendements gaussiens $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, et que les agents ont une aversion absolue pour le risque constante *« Constant Absolute Risk Aversion »* (*CARA*), c'est à dire une utilité exponentielle, $u(\mathbf{X}) = -\exp[-\theta x]$.

$$\Rightarrow \mathbb{E}\,(u(\mathbf{X})) = \mathbb{E}(-\exp(-\theta x)) = -\exp(-\theta\,\mathbb{E}(X)) + \frac{\theta^2}{2}\,\mathrm{Var}(X)\,,$$

qui tendra là aussi à pénaliser les investissements trop risqués, au sens de la variance.

- ***Remarque 1 :***

> On s'intéresse souvent aux mesures de risque monétaires, i.e. dans la même unité que **X**. On préfèrera alors l'écart-type à la variance.

- L'idée que le risque peut être quantifié à l'aide d'une variance est associé à l'idée de mutualisation de l'activité d'assurance.

Si $S_n = X1 + \cdot \cdot \cdot + X_n$ désigne la charge total payée sur **n** polices d'assurance sur une année le théorème central limite garantie que **:**

$$\frac{S_n - n\mathbb{E}(X_i)}{\sqrt{n}\ \sqrt{Var(X_i)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

i.e. en multipliant par **4** la taille du portefeuille, on multiplie par **4** le chiffre d'affaire (*les primes étant souvent proportionnelles à* $\mathbb{E}(\boldsymbol{X_i})$), mais le risque (correspondant à l'écart-type) n'est multiplié que par **2**.

↳ Intérêt à la mutualisation des risques sur des portefeuilles aussi grands que possibles.

Mais pour reprendre ce dernier exemple, on peut montrer que la variance (ou l'écart-type) ne peut pas être suffisant pour mesurer le risque. ***Paul Samuelson*** raconte une histoire intéressante à ce sujet, il propose le jeu suivant, de pile ou face **:** gain de ***200*** si pile et perte de ***100*** si face. On décide à l'avance du nombre de lancers **n** que l'on fera.

$$\textbf{Var}\ (X_n) = \frac{300^2}{4n} \to 0\ lorsque\ n \to \infty$$

- ***Remarque 2 :***

Avec ***n* = *100*** lancers, $\mathbb{P}(X_{100} > 0) = \mathbb{P}$ (***34*** pile sur ***100*** lancers) $\approx$ 99.91%.
Mais personne n'est prêt à pour en jouer ***n* = *100*** parties.

3/ De la comparaison des risques aux mesures de risques :

- ***Remarque 3 :***

Des propriétés sur un préordre $\preceq$ de comparaison entre risques permettaient de construire une *mesure de risque* $\mathcal{R}$, au sens où **:**

X $\preceq$ Y $\Leftrightarrow$ $\mathcal{R}$ (X) $\leq$ $\mathcal{R}$ (Y) « *Comme l'a montré **J.M. Tallon*** ».

- ***Théorème 1 :***

$\preceq\ \subset L \times L$ satisfait les ***3*** axiomes de préordre complet et transitif, de continuité et d'indépendance si et seulement si il existe $\mathcal{U}$ **:** X $\to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $\mathbb{P},\mathbb{Q} \in L$

$$\mathbb{P} \succsim \mathbb{Q} \quad \text{ssi} \quad \sum_{x\in X} P(x)\,\mathcal{U}(x) \geq \sum_{x\in X} Q(x)\,\mathcal{U}(x)$$

De plus, $\mathcal{U}$ est unique à une transformation affine positive près.
$\preceq$ peut être caractérisé par $\mathcal{R}$(X) $= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathcal{U}\ (X))$, où $\mathcal{U}$ est une fonction d'utilité (***von Neumann et Morgenstern***).

- ***Théorème 2 :***

$\preceq$ satisfait P1 à P7 si et seulement si il existe une mesure μ sur S et une fonction non constante, bornée $\mathcal{U} : X \to \mathbb{R}$ tels que, pour tout f et g

$$f \succeq g \Leftrightarrow \int_s \mathcal{U}\,(f(s))d\,\mu(s) \geq \int_s \mathcal{U}\,(g(s)d\,\mu\,(s)$$

μ est unique et $\mathcal{U}$ est définie à une fonction linéaire positive près.

Sous l'axiomatique de ***Savage***, il existe μ (*ou* $\mathbb{Q}$, *dite subjective*) telle que $\mathcal{R}\,(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\,(\mathcal{U}\,(X))$.

- ***Remarque 4 :***

- **X** désigne un montant de *perte*.
- $\mathcal{R}\,(X)$ est le *capital* à détenir pour faire face aux pertes X.
  De grandes valeurs de $\mathcal{R}\,(X)$ indiqueront que **X** est "*dangereux*".

4/ Approche axiomatique des mesures de risques et mesures de risques usuelles :

- ***Définition 1 :***

Une mesure de risque est une fonction définie sur l'espace des variables aléatoires, et prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Invariance en loi, $X = Y \Rightarrow \mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(Y)$,
- Croissance $X \geq Y \Rightarrow \mathcal{R}(X) \geq \mathcal{R}(Y)$,
- Invariance par translation $\forall k \in \mathbb{R}, \Rightarrow \mathcal{R}(X + k) = \mathcal{R}(X) + k$,
- Homogénéité $\lambda \in R_+$, $\mathcal{R}(\lambda X) = \lambda \cdot \mathcal{R}\,(X)$,
- Sous additivité $\mathcal{R}(X + Y) \leq \mathcal{R}(X) + \mathcal{R}(Y)$,
- Convexité $\forall\, \beta \in [0, 1]$, $\mathcal{R}(\beta\lambda X + [1 - \beta]Y) \leq \beta \cdot \mathcal{R}(X) + [1 - \beta] \cdot \mathcal{R}\,(Y)$.

- ***Remarque 5 :***

En science actuarielle, les mesures de risques ont été introduite sous le nom "*premium principles*",

- ***Proposition 1 :***

Si $\mathcal{R}$ est invariante par translation $\mathcal{R}\,(X - \mathcal{R}\,(X)) = 0$.

- ***Définition 2 :***

- Une mesure de risque est dite ***monétaire*** si elle est monotone et invariante par translation.
- Une mesure de risque est dite ***convexe*** si elle est monétaire et convexe.
- Une mesure de risque est dite ***cohérente*** si elle est monétaire, homogène et sous-additive.

- ***Définition 3 :***

Si $\mathcal{R}$ est une mesure de risque, on définie la ***région de risques*** acceptables pour la mesure $\mathcal{R}$ comme **:**

$$\mathcal{A} = \{X, \mathcal{R}(X) \leq 0\}.$$

Réciproquement, si $\mathcal{A}$ est une région de risques acceptables, la mesure de risque induite $\mathcal{R}$ est **:**

$$\mathcal{R}(X) = \inf\{m, X - m \in \mathcal{A}\}.$$

- ***Proposition 2 :***

  - ✓ Si $\mathcal{R}$ est une mesure de risque monétaire alors $\mathcal{R}$ est convexe si et seulement si $\mathcal{A}$ est convexe.
  - ✓ Si $\mathcal{R}$ est une mesure de risque monétaire alors $\mathcal{R}$ est positivement homogène si et seulement si $\mathcal{A}$ est un cône.

Preuve :

- ✓ Pour le premier point, trivialement si $\mathcal{R}$ est convexe, alors $\mathcal{A}$ est convexe. Réciproquement, si $\mathcal{A}$ est convexe, soient $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$, $\boldsymbol{m_1}$ et $\boldsymbol{m_2}$ tels que $\mathbf{X_i} - \boldsymbol{m_i} \in \mathcal{A}$, pour $\boldsymbol{i = 1, 2}$. Par hypothèse, pour tout λ, $\lambda\,[X_1 - m_1] + (1-\lambda)[X_2 - m_2] \in \mathcal{A}$, c'est à dire que $\mathcal{R}\,(\lambda\,[X_1 - m_1] + (1-\lambda)[X_2 - m_2]) \leq \mathbf{0}$, soit, par la propriété d'invariance par translation, et par monotonie,

$$\mathcal{R}\,(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \leq \lambda m_1 + (1-\lambda)m_2\,,$$

et ceci pour tout $\boldsymbol{m_1}$ et $\boldsymbol{m_2}$. Il suffit de le faire pour $\boldsymbol{m_i} = \mathcal{R}\,(X_i)$.

- ✓ Pour le second point, si $\mathcal{A}$ est un cône, alors pour tout $\mathbf{X} - \boldsymbol{m} \in \mathcal{A}$, $\lambda\,(X - m) \in \mathcal{A}$, pour tout $\lambda > \mathbf{0}$. Donc $\mathcal{R}\,(\lambda X - \lambda m) \leq \mathbf{0}$, d'où $\mathcal{R}\,(\lambda X) \leq \lambda m$. Si $\boldsymbol{m} = \mathcal{R}\,(X)$, on en déduit que $\mathcal{R}\,(\lambda X) \leq \lambda \mathcal{R}\,(X)$. Et si $\mathbf{X} - \boldsymbol{m} \notin \mathcal{A}$, alors $\lambda\,(X - m) \notin \mathcal{A}$, et $\mathcal{R}\,(\lambda X) > \lambda m$. On fait alors tendre $\boldsymbol{m}$ vers $\mathcal{R}\,(X)$ pour avoir le résultat souhaité.

5/ Chargement de sécurité :

La notion de chargement de sécurité est étroitement liée à celle de tarification **:** un principe de prime contient un chargement de sécurité s'il conduit à exiger une prime supérieure à celle qui est exigée si la mutualisation des risques est parfaite (*cf.* ***PARTRAT** et **BESSON [2004]***).

Définition **:** Une mesure de risque $\mathcal{R}$ contient un chargement de sécurité si pour tout risque **X**, on a :

$$\mathcal{R}(X) \geq E[X]$$

Nous verrons dans la suite qu'une *Tail-Value-at-Risk* (***TVaR***), lorsqu'elle existe, contient un chargement de sécurité ce qui n'est pas le cas d'une *Value-at-Risk* (***VaR***).

6/ Principales mesures de risque :

Les *mesures de risques* sont des outils de quantification de risque. Elles permettent d'évaluer un niveau de dangerosité d'un risque mais également de comparer différents risques entre eux et de les classer selon le niveau de dangerosité. Quantification et comparaison des risques peuvent ensuite être utilisées à plusieurs fins telles que **:** l'évaluation de prime, l'allocation de capital, la détermination de marges pour les transactions financières ou encore la sélection des risques d'un portefeuille d'assurance ou de réassurance.

Définition **:** Une mesure de risque $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{X})$ est une fonctionnelle $\boldsymbol{\rho}$ qui attribue une valeur réelle à la variable aléatoire **X** des pertes associées à un risque telle que :

$$\boldsymbol{\rho}: \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Nous présentons ici celles qui sont principalement étudiées dans la littérature mais également utilisées en pratique.

6.1 L'écart-type et la variance :

Ce sont les premières mesures de risque à avoir été utilisées ; on les retrouve notamment dans le critère de ***Markowitz*** (*moyenne-variance*) qui sert de socle aux premières théories d'évaluation des actifs (*MEDAF*). Toutefois ce critère n'est pas bien adapté à l'activité d'assurance, notamment parce qu'il est symétrique et pénalise autant les « *bonnes variations* » que les « *mauvaises* ».

6.2 Probabilité de Ruine :

- ***Ruine*** = Survenance d'un scénario défavorable, insolvabilité, impossibilité de faire face à ces engagements.
- ***Modèle de ruine*** = Modélisation l'évolution de la richesse de la compagnie par un processus stochastique.
- ***Probabilité de ruine*** = Probabilité de survenance de la ruine soit en horizon fini ou sur un horizon infini.

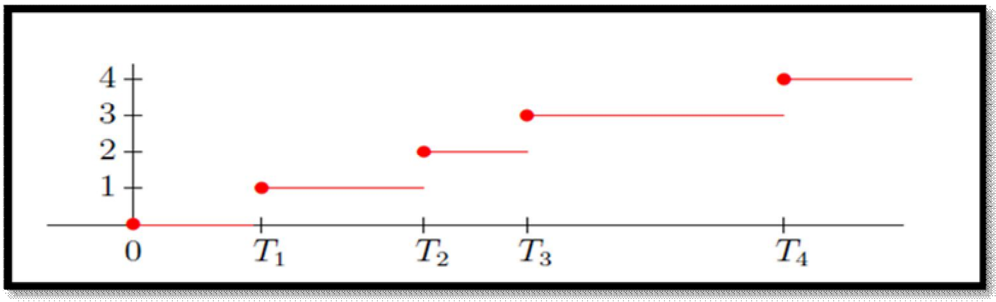
6.2.1 Introduction :

Une compagnie assure un certain type de risque (*incendie, vol, automobile, etc.*). Elle touche régulièrement les primes que paient ses clients, et rembourse les sinistres au fur et à mesure qu'ils se produisent (*ou qu'ils sont déclarés*). La compagnie dispose de plus d'une certaine réserve de capital.

Introduisons maintenant les notations mathématiques. Les sinistres se produisent à des dates $\mathbf{T_1 = 0 < T_1 < \cdots < T_n < \ldots}$ On note $\{\tau_n,\ n \geq 1\}$ la suite des intervalles entre deux sinistres, définis par $\tau_n = \mathbf{T_n - T_{n-1}},\ \mathbf{n \geq 1}$, appelés aussi les inter-arrivées. Le i$^{\text{ème}}$ sinistre se produisant (*ou étant déclaré*) à la date **i** a un coût pour la compagnie d'assurance $\mathbf{X_i}$. Le nombre de sinistres à la date **t** est note **N(t)**. Il est lié aux dates des sinistres par la relation **:**

$$N(t) = n \iff T_n \leq t < T_{n+1} .$$

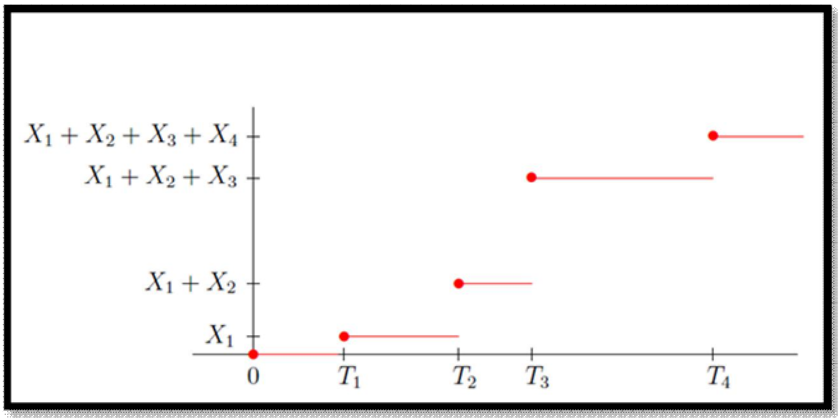
La fonction N(t)



Le coût total pour la compagnie des sinistres ayant eu lieu à la date **t**, noté **S(t)** est donc donné par la relation **:**

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \ ,$$

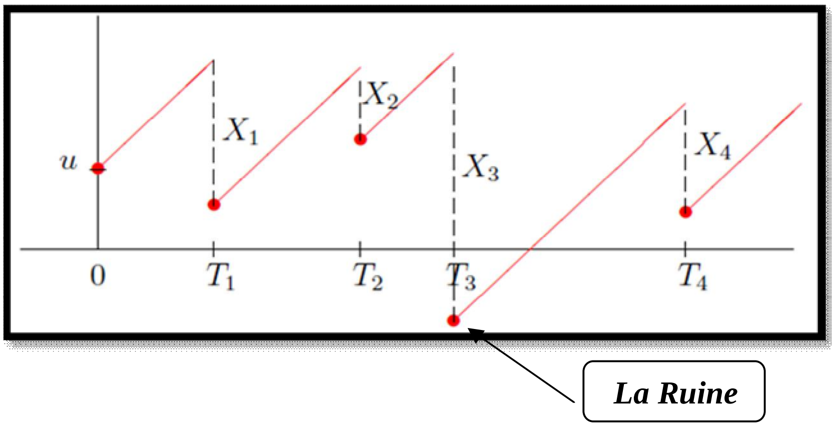
La fonction S(t)



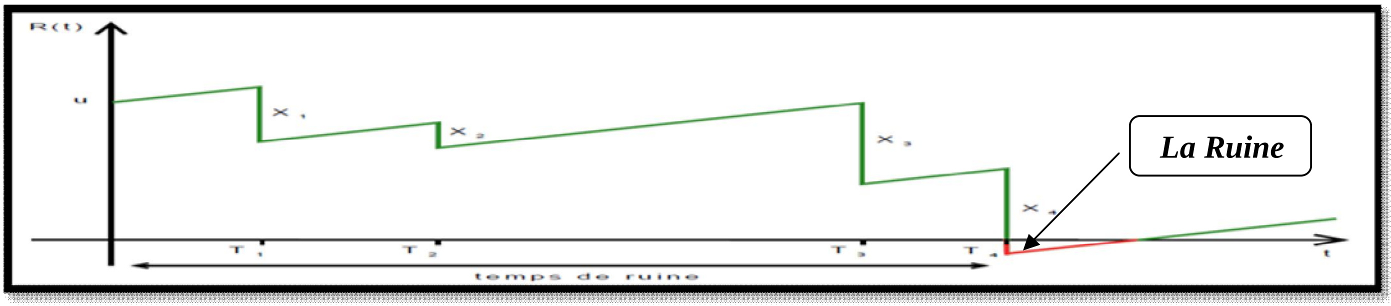
Si l'on considère la richesse de la compagnie à la date **t**, les remboursements doivent être comptés négativement, et les primes payées s'ajoutent au capital initial noté ***u***. Dans ce modèle à temps continu, on considère que les primes sont payées continûment. Si le taux de prime est **c**, le montant payé par les clients à la date **t** est $\mathbf{c_t}$. La richesse de la compagnie à la date **t** est donc :

$$W(t) = u + ct - S(t) \ .$$

La fonction W(t)



La problématique fondamentale pour une compagnie d'assurance est d'être en mesure d'effectuer les remboursements. Si `a un instant donné la compagnie ne dispose pas du montant suffisant pour effectuer un remboursement, on dira qu'elle est ***ruinée***. On voit sur la figure précédente que la ***ruine*** est atteinte à l'instant **T_3.**



6.2.2 Processus de Poisson :

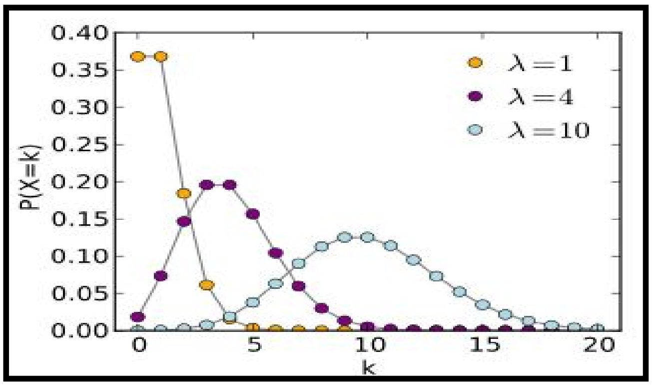
Définition « Loi exponentielle» **:** Une variable aléatoire réelle **X** suit une *loi* ***exponentielle*** de paramètre λ> 0 si sa densité est donnée par **:**

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0\,. \end{cases}$$

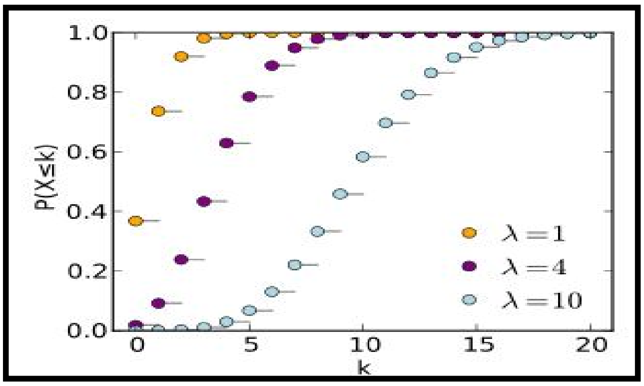
Définition « Loi de Poisson » **:** La loi de ***Poisson*** « *parfois appelée la loi des événements rares* », de paramètre ***θ > 0*** notée ***P(θ)*** est la loi d'une variable **X** à valeurs entières telle que **:**

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!}\ , \quad k \geq 0\ .$$

En théorie des probabilités et en statistiques, la loi de ***Poisson*** est une loi de probabilité discrète qui décrit le comportement du nombre d'évènements se produisant dans un laps de temps fixé, si ces évènements se produisent avec une fréquence moyenne connue et indépendamment du temps écoulé depuis l'évènement précédent. La loi de ***Poisson*** est également pertinente pour décrire le nombre d'évènements dans d'autres types d'intervalles, spatiaux plutôt que temporels, comme des segments, surfaces ou volumes. Cette loi a été introduite en ***1838*** par ***Siméon Denis Poisson*** (***1781–1840***),



Densité de Probabilité



Fonction de Répartition

Le domaine d'application de la loi de ***Poisson*** a été longtemps limité à celui des événements rares comme les suicides d'enfants, les arrivées de bateaux dans un port ou les accidents dus aux coups de pied de cheval dans les armées.

Mais depuis quelques décennies son champ d'application s'est considérablement élargi. Actuellement, on l'utilise beaucoup dans les télécommunications (*pour compter le nombre de communications dans un intervalle de temps donné*), le contrôle de qualité statistique (*nombre de défauts en SPC*), la description de certains phénomènes liés à la désintégration radioactive (*la désintégration des noyaux radioactifs suivant, par ailleurs, une loi exponentielle de paramètre noté aussi lambda*), la biologie (*mutations*), la météorologie, la ***finance*** pour modéliser la probabilité de défaut d'un crédit…

Définition « Processus» **:** De nombreux domaines utilisent des observations en fonction du temps (*ou, plus exceptionnellement, d'une variable d'espace*). Dans les cas les plus simples, ces observations se traduisent par une courbe bien définie. En réalité, des sciences de la Terre aux sciences humaines, les observations se présentent souvent de manière plus ou moins erratique. Il est donc tentant d'introduire des probabilités.

Un processus aléatoire généralise la notion de variable aléatoire utilisée en statistiques élémentaires. On le définit comme une famille de variables aléatoires $X(t)$ associées à toutes les valeurs $t \in T$. L'ensemble des observations disponibles $x(t)$ constitue une réalisation du processus.

Si l'ensemble T est dénombrable on parle de processus ***discret*** ou de série temporelle, si l'ensemble est indénombrable on parle de processus ***continu***.

Définition 1 « Processus de poisson» **:** Soit $\{\tau_i, i \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires *i.i.d.* de loi *exponentielle* de paramètre $\lambda > 0$ et pour tout $n \geq 1$, soit $T_n = \sum_{i=1}^{n} \tau i$. Le *processus de Poisson* **N** d'intensité constante **λ** est défini par :

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}} \ .$$

C'est le processus le plus simple et le plus utilisé des processus.

Définition 2 « Processus de poisson» :

- Le temps sera caractérisé par l'intervalle **[0;∞)** ou, dans le cas discret, par $\mathbb{N}_0 = \{0; 1; \ldots ,\}$.
- Soient τ_1; τ_2; τ_3; … avec $0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots$ les moments du temps où les sinistres arrivent.
- On ajoute par définition $\tau_0 = 0$.
- Soit X_μ le montant du i'ième sinistre, $X_\mu \geq 0$ pour $\mu = 1; 2\ldots$.
- Les τ_μ et X_μ sont définis sur une espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

N_t est un processus de Poisson avec paramètre **λ :**

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_t = \kappa) &= \frac{(\lambda t)^\kappa}{\kappa!} e^{-\lambda t} \; pour \; i \in \mathbb{N}_0, \\ \mathbb{E}(N_t) &= \lambda t, \\ var(N_t) &= \lambda t. \end{aligned}$$

6.2.3 Processus de renouvellement :

Les ***processus de renouvellement*** interviennent dans la modélisation de phénomènes liés par exemple au renouvellement d'un matériel, à la fiabilité d'un système, aux instants d'arrivée de clients dans une file d'attente, à l'occurrence de sinistres pour une compagnie d'assurance etc.

Définition 1*: ** On définit notre ensemble de dates progressivement **:** on se donne la loi de la première date t_1, puis de la loi de la différance $t_2 - t_1$, ... On dit que ce processus des dates est un processus de ***renouvellement si et seulement si **:**

- ✓ Tous les intervalles entre deux temps successifs ont la même loi ;
- ✓ Les lois des intervalles sont indépendantes.

***Définition 2* :** Soit **F** une fonction de répartition continue telle que **F(0) = 0**. Un processus de renouvellement est un processus ponctuel sur $\mathbf{IR}^+$ représentant les instants d'occurrence d'un événement tel que les durées inter-occurrences successives sont des variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi, de fonction de répartition **F**. Un tel processus peut être défini indifféremment par **:**

- ✓ La suite (X_n) des durées entre les occurrences successives,
- ✓ La suite (T_n) des instants d'occurrences.

$$\forall n \geq 1 \,, \quad T_n = X_1 + \ldots + X_n \,,$$

6.2.4 Probabilité de Ruine :

Définition : ***La probabilié de ruine*** dans sa version primaire correspond au percentile du point au-delà duquel le capital initial est totalement épuisé sur une période donnée suite à un résultat déficitaire.

Autrement dit, si on note C_0 le capital initial donné, la probabilité de ruine est égale à :

$$\rho(F_X) = F_X(-C_0) = P(X + C_0 \leq 0)$$

- ✓ En ***assurance,*** on utilise cette mesure de risque pour déterminer le niveau de capital initial C_0 correspondant à une valeur α de la mesure de risque: α correspond au niveau acceptable de la probabilité de ruine et dépend de l'aversion au risque de l'assureur.

- ✓ La ***probabilité de ruine*** permet d'évaluer le risque pour une compagnie d'être en état de ***ruine*** à au moins un instant sur une certaine période de temps future. Le terme ***ruine*** ne désigne pas seulement la ***ruine*** réelle d'insolvabilité d'une compagnie d'assurance ou de réassurance. Il est défini ici comme le passage du surplus de la compagnie en dessous d'un certain seuil permettant d'alerter la compagnie sur son état financier déficient. De manière générale, ce seuil est fixé à **0** et la ***ruine*** intervient donc dès lors que le surplus de la compagnie est *négatif*. Le processus de surplus :

$$\underline{R} = \{R_t, t \geq 0\}$$

d'une compagnie d'assurance ou de réassurance se définit au temps **t** par :

$$R(t) = u + ct - S(t),$$

Où $u \geq 0$ représente le capital initial que détient la compagnie au temps $t = 0$ et $c > 0$ est le taux de prime qui correspond au volume des cotisations par unité de temps. Le processus **S(t)** est le processus du montant total des sinistres de la compagnie,

Où **N(t)** est le processus de dénombrement des sinistres indépendant des montants de sinistre X_j , $j = 1, 2, \ldots$, qui sont positifs ou nuls et *i.i.d.*

6.3 Value at Risk (VaR) :

La **VaR** est une mesure de risque qui est devenue courante dans les banques suite à la réglementation définie par les comités de ***Bâle*** successifs. Elle correspond à la notion de Sinistre Maximum Probable (*SMP*), bien connue des *assureurs non-vie*. Elle est égale à la perte maximale que peut subir une banque ou une compagnie d'assurance dans des conditions normales de marché, sur une période de temps donnée avec une probabilité :

$$VaR_\alpha(F_x) = -inf\{x : F_X(x) \geq \alpha\}.$$

Autrement dit si l'on note **α** le seuil de confiance choisi, la **VaR** correspond au montant de perte potentielle sur une période de temps fixée qui ne sera dépassé que dans **α** % des cas. Le seuil **1- α** est donc égal à la probabilité que le montant de pertes ne dépasse pas la **VaR** en valeur absolue. Ainsi, la **VaR** vérifie l'équation suivante **:**

$$Prob\ (\ perte > VaR\ ) = x$$

La *Value at Risk* tend à devenir un indicateur de risque largement utilisé tant par les établissements financiers que par les compagnies d'assurance car elle permet d'appréhender le risque global dans une unité de mesure commune à tous les risques encourus, quelle que soit leur nature.

La **VaR** est utilisée pour déterminer le capital initial minimal assurant une *probabilité de ruine* inferieure ou égale à un niveau **α** fixé a priori **:** en deçà de cette valeur de capital initial, la *probabilité de ruine* est supérieure à **α**.

La **VaR** vérifie les propriétés :

- ***D'invariance par translation :***

$$\begin{aligned} P(X &\leq -Var_\alpha(F_X)) = \alpha \\ &= P(X + c \leq -(Var_\alpha(F_X) - c)) \\ &\Rightarrow -(Var_\alpha(F_X) - c) = -Var_\alpha(F_{X+c}) \end{aligned}$$

- ***D'homogénéité positive :***

$$\begin{aligned} P(X &\leq -Var_\alpha(F_X)) = \alpha \\ &= P(\lambda X \leq -\lambda Var_\alpha(F_X)) \\ &\Rightarrow -Var_\alpha(F_{\lambda X}) = -\lambda Var_\alpha(F_X) \end{aligned}$$

- ***De monotonie :***

$$\begin{aligned} X &\leq Y \Longrightarrow P(X \leq -Var_\alpha(F_Y)) \geq P(Y \leq -Var_\alpha(F_Y)) \\ \text{donc } P(X &\leq -Var_\alpha(F_Y)) \geq \alpha \\ \text{soit } F_X(-Var_\alpha(F_Y)) &\geq F_X(-Var_\alpha(F_X)) \\ \text{donc (car } F_X \text{ est croissante) } -Var_\alpha(F_Y) &\geq -Var_\alpha(F_X) \\ \text{soit } Var_\alpha(F_X) &\geq Var_\alpha(F_Y) \end{aligned}$$

- ***De borne supérieure :*** la **VaR** est inferieure au maximum des pertes.

- ***De conservatisme :***

$$-VaR_\alpha(F_X) = -VaR_\alpha(F_{X\_})$$

En revanche, elle n'est pas ***Sous-Additive*** et ne tient pas compte de la sévérité de la ***ruine***, ce qui constitue la critique la plus souvent formulée à son encontre. *i.e* elle ne prend pas compte du fait qu'un portefeuille de deux risques mutualisés soit moins risqué à gérer que deux risques pris individuellement. On peut se démontrer ce résultat à l'aide d'un *contre-exemple.*

✓ Soit **X** et **Y** deux risques indépendants suivant des lois de *Pareto*, **X** ~ *Par* (1, 1) et **Y** ~ *Par* (1,1) :

Rappelons que **:** La fonction de répartition d'une variable aléatoire **X** de loi de ***Pareto*** est donnée par **:**

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\theta}{\theta+x}\right)^p, & \text{si} \quad x > 0; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sa fonction quantile est **:**

$$F_X^{-1}(\alpha) = \theta[(1-\alpha)^{-1/p} - 1].$$

On a **: X** ~ *Par* (1, 1) et **Y** ~ *Par* (1,1). Donc **:**

$$P(X \leq t) = P(Y \leq t) = 1 - \frac{1}{1+t} \;, t > 0.$$

Nous avons alors :

$$\text{VaR}(X\,;\alpha) = \text{VaR}(Y\,;\alpha) = \frac{1}{1-\alpha} - 1.$$

De plus, Par l'utilisation de le produit de ***convolution*** on peut vérifier que **:**

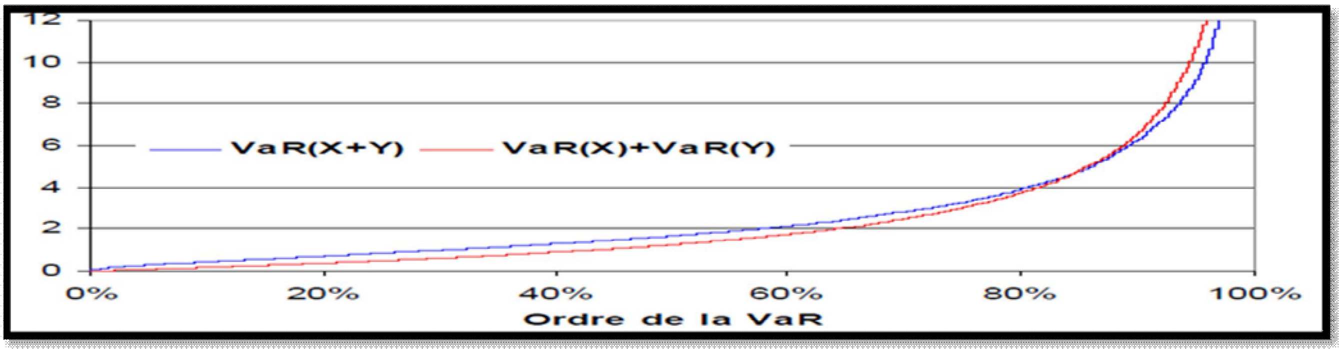
$$P[X+Y \leq t] = 1 - \frac{2}{2+t} + 2\,\frac{\ln(1+t)}{(2+t)^2} \;, t > 0.$$

Puisque :

$$P[X+Y \leq 2VaR(X;\alpha)] = \alpha - \frac{(1-\alpha)^2}{2} \ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) < \alpha$$

Donc ∀ $\boldsymbol{\alpha}$ **:**

$$VaR(X;\alpha) + VaR(Y;\alpha) < VaR(X+Y;\alpha).$$



Value-at-Risk de la somme de deux v.a. de Pareto.

*Et Comme cette mesure est la plus populaire mesure de risque, elle sera bien détaillée aux chapitres **2** et **3**.*

6.4 Mesure de risque de Wang :

Les mesures de risque de ***Wang*** (***2002***) utilisent l'opérateur espérance sur des transformations de la distribution de la variable aléatoire d'intérêt. L'idée est en effet d'alourdir la queue de la distribution de la variable d'intérêt afin d'engendrer un chargement par rapport à la prime pure. Cette transformation de la fonction de répartition sera effectuée à l'aide d'une ***fonction de distorsion***. Rappelons qu'une fonction de distorsion est une fonction non décroissante :

Définition (Fonction de Distorsion) : On dit que g : [0; 1] → [0; 1] est une fonction de distorsion si **:**

1) g(0) = 0 et g(1) = 1.
2) g est une fonction non décroissante.

L'objectif de cette ***fonction de distorsion*** est de transformer la fonction de survie (*notée par **S** ou par* $\bar{F}$) $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ de sorte que quand une mesure de risque est calculée la mesure tordue en résultant reflète plus adéquatement la possibilité et l'impact des événements extrêmes.

Principales mesures de risques par distorsion P ∈ [0,1]

mesure de risque $\mathcal{R}$	fonction de distorsion g
VaR	$g(x) = \mathbb{I}[x \geq p]$
Tail-VaR	$g(x) = \min\{x/p, 1\}$
PH	$g(x) = x^p$
Dual Power	$g(x) = 1 - (1-x)^{1/p}$
Gini	$g(x) = (1+p)x - px^2$
Transformation exponentielle	$g(x) = (1-p^x)/(1-p)$

- ***Proposition 1:***

  Lorsque la fonction de ***distorsion*** est concave, la mesure de risque correspondante est sous-additive.

Définition **:** On appelle mesure de risque de ***Wang*** issue de la fonction de distorsion *g*, la mesure ρ_g définie par **:**

$$\rho_g(X) = \int_0^\infty g(\Pr[X > x])\,dx\,.$$

$$\rho_g = \int_0^\infty g(1 - F_X(x))dx = \int_0^\infty g\left(\bar{F}_X(x)\right)dx$$

- **Proposition 2:**

On remarque que toute mesure de ***Wang*** peut s'écrire comme somme de **VaR**, i. e.

$$\rho_g(X) = \int_0^1 VaR(X, 1-\alpha)\, dg(\alpha).$$

Ainsi, les mesures de risque de ***Wang*** sont des moyennes pondérées de **VaR**.

- **Proposition 3 :**

Les mesures de risque de ***Wang*** sont homogènes, invariantes par translation et monotones.

- **Corolaire :**

Les mesures de risque de ***Wang*** correspondant à des fonctions de distorsion concaves sont cohérentes.

6.5 Mesure de risque d'Esscher :

La mesure de risque ***d'Esscher*** consiste à mesurer le risque comme étant la prime pure, i. e. l'espérance de la transformée ***d'Esscher*** du risque initial.

Définition : On appelle mesure ***d'Esscher*** de paramètre ***h > 0*** du risque ***X***, la mesure de risque donnée par **:**

$$Es(X;h) = \frac{\mathrm{E}\left[Xe^{hX}\right]}{\mathrm{E}\left[e^{hX}\right]} = \frac{d}{dh}\ln \mathrm{E}\left[e^{hX}\right].$$

- **Proposition 1 :**

- La mesure de risque ***d'Esscher*** n'est pas cohérente car elle n'est ni homogène (*sauf dans le cas trivial h = 0*), ni monotone.

- La mesure de risque ***d'Esscher*** contient un chargement de sécurité puisque ***Es (X; h)*** est une fonction croissante en ***h*** et ***Es (X;0) = E[X]***.

7/ Choix d'une mesure de risque pour déterminer un capital économique :

Les travaux en cours sur *Solvabilité* évoquent l'utilisation de mesures de risque dans la détermination du capital cible nécessaire à une société d'***assurance*** pour pérenniser son activité ou même en ***finance***. Ce capital cible sera déterminé en référence à une mesure de risque appliquée au risque global supporté par la société. Ce risque global sera modélisé à partir d'une formule commune à toutes les compagnies d'assurance ou à partir d'un modèle interne. La mesure de risque la plus souvent citée est la *Value-at-Risk*.

Néanmoins les travaux récents de ***Dhaene***, ***Laeven*** et ***al***. (*2004*) montrent que la propriété de sous-additivité est parfois trop forte. En effet considérons deux risques $\mathbf{X_1}$ et **X2**, et $\boldsymbol{\rho}$ la mesure de risque associée à la détermination du capital réglementaire. Si $\boldsymbol{\rho}$ est « *trop* » sous-additive, on peut se retrouver dans une situation où

$$\mathrm{E}\left[\left(X_1+X_2-\rho(X_1+X_2)\right)^+\right]>\mathrm{E}\left[\left(X_1-\rho(X_1)\right)^+\right]+\mathrm{E}\left[\left(X_2-\rho(X_2)\right)^+\right].$$

Cette inégalité signifie que l'ampleur de la ruine moyenne d'une société pratiquant les risques $\mathbf{X_1}$ et $\mathbf{X_2}$ et disposant d'un capital de niveau $\boldsymbol{\rho(X_1 + X_2)}$ est plus importante que la somme de l'ampleur de la ruine moyenne de deux sociétés de capitaux respectifs $\boldsymbol{\rho(X_1)}$ et $\boldsymbol{\rho(X_2)}$ couvrant respectivement les risques $\mathbf{X_1}$ et $\mathbf{X_2}$.

Dans le cadre du choix de la mesure de risque permettant de déterminer le capital cible (*au sens de Solvabilité*), ils proposent donc de ne retenir que les mesures de risque qui respectent la condition du régulateur, à savoir les mesures de risques $\boldsymbol{\rho}$ telles que pour ε fixé dans **]0;1[** et pour tous risques $\mathbf{X_1}$ et $\mathbf{X_2}$, l'inégalité suivante soit vérifiée **:**

$$\mathrm{E}\left[\left(X_1+X_2-\rho(X_1+X_2)\right)^+\right]+\rho(X_1+X_2)\varepsilon\leq\sum_{i=1}^{2}\left\{\mathrm{E}\left[\left(X_i-\rho(X_i)\right)^+\right]+\rho(X_i)\varepsilon\right\}.$$

Notons que **ε** peut s'interpréter comme le coût de l'immobilisation du capital, puisque, le deuxième terme du premier membre de l'inégalité précédente peut s'interpréter comme le flux à destination de l'actionnaire de manière à le rémunérer du capital $\boldsymbol{\rho(X_1 + X_2)}$ qu'il « *prête* » à la société. A partir de cette condition, ils démontrent les trois propriétés suivantes.

Soit $\boldsymbol{\varepsilon \in]0;1[}$. La condition du régulateur en référence au niveau **ε** est satisfaite **:**

- Pour les $\mathbf{TVaR_p}$ telles que **:** $p > 1-\varepsilon$,
- Pour la $\mathbf{VaR_{1-\varepsilon}}$,
- Pour toute mesure de risque sous-additive $\boldsymbol{\rho}$ telle que $\boldsymbol{\rho(X) \geq \mathrm{VaR}(X, 1-\varepsilon)}$.

En conclusion, ils démontrent enfin que la **VaR** de niveau $\mathbf{1-\varepsilon}$ est la mesure de risque respectant la condition du régulateur qui conduit au plus petit niveau de capital.

CHAPITRE : 2

CHAPITRE : 2

HISTORIQUE DE LA VaR "VALUE-AT-RISK"

HISTORIQUE DE LA VaR "VALUE-AT-RISK

1/ La Value at Risk de Condorcet à Bâle II :

La rapidité fulgurante avec laquelle le concept de ***Value-at-Risk*** (**VaR** « *comme mesure bancaire* ») et son usage se sont diffusés durant les années ***90*** peut étonner. Les histoires traditionnelles, qui s'en tiennent à la théorie financière ou aux pratiques prudentielles du secteur ne peuvent rendre compte de ce phénomène, même si ***Holton***[(4)] [***2002***] par exemple, donne une image excellente pour ce champ. Ce chapitre consiste à expliquer cette diffusion rapide par le fait que le formalisme de la **VaR** s'appuie sur le « *principe de probabilité raisonnable de* ***Condorcet*** [(5)] », lui-même connu dans les sciences sociales, les sciences de gestion, et les sciences de l'ingénieur depuis plus de deux siècles.

Du point de vue théorique, les seules inflexions remarquables du dernier siècle sont d'une part d'avoir fait admettre des seuils de probabilités conventionnelles, et d'autre part d'avoir remplacé ce principe, qui est une règle de gestion, par une expression qui permet d'exprimer la comparaison. Ces transformations touchent par nature à la diffusion des pratiques plus qu'à la production de connaissances nouvelles.

La **VaR** résume l'exposition d'un portefeuille au risque de marché ; d'où on considère en général les **VaR** pour un seuil de confiance donné pour une période donné. De ce fait la **VaR** rappelle immanquablement les intervalles de confiance de la statistique mathématique. Il s'emble donc que la **VaR** soit une application financière directe des travaux de ***Neyman***[(6)] et ***pearson***[(7)]. En fait, les théories statistiques de la dispersion ont une histoire bien plus ancienne qui prend d'ailleurs racine dans les sciences de la société.

2/ Les mathématiques mixte :

L'histoire de l'économie et de la statistique mathématiques a longtemps souffert du dédain croisé des historiens des sciences et de l'économie. L'obscure carrière d'un ***Louis Bachelier*** [(8)] témoigne du mépris quasi-général des mathématiciens pour les questions économiques, à laquelle correspond une horreur des historiens de la pensée économique pour les mathématiques, longtemps considérés comme des « *hiéroglyphes effarouchants* ». Même si cette époque semble aujourd'hui révolue, il semble encore incongru de mentionner « l'œuvre économique » de ***D'Alembert*** [(9)] ou ***Laplace*** [(10)], qui sont, comme on le croit parfois à tort, des mathématiciens « *purs* ». Les hommes des Lumières se saisissent du flambeau de l'analyse mathématique pour éclairer le monde et pour agir, comme l'a si bien écrit ***Jean-Nicolas Rieucau*** [(11)] **:**

> « *La validité d'un résultat mathématique doit en principe être estimée d'après sa capacité à rendre intelligibles les objets réels, les mathématiques mixtes étudiant "**les propriétés de la grandeur concrète, en tant qu'elle est mesurable ou calculable**", comme on le lit à l'article "**Mathématiques**" (1765) de l'Encyclopédie dont **D'Alembert** partage la rédaction avec **Boucher d'Argis*** [(12)]*. ».*

Divers aspects du calcul économique ont retenu l'attention des mathématiciens du ***XVIII*** e siècle, ils nous sont maintenant connus grâce aux travaux de ***Bernard Bru*** [(13)]***, Pierre Crépel*** [(14)]***, Jean-Nicolas Rieucau.***

2.1 La recherche d'une certitude morale ou principe de certitude « Safety Fitst principale » :

Chez les auteurs français, l'idée de « *certitude morale* », déjà assez connue de la communauté scientifique dans les années ***1730*** est popularisée par ***Buffon***[(15)] qui parle de « *probabilité morale nulle* ». Pour résoudre le ***paradoxe de Pétersbourg*** « *voir annexe 02* », ***Buffon*** constatant que la probabilité pour un homme d'âge mûr de mourir dans la journée était d'un dix-millième, propose de compter pour nulles les probabilités plus faibles (*). Pour ***Condorcet,*** au-delà de l'animosité qui l'opposait au biologiste (*Naturaliste*), la proposition de ***Buffon*** est intéressante mais trop simple**.**

Le principe qui préside à ce traitement général du risque est ce que l'on doit bien appeler le « ***principe de Condorcet*** » **:** ne considérer comme choix possibles que les seules variables dont la (*les*) probabilité(s) d'un (*ou plusieurs*) risque(s) dirimant(s) soit très faible ***(****« moralement négligeable », ou, réciproquement, que l'on soit « moralement certain » que le risque restera virtuel*). Parmi les variables qui satisfont à ce principe de sécurité, on choisira par exemple celle qui possède la meilleure espérance. Une fois que cette probabilité est identifiée, comment met-on en pratique ce principe **?**

Condorcet a répondu à cette question en examinant les conditions nécessaires à l'activité économique **:**

> « *Un homme raisonnable ne doit se livrer au commerce que dans le cas où il trouve une probabilité assez grande qu'il retirera ses fonds, avec l'intérêt commun & le prix de son travail. Il lui faudrait sans doute une probabilité à peine différente de la certitude de ne pas perdre la totalité de ses fonds, & même d'en conserver la partie qui est nécessaire à sa subsistance & à celle de sa famille ; & une probabilité encore très grande de ne pas les diminuer jusqu'à un certain point* ».

En envisageant la probabilité des événements « *retirer de son activité le profit normal* », « *ne pas perdre plus d'une certaine somme* », « *ne pas perdre tout son bien* », ***Condorcet*** distingue trois « *événements* » dont le premier inclut le deuxième, qui englobe lui-même le suivant. Le risque inhérent à l'activité économique admet alors trois niveaux **:** « *avoir travaillé pour rien* », « *avoir perdu une somme considérable dans ses affaires* » et « *être ruiné* » (*ce sont les événements complémentaires de ceux que décrit* ***Condorcet***).

On peut donc comparer le risque propre à deux affaires en comparant ces probabilités respectives. Ceci ne va sans poser divers problèmes. D'une part ***Condorcet***, l'inventeur du paradoxe qui porte son nom propose en fait trois mesures, sans indiquer comment les ordonner **:** l'indécision est alors à prévoir. D'autre part la détermination des seuils (*en particulier dans l'estimation d'« un certain point* ») ne repose sur aucun critère objectif.

(*) **:** ***Buffon*** [*1777*] **:** « *Comme tout homme de cet âge (cinquante-six ans), où la raison a acquis toute sa maturité et l'expérience toute sa force, n'a néanmoins nulle crainte de la mort dans les vingt-quatre heures, quoiqu'il n'y ait que dix mille (...) à parier contre un, qu'il ne mourra pas dans ce court intervalle de temps ; j'en conclus que toute probabilité égale ou plus petite, doit être regardée comme nulle* ».

Néanmoins cette proposition que nous appellerons théorie des « *seuils* » (*en anglais disaster threshold*) a très largement résisté à l'usure du temps, elle s'est même bonifiée puisque les seuils conventionnels ont fini par être universellement acceptés. S'il est toujours délicat d'affirmer qu'un auteur a été le premier à exprimer une idée ou même à la formaliser, dans le cas présent, l'exposé de ***Condorce***t est particulièrement remarquable par sa clarté et la rigueur de sa formalisation.

2.2 Condorcet et l'exemple des assurances :

Le texte dans lequel ***Condorcet*** expose avec le plus de détail cette théorie des seuils est un article de l'Encyclopédie méthodique qui suscitera des développements chez ***Laplace*** et ***Lacroix*** *(16)* sur les assurances maritimes. Bien que cet article soit maintenant connu grâce aux travaux de ***Pierre Crépel*** [***1988***] et ***Jean-Nicolas Rieucau*** [***1998***], il n'est peut-être pas inutile d'en rappeler le contenu avant d'introduire aux écrits ultérieurs.

Au milieu des années ***1780***, ***Condorcet*** déploie une activité assez intense pour promouvoir les assurances : il organise un ***prix de l'Académie*** *(*)* des sciences [***1783***] et rédige des articles ([***1784***], [***1785a***], [***1785b***]) ou des notes restées inédites. L'assurance maritime, qui existe déjà depuis plus de trois siècles, n'en avait pas besoin, mais les assurances agricoles (*que l'auteur appelle de ses vœux*) ne sont qu'à l'état de projet, tandis que la loi et la morale réprouvent encore dans les pays latins l'institution d'assurances sur la vie déjà développées en Angleterre. Si les lettres apocryphes ([***1785a***], [***1785b***]) tendent à populariser une idée nouvelle et un peu aventureuse, l'article « *Assurances maritimes* » de l'Encyclopédie méthodique expose la foi de ***Condorcet*** dans le principe même de l'assurance **:** comme son titre ne l'indique pas, il vise en fait à promouvoir toutes les formes d'assurances. La modalité choisie pour convaincre les lecteurs est le calcul économique, appliqué tant à l'assureur qu'à l'assuré potentiel. Ce point mérite qu'on s'y arrête puisque, comme l'ont remarqué ***Crépel*** et ***Rieucau***, ***Condorcet***, comme avant lui ***Daniel Bernoulli*** *(17)* [***1731***], met en équation aussi bien la compagnie d'assurance que ses clients, ce qui n'est plus le cas chez les auteurs suivants.

Du point de vue abstrait, le calcul est simple **:** ***Condorcet*** modélise un décideur confronté à **n** opérations identiques, qui se résolvent chacune en un échec ou un succès. Les probabilités des différents niveaux du bilan de l'assureur sont donc données par le tirage d'une loi binomiale. Dans la pratique, si la probabilité d'un échec est **p**, la probabilité d'avoir **m** échecs parmi **n** tirages est égale à $C_{mn}\, p^{m}\,(1\text{-}p)^{n\text{-}m}$, et on ne dispose pas d'une fonction de répartition explicite. On peut bien sûr en bricoler une, en écrivant que si **X** est la variable binomiale qui désigne le nombre d'échecs parmi **n** tirages, alors $P(X \leq m) = \sum_{k=0}^{m} C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}$, Mais le calcul est très lourd, d'autant que l'inconnue est ici **m :** on veut calculer **m** sachant $P(X \leq m)$ donné. Il faut additionner les termes du binôme, ce qui est évidemment très fastidieux, rend pénible la lecture de l'article de ***Condorcet*** et réduit sa portée pratique à presque rien. On peut cependant rappeler le but de la formalisation du marquis **:** fixer le prix de vente de l'assurance afin de réduire la probabilité de faillite de l'assureur à une quantité moralement négligeable. C'est donc bien la problématique de la théorie du risque, qui vise à déterminer le taux de chargement afin d'immuniser la compagnie contre les conséquences d'une accumulation de sinistres.

(*) **:** Ce prix, proposé en ***1781*** par l'Académie des sciences à l'instigation de ***Condorcet***, ne fut pas remis à la date
prévue (***1783***) et finalement reporté deux fois. En ***1787***, ***Lacroix*** et ***Bicquilley****(18)* partagèrent enfin ce prix. Il est donc vraisemblable qu'à cette date au moins, ***Laplace*** n'avait pas vraiment avancé dans le sujet**.**

Faute d'outil mathématique adapté, ***Condorcet*** ne parvient qu'à un demi-succès **:** il montre clairement l'intérêt de la théorie qu'il propose, mais sa complexité analytique la rend quasiment inutilisable.

Le principe de ***Condorcet*** appliqué à la gestion d'entreprise se résume donc ainsi **:** le taux de profit est fixé de manière à rendre la **VaR** compatible avec la solvabilité presque sûre. Avant de présenter les développements de la théorie de l'assurance, il n'est pas inutile de rappeler que l'auteur lie cette question du risque à celle de l'estimation.

2.3 Tetens et la recherche d'une métrique de risque :

A peu près au même moment que ***Condorcet***, un philosophe Allemand, ***Johannes Nicolaï Tetens*** *(19)*, attaque de front les mêmes problèmes **:** la théorie mathématique du risque et la question de l'estimation. La personne de ***Tetens*** est suffisamment mal connue, le pus intéressant de ses travaux est le « *risque de la caisse* » et le risque d'estimation.

2.3.1 Le risque de caisse :

Tetens construit une métrique de risque, le **Risico** (*par fois dit der Casse pour indiquer qu'il s'agit en dernière analyse du risque de la caisse d'assurance*).celui ci n'est ni l'erreur moyenne comme le pense ***Borch***[20] [*1969*], ni le risque moyen linéaire comme l'écrit ***Bohlmann***[21][*1911*]. Dans un premier temps, la mesure présentée est *l'espérance des écarts pour les issues inférieures à la moyenne « le risque de **Tetens** vaut donc* $\mathbf{R} = \sum_{i \leq n_0} p_i |\bar{x} - x_i|$ ».L'auteur illustre son propos par le cas d'un dé à six faces numérotées de zéro à cinq. L'espérance d'une variable ainsi définie est 5/2, les issues inférieures à la moyenne sont zéro, un et deux, donc les écarts 5/2, 3/2, 1/2. Comme les issues sont équiprobables (*parmi six possibilités*), l'indicateur de risque vaut pour une telle loterie **:** (5/2+3/2+1/2)×1/6 = 3/4.

Dans le cas des loteries symétriques — *c'est-à-dire de loteries dont les écarts à la moyenne sont égaux de part et d'autre de l'espérance* — comme par exemple le jet d'un dé, erreur moyenne (*divisée par deux*) et indicateur de risque sont évidemment égaux, mais pas le risque moyen linéaire, puisqu'il n'y a pas de résultats négatifs. Si on soustrait à la variable aléatoire son espérance — *le prix d'entrée dans le jeu* — alors les trois mesures sont identiques. Si formellement on peut donc démontrer dans un cas particulier l'égalité de l'indicateur de dispersion de ***Tetens*** avec d'autres qui seront utilisés par la suite, il ne faut pas perdre de vue que ***Tetens*** ne s'en tient pas, dans ses démonstrations, à des loteries d'espérance nulle qui remplissent les conditions de cette identité des indices. L'erreur des commentateurs vient peut-être du fait que si les exemples sont toujours de ce genre puisque les rentes viagères sont toujours vendues à leur espérance mathématique.

2.3.2 Application : « Le calcul du montant des garanties » :

Si ***Tetens*** est resté dans la mémoire des actuaires pour avoir mis au point un concept (*et une mesure*) du risque de la caisse (***Risico der Casse***), il faut quand même insister sur le caractère particulier de l'usage qui en est fait. Alors que ***Condorcet***, ***Laplace*** et ***Lacroix*** admettent sans difficulté la nécessité d'un chargement, tant pour couvrir les frais de l'assureur que pour garantir sa sécurité (***Condorcet*** [*1784*] ; ***Laplace*** [*1812*] ; ***Lacroix*** [*1821*]), ***Tetens*** se refuse à une telle pratique **:**

« On voit [grâce à l'indicateur de risque] ce que la garantie à produire représente. Celui qui l'assume, ne peut, de par la nature de la chose, rien exiger pour cela, pas plus que n'exigerait un joueur qui démarre un jeu de hasard avec un autre, sans qu'aucun n'ait un avantage. Il peut perdre autant que gagner et ne doit que se demander s'il est prêt à mettre en jeu une somme aussi importante. »

Le principe de justice qui préside à la décision risquée, maintes fois réaffirmé depuis ***Pascal***[(22)] (*cf.* ***Jallais-Pradier*** *[**1997**]*), ne souffre donc pas d'exception pour ***Tetens***. Ce point de vue résonne avec le caractère semi-public des institutions germaniques **:** avec de tels principes, les sociétés d'assurance ne pouvaient être profitables ! Il fallait donc qu'elles soient subventionnées. On comprend donc pourquoi ces calculs intéressent à la fois les autorités (*qui offrent le marché et la subvention*) et les entrepreneurs potentiels. Ce détail mérite quelque attention, n'en déplaise à ***Max Weber***[(23)] (et à ***Rohrbasser***[(24)] [***1997***]), car on y trouve des français (*donc catholiques*) bien plus à l'aise avec les affaires d'argent que leurs cousins germains (*donc luthériens*).

Si le **Risico** de ***Tetens*** ne sert pas à calculer le chargement, quel peut donc être son utilité **?** On peut penser d'abord que ***Tetens*** a voulu théoriser sur une suggestion d'***Abraham de Moivre***[(25)]. Dans sa *Doctrine of Chances* « *voir annexe* 03 », ce dernier écrivait **:**

«Le risque de perdre une somme est le contraire de l'espérance ; sa vraie mesure est le produit de la somme aventurée par la probabilité de la perte ».

Or ***Tetens*** est manifestement très marqué par ***Moivre***. En particulier, le recours à la formule dite de *Stirling* s'accompagne d'une référence explicite (*contrairement à l'usage du dix-huitième siècle*) à ***Moivre*** [*1730*]. Les développements de ***Tetens*** sur le sujet pourraient être traités simplement comme un exercice mathématique visant à généraliser cette notion de risque à des variables aléatoires plus complexes que les variables de ***Bernoulli*** considérées par ***Moivre***. L'abstraction des travaux du danois (*à cause du détour par les fonctions génératrices, en particulier*), qui montre par ailleurs un intérêt réel pour les pures questions d'algèbre, pourrait faire penser à un exercice de style. Mais l'intérêt simultané du philosophe pour le risque de la caisse d'une part, et d'autre part le risque d'estimation — *sujets éminemment concrets* — nous conduit à chercher une autre interprétation.

Malgré l'importance que ***Tetens*** consacre à sa notion de risque (*elle fait l'objet de deux gros chapitres de l'Einleitung « mot allemand : introduction »*), il est assez curieux de constater que l'auteur s'éloigne occasionnellement de ce fil directeur. Cependant, parmi les deux « *applications* » de la notion de risque, la première est contenue dans ce paragraphe **:**

« Le risque de la caisse est croissant du nombre des intéressés. Il croît en proportion de la racine carrée du nombre des intéressés. Comme dans tout jeu de hasard, plus on mise, plus on peut gagner, mais aussi perdre. C'est sûrement une idée erronée, que l'on rencontre ici et là, de penser qu'avec un plus grand nombre d'intéressés l'institution risque moins qu'avec un nombre plus faible sous le prétexte qu'il est probable que les décès seront plus conformes aux hypothétiques

*tables de mortalité. (…)**Le risque distribué à chaque intéressé particulier est plus petit, quand la société est plus grande, et toujours dans la même proportion, à savoir la racine carrée du nombre des intéressés.** Il augmente pour la société dans son ensemble, mais diminue pour chaque unité.».*

Le danois tente ici de clore un débat qui dure depuis les balbutiements de l'assurance, et qui vise à déterminer si le risque croît ou non avec le nombre de contrats. Le bon sens laissait croire que la chance d'une perte était croissante, quand les raisonnements du type loi des grands nombres, utilisés de façon erronée, semblaient indiquer le contraire. L'indicateur construit par ***Tetens*** permet de trancher la question de manière concrète, il permet de proportionner l'accroissement des garanties à l'accroissement du volume des contrats souscrits.

2.3.3 Evaluation du Risk d'estimation :

La seconde application, c'est le risque d'estimation **:** ***Tetens*** cherche à établir la valeur des tables de mortalité qui servent à calculer les rentes viagères. Il convient pour cela de considérer au moins mille observations pour obtenir une « *erreur* » (*sur l'espérance*) inférieure à une demi-année. Le problème dans ce cas est double. D'une part, l'étude de la variabilité n'est pas menée de manière « *satisfaisante* » **:** on dispose d'un intervalle de confiance mais il n'est pas associé à une probabilité ; si on calculait rétrospectivement la probabilité implicite à la méthode de ***Tetens***, il apparaîtrait qu'elle est beaucoup trop faible pour prétendre à la « *certitude morale* ». D'autre part l'interprétation du résultat de ***Tetens*** est incertaine **:** compte tenu de l'usage qui est fait des tables de mortalité, faut-il ***1000*** observations par classe d'âge (*et de chaque sexe*), pour que les tables soient précises à chaque âge **?** Ces résultats paraissent donc symboliques **:** l'auteur pointe le problème de l'induction statistique sans le traiter vraiment. On peut objecter que, dans la mesure où nous avons complètement occulté les calculs de ***Tetens***, l'argument de l'auteur est peut- être dénaturé. Mais la complexité de ces computations commande de les détailler ailleurs.

Si les développements de ***Tetens*** sont assez exotiques, ils prouvent qu'à l'époque le risque était dans l'air du temps, et par risque on entendait bien la probabilité de dépasser un seuil critique de perte… Idée que capture finalement la **VaR**. En la matière, la Théorie analytique, conduit à franchir une étape supplémentaire.

3/ Les mathématiques actuarielles au *XIX*^{e} siècle « *Théorie mathématique risque* » :

Si le risque entendu comme dépassement probable d'une limite est une notion répandue dans les années ***1780***, cette notion ne suscite une théorie que chez les héritiers directs de ***Condorcet***, ***Laplace*** et ***Lacroix***. Au contraire, les pragmatiques Anglais ne s'embarrassent pas de théorie.

3.1 Price et les tables de mortalité :

On pense d'ordinaire que l'histoire des mathématiques actuarielles classiques, tout au moins dans leur expression anglaise, est bien connue grâce aux travaux de ***Lorraine Daston***[(26)] ([***1988***], [***1989***]). Néanmoins, les considérations de cet auteur sur la « *domestication du risque* » sont de nature à égarer le lecteur **:** ***Daston*** entend par « *risque* » l'espérance du sinistre et non une éventuelle analyse de la dispersion. La « *domestication du risque* » est donc pour elle synonyme de calcul des primes à l'espérance, ce qui ne présente pas grand- intérêt pour les assurances maritimes ou incendie car les calculs y sont très simples ; dans le cas des assurances-vie en revanche, la mise au point des tables de mortalité constitue une aventure scientifique que l'auteur rappelle avec une verve narrative reconnue. Mais si nous entendons ***risque*** dans le sens qui a prévalu chez ***Markowitz***(27) — *cette interprétation a suscité à partir des années **1850** une théorie propre* — il faudra donc chercher ailleurs. Au début du siècle, ***Bohlmann*** donnait des pistes particulièrement précieuses, puisqu'il renvoyait à ***Tetens*** et ***Laplace*** [*1812*]. Parmi les sujets de sa Gracieuse Majesté, il s'en trouve un qui paraît devoir attirer notre attention **:** ***Richard Price***(28) a lui aussi travaillé sur les questions d'estimation et d'assurance. D'une part, il a transmis à la **Royal Society** le mémoire de ***Bayes***(29) [*1764*] ; et ceci n'est pas étranger à son admission dans cette société. D'autre part, ses Observations on reversionary payments, publiées en ***177***1, constituent le grand classique de l'actuariat, avec pas moins de ***4*** éditions en ***11*** ans plus trois encore par la suite. ***Price*** n'est pas seulement un théoricien de l'assurance, puisqu'il participe à l'odyssée de l'***Equitable*** (***Daston*** [*1989*]) entre ***1768*** et ***1775*** ; tout ceci ne représente d'ailleurs qu'une infime part de ses activités de publiciste polygraphe.

En charge des calculs actuariels de l'***Equitable***, ***Price*** a certainement cherché à mettre sa compagnie à l'abri d'une mauvaise année, de sinistres anormalement nombreux, donc du risque — *comme l'on fait **Condorcet**, **Laplace** et **Tetens*** —. En fait, malgré le titre de ***Daston*** [*1989*], les travaux anglais ne s'embarrassaient jamais d'une théorie du risque, au sens de dispersion. Bien que l'***Equitable*** n'ait pas calculé les rentes au « ***juste prix*** », loin s'en faut, la question de la variabilité semblait exclue par un surcroît de précaution. ***Daston*** rapporte ainsi que ***Morgan***(30) (*neveu de **Price***) calcula en ***1775*** que l'***Equitable***, lancée en ***1768***, comptait dans son bilan 60% de surplus. En dépit de statuts en principe quasi-mutualistes, ***Morgan*** se refusait à redistribuer ces profits en cas « *d'événements extraordinaires ou d'une saison de mortalité anormale* » (***Daston*** [*1988*]). Il y avait donc bien chargement pour cause risque, c'était en dehors de toute Théorie. A ce sujet, ***Bernstein***(31) rapporte avec perfidie les inconvénients du bricolage pratiqué par le pasteur unitarien, il écorne ainsi sérieusement la réputation de ***Price***. Sa table de mortalité, dite de ***Northampton*** « *voir annexe 04* », sous-estimait l'espérance de vie (*surtout celle des hommes*), cette erreur fit la fortune de l'***Equitable*** qui vendait essentiellement des assurances-décès et des rentes de veuvage. Mais le gouvernement anglais qui régla ses paiements viagers sur le même fondement fut ruiné (***Bernstein*** [*1996*]). ***Price*** n'a donc pas développé une théorie de la variabilité, il n'en a d'ailleurs pas ressenti le besoin. Après sa mort en ***1791***, ***Morgan*** dirige encore une sixième [*1803*] puis une septième édition (*1812*) qui ne comportent pas d'entrée « *risk* » dans leurs index, et il n'est pas fait référence à ***Condorcet***, à ***Tetens*** ou à ***Laplace***.

3.2 Laplace et la généralisation de Condercet « La gestion des Compagnies » :

Laplace hérite non seulement la problématique mais encore la modélisation même de ***Condorcet*** **:** le chapitre de la Théorie analytique qu'il consacre aux « *bénéfices dépendants de la probabilité des événements* » futurs s'ouvre en rappelant le cadre de la réflexion de son devancier (*à ceci près, comme le rappelle **Crépel** [1988], que l'assuré a disparu des préoccupations savantes*), sans toutefois le citer, comme il était courant au ***XVIII***e siècle. On retrouve des opérations identiques susceptibles d'un résultat binaire (*succès/échec*), donc un tirage binomial. De même, le titre évoque les développements « *bayésiens*» qui ne manqueront pas d'apparaître dans un second temps. Mais ***Laplace*** innove dans deux domaines **:** grâce à sa « *méthode* », et par la prise en compte des rentes viagères.

La « méthode de ***Laplace*** » consiste en une approximation normale des variables binomiales **:** la probabilité $\mathbf{P(X \leq m)} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$ est donc approchée par l'intégrale **:** $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{m-np}{\sqrt{2npq}}} exp^{-v^2}\, dv$. Ceci ne semble peut-être pas constituer une simplification, mais dans la mesure où seule la borne supérieure d'intégration change, on peut utiliser une table de la loi de ***Laplace-Moivre*** (*comme celle de **Kramp**[(32)] [1799]*) pour obtenir sans calcul les valeurs de l'intégrale. Le modèle de ***Condorcet*** devient donc utilisable, et il est possible de calculer rapidement le montant du chargement nécessaire étant donné le niveau de sécurité requis. Ce n'est pas tout. ***Laplace*** peut entrer dans des raffinements qui bénéficient de la nature de son outil **:** la « méthode de ***Laplace*** » [***1785***] repose d'abord sur une approximation analytique et non sur un théorème de convergence en probabilité (*le fameux « théorème central limite » de **Laplace** [1810]*). Au lieu de considérer seulement des tirages binaires (*échec ou succès*) identiques, l'auteur ménage d'abord la possibilité pour des variables différentes (*des binomiales dont les probabilités ou les conséquences pourraient changer [**1812**]*), *puis des tirages multinomiaux ([**1812**]*). Enfin, et ce point paraîtra aux lecteurs de ***Condorcet*** comme un hommage à son aîné disparu, ***Laplace*** en vient à déterminer les lois des événements futurs d'après les événements passés ([***1812***]), c'est-à-dire qu'il propose lui aussi une estimation « *bayésienne* » des fréquences, au lieu des probabilités a priori dont la littérature assurantielle se contentait d'ordinaire.

A ce point, on serait tenté de croire que l'apport de ***Laplace*** à la question traitée par ***Condorcet*** réside uniquement dans l'emploi de cette approximation normale. Mais le normand pousse encore plus avant la généralisation du propos de ***Condorcet*** **:** il envisage en particulier une application du même schéma de raisonnement aux assureurs vendant des *rentes viagères*. Or, la particularité de ce type de produit d'assurance tient à leur complexité analytique **:** l'issue d'un tel contrat ne peut être réduit à un succès ou un échec, puisque la durée de vie potentielle du rentier est comprise dans un intervalle en général assez important (*on ne souscrit pas une rente viagère au seuil de la vieillesse*). ***Laplace*** détaille justement le calcul des rentes sur plusieurs têtes suivant des hypothèses qui permettent de simplifier la courbe de mortalité [***1812***]. Dès lors, une rente viagère est identique aux lois multinomiales étudiées précédemment ce qui permet d'approcher la loi de probabilité d'une somme de rentes. Ce calcul permet en particulier de décider quel taux de chargement garantit aux administrateurs, pour un montant donné de rentes, le niveau de sécurité voulu [***1812***] — *compatible avec la règle de décision de **Condorcet**.*

Voilà donc pour les travaux actuariels de ***Laplace***. Il faut cependant insister sur le lien entre la prise de conscience du risque et le traitement de la question de l'estimation statistique. La série des travaux démographiques de ***Laplace*** [***1781***], [***1786***] lui permet de définir sa « *méthode* », cette approximation analytique dont on a vu le caractère instrumental et crucial dans l'intégration des conditions de sécurité. Précisons en quoi la mathématique développée pour l'estimation statistique - *pour ce que nous appellerions les tests d'hypothèses* - a pu servir à ***Laplace*** dans ses calculs assurantiels.

Dans les tests d'hypothèses (*), on raisonne sur l'observation d'une caractéristique qualitative binaire (*le sexe dans **Laplace** [1781], le fait de naître dans l'année pour **Laplace** [1786]*), les distributions considérées sont donc, là encore, binomiales. Ces tests d'hypothèses consistent à s'interroger sur la probabilité qu'une fréquence réelle soit éloignée de son estimation sur un échantillon. La forme analytique du problème est l'étude d'une variable dont la loi de probabilité est de la forme **:**

$\dfrac{\binom{p'}{q'}\int_0^1 x^q\,(1-x)^{p-q}x^{q'+1}(1-x)^{p'-q'}dx}{\int_0^1 x^q\,(1-x)^{p-q}dx}$ (**). Approcher cette quantité permet ensuite d'étudier avec la même approximation toute variable binomiale. Mais il est faux de croire que la problématique générale de la dispersion (*qui s'applique dans les questions d'assurance*) est explicite chez ***Laplace***. C'est bien l'analogie mathématique, l'analogie entre des formes fonctionnelles identiques — *et certainement pas une analogie de type conceptuel, qui consisterait à rechercher des domaines d'application pour une théorie de la dispersion préexistante* — qui conduit l'auteur à utiliser les mêmes outils.

Pour conclure sur ***Laplace*** dans la perspective de la **VaR**, on peut constater qu'il applique le principe de ***Condorcet*** comme critère de gestion pour des activités variées et qu'il prolonge le parallélisme avec la question de l'estimation. L'intérêt particulier de ce dernier point est qu'il conduit à la cristallisation de seuils de probabilité conventionnels. ***Laplace*** éblouit donc tant par la généralité de son propos que par la précision qu'une spécification donnée permet d'y apporter.

3.3 Lacroix et la diffusion de la théorie du risque :

Au terme de cette présentation des travaux de ***Laplace***, il convient de dire un mot de ***Silvestre-François Lacroix***. Ce disciple de ***Condorcet*** publie en ***1821*** un Traité élémentaire du calcul des probabilités qui mérite son qualificatif (« *élémentaire* »). Le but de ***Lacroix*** paraît être essentiellement de vulgariser le calcul des probabilités dans ses différentes applications. Seulement, il n'est plus question de démonstrations, et encore moins de généralité **:** l'auteur développe des exemples (*dont la difficulté n'excède pas la résolution d'équations du premier degré*) afin d'illustrer le calcul du taux de chargement, étant donné un niveau de sécurité voulu. Le souci pédagogique de l'auteur est incontestable, si bien que ces pages constituent encore une bonne introduction à la question. La présence de ces considérations dans un ouvrage aussi élémentaire a le mérite d'indiquer le degré de diffusion de cette théorie du risque, tout au moins dans le cercle étroit des mathématiciens formés aux questions de probabilité.

(*) **:** Le terme est évidemment anachronique, mais la méthode de ***Laplace*** est tout à fait applicable à l'heure actuelle. Les deux différences avec la façon moderne de procéder à la construction des tests d'hypothèse sont les suivantes **:** d'abord ***Laplace*** utilise une approximation analytique et non un théorème de convergence probabiliste (*ce qui lui permet d'additionner des variables suivant des lois différentes*), ensuite il approche les sommes de variables par la loi qui porte son nom, alors qu'aujourd'hui on utilise un normale centrée réduite (*la loi de **Laplace** a un écart-type de 1/2*). De façon générale, la pertinence des travaux de ***Laplace*** sur l'estimation a justifié l'intérêt des statisticiens contemporains comme ***Cochran***[(33)] [*1977*], [*1978*], ou bien sûr ***Bru*** [*1988*].

(**) **:** Il s'agit d'une fonction bêta, c-à-d. une fonction de la forme B(p,q)= $\int_0^1 x^{q+1}\,(1-x)^{p+1}dx$. ***Euler***[(34)] [*1781*] en a réalisé l'étude détaillée (publiée en ***1794***), c'est pourquoi ***Legendre*** parlait à son propos d'intégrale d'***Euler*** du premier type.

Le travail laissé inachevé est repris par ***Lacroix***, disciple de ***Condorcet***, qui termine les calculs de détermination de la prime, en infléchissant cependant la pensée du maître. En effet, ***Lacroix*** abandonne le point de vue de l'assuré **:** « *après avoir discuté les intérêts de l'assureur, il faudrait s'occuper de ceux de l'assuré, mais cela me mènerait trop loin* ». Cet argument n'est pas vraiment explicite, mais on peut croire que la démonstration par ***Condorcet*** sur ce qu'on pourrait appeler rétrospectivement l'« *épuisement du surplus* » de l'assuré est ici visée. ***Lacroix*** remarque et démontre que la condition de « *seuil* » du côté de l'assureur suffit à déterminer les primes. Le problème des seuils reste cependant leur multiplicité, mais l'auteur donne la prééminence à « *la plus grande perte* ». Le « *gain que donne l'opération* » joue un rôle secondaire, quoique la méthode permette néanmoins de le contrôler. Mais on peut très facilement imaginer de renverser l'ordre des priorités, ce qui ne change rien, du point de vue mathématique, à la méthode que nous allons présenter.

Lacroix reprend le bilan de l'assureur exposé par ***Condorcet***, dans le cas simple où les contrats ont une issue binaire **:** dénouement heureux ou sinistre. Si l'on reprend les notations de ***Condorcet*** (*pour a, b, m, n, etc.*), le bilan de l'assureur s'écrit chez ***Lacroix* :** $n'b' - m'(a+b)$ (*). La plus grande perte est notée c. En posant $n'b' - m'(a+b) = c$, on obtient Evidemment b' comme étant égale au quotient $\frac{c+m'(a+b)}{n'}$. Cette égalité ne permettait pas à ***Condorcet*** de déterminer quoi que ce soit. En effet, si la valeur c du seuil est choisie directement, le problème tient à sa probabilité, puisqu'il faut en déduire le plus petit nombre de sinistres ***m'*** parmi ***n'*** épreuves qui ait une probabilité inférieure. Dès que ***n'*** est un nombre de quelque conséquence, il faut calculer des puissances élevées des probabilités élémentaires (*loi binomiale*), ce qui est fastidieux. ***Lacroix*** donne alors un exemple **:** pour ***n'=200*** navires assurés avec en moyenne un naufrage pour cent traversées, si l'assureur n'admet qu'une chance sur ***100.000*** d'une perte extrême, alors on trouve ***m'=10***. Dès lors, il reste à fixer le montant de la perte extrême, et la prime est déterminée. Dans le 1[er] exemple de ***Lacroix***, en choisissant $-7(a+b)$, la valeur de sept navires, comme perte extrême, on trouve (**) **:** $b' = \frac{-7(a+b)+10\,(a+b)}{200} = \frac{3(a+b)}{200} = 1.5\%$ du capital assuré. Comme chez ***Condorcet***, c'est en fixant la **VaR** qu'on obtient la règle de gestion.

Pour retrouver la probabilité du gain « *normal* », il suffit de fixer le niveau de celui-ci. On l'écrit comme ***Condorcet*** *e*, et l'on remarque qu'il correspond un nombre de sinistres m'' maximum tel que $n'b' - m''(a+b) = e$ (*peu importe que m '' soit entier*). On remarque alors que $m' - m'' = \frac{e-c}{a+b'}$ .Quand le niveau du gain normal, par exemple à $0,7(a+b)$, comme ***Lacroix***, on trouve (*dans l'exemple déjà cité*) $m'' = 10 - \frac{0,7(a+b)-(-7)(a+b)}{a+b} = 2,3$. On procède alors par interpolation d'après la table des valeurs de la loi binomiale pour trouver la probabilité **:** ***67%*** de chances d'avoir deux naufrages ou moins, ***85%*** d'avoir trois sinistres au plus, donc « *2,3 pertes* » nous donnent une probabilité d'environ ***75%***. C'est-à-dire que dans trois cas sur quatre, l'assureur retire un profit supérieur à $0,7(a+b)$ pour un chiffre d'affaires de $3(a+b)$, soit un taux de *23%*.

(*) **:** ***Lacroix*** écrit pour sa part $q'a$-pb, où q' est le nombre de sinistres, a le remboursement par l'assureur à chaque sinistre, p le nombre de primes encaissées et c le montant de la prime. La variable considérée est donc la perte, et non le bénéfice comme chez ***Condorcet***,

(**) **:** Grâce aux tables des valeurs de la loi normale ou d'une binomiale.

Lacroix achève donc de formaliser une partie des idées de ***Condorcet***, en présentant une théorie définitive du seuil de risque. Cependant, comme le remarque ***Crépel***, l'assuré a disparu dans ces calculs **:** ***Lacroix*** est donc représentatif du point de vue actuariel qui domine cette science nouvelle, il présente également l'embryon des techniques qui seront employées par ses successeurs.

L'œuvre économique de ***Lacroix***, ***Laplace*** et ***Tetens*** ne sombre pas dans un anonymat aussi rapide que définitif. La mémoire de ***Tetens*** est vivante chez les actuaires, non seulement allemands (***Bohlmann***) mais aussi anglais (***Godfrey Hardy***[(35)] le cite dans son cours à *l'Institute of Actuaries* en ***1908***). Quant à ***Laplace***, il est évidemment une figure imposante chez ces mêmes actuaires, puisqu'il est le père de la *Théorie Mathématique du Risque*, qui étudie la fixation des primes sous l'angle de la solvabilité presque sûre (*un important survey est fourni par* ***Cramèr***[(36)] *[**1930**]*). Même boudé par les économistes et chassé des facultés de mathématiques par les disciples de ***Gauss***[(37)] obsédés de rigueur et d'abstraction, ***Laplace*** a légué à tous ceux que les problèmes d'estimation intéressent, une méthode qui attendra ***Jerzy Neyman*** pour connaître des améliorations substantielles.

4/ L'économie politique au début du XXe siècle :

L'influence de ***Laplace*** sur ***Edgeworth***[(38)] est à la fois évidente et connue (***Stigler***[(39)] [***1987***]). Le sujet nous donne une nouvelle fois l'occasion de le montrer, et par la même occasion de saisir comment les économistes s'emparent d'une règle de gestion normative pour en faire un principe descriptif. Après ***Edgeworth***, ***Wicksell***[(40)] a considéré la trésorerie d'entreprise en général. Enfin, on dira un mot sur les développements de la microéconomie dans l'Angleterre des années ***30***, car la décision risquée y est à la mode, mais, comme au ***XVIIIe*** siècle, les Anglais restent à l'écart de la **VaR**.

4.1 Edgeworth et le concept de solvabilité bancaire :

Le choix d'***Edgeworth*** [***1888***] pourrait apparaître peu judicieux pour illustrer l'histoire de la **VaR**, dans la mesure où cet article ne parle pas de risque. Cet auteur démontre cependant ses liens avec ***Laplace***, et il offre un cadre conceptuel aux travaux ultérieurs consacrés à la question. L'auteur observe que « *la solvabilité et le profit du banquier dépendent de la probabilité qu'il ne soit pas appelé à rembourser d'un coup plus d'un tantième de son passif* » — *c'est exactement la définition du risque qui transparaît des travaux de* **Condorcet** *et surtout de* **Laplace**. ***Edgeworth*** représente l'activité bancaire comme un « *jeu* » où il faut arbitrer entre profit et solvabilité (*pour augmenter le profit, il faut limiter les immobilisations, ce qui remet en cause la solvabilité de la banque*). Le reste de l'article s'occupe de la détermination d'un niveau minimal pour les réserves liquides compatible avec une solvabilité presque sûre **VaR** ; et insiste en particulier sur les conséquences de l'addition des variables aléatoires **:** si le volume d'activité croît dans une proportion r, il suffit que les réserves augmentent d'un facteur $\sqrt{r}$. Sur ce point, ***Edgeworth*** rejoint les considérations du Marquis de ***Laplace***.

Pour parvenir à la détermination du niveau de réserves, l'auteur a recours à une hypothèse simplificatrice **:** l'indépendance des retraits (*il distingue cependant des variations saisonnières et admet la possibilité de rares crises de confiance*). Sous cette hypothèse, le théorème *limite central* permet de considérer que la somme des mouvements de trésorerie suit la « *loi des erreurs* ». ***Edgeworth*** peut alors considérer les statistiques des retraits comme des réalisations d'une variable normale et obtenir le niveau de réserves minimal compatible avec une probabilité de solvabilité donnée. Il lui suffit pour cela d'estimer les paramètres « *de location et d'échelle* » de sa variable **:** la médiane et le module (*). Les statisticiens contemporains seraient un peu déroutés par ces grandeurs **:** l'emploi de la médiane s'explique notamment par l'importance des études graphiques, et le module trouve son origine dans une façon surannée d'écrire la densité de « *loi des erreurs* : *loi Normal après **K-Pearson*** ». Alors qu'aujourd'hui on considère, à la suite de ***Karl Pearson***, une densité du type $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ (où l'écart-type vaut σ^2), ***Edgeworth*** écrit encore $y = \frac{1}{c\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{c^2}}$ (où le module vaut *c*).

Après ***Laplace*** (***Cournot***[(41)], ***Jevons***[(42)]…), ***Edgeworth*** réintroduit donc les théorèmes de convergence probabiliste en économie **:** il peut ainsi obtenir simplement la probabilité qu'une variable dépasse un certain seuil. On peut cependant s'étonner que cet auteur n'ait pas voulu recourir à une notion de risque globale.

4.2 Wicksell, Fisher et l'écart type gaussien :

Wicksell a lu l'article d'***Edgeworth*** puisqu'il le cite dans Geldzins und Güterpreise « *L'intérêt de l'argent et des prix* ». En matière purement statistique, il se contente d'une innovation mineure **:** il emploie l'*écart probable* (**) au lieu du *module*. En revanche, l'interprétation économique s'enrichit nettement puisque le modèle vaut désormais pour toutes les entreprises (***Wicksell** expose d'ailleurs en premier lieu la généralisation dans une économie au comptant avant d'envisager le crédit, c'est-à-dire les banques*). On peut ainsi calculer la probabilité pour une entreprise donnée de ne pouvoir honorer ses engagements. L'auteur insiste à nouveau sur l'importance de la taille des firmes **:** si l'entreprise double sa taille, alors son besoin de trésorerie sera multiplié seulement par $\sqrt{2}$, et donc la trésorerie diminuera en proportion du chiffre d'affaire (***) . Cependant ***Wicksell***, comme ***Edgeworth***, n'emploie pas le mot « *risque* », sauf en parlant de « *prime de risque* » sur les taux et, dans ce dernier cas, il ne propose pas de « *mesurer* » le risque.

Dans la mesure où l'article d'***Edgeworth*** ne semble pas avoir été lu, on serait tenté de faire remarquer le rôle très important que ***Wicksell*** a joué dans la transmission de la règle de gestion. Les auteurs des années trente, comme ***Hicks***[(43)] et ***Makower***[(44)] (*qui a rapporté sur* Geldzins und Güterpreise *pour Economica, un an avant la publication de son article avec **Marschak***[(45)]) connaissaient bien ***Wicksell***. Mais cela n'a pas suffi à attirer les chercheurs sur cette piste, puisqu'ils en ont préféré une autre, plus abstraite et générale, comme on le verra au paragraphe suivant. La postérité des travaux de ***Wicksell*** devra donc encore attendre, ce qui n'est pas le cas de ceux d'***Irving Fisher***[(46)], comme on va le voir.

Kolm[(47)] attribue à ***Irving Fisher*** le mérite d'avoir donné sa forme définitive à l'idée d'***Edgeworth***. En reprenant la même idée de calcul du risque d'insolvabilité (« *probabilité que les bénéfices tombent au-dessous de la ligne de paiement des intérêts* »), ***I. Fisher*** utilise cette fois l'écart-type, qu'il emprunte indirectement à ***Pearson*** Via ***Norton*** pour calculer la probabilité du risque d'insolvabilité.

(*) **:** Le module est égal à l'écart-type multiplié par $\sqrt{2}$.
(**) **:** Il s'agit de la valeur du quartile d'une loi normale. Elle est égale à *0,67* fois l'écart-type.
(**) **:** Pour une variable aléatoire ***X*** d'écart-type σ , l'écart-type de ***2X*** est $\sigma\sqrt{2}$. Le module et l'écart probable suivent les mêmes règles.

Comme l'écart-type est la mesure de dispersion qui s'est imposée, par exemple chez ***Markowitz***, on pourrait chercher à accorder à ***I. Fisher*** un rôle important dans la propagation de la thèse d'***Edgeworth***. Il n'en n'est rien car les idées fisheriennes sur la finance n'eurent pas grand écho, sans doute du fait de leur confusion.

D'autre part, ***Irving Fisher*** revient sur le sujet dans son ouvrage de ***1930***. On devine alors l'influence de ***Knight***[(48)] **:**« *bien qu'il soit possible de calculer mathématiquement les risques d'un certain type comme ceux des jeux de hasard (...), la plupart des risques économiques ne sont pas si aisément mesurés* », écrit ***Fisher***. Encore cette acception du mot « *mesure* » doit elle être entendue dans un sens minimal **:** il s'agit simplement d'estimation de la distribution de probabilité d'une variable donnée (un « *risque* » dans le jargon actuariel), et non de la définition d'une grandeur qui permettrait de décider du risque (*au sens de danger potentiel*) inhérent à la distribution. En outre, ***Fisher*** avait dès ***1906*** refusé de qualifier l'écart-type de mesure du risque **:** il employait le terme statistique de « *variabilité* ».

Le déni de la causalité habituelle dans la corrélation classique entre risque et rendement, et le refus explicite de mesurer les risques empiriques nous portent à croire que ce n'est pas ***Irving Fisher*** qui a influencé les économistes de la génération suivante. L'emploi de l'écart-type témoigne simplement de l'ascendant que ***Pearson*** s'est rapidement assuré sur la statistique. D'ailleurs, on s'étonne alors de rencontrer encore dans les années vingt, sous la plume de ***Pigou***[(49)], des considérations « *à l'ancienne* » sur les « *courbes de fréquences* » qui se présentent alternativement comme des « *parapluies ouverts* » ou « *fermés* ». Ce phénomène dénote simplement la persistance de la statistique graphique dans la formation des économistes anglais, et probablement le peu d'intérêt de ***Pigou*** pour le problème purement statistique de la construction des mesures, soit à cause de la ruine de leur auteur consécutive au ***krach de 1929*** « *voir annexe 05* ».

4.3 Hicks et le débat sur les moments d'ordre supérieur :

En ***1934***, ***Hicks*** utilise ce qu'il connaît des statistiques pour proposer une approche systématique de la décision **:**

> *« ... la forme de chaque courbe de fréquence peut être étudiée au moyen de ses moments — dans le sens statistique du terme. Chaque courbe peut être définie de façon univoque en prenant un nombre assez grand de moments, et en prenant un nombre restreint on obtient une approximation de la Situation ».*

En matière d'analyse en termes de moments, ***Hicks*** semble ici l'initiateur d'un mouvement que ***Chambers***[(50)] et ***Marschak*** prolongent. ***Chambers*** reconnaît explicitement l'antériorité des recherches de ***Hicks***, tandis que ***Marschak*** se réfère de manière allusive à un travail dont il s'inspire pourtant directement.

La description par les moments ne permet cependant qu'une approximation des densités, il faut encore construire la décision. C'est ce que va faire ***Chambers***. Dans un article de ***1934***, cet auteur considère le problème de l'investissement. Les variables aléatoires dont il traite constituent les perspectives de rendement de ces investissements. L'auteur n'est pas explicite sur la construction de cette variable agrégée, sur le fait qu'elle inclut ou non les remboursements du principal, et surtout sur le taux qui est retenu pour actualiser les sommes futures. Après tout, on parle bien du taux d'intérêt, sans plus de précisions, avec l'idée que les contingences n'ajoutent rien à la théorie. L'important est pour ***Chambers*** que la moyenne figure le rendement moyen, et que l'écart-type représente le risque. L'auteur commente ainsi une carte d'indifférence **:**

> *« Si notre individu peut recevoir deux pour cent sans aucun risque, il sera indifférent entre ces deux pour cent sans risque et deux et demi pour cent avec un écart-type de un, etc. pour toutes les valeurs de la courbe d'indifférence notée (iii) ».*

On aura compris que les courbes d'indifférence sont croissantes dans le plan (*variance, espérance*) ; ceci traduit le fait qu'on n'accepte un accroissement de risque qu'au prix d'une rémunération (*moyenne*) supérieure. Il est également un point que ***Chambers*** ne précise pas de façon explicite, mais que son graphique montre, c'est que la prime de risque croît plus que proportionnellement avec le risque ; les courbes d'indifférences sont donc (*légèrement*) convexes si le rendement est porté en ordonnée. L'existence de cette carte d'indifférence permet d'envisager la résolution du « *programme de l'investisseur* ». Le reste de l'article construit ainsi un équilibre entre offreurs et demandeurs de capital.

A la suite de ***Hicks***, ***Chambers*** est parfaitement conscient du caractère approximatif d'un modèle qui ne prend en compte que les deux premiers moments. Il indique donc qu'il est possible de tenir compte des moments d'ordre supérieur, qui peuvent se révéler discriminants dans des cas « spéci*a*ux », mais avoue ne pas poursuivre l'analyse au-delà de deux dimensions (*il est vrai que le cas à n dimensions ne présente aucune particularité tant que n est fini*). Pour sa part, ***Hicks*** se montre plus embarrassé par les moments d'ordre supérieur. Dès son papier de ***1934***, il concède qu'une analyse limitée à deux moments est approximative. ***Marschak*** est en fait le premier à proposer et à justifier explicitement l'importance du coefficient d'asymétrie (*skewness* , *moment de troisième ordre*), auquel ***Hicks*** se rallie définitivement par la suite . Le modèle de décision canonique comprend donc, en plus du rendement et du risque, un facteur de potentiel (*), suivant l'exemple que donne ***Marschak :*** les gens « *n'aiment pas (...) les situations où la consommation de viande peut varier dans un intervalle important ; (...) et (en témoignent les supercagnottes sur les matches de football), ils aiment les gains élevés à faible probabilité, c'est-à-dire une forte asymétrie à droite des gains* ». Mais puisque les préférences sont maintenant construites, il convient de voir à quels domaines les auteurs appliquent leur modèle.

Les textes qui formalisent la relation d'indifférence présentent évidemment aussi une mise en situation de cette innovation. Le thème dominant est au départ le marché monétaire, comme en témoignent les titres des articles de ***Chambers***, ***Hicks***, ***Marschak***. Le risque est d'abord pris en compte comme un aspect dominant dans l'arbitrage qui conduit à la détention de titres ou d'obligations (*on n'est pas loin de la préférence pour la liquidité de* ***Keynes****(53)*). Mais ces auteurs débordent rapidement les questions de finance pure **:** dans un article de ***1938*** intitulé de manière trompeuse « *la monnaie et la théorie des actifs* », ***Marschak*** introduit la représentation d'une économie d'incertitude (*au mépris de la terminologie knightienne*). Cependant, le sens de l'incertitude dans cette économie est loin d'apparaître clairement.

(*) **:** Ce terme s'est imposé pour décrire l'effet d'une asymétrie. Dans un cadre théorique différent, il est employé par ***Lopes****(51)* [*1986*], [*1987*] et ***Cohen****(52)* [*1992*], entre autres.

Ces longs développements montrent que la piste explorée par ***Edgeworth*** et ***Wicksell*** a été perdue de vue au profit de travaux abstraits qui annoncent ceux ***Markowitz***. Il faudra attendre les années cinquante et le développement de la institutionnel de la finance pour voir ressurgir une thématique proche de la **VaR**. Entre- temps, la théorie des tests qui s'est développée à la suite des travaux de ***Neyman*** et ***Pearson*** [***1928***], [***1933a***], [***1933b***] a familiarisé les jeunes diplômés avec la notion de seuil de confiance. Le consensus autour de niveaux de confiance standard — *comme l'illustre par exemple* ***Popper***[(54)] *[1959]* — jouera certainement un rôle dans la transformation de la règle de gestion en critère de comparaison.

5/ La théorie financière a partir des années 1950 :

Par « *théorie financière* », on entend en fait des travaux marginaux dus à ***Roy*** et aux économistes agricoles, car le *mainstream* reste trop près de la problématique des années ***30*** pour contribuer à la diffusion de la **VaR**.

5.1 Arthur D.Roy et la contrainte de sécurité :

Les relations entre *économie* et *finance*, que ce soit sur le plan théorique ou institutionnel, sont complexes. On se contentera ici de suggérer d'abord le caractère marginal voire sulfureux des études financières chez les économistes **:** la bourse constitue souvent un objet de scandale, qu'on y gagne comme ***Ricardo***[(55)] et ***Keynes*** ou qu'on y perde comme ***Irving Fisher***. Jusqu'à une date récente, ce n'est pas un sujet théorique noble, si bien que la finance se construit comme discipline à la suite de son exclusion par les économistes. En cela, ***Markowitz*** joue un rôle particulier, puisqu'il est le premier exclu, son parcours est donc emblématique, et aussi révélateur d'un mouvement de fond qui conduit à l'institutionnalisation de la finance, discipline où la notion de risque est centrale, aux portes de la théorie économique. Cette exclusion s'est opérée avec la fameuse tirade de ***Friedman***[(56)] pendant la soutenance de thèse de ***Markowitz* :**

> *« Harry, je ne vois pas de problème avec tes mathématiques, pourtant j'ai un problème. Ce n'est pas de l'économie, et on ne peut pas te donner un doctorat d'économie pour une thèse qui n'est pas de l'économie. Ce n'est pas des maths, ce n'est pas de l'économie, ce n'est même pas de la gestion » (Bernstein [1992]).*

En effet, le point de vue économique des années trente dont on a parlé, étudiait le choix de portefeuille pour comprendre les conditions de la politique économique. Ici, il est clairement question de guider le choix d'un portefeuille optimal. Dès cette origine pourtant, la finance apparaît frappée d'ambiguïté **:** comme discours théorique, elle peine à se démarquer de (*la macro*) économie, même si elle affiche des prétentions opérationnelles distinctes (*la gestion de portefeuille et non pas de la conjoncture*). On peut néanmoins se demander ce qu'il en est vraiment du caractère opérationnel de ces théories. ***Roy*** [***1961***] a dénoncé le mélange des genres entre une théorie économique trop complexe et une volonté affirmée d'application. La théorie pure de ***Markowitz***, qui revendique la filiation de ***Savage***[(57)], et utilise la méthode de ***Sharpe Williams***[(58)] pour calculer des valeurs actuelles (*et leur variance*) de tous les titres étant données (*si l'on peut dire*) leurs distributions de probabilités subjectives est tout bonnement inapplicable. Même la version simplifiée, qui consiste à utiliser les performances passées des titres, est à peu près inutilisable au milieu des années soixante.

A contrario, ***Roy*** insiste sur le fait que les financiers réclament des méthodes rudimentaires et prêtes à l'emploi (« *rough and ready rules of thumb* ») et non pas de théories sur un autre monde. Pour cela, l'anglais considère un programme de maximisation du revenu avec une contrainte de « *sécurité* » **:** il impose une très grande probabilité (***95%***) que le revenu dépasse un minimum donné. On retrouve donc le principe de ***Condorcet*** — *ici baptisé safety-first principle* — et l'idée de fixer un niveau de confiance et un niveau de perte, donc une **VaR** maximale admissible. Deux différences apparaissent toute fois avec le modèle de ***Condorcet*** **:** d'une part le seuil de sécurité conventionnel est fixé en référence aux tests statistiques qui sont d'un usage général. La pratique a donc créé des habitudes. D'autre part, au lieu de considérer directement les distributions des rendements, ***Roy*** simplifie les calculs en recourant à l'inégalité de ***Bienaymé***[(59)]***-Tchébycheff***[(60)] (*). Il emploie donc et retrouve donc formellement les résultats de ***Markowitz***… Comme le remarque ***Bernstein***, « *[**Roy**] a eu la malchance de publier son article […] trois mois après la publication de celui de **Markowitz** dans le Journal of Finance* ». Pourtant, en ***1952***, ***Roy*** va plus loin que ***Markowitz*** **:** en particulier, il donne l'expression analytique de la « *frontière efficiente* » qui n'apparaîtra que dans ***Markowitz*** [*1956*].

L'œuvre de ***Roy*** a donc le double mérite de rappeler opportunément l'importance de la **VaR** comme principe de gestion, tout en réglant le choix des seuils probabilistes qui se sont imposés avec la diffusion des tests statistiques. Mais ***Roy*** montre aussi l'ambiguïté fondamentale de l'« *analyse markowitzienne* », qui prétend à l'application (*bien qu'elle soit inapplicable*) et s'adresse donc aux théoriciens ; cette ambiguïté s'étend aux héritiers de ***Markowitz***, tant chez les financiers (*en particulier **Mossin***[(61)]) que chez certains économistes agricoles. Nous ne considèrerons toutefois que ceux qui sont restés du côté de l'application.

5.2 Freund et la pratique des risques agricoles :

Si l'on considère d'ordinaire que les économistes agricoles ont emprunté à ***Markowitz***, il faut insister sur la précocité de l'article de ***Freund***[(62)] [*1956*]. Comme son titre l'indique (« *the introduction of risk into a programming model* »), ce papier s'attaque au même problème technique que ***Markowitz*** [*1956*] (*et, rappelons-le, **Simon***[(63)] [*1956*]). En effet, ***Freund*** choisit de maximiser une combinaison d'espérance et de variance (*donc une fonction non-linéaire*) sous des contraintes elles-mêmes linéaires. Encore une fois, ***Markowitz*** n'est ni le seul, ni visiblement le premier. Mais il peut au moins se prévaloir dans ce cas de la théorie générale du choix (*même si nous l'attribuons à **Hicks***), alors que ***Freund*** retient une fonction d'utilité particulière. Il y a lieu de penser que l'avantage de ***Markowitz*** tient surtout à sa position à la **RAND**, à celle de son directeur de thèse à la *Cowles*, lieux où souffle l'esprit. En comparaison, le nom du ***North Carolina State College*** (*où **Freund** a préparé sa thèse*) suscite plutôt la condescendance **:** comme *College*, ce n'est pas une institution de recherche. Il faut donc voir aussi dans la réputation accordée à ***Markowitz*** un effet institutionnel indéniable.

(*) **:** Le théorème de ***Bienaymé-Tchébycheff*** permet d'écrire que la probabilité de s'écarter de la moyenne est inférieure à une fraction de la variance, ainsi pour une variable ***X*** de moyenne *m* et une distance *d*, le théorème donne **:** **P**(|x-m|$\geq m-d) \leq \frac{\sigma^2}{(m-d)^2}$, ou encore **:** **P**(m-x$\geq m-d) = p(x \leq d) \leq \frac{\sigma^2}{(m-d)^2}$. Minimiser la probabilité que le rendement soit plus faible qu'un seuil donné revient donc à minimiser la variance du portefeuille, comme le fait ***Roy*** [**1952**].

Manifestement, l'économie agricole ne jouit pas d'une grande publicité **:** ***Rudolf Freund*** a proposé une application du modèle de ***Markowitz*** à la détermination du programme de culture optimal pour une exploitation agricole dès ***1956***, c'est-à-dire deux ans avant l'article considéré comme « *fondateur* » de ***Tobin***[(64)]. Et pourtant ***Freund*** n'est jamais cité que par les économistes agricoles. Cela provient-il du caractère « *appliqué* » de ses recherches, et du mépris des théoriciens pour l'apparence de modestie des conclusions des « *agriculteurs* » **?** Ne faut-il pas plus simplement voir dans cette ignorance une nouvelle manifestation du mépris des villes pour les campagnes, des capitales pour les provinces, du centre pour la Périphérie (*s'il faut parler comme Braudel pour être général*), ou, dans ce cas précis, un mépris des théoriciens pour les praticiens **?** Car ***Freund*** [***1956***] ne construit pas la frontière efficiente comme le fait ***Markowitz***, mais dérive directement le « *portefeuille de culture* » optimal d'une fonction d'utilité pour les deux premiers moments du revenu total. En l'absence de frontière efficiente, on pourrait penser que le modèle de ***Freund*** est moins élégant que celui de ***Markowitz*** ; mais curieusement, cette faiblesse le rend assure la compatibilité avec la théorie de l'utilité espérée, que ***Markowtiz*** a mis trente ans à obtenir **!** Quoi qu'il en soit, les spécialistes de l'économie agricole, à l'écart des modes, ont fait grand usage du modèle de ***Markowitz***, et posé bon nombre de questions sur son statut théorique.

La discussion autour du modèle de ***Freund*** témoigne du faible intérêt des spécialistes de l'économie agricole pour l'unification théorique. En effet, ils ont décidé de s'éloigner résolument du cadre de référence que ***Mossin***, ***Sharpe*** et ***Lintner***[(65)] construisaient en raison de la destination pratique de leurs recherches. L'emploi des formulations à la ***Markowitz*** pose en effet deux problèmes pour l'application **:** la frontière efficiente ne propose pas une lecture directe en termes de sécurité, et son calcul se révèle trop complexe.

Boussard[(66)] s'est fait un des avocats du premier argument, en montrant que l'important n'est pas d'optimiser mais de savoir comment on optimise. Pour un ménage agricole qui choisit son plan de culture, le risque prend la forme d'un revenu inférieur à un certain seuil. C'est très exactement la formulation de ***Condorcet***. On revient donc à la formulation de ***Roy***, que les auteurs ne connaissent pourtant pas **!** Comme lorsqu'au ***XVIII^e^*** siècle ***Tetens*** et ***Condorcet*** travaillaient parallèlement, on doit s'interroger sur les raisons de cet air du temps. La réponse tient manifestement à l'intégration dans la culture des ingénieurs de rudiments de statistique mathématique qui leur fait retrouver l'esprit de ***Laplace***. Sur le plan théorique, les modèles des agriculteurs perdent certainement en généralité par rapport à l'analyse de ***Markowitz***, et la frontière efficiente disparaît, ce qui diminue « *l'élégance* » du résultat. A la place, on spécifie une **VaR** limite, ce qui fait bien notre affaire. On observe ensuite les plans de production des ménages agricoles si on fait l'hypothèse qu'ils se comportent conformément au modèle et aux paramètres (*prix*, ***VaR***) spécifiés.

La volonté de décrire les mécanismes de décision des agriculteurs n'est pas le seul facteur qui conduisit les économistes à prendre des libertés avec le modèle de ***Markowitz***. A la même époque, ***Hazell***[(67)] constate que ce dernier est trop exigeant en matière de qualité de l'information et de traitement de cette information. Sur le premier point, l'auteur observe qu'il est difficile de supputer une matrice de *variances-covariances*, alors qu'on peut proposer quelques estimations de rendements. Sur le second, il observe que la résolution d'un programme quadratique nécessite l'intervention d'un ordinateur de grande puissance (*pour des raisons de précision*), alors qu'un programme linéaire se contente d'un opérateur formé à la méthode du simplexe. ***Hazell*** propose donc de remplacer dans le programme de ***Markowitz*** la minimisation de la variance par la minimisation de l'écart moyen absolu (*du revenu*), d'où l'acronyme

MOTAD (*pour Minimization Of Target Absolute Deviation*). Dans la perspective qui avait conduit à proposer la semi-variance, ***Hazell*** envisage également de considérer le seul écart moyen négatif, et montre que les calculs restent toujours aussi simples.

Afin de rendre leurs modèles testables ou applicables de manière simple, les économistes agricoles sont donc conduits — *sans le savoir* — à retrouver les suggestions de ***Condorcet*** et ***Tetens***. En mettant l'accent sur la pratique au détriment de la théorie, les économistes agricoles anticipent sans le savoir l'évolution de la finance. Sauf que dans ce dernier cas, c'est le régulateur qui a imposé l'utilisation de la **VaR**.

5.3 La finance comme unité de pratique :

Les années récentes sont les mieux connues **:** on trouve aisément des contributions sur les forums spécialisés, comme celui de *http://www.contingencyanalysis.com* ou *http://www.riskglossary.com* , et surtout la remarquable synthèse de ***Holton*** [*2002*]. On se contentera d'indiquer deux directions **:** les réglementations prudentielles d'un côté, l'histoire de l'expression d'un autre.

5.4 La VaR comme consensus professionnel :

L'expression ***Value-at-Risk*** semble à la fois récente et incertaine. Il semble qu'à la fin des années ***80*** on ait vu voisiner "*dollars-at-risk*" (***DaR***), "*capital-at-risk*" (***CaR***), "*income-at- risk*" (***IaR***), "*earnings-at-risk*" (***EaR***) and "*value-at-risk*" (***VaR***). Tout cela trahit à la fois la vogue du concept de risque et l'indécision sur ce qui y était exposé. Finalement le terme value est le plus général. C'est aussi le plus normatif, puisqu'il évoque une autre mode contemporaine **:** celle de la *shareholder value* (*). Quoi qu'il en soit, après une phase d'incertitude, le rapport du ***G-30*** en ***1993*** puis la publication du ***RiskMetrics Technical*** Document par ***JP Morgan***[(68)] en ***1994*** ont stabilisé la dénomination. ***Holton*** [*2002*] donne un aperçu assez fouillé avec des références, en particulier ***Guldimann*** qui a mené le projet ***Riskmetrics*** chez ***JP Morgan*** semble se prévaloir de l'invention de la terminologie et de sa diffusion dans la profession. ***Holton*** [*2002*] insiste d'ailleurs sur le fait que ***Riskmetrics*** proposait une version plutôt simplifiée de la **VaR** (*par rapport à des conceptions concurrentes plus raffinées*), et que l'essentiel du travail accompli par ***JP Morgan*** fut la diffusion du concept, y compris à travers une campagne de public relations remarquablement orchestrée, puisqu'elle mobilisa la force de vente des éditeurs de logiciels payants censés aider à l'implémentation du modèle.

La « *génération spontanée* » de l'expression au début des années ***90*** témoigne donc à la fois de l'aspect communauté de pratique — *car la **VaR** est plus une pratique qu'une « théorie », ou alors c'est une théorie d'un niveau technique vraiment faible* — et de la préparation du champ avant le démarrage du phénomène. Il faut néanmoins tenir compte d'un autre facteur **:** le rôle des autorités de régulation.

(*) **:** *Shareholder value* « *Valeur pour l'actionnaire* » est la mesure de la valeur créée par une entreprise et donc un indicateur très apprécié par les investisseurs. Elle dépend notamment des mesures prévues par la direction d'une société afin que le rendement du capital des actionnaires puisse surperformer certains repères tels que le coût du capital. L'objectif étant que le rendement des actions des actionnaires soit supérieur à celui qu'ils pourraient eux-mêmes gagner en investissant dans d'autres actifs ayant la même quantité de risques.

5.5 La régulation entre mesure et métrique :

Les auteurs américains aiment mettre en avant l'existence de réglementations prudentielles sur le ***NYSE***(*)**:** dès ***1922***, ce marché imposait aux firmes participantes de provisionner ***10*** % du montant de leurs provisions. Par la suite, la réglementation prudentielle américaine s'est développée en raffinant cette règle de base. C'est en fait un trait commun aux professions bancaires et financières **:** la maîtrise du risque progresse sous l'effet de la réglementation. Il faut dire que, pour le régulateur, l'enjeu — *des faillites bancaires en cascade conduisant à la destruction du système* — est de taille, c'est le type même de risque « *systémique* ». En comparaison, les assurances ont, comme on l'a vu, conçu leur propre méthode de maîtrise des risques depuis le *dix-neuvième siècle*. Il est vrai qu'en matière bancaire, le risque de crédit comme le risque de marché sont plus délicats à modéliser. C'est pourquoi le régulateur intervient pour fixer un cadre légal de référence.

Aux *Etats-Unis*, si les marchés financiers exigent depuis les années ***20*** des réserves, c'est surtout la mise en place en ***1980*** par la ***SEC***(**) d'un nouveau système de garantie qui a fait date **:** pour la première fois, le but du système s'exprime clairement en termes de **VaR**. Il faut que la **VaR** à ***95*** % à ***30*** jours des établissements financiers soit compatible avec leurs réserves. Principe de ***Condorcet***, toujours. Sauf que cette fois le principe de sécurité est adossé au système de ***haircut*** (***)**:** les différents actifs sont pondérés selon des proportions choisies par le régulateur pour représenter leur risque propre. C'est encore l'approche qui présidera aux Accords de **Bâle** en ***1988***, à leur transposition dans le droit européen, à leur aménagement en ***1996***…

Cette année ***1996*** marque un nouveau tournant dans l'histoire des réglementations prudentielles **:** d'une part, la **VaR** est validée par le Comité de **Bâle** comme la mesure du risque agrégé, d'autre part, les nouveaux accords marquent l'approbation par le régulateur des métriques privées. Désormais le régulateur n'impose pas forcément sa mesure, il peut se contenter de certifier une méthodologie. Cela peut sembler un retour à avant la réglementation, mais il semble difficile de ne pas tenir compte de la complexité sans cesse croissante des transactions financière, du renouvellement des produits, etc.

(*) : ***NYSE*** *« Le New York Stock Exchange »*, ou la Bourse de New York, est la plus grande des bourses mondiales. Par métonymie, on l'appelle souvent « *Wall Street* ». Son origine remonte à la signature, par ***24*** agents de change de New York le ***17*** mai ***1792***, d'une convention dite « *l'Accord de Buttonwood* », c'est-à-dire du platane d'Amérique, du nom de l'arbre (*le buttonwood tree en anglais*) sous lequel ils avaient l'habitude de se réunir, situé à l'emplacement de l'actuel ***68***, Wall Street.

(**) : *La Securities and Exchange Commission* est l'organisme fédéral américain de réglementation et de contrôle des marchés financiers. C'est en quelque sorte le « *gendarme de la Bourse* » américain. Ses pouvoirs et sa composition ont été profondément remaniés par le *Dodd–Frank Wall Street Reform* and *Consumer Protection Act* de ***2010***. La *SEC* a été créé par application de l'article ***4*** du Securities Exchange Act de ***1934*** voté par le Congrès en réponse à la période de récession qui a suivi le grand *krach* boursier de ***1929***. La *SEC* fut principalement créée dans le but de faire appliquer les nouvelles lois financières, promouvoir la stabilité des marchés et surtout protéger les investisseurs des abus de sociétés relatifs aux achats et vente d'actions ainsi qu'aux informations rendues publiques.

(***) **:** ***Haircut*** « *marge de sécurité* » c'est la différence entre le prix de marché d'un titre et sa valeur retenue en tant que gage. La marge de sécurité est prise par le prêteur de manière à se prémunir contre les pertes pouvant résulter d'une liquidation de la garantie en cas de diminution du cours du titre

Il faut donc décentraliser l'évaluation des risques et certifier les méthodes ou les procédures plutôt que les évaluations elles-mêmes, bref les métriques plutôt que les mesures. Le but de la réglementation est alors non seulement de maîtriser effectivement le risque des établissements de crédit et des intervenants sur les marchés financiers mais aussi de permettre l'apparition et la diffusion des bonnes pratiques. En effet, la tentation existe pour les établissements de considérer le *risk* management comme un coût et d'en faire le moins possible de ce côté-ci. Mais en suscitant la compétition entre les modèles internes, comme ***Riskmetrics*** l'a été chez ***JP Morgan*** au début des années ***1990***, les autorités de régulation espèrent dans une émulation parmi les établissements financiers. Peut-être les modèles de *risk* management seront-ils, comme ont pu l'être les modèles d'évaluation de produits complexes ou comme les produits structurés, l'occasion d'innovations et d'un lutte pour le prestige symbolique entre les établissements.

En attendant, le développement des réglementations prudentielles et des pratiques afférentes offre le spectacle d'une profession qui concourt tout entière à l'élaboration de sa propre régulation. Comme les linuxiens avec leurs logiciels, les financiers offrent le spectacle d'une communauté de pratique d'autant plus inattendue que l'on attendait d'eux qu'ils fassent tout payer. Tout, sauf l'image et la preuve de leur sécurité.

6/ L'avenir de la VaR :

La ***crise du subprime*** (*) éclate au moment même ou les accords de ***Bâle II*** entrent en vigueur et consacrent la **VaR** comme mesure de risque. En conséquence les critiques nombreux demandent de changer radicalement la mesure du risque par les établissements de crédit. Une lecture plus précise de l'histoire et des glissements qui se sont opérés, conduit à un jugement plus nuancé.

6.1 La VaR une métrique réglementaire choisie :

De ***Condorcet*** à ***Bale II***, le « *principe de probabilité raisonnable (pour entreprendre)* » a conquis le monde des banquiers. A partir des travaux du ***XVIII*** e siècle, deux étapes importantes dans la diffusion du principe ont conduit à la popularisation des prémices de la **VaR**, c.-à-d. de la culture statistique qui a conduit à la considérer comme une évidence. Ce furent d'abord le développement de la théorie mathématique du risque par les actuaires, qui repose tout entière sur l'idée du seuil de sécurité, et donc sur le *principe de probabilité raisonnable*. Puis la théorie des testes d'hypothèses de ***Neyman*** et ***Pearson*** a fait du principe de probabilité raisonnable (*pour décider*) un élément de la culture statistique universelle. Par là s'explique probablement la convergence des travaux théorique dans les années ***1950*** autour de la notion de « ***Safety First*** » chez ***A.D. Roy*** ou ***R.J. Freund*** (*sans oublier* ***Markowitz***).

L'étape ***Bale II*** marque un élargissement supplémentaire **:** le principe de probabilité raisonnable n'est plus le fondement d'une théorie, ni un élément de la culture universelle des diplômes en science, mais *une métrique réglementaire* choisis parce qu'elle peut être comprise de tous (c.*-à-d. aussi de « ce qui n'ont pas étudié les statistiques* »). Il n'a fallu que ***10*** ans pour transformer cette *success story* épistémologique en crise financière. N'ont pas que ***Condorcet*** avait tort, puisqu'il proposait de considérer les pratiques des « *différents bureaux d'assurances qui ont pu continuer le commerce avec avantage* » .On a dû oublier un paramètre. Ce pourrait être les hypothèses des modèles qui garantissaient la validité du principe.

(*) **:** Est une crise qui touche le secteur des prêts hypothécaires à risque , elle s'est déclenchée aux États-Unis au deuxième semestre ***2006*** avec le krach des prêts immobiliers (*hypothécaires*). En instaurant une méfiance envers les créances titrisées comprenant une part de ces crédits, elle a participé au déclenchement du *krach* de l'automne ***2008***. Ces deux événements sont rétrospectivement considérés comme les deux étapes d'une même crise financière, entraînant une récession touchant l'ensemble de la planète.

6.2 Les hypothèses probabilistes des mesures de VaR :

Tant que ***Laplace*** et ses successeurs considéraient des questions théoriques, leur raisonnement était hypothétique. Avec la mise en œuvre, on n'a pas vraiment porté attention à l'invalidation des hypothèses. Il n'est pas question de discuter ici jusqu'ou les modèles sont faux, mais comment l'erreur s'est introduite, pour éviter qu'elle ne revienne.

Un premier glissement apparait avec le remplacement de la méthode de ***Laplace*** par le *théorème central limite* dans les problèmes de gestion d'assurance. Non pas tant que les hypothèses changent **:** l'expérience prouve surtout que les usages sociaux du *théorème central limite* sont parfois imprudents (*par comparaison, la lourde méthode de **Laplace** incite à réfléchir avant de se lancer dans les calculs, et elle est finalement trop couteuse pour en tirer des conclusions hâtives*) . Une des hypothèses centrales est l'indépendance des tirages **:** elle fait souvent défaut aux produits financiers, comme par exemple aux opinions que les sondeurs traquent chez les sondés. Dans le cas des produits financiers toutefois, cette absence d'indépendance peut avoir deux causes distinctes. La première est inévitable **:** en cas de crise financière tous les actifs sont affectés, et les modélisations valables pour les périodes calmes perdent leur validité. Même l'échelle des risques d'avant la crise est en générale invalidée dans son ordre même car le secteur d'origine est plus affecté, et les reports sur d'autres compartiments de marché, d'autres types d'actifs, sont inégaux, dans ce cas précisément, si on évite la crise, il n'y a plus de problème, reste que l'absence d'indépendance peut provenir aussi d'un défaut de la perception des risques *(par exemple en cas d'anti sélection des emprunteurs, pour rappeler l'exemple récent du **subprime***). Dans ce cas, l'usage du *théorème central limite* est illicite. Tout le problème est que ces deux exceptions à l'hypothèse d'indépendance statistique sont liées logiquement et chronologiquement **:** si un type de produit est mal présenté par les hypothèses probabilistes habituelles, ce qu'on pourra traduire a posteriori par des « *rentabilités non gaussienne* », c'est en général qu'une cause efficiente est à l'œuvre. Dans le cas du marché des ***subprimes***, la probabilité de défaut était sous-estimée. Ce défaut de la représentation des risques peut conduire à une crise locale dont l'extension systématique invalide la représentation probabiliste globale.

Le second glissement s'opère précisément quand on choisit délibérément de rendre compte de risques avec un outil inadapté, comme l'application de modèles probabilistes de risque de crédit. Le choix de la **VaR** pour ce type de risque, combiné avec un pari sur le soutien du préteur en dernier ressort (*au nom du principe « too big to fail »)* a conduit les banques à une prise de risque excessive, mais dissimulée par la métrique qu'on venait de mettre en place. La prospérité du secteur financier s'est poursuivie pendant dix ans aux dépens de l'économie réelle future sur laquelle on a tiré des chèques sans provision.

On aurait beau jeu de fustiger le défaut du politique.. L'opinion publique se partageait alors entre complaisante et critique hypocrite. En attendant qu'une mesure du risque parfaitement satisfaisante soit diffusée parmi des citoyens parfaitement au fait des probabilités, on peut aller à la source du mal actuel en évitatnt les manipulations de la **VaR** à deux niveaux. D'une part, il est désormais connu depuis les travaux de ***Philippe Artzner*** [(69)] et des collaborateurs que, du point de vue des critères de rationalité classique, la **VaR** n'est pas une mesure de risque cohérente car elle n'est pas sous-additive, ce qui permet de la cacher en déconsolidant (*et donc, par exemple, en titrisant*). D'autre part, comme on vient de le voir, le risque propre d'une classe d'actifs peut être très mal perçu. C'est d'ailleurs bien ce qui se produit quand on remarque que « *les distributions de probabilités des rentabilités ne sont pas gaussienne* ». Le rôle des autorités de supervision doit très clairement être de garantir la transparence de l'information en agissant à ces deux niveaux. En particulier, le régulateur / superviseur doit pouvoir identifier des classes d'actifs potentiellement risquées, et proposer une solution systématique pour éviter le risque du même nom.

L'identification par le régulateur d'un risque systématique permet certainement de sensibiliser l'opinion publique et de créer un courant d'opinion favorable à des décisions courageuses.

Toutefois, une supervision financière qui comporterait des éléments discrétionnaires pose un certain nombre de problèmes par rapport à la formule actuelle où l'Etat est le spectateur d'un jeu dont il s'est contenté de traduire les règles plutôt que de les fixer (*si on considère le processus d'élaboration de* ***Balle II*** *d'un côté, des normes comptables de l'autre*). Il convient donc de proposer des règles du jeu acceptables **:** une déclaration de « *catastrophe financière imminente* » doit permettre au superviseur de prendre des mesures d'exception. En échange d'une comptabilisation en valeur historique (*plutôt qu'une comptabilisation en Faire Value*) des actifs concernés, le superviseur pourrait forcer les établissements financiers à provisionner des risques exceptionnels, afin d'assumer leur part d'un risque systématique en formation. La difficulté principale est évidement la répartition du montant des provisions entre les acteurs du marché, car un effet de passager clandestin est à craindre. De manière générale, la rédaction des règles comptables doit probablement être infléchie de manière à ne favoriser ni le prélèvement fiscal, ni le prélèvement actionnarial, mais la surveillance effective des risques.

Le principe de probabilité raisonnable conditionne évidement la qualité des décisions des détenteurs de capitaux, de leurs mandataires comme des superviseurs à la fiabilité de l'information fiable sur les prix, et les probabilités de défaut. En ce qui concerne les premiers, la directive **MIF** pose déjà des problèmes, et il faut donc garantir à l'avenir la centralisation des informations des dispositifs d'exécution des transactions boursières distincts des marchés réglementés (*systèmes multilatéraux de négociation, intermédiaires internalisateurs*). Quant aux probabilités de défaut, la crise a révélé la collusion des agences de notation, des emprunteurs et des banques d'affaires. Il est temps de séparer les intérêts **:** les préteurs doivent payer (*les agences de notation*) pour avoir un avis élaboré sur des informations publiques. L'hypothèse d'efficience des marchés étant mise à mal, on peut penser que les agences ont un vrai savoir-faire à vendre. De leur coté, les emprunteurs ne doivent ni payer pour être évalués, ni être évalués par ceux qu'ils payent. Ces principes simples conduisent évidemment à un ***big bang*** du rating, ne serait-ce que parce que la structure de marché à trois agences ne pourra se maintenir. Apres tout, le scandale ***Enron*** a fait une victime, considérée comme la plus éminente agence d'audit à l'époque **:** la transparence financière est à ce prix, plus qu'à celui des bonus et des golden parachutes.

En conclusion l'histoire du concept de ***Value-at-Risk*** embrasse plus que l'histoire de la théorie financière ou les recommandations prudentielles de la profession. En fait, le formalisme de la ***VaR*** est né chez les mathématiciens des années ***1780*** pour résoudre des questions d'arithmétique politique, qui touchaient simultanément à la gestion et à la démographie.

En fait, ***Condorcet***, ***Laplace*** et leurs successeurs ont inventé tout à la fois la gestion quantitative (*des sociétés d'assurance*) et la statistique mathématique (*inférentielle*). Si l'idée de dispersion résume ces travaux des premiers temps, il faut comprendre que ce n'est pas le concept qui est généralisé, mais l'outil mathématique (*la méthode de* ***Laplace***) qui trouve à s'appliquer à des questions mathématiques isomorphes. Au long du la ***XIX*** ^{e} siècle, *la Théorie Mathématique du Risque* s'impose chez les actuaires, et les économistes en la personne ***d'Edgeworth*** proposent d'étendre le modèle de gestion prudentiel à l'activité bancaire, puis à la trésorerie d'entreprise en général (***Wicksell***). Si cette gestion prudentielle rappelle étroitement la métrique **VaR** classique, on observe également des développements plus abstraits dans les années ***30***, qui conduisent tout droit aux travaux de ***Markowitz***. Mais à côté du chercheur Nobélisé, de nombreux financiers, économistes agricoles, actuaires, s'inscrivant dans la lignée *Laplacienne* renouvelée par la pratique des tests de ***Neyman*** et ***Pearson***, pratiquent la gestion **VaR** prudentielle comme Monsieur ***Jourdain*** fait de la prose. L'apport des années cinquante, ce n'est pas tant le modèle de ***Markowitz***, qui ne sert à rien en la matière, que la généralisation d'une pensée en termes d'intervalle de confiance chez les jeunes chercheurs. Il n'est alors pas si étonnant qu'à la génération suivante la **VaR** puisse quitter le secret des laboratoires et des recherches solitaires pour entrer dans *le* *common knowledge* des pratiques reconnues. Lorsque le régulateur se saisit de cet outil, chacun est à même d'en comprendre la raison, l'utilité, le fonctionnement. Le seul changement qu'ont imprimé les années ***80-90*** est le passage d'une optique de gestion à une optique de comparaison **:** la **VaR** n'intéresse plus le seul gestionnaire, il fait partie de l'information exigible par le régulateur, l'investisseur, bref les parties concernées sur le marché financier.

Cette diffusion de l'information économique, tant dans sa substance que dans les prérequis mathématiques qui sont nécessaires à sa compréhension, aurait probablement bouleversé ***Condorcet***. On sait que pour l'inventeur du progrès, la diffusion du raisonnement probabiliste était le moyen le plus sûr pour l'humanité de s'affranchir de l'obscurité et de progresser indéfiniment dans la voie de la science et du bonheur. Bien que cet optimisme semble aujourd'hui pour le moins exalté (*mais il devait l'être plus encore aux témoins de la captivité de* **Condorcet** *attendant son exécution*), on ne peut manquer d'en saluer la venue. Après tout, ce n'est pas tous les jours que l'on constate l'arrivée du ***Messie***, lequel, pour l'occasion, s'appelle **VaR**.

CHAPITRE : 3

LA VALUE-AT-RISK

1/ L'expression de la mesure VaR :

Valeur exposée au risque ou bien la **Value-at-Risk** (*parfois traduite en français « valeur en risque »*), notée **VaR**, est une méthode d'évaluation du risque de marché d'un portefeuille d'instruments financiers. Elle est réputée pour sa capacité à résumer en un seul nombre l'exposition au risque d'un actif ou d'un portefeuille d'actifs. Elle est apparue (*sous ce nom*) dans les années ***90***, en réponse à de nombreux désastres qui ont touché les marchés de capitaux à cette période et en moins d'une dizaine d'années, elle est devenue, une mesure de référence du risque

Avant les années ***1990***, les méthodes utilisées pour quantifier le risque de marché n'étaient applicables qu'à certains produits. C'est notamment suite à un enchaînement de catastrophes financières, au développement des instruments dérivés et à l'augmentation de la volatilité des marchés financiers que le besoin de décrire le risque à travers un indicateur unique est né.

Depuis la publication d'une étude du « *groupe des trente (G-30)*» (*) en ***1993***, recommandant la **VaR** comme mesure de risque de marché des portefeuilles de dérivés, cette méthode a commencé à se répandre. Suite à cela, la banque ***JP Morgan***, au travers de son système ***RiskMetrics***, a mis à disposition gratuitement sur internet des données financières et a surtout dévoilé sa méthodologie de calcul de **VaR** d'un portefeuille. Cette source d'informations a évidemment joué un rôle considérable dans l'adoption de cette mesure de risque par un grand nombre d'établissements financiers, d'entreprises et de fournisseurs de programme.

La réglementation financière a également contribué à l'essor de la **VaR** puisqu'en ***1996***, le Comité de ***Bâle*** a fait adopter de nouvelles règles qui contraignent les établissements financiers à détenir un niveau minimal de ***fonds propres*** ajusté aux risques auxquels ils s'exposent. Pour le calcul de ces exigences au titre du risque de marché, les institutions financières ont eu dès lors le choix entre **:**

- L'utilisation de la méthode standard (*pondération des positions nettes*) ;
- Le développement de systèmes internes (*basés sur le calcul de **VaR***).

De manière plus pragmatique, la **VaR** donne directement à un investisseur ou un gestionnaire une indication simple et compréhensible d'un risque de perte. Ces derniers pourront donc selon leurs aversions aux risques, prendre une décision quant à la position ou au portefeuille en question.

1.1 Une mesure adoptée par le Comité de Bâle :

Le Comité de ***Bâle*** ou Comité de ***Bâle*** sur le contrôle bancaire (*en anglais Basel Committee on Banking Supervision, BCBS*) est un forum où sont traités de manière régulière (*quatre fois par an*) les sujets relatifs à la supervision bancaire. Il est hébergé par la *Banque des règlements internationaux* à ***Bâle*** *« (Basel en allemand, Basilea en italien) est la troisième ville de Suisse et le chef-lieu du canton de **Bâle-Ville**. Elle est située dans le nord-ouest de la Suisse ».*

(*) **:** Le Group of Thirty, ou ***G30***, est un *think tank* basé à *Washington*. Il regroupe des financiers importants et des universitaires qui cherchent à approfondir la compréhension des problèmes économiques et financiers et à examiner les conséquences des décisions des secteurs publics et privés relatifs à ces sujets. Il a été fondé en ***1978*** à l'initiative de la fondation ***Rockefeller***.

1.1.1 Bâle 1 :

Le Comité de ***Bâle*** a été instauré en ***1974*** par les gouverneurs des banques centrales des pays membres du ***G10*** regroupe des banques centrales et des organismes de réglementation et de surveillance bancaires des principaux pays industrialisés (*France, Belgique, Canada, Italie, Japon, Allemagne, Pays-Bas, Suisse, Suède, Royaume-Uni et les États-Un*is). La création du Comité suivait de quelques mois un incident survenu suite à la liquidation d'une société allemande (*Herstatt*), ayant eut un effet domino sur certaines autres banques. Les objectifs de cette institution sont **:**

- Le renforcement de la sécurité et de la fiabilité du système financier ;
- L'établissement de standards minimaux en matière de contrôle prudentiel ;
- La diffusion et la promotion des meilleures pratiques bancaires et de surveillance ;
- La promotion de la coopération internationale en matière de contrôle prudentiel.
- Le Comité joue le rôle de forum informel pour l'échange d'informations sur l'évolution de la réglementation et des pratiques de surveillance à l'échelon national ainsi que sur les événements actuels dans le domaine financier

Dans le premier accord de ***Bâle*** datant de ***1988***, les exigences minimales de ***fonds propres*** des banques se traduisent par un ratio, appelé ratio ***Cooke***, en référence au président du Comité à cette époque « ***Peter Cooke*** » ou ratio de ***Solvabilité*** bancaire. Le ratio ***Cooke***, c'est-à-dire le rapport entre les ***fonds propres*** réglementaires et les engagements de crédit, ne doit pas passer sous le seuil de ***8%*** **:**

$$\textit{Ratio Cooke} = \frac{\text{Fonds propres réglementaires}}{\text{Risque de crédit}} \geq 8\ \%$$

L'application du ratio ***Cooke*** a contraint les banques à se couvrir en fonds propres à hauteur de ***8%*** de leurs engagements pondérés et, ce faisant, a permis de réduire les inégalités concurrentielles. Néanmoins, ce ratio présente de nombreuses limites. Tout d'abord, le risque est évalué de manière forfaitaire, sans prendre en compte le caractère plus ou moins risqué des emprunteurs. De plus, ni le risque de taux, ni les procédés de réduction du risque ne sont pris en compte.

En ***1996***, un amendement à l'accord de ***1988*** introduit le risque de marché dans le ratio qui définit les exigences minimales de ***fonds propres***. Dorénavant, le risque de marché peut être calculé soit par une méthode standardisée, soit par un modèle interne. Comme les modèles internes basés sur la **VaR** impliquent des exigences de ***fonds propres*** moindres, leur utilisation est devenue de plus en plus fréquente. Le Règlement ***CRBF*** n° ***95-02*** fait état de recommandations (*reprises dans l'arrêté du **20** février **2007***) pour l'utilisation des modèles internes. La nature des modèles reste un choix de la banque mais certains critères doivent être respectés, comme notamment **:**

- La perte potentielle doit être calculée quotidiennement ;
- Le seuil de confiance **α** doit être de ***99%*** ;
- La période de détention minimale **n** est de **10** jours ouvrés et les banques ont la possibilité de calculer un montant estimé en pondérant par la racine carrée du temps la **VaR** calculée sur une période de détention plus courte ;
- La période d'observation **N** doit être limitée au minimum d'un an.

1.1.2 Bâle 2 :

Les normes ***Bâle II*** constituent un dispositif prudentiel destiné à mieux appréhender les risques bancaires et principalement le risque de crédit ou de contrepartie et les exigences en fonds propres.

Bâle II s'inscrit dans une démarche mondiale de réglementation de la profession bancaire. L'objectif est de prévenir les faillites par une meilleure adéquation entre fonds propres et risques encourus. Pour répondre à cet objectif, les accords de ***Bâle*** fixent les règles pour une meilleure évaluation des risques. Les normes de ***Bâle II*** devrait remplacer les normes mises en place par ***Bâle I*** en ***1988*** et vise notamment à la mise en place du ratio ***McDonough*** – le nouveau ratio de ***solvabilité II*** – destiné à remplacer le ratio ***Cooke***.

Les limites du ratio ***Cooke*** évoquées précédemment ont conduit, en ***2004***, à la refonte de la réglementation. Le Comité de ***Bâle***, présidé par ***William Mc .Donough***, a mis au point une réforme, baptisée ***Bâle II***. Cette réforme s'articule autour de trois piliers qui sont présentés sommairement dans le tableau ci-dessous.

Pilier 1 **Exigences minimales de fonds propres**	Pilier 2 **Surveillance par les autorités prudentielles**	Pilier 3 **Transparence et discipline de marché**
Risque de crédit (nouvelles approches de calcul) Risque de marché (inchangé) Risque opérationnel (nouveau)	Evaluation des risques et dotation en capital spécifiques à chaque banque Communication plus soutenue et régulière avec les banques	Obligation de publication des méthodes d'évaluation des risques Obligation accrue de publication de la dotation en fonds propres

Les ***fonds propres*** ne doivent plus seulement couvrir le risque de crédit, de contrepartie, et de marché, comme c'était le cas avec le ratio ***Cooke*** modifié par l'amendement de ***1996***, mais également le risque opérationnel. De plus, chaque risque doit être à présent évalué avec le plus de précision possible et en tenant compte au mieux de la réalité.

En pratique, il s'agit de veiller à ce que le ratio ***McDonough***, défini dans ***Bâle II*** comme le rapport entre les fonds propres réglementaires et la somme des risques, soit toujours au moins égal à ***8%*** **:**

$$\textit{Ratio Mc Donough} = \frac{\text{Fonds propres réglementaires}}{\text{Risque de crédit} + \text{risque opérationnel} + \text{risque de marché}} \geq 8\ \%$$

1.1.3 Révisions de Bâle 2 « Bâle3 » :

Dans le cadre de ***Bâle II***, l'évaluation du risque de marché n'a pas changé. Cependant, de nouvelles révisions sont en cours. La réforme ***Bâle III*** fait partie des initiatives prises pour renforcer le système financier à la suite de la crise financière de ***2007-2008***, le Comité de ***Bâle*** a publié plusieurs documents de propositions, comme par ***exemple*** « *Revisions to the Basel II Market Risk Framework* » en juillet ***2009***. Certaines modifications sont apportées concernant le calcul de **VaR**, notamment **:**

- La période de détention minimale est de ***10*** jours ouvrés. Les banques qui souhaitent calculer une **VaR** sur une période de détention plus courte n'ont pas l'obligation de la pondérer par la racine carrée de la durée mais peuvent utiliser une autre méthode, qui doit toutefois être justifiée périodiquement et approuvée par le régulateur ;

- Les banques ont pour obligation de calculer une **VaR** stressée.

1.2 Comment utiliser la VaR ?

La **VaR** peut être utilisée de trois façons principales (*Jorion , **2007***) **:**

- De façon passive **:** *reporting d'information.*
- De façon défensive **:** *contrôle des risques.*
- De façon active **:** *management des risques.*

A) La **VaR** peut être utilisée de façon passive dans le cadre d'un reporting régulier sur le risque.

- o Ce fut historiquement la première utilisation de la **VaR** en vue de mesurer un risque agrégé (*par la banque **JP Morgan***)
- o La **VaR** est une mesure du risque simple à interpréter exprimée en unité monétaire.
- o La **VaR** est une mesure du risque sur laquelle on peut communiquer de façon non technique.
- o La **VaR** permet de synthétiser en une seule mesure une appréciation sur le risque global.

B) La **VaR** peut être utilisée de façon défensive dans le cadre d'un contrôle des risques.

- o La **VaR** est utilisée pour déterminer des positions limites qui seront imposées aux *traders* (*limites individuelles*) ou aux business units (*limites collectives*).
- o Le principal avantage de la **VaR** est qu'elle fournit un dénominateur commun permettant de comparer les risques engendrés par les activités menées sur différents marchés, différents produits etc.

C) La **VaR** peut être utilisée de façon active dans le cadre d'un management des risques

- o La **VaR** est utilisée dans l'allocation du capital entre les *tradeurs*, les *business lines*, les produits et ou les institutions.
- o La **VaR** est généralement retenue pour le calcul des rendements ajustés du risque ou *Risk-adjusted performance measures (RAPM).*
- o Optimisation de portefeuille avec des critères de type moyenne-**VaR**.

1.3 Qui utilise la VaR ?

En raison de ces très nombreuses utilisations possibles, les utilisateurs de la **VaR** sont très différents **:**

- ***Institutions financières*** **:** elles ont été à l'avant garde de la diffusion et l'utilisation de la **VaR** dans le cadre de la mise en place de systèmes centralisés de management / surveillance des risques.
  - o Nécessité liée à l'évolution de la réglementation.
  - o Nécessité liée à la complexité croissante des instruments financiers et à la diversification croissante des risques financiers.
  - o Nécessité liée à la connaissance de grands désastres financiers (*Barings, Daiwa*..).

- ***Régulateurs*** **:** Les réglementations prudentielles visent de façon générale à imposer aux institutions financières de garantir un niveau minimum de capitaux disponibles au regard des risque financiers. Par conséquent se pose le problème de l'évaluation de ces risques **:**

- Comment évaluer ces risques financiers sur des multi-activités, des actifs très différents, des produits complexes **?**
- Qui doit évaluer ces risques **?** les autorités de régulation ou les institutions financières elles-mêmes **?**
- Dans ce dernier cas comment garantir la validité des évaluations du risque proposées par les institutions financières **?**

- ***Entreprises non financières* :** l'usage de la **VaR** dépasse le contexte des seules institutions financières **:**
  - Le management centralisé des risques est utile à toutes les entreprises exposées aux risques financiers.
  - On peut citer en ***exemple*** les multinationales qui doivent évaluer et se prémunir contre les risques de change, on peut alors mener des analyses de type *CFAR* (*Cash Flow at Risk*).

- ***Asset Managers* :** utilisation de la VaR pour gérer les risques financiers et développer les stratégies d'asset management.

"*We can now view our total capital at risk on a portfolio basis, by asset class and by individual manager. Our main goal was to ... have the means to evaluate our portfolio risk going forward" Director of Chrysler pension fund", cité dans Jorion **(2007)**, interview réalisé après l'achat d'un system de **VaR.***

1.4 Quels types de risques peut mesurer la VaR ?

La *Value-at-Risk* est une mesure homogène permet de mesurer différents risques, sur différents marchés (*marché des changes, marché financier, marché des produits dérivés*), et pour différents actifs à risque (*change, actions, obligations, options, etc.…).*

Elle est aujourd'hui utilisée dans la ***finance*** mais également dans tous les autres domaines. La **VAR** traduit du risque d'exposition d'un actif ou d'un acteur financier à un facteur. Dans les ***assurances***, le risque de catastrophe naturelle est par ***exemple*** mesuré par cet instrument et va donc indiquer la perte potentielle si ce type d'évènement intervient. En bourse, la **VAR** va estimer le risque de marché.

L'objectif de la **VaR** fournit une mesure du risque total de portefeuille. Par conséquent, la **VaR** doit tenir compte des effets de levier et de diversification (*corrélation*).

En effet, la diversification d'un portefeuille de titres ou d'actifs permet en variant les types de placements, soit de réduire le risque pour un niveau de rentabilité donné, soit d'améliorer la rentabilité pour un niveau de risque donné. Pour un groupe la diversification permet de réduire le risque de volatilité des résultats.

La **VaR** mesure donc différents risques financiers, généralement classés en quatre grandes catégories **: *Risques de marché, Risques de liquidité, Risques de crédit, Risques opérationnels*** *« Voir chapitre 1 »*.

1.5 Comment adapter la VaR en assurance ?

Nous avons vu que la *Value-at-Risk* a été créée historiquement au sein de banques d'investissement pour contrôler le risque du marché. Comme ce sont en effet les opérations de *trading* qui génèrent la majeure partie du risque de marché d'une banque, la **VaR** est utilisée pour mesurer le risque des positions prises par les gérants de portefeuille. Ces positions changent fréquemment et peuvent être libérées rapidement. Par conséquent, les banques évaluent leur risque de marché pour des horizons courts. En pratique, la **VaR** est donc estimée pour une journée ou quelques jours. La méthodologie de calcul de la **VaR** a été étudiée pour le secteur bancaire, et elle n'est pas directement applicable dans le secteur de l'***assurance***.

L'objectif de la gestion financière en ***assurance*** est donc l'optimisation du portefeuille, via le couple *rendement/risque*, tout en respectant les contraintes réglementaires et les engagements à l'égard des assurés et des actionnaires. Les sociétés d'***assurance*** définissent donc une politique d'investissement prudente et à long terme.

Une société d'***assurance*** achète donc des actifs financiers qui garantissent un rendement à long terme lui permettant de respecter ses engagements envers ses assurés et ses actionnaires. Son but n'est pas de spéculer. Le portefeuille d'une société d'***assurance*** est par conséquent beaucoup plus stable dans le temps que celui d'une institution financière.

Néanmoins, les assureurs doivent obtenir un rendement à plus court terme de leur portefeuille d'actifs tout en maîtrisant son risque. Cela impacte aussi la politique financière à court et à long terme. Notamment, le risque de marché doit être évalué conformément au timing de reporting financier, généralement trimestriel et annuel. Cette évaluation du risque de marché peut être utilisée comme un indicateur de la ***solvabilité*** de l'entreprise face à de brutales évolutions du marché, et permettre de fixer le montant des ***fonds propres*** annuels. Par conséquent, les sociétés d'***assurance*** devraient chercher à estimer leur risque de marché via la **VaR** pour des horizons allant de ***3*** mois à un ***an***. Par conséquent, l'estimation de la **VaR** journalière dans le secteur de l'***assurance*** n'a aucun sens.

Par ailleurs, une spécificité inhérente au secteur de l'***assurance*** est la forte proportion des produits de dette (*obligations, prêts et dépôts*) dans les portefeuilles des sociétés.

Ces différentes caractéristiques influencent donc l'estimation du risque de marché. Pour adapter la **VaR** dans le domaine de l'***assurance***, il est nécessaire de modifier la méthodologie de calcul, en considérant des horizons plus longs, et un portefeuille stable sur la période d'estimation, comprenant une grande quantité de produits de taux.

Dans la banque, l'approche *Value at Risk* est très répandue et bien maîtrisée, en ***revanche***, il n'existe à l'heure actuelle que très peu de travaux concernant son application en ***assurance***. A notre connaissance, il n'existe que deux publications à ce sujet qui sont les articles de ***P. Artzner*** "*Application of coherent risk measures to capital requirements in insurance*", et de ***K. C. Ahlgrim*** "*Investigating the use of Value at Risk in insurance*".

1.5.1 Les difficultés d’adaptation de la VaR à l’assurance :

La **VaR** est à l’origine un modèle bancaire, et son adaptation à l’***assurance*** pose certaines difficultés. En effet, il existe, dans les contrats d’***assurance***, des options cachées qui font apparaître des problèmes de fluctuations des encours et donc de la valeur sur laquelle on calcule la **VaR**. De plus, les durées de vie des contrats d’***assurance*** sont beaucoup plus longues que celles des contrats bancaires, ce qui amène à reconsidérer la question de l’horizon de calcul de la **VaR**.

1.6 Différences entre le secteur bancaire et l’assurance :

Nous devons nous demander quelles sont les différences entre ces deux secteurs dont il faudra tenir compte. Sachant que si dans le premier secteur les méthodes de calcul de la **VaR** sont aujourd’hui très développées, en revanche dans le deuxième les méthodologies d’application de la **VaR** sont peu répandues.

1.6.1 La valeur sur laquelle on calcule la VaR « Valeur de marché et options cachées » :

Alors qu’un portefeuille bancaire possède une valeur de marché facile à calculer, il est simple de calculer la valeur de l’actif d’un produit d’***assurance*** (*on peut prendre la valeur boursière des actifs détenus*) mais il est souvent plus difficile de calculer la valeur de son passif. En effet, il n’existe pas de marché où cette valeur soit échangée (*malgré l’apparition de certains produits dérivés et les tentatives de titrisation de certains risques*). L’une des difficultés dans la valorisation du passif réside en particulier dans la valorisation des options cachées.

En effet, une caractéristique importante du risque en ***assurance-vie*** est la présence d’options incluses dans les contrats **:** option de rachat, de versements (*pour les anciens contrats dont le taux est garanti à vie*), et risque d’arbitrage pour les contrats multi-supports.

1.6.2 L’horizon de calcul de la VaR « Des horizons de risque et de rentabilité différents » :

Le risque en ***assurance*** n’est pas à court terme mais plutôt à un horizon de quelques années. En effet, en ***assurance-vie***, le cycle de production est long. La durée avant rachat d’un contrat est en général au minimum égale à ***8*** ans puisque c’est seulement au-delà de ce délai que l’assuré peut reprendre ses intérêts sans être soumis à la fiscalité. De plus, en ***assurance-vie***, les obligations mises en représentation des contrats du passif ont en général une échéance lointaine. Si les taux baissent, les assureurs peuvent continuer à servir des taux qui ne sont plus accessibles sur le marché obligataire, parce qu’ils possèdent dans leur portefeuille des obligations anciennes de taux supérieurs aux taux du marché. Cependant, ils doivent renouveler leur portefeuille car les obligations arrivent à maturité, et pour cela ils ont accès à des taux moins élevés.

Par conséquent, lorsqu’ils n’auront plus d’obligations anciennes dans leurs portefeuilles, ils proposeront des produits d’épargne moins attractifs. Il y a donc une inertie des taux servis par les assureurs qui fait que si le marché varie trop vite, ils ne pourront pas s’y adapter et les clients rachèteront leurs contrats. Mais le risque n’est pas à court terme, au contraire de la banque, où un portefeuille d’actifs est immédiatement (*quotidiennement*) sensible aux variations des cours.

1.6.3 *L'influence du scénario de taux sur les risques encourus : comparaison entre risque de rachat et risque de remboursement anticipé de crédit :*

Nous savons que les remboursements anticipés qui ont incité les banques à mettre en place une méthode de gestion du risque. Nous pourrions donc penser à nous inspirer de cette méthode afin de gérer le risque de rachat en ***assurance***. A priori, le rachat en ***assurance*** et le remboursement anticipé dans la banque sont des phénomènes antithétiques car les rachats se produisent en cas de hausse des taux et les remboursements anticipés en cas de baisse des taux. Cependant, ces deux phénomènes peuvent être comparés parce qu'ils résultent tous les deux d'une réaction rationnelle des clients à une variation de la courbe des taux. On peut alors se demander si les seules fluctuations de la courbe des taux suffisent à provoquer l'un ou l'autre des phénomènes cités.

Une autre différence apparaît dans l'information détenue par le client. En effet, contrairement au crédit où le taux est fixé au début de l'opération, un assuré ne connaît que le taux minimum de revalorisation de son contrat et non le taux qui lui sera effectivement versé. Il lui est donc plus difficile de comparer le rendement de son contrat aux taux directement accessibles sur le marché.

1.6.4 *Prise de risque et couverture :*

En ***assurance***, les placements sont de manière générale beaucoup moins risqués que dans le secteur bancaire. En effet, les portefeuilles mis en représentation des engagements sont essentiellement obligataires (*souvent pour environ **80%** de leur valeur*) et la part des actions et de l'immobilier est faible. Le risque est essentiellement localisé au passif même si l'actif y joue un rôle. Les possibilités de couverture par produits dérivés sont rares contrairement aux nombreuses couvertures possibles pour les portefeuilles bancaires.

En revanche, il existe de nombreux mécanismes prudentiels comme la réserve de capitalisation. La réglementation bancaire ne prévoit pas de réserve de capitalisation. Ce mécanisme de lissage est spécifique à ***l'assurance***. A propos de couverture, il faut aussi noter que dans la banque, il paraît intéressant de calculer la **VaR** à l'horizon où l'on souhaite redéfinir la couverture d'un portefeuille. La démarche, aussi bien dans le secteur bancaire qu'en ***assurance***, consisterait en fait à estimer le risque au moment où l'on veut réévaluer la couverture nécessaire. En ***assurance***, réévaluer la couverture revient à réévaluer les *fonds propres* et la marge de ***solvabilité***. On peut alors envisager de calculer la **VaR** à l'horizon où l'on prévoit de réévaluer les *fonds propres* ou alors on pourrait aussi penser à calculer la **VaR** à l'horizon sur lequel on compte se réassurer.

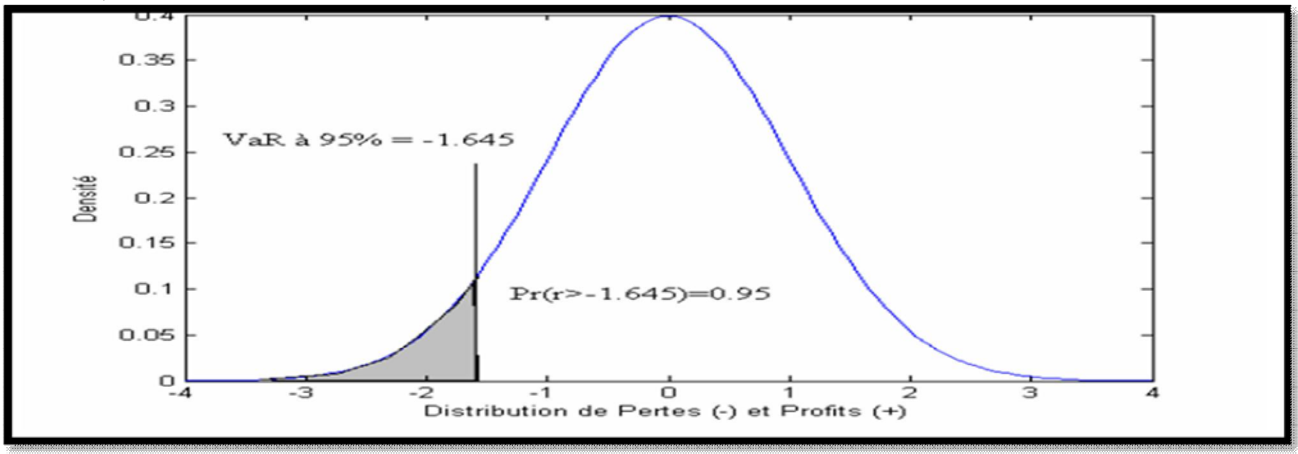
1.7 Définition de la VaR :

Combien mon portefeuille risque-t-il de perdre au cours du prochain mois **?**

Je prédis avec une fiabilité de ***95%*** que je perdrais au maximum ***4000 DA*** le mois prochain. C'est ce type d'évaluation que fournit la **VaR**.

Définition 1 : La *Value-at-Risk* (***VaR***) définie pour un taux de couverture de **α** % correspond au quantile d'ordre **α** de la distribution de profits et pertes (*profits and losses, P&L*) associée à la détention d'un actif ou d'un portefeuille d'actifs sur une période donnée.

Exemple de Value at Risk sous distribution Normale



Ainsi, la définition de la *Value-at-Risk* est fondée sur trois éléments **:**

- ✓ La distribution des profits et pertes (*P&L*) du portefeuille ou de l'actif.
- ✓ Le niveau de confiance (*ou de façon équivalente le taux de couverture égal à un moins le niveau de confiance*) ; appelé aussi taux de couverture.
- ✓ La période de détention de l'actif (*ou horizon du risque*) qui pose parfois le problème de l'agrégation temporelle de la **VaR**.

1.7.1 Profits et Pertes (P&L) :

Définition 1 : On note P_t la valeur d'un actif (*ou d'un portefeuille*) à la fin de la période **t**. On note D_t l'ensemble des paiements intermédiaires obtenus entre les dates ***t-1*** et ***t***. Les profits et pertes (*P&L*) associés à la détention de l'actif (*ou du portefeuille*) sont alors définis par **:**

$$P/L_t = P_t + D_t - P_{t-1}$$

- ➢ ***Remarque 1 :*** Si les données sont exprimées sous forme de *P&L*, les valeurs positives indiquent des profits et les valeurs négatives indiquent des pertes.
- Si le prix de l'actif a augmenté **:** $P_t > P_{t-1}$ « donc $P_t - P_{t-1} > 0$ » ……. il s'agit d'un profit.
- Si le prix de l'actif a baissé **:** $P_t < P_{t-1}$ « donc $P_t - P_{t-1} < 0$ » …….....…il s'agit d'une perte.

- ***Remarque 2 :*** Il est aussi possible d'exprimer les données sous forme de pertes et profits (*L&P pour losses and profits*) telles que : $L/P_t = - P/L_t$

- ***Remarque 3 :*** Il conviendrait de tenir compte d'un facteur d'actualisation dans la comparaison des valorisations aux dates ***t*** et ***t -1***. Si l'on évalue la valeur présente des *P&L* à la fin de la date ***t -1***, il vient **:**

$$\text{Present value } P/L = \frac{P_t + D_t}{(1+d)} - P_{t-1}$$

où ***d*** désigne le taux d'escompte psychologique.

- ***Remarque 4 :*** Généralement on néglige l'escompte psychologique dans le calcul des *P&L* sur des horizons courts (*quotidiens, hebdomadaires, mensuels, etc.*).

Les *P&L* sont généralement exprimées sous forme de rendements **:**

1) Rendements arithmétiques.

2) Rendements géométriques.

Définition 2 « rendements arithmétiques » : Les rendements arithmétiques associés aux profits et pertes (*P&L*), notés r_t, sont définis comme **:**

$$r_t = \frac{P_t + D_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t + D_t}{P_{t-1}} - 1$$

Définition 3 « rendements géométriques » : Les rendements géométriques associés aux profits et pertes (*P&L*), notés R_t , sont définis comme suit **:**

$$R_t = \ln\left(\frac{P_t + D_t}{P_{t-1}}\right)$$

- ***Remarques :***

- (*Nasdaq, SP500, Nikkei, CAC40*) sont constituées de séries historiques de rendements géométriques (*pertes (-) et profits (+)*).

- On peut passer de l'une à l'autre définition par les formules d'approximation suivantes **:**

$$R_t = \ln(1 + r_t)$$

ce qui implique que si les rendements sont "*petits*" alors **:** $r_t \approx R_t$.

Définition 4 « distribution de profits et pertes » : La distribution de profits et de pertes (*P&L pour profit and losses*) correspond à la fonction de densité des pertes et profits, supposées aléatoires, associées à la détention de l'actif ou du portefeuille sur un horizon donné.

- ***Remarques :***

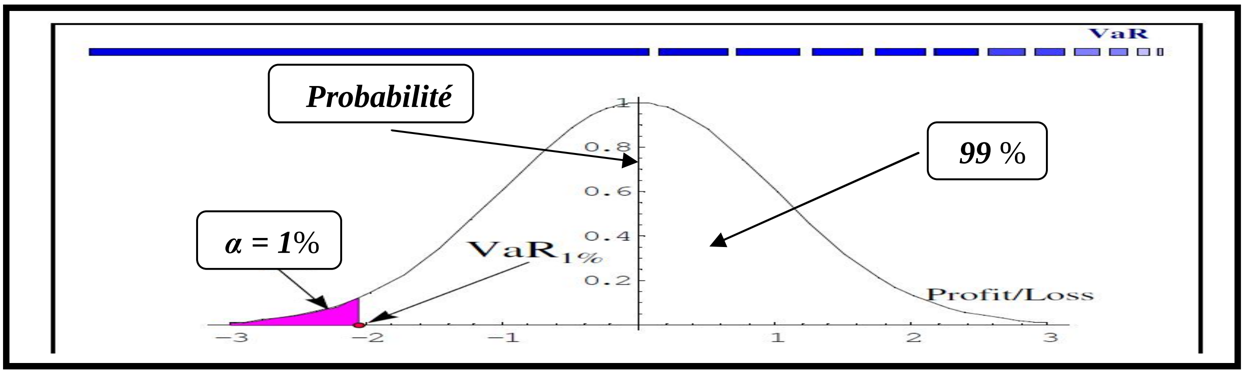
- On considère les rendements géométriques, notés R_t , associés à la détention d'un actif sur un horizon donné (*exemple quotidien*).
- Ces rendements sont exprimés sous une forme *P&L* **:** un rendement positif indique un ***gain***, un rendement négatif une ***perte***.
- On suppose que ces rendements sont aléatoires **:** R_t est une variable aléatoire réelle (*v.a.r*).
- Comme toute *v.a.r*., le rendement à la date ***t***, R_t , est caractérisé par une fonction de densité, notée

$$f_{R_t}(r) \qquad \forall r \in \mathbb{R}$$

C'est précisément cette fonction de densité que l'on qualifie de distribution de profits et pertes (*P&L distribution*).

- L'idéal pour caractériser le risque serait de connaître l'ensemble de la densité de *P&L*, toutefois on se limite généralement à une caractérisation du risque au travers de la connaissance de certains moments (*variance, skeweness, kurtosis*) « *voir annexe 06* » ou de certains fractiles « *Quantile* » (***VaR***).

- Si la distribution de *P&L* est connue, on en déduit immédiatement la **VaR**, puisque la **VaR** n'est rien d'autre qu'un fractile de cette fonction de distribution.



1.7.2 Définition Financière et Mathématique de la VaR :

❖ ***Définition Financière de la VaR*** **:** De nombreuses définitions de la **VaR** existent, nous en reprenons deux **:**

- ✓ Selon ***Hervé*** (*2004*) **:** la **VaR** est la perte maximale observable sur un portefeuille avec une probabilité donnée sur un horizon de temps donné.

- ✓ Selon ***P. Jorion*** (*2002*) **:** la **VaR** d'un portefeuille ou d'un actif, pour une durée **T** et un niveau de probabilité $\boldsymbol{\alpha}$, se définit comme le montant de perte attendu de façon que ce montant, pendant la période **[0,T]**, ne devrait pas être plus important que la **VaR** et ceci avec une probabilité de (**1 -** $\boldsymbol{\alpha}$) .Le niveau de confiance choisi est en général de ***95*** ou ***99***% .

- ***Exemple*** :

Si une banque annonce une **VaR** quotidienne de **1** million *DA* sur son portefeuille pour un niveau de confiance de ***99***%, cela implique qu'il y a seulement une chance sur ***100***, sous des conditions normales de marché, que la perte associée à la détention de ce portefeuille sur une journée excède **1** millions de *DA*.

↳ *Autrement dit* **:** La **VaR** au seuil de confiance de *99*% à **1** jour, que l'on notera, **VaR** (*99*%, **1**j), égale à **1** million *DA* signifie qu'un jour sur cent en moyenne, le portefeuille est susceptible d'enregistrer une perte supérieure à cette somme de **1** millions de *DA*.

❖ ***Définition Mathématique « Probabiliste » de la VaR*** **:** la **VaR** d'un portefeuille d'actifs se matérialise comme un ***quantile*** de distribution des pertes et profits (*P&L*) de ce portefeuille. Une **VaR** de portefeuille égale à **M**, calculée sur un horizon de **n** jours avec un seuil de confiance de **α** signifie qu'avec un degré de certitude **α**, le portefeuille ne subira pas de perte de valeur supérieure à **M** dans les **n** prochains jours.

Précisons que **:**

- Le niveau de confiance **α** est compris entre **0** et **1**. Il représente la probabilité que la perte soit inférieure à la **VaR**.

- L'horizon de détention de l'actif **n** est généralement fixé à **1** jour. A partir de cette **VaR** à un jour, il est possible d'estimer la **VaR** sur une durée de détention plus longue, par ***exemple*** grâce à la formule de la racine carrée qui sera vue plus loin.

Définition 1 **:** Notons **X** un risque et **α** un niveau de probabilité, alors la **VaR** de **X** au niveau **α**, sur un horizon de **n** jours, est définie comme **:** $\mathbf{VaRX}\,[\boldsymbol{\alpha},\mathbf{n}] = -F_X^{\leftarrow}(\boldsymbol{\alpha})$ « *Démonstration* **:** *voir annexe 07* »

Où $\mathbf{F_X}$(.) correspond à la fonction de répartition associée à la distribution de pertes et profits (*P&L*) du risque **X**.

Définition : « ***Inverse Généralisé*** » On appelle inverse généralisé de **F**, l'application notée $F^{\leftarrow}$ définie par **:**

$$F^{\leftarrow}(p) = \text{Inf}\{x : F(x) \geq p\}, \quad p \in [0,1] \quad (**)$$

L'inverse généralisé $F^{\leftarrow}$ coïncide avec l'inverse $\mathbf{F}^{-1}$ lorsque la fonction **F** est strictement croissante et continue.

- ***Remarque :*** La **VaR** correspond généralement à une perte, donc il s'agit d'une valeur négative. Pour simplifier, on définit donc la **VaR** en valeur positive, c'est pourquoi on prend l'opposé du fractile.

Définition 2 **:** Pour un taux de couverture (*coverage rate*) de **α** %, la *Value-at-Risk*, notée $\mathbf{VaR_t}$ (**α**) , correspond à l'opposé du fractile d'ordre **α** de la distribution de profits et pertes (*P&L*).

$$\mathbf{VaRt}\,(\boldsymbol{\alpha}) = -F_{R_t}^{-1}(\boldsymbol{\alpha})$$

où F_{R_t}**(.)** désigne la fonction de répartition associée à la fonction de densité f_{R_t}**(.)**.

- ***Remarque :*** par définition, on a **:** $\int_{-\infty}^{-\mathrm{VaR_t}(\alpha)} f_{R_t}(r)\,dr = \boldsymbol{\alpha}$

Définition « Taux de couverture » : Quelle que soit la définition retenue (*positive ou négative*) de la **VaR**, la probabilité d'observer une perte supérieure à la **VaR** sur l'horizon de détention fixé est égale par définition au taux de couverture (*coverage rate*) :

$$\Pr[R_t < -VaR_t(\alpha)] = \alpha \ \textbf{si} \ VaR_t(\alpha) = -F_{R_t}^{-1}(\alpha)$$

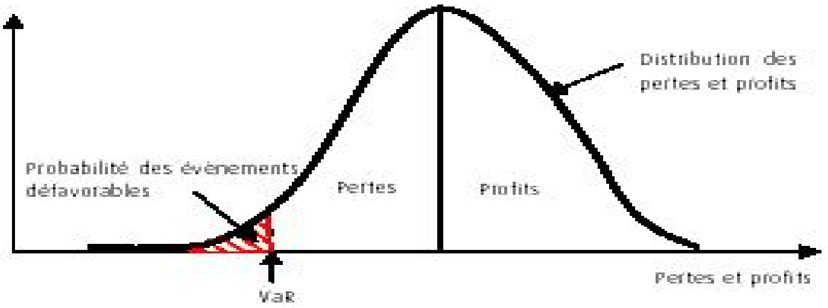
$$\Pr[R_t < VaR_t(\alpha)] = \alpha \ \textbf{si} \ VaR_t(\alpha) = F_{R_t}^{-1}(\alpha)$$

- ***Remarque :*** Dans certains ouvrages (*Jorion, Dowd..*) ou certains articles, on exprime la **VaR** en fonction du niveau de confiance :

$$VaR(1-\alpha) = -F_{R_t}^{-1}(\alpha)$$

↳ On évoque par ***exemple*** une **VaR** à ***99*** % pour un taux de couverture de ***1***%, une **VaR** à ***95***% de niveau de confiance etc.

Définition 3 : La **VaR** est la perte potentielle maximale d'un portefeuille dont le rendement suit une loi donnée, pour une probabilité fixée sur une période de détention donnée.



Définition 4 : La *Value-at-Risk* (**VaR**) de niveau $\boldsymbol{\alpha}$ associée au risque **X** est donnée par :

$$\mathbf{VaR}(X, \alpha) = \boldsymbol{inf}\,\{\, x \backslash \Pr[X \le x] \ge \boldsymbol{\alpha} \}$$

↳ Cette définition montre que la **VaR** a la même définition de $\boldsymbol{\alpha}$ - quantile de la distribution de risque **X**, donc on peut établir l'égalité : $\mathbf{VaR}(X, \alpha) = F_X^{-1}(\alpha)$ où F_X^{-1} désigne la fonction quantile de la variable **X**. Sachant que la fonction quantile est la pseudo-inverse de la fonction de répartition (**).

↳ Une simple explication de la **VaR** est **:** le plus petit montant de capital qui permettra de couvrir une position engendrée par le risque **X** avec une probabilité $\boldsymbol{\alpha}$.

Définition « Quantile d'ordre p » : On appelle Quantile ou fractile d'ordre $\boldsymbol{p}$, le nombre $\boldsymbol{x_p}$ défini par :

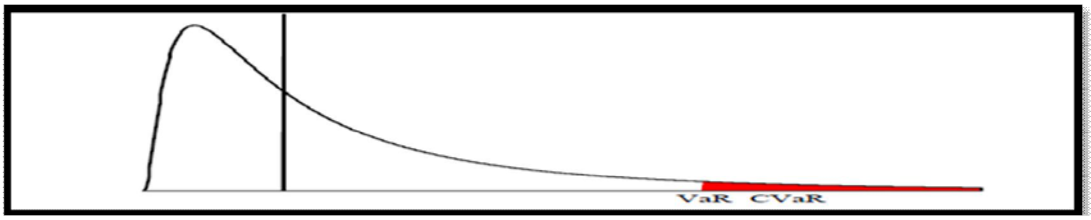
$$x_p = \boldsymbol{inf}\,\{\, x \in \mathbb{R} : F(x) \ge p \,\} \qquad \text{avec } p \in [0,1]$$

↳ Si **F** est strictement croissante et continue, alors x_p est l'unique nombre réel tel que **:** $F(x_p) = p$.

Définition « VaR conditionnelle » : Pour un taux de couverture (*coverage rate*) de **α** %, la *Value-at-Risk* conditionnelle à un ensemble d'information Ω_t , notée **VaR**$_t$ **(α / Ω_t)** , correspond à l'opposé du fractile d'ordre **α** de la distribution conditionnelle de profits et pertes (*P&L*) **:**

$$\mathbf{VaR_t\ (\alpha \setminus \Omega_t\ ) = -\ F_{R_t}^{-1}(\alpha \setminus \Omega_t\ )}$$

Où $F_{R_t}(r \setminus \Omega_t\ )$ désigne la fonction de répartition associée à la fonction de densité conditionnelle $f_{R_t}(r \setminus \Omega_t\ )$.



Définition « Prévision de VaR» : La prévision de la *Value-at-Risk* pour la date ***t* + *1*** et pour un taux de couverture de **α** %, obtenue conditionnellement à l'ensemble d'information Ω_t, disponible à la date ***t***, notée **VaR**$_{t+1}$ **(α / Ω_t)**, est définie par **:**

$$\mathbf{VaR_{t+1\setminus t}\ (\alpha\ ) = VaR_{t+1}\ (\alpha \setminus \Omega_t\ ) = -\ F_R^{-1}(\alpha \setminus \Omega_t\ )}$$

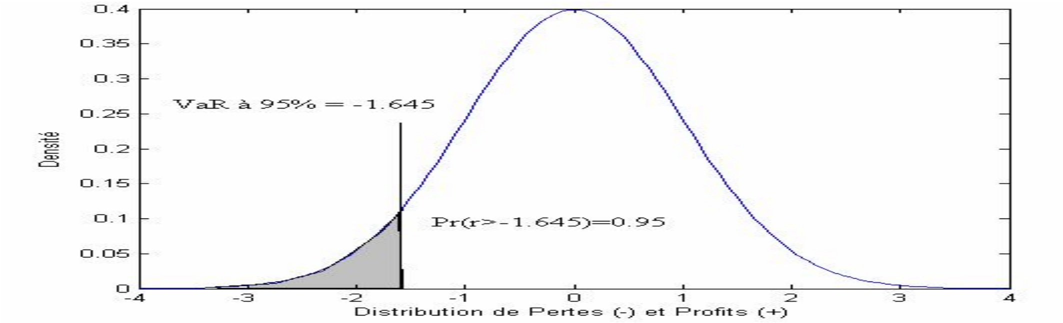
Où $F_R\ (r \setminus \Omega_t\ )$ désigne la fonction de répartition associée à la fonction de densité conditionnelle $f_R\ (r \setminus \Omega_t\ )$.

1.8 De quoi dépend la VaR ?

La *Value-at-Risk* dépend de trois éléments **:**

(i) ***La distribution des pertes et profits*** du portefeuille valable pour la période de détention. Souvent cette distribution est supposée gaussienne, mais beaucoup d'acteurs financiers utilisent des distributions historiques. La difficulté réside alors dans la taille de l'échantillon historique **:** s'il est *trop petit*, les probabilités de pertes élevées sont peu précises, et s'il est *trop grand*, la cohérence temporelle des résultats est perdue, car on compare des résultats non comparables. Les données de P&L à partir desquelles on calcule une **VaR** sont généralement exprimées sous forme de rendements.

(ii) ***Le niveau de confiance*** (*ou de façon équivalente le taux de couverture égal à un moins le niveau de confiance*) **:** Le niveau de confiance choisi est un paramètre compris entre ***0*** et ***1*** (*95% ou 99% en général*) qui permet de contrôler la probabilité que l'on obtienne un rendement supérieur ou égale à la *Value-at-Risk*. Supposons que la distribution des pertes et profits associée à la détention d'un actif sur une période corresponde à une distribution normale standard. Sur la Figure si dessous est reproduite cette distribution de perte et profit supposée normale ; sur la partie gauche de l'axe des abscisses figurent les rendements négatifs (*pertes*) tandis qu'à droite figurent les rendements positifs (*profits*). Dans ce cas, la *Value-at-Risk* définie pour un niveau de confiance de ***95***% (***α*** = ***5%***) est égale tout simplement à ***-1.645***. Dit autrement, dans cet exemple il y a ***95***% de chances que le rendement de l'actif, noté ***r***, soit au moins égal à ***-1.645*** sur la période de détention. Pr $[r < VaR(0.05)] = \Pr[r < -1.645] = 0.05$. De la même façon, la *Value-at-Risk* définie pour un niveau de confiance de ***99***% (***α*** =***1%***) est égale à ***-2.326***.



> ***Le niveau de confiance est influencé par deux facteurs :***
> - ✓ Il doit refléter le degré d'aversion des gestionnaires face au risque de réalisation d'évènements extrêmes.
> - ✓ Il ne doit pas être trop élevé, sinon le risque de réalisation devient suffisamment faible pour être inintéressant en tant qu'indicateur.

(iii) ***La période de détention de l'actif*** « *Horizon* » : Un autre élément fondamental dans le calcul de la *Value-at-Risk* est la période de détention de l'actif ou du portefeuille d'actifs. La formule de calcul de la *Value-at-Risk* doit alors être ajustée de façon à tenir compte de la composition des rendements. Il n'existe aucune règle quant au choix de la période de détention dans le calcul de la *Value-at-Risk* puisque ce choix dépend fondamentalement de l'horizon de *reporting* ou d'investissement des opérateurs. Toutefois, les autorités de régulation peuvent spécifier des horizons de détention spécifiques notamment dans le cadre des procédures de validation de la *Value-at-Risk*. Ainsi Ce paramètre est très important car plus l'horizon est long, plus les pertes peuvent être importantes. Pour une distribution normale de rendements, il suffit de multiplier la *Value at Risk* à un jour par $\sqrt{N}$ pour avoir la *Value at Risk* sur **N** jours.

> ***L'horizon est quant à lui influencé par trois facteurs :***
> - ✓ Il doit être adapté à la durée de détention de l'actif ou du portefeuille objet de l'estimation.
> - ✓ Il doit être suffisamment court pour que la quantité de données disponible puisse permettre d'estimer une **VaR** sur cet horizon.
> - ✓ Il doit être suffisamment court pour respecter l'hypothèse d'invariance de la composition du portefeuille.

1.9 Hypothèses nécessaires au calcul de la Value-at-Risk :

La détermination de la *Value-At-Risk* repose principalement sur trois hypothèses **:**

- ***La première hypothèse***, et non des moindres, concerne la normalité des distributions considérées. On suppose généralement que le prix d'un instrument financier suit une loi *Normale*.

- ***La deuxième hypothèse*** concerne le lien entre une **VAR** à **N** jours et une **VAR** à **1** jour. En effet on considère que la **VAR** à **N** jours est égale à la racine carré de **N** multipliée par la **VAR 1** jour.

- ***La troisième hypothèse*** est que le rendement moyen d'un actif financier est *nul* pour la période considérée. (*Si l'on s'attend à un rendement annuel moyen de **15%** pour un certain actif, le rendement journalier moyen est de **15/252 = 0,06%**, **252** correspondant au nombre de jours où la bourse est ouverte. Ainsi faire l'hypothèse d'un rendement journalier nul n'est donc pas restrictif*).

1.10 Méthodes d'estimation de la Value-at-Risk ?

Cependant, il n'existe pas une mesure unique de la **VaR**. En effet, reposant sur le concept de volatilité, il existe diverses techniques pour estimer la **VaR**. Ainsi les banques ont recours à différents modèles de **VaR** pour déterminer au mieux la fourchette de pertes éventuelles.

On dénombre trois grandes classes de méthodes d'estimation de la **VaR :**

1) Méthodes non-paramétriques.
2) Méthodes semi-paramétriques.
3) Méthodes paramétriques ou analytique.

1.10.1 Méthodes non-paramétriques :

Le principe général des méthodes non paramétriques d'estimation / prévision de la *Value-at-Risk* est que l'on impose a priori aucune distribution paramétrique de pertes et profits.

Les principales méthodes sont les suivantes **:**

A) Historical Simulation (HS) :

- La simulation historique (*Historical Simulation, ou HS*) est une méthode très simple qui est sans doute la plus utilisée actuellement.
- Formellement, Le principe de cette méthode, la **VaR** est estimée simplement par le fractile empirique des rendements « *ou données* » passés.
- Si l'on considère par ***exemple*** un niveau de confiance de **95%** et que l'on dispose d'un échantillon de **1000** observations historiques de rendements, la **VaR** est donnée par la valeur du rendement qui correspond à la **50**ème plus forte perte.

- ***Définition :***

Soit {R_1, R_2, ..R_T} la séquence des rendements R_t de l'actif ou du portefeuille, observés aux dates **t = 1** à **T**. A cette séquence correspond un échantillon de **T** observations {r_1, r_2, .., r_T }.

- ***Problème :***

Théoriquement, à chaque date, le rendement R_t est une *v.a.r* qui admet une certaine distribution, notée f_{R_t} (.), et donc un fractile d'ordre α, noté $VaR_t(\alpha)$, qui lui est propre. Or, on ne dispose que d.une seule réalisation, r_t, de cette distribution. A partir de cette unique réalisation, sans hypothèse supplémentaire, il est impossible d'estimer le fractile de la distribution des *P&L* à la date **t**, c'est à dire la **VaR**.

Dans l'approche ***HS***, on fait deux hypothèses très fortes **:**

1) On suppose que la distribution non conditionnelle des rendements est identique quelle que soit la date **t** : $f_{R_t}(w) = f_R(w)$ $\forall t$ par conséquent le fractile de cette distribution non conditionnelle (*la VaR*) est aussi identique **:** $VaR_t(\alpha) = VaR(\alpha)$ $\forall t$.
2) On suppose que les rendements R_1, .., R_T sont indépendamment distribués.

- ***Hypothèse :***

On suppose que les rendements R_t associés aux *P&L*, observés à toute date **t**, sont identiquement et indépendamment distribués (*i.i.d*) avec **:**

$$f_{R_t}(w) = f_R(w) \ \forall t$$

$$VaR_t(\alpha) = VaR(\alpha) \ \forall t$$

- ***Solution :***

Sous l'hypothèse *i .i .d*, on dispose alors d'un échantillon de **T** réalisations {r_1, r_2, .., r_T } de **T** *v.a.r.* admettant la même distribution (*ou de la même variable aléatoire*) et donc la même **VaR**. Il est dès lors possible d'estimer cette **VaR**.

Définition « VaR HS» : Sous l'hypothèse de rendements *i .i .d.*, un estimateur convergent de la **VaR** pour un taux de couverture de α % est défini par le fractile empirique d'ordre α associés aux **T** réalisations historiques des rendements, notées {r_1, r_2, .., r_T }.

$$\widehat{VaR}(\alpha) = \text{percentile}\left(\{r_j\}_{j=1}^{T}, 100\alpha\right)$$

$$\widehat{VaR}(\alpha) \xrightarrow[T\to\infty]{} VaR(\alpha)$$

La ***VaR HS*** nécessite seulement de connaître la valeur de la position dans le passé (*par exemple historique des prix pour un indice*) c-à d La ***VaR HS*** est l'estimateur d'une **VaR** associée à une distribution de *P&L* non conditionnelle. En d'autres termes, cette distribution n'est pas calculée sachant un ensemble d'informations disponibles à la date **t**. Pour un portefeuille, il faudra reconstituer sa valeur passée à partir du prix des différents actifs et de la composition actuelle du portefeuille. Après avoir identifié les facteurs de risque significatifs pour le portefeuille, on utilise l'historique des données collectées afin d'en déduire un montant de perte.

Cette méthode est très peu coûteuse en calcul et en technique. De plus aucune hypothèse préalable sur la forme de la distribution n'est requise.

Cette méthode est très utilisée dans la pratique car elle est simple conceptuellement et est facile à implémenter. Cependant, elle présente quelques ***difficultés*** **:** en effet, l'estimation d'un quantile a une vitesse de convergence beaucoup plus faible que celle d'autres estimateurs car son estimation est locale et demande donc beaucoup d'observations.

Exemple 1 **:**

On considère les rendements quotidiens définis à partir des cours à la clôture du ***Nikkei*** entre le ***05/01/2012*** et le ***02/05/2012***, soit un total de ***5550*** observations. Supposons que l'on classe par ordre croissant les observations $\mathbf{r_1, .., r_{5550}}$. La ***VaR HS*** à **1**% est alors égale à la ***56***ème, soit **:**

$$\hat{VaR}_t\ (1\%) = -\ 0,\ 01507\ \%$$

Exemple 2 **:** Exemple de calcul sur un portefeuille d'actions.

	Action 1	Action 2	...	Portefeuille	P&L (%)	P&L trié	
t=1	100	36		1012	-	-5,20%	1% de chance
						-5,15%	99% de chances
t=2	103	42		1018	0,593%		
t=3	97	41		1005	-1,277%	-5%	
-	-	-		-		-	
-	-	-		-		-	
t=99	115	53		1532	2,000%	3%	
t=100	117	57		1545	0,849%	3,20%	

B) Bootstrapped Historical Simulation (BHS) :

- C'est une méthode stochastique alternative. On reconstitue une distribution des pertes et profits du portefeuille en allant piocher aléatoirement avec remise dans l'échantillon historique.
- Une amélioration simple de la méthode ***H***S consiste à estimer la **VaR** à partir de données simulées par ***Bootstrap*** (*). Le ***Bootstrap*** consiste à ré-échantillonner les données historiques de rendements avec remise.
- Plus précisément, la procédure consiste à créer un grand nombre d'échantillons de rendements simulés, où chaque observation est obtenue par tirage au hasard à partir de l'échantillon original.
- Chaque nouvel échantillon constitué de la sorte permet d'obtenir une estimation de la **VaR** par la méthode ***HS*** standard, et l'on définit au final une estimation en faisant la moyenne de ces estimations basées sur les ré-échantillonnages.

(*) **:** En statistiques, les techniques de ***bootstrap*** sont des méthodes d'inférence statistique modernes, datant de la fin des années ***70 « 1979 »*** (proposée initialement par ***Efron***), et requérant des calculs informatiques intensifs. L'objectif est de connaître certaines indications sur une statistique **:** son estimation bien sûr, mais aussi la dispersion (*variance, écart-type*), des intervalles de confiance voire un Test d'hypothèse. Cette méthode est basée sur des simulations, à la différence près que le ***bootstrap*** ne nécessite pas d'information supplémentaire que celle disponible dans l'échantillon. En général, il est basé sur de « *nouveaux échantillons* » obtenus par tirage avec remise à partir de l'échantillon initial (*on parle de rééchantillonnage*).

Définition « VaR BHS» : Soit $\{\tilde{r}_j^s\}_{j=1}^T$ une séquence de rendements tirés au hasard avec remise dans l'échantillon de rendements historiques, et soit $\tilde{V}aR^s(\alpha)$ la ***VaR-HS*** associée à cet échantillon de rendements *bootstrappés*. L'estimateur ***BHS*** (*Bootstrapped Historical Simulation*) de la **VaR** correspond à la moyenne empirique des ***VaR-HS*** obtenues à partir de **S** échantillons de rendements *boostrappés* :

$$\tilde{V}aR(\alpha) = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\tilde{V}aR^s(\alpha)$$

$$\tilde{V}aR^s(\alpha) = \text{percentile}\left(\{\tilde{r}_j^s\}_{j=1}^T, 100\alpha\right) \qquad s = 1, \ldots, S$$

C) Simulation Historique et Estimation Non Paramétrique de Densité :

- Une autre amélioration possible de la ***HS*** est d'utiliser une estimation non paramétrique de la distribution conditionnelle de pertes et profits.
- On sait en effet que l'histogramme associé aux réalisations historiques des rendements n'est pas un bon estimateur d'une fonction de densité. Des estimateurs obtenus par lissage, comme les estimateurs à noyau, présentent généralement de meilleures propriétés.

Définition « Méthode HS étendue» : La méthode ***HS*** étendue consiste à estimer par une méthode de noyau la densité conditionnelle de pertes et profits, puis de calculer à partir de cette densité estimée le fractile correspondant à la *Value-at-Risk* voulue.

- ***Avantage :***

Cette méthode permet notamment d'estimer la *Value-at-Risk* pour n'importe quel niveau de confiance (*et ainsi d'éviter les problèmes dus aux contraintes imposées sur la taille des échantillons*). *Exemple* **:** calculer une **VaR** à *1*% à partir d'un échantillon de ***50*** points.

- ***Limite :***

Toutefois, il est connu que les estimateurs à ***noyaux*** présentent des effets de bords, et que la précision de ces estimateurs est parfois très faible sur les "*bords*" de l'échantillon, précisément là où l'on cherche à estimer la **VaR.**

D) Weighted Historical Simulation (WHS) :

- La caractéristique essentielle de la méthode ***HS*** traditionnelle est que l'on accorde le même poids aux observations historiques, quelles soient relativement récentes ou au contraire très anciennes.
- Concrètement, si l'on considère une estimation ***HS*** de la Var à ***5***% à partir d'une fenêtre glissante de ***1000*** observations, cela revient à prendre le ***50^{ème}*** rendement le plus faible parmi les ***1000*** observations les plus récentes.
- Dans cette estimation ***HS*** toutes les observations historiques de rendement datées de moins de ***1000*** périodes interviennent avec le même poids.
- Une approche alternative consiste à attribuer aux observations de rendements des poids en fonction soit de leur ancienneté, soit de la volatilité observée des marchés, ou de tout autre facteur.

Cette approche, qualifiée par le terme générique de ***WHS*** (*Weighted Historical Simulation*) recouvre différentes variantes selon le facteur de pondération utilisé notamment **:**

- ✓ ***La méthode Aged-weighted HS « ou Méthode Hybride »*** où les poids dépendent de l'ancienneté des observations (*Boudoukh, Richardson et Whitelaw, **1998***).

- ✓ ***La méthode Volatility-weighted HS*** où les poids dépendent de la volatilité. L'idée de base (*Hullet et White, **1998***) est de prendre en compte les changements récents de volatilité.

- ✓ ***La méthode Correlation-weighted HS*** où l'on ajuste les rendements passés de façon à ce qu'ils reflètent les changements entre les corrélations passées et futures.

E) Filtered Historical Simulation (FHS) :

La méthode ***FHS*** est une forme de *Bootstrap* semi-paramétrique qui vise à combiner les avantages de la simulation historique avec la puissance et la flexibilité des modèles à volatilité conditionnelle tel que le modèle *GARCH*. Elle consiste à faire un *Bootstrap* sur les rendements dans un cadre de volatilité conditionnelle, le *Boostrap* préservant la nature non paramétrique de la simulation historique, et le modèle à volatilité conditionnelle donnant un traitement sophistiqué de la volatilité.

1.10.2 Méthodes paramétriques :

La détermination de la **VaR** paramétrique se fait au moyen d'un calcul analytique relativement aisé en pratique mais sous des hypothèses théoriques assez contraignantes.

Les méthodes paramétriques d'estimation de la **VaR** reposent sur ***3*** hypothèses simplificatrices **:**

- Les distributions des rendements des actifs qui composent le portefeuille « *prix du march*és » suivent une *loi normale*.
- La relation entre les variations de valeur du portefeuille et les variations des variables du marché sont linéaires.
- Les produits dérivés (*Futures, Swaps, …*) sont linéaires. (*Une exception : les options*).

- ➢ ***Remarque :*** Ces hypothèses sont très contraignantes mais on peut corriger la non-normalité des distributions en introduisant des coefficients d'asymétrie (*coefficient de Skewness*) ou d'aplatissement (*coefficient de Kurtosis*) .

Les principales méthodes sont les suivantes **:**

A) La méthode de Monte Carlo :

Définition **:** La méthode de ***Monte Carlo*** consiste à simuler un grand nombre de fois les comportements futurs possibles des facteurs de risque selon un certain nombre d'hypothèses, et d'en déduire une distribution des pertes et profits à partir de laquelle on estime finalement un fractile (***HS***).

- La méthode de simulation de *Monte Carlo* est relativement similaire à la *méthode historique* à l'instar du fait qu'elle va simuler des rendements futurs à partir des rendements du passé. Son fonctionnement est plus complexe car il demande la compréhension de la loi normale qui régit la simulation des rendements.
- Si cette approche peut s'appliquer, en théorie, quelles que soient les lois de probabilité suivies par les facteurs de risque, elle est couramment utilisée en pratique, pour des raisons techniques, en supposant que les variations relatives des paramètres de marché suivent des lois normales.
- Cette méthode convient également à tous les types d'instruments, y compris optionnels. La simulation de *Monte Carlo* est sûrement la plus précise, mais c'est la plus difficile et longue à mettre en place. Il faut posséder une excellente infrastructure si l'ont veut générer des simulations de plusieurs milliers de positions.

B) La méthode de Variance-Covariance :

La méthode ***variance-covariance***, ou **VaR *paramétrique***, suppose que les rendements de l'actif ou du portefeuille, ainsi que les rendements des facteurs de risque, sont *gaussiens*. Cette hypothèse permet de nombreuses simplifications mais elle est fortement critiquée puisqu'elle ne correspond pas à ce que l'on peut observer en réalité sur les marchés. Pour calculer la **VaR *paramétrique***, il faut estimer la moyenne **m** et l'écart-type **σ** des rendements de l'actif ou du portefeuille à partir des données historiques.

- ***Dans le cas d'un actif*** : Comme on suppose que les rendements suivent une *loi normale* de moyenne **m** et d'écart-type **σ**, alors **:**

$$\mathrm{VaR}[99\%;1] = m + 2{,}33 \cdot \sigma$$

« Démonstration : *voir annexe 08* »

Il est fréquent en pratique de considérer que **m** est négligeable par rapport à **σ**, donc **:**

$$\mathrm{VaR}[99\%;1] \approx 2{,}33 \cdot \sigma$$

- ***Dans le cas d'un portefeuille de deux actifs :*** En notant $\rho_{A,B}$ la corrélation entre la rentabilité de l'actif **A** et la rentabilité de l'actif **B**, la **VaR** du portefeuille s'écrit **:**

$$\mathrm{VaR}_{A+B}[99\%;1] = \sqrt{\mathrm{VaR}_A^2[99\%;1] + \mathrm{VaR}_B^2[99\%;1] + 2 \cdot \rho_{A,B} \cdot \mathrm{VaR}_A[99\%;1] \cdot \mathrm{VaR}_B[99\%;1]}$$

- ***Cas général*** **:** Soient X_i les rentabilités des différents titres composant le portefeuille et **Σ** la matrice de *variance-covariance* des rentabilités, la formule matricielle est la suivante **:**

$$\mathrm{VaR}[99\%,1] = 2{,}33 \cdot \sqrt{\sum_{i,j} X_i \cdot X_j \cdot \mathrm{cov}(X_i, X_j)} = 2{,}33 \cdot \sqrt{{}^t X \Sigma X}$$

C) RiskMetrics :

- *RiskMetrics* fut développé par la banque ***JP Morgan*** au début des années ***90*** « *Octobre **1994*** » et a permis de populariser le concept de **VaR**.
- Ce modèle repose sur des hypothèses théoriques assez contraignantes.
- Dans ce modèle, les principales hypothèses simplificatrices consistent à supposer, d'une part, que les lois de probabilité qui régissent les distributions des variations des prix de marché sont normales et, d'autre part, que les instruments présentent un profil de risque linéaire.

Définition **:** Dans le cas d'une approche univariée, la **VaR** issue de *RiskMetrics* définie pour un taux de couverture de **α %** peut s'écrire sous la forme **:**

$$\mathbf{VaR_t}\,(\boldsymbol{\alpha}) = -\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\alpha})\sqrt{h_t} - \mu$$

Où μ désigne l'espérance des rendements et $\mathbf{h_t}$ la variance conditionnelle, telle que **:**

$$\mathbf{h_t} = \lambda \mathbf{h_{t-1}} + (1 - \lambda)\, r_{t-1}^2$$

Où λ désigne un paramètre de décalage (*decay parameter*) généralement fixé à ***0.97***.

- ***Remarque :***

- ✓ Dans le modèle *RiskMetrics*, la variance conditionnelle est supposée suivre un processus de type ***WMA*** (*Exponentiel Weighted Moving Average*) **:** la prévision pour la date **t** est une combinaison linéaire de l'innovation passée et de la valeur passée de la variance.
- ✓ Ce processus est un cas particulier des modèles ***GARCH***, et plus spécifiquement des modèles ***IGARCH***.

- ***Avantage :***

Sous ces hypothèses, la matrice de *variances/covariances* peut être appliquée assez directement aux positions détenues pour calculer la **VaR**. Les calculs utilisés dans la méthode *RiskMetrics* sont rapides et simples, et requièrent uniquement la connaissance de la matrice des *variances/covariances* des rendements du portefeuille.

- ***Limite :***

Cette méthode s'avère être inadaptée aux portefeuilles non linéaires (*instruments optionnels*) et théoriquement peu adaptée aux queues de distribution épaisses et aux distributions non normales des rendements.

D) Modèles GARCH :

Le modèle ***GARCH*** (*General Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) a été introduit par ***Bollerslev*** (*1986*). C'est une extension du modèle ***ARCH*** initialement développé par ***Engle*** (*2002*). Ces modèles permettent une représentation autorégressive de la *variance conditionnelle* d'un processus, ce qui permet de les utiliser notamment à des fins de prévisions de la volatilité sur les marchés financiers.

Définition **:** Sous l'hypothèse de normalité de la distribution conditionnelle des *P&L*, la prévision de **VaR** associée à un taux de couverture de α **%** est définie par **:**

$$\mathbf{VaR}_{t+1/t}(\alpha) = -\mu - \sqrt{h_{t+1}}\,\Phi^{-1}(\alpha)$$

Où $\mathbf{h}_{t+1}$ désigne la variance conditionnelle des rendements.

1.10.3 Méthodes semi - paramétriques :

Situées à mi-chemin entre les approches purement paramétriques et non paramétriques figurent notamment **:**

A) La théorie des valeurs extrêmes (EVT) :

- Parmi les méthodes semi-paramétriques figurent tout d'abord l'ensemble des méthodes et approches qui relèvent de la théorie des extrêmes (*EVT*) qui diffère de la théorie statistique habituelle fondée pour l'essentiel sur des raisonnements de type « *tendance centrale* ».

- Les extrêmes sont en effet gouvernés par des théorèmes spécifiques qui permettent d'établir sous différentes hypothèses la distribution suivie par ces extrêmes.

- Il existe deux principales branches de la théorie des valeurs extrêmes **:**

1) La théorie des valeurs extrêmes généralisées (GEVT) :

a. Cadre d'analyse :

On considère un **n**-échantillons $X_1,X_2,\ldots.X_n$ de variables aléatoires *iid* de fonction de répartition **F**. Soit $M_n = max\,(X_1,X_2,\ldots.X_n)$ représentant la plus grande perte observée sur les **n** pertes observées $X_1,X_2,\ldots.X_n$.

Les variables aléatoires $X_1,X_2,\ldots.X_n$ étant *iid*, on peut facilement calculer la fonction de répartition de M_n:

$$P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, \ldots, X_n \leq x) = F^n(x)$$

Cependant, si on considère *right-end point* de **F**, i.e. le point x_F tel que **:**

$$x_F = sup\,\{x \mid F(x) < 1\}$$

On remarque que **:**

$$\begin{array}{ll} \forall x \le x_F & P(M_n \le x) = F^n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad car\ F(x) < 1 \\ \forall x > x_F & P(M_n \le x) = F^n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 1 \quad car\ F(x) = 1 \end{array}$$

La loi de M_n converge donc vers une loi dégénérée (*prenant seulement les valeurs **0** ou **1***) lorsque **n** tend vers l'infini.

Le principe de la théorie des valeurs extrêmes va donc être d'identifier la famille de loi vers laquelle M_n va converger et d'estimer **F** par cette fonction, lorsque **n** tend vers l'infini.

On veut donc trouver les distributions limites telles que **:**

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \le x\right) = H(x) \quad \text{non dégénérée}$$

b. Théorème limite de Fisher-Tippett :

Il s'agit du théorème fondamental de la théorie des valeurs extrêmes. On considère des variables aléatoires $(X_n)_n$ *iid*. S'il existe des constantes $c_n > 0$ et $d_n \in \mathbb{R}$ et **H** une fonction de distribution non dégénérée telle que **:**

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \le x\right) = H(x)$$

Alors H appartient à l'un des **3** types suivants de distribution :

- ✓ ***Type 1 : Fréchet*** $\alpha > 0$

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ exp(-x^{-\alpha}), & x > 0 \end{cases}$$

- ✓ ***Type 2 : reverse Weibull*** $\alpha > 0$

$$\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} exp(-(-x)^\alpha), & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

- ✓ ***Type 3 : Gumbel***

$$\Lambda(x) = exp(-e^{-x})$$

Ψ_α, Φ_α et Λ sont appelées les distributions standards de valeurs extrêmes.

c. Proposition [Jenkinson – Von Mises] :

Ψ_α, Φ_α et Λ sont des cas particuliers de la distribution.

$$H_\xi(x) = exp\left[-\left(1+\xi\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right]$$

Avec μ paramètre de localisation et σ paramètre de dispersion. Cette fonction de distribution correspond à la loi de *probabilité des valeurs extrêmes généralisée*, appelée « *Generalized Extreme Value distribution* » (***GEV***).

On a les correspondances suivantes **:**

- ✓ ***Fréchet :*** $\xi = \alpha^{-1} > 0.$
- ✓ ***Weibull :*** $\xi = \alpha^{-1} < 0.$
- ✓ ***Gumbel :*** $\xi \to 0.$

d. Remarque :

- En pratique, on ne connaît pas les valeurs de μ, σ et ξ. Il faut donc les estimer à partir des données (*par exemple par la méthode du maximum de vraisemblance*) et les remplacer par leur estimation.

- Le paramètre ξ est couramment appelé « *indice de queue* » ou « *indice de valeur extrême* ». Plus cet indice est élevé en valeur absolue, plus le poids des extrêmes dans la distribution initiale est important. On parle alors de distributions à « *queues épaisses* ».

Définition **:** La théorie des ***valeurs extrêmes généralisée*** permet de modéliser le maximum ou le minimum d'un très grand échantillon.

2) La loi de Pareto généralisée (GPD) « Méthode des excès et distribution » :

La méthode est également connue sous le nom de *Peaks Over Threshold* (***POT***). Elle permet de modéliser les queues de distribution d'une série de données. A partir de cette distribution, on peut alors estimer la probabilité d'occurrence d'évènements rares, au-delà des plus grandes valeurs observées.

a. Définition :

Soit **X** une variable aléatoire de fonction de répartition **F** et μ un réel suffisamment grand appelé seuil. On définit les excès au-delà du seuil μ comme l'ensemble des variables aléatoires **Y** telles que **:**

$$y_i = x_i - \mu, \quad x_i > \mu$$

On appelle ***right-end point*** de **F**, le point x_F tel que :

$$x_F = sup\,\{x \mid F(x) < 1\}$$

On cherche donc à partir de la distribution F de X, à définir une distribution conditionnelle F_μ par rapport au seuil μ pour les variables aléatoires dépassant ce seuil. On définit alors la distribution conditionnelle des excès F_μ par **:**

$$F_\mu(y) = P[X - \mu < y \mid X > \mu] = \frac{F(y+\mu) - F(\mu)}{1 - F(\mu)} \qquad \text{pour } 0 \le y \le x_F - \mu$$

$$\Leftrightarrow F_\mu(x) = P[X < x \mid X > \mu] = \frac{F(x) - F(\mu)}{1 - F(\mu)} \qquad \text{pour } x \ge \mu$$

L'objectif de la méthode ***POT*** est de déterminer par quelle loi de probabilité il est possible d'estimer cette distribution conditionnelle des excès. Le théorème de ***Picklands, Balkema et Haan*** va être le résultat théorique central de la théorie des valeurs extrêmes **:**

b. Théorème : [Picklands, Balkema et Haan]

Si **F** appartient à l'un des ***3*** *MDA* (*Maximum Domain of Attraction*) de ***Gumbel***, ***Fréchet*** ou ***Weibull***, alors il existe une fonction de répartition des excès au-delà du seuil μ notée F_μ qui peut être approchée par une loi de *Pareto Généralisée* (***GPD***) telle que **:**

$$\lim_{\mu \to x_F} sup\,|F_\mu(y) - H_{\sigma,\xi}(y)| = 0$$

La loi de *Pareto généralisée* $H_{\sigma,\xi}(y)$ s'écrit sous la forme **:**

$$H_{\sigma,\xi}(y) = 1 + \log H_\xi(y)$$

Où $H_\xi(y)$ est la loi de probabilité des valeurs extrêmes généralisée.

Définition **:** La loi de ***Pareto généralisée*** (*ou approche POT -.peaks-over-threshold.*) , permet l'étude de la distribution des pertes excessives au dessus d'un seuil (*élevé*).

B) ***Regressions quantiles et CAViaR :***

- Une seconde grande catégorie de méthodes semi-paramétriques utilisées actuellement pour le calcul et la prévision de la *Value-at-Risk* relève plus généralement de l'approche de la régression quantile.

- L'idée est la suivante **:** plutôt que de modéliser une distribution et d'en déduire un quantile (*la Value-at-Risk*), cette approche consiste à modéliser directement le quantile lui-même en utilisant des méthodes de régression quantile.

- Un exemple de ces méthodes est le modèle ***Conditional Autoregressive Value at Risk*** (***CAViaR***) de ***Engle*** et ***Manganelli*** (***2004***) qui spécifie la dynamique autorégressive du quantile conditionnel.

Définition « CAViaR » : Dans le cas du modèle *Conditional Autoregressive Value at Risk* (***CAViaR***), la modélisation porte directement sur le fractile latent. Ainsi, la **VaR** conditionnelle a α % est définie par le modèle suivant **:**

$$\mathrm{VaR}_{t/t-1}(\alpha) = \beta_0 + \beta_1 \mathrm{VaR}_{t-1/t-2}(\alpha) + / \left(\beta_2, \dots, \beta_p, r_{t-1}, \mathrm{VaR}_{t-1/t-2}(\alpha)\right)$$

Où $\beta_i \in \mathbb{R}$ et où **/ (.)** est une fonction de la rentabilité et de la **VaR** de la période précédente.

1.11 Avantages et Inconvénients des principales méthodes d'estimation de la VaR :

METHODE	*AVANTAGES*	*INCONVENIENTS*
Variance-Covariance	• Rapidité d'obtention des résultats. • Mise à jour possible des volatilités et corrélations. • Plus adaptée pour les portefeuilles d'investissements.	• Hypothèse de normalité des variables de marche (dans l'approche simplifiée). • Non adapté aux produits optionnels et aux distributions non normales des rendements.
Historique	• Très simple à calculer. • La distribution des rendements des actifs n'est pas prise en compte. • Pas d'hypothèses sur la loi des facteurs de risque. • Pas d'estimation de la volatilité ni des corrélations. • Queues de distribution épaisses et événements extrêmes contenus dans les données. • Calcul d'intervalles de confiances permis.	• Dépendance vis-à-vis de l'échantillon particulier utilisé. • Inadaptable à un changement structurel de l'économie (*Exemple : introduction de l'Euro*). • Un nombre insuffisant de données entraine un biais et une imprécision dans le calcul de la **VaR**. • Pas d'analyse de sensibilité possible. • Faibles efficacité avec des portefeuilles contenant des produits dérivés complexes.
Monte-Carlo	• Utilisable pour les produits dérivés; Convient à tous les types d'instruments au contraire des autres méthodes. • Possibilité d'introduire de n'importe quelle distribution de facteurs. • Calcul d'intervalles de confiance et analyses de sensibilités possibles.	• Données aberrantes non introduites dans les données. • Cout important en ressources informatiques. • Les calculs sont très lourds; Il faut déterminer les facteurs de risque et élaborer des scénarios ce qui prend beaucoup de temps.

2/ Risque de portefeuille et Value-at-Risk :

Pour calculer la **VaR** d'un portefeuille composé de plusieurs actifs on a Deux solutions **:**

1) Considérer le rendement global du portefeuille comme celui d'un actif particulier et calculer la **VaR** directement sur ce rendement agrégé.

2) Prendre en compte explicitement les corrélations entre les actifs du portefeuille pour le calcul de la **VaR :** *approche multivariée de la **VaR***.

Définition « Rendement d'un portefeuille» : Le rendement $R_{p,t}$ d'un portefeuille de **N** actifs est définie par **:**

$$R_{p,t} = \sum_{i=1}^{N} w_i R_{i,t}$$

Où $R_{i,t}$ désigne le rendement de l'actif **i** et w_i le poids associé à cet actif, avec par convention **:**

$$w_i = \frac{W_i}{W} \sum_{i=1}^{N} w_i = 1$$

Où W_i désigne le montant investit dans le titre **i** en début de période et W la valeur totale du portefeuille.

➢ ***Remarques :***

- Les poids w_i peuvent être positifs ou négatifs.
- On exclut en revanche le cas où la valeur totale du portefeuille serait nulle, i.e. $W = 0$, puisque dans ce cas, les poids $w_i = \frac{W_i}{W}$ ne serait pas définis.

***Définition « Les moments associés aux Rendement d'un portefeuille»* :**

$$\mathbb{E}\,(R_{p,t}) = w'\,\mathbb{E}\,(R) = \mu_p$$

$$\mathbb{V}(R_{p,t}) = \underset{(1,N)}{w'} \underset{(N,N)}{\sum} \underset{(N,1)}{w} = \sigma_p^2$$

w' **:** Est la forme vectorielle.

Où $\sum$ désigne la matrice de variance covariance des rendements de **N** actifs **:**

$$\Sigma = \begin{pmatrix} var\,(R_1) & cov\,(R_1, R_2) & cov\,(R_1, R_N) \\ & var\,(R_2) & \\ & & .. \\ cov\,(R_N, R_1) & & var\,(R_N) \end{pmatrix}$$

2.1 VaR d'un portefeuille :

A partir d'un portefeuille, certains *reporting* proposent deux types de **VaR :**

1) ***La VaR diversifiée*** (*diversified VaR*) qui tient compte de la diversification des risques via la structure de covariance des rendements des titres.
2) ***La VaR non diversifiée*** (*undiversified VaR*) qui néglige toute diversification des risques dans le portefeuille.

- ***Hypothèse :***

On se place dans le cas simple d'une distribution normale de *P&L* pour tous les actifs ***i = 1, ..,N*** d'espérance de rendement ***nul***. Par conséquent, le rendement du portefeuille $\mathbf{R_{p,t}}$ est lui aussi *normal*.

Définition « VaR Diversifiée» **:** La *Value-at-Risk* diversifie (*ou Value-at-Risk*) du portefeuille tient compte des bénéfices de la diversification des risques au sein du portefeuille. Pour un taux de couverture de α% et sous l'hypothèse de normalité, cette **VaR**, notée $VaR_{p,t}(\alpha)$, est définie par **:**

$$VaR_{p,t}(\alpha) = -\Phi^{-1}(\alpha)\,\sigma_p W = -\Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x'\Sigma x}$$

Définition « VaR Non Diversifiée» **:** La *Value-at-Risk* non diversifiée du portefeuille correspond à la somme des **VaR** individuelles ou à la **VaR** d'un portefeuille dans lequel il n'y a pas de position courte et où tous les rendements entre tous les actifs sont parfaitement et positivement corrélés **:**

$$VaR_{u,t}(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} VaR_{i,t}(\alpha)$$

L'écart entre $VaR_{u,t}(\alpha)$ et $VaR_{p,t}(\alpha)$ donne une mesure de la réduction du risque de portefeuille liée à la diversification.

2.2 VaR marginale, incrementale et composée :

Dans une perspective de management des risques, on peut être amené à se poser la question **:** ***quelle position doit être modifiée afin de réduire ma VaR ?***

Pour cela, on utilise différents concepts **:** La **VaR** marginale, incrémentale, et la **VaR** composée.

2.2.1 La VaR Marginale :

Définition « VaR Marginale» **:** ***La Value-at-Risk marginale***, notée $DVaR_i(\alpha)$, correspond à l'effet marginal d'une augmentation d'une unité monétaire d'exposition sur un actif particulier d'un portefeuille sur la **VaR** du portefeuille.

$$\Delta VaR_i(\alpha) = \frac{\partial VaR_{p,t}(\alpha)}{\partial W_i}$$

Où W_i désigne le montant investit dans le **i**ème actif du portefeuille et $VaR_{p,t}(\alpha)$ désigne la **VaR** (*diversifiée*) du portefeuille.

- L'approche de la **VaR** *marginale* est généralement complétée par un calcul de **VaR** *incrémentale*.
- **VaR** *marginale* d'un actif en portefeuille = Sensibilité de la **VaR** du portefeuille au montant investi dans un actif **i**, w_i.

2.2.2 La VaR Incrémentale :

Définition « VaR Incrémentale» : ***La Value-at-Risk incrémentale*** correspond à la variation de **VaR** engendrée par le passage d'une position p_1 à une position p_2 sur l'ensemble des **N** actifs du portefeuille.

$$VaR \text{ incrémentale} = VaR_{p_2,t}(\alpha) - VaR_{p_1,t}(\alpha)$$

Où α désigne le taux de couverture.

- La **VaR** *incrémentale* permet de mesurer la variation des risques et donc de la **VaR**, engendrée par le passage d'une position initiale à une autre position, impliquant des variations sur un ou plusieurs actifs d'ampleur variables (*problème des non linéarités dans la variation de la VaR*).

2.2.3 La VaR Composée :

- ✓ On peut enfin envisager une décomposition du risque afin d'identifier les gains liés à la diversification. Pour cela on utilise la notion de ***VaR composée*** (*component VaR*).
- ✓ L'idée de base consiste à déterminer ce que serait le risque si l'on retirait un actif du portefeuille. La variation de risque par rapport à la situation initiale donne une mesure des *gains/pertes* en termes de *diversification/risque* liés à l'introduction de cet actif dans le portefeuille.

Définition « VaR Composée» : ***La Value-at-Risk composée*** (*component VaR*) associée au **i** **ème** actif, pour **i = 1, ..,N**, notée $CVAR_i(\alpha)$, est la variation de **VaR** engendrée par la suppression de cet actif du portefeuille.

$$CVaR_{i,t}(\alpha) = \Delta VaR_{i,t}(\alpha) \times W_i = VaR_{p,t}(\alpha) \times \beta_i \times w_i$$

Où $VaR_{p,t}(\alpha)$ et w_i désignent respectivement la **VaR** et le montant investit dans l'actif **i** , et où β_i désigne le *beta* (*CAPM*) associé au **i** **ème** titre.

$$\beta_i = \frac{cov(R_i, R_p)}{\sigma_p^2}$$

- ➢ ***Remarques :***

Par construction, la somme des **CVaR** est égale à la **VaR :**

$$VaR_{p,t}(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} CVaR_{i,t}(\alpha)$$

3/ Limites de la Value-at-Risk :

La *Value at Risk* est un indicateur de risque énormément utilisé depuis les années ***90***, presque toutes les institutions financières, voir l'intégralité utilisent ce dernier dans leur gestion du risque.

Bien avant la crise de ***2007***, la **VaR** était déjà très critiquée. Avec la publication de « *Thinking Coherently* » en ***1997*** puis « *Coherent Measures of risk* » les progrès théoriques ont commencé à discréditer les pratiques de marchés. D'autres publications, en ***2000*** et ***2001***, mettaient en garde contre les conséquences de la **VaR**. L'une d'entre elles disait déjà que la **VaR** pouvait déstabiliser une économie et provoquer des *krachs* qui, sans cette mesure, ne se produiraient pas.

Depuis la récente crise, les discussions autour de la **VaR** s'intensifient. *Par **exemple***, l'article de ***J. Nocera*** en janvier ***2009*** transcrit la part de responsabilité de l'utilisation de la mesure **VaR** dans la crise financière de ***2007***. Il est donc nécessaire de s'intéresser aux principales failles de la **VaR**.

3.1 Avantages de la VaR :

La **VaR** est une mesure du risque à la fois standard, pratique et pertinente. Nous en listons quelques avantages **:**

- ✓ ***L'Universalité*** **:** La méthode est applicable à toutes les classes d'actifs **:** actions, obligations, futures, swaps ... voire sur un portefeuille hétérogène composé de plusieurs types d'actifs « *simplicité d'interprétation* ».

- ✓ La **VaR** prend en compte plusieurs paramètres directement ou indirectement **:** diversification du portefeuille, volatilité...
- ✓ C'est une mesure précise (*dans un intervalle de confiance donné*) et résumée du risque. Ce qui en fait un outil de pilotage du risque privilégié par les gestionnaires de portefeuille et décideurs.

- ✓ Son périmètre de mesure peut être un simple portefeuille, un desk ou un établissement entier. Ce qui induit une information utile à plusieurs niveaux **:** gestion de portefeuille, arbitrage, aspects réglementaire (***Bâle 2** autorise son utilisation*).

- ✓ Elle est facile à transposer d'un horizon de temps donné à un autre. Ainsi la **VaR** mensuelle est obtenu à partir de la **VaR** quotidienne en multipliant cette dernière par racine de ***20*** (*1 mois = 20 jours ouvrés*). De manière générale, **VaR**(*horizon T*) = Var(*1 jour*) x racine(*T*) **T** étant exprimé en jours « *dimension probabiliste* ».

- ✓ ***Globalité*** **:** Elle permet d'obtenir une vision globale du risque en l'exprimant sous la forme d'une seule valeur, correspondant à la perte maximale encourue.
- ✓ ***Contenue probabiliste*** **:** VaR porte une information probabiliste parce qu'elle fournit le seuil potentiel de perte souffert par le portefeuille dans un niveau de confiance spécifique. Un gestionnaire des risques associe immédiatement de cette façon une quantité de perte à une probabilité d'occurrence.

- ✓ Elle donne une perception simple de l'envergure des pertes possibles.

3.2 Inconvénients de la VaR :

La **VaR** présente certains inconvénients **:**

- La **VaR** est sujette au risque de modèle **:** une erreur de spécification de la distribution de *P&L* par ***exemple***.
- La **VaR** est sujette au risque d'implémentation liée à la structure des données requises pour estimer la *P&L* distribution ou la **vaR** directement.
- Mais tous ces risques ne sont pas propres à la **VaR**.

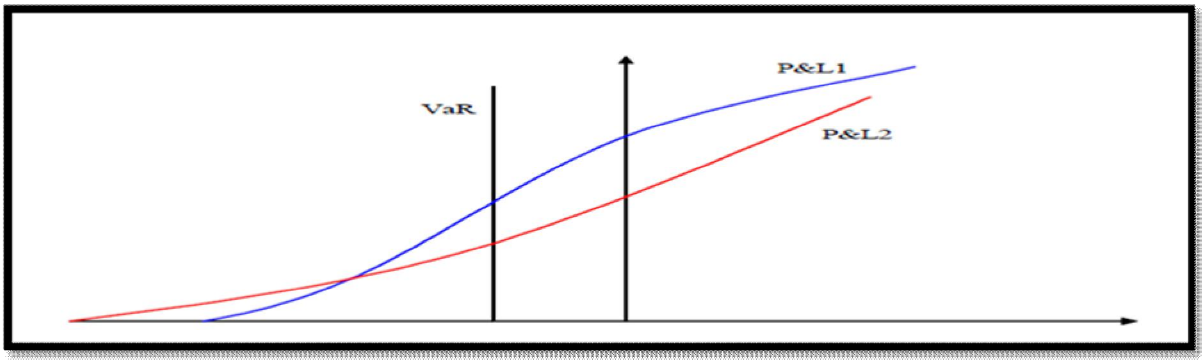
3.3 Limites de la VaR :

En revanche la **VaR** présente aussi certaines limites qui lui sont propres **:**

- Cette mesure de risque ne donne aucune information sur les pertes au delà de la **VaR**.
- Cette mesure peut conduire des agents à prendre de "*mauvaise décision*" d'investissement.
- Cette mesure peut conduire certains agents à prendre volontairement plus de risque dans un système de management des risques décentralisé.
- Cette mesure de risque ne donne aucune information sur la sévérité de la perte, ou de la ruine dans le cas de son utilisation pour l'évaluation du ***besoin en fonds propres*** d'une compagnie d'***assurance***.
- La *Value-at-Risk* ne donne aucune information sur l'ampleur des pertes extrêmes (*ou pertes en excès*) qui peuvent apparaître au delà de la **VaR**. Par conséquent, deux positions peuvent avoir la même **VaR** avec des risques extrêmes totalement différents.
- ***La volatilité*** : Certaines méthodes de calculs se basent sur la normalité des variations de prix. En d'autres termes, les variations des prix suivent une loi normale. En réalité, la variation des cours d'une position boursière peut varier d'un extrême à un autre. Cette volatilité (*représenté par l'écart-type des rendements d'une position*) est utilisée dans le calcul de la **VaR**. Plus cette volatilité est importante plus la pertinence et la précision de la **VaR** seront diminuées.
- ***La liquidité*** : La **VaR** ne prend pas en compte la liquidité des marchés. En cas de crise, les marchés financiers s'affolent et il n'est pas toujours évident de pouvoir vendre des positions. Il se peut même que cela soit impossible. La crise des « *Subprimes* » est un excellent moyen d'illustrer ce problème. Les crédits à risques au centre de cette débâcle financière ne s'échangeaient pas ou à moins de la moitié de leur valeur nominale.
- ***La périodicité*** **:** Pour calculer une **VaR** pertinente, il faut posséder au minimum ***200*** cours journaliers historiques sur une période de douze mois. Avec moins d'information, la **VaR** perd en pertinence et en précision.

✓ ***Chutes de marchés*** **:** Lorsque les marchés financiers se trouvent au centre d'une crise, la volatilité a tendance à s'envoler. Comme nous l'avons vu, la volatilité est un estimateur de la **VaR**. Plus cet estimateur est élevé, plus la pertinence et la précision de la **VaR** se verront diminuées. Ce raisonnement peut paraître logique si nous partons sur l'hypothèse qu'il est difficile de prédire l'évolution des marchés en cas de crise. Les modèles classiques de calculs de **VaR** utilisent les rendements historiques pour estimer la **VaR**. Si les marchés chutent, ces rendements historiques ne pourront pas estimer les pertes ou les gains liés à un événement extrême.

Pertes extrêmes au-delà de la VaR



Cette limite peut avoir des conséquences importantes pour un investisseur **:**

- Supposons qu'un investisseur décide de financer un projet sur la base d'une analyse moyenne-**VaR**.
- Supposons que ce projet peut générer de très forts rendements, mais aussi des très fortes pertes.
- Une analyse fondée sur la **VaR** peut conduire à adopter le projet, si les plus fortes pertes n'affectent pas la **VaR** (*parce que ces pertes excèdent la VaR*), et cela quelle que soit les rendements positif attendus et la taille des pertes potentielles.

L'analyse moyenne-**VaR** peut conduire à accepter des projets avec forts rendements positifs, quelles que soient les possibles pertes associées, si tant est que la réalisation de ces pertes est suffisamment peu probable **:** une telle configuration peut conduire les investisseurs à s'exposer à des très fortes pertes (*quoique relativement peu probable*).

De la même façon, l'usage de la **VaR** dans un système de management des risques reposant sur une relation principal-agent (*délégation*) peut conduire à des effets non désirables **:**

- Supposons que la gestion d'actif est décentralisée et que les *traders* ou les *assets* managers sont soumis à des limites de risques en termes de **VaR**.
- Le *trader* peut avoir intérêt alors (*politique de bonus*) à prendre des positions très risquées (*vente d'options out-of-the-money par exemple*), mais ayant des probabilités de réalisation faible afin de ne pas atteindre les limites de risque établies par les systèmes de contrôle des risques.

3.4 La Value-at-Risk, une mesure de risque cohérente ?

On peut se poser la question de savoir si la **VaR** est une bonne mesure des risques **?**

Mais qu'est ce qu'une "*bonne*" mesure des risques **?**

Notion de ***mesure cohérente des risques.***

La ***théorie des mesures cohérentes de risque*** a été développée par ***Artzner*** et ***al***. (***1997, 1999***).

- L'idée de départ d'***Artzner*** et ***al***, est à la fois simple et profonde **:** la notion de risque financier est dure, voir impossible à conceptualiser, à moins que l'on ne dispose d'une idée claire de ce que l'on entend par mesure de risque.

- Parallèle avec la température et le thermomètre **:** on a tous une notion plus ou moins intuitive de la chaleur et de la température, mais il est impossible de la conceptualiser clairement sans la notion de thermomètre.

- ***Artzner*** et ***al*** , postulent donc un ensemble d'axiomes (*axiomes de cohérence*) sur ce que doit vérifier une mesure de risque.

Définition « Mesure de risque» [*Denuit et Charpentier 2004*] **:** On appelle mesure de risque toute application $\boldsymbol{\rho}$ associant un risque **X** à un réel $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

En particulier, cette définition nous permet d'établir que lorsqu'ils existent, l'espérance, la variance ou l'écart-type sont des mesures de risque.

Soit $\boldsymbol{\rho}(.)$ une mesure de risque sur un horizon donné :

- ✓ Dans l'approche bancaire, $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{X})$ représente le risque associé à la possession du portefeuille **X** pendant une certaine durée (*souvent exprimé en montant de perte maximal*).

- ✓ Dans l'approche ***assurance***, $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{X})$ représente le ***besoin en fonds propres***.

Formulation intuitive des mesures de risque : Soit une fonction $F: \Omega \to \mathbb{R}, \omega \to F(\omega)$. A chaque scenario $\omega \in \Omega$ est associe une réalisation $F(\omega)$. On suppose que les $F(\omega)$ representent des coûts ou plus particulièrement des pertes. Soit une mesure de risque $\boldsymbol{\rho}(\cdot)$. Cette mesure est appliquée aux réalisations $F(\omega)$ dans le but de déterminer le capital de réserve à constituer de manière à ce qu'il contrebalance les pertes des $F(\omega)$ pour un maximum d'états du monde ω.

Formulation mathématique : Soit un espace $(\Omega, \mathcal{F})$ muni d'une sigma-algèbre $\mathcal{F}$. Soit la mesure P telle que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace mesuré. Soit une variable aléatoire F mesurant des pertes définie sur $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ avec $p \in [1, +\infty)$ [(1)]. Pour F, $F' \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, la relation d'ordre partiel est notée par $F \leq F'$ et est définie par $P(F > x) \leq P(F' > x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Définition La fonction $\boldsymbol{\rho}(F)$ est appelée ***mesure de risque***, associée à F, si elle est définie par $\boldsymbol{\rho}(F) : \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et qu'elle est propre **:** $\boldsymbol{\rho}(F) > -\infty$ $\forall F \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et que $dom(\boldsymbol{\rho}) = \{F \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, P) : \boldsymbol{\rho}(F) < +\infty\}$ est non-vide.

Définition « Mesure de risque cohérente» **:** Soient **X** et **Y** deux distributions de *P&L* associées à deux portefeuilles et soit $\boldsymbol{\rho}(.)$ une mesure de risque sur un horizon donné. La mesure de risque $\boldsymbol{\rho}(.)$ est dite cohérente ssi elle satisfait les axiomes suivants **:**

(i) ***Monotonicité*** **:** $Y > X \Rightarrow \boldsymbol{\rho}(Y) \leq \boldsymbol{\rho}(X)$

(ii) ***Sub-additivité*** **:** $\boldsymbol{\rho}(X + Y) \leq \boldsymbol{\rho}(X) + \boldsymbol{\rho}(Y)$

(iii) ***Homogénéité positive*** **:** $\boldsymbol{\rho}(hX) = h\,\boldsymbol{\rho}(X)$ pour h > 0

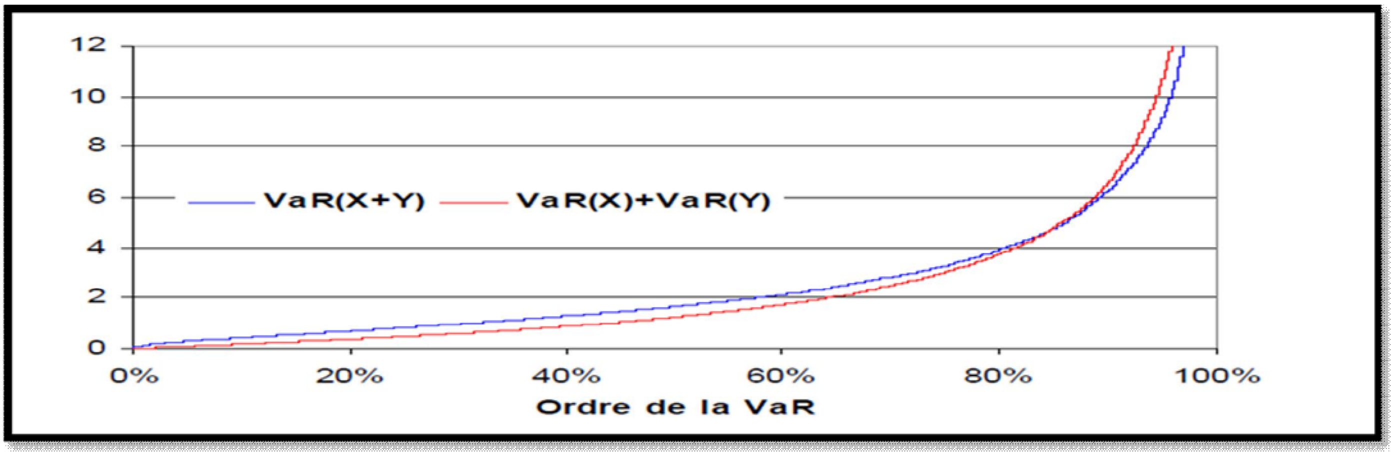
(iiii) ***Invariance translationnelle*** **:** $\boldsymbol{\rho}(X + n) = \boldsymbol{\rho}(X) + n$ pour toute valeur ***n.***

La cohérence a été définie dans le but de définir une classe de mesures de risque possédant des propriétés financières intéressantes.

---

(1) : $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \text{f mesurable et } ||f||_p < +\infty\}$ est l'espace des fonctions $\mathcal{F}$ -mesurables et dont la *p*-ième puissance est intégrable au sens de ***Lebesgue***. Typiquement, *F* est une variable aléatoire qui peut être mesurée dans Ω par la loi de probabilité *P*.

L'axiome le plus important est celui de ***sub-additivité***.



- Il signifie qu'un portefeuille constitué de sous portefeuilles ne doit pas être plus risqué (*au regard d'une mesure cohérente*) que la somme des risques associés aux sous portefeuilles.

- Cet axiome se fonde sur l'idée que l'agrégation des risques individuels, doit conduire à une diversification des risques et on donc à une diminution du risque globale, ou dans le pire des cas à un maintien de celui-ci.

- C'est cet axiome qui fonde la diversification des risques.

- Si les risques sont ***subadditifs***, l'addition des risques individuels donne une sorte d'enveloppe supérieure des risques ou une sorte d'estimation conservatrice des risques. Cela facilite la supervision des risques dans des structures décentralisées. Mais si ce n'est pas le cas, l'utilisation du risque agrégé comme indicateur de risque global peut conduire à largement sous évaluer ce risque global.

La Value-at-Risk n'est pas une mesure cohérente du risque et en particulier la Value-at-Risk ne vérifie pas l'axiome de sub-additivité . « Démonstration Voir Chapitre 1 »

Existe-il des mesures de risques (i) cohérentes, (ii) généralistes, (iii) simple d'interprétation, (iiii) agrégative ?

Les défaillances de la VaR présentées ci-dessus ont conduit à chercher des mesures de risques capables de la remplacer (3.5 *et* ***3.6).***

4/ Au delà de la VaR « *Mesures Alternatives de la VaR* » :

Après avoir échoué par son critère de non *sous-additivité*, il s'est avéré que la mesure de risque d'un portefeuille parce qu'elle ne nous indique rien au sujet de la taille potentielle de la perte qui la dépasse. Pour alléger les problèmes inhérents à la **V**aR et remédier ces défauts**,** d'autres mesures ont été proposées, nous les présentons ci- dessous dont l'idée commune et de quantifier la perte lorsque la **VaR** est dépassée. C'est mesures permettent de prendre en compte l'ampleur des pertes au delà de la **VaR**.

4.1 Tail Value-at-Risk (TVaR) :

Il s'agit de la moyenne des **VaR** pour tous les niveaux supérieurs à **α**. Elle donne donc une information sur la profondeur des pertes une fois que la **VaR** est dépassée. Contrairement à la **VaR**, la ***Tail-VaR*** permet de tenir compte de toute l'information disponible dans la queue de distribution et a l'avantage d'être une mesure de risque cohérente.

Définition 1 « Tail Value-at-Risk» **:** est définie par la formule suivante **:**

$$\textbf{TVaR}\,(X, \alpha) = \inf\{x + (1-\alpha)^{-1}\mathbb{E}\,[X - x]_+\} \quad (***)$$

Cette définition ne sera utilisée que pour monter la cohérence de la **TVaR**. La définition usuelle est la ***2***ème.

Définition 2 « Tail Value-at-Risk» **:** Pour un risque X, la **TVaR** au seuil $\alpha \in\,]0; 1[$, notée par **TVaR [X; α]** ou par $TVaR_\alpha$, est définie par la formule suivante **:**

$$\textbf{TVaR}\,(X, \alpha) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 F_X^{-1}(p)\,dp$$

- La ***Tail-VaR*** est la moyenne des **VaR** de niveau supérieur à α. Cette mesure de risque prend en compte les valeurs de la distribution au delà de la **VaR** au niveau de confiance α et donc elle donne une information sur l'épaisseur de la queue de distribution.

- La ***Tail Value-at-Risk*** est cohérente.

➤ ***Remarque :***

Notons que, **TVaR[X; 0] = E[X].** Et comme :

$$\mathrm{TVaR}[X;\alpha] = \frac{1}{1-\alpha}\left\{\mathbb{E}[X] - \int_0^\alpha \mathrm{VaR}[X;\xi]\,d\xi\right\}$$

On en déduit que la **TVaR** est une fonction croissante en α. De plus :

$$\mathrm{TVaR}[X;\alpha] \geq \mathrm{TVaR}[X;0] = \mathbb{E}[X].$$

La ***Tail-VaR*** contient toujours un chargement de sécurité.

Elle est souvent retenue par rapport aux autres alternatives de la VaR, pour les raisons suivantes :

- ✓ C'est un concept simple ;
- ✓ C'est une mesure de risque ***cohérente*** ;
- ✓ Elle peut être appliquée à tout type d'instruments et pour tout type de risque ;
- ✓ Elle donne une évaluation unique globale pour les portefeuilles exposés à différentes sources de risques.
- ✓ Toutes les banques qui ont un système de gestion des risques basé sur la **VaR** pourraient passer à la **TVaR** sans y apporter de modifications trop importantes.

- ***Exemple 1 :***

A partir des *P&L* d'un actif ou d'un portefeuille sur ***500*** jours, on déduit facilement la **VaR[99%;1]** comme étant la *cinquième* pire perte. On pense ne pas subir de pertes quotidiennes supérieures à **VaR[99%;1]** avec un degré de confiance de *99*%. Le tableau ci-après est un exemple illustratif de la détermination de la **VaR** à partir des résultats du portefeuille.

	Date	Pertes et profits en €	Pertes et profits triés en €
1	01/01/2009	54 698	-222 569
2	02/01/2009	24 651	-198 657
3	03/01/2009	-94 654	-154 896
4	04/01/2009	30 256	-134 947
5	05/01/2009	-76 543	-118 975
6	06/01/2009	-19 456	-99 653
7	07/01/2009	45 624	-98 456
8	08/01/2009	-24 958	-94 654
9	09/01/2009	-98 456	-89 753
10	10/01/2009	115 654	-88 956
11	11/01/2009	88 325	-84 563
...			
500	15/05/2010	21 320	306 842

- ✓ La **VaR** ainsi obtenue est **: VaRX[99%;1]** = 118 975 €.
- ✓ La **Tail-VaR** est la moyenne des pertes strictement supérieures à la **VaR**.

$$TVaR[99\%,1] = \frac{222\ 569 + 198\ 657 + 154\ 896 + 134\ 947}{4} = 177\ 767€$$

➢ ***Proposition** : « Comparaison entre VaR et TVaR »*

L'équation (***) est équivalente à

$$\mathbf{TVaR}\ (X, \alpha) = \mathbf{VaR}(X, \alpha) + (1 - \alpha)^{-1}\mathbb{E}\ [X - \mathbf{VaR}(X, \alpha)]_{+}\}$$

Dès lors, on a **TVaR (X, α) ≥ VaR(X, α)**

*(**VaR** = 1.7940 et **TVaR** = 2.0846 pour **X** ~ LogN(μ = 0.2, σ^2 = 0.09) et α = 0.9)*

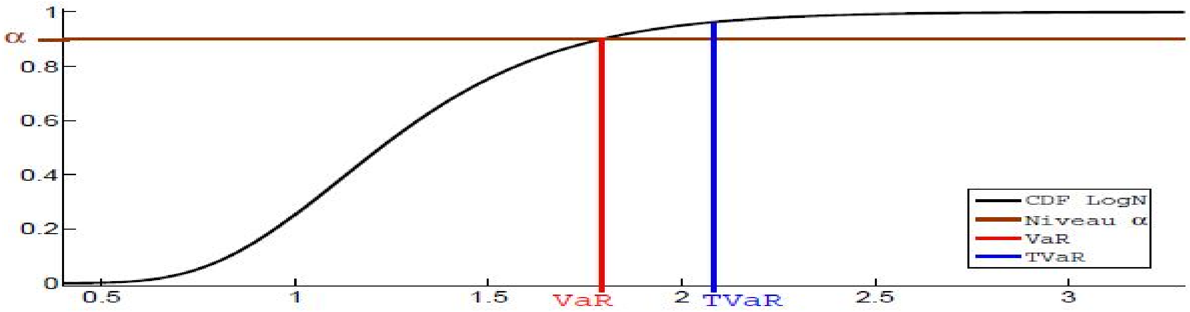


FiG : Comparatif des mesures de VaR et TVaR.

4.2 Expected shortfall (ES) :

La **VaR** nous donne une indication sur la perte minimale attendue lorsque l'on considère (***1-α***) événements défavorables du portefeuille. Elle ne fournit donc aucune indication sur l'importance des pertes au delà du seuil qu'elle représente. De plus, le fait qu'elle ne satisfasse pas aux conditions d'une mesure de risque cohérente doit remettre en question l'utilisation qui en est faite par les institutions bancaires. C'est pourquoi, les universitaires et certains praticiens se tournent vers cette mesure.

Définition « Expected Shortfall»* : *L'Expected Shortfall (*ES*) associée à un taux de couverture de α % correspond à la moyenne des α % pires pertes attendues telle que **:**

$$ES_t\ (\alpha) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} F_{R_t}^{-1}\ (p)\ dp$$

Où F_{R_t} **(.)** désigne la fonction de répartition associée à la fonction de densité f_{R_t} **(*r*)**. Par convention, on exprime l'*ES* sous forme positive comme la **VaR**, alors qu'il s'agit d'une perte moyenne.

- *L'expected shortfall* de niveau de probabilité **α** est la perte moyenne au delà de la **VaR** au niveau **α.**

- *L'Expected Shortfall* nous donne une information sur la moyenne des pertes dans les pires états de la nature, c'est à dire dans les α % situations où les pertes excèdent la ***VaR(α)*** .

- *L'Expected Shortfall* est aussi appelée parfois *Conditionnal Loss* ou *Expected Tail Loss (**ETL**)*.

- Pour une distribution discrète, on a **:**

$$ES\ (\alpha) = \frac{1}{\alpha}\sum_{p=0}^{\alpha} p^{\grave{e}me}\text{plus forte perte} \times \Pr\left(p^{\grave{e}me}\text{plus forte perte}\right)$$

- Si **X** représente la charge brute de sinistres, ES_{α}**(X)** est le montant de la prime ***Stop-Loss*** *(*)* dont la rétention pour l'assureur est la **VaR** au niveau **α**.

*L'Expected Shortfall (**ES**) est une mesure cohérente de risque et vérifie en particulier l'axiome de sub-additivité.*

4.2.1 Calcule de l'ES :

- Pour certaines distributions de *P&L* (*distribution normale notamment*) il existe des formules analytiques permettant de calculer l'*ES*.

- Dans les autres cas, on utilise des approximations numériques.

Définition « ES dans le cas d'une distribution Normale» **:** Dans le cas d'une distribution de P&L normale centrée réduite $N\ (\mu, \sigma^2)$, *l'Expected Shortfall* associée à un taux de couverture de α % vaut **:**

$$ES_t\ (\alpha) = \exp\left(-\frac{F_t^{-1}\ (\alpha)^2}{2}\right)\frac{\sigma}{\alpha\sqrt{2\pi}}$$

Dans le cas général, il n'existe pas de formule analytique pour l'*ES* et on utilise des approximations numériques. Une méthode de calcul possible est alors celle de la moyenne des **VaR** (*average VaR*) **:** on calcule **N VaR** associées à **N** taux de couverture équi-répartis sur le segment] ***0,*** α] et l'on calcule la moyenne de ces **VaR**. Lorsque **N** tend vers l'infini, la moyenne empirique des **VaR** converge vers l'*ES*.

(*) Le ***stop loss*** **:** est un mécanisme permettant à l'investisseur de se garantir d'un niveau maximum de baisse. L'assuré se prémunit contre les baisses pouvant intervenir sur les marchés financiers.

4.3 Conditionnal Tail Expectation (CTE) :

Définition « Conditionnal Tail Expectation » **:** La *Conditionnal Tail Expectation* noté CTE_α de niveau $\alpha \in]0,1[$ est le montant de la perte moyenne sachant que celle-ci dépasse la **VaR** au niveau α, i.e.

$$CTE(X, \alpha) = E(X|X > VaR(X, \alpha)).$$

Cette mesure de risque s'intéresse à la queue de distribution car elle donne des informations sur la distribution de **X** au-delà de la **VaR** c-à d c'est la perte attendue sachant que la **VaR** au niveau α est dépassée, i.e. « *perte moyenne dans les pires* $1 - \alpha$ *% des cas* ».

La **CTE** mesure la taille moyenne du plus haut **(1-** α**)** 100% des valeurs de **X**, dépassant la **VaR,** mais elle ignore des valeurs au-dessous de la **VaR.** Cette mesure de risque reflète non seulement la fréquence du défaut, mais également la valeur moyenne du défaut. Il est évident que la **CTE** serra toujours plus grand ou égal que la **VaR** pour la même valeur de α.

- ***Remarque :***

  La ***Conditional-VaR*** au niveau α, notée **CVaR[X;** α**]**, peut s'écrire comme suit **:**

$$\begin{aligned} \mathrm{CVaR}[X;\alpha] &= \mathbb{E}\Big[X - \mathrm{VaR}[X;\alpha]\Big|X > \mathrm{VaR}[X;\alpha]\Big] \\ &= e_X\left(\mathrm{VaR}[X;\alpha]\right) \\ &= \mathrm{CTE}[X;\alpha] - \mathrm{VaR}[X;\alpha]. \end{aligned}$$

- ***Proposition :***

  La ***CTE*** et la ***TVaR*** coïncident pour des risques dont la fonction de répartition est continue, i.e.

$$\mathrm{CTE}[X;\alpha] = \mathrm{TVaR}[X;\alpha], \qquad \alpha \in (0,1)\,.$$

4.4 Critiques des mesures basées sur la VaR :

S'il est certain que beaucoup s'interrogent sur l'avenir de la **VaR**, il semble cependant qu'aucun consensus n'ait été trouvé pour la remplacer. Même si de multiples intervenants paraissent se tourner vers l'***Expected Shortfal***l, d'autres rejettent cette mesure ainsi que toutes mesures basées sur la **VaR**. Il est incontournable de citer le professeur ***N. Taleb*** qui mène « *une guerre contre la* ***VaR*** » depuis ***1996***. La plus importante critique de la **VaR** réside dans sa définition même. En effet, elle représente la perte attendue qui ne sera pas dépassée dans α (*par exemple* ***99%***) des cas.

Or il est important de considérer ce qui se passe dans le (***1-α***) (*par exemple* ***1***%) restant, c'est-à dire dans le cas extrême qui a si peu de chance de se produire. Comme il a été vu auparavant, la **VaR** ne donne pas d'indication sur l'ampleur des pertes dans le cas où elle est dépassée. Aux personnes qui considèrent que la **VaR** est une bonne mesure en général, ***N. Taleb*** répond qu'un trader qui gagne ***8 MUSD*** en ***8*** ans et qui perd ***80 MUSD*** en ***8*** minutes peut tout aussi bien être qualifié de bon trader en général. Cet exemple caricatural illustre bien le vrai problème derrière la notion de perte maximale à un niveau de confiance donné. Il a été vu que la ***Tail-VaR*** pouvait répondre partiellement à la question de l'ampleur des pertes attendues. Toutefois, ***N. Taleb*** la considère, au même titre que toutes les mesures quantitatives (*et probabilistes*) basées sur la notion de pertes associées à de rares événements, comme défectueuse.

L'argument principal du rejet de ces méthodes étant que les pertes passées ne prédisent pas les pertes futures. Comme solution, ***N.Taleb*** préconise d'une part l'adoption de certains comportements, comme celui d'éviter que les institutions ne deviennent « *too big to fail* » ou d'interdire les instruments dérivés complexes, et d'autre part utiliser une mesure robuste comme le *ratio de levier*. Par ailleurs, ***R. Bookstaber***, en ***2009***, préconise également le recours au *ratio de levier* pour remplacer la **VaR**.

Il est encore possible de trouver des défenseurs de la **VaR**. En effet, la **VaR** développée par ***RiskMetrics*** n'avait pas vocation à décrire le risque supporté par un portefeuille en cas de crise systémique. De par sa définition, la **VaR** était au départ un outil permettant de donner une indication du risque dans α (*par exemple **99%***) des cas. Elle était alors utilisée pour regarder l'évolution du risque d'un actif ou d'un portefeuille, de comparer les risques entre différents instruments ou différentes activités hors période de perturbations exceptionnelles des marchés.

Depuis que cette mesure a pris de l'importance, depuis qu'elle a été adoptée par la plupart des institutions financières et surtout depuis qu'elle est à la base du calcul des capitaux réglementaires, beaucoup se sont mépris sur son utilité et ses capacités. La **VaR** peut être très utile comme outil de gestion des risques mais ne constitue pas à elle seule l'image du risque supporté par la banque. En complément d'un suivi détaillé des activités, d'un management rigoureux, de la mise en place et du suivi de limites et de réalisation de ***Stress Tests***, la **VaR** a sa place en gestion des risques d'une banque, à condition d'être bien interprétée.

Le point de vue de plusieurs chercheurs et praticiens vient d'être évoqué **:** en résumé, certains préconisent l'utilisation d'une mesure alternative à la **VaR** et d'autres rejettent totalement cette mesure ainsi que toutes ses variantes possibles. Il est à présent utile de s'intéresser aux deux récentes évolutions de ***Bâle II***.

De ce fait, les agences de réglementation exigent que des tests rigoureux, comme le ***Back-Testing*** et le ***Stress Testing*** soient faits régulièrement afin de vérifier la validité et la stabilité du modèle interne à travers diverses conditions et crises du marché. Ces tests continus sont obligatoires car la **VaR** est une mesure statistique locale et surtout très volatile.

4.4.1 Stress Testing ou la VaR stressée « SVaR » :

- ***Contexte et définition :***

En réponse à la crise de ***2007-2008***, le comité de ***Bâle*** a publié en juillet ***2009*** un document sur la révision de la prise en compte du risque de marché dans les accords de ***Bâle II***. Les modifications finales entrer en vigueur à la fin de l'année ***2010*** mais ils sont finalement repoussées au ***31 décembre 2011***.

Il a été précisé auparavant que la crise de ***2007*** avait révélé une sous-estimation du risque mesuré par des modèles **VaR** en période de forte volatilité. Les pertes de la plupart des portefeuilles de négociation des banques ont été largement supérieures au capital requis pendant la crise financière. Ce phénomène a démontré que l'exigence minimale en capital n'était pas assez prudente. C'est la raison pour laquelle les révisions de *juillet **2009*** recommandent le calcul d'une **VaR** dite ***stressée***, basée sur un scénario de crise, pour capturer les événements de perturbation des marchés. La mesure est établie sur un historique d'observation incluant une période de fortes turbulences.

De ce fait ,le ***Stress testing*** est une technique qui consiste à estimer la perte potentielle en soumettant le modèle à des variations extrêmes des paramètres, correspondant à un scénario de catastrophe financière **:** *krach boursier, effondrement du taux de change, hausse brutale de taux d'intérêt, etc.* , dans ce cadre on peut estimer la **VaR** sous des situations extrêmes déjà produites telles que le *crash boursier d'octobre **1987***, la crise du *SME de **1992*** ou la *crise mexicaine de **1995***. Par ***exemple***, pour tester l'impact d'un mouvement extrême dans les prix des actions américaines, un gestionnaire pourrait supposer que toutes les variables du marché sont égales à celles du ***19*** octobre ***1987***. Si l'on considère ce scénario trop extrême, le gestionnaire pourrait choisir le ***8*** janvier ***1988***.

Ce calcul a pour but d'atténuer le phénomène de pro-cyclicité des ***fonds propres*** réglementaires. Néanmoins, la réglementation précise que le seul calcul d'une **VaR *stressée*** ne sera pas suffisant pour capturer les pertes extrêmes que peuvent subir les institutions financières en période de crise. Comme pour la **VaR** *standard*, des ***stress-tests*** quantitatifs et qualitatifs doivent être mis en œuvre périodiquement afin de prendre en compte l'effet de scénarios défavorables sur le capital réglementaire.

- ***Les paramètres de la VaR Stressée :***

Les critères fixés par le comité de ***Bâle*** pour le calcul de la **VaR *stressée*** « ***SVaR*** **»**, sont les suivants **:**

- ✓ La **VaR *stressée*** doit être calculée hebdomadairement ;
- ✓ Le niveau de confiance est de ***99***% ;
- ✓ L'horizon minimal de détention ***n*** est de ***10*** jours ouvrés;
- ✓ La période d'observation ***N*** n'est pas fixée.
- ✓ La période d'observation doit correspondre à une période de *stress* financier significatif et approprié au portefeuille de la banque. Pour la plupart des portefeuilles, le Comité de ***Bâle*** préconise une période de un an relative aux pertes importantes de ***2007/2008***.

- ***Mode de calcule de SVaR :***

Les ***stress tests*** sont utilisés afin de simuler des situations de crises. Le comité de ***Bâle*** impose aux institutions financières d'utiliser des ***stress tests*** lors d'un calcul de *Value at Risk.*

Ces ***stress tests*** répondent en partie aux problèmes liés aux chutes brutales de marchés. Le but est de simuler une situation de crise et ensuite nous calculons la **VaR** sur cette simulation. Ainsi nous prenons en compte des événements extrêmes ayant peu de chance de se produire et que la **VaR** ne prend pas en compte dans ses distributions de rendements.

Il existe plusieurs méthodes afin simuler du ***stress testing***. Par ***exemple***, il convient de vérifier la **VaR** si les taux directeurs varient de ***100*** points de bases ou encore lorsque la volatilité d'un actif augmente considérablement. Une multitude de méthodes de ***stress testing*** ont vues le jour, c'est à chaque institution de trouver quelle méthode lui convient le mieux.

Une autre solution qui s'offre aux banques est d'utiliser des crises financières comme références pour ses tests. Nous prenons comme référence pour les tests, un événement défavorable, par ***exemple***, la chute des « ***Twin Towers*** » (*) de *New-York*. Les marchés boursiers se sont effondrés à la suite de se drame. Ainsi nous pouvons modéliser une volatilité afin d'effectuer un ***stress test*** sur la position ou le portefeuille qui nous intéresse.

Cependant ces méthodes sont relativement complexes à mettre en place et ne présentent pas forcément le risque de manière réaliste. Ce types de modèles demandent des infrastructures informatiques, du personnel qualifié et engendrent évidemment des frais importants.

Toutefois, les ***stress tests*** sont encore à leurs balbutiements. Il est très compliqué de vérifier empiriquement l'exactitude des résultats. Cela nous indique, que cette méthode n'est pas encore la réponse parfaite pour palier aux événements extrêmes.

De ce fait, le Comité de ***Bâle*** a réalisé les premières estimations de l'impact de la **VaR *stressée*** sur le capital réglementaire à partir d'un échantillon de ***38*** banques de ***10*** pays différents. Cette étude a montré qu'en calculant une **VaR *stressée*** à partir des données de perturbations (***2008***) et des données d'une période de faible ***stress*** (***2006***), en moyenne une augmentation de ***110* %** des exigences minimales de ***fonds propres*** a été constatée.

L'introduction d'une ***VaR stressée*** doit permettre de remédier aux faiblesses de la **VaR *classique*** en déterminant le montant minimal de *fonds propres* par une combinaison linéaire des **VaR *classique*** et ***stressée* :**

$$c = max\{VaR_{t-1}; m_c * VaR_{AVG}\} + max\{SVaR_{t-1}; m_s * SVaR_{AVG}\}$$

Où **c** est le montant minimal de *fonds propres* requis, $\mathbf{VaR_{t-1}}$; $\mathbf{VaR_{AVG}}$ désignent respectivement la **VaR** classique en **t-1** et la moyenne des $\mathbf{VaR_{t-1}}$sur une période de ***60*** jours, $\mathbf{SVaR_{t-1}}$ est la **VaR *stressée*** en $\mathbf{t-1}$ et $\mathbf{SVaR_{AVG}}$ la moyenne des **VaR** stressées en $\mathbf{t-1}$ sur une période de ***60*** jours. m_c et m_s sont des facteurs multiplicatifs compris entre ***3*** et ***4*** déterminés par les autorités de supervision.

(*) : Le World Trade Center (abrégé ***WTC***) était un complexe composé de sept immeubles d'affaires situé à *Lower Manhattan*, à New York, dans l'État de New York aux États-Unis .Marquées par un incendie le ***13*** février ***1975*** puis par un attentat à la bombe le ***26*** février ***1993***, les tours jumelles sont intégralement détruites par deux avions détournés le ***11*** septembre ***2001***. Leur position est depuis surnommée *Ground Zero* (*bien que les New-Yorkais préfèrent l'appellation World Trade Center site*). Identifié par ses deux bâtiments les plus célèbres, les *Twin Towers* (*tours jumelles*), il est un symbole de la puissance américaine aux yeux du monde entier et une icône de New York.

- ***Avantages du Stress Testing :***

Cette méthode de simulation de crise dispose de divers avantages qui font d'elle le complément naturel du concept de **VaR :**

- ✓ La méthode de « ***stress testing*** » est capable de simuler n'importe quel scénario jugé intéressant. Elle parvient en effet à prendre en compte des situations complètement absentes des données historiques et de toute prévision qui, même peu probable, est jugée possible.

- ✓ La méthode de simulation de crise force les gestionnaires du risque à analyser les vulnérabilités de l'institution financière à certains événements.

- ✓ Lors de situations de crise des marchés financiers, la liquidité des marchés s'assèche. Ce phénomène rend indisponible toute information de prix suffisamment fiable que pour quantifier la perte potentielle. Dans ce cas, un ***stress testing*** bien mené semble être la seule méthode à même d'évaluer les risques de l'institution financière.

- ***Inconvénients du Stress Testing :***

La simulation de crise souffre d'un certain nombre de faiblesses **:**

- ✓ L'utilité de la simulation de crise dépend en fait des compétences et de l'intuition des gestionnaires du risque. Car la méthode de ***stress testing*** souffre d'un manque de rigueur scientifique pour le calcul de la **VaR** en ce sens que la construction des scénarios s'opère de façon totalement subjective, en plus les événements extrêmes contre lesquels l'institution financière cherche à se prémunir peuvent très difficilement être anticipés.
- ✓ Lorsque l'institution financière dispose d'un portefeuille large et complexe, le ***stress testing*** peut éprouver quelques difficultés à gérer une masse importante de possibilités et un grand nombre de corrélations.

4.4.2 BackTesting :

- ***Qu'est ce que le Backtesting ?***

Il n'existe pas de définition précise du ***Backtesting***, la plus générale étant celle proposée par ***Jorion*** (*2007*) :

Définition **:** Le ***Backtesting*** est un ensemble de procédures statistiques dont le but est de vérifier que les pertes réelles observées ex-post sont en adéquation avec pertes prévues. Cela implique de comparer systématiquement l'historique des prévisions de ***Value-at-Risk*** aux rendements observés du portefeuille (*Jorion*, ***2007***).

- ***Pourquoi mettre en œuvre le Backtesting ?***

1) *Aspects réglementaires :*

✓ Les institutions financières sont réglementairement contraintes de mettre en œuvre une validation de leurs modèles internes de **VaR**.

✓ Les réglementations prudentielles définies dans le cadre des accords de ***Bâle*** laissent la liberté aux institutions financières de développer leur propre modèle interne d'évaluation des risques et de calcul de la *Value at Risk* (**VaR**).

✓ En contrepartie, les réglementations prudentielles imposent une évaluation de ces modèles de **VaR** par des procédures de ***Backtesting***.

✓ Le choix des techniques de validation devient alors un problème essentiel de la politique de transparence et de gestion des risques des institutions financières.

✓ Comment certifier (*sur le plan réglementaire*) la validité et la précision d'une mesure de risque comme la **VaR**, issue généralement d'un modèle relativement compliqué et sur lequel il peut être difficile, voir non souhaitable, de communiquer pour une banque ***?***

2) *Intérêt pour les Risk Managers :*

✓ Les utilisateurs de la **VaR** et plus généralement les *Risk Managers* ont besoin d'évaluer les prévisions de **VaR** en dehors des normes réglementaires imposées par ***Bâle II***.

✓ Mise en place de procédures de ***Backtesting*** internes à l'institution financière dans le cadre générale du contrôle interne des risques.

✓ Mise en place de procédures de ***Backtesting*** lors de la construction des modèles de prévision de la **VaR**.

3) *De la grande diversité des méthodes de prévision de la VaR :*

✓ Il existe de très nombreuses méthodes (*paramétriques, non paramétriques ou semi-paramétriques*) de calcul et de prévision de la **VaR**.

✓ Or, la pratique montre que ces différents modèles conduisent généralement à des estimations très différentes de la **VaR**, et donc du risque, pour un même portefeuille.

✓ Dès lors le ***Backtesting*** doit permettre de déterminer la (*ou les*) méthodes les plus appropriées pour prévoir la **VaR**.

✓ Distinction entre test de validation de prévision / test de comparaison de prévision.

Définition (Test de Validation) **:** Un test de validation d'une prévision est un test dont l'hypothèse nulle est revient à postuler que la prévision est issue du *DGP* des données.

Définition (Test de comparaison) **:** Un test de comparaison permet de comparer des prévisions issues de modèles potentiellement tous mal spécifiés et de déterminer quel est le "***moins mauvais***" modèle au regard d'une certaine norme ou d'un modèle de référence.

- ***Mode de calcule du Backtesting :***

Il est important de vérifier les modèles de calcul de **VaR**. Cette procédure, appelé le ***Back-testing*** se déroule en plusieurs phases. En premier lieu, il faut vérifier le nombre de fois ou la perte a dépassé la **VaR** sur l'horizon temps choisi. Si nous avons choisi un intervalle de confiance de ***95%*** et que la perte dépasse ***5%*** de nos estimations de la **VaR**, alors nous avons sous-estimé nos calculs. Au contraire, si les pertes ne sont que de ***3%***, alors nous les avons surestimé et le modèle doit être adapté afin d'éviter une couverture inutile.

Cette procédure permet d'éliminer des risques liés aux choix du modèle ou des paramètres.

D'ailleurs le comité de ***Bâle*** (*amendement de la BIS, **1996***) impose un ***back-testing*** de la **VaR**. Chaque banque doit prendre en compte les variations entre les gains et les pertes hypothétiques avec la réalité. Ainsi, sur une période de ***250*** jours, la banque note toutes les exceptions de la **VaR**. S'il y a plus de cinq exceptions, un multiplicateur est imposé à la banque. Ce type de contrôle permet d'éviter des pertes trop importantes d'un seul coup, car les banques sont obligées de se couvrir.

4.5 Comparaison des mesures (VaR,TVaR, SVaR) :

Tableau comparatif des mesures

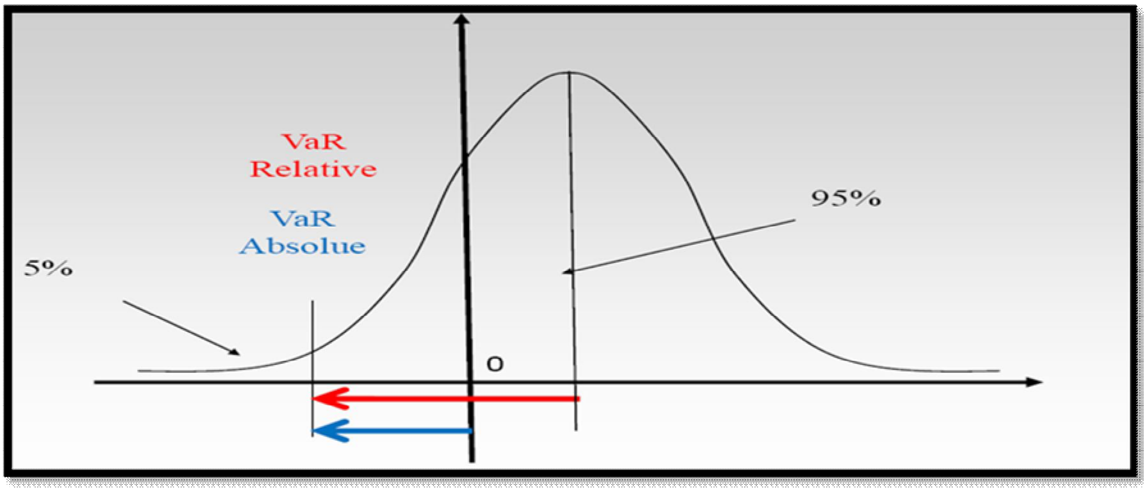
	En tant que mesure de risque		Pour le calcul des capitaux réglementaires	
	Avantages	**Inconvénients**	**Avantages**	**Inconvénient**
VaR	Simple à mettre en œuvre	-Non cohérente -Procyclique	-Réduit les exigences (en comparaison avec la méthode standard) en période de stabilité. -Rend les capitaux réglementaires sensibles au risque.	-Introduit la procyclicité dans les capitaux réglementaires. -Conduit à des exigences insuffisantes en période de crise.
TVaR	-Simple à mettre en œuvre -Cohérente	Procyclique	-Réduit les exigences (en comparaison avec la méthode standard) en période de stabilité. -Rend les capitaux réglementaires sensibles au risque.	-Introduit la procyclicité dans les capitaux réglementaires. -Peut conduire (mais dans une moindre mesure que la VaR) à des exigences insuffisantes en période de crise exceptionnelle.
SVaR	Non procyclique	Mesure pessimiste	-Doit permettre de constituer des réserves suffisantes en période de crise.	-Conduit à des exigences conservatrices en période de stabilité (coûteux). -Les exigences ne sont plus proportionnelles au risque encouru.

Parmi les méthodes historiques basées sur les pertes potentielles, la ***Tail-VaR*** semble la plus adaptée à la gestion des risques d'une institution financière. Cette mesure conserve les avantages de la **VaR**, tout en répondant à certaines de ses lacunes. La **VaR *stressée*** peut fournir une indication sur les pertes qui seraient potentiellement subies par le portefeuille de négociation en cas de perturbation des marchés, mais ne peut être retenue comme unique mesure. En ce qui concerne les exigences minimales de fonds propres, la **VaR** a conduit à les sous-estimer en période de crise. Utiliser la **VaR *stressée*** ou la ***Tail-V***ar permettrait d'augmenter les capitaux réglementaires et donc de répondre partiellement à ce problème. En revanche, si utiliser la somme de la **VaR *stressée*** et de la **VaR** introduit une prudence qui se veut rassurante et réduit la pro-cyclicité, cela pourrait conduire à exiger des capitaux conservateurs (*en période normale*) et à remettre en cause l'adéquation des capitaux réglementaires au profil de risque des banques.

4.6 La Value at Risk Relative et Absolue :

Ces deux notions représentent une forme de résultat de la ***VaR***. La ***VaR relative*** est la plus communément calculée. Mais La ***VaR absolue*** élimine la moyenne des rendements de la ***VaR relative***. Ceci donne une précision supplémentaire à la **VaR**. Cependant à court terme les rendements moyens sont généralement nuls, donc il est usuel de calculer la **VaR *relative***. Dans la pratique nous ne trouvons rarement de **VaR *absolue***, « *plus de détail voir chapitre 4* ».

Value at Risk absolue et relative



Ce graphique présente de manière claire la différence entre ces deux notions.

VaR Absolue = VaR relative – rendements moyens

Si on redoute une perte, la **VaR *absolue*** et supérieure à la **VaR *relative***.

CHAPITRE : 4

CALCUL DE LA VaR EN VBA EXCEL

1/ Implémentation du calcul de la Value at Risk d'un portefeuille financier sur Visual Basic for Applications sur Excel :

Dans notre exemple de calcule de la **VaR** d'un portefeuille financier, nous allons estimer la **VaR** par la méthode paramétrique « *Variance-Covariance* », La Plus adaptée pour les portefeuilles d'investissements, ont utilisons la plateforme ***VBA*** sur ***Excel***.

1.1 C'est quoi le VBA :

1.1.1 Généralités :

VBA = Visual Basic for application = Language de Programation.

Le langage *Visual Basic For Applications* (***VBA***) est orienté objet et intégré à *Excel*, ce qui en facilite l'apprentissage et son maniement par les utilisateurs. Il est constitué d'instructions, de mots clés, de fonctions, de méthodes et de propriétés pour élaborer des codes qui permettent la manipulation des objets de l'application.

Le ***VBA*** aisi que les ***Macros*** servent à réaliser des choses que l'on ne peu pas faire avec Excel. *Exemple* création d'un formulaire (*User form* « *boîtes de dialogues personnalisées* »), apparition d'image quand on clic sur un bouton etc... Les possibilités sont en fait infinies. Les ***Macros*** servent essentiellement à automatiser et personnaliser des actions dans le classeur.

De ce fait *Visual Basic pour Applications* (***VBA***) est un environnement de développement calqué sur *Visual Basic*, un outil de développement d'applications Windows. Tandis que les programmes *Visual Basic* (***VB***) sont autonomes, les programmes ***VBA*** ne peuvent être exécutés qu'à partir d'une application intégrant cet environnement de développement (*Excel ou une autre application*). Les programmes ***VBA*** sont donc attachés à un document *Word*, une feuille de calcul *Excel* et constituent un projet.

1.2 Quelques Définitons :

1. *Portefeuille Financier :*

Un *portefeuille* regroupe l'ensemble des *actifs* détenus par un investisseur personne morale ou physique « *établissement ou un individu* ». Un *portefeuille* comprend, le plus souvent, des actifs financiers (*titre de créance, action*, *obligation…*) mais il peut également se composer d'*actifs immobiliers*, de *matières premières* ou d'autres supports d'investissement.

2. *Portefeuille Boursier :*

Le *portefeuille boursier* est la représentation de l'ensemble des titres sur lesquels un agent économique a investi sur le marché financier. Un *portefeuille boursier* comprend des valeurs mobilières, dont les *actions* et *obligations*, mais également, des produits plus sophistiqués, comme les *produits dérivés*. La composition et la gestion d'un *portefeuille boursier* nécessite de tenir compte de facteurs tels que les objectifs de croissance d'une économie, d'un secteur et des entreprises mais aussi, des seuils de tolérance de l'investisseur vis-à-vis du risque.

3. *Actif Financier* :

Un *actif financier* est un titre ou un contrat, généralement transmissible et négociable (*par exemple sur un marché financier*), qui est susceptible de produire à son détenteur des revenus et/ou un gain en capital, en contrepartie d'une certaine prise de risque. Les différents *actifs* sont **:** des *valeurs mobilières « actions, obligations, warrants », des titres de créance négociables , des créances, etc. ….*

4. *Action* :

Une action (*en anglais britannique : share, en anglais américain : stock*) est un titre de propriété délivré par une société de capitaux (*par exemple une société anonyme ou une société en commandite par actions*). Elle confère à son détenteur la propriété d'une partie du capital, avec les droits qui y sont associés **:** intervenir dans la gestion de l'entreprise et en retirer un revenu appelé dividende. Le détenteur *d'actions* est qualifié d'actionnaire et l'ensemble des actionnaires constitue l'actionnariat.

5. *Obligation* :

Une *obligation* est un titre de créance représentant la part d'un emprunt obligataire émis soit par des entreprises publiques ou privées, soit par l'État ou des collectivités territoriales. Une *obligation* représente donc une dette à l'égard de l'investisseur. Elle se définit par le nom de son émetteur, son taux d'intérêt, ses dates de paiement d'intérêts, son année d'émission et sa date de remboursement. L'émetteur s'engage à verser un revenu constant, appelé intérêt, pendant toute la durée de l'emprunt, puis à rembourser sa dette au terme de la vie de *l'obligation*.

6. *Warrant* :

Le *warrant* est une option (*mais juridiquement valeur mobilière*), négociable en bourse, qui donne le droit d'acheter ou de vendre, moyennant le paiement d'une prime, pendant une période déterminée et à un prix fixé lors de l'émission, un sous-jacent (*action, un indice, une matière première, une devise*…). Ce produit est donc fortement spéculatif. Il existe deux sortes de warrants **:** le *CALL* et le *PUT*. Si l'investisseur anticipe une hausse prochaine, il va acheter un *CALL*. SI il anticipe une baisse, il va acheter un *PUT*. Comme les warrants sont côtés et négociables, l'investisseur peut le revendre à tout moment. Les banques, créatrices de ces produits, assurent la liquidité du marché.

7. *Titre de Créance* :

Le *titre de créance* est une reconnaissance de dette standardisée émise sur un marché négociable. Il peut s'agir d'un titre de créance négociable à court terme, de moins d'un an (*Certificat de dépôt négociable, billet de trésorerie...*), moyen terme, de 1 à 5/7 ans (*bon à moyen terme négociable, bon du trésor à taux annuel normalisé*) ou enfin à long terme, de 7 (*parfois moins*) à 20 ans et plus (*obligation*).

8. *Indice Boursier* :

Un ***indice boursier*** représente la valeur d'un groupe de titres financiers (*un portefeuille*) et son évolution permet d'apprécier le rendement de ce portefeuille entre deux dates. Les *indices boursiers* sont des indicateurs (*benchmark*) de la performance d'un marché ou d'un secteur économique. On a des indices en matière première « *Dow Jones-USB Commodity Index anciennement Dow Jones-AIG Commodity*

Index… », de Volatilité « *VCAC…* », Mondial « *MSCI mondial…* », Afrique « *BRVM 10…* », Europe « *Euronext100 …*»….

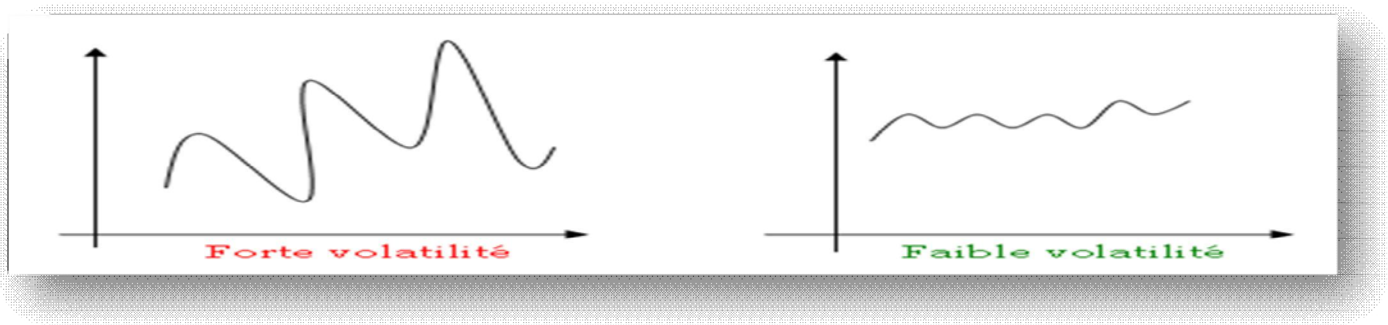
9. ***Cours Boursier*** **:**

Le *cours boursier* d'une action, ou d'un autre titre côté, est le prix auquel s'échangent de tels titres dans les marchés boursiers. Ce cours varie selon l'offre et la demande, avec un système modérateur destiné à éviter les fluctuations plus ou moins erratiques.

10. ***La Volatilité*** **:**

La *volatilité* (*en finance*) est une mesure de l'ampleur des variations du cours d'un actif financier, la *volatilité* d'un actif financier fait allusion au fait que le prix de l'actif, et donc le rendement associé, sont aléatoires. Ceci signifie qu'on ne peut pas être certain, a priori, des prix futurs (*ou des rendements*). Dès lors, le rendement fluctue dans le temps. Il monte et descend d'un jour à l'autre, ou même d'une transaction à l'autre sur le marché.

En finance, le risque d'un actif financier est calculé en fonction de sa *volatilité*. La *volatilité* est couramment définie comme ***l'écart-type*** des rentabilités journalières ; *l'écart-type* étant lui même défini comme la racine carré de la *variance*. Pour le dire autrement, un actif a une forte *volatilité* lorsque ses variations journalières sont très dispersées autour de sa *moyenne*, tandis qu'un actif à une faible *volatilité* si ses rentabilités journalières sont regroupées autour de sa *moyenne*. En tant qu'individu, vous allez demander une prime de risque pour détenir un actif à forte volatilité plutôt qu'un actif à faible volatilité. En effet, les investisseurs ont une aversion pour le risque, et demandent donc un rendement plus élevé pour compenser le fait de porter un actif plus risqué.



1.3 Eléments nécessaires pour le calcule de la VaR :

La première étape consiste à entrer des données historiques (*au maximum pour une année, c'est-à-dire **252** jours ouvrables*) par ordre croissant, dans notre feuille d'*Excel* nommée ***DATA***, et dans notre *exemple* on a prie les données d'un moi « *du 21-01-2013 au 20-02-2013*». Nous sommes allé sur le site dédié à la Bourse *www.forexpros.fr* pour prendre les cours sur un moi de ***5*** actifs « *matières premières **:** Pétrole Brut, Gaz naturel, Or, Argent, Cuivre* », les principales sources de revenus du pays « l'*Algérie* », ensuite ont calcule les rendements journaliers « ***Rj*** », les rendements journaliers moyens « ***Rjm*** », et le rendement moyen du portefeuille « ***RM*** ». Ces calculs seront essentiels par la suite.

Tableau -1-

	Unité : 1 Baril		Unité : 1 BTU		Unité : 1 Once Troy		Unité : 1 Once Troy		Unité : 1 Livre	
	Pétrole Brut		Gaz Naturel		Or		Argent		Cuivre	
Date	*Cours*	*Rendement « Rj »*	*Cours*	*Rendement « Rj »*	*Cours*	*Rendement « Rj »*	*Cours*	*Rendement « Rj »*	*Cours*	*Rendement « Rj »*
21/01/2013	95.82	-0.0100%	3.622	0.8071%	1689.35	0.0592%	32.013	0.0625%	3.670	-0.3259%
22/01/2013	96.77	0.9809%	3.571	-1.4081%	1692.35	0.1716%	32.200	0.5936%	3.707	1.008%
23/01/2013	95.47	-1.3434%	3.574	0.0840%	1684.55	-0.4668%	32.222	0.0590%	3.677	-0.8093%
24/01/2013	95.97	0.5342%	3.419	-4.3636%	1667.05	-1.0447%	31.658	-1.7686%	3.675	-0.0544%
25/01/2013	96.03	0.0625%	3.447	0.8484%	1657.85	-0.5638%	31.185	-1.5252%	3.658	-0.4355%
27/01/2013	95.94	-0.1041%	3.410	0.2646%	1660.95	0.0361%	31.248	0.2180%	3.658	0.0547%
28/01/2013	96.54	0.6254%	3.285	-3.6374%	1658.25	-0.1565%	30.935	-0.9763%	3.665	0.1914%
29/01/2013	97.39	0.8909%	3.270	-0.4869%	1665.15	0.4100%	31.390	1.4609%	3.691	0.73691%

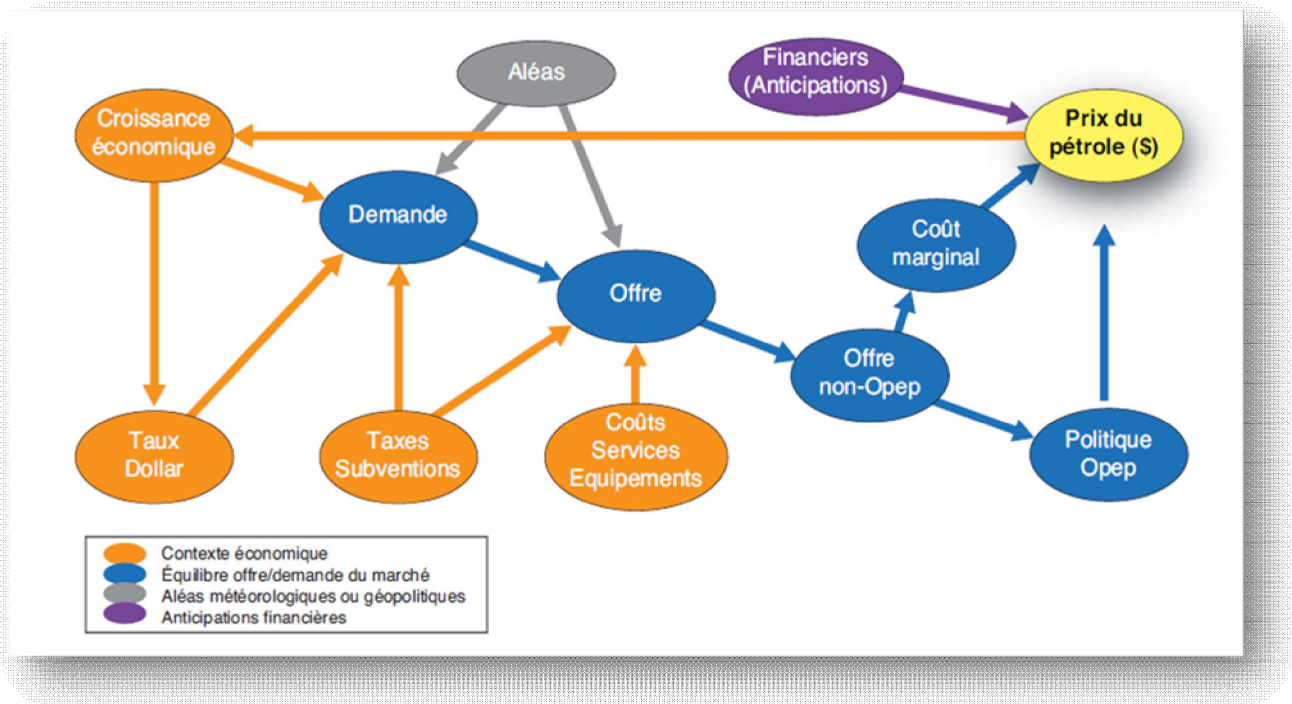
30/01/2013	98.00	0.6263%	3.336	1.9871%	1677.75	0.7627%	32.025	2.0164%	3.750	1.5985%
31/01/2013	97.66	-0.3469%	3.321	-0.4496%	1663.75	-0.8404%	31.460	-1.7581%	3.735	-0.4000%
01/02/2013	97.58	0.0819%	3.298	-0.5728%	1668.15	0.2705%	31.830	1.1697%	3.777	1.0974%
03/02/2013	97.59	-0.1637%	3.310	-0.1508%	1667.95	-0.0839%	31.837	-0.0973%	3.784	-0.0528%
04/02/2013	96.00	-1.6192%	3.332	0.6951%	1675.05	0.4317%	31.775	-0.1728%	3.767	-0.4229%
05/02/2013	96.65	0.6771%	3.421	2.6403%	1675.65	0.0298%	31.885	0.3619%	3.772	0.1327%
06/02/2013	96.83	0.1759%	3.434	0.3800%	1679.15	0.2148%	31.880	-0.0313%	3.751	-0.5567%
07/02/2013	95.83	-1.0327%	3.295	-4.0198%	1672.05	-0.4288%	31.505	-1.1856%	3.728	-0.6396%
08/02/2013	95.78	-0.0313%	3.265	-0.8804%	1667.65	-0.2572%	31.413	-0.2762%	3.759	0.8315%
10/02/2013	95.76	-0.0730%	3.245	-0.4601%	1667.35	-0.0419%	31.435	-0.0477%	3.763	0.0532%
11/02/2013	96.93	1.1279%	3.288	1.3563%	1649.05	-1.0916%	30.935	-1.5843%	3.724	0.6713%

12/02/2013	97.59	0.6705%	3.244	-1.3382%	1651.95	0.1819%	31.153	0.6949%	3.749	-0.2134%
13/02/2013	97.14	-0.4713%	3.296	1.6029%	1644.05	-0.4722%	30.810	-1.1074%	3.740	-0.2134%
14/02/2013	97.34	0.2265%	3.174	-3.7306%	1635.25	-0.5594%	30.418	-1.2819%	3.743	0.0535%
15/02/2013	95.97	-1.4074%	3.162	-0.3781%	1609.85	-1.5593%	29.765	-2.1532%	3.737	-0.1603%
17/02/2013	96.17	-0.2593%	3.142	-0.6325%	1613.00	0.2050%	29.865	0.2013%	3.744	0.0000%
18/02/2013	95.93	-0.2495%	3.178	1.1458%	1613.80	0.0558%	30.043	0.6129%	3.691	-1.4156%
19/02/2013	97.08	1.1882%	3.273	3.0217%	1604.70	-0.5762%	29.418	-2.0966%	3.655	-1.0022%
20/02/2013	96.89	-0.1751%	3.296	0.6719%	1602.60	-0.1246%	28.998	-1.4176%	3.636	-0.5470%
Rjm		**0,0215%**		**-0,2594%**		**-0,2014%**		**-0,3714%**		**-0,0304%**

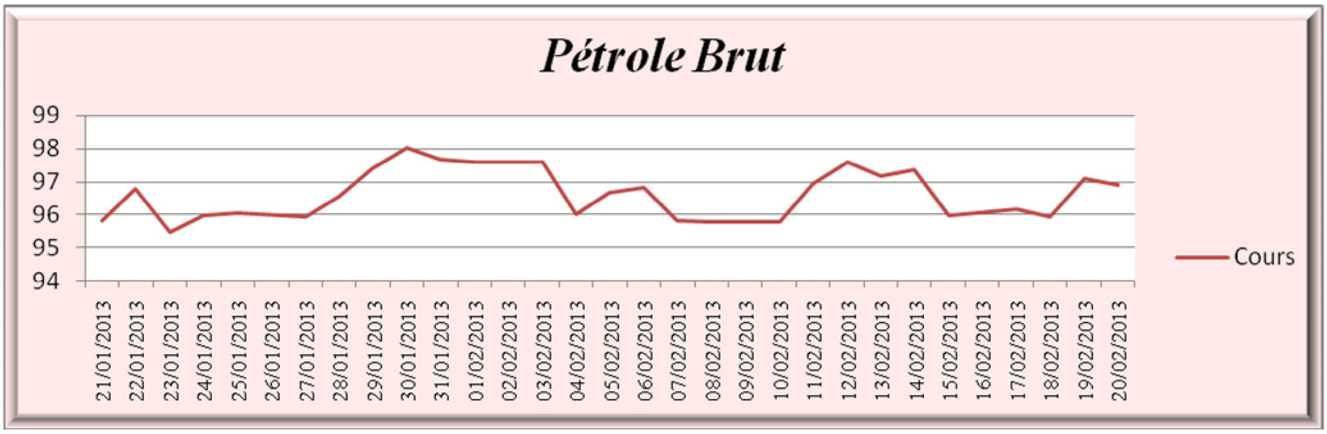
I.Pétrole Brut :

Le *pétrole* étant une ressource naturelle éminemment géostratégique, son cours évolue en fonction de l'actualité internationale (*tensions, conflits...*) et des décisions politiques des pays producteurs, dont ceux de l'*OPEP*.

Déterminants de prix de pétrole



Le *pétrole brut* provient directement de l'exploitation d'un puits de pétrole, à l'issue des traitements de dessablage, de décantation de l'eau, et éventuellement de séparation de la phase gazeuse à pression et température ambiantes. Il se mesure en *barils* ou en m^3.

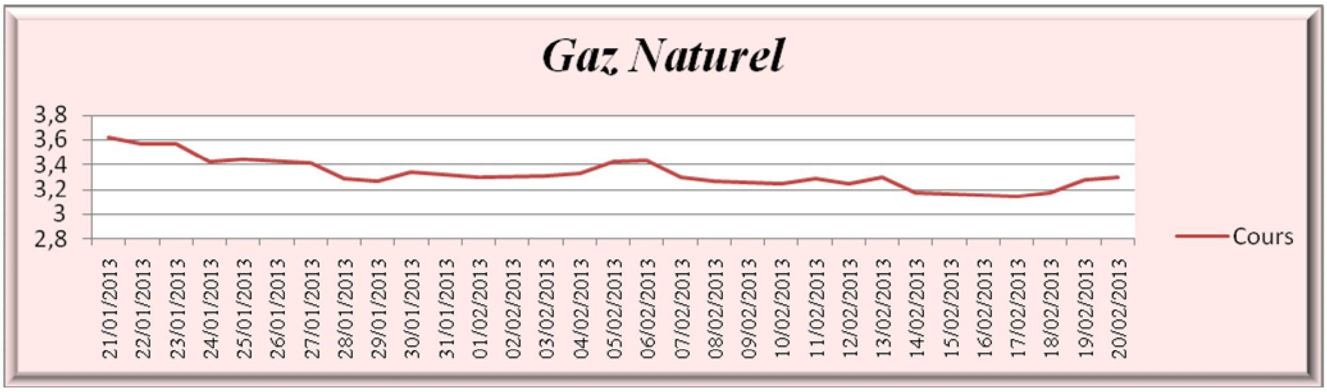


Selon la courbe présenté en dessus, les cours du pétrole sont un peut perturber légèrement en ***2013***, sous l'effet conjugué de la surproduction et d'une demande affaiblie en période de crise économique.

II. <u>Gaz Naturel</u> :

Le *gaz naturel* est un combustible fossile composé d'un mélange d'hydrocarbures présent naturellement dans des roches poreuses sous forme gazeuse.

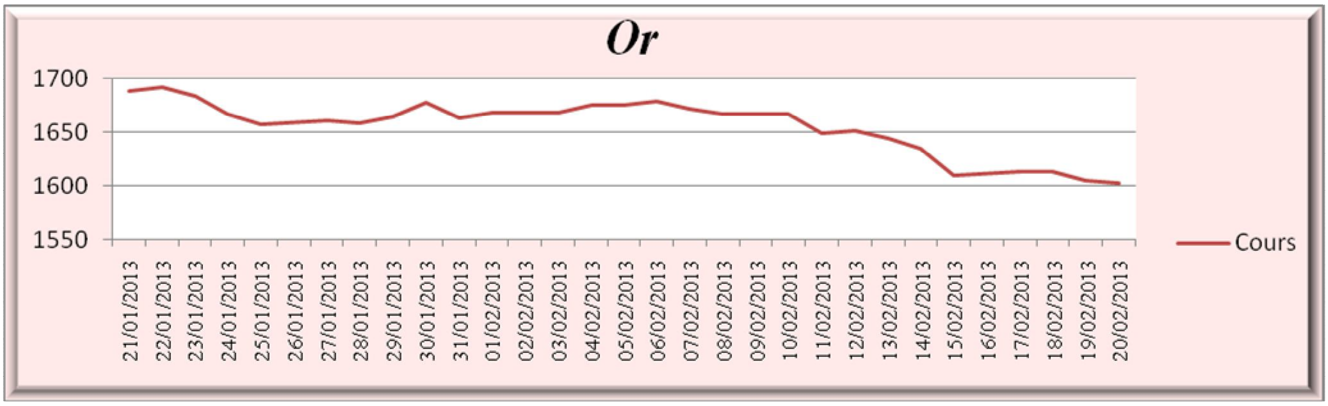
Le *gaz naturel* est en compétition avec d'autres formes d'énergie telles que le *pétrole, l'électricité* ou le *charbon*. Le *gaz* et le *pétrole* étant des produits très proches et substituables, leur offre est liée et leurs prix sont fortement corrélés.



Comme la plupart des produits de base, les prix du *gaz naturel* sont cycliques. Leur hausse est la conséquence d'une demande plus forte, qui va encourager l'exploration et le forage. Le temps de réponse de l'industrie à l'effet induit par les prix peut être plus ou moins long et lorsque la production commence à croître, les prix vont avoir tendance à baisser.

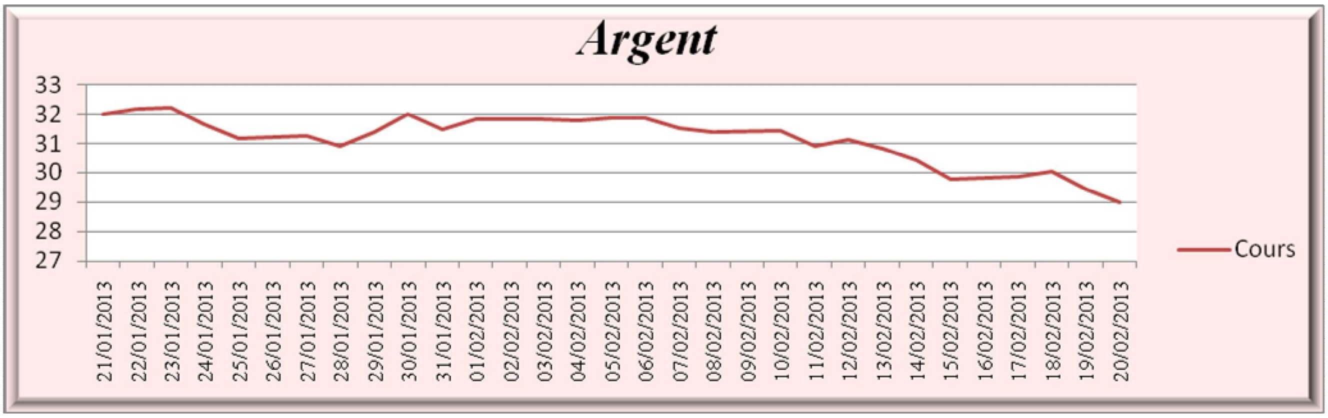
III. <u>Or</u> :

L'*or* est un élément chimique de symbole Au (*du latin aurum*). Il s'agit d'un métal précieux très recherché. Ce métal au naturel se présente sous forme de pépites, qui peuvent avoir été réduites en poudre ou en paillettes, par érosion mécanique. Les diverses formes de sa répartition à l'état natif sont le filon, l'inclusion dans les roches.



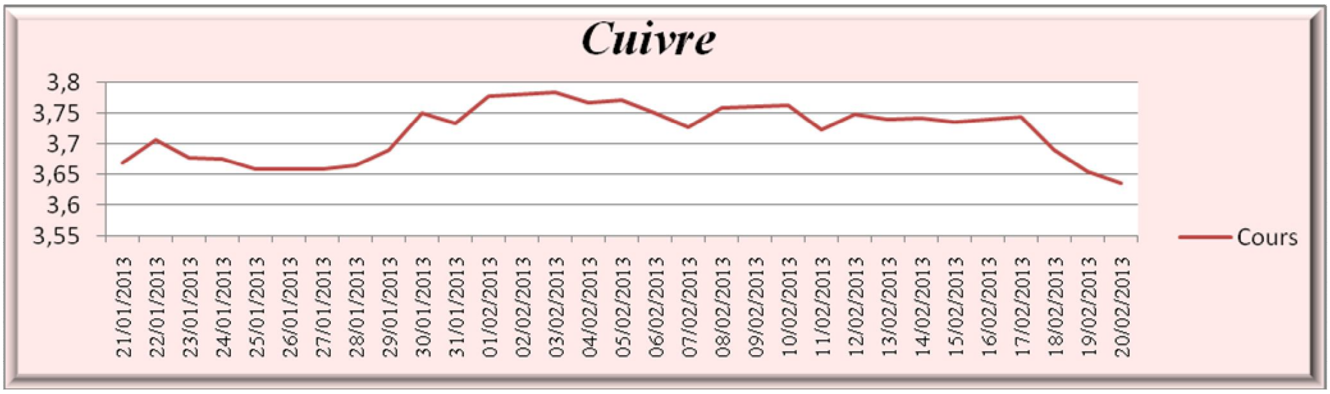
IV. Argent :

L'argent ou argent métal est un élément chimique de symbole Ag (*du latin Argentum*) .C'est un métal précieux. *L'argent* est un métal relativement ductile et très malléable, apprécié pour son éclat blanc particulier, il provient de mines ou du recyclage



V. Cuivre :

Le *cuivre* est un élément chimique de symbole Cu. Naturellement présent dans la croûte terrestre, il est essentiel au développement de toute forme de vie. Avec l'*or*, le *cuivre* pur est le seul métal coloré ; il présente sur ses surfaces fraîches une teinte rose saumon. Il est aussi appelé le « *métal rouge* ». Le *cuivre* est un métal ductile possédant des conductivités électrique et thermique particulièrement élevées qui lui confèrent des usages variés. Il intervient également comme matériau de construction et entre dans la composition de nombreux alliages.



- Les cours des ***métaux précieux*** sont victimes de la perturbation de l'économie mondiale. L'une des principales causes de leur fluctuation est le retour des inquiétudes chez les traders. Face à la volatilité des autres portefeuilles boursiers, tels que les devises internationales, les actions et les obligations, ces investisseurs ne savent vraiment plus quels outils de placement choisir. Une baisse subite des prix des métaux précieux en bourse indique tout simplement que ces professionnels se sont orientés vers d'autres produits financiers et vice versa. Les cours de ces métaux précieux sont à tendance haussière lorsque leur demande au niveau international connaît une augmentation.

- ***Le Rendement journalier*** $= \frac{\text{Capital Final "Cloture"} - \text{Capital Initial "Ouverture"}}{\text{Capital Initial "Ouverture"}} * 100\%$

$$= \frac{\text{Capital Final}}{\text{Capital Initial}} - 1 * 100\%.$$

  - ✓ ***Rj > 0 : Investissement rentable.***
  - ✓ ***Rj < 0 : L'Investissement est une perte.***

- ***Exemple de calcul « en Excel » de rendement journalier moyen d'un actif :*** **Rjm** (*Pétrole Brut*) = moyenne (C3**:**C29).

Ensuite pour développer notre modèle de **VaR**, nous avons besoin de ***5*** variables **:** le *rendement moyen du portefeuille*, la *variance*, le *seuil de confiance*, la *durée*, la *valeur du portefeuille*.

- ***Calcul de rendement moyen du portefeuille :***

Avant ce calcul, nous devons maitre la pondération des actifs (*assets weighting*) est la pondération que l'utilisateur décide de donner à ses actifs. Cette valeur peut se situer entre ***0*** et ***100***, mais il faut savoir que le total des pondérations ne peut pas excéder ***100***. C'est pourquoi un avertissement apparaît à l'écran lorsque le total des pondérations excède ***100***%.

Tableau -2-

	Pétrole Brut	***Gaz Naturel***	***Or***	***Argent***	***Cuivre***	***Total***
Rendement journalier moyen	**0,0215%**	**-0,2594%**	**-0,2014%**	**-0,3714%**	**- 0,0304%**	***(sur 1 moi)***
% Portefeuille « Proportion »	**30%**	**20%**	**20%**	**10%**	**20%**	**100%**

- Le rendement espéré d'un portefeuille est la moyenne pondérée des rendements espérés de chacun des actifs dans le portefeuille.

$$E(R_p) = \sum_{j=1}^{m} w_j E(R_j)$$

- De ce fait le rendement moyen du portefeuille **Rmm = -0.0013 = - 0.13** %.
- Notre portefeuille a connu une mauvaise performance tout en prenant beaucoup de risque. Autrement dit, il aura été préférable pour un investisseur d'investir dans un portefeuille lui assurant le rendement sans risque.

- ***Calcul de Variance du portefeuille :*** Pour ce faire, il est nécessaire de mettre en place une *matrice de covariance*. Cette matrice permet de déterminer la covariance entre les différents actifs financiers. Mais pourquoi déterminer la co*var*iance entre ces actifs **?** La réponse est relativement simple, il est nécessaire de connaître l'*écart-typ*e du portefeuille pour calculer la **VaR**. Nous savons que l'*écart-type* est la racine au carré de la *variance*. Grâce à une formule très utile *d'Excel* nous pouvons calculer la *variance* du portefeuille, en se basant sur la *matrice de covariance*. ***En finance, cette notion permet de mesurer le degré de liaison des fluctuations de deux titres entres eux, ou encore d'un titre avec un indice.***

Tableau -3- MATRICE VARIANCES-COVARIANCES PURES

Matrice de Covariance	Pétrole Brut	Gaz Naturel	Or	Argent	Cuivre
Pétrole Brut	**0,000054**	0,000011	0,000006	0,000013	0,000021
Gaz Naturel	0,000011	**0,000352**	0,000020	0,000037	-0,000011
Or	0,000006	0,000020	**0,000027**	0,000049	0,000010
Argent	0,000013	0,000037	0,000049	**0,000121**	0,000034
Cuivre	0,000021	-0,000011	0,000010	0,000034	**0,000044**

- ***Exemple de calcul « en Excel » de Covariance :*** **Covariance** (*Pétrole Brut, Gaz Naturel)* = covariance (les *Rj* (*Pétrole Brut*) **;** les *Rj* (*Gaz Naturel*)).

C3:C29 **E3:E29**

- On calcule la ***variance*** d'un portefeuille à partir de la *proportion* et de la ***variance*** attendue de chaque titre qui le compose. La ***variance*** d'un portefeuille est alors donnée par la formule suivante, plus imposante que complexe **:**

$$\sigma_p^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_i^2}_{i=j} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i Y_j C_{i,j}}_{i \neq j}$$

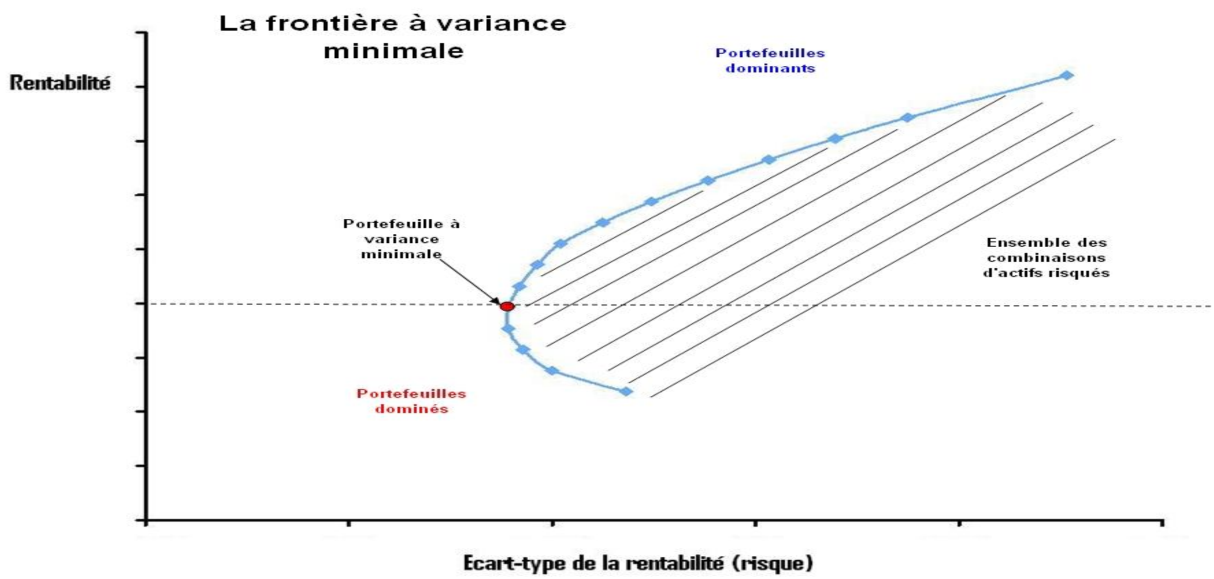
- Où **:**
  - $\mathbf{X_i}$ est la quantité de l'avoir **i**.
  - $\boldsymbol{\sigma_i^2}$ est l'écart-type des variations de l'avoir **i**.
  - $\mathbf{Y_j}$ est la quantité de l'avoir **j**.
  - $\mathbf{C_{i,j}}$ est la covariance entre variations des avoir **i** et **j**.

- On démontre que la ***variance*** d'un portefeuille est tout simplement la somme des ***covariances*** de tous les avoirs qui le composent, pris deux à deux et pondérées par la proportion de chaque avoir dans le portefeuille.

Tableau -4- MATRICE VARIANCES-COVARIANCES PONDEREES PAR LES PROPORTIONS

Matrice de Covariance	Pétrole Brut 30%	Gaz Naturel 20%	Or 20%	Argent 10%	Cuivre 20%	Sous Totaux
Pétrole Brut 30%	**0,0000048**	0,0000006	0,0000004	0,0000004	0,0000012	***0,0000075***
Gaz Naturel 20%	0,0000006	**0,0000141**	0,0000008	0,0000007	-0,0000005	***0,0000158***
Or 20%	0,0000004	0,0000008	**0,0000011**	0,0000010	0,0000004	***0,0000036***
Argent 10%	0,0000004	0,0000007	0,0000010	**0,0000012**	0,0000007	***0,0000040***
Cuivre 20%	0,0000012	-0,0000005	0,0000004	0,0000007	**0,0000018**	***0,0000036***
Total des Variances-Covariances "Variance du Portefeuille"						***0,0000345***
Ecart type du portefeuille (Volatilité)						***0,0058736***

- La ***variance*** et l'***écart type*** sont des mesures de volatilité du rendement, Plus la volatilité est importante, plus l'incertitude est grande.



- Chaque point sur la courbe bleue à partir du point rouge "*Portefeuille à variance minimale*" correspond à un portefeuille efficient ; c'est ce que l'on appelle la *frontière d'efficience* ou frontière de *Markowitz*. Si un portefeuille se trouve dans la zone hachurée, il n'est pas efficient.
- Selon nos calculs l'écart-type « *Risque* » est supérieur au rendement moyen de notre portefeuille,

et ce n'est pas ce que souhaite un investisseur: "*minimiser son risque pour un niveau de rendement espéré*".

- ***La valeur de portefeuille (portfolio)* :** C'est la valeur qui représente la somme que l'utilisateur voudrait investir dans les cinq actifs sélectionnés et insérés préalablement dans la feuille « *DATA* ».

- ***L'intervalle de confiance (confidence interval)* :** Est le pourcentage de chance pour lequel l'utilisateur veut connaître sa perte potentielle. Par *exemple*, si l'utilisateur veut savoir combien il risque de perdre sur un certain nombre de jour avec *1%* de chance, il devra rentrer un intervalle de confiance de ***99***%. « voir *annexe 10* »

Tableau -5-

Apha =	***-2,3263***	***pour un seuil de confiance 99%***
	-1,64485	***pour un seuil de confiance 95%***
	-1,8808	***pour un seuil de confiance 97%***

- ***Le nombre de jours (days)* :** Est la durée pour laquelle on désire connaître la perte potentielle.

Tableau -6-

Valeur Initial Portefeuille	***10000***
Seuil de Confiance	***97%***
Durée	***27 jours***

Tous ces éléments nous permettent maintenant de calculer la **VaR** grâce à deux fonctions (***VaRrel*** *et* ***VaRabs***) que nous avons créées avec **VBA**.

1.4 Fonction VaR sur VBA :

```
Function VaRrel(S, Rmm, variance, dt, c As Double) As Double
    Dim alpha As Double
    alpha = Application.WorksheetFunction.NormSInv(1 - c)
    VaRrel = S * (-alpha * Sqr(dt * variance))
End Function
```

```
Function VaRabs(S, Rmm, variance, dt, c As Double) As Double
    Dim alpha As Double
    alpha = Application.WorksheetFunction.NormSInv(1 - c)
    VaRabs = VaRrel(S, Rmm, variance, dt, c) - (S * Rmm * dt)
End Function
```

- Nous avons appelé une nouvelle fonction ***VaRrel*** avec 5 variables **:**
  - ***S* :** Valeur initiale du portefeuille.
  - ***Rmm* :** Rendement moyen.
  - ***Dt* :** durée.
  - ***C* :** seuil de confiance.

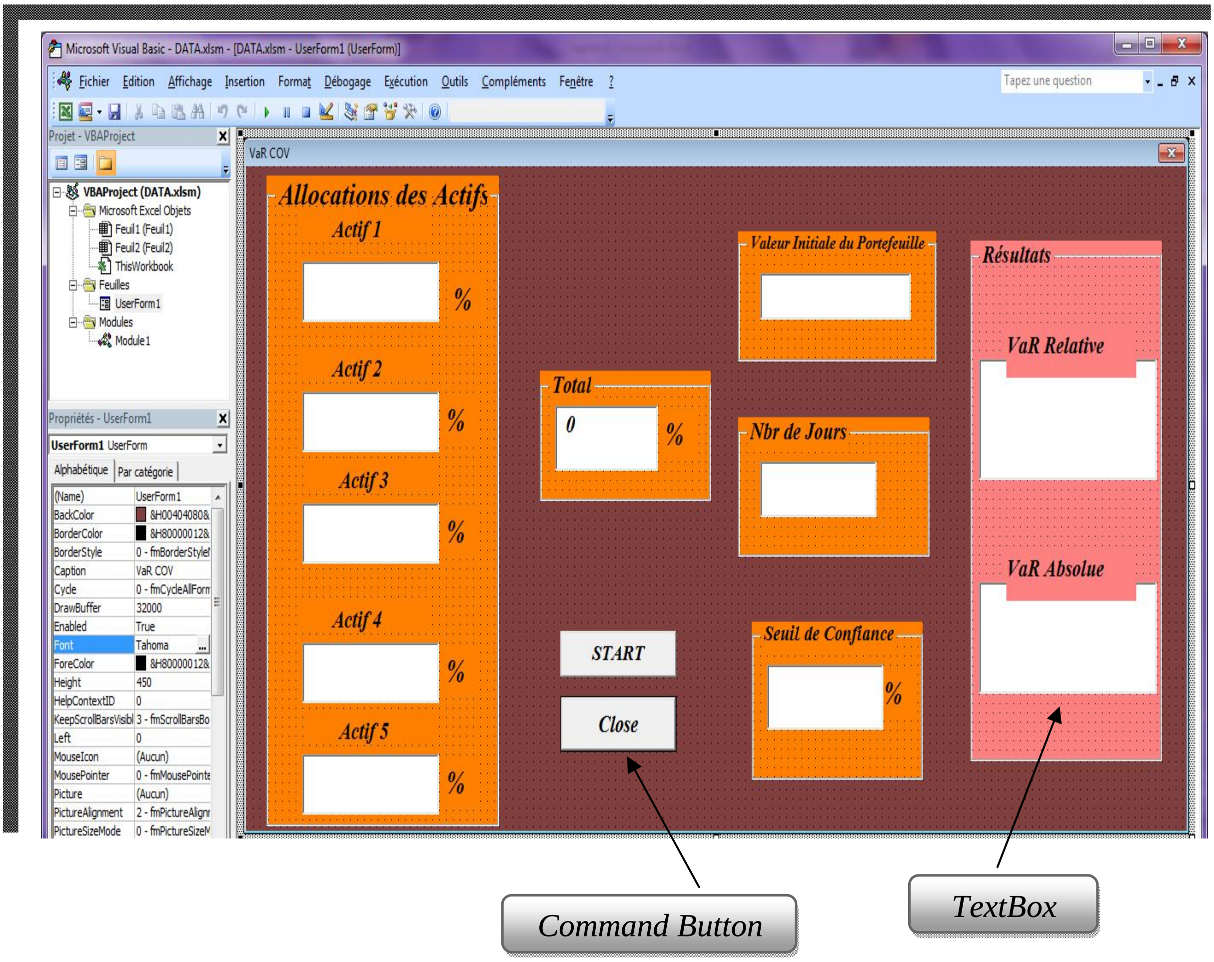
Cette fonction nécessite de calculer un alpha qui se trouve être le seuil critique associé à la probabilité visée suivant une loi *normale inverse*. A partir de ce seuil, nous pouvons dès lors enregistrer le calcul de la ***VaR relative*** ou ***absolue***. La ***VaR relative*** et ***absolue*** sont calculées de la manière suivante **:**

VaR relative = valeur initiale du PF * (- alpha *√Dt * σ).

VaR absolue = VaR relative – rendement moyen espéré du portefeuille.

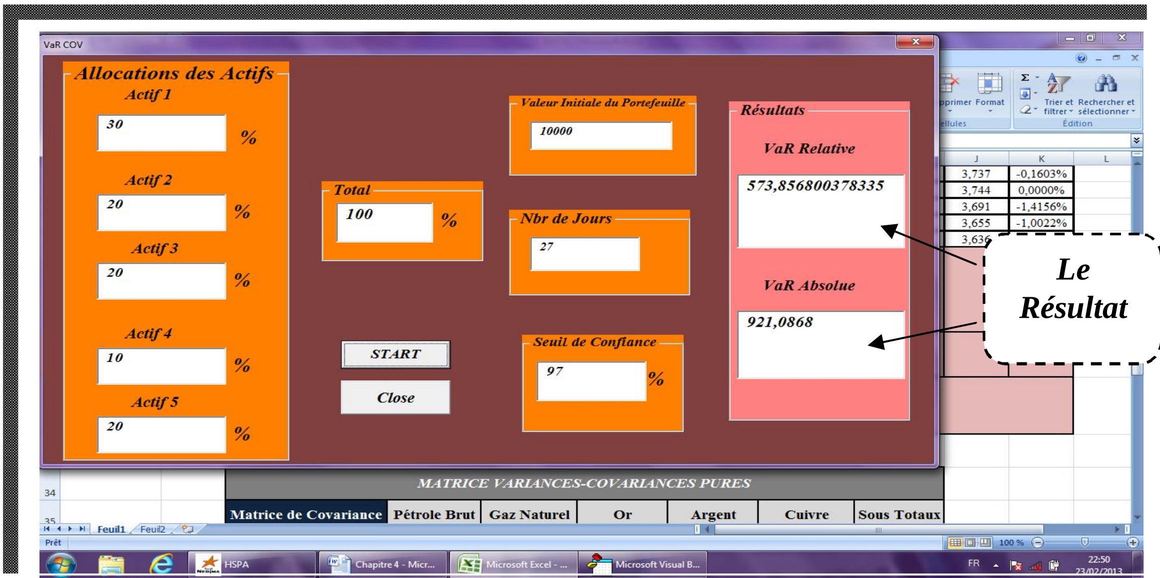
1.5 Codage sur VBA :

Avant d'entamer une brève présentation du codage ***VBA*** du programme, il est important de rappeler le fonctionnement de ce langage. Le ***VBA*** est séparé en plusieurs éléments, il y'a un code pour chaque feuille du classeur *Excel*, une code pour chaque « *Userform* » utilisé ainsi qu'un code général insérer dans ce qui s'intitule les « *modules* ». Voici un aperçu de l'interface d'un projet ***VBA***.



<u>Le Codage</u> :

```
Private Sub CommandButton1_Click()
Dim x1 As Integer
x1 = Val(TextBox1.Value) + Val(TextBox6.Value) + Val(TextBox7.Value) + Val(TextBox8.Value) +
Val(TextBox9.Value)
If x1 = 100 Then
TextBox10 = x1
Else: MsgBox "la somme des actifs est incorrecte veuillez réintroduire les valeurs: somme=100"
End If

Dim x2, x3 As Double
x2 = Val(TextBox11)
If Val(TextBox13) = 99 Then
alpha = Worksheets("feuil1").Range("D55").Value
End If

If Val(TextBox13) = 95 Then
alpha = Worksheets("feuil1").Range("D56").Value
End If

If Val(TextBox13) = 97 Then
alpha = Worksheets("feuil1").Range("D57").Value
End If

VarPH = Worksheets("Feuil1").Range("I49").Value
x3 = Sqr(Val(TextBox12) * VarPH)
TextBox14 = x2 * (-alpha * x3)
TextBox15 = Val(TextBox14) - (x2 * Val(TextBox12) * (Worksheets("Feuil1").Range("B32").Value))
End Sub

Private Sub CommandButton2_Click()
End
End Sub

Private Sub UserForm_Initialize()
TextBox1 = Worksheets("Feuil1").Range("C31").Value * 100
TextBox6 = Worksheets("Feuil1").Range("E31").Value * 100
TextBox7 = Worksheets("Feuil1").Range("G31").Value * 100
TextBox8 = Worksheets("Feuil1").Range("I31").Value * 100
TextBox9 = Worksheets("Feuil1").Range("K31").Value * 100
End Sub
```



- Ce qui concerna la ***VaR relative***, nous avons alors ***97*** % de probabilité cumulée gagner ***573,85*** mais aussi de le perdre**!** Effectivement nous avons ***3***% de probabilité cumulée d'avoir une perte de **: *-573,85.***

- Donc il faudrait au moins un capital risque (*fonds propres*) de ***573,85*** pour couvrir ***97*** % des risques (*couvrir cette probabilité cumulée de 3% d'être dans un mauvais moi respectivement*). Nous pouvons aussi dire que nous avons ***97*** % de probabilité cumulée de ne pas perdre plus ***573,85***.

- Mentionnons que le calcul de la ***VaR absolue*** peut être considéré comme vicieux ou ayant peu d'intérêt car il suppose que le gain obtenu grâce au rendement sera placé dans les *fonds propres* pour financer la ***VaR relative***. Or, dans la majeure partie des cas les gains seront replacés. Et dans notre exemple sur une période de **27** jours il suffit d'avoir ***921,08*** de fonds propres.

- Et comme la **VaR *absolue*** et supérieure à la **VaR *relative*,** on redoute à une perte.

1.6 Conclusion :

Une fois qu'une institution financière a calculé sa **VaR** globale, c'est-à-dire la perte maximale qu'elle peut encourir sur l'ensemble de son bilan pour une probabilité prédéterminée, il lui est loisible de se servir de ce montant pour déterminer le capital minimal qu'elle doit maintenir pour ne pas s'exposer à la faillite. Si en effet elle détient un capital moindre et que la perte maximale probabiliste se produit, son avoir propre sera négatif et elle devra peut-être déposer son bilan.

La **VaR** est donc très utile pour une institution financière, car elle lui permet de déterminer le niveau du capital qu'elle doit maintenir pour survivre. Quand la **VaR** est utilisée à cette fin, nous l'appelons plus communément ***CaR*** pour "*Capital at Risk*", c'est-à-dire que le capital que doit maintenir une institution financière est calculé ou évalué selon les risques auxquels elle est exposée. Plus le risque est important, plus elle devra maintenir un capital élevé. Cela apparaît bien raisonnable, car le capital détenu par une institution financière est d'abord et avant tout un file de sécurité. Pour une banque, il vise à protéger les dépôts à son passif. La **VaR** se présente donc comme une mesure appropriée pour définir le capital réglementaire que doit détenir une institution financière.

CONCLUSION

En conclusion, on retiendra que la ***Value at Risk*** est un indicateur simple et global des risques. Elle est particulièrement facile à comprendre puisqu'elle mesure une perte potentielle qui ne prend pour paramètres qu'un horizon de temps et un intervalle de confiance.

La ***VaR*** est aujourd'hui un indicateur incontournable dans la gestion des risques. Elle a en effet été fortement popularisée dans les années ***1990*** et est par la suite devenue inévitable puisque la ***VaR*** (***99%, 10*** *jours*) apparaît dans les accords de ***Bâle II*** comme la méthode privilégiée de mesure des risques.

Enfin si la VaR possède certaines limites, différents outils ont été mis en place au gré du temps pour les réduire, et aujourd'hui à l'aide des ***Back Tests*** et des scénarios de ***Stress Test***, la qualité de la V**a**R est garantie.

L'avenir de la ***VaR*** est encore flou, mais nous pouvons imaginer que cet outil va rester une référence dans la **G**estion de **R**isque, encore durant plusieurs années. En effet il n'existe aucun modèle d'analyse de risque qui est capable de supplanter la ***Valeur-at-Risk*** à l'heure actuelle. Les ***Stress Test*** et les ***Back Tests*** représentent déjà une grande évolution garantissant une certaine robustesse aux résultats et qui élimine certains problèmes liées aux limites.

Et malgré tout la ***VaR*** reste un outil de référence qui donne une très bonne appréciation du risque à un gestionnaire. C'est à lui d'utiliser cette information, de la placer dans son contexte et de l'interpréter. L'aspect humain est prépondérant dans une bonne gestion du risque.

LES ANNEXES

LES ANNEXES

***ANNEXE 1* : Bilan, FR, BFR, Trésorerie**

✓ *Qu'y a-t-il dans un Bilan ?*

ACTIF ***" Utilisation des fonds "***	***PASSIF*** ***" Origine des fonds "***
ACTIF IMMOBILIE	***CAPITAUX PROPRES***
- Immobilisations incorporelles. - Immobilisations corporelles. - Immobilisations financières.	- Capital. - Capital social ou individuel. - Réserves statutaires ou contractuelles. - Réserves réglementées. - Report à nouveau. - …
ACTIF CIRCULANT	
- Stock. - Travaux et chantiers en cours.	***DETTES***
Les valeurs réalisables et disponibles	- Dettes financières. - Dettes d'exploitation. - Dettes diverses (*hors exploitation*).
- Créances. - L'argent disponible.	
Trésorerie "Positif "	***Trésorerie "Négatif "***
TOTAL ACTIF :	***TOTAL PASSIF :***

- ***L'ACTIF*** **:** *qui répond à l'une des plus grandes questions existentielles de l'être humain " Où est l'argent**?** ". Elle détaille, par grandes catégories, tout ce que l'entreprise possédait à la date du Bilan " machines, stocks, créances, caisse, etc.". Elle donne les noms de ces possessions seigneuriales et la valeur comptable de chacune.*

- ***LE PASSIF*** **:** *qui répond à l'autre question éternelle " D'où vient l'argent**?** ". Elle donne le nom et le montant de chacune des sources de financement du patrimoine actif à ce jour précis.*

✓ *Les grands équilibres du bilan :*

Les trois grands équilibres du bilan sont :

1- Le fond de roulement (noté FR) :

Le fond de roulement constitue un matelas de sécurité pour l'entreprise, donc il est préférable qu'il soit positif. En effet ce surplus permet de consolider le cycle d'exploitation et conserver un équilibre même en cas de clients défaillants ou de stocks dépréciés. Il renforce ainsi la confiance des banques et préteurs à court terme.

> *Fond de roulement = Ressources stables - emplois stables*
>
> *Ou d'un point de vue comptable :*
>
> *Fond de roulement = capitaux permanents - actif immobilisé*

> *FR = Actifs circulant d'exploitation et financiers*
> *-*
> *Dettes à court terme d'exploitation et financières.*

2- Le besoin du fond de roulement (noté BFR) :

Le décalage qui existe entre les dépenses engagées et les recettes générées par les ventes engendrent un besoin de financement. Les délais fournisseurs demeurent généralement insuffisants pour compenser le renouvellement des stocks et les créances clients. C'est ce besoin de financement que l'on appelle besoin en fond de roulement.

> *BFR = Emplois d'exploitation - Ressources d'exploitation.*
>
> *Ou d'un point de vue comptable :*
>
> *BFR = actif circulant (ou d'exploitation) - passif circulant (ou d'exploitation)*

3- La Trésorerie :

En termes d'analyse financière, la Trésorerie d'une entreprise apparaît comme étant le solde de la situation financière globale de l'entreprise

> *Trésorerie = Ressources financières - Besoins financiers de l'entreprise.*
>
> *ou d'un point de vue comptable :*
>
> *Trésorerie = Fond de roulement - Besoin en Fonds de roulement*

ANNEXE 2 : LE PARADOXE DE PETERSBOURG

Ce paradoxe a été énoncé en **1713** par **Nicolas Bernoulli**. La première publication fut publiée par **Daniel Bernoulli**, “ Specimen theoriae novae de mensura sortis” dans les Transactions de l'Académie de **Saint-Petersbourg** (d'où son nom). Mais cette théorie remonte à **Gabriel Cramer** dans un courrier privé à **Nicolas Bernoulli** (neveu) dans une tentative de réponse au paradoxe de Saint-Pétersbourg. Pour ces deux auteurs le joueur refuse de tout miser car il ne peut risquer de perdre tout son argent. Dans cette théorie de l'espérance morale formalisée par **Bernoulli**, ils introduisent une fonction d'utilité marginale. Cependant ces deux auteurs divergent sur la fonction d'utilité **:** logarithme naturel pour **Bernoulli** et racine carrée pour **Cramer**.

Ces idées sont reprises plus tard par les marginalistes. Puis la théorie de l'espérance morale fut largement débattue dans les années d'après guerre. Des mathématiciens comme **Emile Borel** jugent cette théorie intéressante sur un point de vue psychologique mais sans intérêt pratique et maintenant 'abandonné' tandis que des économistes s'intéressant à la théorie des jeux développent largement le concept et la fonction utilité.

Le paradoxe de **Saint-Pétersbourg** se résume à la question suivante **:** pourquoi, alors que mathématiquement l'espérance de gain est infinie à un jeu, les joueurs refusent-ils de jouer tout leur argent **?** Il s'agit donc non d'un problème purement mathématique mais d'un paradoxe du comportement des êtres humains face aux événements d'une variable aléatoire dont la valeur est probablement petite, mais dont l'espérance est infinie. Dans cette situation, la théorie des probabilités dicte une décision qu'aucun acteur raisonnable ne prendrait.

Soit le problème décisionnel d'où naîtra le paradoxe. Soit donc une loterie définit ainsi : on jette un ducat plusieurs fois et Pierre donne à Paul **:**
1 ducat si "face" est obtenu pour la première fois à l'issu du 1^{er} jet de la pièce,
2 ducats si "face" est obtenu pour la première fois à l'issu du $2^{ème}$ jet,
4 ducats si "face" est obtenu pour la première fois à l'issu du $3^{ème}$ jet,
2n ducats si "face" est obtenu pour la première fois à l'issu du $(n+1)^{ième}$ jet, etc.

Le paradoxe apparaît si l'on suppose que le critère de décision utilisé est la maximisation de l'espérance mathématique des gains1. En effet, l'espérance mathématique des gains de la loterie ci-dessus est **:**

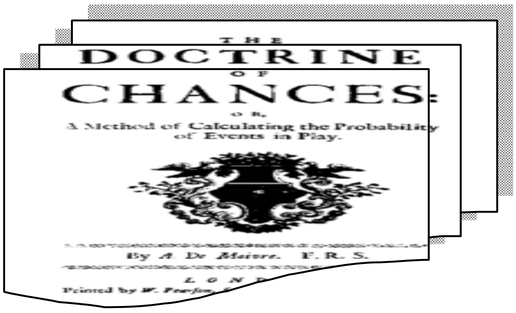
Probabilité (face au 1er jet) × Gain (Face au 1er jet) + Probabilité (face au 2ème jet) ×Gain (Face au 2ème jet)+..... + Probabilité (face au n+1ième jet) × Gain (Face au n+1ème jet) +......
= (1/2 x 1) + (1/4 x 2) + (1/8 x 4) + ...+ (1/2n+1 x 2n) +.....
= 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 +......
= ∞

Or, aucun d'entre nous ne serait prêt à verser une somme infinie pour jouer à cette loterie. C'est donc que le critère de l'espérance mathématique des gains n'est pas celui que nous employons dans des situations de ce type. ***Daniel Bernoulli*** *trouva la faille de ce critère et répondit à son cousin que : "Tout accroissement de richesse, quel que soit son importance, se traduira toujours par un accroissement de l'utilité inversement proportionnel à la quantité de biens déjà possédée."En d'autres termes : l'individu ne prend pas en compte directement la richesse dans son choix, mais l'utilité au sens de satisfaction qu'il retire d'une certaine richesse. Il ne maximise donc pas l'espérance mathématique des gains, mais l'espérance mathématique de l'utilité de ces gains.*

De plus, cette utilité n'est pas "linéaire", l'utilité marginale est décroissante. Par exemple, et c'est une suggestion de **Bernoulli***, si* ***w*** *est le montant de richesse, une fonction d'utilité du type* ***u(w) = log w*** *décrirait mieux les comportements du décideur que la fonction* ***u(w) = w*** *correspondant à l'espérance mathématique.*

Notons que dans le contexte du paradoxe de Saint-Pétersbourg, l'espérance d'utilité serait,
pour ***u(w) = log w :***
$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \log\left(2^{i-1}\right) = \log 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i-1}{2^i}$, ce qui est fini car **:** Lim $\frac{i-1}{2^i} = 0.$

ANNEXE 3 : DOCTRINE OF CHANCES



✓ Définition de Doctrine :

Ensemble de principes ou d'opinions liés à un penseur, à un mouvement littéraire, religieux, politique.

✓ La Doctrine of Chance :

*Le premier manuel sur la théorie des probabilités écrit par le mathématicien francais **Abraham de Moivre** en **18**ème siècle publié en **1718**. Après avoir fui en France pour échapper la persécution des huguenots .En outre, la première définition de l'indépendance statistique apparaît dans cet ouvrage, ainsi que de nombreux problèmes, par exemple à propos de jeux de dés et beaucoup d'autres jeux..*

*Le titre complet de la première édition était **la doctrine des chances :** ou une méthode pour calculer les probabilités des événements en jeu, il a été publié en **1718**, par **W. Pearson**, et a couru pour **175** pages. La seconde édition du livre de **Moivre** a introduit le concept de distributions normales comme des approximations des distributions binomiales . Une troisième édition a été publiée à titre posthume en **1756** par **A. Millar**, et a couru pour **348** pages; matériel supplémentaire inclus dans cette édition une application de la théorie des probabilités à la science actuarielle dans le calcul des annuités .*

*Elle précisa dans un cas particulier la vitesse de convergence de la loi des grands nombres ; ce fut la première version du théorème central limite. Ce résultat fut étendu par **Pierre-Simon Laplace** (**1749-1827**). Ce dernier en utilisant le calcul infinitésimal et en développant les fonctions génératrices et les fonctions caractéristiques dans "Théorie analytique des probabilité ", paru en **1812**, dépassa le cadre du calcul combinatoire et donna un nouvel élan au calcul des probabilités.*

ANNEXE 4 : Table de mortalité, dite de Northampton

✓ Définition :

La table mortalité est une table donnant, pour chaque âge, la probabilité annuelle de décès d'un individu. Elle est établie selon des données statistiques.

✓ Contenu d'une table de mortalité :

*Une table de mortalité présente, pour chaque âge x qu'elle contient **:***

- *Soit un nombre d'individus vivants, éventuellement regroupés par sexe, par catégorie socioprofessionnelle, etc... **:** par convention noté l_x.*
- *Soit une probabilité de décès dans l'année **:** par convention notée q_x.*
- *Soit une espérance de vie **:** ex.*
- *Soit une combinaison de ces éléments.*

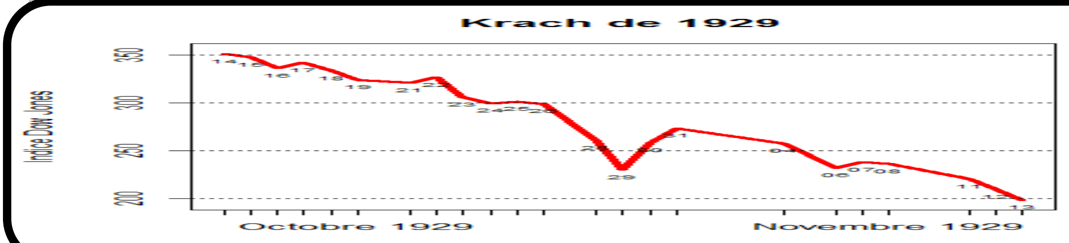
✓ La ville de Northampton :

*Northampton est une ville du Northamptonshire dans les Midlands de l'Est, en Angleterre située sur la rive nord de la rivière Nene. Elle compte environ **194 458** habitants, son district est composé d'environ **200 100** habitants. La ville est située à **108** km au nord de Londres et à **80** km au sud-est de Birmingham.*

✓ Tableau de mortalité dite de Northampton :

*Publié en **1783**. Ce tableau, qui jouit de la particularité unique d'être le premier à être utilisée par les organismes d'assurance-vie, a été rédigé par le **Dr Price** et reposait sur deux paroisses de la ville de Northampton. Il était, en effet, un registre des décès dans ces deux paroisses, avec les âges au décès. Il y avait aussi un registre des baptêmes qui ont eu lieu. Dans la période d'observation, **1735-1780**, Dr Price a noté que le nombre de décès a dépassé le nombre de baptêmes. Il a assumé que les décès supplémentaires, ont été causés par l'immigration dans Northampton à l'âge d'environ vingt ans. Comme une question de fait, son hypothèse était erronée, car il y avait un grand nombre de baptistes dans la communauté dont les enfants n'ont pas été baptisés. L'hypothèse erronée conduit à des conclusions erronées. Ce tableau était le seul en usage. Il peut même être trouvé en usage aujourd'hui dans certaines parties des États-Unis.*

ANNEXE 5 : Le krach de 1929, la plus grave crise économique du 20ème siècle.



✓ *Définition :*

Krach boursier *(ou Crach, Crac) est une chute brutale des cours de toutes les actions sans distinction, les acheteurs sont absents et les vendeurs ne trouvent plus de contre partie. Cela entraîne une baisse d'au moins* ***30*** *% des marchés en quelques semaines voir quelques jours. On parle souvent de* ***krach*** *pour toutes les consolidations importantes des marchés, mais lors de véritable* ***krach*** *on peut avoir des journées où des indices comme le* ***CAC40*** *baissent de plus de* ***10*** *% et où il est très difficile de vendre.*

Donc c'est une baisse soudaine et précipitée des actions touchant une ou plusieurs places financières. L'une de ses caractéristiques principales est l'effet panique qui voit les investisseurs tous vendre en même temps, créant ainsi une spirale infernale. Il n'y a pas de définition économique précise d'un ***krach*** *mais, dans la pratique, cette expression s'applique à une baisse des cours de plus de* ***20*** *% en quelques jours.*

✓ *Généralités :*

Le ***krach*** *de* ***1929*** *est une crise économique « globale » (boursière, puis financière, enfin industrielle) qui se déroula à la Bourse de New York entre le* ***24*** *octobre et le* ***29*** *octobre* ***1929****, mais qui n'atteindra ses abîmes que dans les années qui suivent.*

Cet événement marque le début de la Grande dépression, la plus grande crise économique du ***XX****e siècle. Qui frappa successivement toutes les économies mondiales à l'exception de la Russie soviétique, laquelle c'était « isolée » économiquement depuis la révolution de* ***1917****.*

Les jours-clés du ***krach*** *ont hérité de surnoms distincts* ***:*** *le* ***24*** *octobre est appelé « jeudi noir », le* ***28*** *octobre est le « lundi noir », et le* ***29*** *octobre est le « mardi noir », dates-clés de l'histoire boursière. En* ***05*** *jours à peine les actions* *perdent **43** % de leur valeur. Des centaines de milliers de ménages ont emprunté pour spéculer en Bourse et comptaient rembourser leurs dettes en revendant leurs actions. Avec la chute des cours, ils se retrouvent ruinés. Les banques auxquels tous ces investisseurs ont emprunté se déclarent en faillite. Les commerces et les entreprises sont peu à peu à leur tour affectés par la ruine des banques et des* consommateurs. *La production industrielle s'effondre de plus de moitié en trois ans… Les prix baissent des deux tiers… Les petits fermiers sont jetés sur les routes… On compte bientôt* **treize millions** *de chômeurs aux États-Unis…*

*Le reste du monde est affecté par ricochets, à la faveur notamment des lois protectionnistes Américaines votées en **1930**, ou du retrait brutal des capitaux par les investisseurs Américains. Ce terrible jour vécu par **Wall Street** le jeudi **24** Octobre **1929** est le véritable point de départ d'une inexorable dégringolade qui conduira le monde à la Grande Dépression des années trente.*

✓ Mécanisme :

*Tout commence par la création d'une bulle spéculative vers **1927**. La bulle est amplifiée par le nouveau système d'achat à crédit d'actions, qui depuis **1926** est permis à Wall Street Celle-ci s'est notamment constituée grâce à l'engouement spectaculaire pour le* **call loans** *(prêts au jour le jour). (Les investisseurs peuvent ainsi acheter des titres avec une couverture de seulement **10** % le reste de la somme étant emprunté par un courtier auprès d'une banque.).*

*Le système marche « ainsi » **:***

- *Plus le taux d'emprunt est bas, plus les gens empruntent.*
- *Plus ils empruntent, plus ils investissent en bourse.*
- *Plus ils investissent en bourse, plus la bourse monte.*
- *Ils revendent donc à terme pour solder leur compte et leur bénéfice est toujours au rendez-vous …. Du moins si tout continue à tourner ainsi …*

*Suivant ce système tout dépend donc de deux choses **:***

- *Le taux d'emprunt doit rester bas.*
- *Le taux de croissance de la bourse doit rester haut.*

*Si un des deux paramètres ne suit pas, le système s'effondre. Mais dans cette affaire, il y a des « demis perdants » **:** les banquiers qui doivent avancer de l'argent contre un faible taux d'intérêt, alors que si ils investissaient eux même directement cet argent en bourse, ils en tireraient de plus gros bénéfices vu la plus value boursière.*

- *En avril **1929**, les taux d'intérêts augmentent.*
- *Immédiatement la bourse se met à stagner.*
- *Tous ceux qui spéculent en empruntant sont obligés de vendre pour payer leurs emprunts.*
- *La vente des actions précipite les cours vers le bas.*
- *La boule de neige est enclenchée …*

✓ Vers la crise de 29 :

*Les années **1920** marquent une période de forte croissance aux États-Unis. Entre **1921** et **1929**, la production industrielle augmente de **50** %, et donc le « boom » boursier n'apparaît pas. Mais la spéculation aidant, si la hausse de la production est de **50** %, la hausse de la bourse est de **300** %….*

*L'élément spéculatif devient prépondérant à partir de **1928**. A partir de cette date, ce n'est plus la « santé réelle » de l'action, ni les dividendes qui attirent les investisseurs, mais la possibilité de revendre avec une importante plus-value (laquelle est virtuellement certaine vu la politique du taux d'intérêt particulièrement bas alimentant le système). Beaucoup de titres sont donc achetés à crédit ; l'acheteur ne possède en fait que **10** % de la valeur des titres et compte rembourser le reste par la revente avec bénéfice dans les semaines qui suivent.*

*Dès **1928**, le cabinet Charles Merrill (aujourd'hui Merrill Lynch) trouve la différence « valeur réelle-valeur spéculative » d'une même société « telle » qu'il recommande de ne plus s'endetter pour acheter des actions, et conseille même à ses clients de vendre leur portefeuille.*

La confiance dans le système n'est donc plus « totale », mais le phénomène reste marginal et connu de quelques rares initiés.
*Plus grave est .le manque de liquidité dans le monde « réel », ce qui va avoir deux conséquences **:***

1. Une hausse des taux d'intérêts est nécessaire pour alimenter « normalement » le financement de l'économie réelle, une économie « réelle » qui se porte « mal » dans ce marché boursier faussé par un phénomène d'asphyxie (les capitaux disponibles accourent à la Bourse plutôt que vers l'économie « réelle »). L'augmentation du taux permet de rétribuer normalement l'investissement « sain ».

*2. Une hausse du taux d'intérêt est « mortelle » pour la spéculation, puisque le spéculateur doit emprunter la quasi-totalité de ses actions, ce qui lui revient avec l'augmentation des primes à une fortune. Il devient de plus en plus difficile donc d'emprunter pour spéculer, car quand il faudra faire le bilan **:** prix de vente moins prix d'achat et coût de l'emprunt, le solde risque d'être négatif.*

L'économie réelle malgré tout commence à montrer des signes de faiblesse dès le début ***1929****, mais peu de monde en a cure, et les actions elles gonflées par la spéculation continuent à grimper. A titre d'exemple, la production automobile chute de* ***600 000*** *véhicules à* ***400 000*** *entre mars et septembre.*

✓ Le krach lui-même :

Quelques jours avant le **krach** *(les* **18**, **19** *et* **23** *octobre* **29***), les premières ventes massives de titres ont lieu. Ce ne sont alors encore que de simples prises de bénéfices, mais elles commencent à entraîner les cours à la baisse.*

Le jeudi ***24*** *octobre (Jeudi noir ou Black Thursday) marque la première vraie panique. Le matin, il ne se trouve presque pas d'acheteurs, quel que soit le prix, et les cours s'effondrent.*

À midi, l'indice ***Dow Jones*** *(*) a perdu* ***22,6*** *%., et une émeute éclate à l'extérieur du New York Stock Exchange, après que les gardes du bâtiment et la police ont empêché des actionnaires d'entrer.*

La galerie des visiteurs est fermée, et les rumeurs les plus folles circulent **:**

- *Onze spéculateurs se seraient suicidés,*
- *Les Bourses de Chicago et Buffalo auraient déjà fermé,*
- *Celle de New York serait sur le point de le faire.*

Une réunion d'urgence entre cinq des principaux banquiers de New York se tient au siège de ***J.P. Morgan*** *&* **Co***. pendant une vingtaine de minutes. Les propos rassurants qui en sortent stabilisent un court moment la situation. Le marché rebondit légèrement à la nouvelle que les banques vont intervenir pour soutenir les cours. Les cours se redressent rapidement, et la baisse pour la journée est limitée à* ***2,1*** *% en fin de journée malgré de sérieuses « montagnes russes » (à titre d'exemple* **:** *le titre* ***Montgomery Ward*** *vaut* ***83*** *dollars à l'ouverture,* ***50*** *en milieu de journée,* ***74*** *à la clôture…). Les volumes échangés atteignent* ***12,9*** *millions d'actions pour la journée — un record, le volume normal étant de* ***2-3*** *millions, et le précédent record de seulement* ***8,3*** *millions.*

(*) **:** ***Le Dow Jones Industrial Average*** (*abrégé en* **DJIA** *et souvent raccourci en* **Dow Jones***) est le plus vieil indice des bourses de New York et le plus vieil indice boursier du monde. Cet indice est la propriété de Dow Jones Indexes, une coentreprise détenue à* ***90*** *% par CME Group et à* ***10*** *% par* Dow Jones and Company. *L'indice comprend* ***30*** *entreprises importantes, mais les entreprises présentes dans l'indice ont changé avec le temps. Seule General Electric est présente depuis les origines de la publication de l'indice.*

Au soir du « Jeudi Noir », les actions ont diminué. Elles n'ont pas beaucoup diminué, mais elles ont diminué. Plus inquiétant encore elles se sont un moment effondrées, chose que personne ne croyait possible.

Tout le monde veut maintenant retirer ses billes **:**

- *Ceux qui doivent les retirer parce qu'ils doivent rembourser leurs taux d'intérêts.*
- *Ceux qui comprennent qu'ils sont passés à côté du gouffre.*

Le système est maintenant « mortellement touché ». Il ne tient plus que par le support des banquiers. Les cours restent stables le vendredi ***25*** *et samedi* ***26*** *(avant-guerre, il y avait une demi-session le samedi).*

Le cycle s'emballe le lundi ***28*** *(Lundi noir ou Black Monday), où* ***9,25*** *millions de titres sont échangés. Cette fois les banques comprennent que ce n'est pas un phénomène « passager », mais un phénomène « durable », et elles n'interviennent pas. L'indice* ***Dow Jones*** *perd* ***13*** *%.*

Le ***29*** *octobre (Mardi noir ou Black Tuesday), le volume échangé atteint* ***16,4*** *millions de titres. L'indice* ***Dow Jones*** *perd encore* ***12*** *% et les gains d'une année de hausse disparaissent. Entre le* ***22*** *octobre et le* ***13*** *novembre, l'indice* ***Dow Jones*** *recule de* ***39*** *%, ce qui correspond à la volatilisation de* ***30*** *milliards de dollars.*

✓ Les causes du Krach :

La cause première de cette crise est la sortie délicate de la première guerre mondiale **:** *des difficultés persistent jusqu'en* ***1925-26*** *notamment chez les vaincus. La croissance est alors déjà soutenue par les crédits américains mais dès* ***1921*** *le secrétaire au Trésor Mellon le rend moins accessible. Ce coup de frein protectionniste plombe encore davantage l'économie mondiale.*

✓ Après le krach :

Par un effet de dominos, c'est l'ensemble de la Bourse qui s'effondre, et la chute de ***1930*** *à* ***1932*** *est supérieure à celle de l'année* ***1929****. Le* ***8*** *juillet* ***1932****, le* ***Dow Jones*** *tombe à* ***41,22****, son plus bas niveau depuis sa création en* ***1896****. Parmi les effondrements spectaculaires* ***1929-1932 :***

- *U.S. Steel passe de* ***262*** *dollars à* ***22****.*
- *General Motors passe de* ***1075*** *dollars à* ***40****.*
- *General Electric passe de* ***1612*** *dollars à* ***154****.*

Le ***Dow Jones*** *perd, dans cet intervalle,* ***89*** *% de sa valeur. La valeur virtuelle de l'argent envolé s'élève à* ***72*** *milliards de dollars.*

✓ *Le cercle vicieux :*

*La catastrophe est complète et va frapper successivement **3** cibles **:***

- *La bourse,*
- *Les banques,*
- *Les entreprises*

La perte de confiance due à la crise boursière affecte à la fois la consommation et les investissements lors des mois suivant le krach.

- *Les investisseurs qui ont spéculé en empruntant ne peuvent plus rembourser.*
- *Sans leurs remboursements, les banques ne peuvent plus alimenter le commerce et l'industrie.*
- *Les entreprises sont donc acculées à la fois par le manque de clientèle et le manque de liquidités.*
- *Les entreprises commencent elles aussi à être en difficultés.*
- *Les banques sont coincées par leurs deux clients et partenaires habituels (les spéculateurs et les entreprises) qui s'avèrent « insolvables ».*
- *La fermeture des petites banques fait paniquer l'homme de la rue qui veut retirer ses avoirs du système bancaire, lequel s'effondre sous cette demande brutale.*

Pour passer de la bourse à la banque, il aura fallut quelques mois .Il faudra encore quelques mois pour que la catastrophe se fasse durement ressentir dans l'industrie et le commerce qui jusque là tourne encore « vaille que vaille ».

L'absence de liquidités et donc le manque de clientèle durable fait fermer les entreprises et précipite des millions de personnes au chômage, ce qui à son tour fait diminuer le pouvoir d'achat global de la population. Le dragon a mordu sa queue, la misère engendre la misère …

*Une tentative de redressement de l'économie américaine sera amorcée par le New Deal en **1933**, mais une rechute se produit en **1937**. Ce n'est qu'avec l'entrée des États-Unis dans la Seconde Guerre mondiale fin **1941** que le pays se redresse durablement.*

*Les indices boursiers ne reprendront des valeurs comparables à celles précédant la crise de **1929** que vingt-cinq ans plus tard (le pic du **3** septembre **1929** est dépassé le **23** novembre **1954**).*

✓ 1931 : La crise se mondialise :

Il faudra deux ans pour que la catastrophe traverse l'Atlantique. Tous les pays européens ne seront pas touchés simultanément ni dans un même ordre de gravité, mais tous seront atteints.

Deux facteurs entrent en ligne de compte **:**

- *Le degré d'interdépendance avec le marché américain.*
- *La possibilité de se replier sur un marché « de secours » (et en premier sur ses colonies).*

Le mécanisme est partout le même **:**

- *Le pouvoir d'achat des américains s'effondre et ils achètent moins en Europe ;*
- *Les USA instaurent des mesures protectionniste ce qui gène les exportations européennes.*
- *Les banques américaines ont des fonds en Europe qu'il faut rapatrier d'urgence ce qui crée une ponction monétaire sur le marché européen.*

✓ La crise et la politique :

❖ La période « Hoover » (Républicain) :

La volatilisation de cette masse d'argent virtuel, crée un réel manque d'argent. Les gens ne savent plus acheter car les prix sont trop élevés par rapport à ce qu'ils ont. Pour vendre les prix doivent donc baisser. Mais si les prix baissent, cela veut dire que chaque jour que l'on attend avant d'acheter ion « gagne » en quelques sortes de l'argent. Donc le commerce se porte de plus en plus mal, alors qu'apparemment les choses semblent évoluer « bien » puisque le coût de la vie diminue… .

La tactique de ***Hoover*** *est donc la suivante (comme vont le lui reprocher ses adversaires démocrates) « Do nothing ».*

❖ La période Roosvelt :

En novembre ***1932****, les États-Unis élisent* ***Franklin Delano Roosevelt*** *pour remplacer* ***Hoover*** *à la tête de l'État. Avec un taux de chômage approchant les* ***25*** *% de la population active,* ***Roosevelt*** *qui prend ses fonctions en mars* ***1933*** *lance plusieurs programmes nationaux afin d'accroître le volume de liquidités et* *réduire le chômage (c'est ce que l'on nomma le New Deal). La cour suprême s'opposa dans un premier temps à cet interventionnisme économique très fort, contraire à sa jurisprudence précédente, avant de s'y rallier en **1937**.*

*Le New Deal est souvent crédité d'avoir permis de surmonter la crise, mais ce point de vue est contesté, notamment par les économistes classiques, surtout à partir des années **1960**.Il permit en tout cas de limiter les conséquences sociales dramatiques de la crise, décrites par des œuvres comme « Les Raisins de la colère », ou « Des souris et des hommes ». Il fournit aussi aux États-Unis des infrastructures - routes, aménagements hydroélectriques - encore utilisées à l'heure actuelle.*

*Plus encore que la seule impulsion financière, il redonne espoir aux Américains et **Roosevelt** sera réélu en **1936**, **1940** et **1944**.*

Par la première forte intervention d'un État dans l'économie, certains pensent même qu'il a sauvé le capitalisme lui-même.

- ✓ ***Leçons de la crise :***

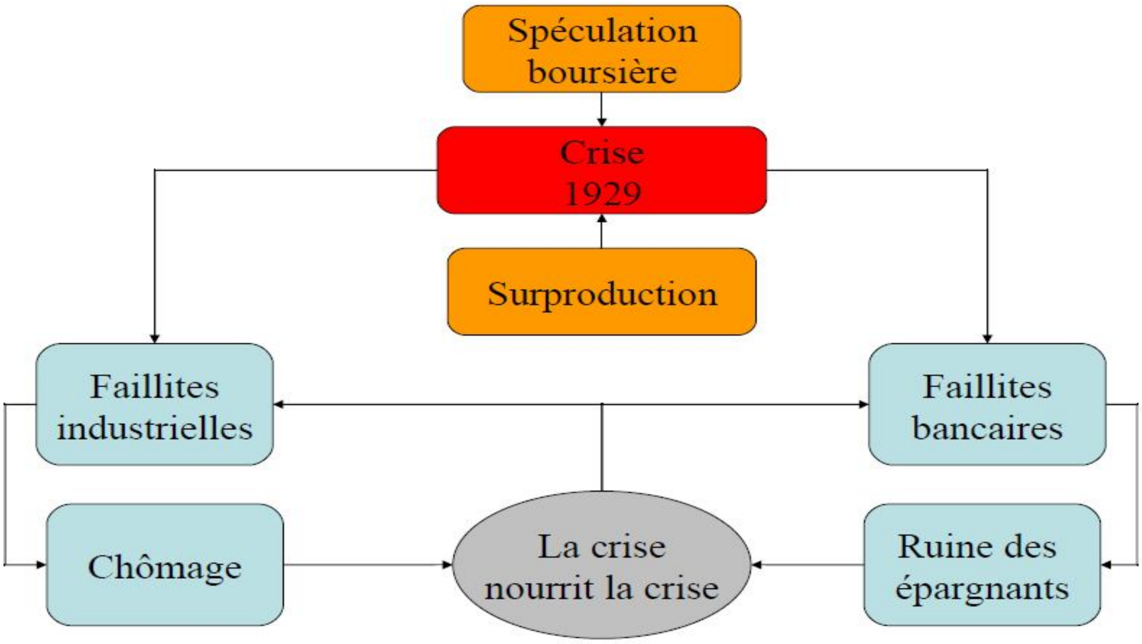
*Ces différentes interprétations peuvent être mises en parallèle avec les leçons qui ont été tirées de la crise et avec les politiques économiques suivies pour éviter son renouvellement. Les interprétations keynésiennes ont conduit à des politiques de gestion de la demande, spécialement à des relances par la consommation et l'investissement publics. Paradoxalement, elles ont été mises en œuvre principalement dans les années **1960** durant lesquelles la tendance était plutôt à l'inflation qu'à la déflation qu'elles étaient destinées à éviter, ce qui conduisit à les discréditer aussi largement qu'exagérément. Ces interprétations et politiques keynésiennes n'accordent qu'une place secondaire aux aspects financiers, sans doute parce qu'elles sont conçues et utilisées dans un contexte (les années **1950** à **1980**) dans lequel les systèmes financiers sont peu développés et stables pour les raisons qui suivent.*

Les interprétations financières, dont on a vu l'importance dominante, eurent leur parallèle (et souvent leur antécédent chronologiquement) dans de multiples réglementations du système financier destinées à établir une protection de l'économie contre l'instabilité « naturelle » de la finance de marché. La conviction de la fragilité structurelle du capitalisme, étayée sur l'immunité de l'URSS envers la crise mondiale, s'ajouta d'ailleurs à une *hostilité (croissante depuis le début du siècle) envers le pouvoir de Wall Street sur l'industrie pour conduire l'administration* ***Roosevelt*** *à des réformes importantes qui furent imitées dans de nombreux pays.*

Pour éviter les runs des particuliers sur les banques, un système d'assurance des dépôts fut mis en place. L'idée que la banque centrale a un rôle de prêteur en dernier ressort en cas de crise systémique s'affirma, même si l'on n'osa pas l'inscrire dans les textes. Pour éviter d'avoir à y recourir, le Banking Act de ***1935*** *mit en place une surveillance centralisée du système bancaire.*

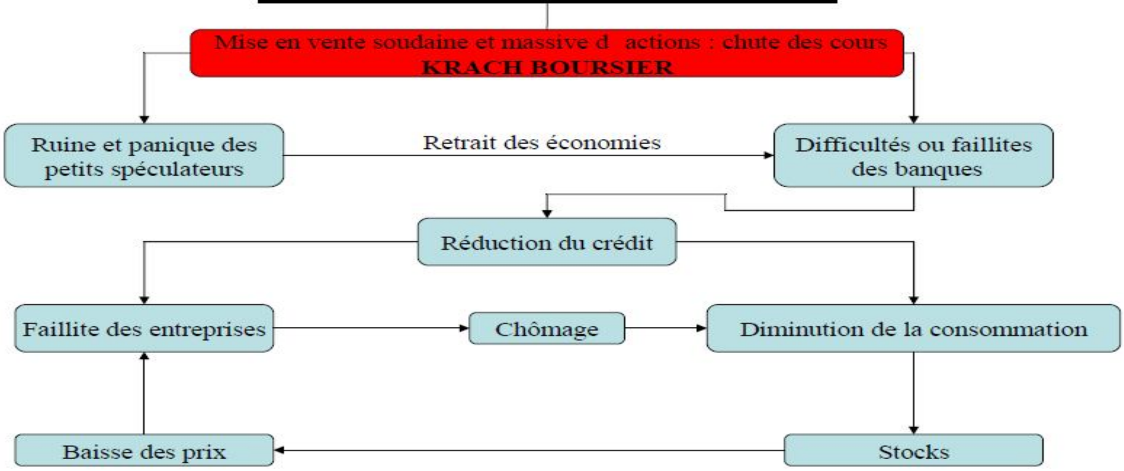
Dans la mesure où l'on considérait (sans doute à tort) que c'était leur activité boursière (les crédits qu'elles consentaient aux brokers pour leurs opérations non couvertes à terme, mais aussi leur implication dans des émissions de titres) qui avait provoqué les difficultés des banques, celles-ci se virent interdire toute prise de position en Bourse et toute prise de participation dans le capital des entreprises, à moins de se spécialiser dans cette activité. Par ailleurs, la création de la Securities and Exchange Commission fournit un arbitre du fonctionnement du marché boursier destiné à éviter les opérations douteuses auxquelles le public attribue naturellement les crises.

- ✓ ***La crise de 1929 en schémas :***

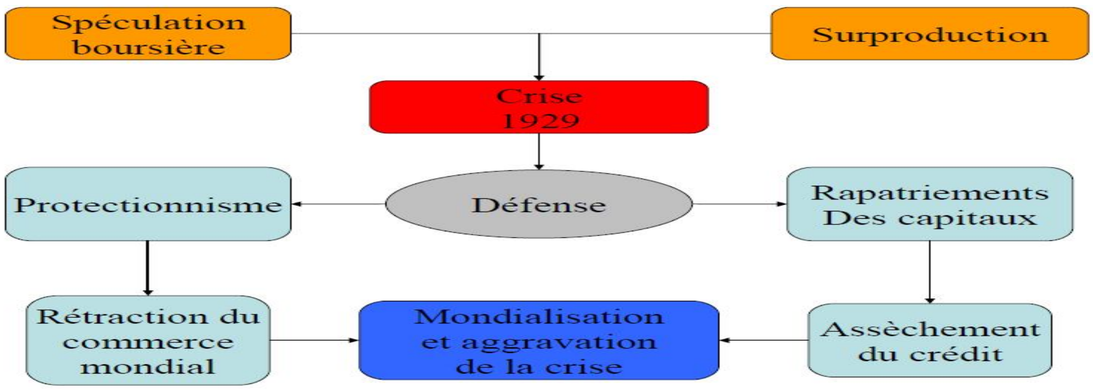


La crise de 1929, une schématisation

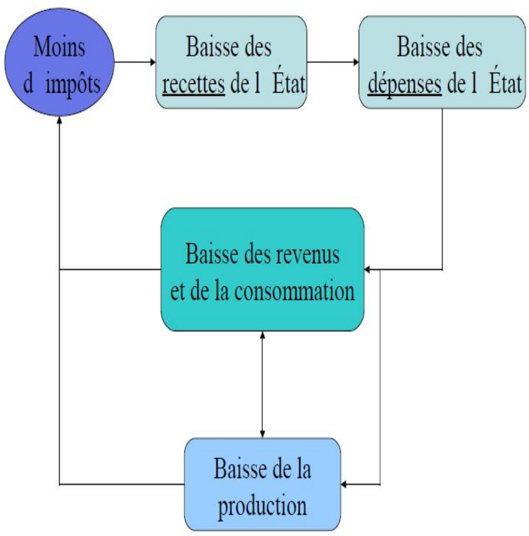
Le « jeudi noir » 24 octobre 1929



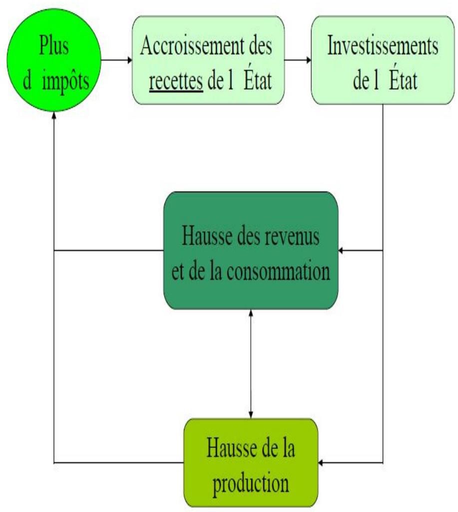
Le krach boursier de 1929 et ses conséquences



La crise de 1929 et son internationalisation



La réponse libérale à la crise : la déflation



La réponse kéneysienne à la crise : la relance

ANNEXE 6 : Coefficient de Dissymétrie et d'Ecrasement

1) Skewness :

Le coefficient de Skewness mesure le degré d'asymétrie de la distribution. Il est définit comme :

$S = \frac{[E\,(X-\mu)^3]}{\left[\sqrt{E\,(X-\mu)^2}\right]^3}$ *, soit le moment d'ordre trois centré sur le cube de l'écart-type.*

*Il est calculé en pratique de la manière suivante **:*** $\frac{n}{(n-1)(n-2)}\sum\left(\frac{(x_i-\bar{x})}{s}\right)^3$ *, Si **S** est égal à **0**, la distribution est symétrique. Si **S** est plus petit que **0**, la distribution est asymétrique vers la gauche. Si **S** est plus grand que **0**, la distribution est asymétrique à droite.*

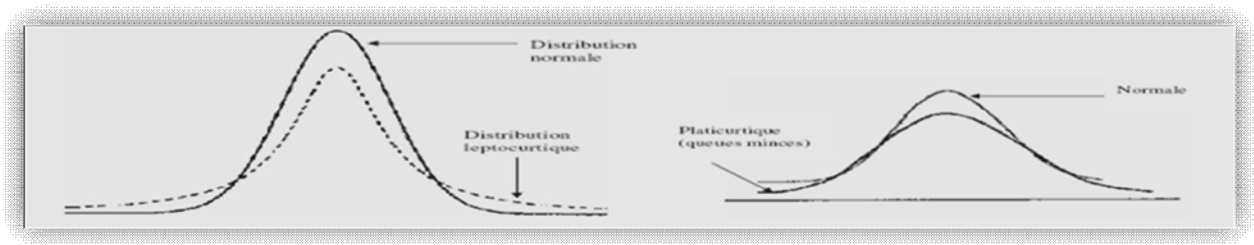
2) Kurtosis :

*Le coefficient de Kurtosis mesure le degré d'écrasement « aplatissement » de la distribution. Il se définit classiquement comme **:***

$K = \frac{E(X-\bar{X})^4}{[E(X-\bar{X})^2]^2}$ *, soit le rapport entre le moment d'ordre quatre centré et le carré de la variance. Il est calculé en pratique comme :* $\left[\frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)}\sum\left(\frac{(x_i-\bar{x})}{s}\right)^4\right]-\frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}$ *. Lorsqu'il est positif, cela indique que la distribution est "pointue". Lorsqu'il est négatif, cela indique que la distribution est relativement "écrasée".*

On compare le Kurtosis empirique `a celui d'une loi Normale qui vaut 3.

- ✓ *Si **K** = **3** alors la distribution est dite mésocurtique, ses queues sont proches de la loi Normale.*
- ✓ *Si **K** > **3** alors la distribution est dite leptocurtique, elle présente des queues épaisses.*
- ✓ *Si **K** < **3** alors la distribution est dite platicurtique, elle présente des queues minces.*



ANNEXE 7 : Démonstration de la VaR

Comme la ***VaR*** *correspond au montant de pertes qui ne devrait pas être dépassé avec une probabilité α, alors on peut écrire* **:**

$\boldsymbol{P(X \leq VaR_X\,[\alpha,n]) = \alpha\, X}$

Ou encore :

$\boldsymbol{F_X\,(VaR_X[\alpha,n]) = \alpha}$

D'où **:**

$\boldsymbol{VaR_X\,[\alpha,n] = -\,F_X^{\leftarrow}(\alpha)}$

- *Lorsque F est continue et strictement monotone.*

ANNEXE 8 : Démonstration méthode variance-covariance

Supposons que la distribution de P&L sur une seule période soit une loi normale d'espérance **m** *et de variance* σ^2**.**

$$\alpha = 99\% = P(R_t \leq VaR[99\%;1]) = P\left(\frac{R_t - m}{\sigma} \leq \frac{VaR[99\%;1] - m}{\sigma}\right)$$

Alors **:**

$$\frac{VaR[99\%;1] - m}{\sigma} = z_\alpha = 2{,}33$$

Puisqu'il correspond au quantile d'une loi normale au seuil de **99%***. Donc* **:**

$$VaR[99\%;1] = 2{,}33 \cdot \sigma + m$$

ANNEXE 9 : Quelques Définitions

1) Les Mathématiques :

*Le mot « **mathématique** » vient du grec, par l'intermédiaire du latin. Le mot μάθημα (máthēma) signifie « science, connaissance » puis « mathématiques » ; il a donné naissance à l'adjectif μαθηματικός (mathematikos), d'abord « relatif au savoir » puis « qui concerne les sciences mathématiques ». Cet adjectif a été adopté en latin (*mathematicus*) et dans les langues romanes par la suite (« mathématique » en français,* matematica *en italien, etc.), ainsi que dans de nombreuses autres langues.*

Les mathématiques constituent un domaine de connaissances abstraites construites à l'aide de raisonnements logiques sur des concepts tels que les nombres, les figures, les structures et les transformations. Les mathématiques désignent aussi le domaine de recherche visant à développer ces connaissances, ainsi que la discipline qui les enseigne.

2) Les Mathématiques appliquées :

*Les **mathématiques appliquées** sont une branche des mathématiques qui s'intéresse à l'application du savoir mathématique aux autres domaines.*

L'analyse numérique, les mathématiques de l'ingénierie ; l'optimisation linéaire, la programmation dynamique, l'optimisation et la recherche opérationnelle ; les bio-mathématiques, la bio-informatique, la théorie de l'information, la théorie des jeux ; les probabilités et les statistiques ; les mathématiques financières et l'actuariat ; la cryptographie et, jusqu'à un certain point, la combinatoire et la géométrie finie ; la théorie des graphes telle qu'appliquée à l'analyse de réseaux, ainsi qu'une bonne partie de ce qu'on appelle l'informatique sont autant de domaines d'application des mathématiques.

3) Les Mathématiques financières :

*Les **mathématiques financières** sont une branche des mathématiques appliquées ayant pour but la modélisation, la quantification et la compréhension des phénomènes régissant les marchés financiers. Elles utilisent principalement des outils issus de l'actualisation, de la théorie des probabilités, du calcul stochastique, des statistiques et du calcul différentiel.*

4) L'Assurance :

*L'**Assurance** est, par définition, un système qui permet de prémunir un individu, une association ou une entreprise contre les conséquences financières et économiques liées à la survenance d'un risque (=événement aléatoire) particulier.*

*Le moyen mis en œuvre par les organismes d'**assurance** pour les prémunir contre ce risque est de les associer à une communauté de personnes (=les assurés), qui cotise pour être en mesure d'indemniser ceux parmi ses membres qui subiraient des dommages matériels ou corporels en cas de réalisation du risque.*

*Ainsi, dans la mesure où c'est l'ensemble de la communauté des assurés qui prend matériellement en charge les dommages subis par ses membres frappés par la réalisation du risque, l'**assurance** est un système de gestion des risques basé sur la notion de solidarité.*

*Ont distinguent deux types d'assurances **:***

- *Les Assurances "**Non Vie**" (Assurances de Biens, Assurances de Responsabilité et Assurances Santé).*
- *Les Assurances "**Vie**" (Vie, décès, épargne, retraite...).*

Cette distinction entre ces deux types d'assurances repose sur la différence du mode de gestion des primes.

*En effet, de manière générale, les **Assurances Non Vie** gèrent les primes par répartition (= mode de gestion collectif où les primes de la communauté des assurés servent à payer les sinistres de la communauté des assurés au titre du même exercice), tandis que les **Assurances Vie** les gèrent par capitalisation (= mode de gestion individuel où les primes de l'assuré servent à lui délivrer une prestation au moment de la survenance du risque).*

5) Réassurance :

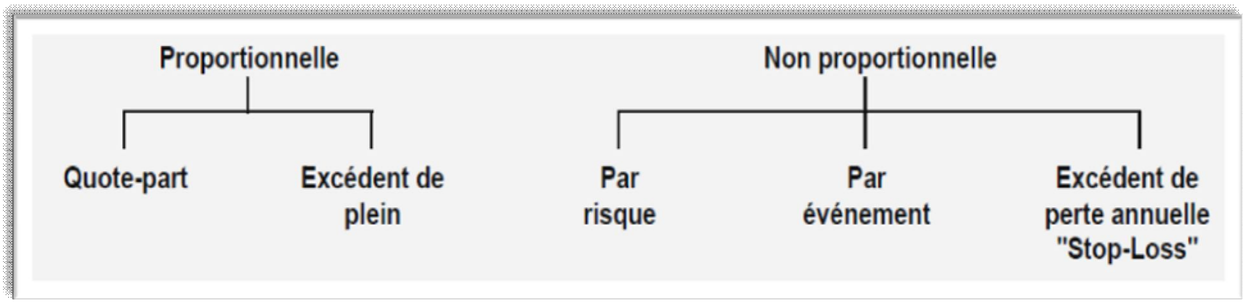
La Réassurance est née, il y a environ quatre siècles dans le bassin méditerranéen et en Angleterre pour l'assurance maritime.

La réassurance est un mécanisme par lequel un assureur, appelé la « la cédante », transfère un risque, en tout ou en partie, à un autre assureur, que l'on appelle « réassureur ». C'est l'assureur de l'assureur!

La réassurance, pour schématiser, est l'assurance des sociétés d'assurances. Parfois appelée assurance secondaire, celle-ci ne peut pas exister sans l'étape préliminaire du transfert de risque que représente l'assurance primaire. La réassurance fait partie du secteur de l'assurance et de la finance en général.

Le principe de la réassurance est aussi simple que celui de l'assurance. « le réassureur est l'assureur de l'assureur ». Il s'agit pour la société d'assurance (la cédante) de céder à une société spécialisée (le réassureur) un risque aléatoire (les conséquences d'un sinistre incendie, de la mort, d'un tremblement de terre, d'un naufrage) contre le règlement d'une prime de réassurance correspondant au risque transféré et au mode de transfert prévu dans le contrat de réassurance (le traité). La société d'assurance est alors appelée la cédante (ou assureur primaire) et elle effectue une cession auprès d'un ou de plusieurs réassureurs (l'assureur secondaire) par un contrat de réassurance (ou programme). Un contrat de réassurance existe sous de nombreuses formes et peut couvrir une période donnée ou non, bien que la plupart des contrats de réassurance aient une période de validité d'un an.

LES FORMES DE RÉASSURANCE



- ***La réassurance excédent de perte annuelle « Stop-Loss » :*** *Cette couverture permet à l'assureur de limiter ses pertes annuelles à un montant pré-établi, l'excédent étant réassuré. Le traité « Stop-Loss » peut également prévoir un plafond « Stop-Loss », pour limiter le risque du réassureur. Si la rétention du traité « Stop-loss » est établie à* ***500 000*** *DA et le plafond « Stop-Loss » à 2 millions DA, le réassureur doit payer tout montant de la perte annuelle globale qui excède* ***500 000*** *DA, jusqu'à concurrence de* ***1,5*** *million DA.*

6) La Finance :

*C'est à partir de **1958** que la **finance** est devenue une sous-discipline de l'économie, en lui empruntant ses raisonnements formalisés et ses mécanismes d'optimisation. Auparavant, la gestion financière consistait essentiellement en un recueil de pratiques.*

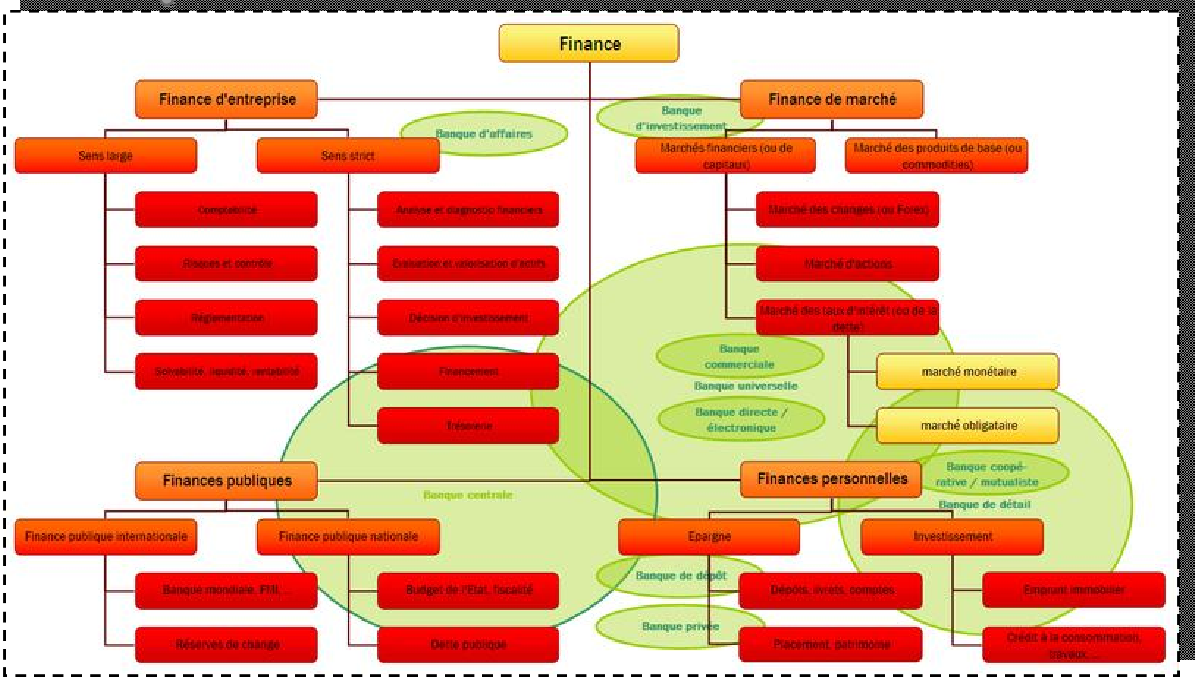
*La finance étudie la manière dont les investisseurs allouent leurs actifs en fonction de **la valeur temps de l'argent**.*

*Dans son sens restreint, la finance peut désigner **:***

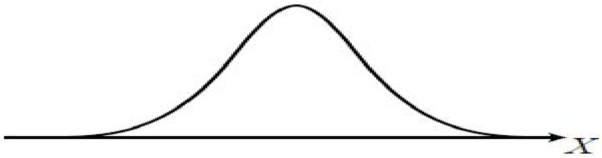
- *Soit les techniques qui permettent d'obtenir et de placer des capitaux ;*
- *Soit les agents économiques qui recherchent des capitaux ou souhaitent en placer.*

*La **finance** est largement devenue de nos jours un négoce d'instruments et de transfert des anticipations de revenus et de risques, dont les prix peuvent être négociés sur des marchés ou auprès d'institutions. Les risques peuvent être ainsi transférés à ceux disposés à les prendre (contre des revenus espérés), et les intermédiaires financiers peuvent pratiquer une compensation des risques inverses (par exemple, le risque de change d'un importateur est inverse de celui d'un exportateur, le risque de taux d'un prêteur est inverse de celui d'un emprunteur, …), la diversification des risques, etc.*

Schéma synoptique de la Finance



ANNEXE 10 : La loi Normale Centrée Réduite



*La variable aléatoire continue **X** suit une loi normale.*

- *La densité d'une loi normale de moyenne $\boldsymbol{\mu}$ et de variance $\boldsymbol{\sigma^2}$:*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}\right\} \quad , \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Longleftrightarrow (X-\mu)/\sigma \sim \mathcal{N}(0,1).$$

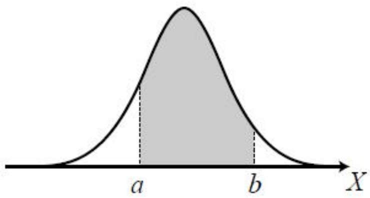
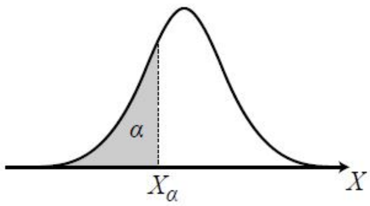
Moyenne :	μ
Écart type :	σ
Calcul de probabilité :  $P(a<X<b) = ?$	On pose $$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}.$$ On a : $$P(a<X<b) = P(Z_a<Z<Z_b),$$ où $$Z_a = \frac{a-\mu}{\sigma} \quad \text{et} \quad Z_b = \frac{b-\mu}{\sigma},$$ c'est-à-dire l'aire sous la courbe de $f(Z)$ entre Z_a et Z_b. On doit consulter une table de la loi normale centrée réduite. Sur *Excel* on utilise la formule suivante : `=LOI.NORMALE(`b ;μ ;σ ;`VRAI)-LOI.NORMALE(`a ;μ ;σ ;`VRAI)`
Calcul de quantile :  $X_\alpha = ?$	On cherche dans une table de la loi normale centrée réduite la cote Z_α correspondant à l'aire sous la courbe donnée. On pose : $$X_\alpha = \mu + \sigma Z_\alpha$$ Sur *Excel* on utilise la formule suivante : `=LOI.NORMALE.INVERSE(`α ;μ ;σ`)`

Table de la Loi Normale Centrée Réduite

u	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900

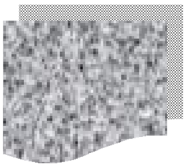
Bref Sur La Vie De Certain Scientifiques

Bref Sur La Vie De Certain Scientifiques

BREF SUR LA VIE DE CERTAIN SCIENTIFIQUES

1. 

Jean Claude Augros **:** Ingénieur *ENSIA-AgroParisTech*, professeur agrégé de sciences de gestion, actuaire qualifié membre de *l'Institut des Actuaires*, ***Jean Claude Augros*** est professeur à *l'Université Claude Bernard Lyon 1*. Il a été directeur de l'*UFR* de Mathématiques Appliquées, de Gestion et d'Economie de cette université avant d'être nommé directeur de *l'Institut de Science Financière et d'Assurances.*

2. 

Michel Quéruel **:** Titulaire d'une maîtrise de mathématiques, du *DESS* d'ingénierie mathématique de l'*I.S.F.A*, et docteur en sciences de gestion, est responsable de la structuration de risques alternatifs à *CDC IXIS Capital Markets*. Il a été lauréat, en *1997*, du prix de thèse de l'Association Française de Finance.

3. 

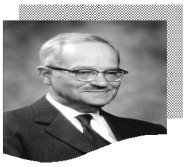
Stephen Alan Ross **: «** *Créateur d'APT* » Est professeur d'économie financière à la *MIT Sloan School of Management* et président du conseil consultatif des placements *IVC* international d'indemnisation de l'évaluation, Il est également directeur et chef des placements des investisseurs institutionnels Ross, *LLC*. Après avoir obtenu un doctorat en économie de l'Université *Harvard*, il a continué enseigner à l'école de *Wharton* et de la *Yale School of Management*, avant de rejoindre le *MIT*. Il a fondé plusieurs entreprises de services d'investissement, il a agi à titre de consultant pour un certain nombre de banques d'investissement et des sociétés, et il a servi comme conseiller auprès des ministères gouvernementaux tels que le *Trésor américain*, le *département du Commerce*,. Il est un ancien directeur de *Freddie Mac*, et un ancien président de *l'American Finance Association*. Il a été récipiendaire de nombreux prix et récompenses, y compris l'ingénieur *IAFE* financier de l'année.

4. ***Glyn A. Holton*** **:** Est un auteur et consultant financier. Il a écrit *la Value-at-Risk* ***:*** *théorie et pratique*, le premier (*et le seul*) texte avancé sur la valeur à risque. Son journal révolutionnaire *La définition du risque* exploré les fondements philosophiques de risque. Plus récemment, son *mouvement des suffragettes* article *investisseurs* proposé un roman, basé sur le marché une solution pour le problème de la gouvernance d'entreprise.

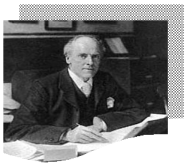
Avant de créer sa société de conseil en mai *1995*, il a travaillé comme actuaire pour Métropolitain Life. Il a été vice-président de *Fidelity Investments*, conseillant ses clients institutionnels sur la gestion des risques et des stratégies de portefeuille. Il a également travaillé pour la Banque de Boston, en développant des analyses avancées pour quantifier le marché et risque de crédit lié aux activités de négociation de la banque. Il a étudié les mathématiques de deuxième cycle à la fois *Carnegie Mellon* et universités *Temple* et a obtenu son diplôme de maîtrise de l'Université *Temple* en ***1989***. Il étudie actuellement la philosophie.

5. 

***Nicolas de Condorcet* :** Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, marquis de Condorcet, né le *17* septembre *1743* à Ribemont et mort le *29* mars *1794* à Bourg-la-Reine, est un philosophe, mathématicien et politologue français. À l'âge de 16 ans, ses capacités d'analyse sont remarquées par d'Alembert et Clairaut. En 1765, publia son premier travail sur les mathématiques, intitulé *Essai sur le calcul intégral.*

6. 

***Jerzy Neyman* :** (*16 avril 1894 Bendery, en Bessarabie « Russie »- 5 août 1981*) est considéré comme un des grands fondateurs de la statistique moderne. Il a contribué très largement à la théorie des probabilités, vérifiant les hypothèses, les intervalles de confiance et d'autres parties des statistiques. Il s'est enthousiasmé pour ses travaux parce qu'il voulait savoir « *comment trouver ce que nous voulons connaître* ». Ses travaux ont eu de grandes répercussions dans un large éventail de champs disciplinaires, de l'astronomie et l'agriculture à la zoologie en passant par l'actuariat de l'assurance sociale, la biologie et la météorologie. En *1937*, avec le nazisme en Europe, *Neyman* accepte un poste à l'*université de Berkeley en Californie*, pour démarrer le département des statistiques où il a passé la seconde moitié de sa vie.

7. 

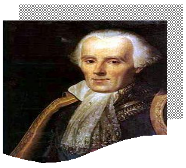
***Karl Pearson* :** (*27 mars 1857 à Islington, Londres – 27 avril 1936*), mathématicien britannique, est un des fondateurs des statistiques modernes. Il est aujourd'hui principalement connu pour avoir développé le coefficient de corrélation et le Test du χ^2. Il est l'un des fondateurs de la revue *Biometrika* dont il a été l'éditeur pendant *36* ans et qu'il a hissé au rang de meilleure revue de statistiques mathématiques Il a reçue la médaille *Darwin* en *1898*.

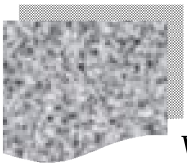
8. 

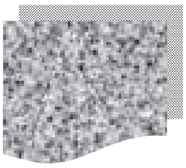
***Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier* :** Né au Havre « *France* » le *11* mars *1870* et mort à Saint-Servan-sur-Mer le *26* avril *1946*, est un mathématicien français. Il est aujourd'hui considéré comme un précurseur de la théorie moderne des probabilités et comme le fondateur des mathématiques financières. Dans sa thèse intitulée Théorie de la spéculation, soutenue le *29* mars *1900*, il a introduit l'utilisation en finance du mouvement brownien, qui est à la base de la plupart des modèles de prix en finance, notamment la formule de *Black-Scholes* (*1973*). Ses travaux ont été très commentés de son vivant et notamment cités par *Kolmogorov* dès les années trente.

9. 

***Jean le Rond D'Alembert* :** Né le *16* novembre *1717* à Paris où il est mort le *29* octobre *1783*, est un mathématicien, philosophe et encyclopédiste français. Il est célèbre pour avoir dirigé l'Encyclopédie avec *Denis Diderot* jusqu'en *1757* et pour ses recherches en mathématiques sur les équations différentielles et les dérivées partielles.

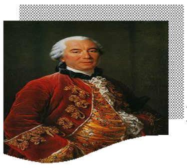
10.  ***Pierre-Simon de Laplace* :** Né le *23* mars *1749* à Beaumont-en-Auge « France » et mort le *5* mars *1827* à Paris, est un mathématicien, astronome et physicien français. *Laplace* est l'un des principaux scientifiques de la période napoléonienne ; en effet, il a apporté des contributions fondamentales dans différents champs des mathématiques, de l'astronomie et de la théorie des probabilités ; il a été l'un des scientifiques les plus influents de son temps, notamment par son affirmation du déterminisme ; il a contribué de façon décisive à l'émergence de l'astronomie mathématique reprenant et étendant le travail de ses prédécesseurs dans son traité intitulé *Mécanique Céleste (1799-1825)*. Cet ouvrage majeur, en cinq volumes, a transformé l'approche géométrique de la mécanique développée par *Newton* en une approche fondée sur l'analyse mathématique. En *1799* il est nommé ministre de l'Intérieur sous le Consulat. Napoléon, en *1808* lui confère le titre de *comte de l'Empire*. Il est nommé *marquis* en *1817*, après la restauration des *Bourbons*.

11.  ***Jean Nicolas Rieucau* :** Actuellement il est maître de conférences. Université Paris *VIII* en France, membres du bureau. *Jean-Daniel Candaux*, Chargé de recherche honoraire, membres du laboratoire d'Economie Dionysien (L.E.D) « *Axe : Histoire de la pensée économique/Histoire des faits économiques* ».

12.  ***Antoine-Gaspard Boucher d'Argis* :** Né en *1708*, mort en *1791*, est un avocat français. Conseiller au conseil souverain de *Dombes* en *1753*, puis au *Châtelet* de Paris, il a laissé un grand nombre de traités de jurisprudence et a publié les Règles pour former un avocat, de *Pierre Biarnoy de Merville*, en les retouchant et y joignant une Histoire abrégée de l'ordre des avocats.À partir de *1742*, il donne de nouvelles éditions du Recueil, par ordre alphabétique, des principales questions de droit de *Barthélemy-Joseph Bretonnier (1656-1727*). À partir de *1749*, il propose des éditions augmentées du Dictionnaire de droit et de pratique de *Claude de Ferrière* (*1639-1715*), en 2 volumes in-quarto. Il a par ailleurs fourni plus de 4000 articles sur le droit dans les volumes III à XVII de l'Encyclopédie de *Diderot et D'Alembert*.

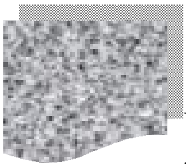
13.  ***Bernard Bru* :** A pris sa retraite en *2003*. En hommage au rôle qu'il a joué dans la communauté des mathématiciens et des historiens des mathématiques, l'UFR de Mathématiques et Informatique de l'Université René Descartes-Paris *5*, le laboratoire MAP *5* (*CNRS-Université Paris 5*).

14.  ***Pierre Crépel* :** Né le *9* juillet *1947* à Saint-Maur, docteur d'Etat en mathématiques (*1977*), Membre titulaire de l'Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Lyon.

15.  ***Georges-Louis Leclerc, comte de Buffon*** **:** Né à Montbard le *7* septembre *1707* et mort à Paris, le *16* avril *1788*, est un naturaliste, mathématicien, biologiste, cosmologiste et écrivain français. Son nom est lié à la localité de *Buffon*, en Côte-d'Or, dont la seigneurie fut acquise par la famille *Leclerc*. Participant à l'esprit des Lumière, parallèlement à l'Encyclopédie, il est à la fois académicien des sciences et académicien français. Ses théories ont influencé deux générations de naturalistes, en particulier *Jean-Baptiste* de Lamarck et *Charles Darwin*. Salué par ses contemporains, *Buffon* a été qualifié de « *Pline de Montbard* », en référence au célèbre naturaliste romain du *I*^er^ siècle, auteur d'une monumentale Histoire naturelle.

16.  ***Sylvestre-François Lacroix*** **:** (*28* avril *1765* à Paris - *24* mai *1843* à Paris) est un mathématicien français dont le Traité du calcul différentiel et du calcul intégral eut une très grande influence au XIX^e^ siècle.

17.  ***Daniel Bernoulli*** **:** (Groningue « *Pays Bas* » *8* février *1700* - Bâle *17* mars *1782*) est un médecin, physicien et mathématicien suisse. C'est le fils de *Jean Bernoulli* et le neveu de *Jacques Bernoulli*. Il cultiva à la fois les sciences mathématiques et les sciences naturelles, enseigna les mathématiques, l'anatomie, la botanique et la physique Les différents problèmes qu'il tente de résoudre (*théorie de l'élasticité, mécanisme des marées*) le conduisent à s'intéresser et développer des outils mathématiques tels que les équations différentielles ou les séries. Il collabore également avec *Jean le Rond d'Alembert* dans l'étude des cordes vibrantes. Il fut le premier à utiliser un symbole (*A.S.*) pour désigner la fonction *arc sinus*.

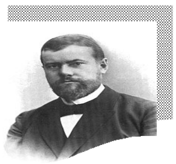
18.  ***Charles François de Bicquilley*** **:** (*30 août 1738 - Toul (Saint Amand) 1814*), est un militaire, philosophe et mathématicien français des *XVIII*^e^ et *XIX*^e^ siècles. En ***1787***, son Traité sur les Assurances maritimes lui mérita l'honneur de partager le prix académique avec ***M. Lacroix***. Cet ouvrage, non imprimé, a servi de matière à celui qui a pour titre **:** *Théorie élémentaire du Commerce*, travail unique dans son genre, accueilli favorablement en l'an *VIII* par l'Institut de France, qui invita l'auteur à le rendre public par la voie de l'impression. Il est le premier qui ait traité mathématiquement la science du commerce. On lui doit également un autre ouvrage sous le titre : *Du Calcul des probabilités dont le style est aussi correct qu'élégant.*

19.  ***Johannes Nikolaus Tetens*** **:** Né le *16* septembre *1736* à *Tetenbüll (Holstein)* et mort le *17* août *1807* à Copenhague, est un philosophe allemand, un statisticien et plus généralement un scientifique. Le livre *Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften*, publié à *Leipzig* en *1785* (*erster teil*) - *1786* (*zweiter teil*) est un monument de la science actuarielle. Outre une synthèse remarquable des travaux précédents, de la table de mortalité de *Halley* aux Observations on *reversionary payments* de *Richard Price*. Les actuaires y reconnaissent la première mesure de risque (*le Risico der Casse*). De plus, il offre des développements en statistique mathématique **:** grâce à l'approximation moivrienne de la loi binomiale, *Tetens* a essayé de calculer le niveau de confiance d'une estimation.

20.  ***Karl H. Borch*** **:** (*13 Mars 1919 - Décembre 1986*) était un professeur à NHH à Bergen , en Norvège entre *1963* et *1986*. Il est considéré comme l'un des fondateurs de l'économie de l'incertitude, comptant *150* articles scientifiques dans des revues et actes de conférences, et trois livres. Il est devenu une force motrice de la maturation, la vulgarisation et la crédibilité du groupe genevois Association des économistes du risque et de l'assurance. En *1990*, cette association a honoré sa mémoire en publiant le risque volume, l'information et l'assurance **:** *Essays* dans la mémoire de *Karl H. Borch.*

21.  ***Georg Bohlmann*** **:***(23 Avril 1869 à Berlin , 25 Avril 1928*) mathématicien Allemand , en se concentrant sur la théorie des probabilités et de la science actuarielle .

22.  ***Blaise Pascal*** **:** Né le *19* juin *1623* à *Clairmont* en Auvergne et mort à 39 ans le *19* août *1662* à Paris, est un mathématicien, physicien, inventeur, philosophe, moraliste et théologien français. Les tout premiers travaux de *Pascal* concernent les sciences naturelles et appliquées. Il contribue de manière importante à l'étude des fluides. Il a clarifié les concepts de pression et de vide, en étendant le travail de *Torricelli*. *Pascal* a écrit des textes importants sur la méthode scientifique. À *19* ans, en *1642*, il invente la calculatrice mécanique et après trois ans de développement et *50* prototypes il la présente à ses contemporains en la dédiant au *chancelier Séguier*. Dénommée machine d'arithmétique, puis *pascaline*, il en construisit une vingtaine d'exemplaires dans la décennie suivante. Mathématicien de premier ordre, il crée deux nouveaux champs de recherche majeurs : tout d'abord il publie un traité de géométrie projective à seize ans ; ensuite il développe en *1654* une méthode de résolution du « *problème des partis* » qui, donnant naissance au cours du *XVIII*[e] siècle au calcul des probabilités, influencera fortement les théories économiques modernes et les sciences sociales.

23.  ***Karl Emil Maximilian Weber*** **:** (*21 avril 1864-14 juin 1920 (à 56 ans)*), sociologue et économiste allemand, est, avec *Vilfredo Pareto, Émile Durkheim, Georg Simmel et Karl Marx*, l'un des fondateurs de la sociologie moderne. c'est-à-dire d'une approche sociologique qui fait du sens subjectif des conduites des acteurs le fondement de l'action sociale.

24.  ***Rohrbasser Jean-Marc*** **:** *Domaines de recherches* **:** Histoire des faits, idées et concepts démographiques, histoire du calcul des probabilités et de la statistique démographique, histoire du calcul financier, rentes viagères, tables de mortalité, longévité, risque, philosophie et population **:** l'argument physico-théologique à l'âge classique, les âges de la vie, démographie et littérature.

25.  ***Abraham de Moivre*** **:** (*Né le 26 mai 1667 à Vitry-le-François - mort le 27 novembre 1754 à Londres*) est un mathématicien français. *Moivre* était un précurseur du développement de la géométrie analytique et de la théorie des probabilités. Il publia *The Doctrine of Chances* (en) (*Théorie du Hasard*) en *1718.*

Il est surtout connu pour l'introduction des quantités imaginaires dans le calcul trigonométrique. On lui doit la célèbre formule (qui porte son nom) **:**

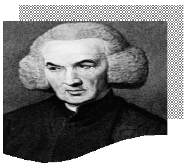
$$(\cos \mathbf{x} + \mathbf{i} \sin \mathbf{x})^{\mathbf{n}} = \cos \mathbf{nx} + \mathbf{i} \sin \mathbf{nx}$$, ainsi que l'étude des facteurs de **:** $\mathbf{x}^{\mathbf{2n}} - 2\,\mathbf{px}^{\mathbf{n}} + 1$.

26. 

***Lorraine Daston* :** (*Né le 9 Juin 1951, East Lansing, Michigan*) est une historienne des sciences américaine. Directrice exécutif de l'Institut *Max Planck* pour l'histoire des sciences (*MPIWG*) à *Berlin*, et professeur invité au sein du Comité sur la pensée sociale de l'Université de *Chicago*, elle est considérée comme une autorité sur l'histoire moderne *Early scientifique* et intellectuelle de *l'Europe*. En *1993*, elle a été nommée membre de l'Académie américaine des arts et des sciences.

27. 

***Harry Max Markowitz* :** (*Né le 24 août 1927 à Chicago*) est un économiste américain. Il a été lauréat du Prix de la Banque de Suède en sciences économiques en mémoire d'Alfred Nobel en *1990*. C'est l'auteur du modèle de « diversification efficiente » des portefeuilles d'actifs financiers (*Portefeuille de Markowitz*). *Markowitz* développa la base mathématique et les conséquences de cette analyse dans sa thèse, soutenue en *1954*. La théorie moderne du portefeuille est une théorie financière développée en *1952* par *Harry Markowitz*. Elle expose comment des investisseurs rationnels utilisent la diversification afin d'optimiser leur portefeuille, et quel devrait être le prix d'un actif étant donné son risque par rapport au risque moyen du marché. Cette théorie fait appel aux concepts de frontière efficiente, coefficient bêta, droite de marché des capitaux et droite de marché des titres. Sa formalisation la plus accomplie est le modèle d'évaluation des actifs financiers ou *MEDAF*.

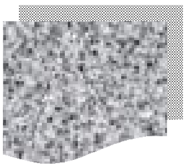
28. 

***Richard Price* :** (*23 février 1723 – 19 avril 1791*) fut un moraliste Gallois et un philosophe politique. Ami du *révérend Thomas Bayes* un des pères fondateurs de la probabilité, deux ans après le décès de *Bayes*, soit en *1763*, *Price* a présenté et fait publier son ouvrage, *An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances* dans les Philosophical Transactions of the *Royal Society* of London. *Price* fut un ardent défenseur de la cause américaine puis de la Révolution française en Angleterre où il participa à la « *Société des amis de la Révolution* ».

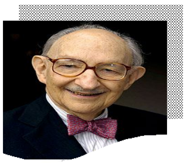
29. 

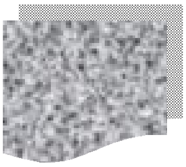
***Thomas Bayes* :** (*Né env. en 1702 à Londres - mort le 7 avril 1761 à Tunbridge Wells, dans le Kent*) est un mathématicien britannique et pasteur de l'Église presbytérienne, connu pour avoir formulé le théorème de *Bayes*. Ses découvertes en probabilités ont été résumées dans son Essais sur la manière de résoudre un problème dans la doctrine des risques (*Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances - 1763*) publié à titre posthume dans les comptes-rendus de l'Académie royale de Londres (the *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*).

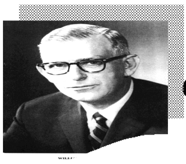
On lui doit en particulier une loi importante des probabilités, le théorème de *Bayes* (*posthume, 1763*), très utilisée en classification automatique. Un exemple parmi d'autres est la lutte contre le spam, par la méthode dite d'inférence *bayésienne.*

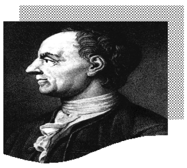
30. 

***Guillaume Morgan* :** (*le 26 mai 1750 à Bridgend, Glamorganshire– le 4 mai 1833*) était un médecin gallois, un physicien et un statisticien *Britannique*, qui est considéré le père de science actuarielle moderne. Il a gagné la Médaille de *Copley* en *1789* pour ses deux papiers des valeurs de Reversions et de Survivorships, imprimé dans les deux derniers volumes des Transactions Philosophiques de la Société Royale, dans le domaine de la science actuarielle.

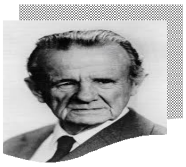
31.  ***Peter Lewyn Bernstein*: (*Janvier 22, 1919 - Juin 5, 2009*) était un historien américain, financier, économiste et pédagogue dont le développement et le raffinement de l'hypothèse de marchés efficients, fait de lui l'un des meilleurs du pays autorités connus dans la popularisation et la présentation de l'économie d'investissement au public général.

32.  ***Christian Kramp* :** Est un mathématicien alsacien né le *8* juillet *1760* et mort le *13* mai *1826* à Strasbourg (*France*). *Kramp* étudia la médecine, après avoir reçu son diplôme, il exerça dans les environs où le domicile de ses patients s'étendait dans un secteur assez large. Cependant il s'intéressait à bien d'autres choses que la médecine, et en plus d'un grand nombre de publications médicales, il publia un ouvrage sur la *cristallographie* en *1793*. En *1795* la France annexa la Rhénanie dans laquelle *Kramp* exerçait, il devint alors professeur à Cologne, enseignant les mathématiques, la chimie et la physique. *Kramp* fut nommé professeur de mathématiques dans sa ville natale de *Strasbourg*, en *1809*. Il fut élu à la section de géométrie de l'Académie des sciences en *1817*. Comme *Friedrich Wilhelm Bessel, Adrien-Marie Legendre et Gauss*, *Kramp* travailla sur la fonction factorielle généralisée qui s'applique aux nombres qui ne sont pas des entiers. Son travail sur les factorielles est indépendant de ceux de *Stirling* et de *Vandermonde*. Il fut le premier à utiliser la notation n! (*Éléments d'arithmétique universelle, 1808*). En fait le concept de factorielle plus général fut trouvé à la même époque par *Louis François Antoine Arbogast*.

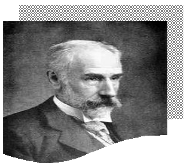
33.  ***Gemmell Cochran* :** (*le 15 juillet 1909, Rutherglen – le 29 mars 1980, Orléans, Massachusetts*) était un statisticien proéminent ; il est né en Ecosse, mais a passé la plupart de sa vie aux États-Unis. *Cochran* a écrit beaucoup d'articles et livres. Ses livres sont devenus des textes standard ***:*** Conceptions expérimentales (Les Méthodes statistiques se sont appliquées aux Expériences en Agriculture et Biologie.

34.  ***Leonhard Paul Euler* :** Né le *15* avril *1707* à Bâle et mort le *18* septembre *1783* à Saint-Pétersbourg, est un mathématicien et physicien *suisse*, qui passa la plus grande partie de sa vie en Russie et en Allemagne. Il était notamment membre de l'*Académie royale des sciences* de Prusse à *Berlin*. *Euler* fit d'importantes découvertes dans des domaines aussi variés que le calcul infinitésimal et la théorie des graphes. Il introduisit également une grande partie de la terminologie et de la notation des mathématiques modernes, en particulier pour l'analyse mathématique, comme pour la notion d'une fonction mathématique. Il est également connu pour ses travaux en mécanique, en dynamique des fluides, en optique et en astronomie. *Euler* est considéré comme un éminent mathématicien du *XVIII*e siècle et l'un des plus grands et des plus prolifiques de tous les temps.

35.  ***Godfrey Harold Hardy*** **:** (*7 février 1877 – 1er décembre 1947*) est un mathématicien britannique de premier plan, lauréat de la Médaille *Sylvester* en *1940* et de la médaille *Copley* en *1947*, connu pour ses œuvres en théorie des nombres et en analyse. Les non-mathématiciens le connaissent surtout pour deux choses ***:*** *A Mathematician's Apology*, son essai de *1940* sur l'esthétique des mathématiques avec un certain contenu personnel , qui est peut-être le meilleur témoignage sur la pensée d'un mathématicien au travail ;et Sa relation particulière comme mentor à partir de *1914* avec le mathématicien indien *Srinivasa Ramanujan.*

36.  ***Harald Cramér*** **:** (*le 25 septembre 1893 – le 5 octobre 1985*) était un mathématicien suédois, un actuaire et un statisticien, se spécialisant en statistique mathématique et théorie des nombres probabilistic. Il a été une fois décrit par John Kingman comme " un des géants de théorie statistique ".

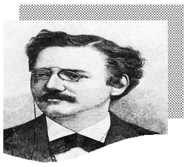
37.  ***Johann Carl Friedrich Gauss*** **:** Né le *30* avril *1777* à Brunswick et mort le *23* février *1855* à Göttingen, est un mathématicien, astronome et physicien allemand. Doté d'un grand génie, il a apporté de très importantes contributions à ces trois sciences. Surnommé « le prince des mathématiciens », il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps. La qualité extraordinaire de ses travaux scientifiques était déjà reconnue par ses contemporains. Dès *1856*, le roi de *Hanovre* fit graver des pièces commémoratives avec l'image de *Gauss* et l'inscription *Mathematicorum Principi* (« au prince des mathématiciens » en latin). *Gauss* n'ayant publié qu'une partie infime de ses découvertes, la postérité découvrit la profondeur et l'étendue de son œuvre uniquement lorsque son journal intime, publié en *1898*, fut découvert et exploité.

38.  ***Francis Ysidro Edgeworth*** **:** (*8 février 1845 – 13 février 1926*) était un économiste, statisticien et avocat irlandais. Universitaire reconnu, il est titulaire de la chaire d'Economie à *Oxford* de *1891* à *1922*, et assure la vice-présidence de la *Royal Economic Society*. Il fait partie des plus importants représentants de l'École . Néoclassique

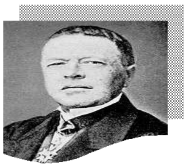
39.  ***Stephen Mack Stigler*** **:** Est le professeur de service distingué par *Burton d'Ernest DeWitt* au département de Statistiques de l'Université de *Chicago*. Ses recherches ont porté sur la théorie statistique des estimateurs robustes et l'histoire de la statistique. Il est également connu pour la loi de Stigler d'éponymie. Son père était l'économiste ***George Josef Stigler***.

Stigler a obtenu son doctorat en *1967* de l'Université de *Californie*, Berkeley. Sa thèse portait sur les fonctions linéaires de statistiques d'ordre. Il a enseigné à Université du *Wisconsin*, *Madison* jusque à *1979* quand il a joint l'université de *Chicago*, et était autrefois et est actuellement le chef du département. En *2006*, il a été élu membre de *l'American Philosophical Society*, et est un ancien président de l'Institut de statistique mathématique.

George Joseph Stigler **:** Est un économiste américain né en *1911* à Seattle (*Washington, États-Unis*) et mort en *1991*. Il a reçu le « *prix Nobel* » d'économie en *1982*. Il est le père de, spécialiste de l'histoire des statistiques. *Stigler* est connu pour avoir développé une théorie économique de la réglementation, également connu sous le terme de : *théorie de la capture ou économie positive de la réglementation.*

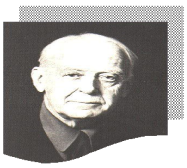


40. ***Johan Gustaf Knut Wicksell*** **:** (*20 décembre 1851 à Stockholm – 3 mai 1926 à Stocksund)* est un économiste suédois. l'un des fondateurs de la macroéconomie moderne, était un économiste suédois, célèbre pour sa théorie monétaire. Ses travaux sur les taux d'intérêt nominaux et réels, la productivité marginale du capital, et les déterminants du niveau des prix sont tout aussi importants. Il a fortement influencé l'école autrichienne, en particulier *Friedrich Hayek* et *Ludwig von Mises.*

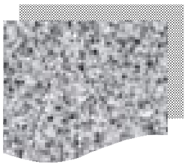


41. ***Antoine Augustin Cournot*** **:** (*Gray, 28 août 1801* **-** *Paris, 30 mars 1877*) est un mathématicien français qui s'est intéressé notamment à la formalisation des théories économiques. Il est ainsi un des premiers à avoir formulé un modèle de l'offre et de la demande. Ses articles scientifiques sont remarqués par le mathématicien *Siméon Denis Poisson*, grâce à l'appui duquel il entame une carrière de haut fonctionnaire et d'universitaire : *Poisson* le fait nommer en *1834* professeur d'analyse et de mécanique à la Faculté des sciences de *Lyon* ; il est recteur de l'académie de *Grenoble* de *1835* à *1838*, puis inspecteur général de l'Instruction publique de *1836* à *1852*. Il préside le jury de l'agrégation de mathématiques en *1836*.

42. ***William Stanley Jevons*** **:** (*Né le 1er septembre 1835 à Liverpool, Grande-Bretagne* - *mort le 13 août 1882*) est un économiste et un logicien britannique, considéré comme co-fondateur de l'école néoclassique et de la « *révolution marginaliste* », avec *Léon Walras* et *Carl Menger*. *Jevons* a travaillé sur la logique en parallèle avec ses recherches en économie. En *1863*, il a publié un petit volume intitulé Pure *Logic* or *the Logic of Quality apart from Quantity*, basé sur la logique de Boole à laquelle il a enlevé ce qu'il considérait comme un faux habillage mathématique.



43. ***Sir John Richard Hicks*** **:** (*8 avril, 1904 - 20 mai, 1989*) économiste britannique et colauréat, avec *Kenneth Arrow* du « *prix Nobel* » d'économie en *1972*, est l'un des économistes les plus importants et influents du *XX*^e^ siècle. Il est le créateur du modèle *IS/LM*, qui est une transcription de la Théorie générale de J*ohn Maynard Keyn*es en termes néoclassiques.

44. 

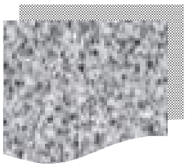
Helen Makower **:** (*1 Juin 1910 à Londres ; 17 mai 1998 Marlborough, Wiltshire*) économiste britannique . elle est titulaire d'un doctorat en économie (*London School of Economics and Political Science) 1937*. Après la Seconde Guerre mondiale, elle a été brièvement avec la Commission de contrôle britannique en Allemagne et plus tard avec l'Organisation des Nations Unies, avant de retourner dans le milieu universitaire et le *London School of Economics*. Makower était à l'avant-garde de la tour statistiques dans l'économie britannique des années *1930*, et est resté une figure influente après la guerre, agissant comme un lien important entre les mathématiques développés à l'économie de la Commission *Cowles* et de l'économie britannique.

45. 

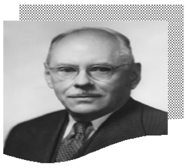
Jacob Marschak **:** *(23 Juillet 1898 au 27 Juillet 1977)* était un économiste américain de *l'Ukraine* d'origine juive. il a enseigné à *New School for Social Research* . Puis, en *1943*, il est allé à l'Université de Chicago , où il a dirigé la Commission Cowles ,puis est devenu émérite à l' Université de *Californie* . Dr *Marschak* parlait couramment environ une douzaine de langues. Peu de temps apres, il a devenu président de l'*American Economic Association* , il est mort d'un accident vasculaire cérébral.

46. 

Irving Fisher **:** Né à *Saugerties (État de New York*) le *27* février *1867* et mort à *New York* le *29* avril *1947*, est un économiste américain connu pour ses travaux sur les taux d'intérêt et la théorie du capital. Dans ce dernier domaine, il reprit et développa les théories de *Böhm-Bawerk* en leur donnant une formulation mathématique. Il mena plusieurs campagnes de santé publique et fut le président de la Société américaine *d'eugénisme.*

47. 

Serge-Christophe Kolm **:** Né en *1932*, diplômé de l'*École nationale des Ponts et Chaussées* universitaire français, directeur d'Études à l'École des hautes études en sciences sociales, est connu pour ses nombreux ouvrages sur l'économie (*théories de la justice sociale, développement économique, théorie de la mesure des inégalités*).Il a notamment forgé l'expression « *économie publique*» et introduit le premier, en *1966*, la notion de *« justice sociale »* dans le champ de la théorie économique. Une partie de ses travaux porte sur l'analyse des fondements philosophiques des modèles économiques (*il est notamment l'auteur d'un ouvrage intitulé Philosophie de l'économie (1985)*).

48. 

Frank Knight **:** (*7 novembre 1885* **-** *15 avril 1972*) est un économiste américain principalement connu pour la distinction entre risque et incertitude qu'il propose en *1921* dans *Risk, Uncertainty and Profit.* Il fut l'un des fondateurs de le la première École de *Chicago. Lui et Jacob Viner* ont été les deux figures marquantes du département économie de cette université de *1920* à la fin des années quarante environ. Il fut un des premiers membres de la Société du *Mont Pelerin.*

49.  ***Arthur Cecil Pigou*** **:** (*Né le 18 novembre 1877 à Ryde – mort le 7 mars 1959 à Cambridge*) est un économiste britannique. Il a particulièrement travaillé sur l'économie du bien-être (« *Welfare Economics* »), et a introduit la notion d'externalité. Élève d'Alfred Marshall, père fondateur de l'école néoclassique, *Arthur Cecil Pigou* a donné son nom aux concepts de taxe *pigouvienne* et d'*effet Pigou*.

50.  ***Sir (Stanley) Paul. Chambers*** **:** (*1904-1981*) était un fonctionnaire britannique et industriel et président de l'ICI. Il est né à Londres et a étudié à la Ville de *London School* avant de monter à étudier l'économie à la *London School of Economics*.

Après ses études, il entra au fisc et, en *1934*, a été nommé conseiller impôt sur le revenu pour le gouvernement de l'*Inde*. Il est retourné au *Royaume-Uni* en *1940* au poste de Directeur de la Statistique et de l'intelligence dans *l'Inland Revenue*. Il a ensuite été nommé secrétaire et d'un commissaire de la Commission. Une de ses tâches principales au cours de la guerre était de mettre au point le nouveau *PAYE* (*Pay As You Earn*) système de taxation employé en usage dans le *Royaume-Uni* aujourd'hui. Après la guerre, il a siégé à la Commission de Contrôle pour l'*Allemagne* pour deux ans et demi.

En *1948*, il a succédé à *Sir William Coates* en tant que directeur financier de *Imperial Chemical Industries* (*ICI maintenant*), l'une des plus grandes entreprises de *Grande-Bretagne*. Il est devenu vice-président en *1952* et président de *1960* à *1968*, le premier non-scientifique à occuper ce poste. Il s'est déplacé à partir de là, le président du *Royal Insurance*.

Il a été président de la *Royal Statistical* Society de *1964* à *1965*. La Médaille de la *société Chambers*, décerné tous les trois ans, est nommée d'après lui.

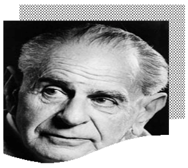
51.  ***L.L Lopes*** **:** Antécédents scolaires : Docteur en Psychologie, Université de *Californie*, *San Diego, 1974*, Maîtrise en psychologie, *California State University Long Beach-1971*, Baccalauréat en psychologie de *l'Université de Redlands, 1962.*

Université de *l'Iowa* professeur émérite de la gestion et des organisations, servira comme intérimaire de vice-président exécutif et prévôt alors une recherche nationale est menée pour ce poste, interface président *Sally Mason* a annoncé aujourd'hui, mardi *11* septembre. Lopes est un administrateur expérimenté et très respecté, ayant servi comme vice-recteur adjoint à l'éducation de premier cycle pendant six ans avant de prendre sa retraite en *2006*.

52.  ***Michèle D. Cohen*** **:** Professeur Emérite Université Paris *1 « Ecole d'Economie de Paris/Paris School of Economics »*.

53. 

John Maynard Keynes **:** (*5 juin 1883 - 21 avril 1946*) est un économiste britannique de notoriété mondiale, reconnu comme le fondateur de la macroéconomie moderne, pour lequel les marchés ne s'équilibrent pas automatiquement, ce qui justifie le recours à des politiques économiques conjoncturelles. Le *keynésianisme*, la nouvelle économie *keynésienne*, le néo-*keynésianisme* ou le *post-keynésianisme* plus interventionniste sont des concepts et des courants de pensée issus de l'œuvre de *Keynes*. Considéré comme l'un des plus influents théoriciens de l'économie du *XX*^{e} siècle1, *Keynes*, en tant que conseiller officiel ou officieux de nombreux hommes politiques, fut l'un des acteurs principaux des accords de *Bretton Woods*. Il a aussi été un auteur à succès avec l'écriture d'un livre sur le traité de Versailles intitulé *Les Conséquences économiques de la paix publié* en *1919* et la rédaction d'articles pour les journaux.

54. 

Karl Raimund Popper **:** (*28 juillet 1902 à Vienne, Autriche - 17 septembre 1994 à Londres (Croydon), Royaume-Uni*) est l'un des plus influents philosophes des sciences du *XX*^{e} siècle. Il critique la théorie *vérificationniste* de la signification et invente la réfutabilité comme critère de démarcation entre science et pseudo-science. Rejetant d'abord la métaphysique comme système irréfutable et invérifiable, il admet par la suite la nécessité de fonder les recherches scientifiques sur des « *programmes de recherche métaphysique* » et inscrit son propre travail dans le cadre de l'épistémologie évolutionniste.

55. 

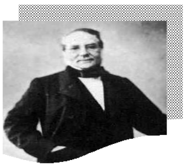
David Ricardo **:** (*Est né le 18 avril 1772 à Londres, Angleterre et meurt le 11 septembre 1823 à Gatcombe Park.*) est un économiste anglais du *XIX*^{e} siècle et a également été agent de change et député. Il est Considéré comme un des fondateurs de l'école classique anglaise d'économie politique, avec *Adam Smith et Thomas Malthus*, il est l'auteur notamment de Essai sur le haut prix des lingots (*1811*), Essai sur l'influence des bas prix du blé sur les profits du capital (*1815*), Principes de l'économie politique et de l'impôt (*1817*).

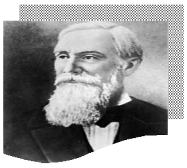
56. 

Milton Friedman **:** Est un économiste américain né le *31* juillet *1912* à New York et mort le *16* novembre *2006* à San Francisco, considéré comme l'un des économistes les plus influents du *XX*^{e} siècle1. Titulaire du prix de la Banque de Suède en sciences économiques en mémoire d'*Alfred Nobel* de l'année *1976*, il a été un ardent défenseur du libéralisme. Il a travaillé sur des domaines de recherche aussi bien théorique qu'appliquée, il fut à l'origine du courant monétariste ainsi que le fondateur de l'École monétariste de *Chicago*. Il est également un commentateur politique et essayiste à succès.

57.  ***Leonard Savage*** **:** (*20 novembre 1917* - *1er novembre 1971*) était un mathématicien et statisticien américain. Il a obtenu son diplôme à l'Université du *Michigan* et a ensuite travaillé à l'Institute *for Advanced Study* à Princeton dans le New Jersey, à l'Université de *Chicago* et au *Statistical Research Group* à l'Université Columbia. De *1946* à *1953* il participe aux célèbres rencontres interdisciplinaires dites conférences *Macy*. Son travail le plus marquant est le livre *The Foundations of Statistics* paru en *1954*. Il propose une théorie subjective et personnelle des probabilités et des statistiques qui forme un des socles de l'inférence bayésienne et a des applications dans la théorie des jeux.

58.  ***William Forsyth Sharpe*** **:** Né à Boston le *16* juin *1934*, est un économiste américain, lauréat du « *Prix Nobel* » d'économie. Il a travaillé sur la théorie financière. Son ratio de *Sharpe* permet de mesurer la rentabilité d'un portefeuille au regard du risque pris.

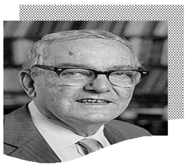
59.  ***Irénée-Jules Bienaymé*** **:** Né à Paris le *28* août *1796* et mort à Paris le *19* octobre *1878*, est un probabiliste et statisticien français. Continuateur de l'œuvre de *Laplace* dont il généralise la méthode des moindres carrés, il contribue à la théorie des probabilités, au développement de la statistique et à leurs applications aux calculs financiers, à la démographie aux statistiques sociales. Il a énoncé en particulier l'inégalité de *Bienaymé-Tchebychev* concernant la loi des grands nombres (*1869*).

60.  ***Pafnouti Lvovitch Tchebychev*** **:** (*16 mai 1821 à Okatovo, près de Borovsk* - *8 décembre 18941 à Saint-Pétersbourg*) est un mathématicien russe. Il est connu pour ses travaux dans le domaine des probabilités et des statistiques. *Tchebychev* appartient à l'école mathématique russe fondée sous Catherine la Grande par *Daniel Bernoulli* et *Euler*. En est aussi issu son contemporain *Lobatchevski*, initiateur de la géométrie non euclidienne. *Tchebychev* reprend le vaste programme initié par *Jacques Bernoulli, Abraham de Moivre* et *Siméon Denis Poisson* pour énoncer et démontrer de façon rigoureuse des théorèmes limites, c'est-à-dire pour établir les tendances asymptotiques des phénomènes naturels.

61.  ***Jan Mossin*** **:** (*1936* - *1987*) était un économiste norvégien. Après quelques années d'activité, il a commencé ses études de doctorat dans le semestre de printemps de *1962* à l'Université *Carnegie Mellon* . L'un des documents dans sa thèse de doctorat a été une contribution très importante (*1966*) pour le *Capital Asset Pricing Model* (*CAPM*). À la *Carnegie Mellon*, il était, entre autres, reçu le Prix *Alexander Henderson* pour *1968* pour cette contribution. *Mossin* a été élu membre de la Société d'économétrie en *1973*.

62. 

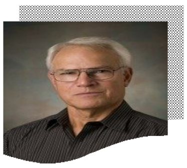
Rudolf J. Freund **:** Ancien directeur associé et co-fondateur du Département des Statistiques de la *Texas A & M University*, est maintenant professeur émérite. *Freund* a reçu un diplôme de maîtrise en économie de l'Université de *Chicago* en *1951* et un doctorat dans les statistiques de *Caroline du Nord State College* (*maintenant North Carolina State University*) en *1955*. Il est le coauteur de plusieurs livres, dont *SAS* ¨ Système de régression, troisième édition; Méthodes de régression et les méthodes statistiques et de l'analyse de régression. *Freund* a été un utilisateur de SAS depuis *1972*, et est un ancien président *SUGI*.

63. 

Herbert Alexander Simon **:** (*Né le 15 juin 1916 à Milwaukee, Wisconsin, mort le 9 février 2001 à Pittsburgh, Pennsylvanie*) était un économiste et sociologue américain ayant reçu le Prix d'économie en l'honneur de *Nobel* en *1978*. Il s'est d'abord intéressé à la psychologie cognitive et la rationalité limitée (*Bounded Rationality*) qui constitue le cœur de sa pensée. Au niveau économique, ses travaux ont interrogé l'efficacité du fordisme et remis en cause les théories néo-classiques. Ses études sur la rationalité limitée l'ont conduit à s'intéresser aux organisations et aux procédures de décisions ainsi qu'à l'intelligence artificielle (*à base d'informatique*) dont il est un des pionniers aux États-Unis. Il a reçu avec *Allen Newell*, en *1975* le prix *Turing*, principale distinction en informatique.

64. 

James Tobin **:** (*5 mars 1918 - 11 mars 2002 (à 84 ans)*) est un économiste américain. Ce keynésien a contribué à la science économique en particulier, dans les domaines de l'investissement, des marchés financiers et des politique budgétaire et monétaire. Il est en particulier célèbre pour avoir donné son nom à la taxe dont il a proposé la création. Le Prix de la Banque de Suède d'Économie en Mémoire *d'Alfred Nobel* (dit Prix Nobel d'économie) lui fut attribué en *1981*. Il est également à l'origine du modèle *Tobit* utilisé en économétrie et de la notion du ratio « *Q de Tobin* ». En *1956*, il a participé au développement du modèle *Baumol-Tobin* qui décrit la demande de monnaie d'un ménage.

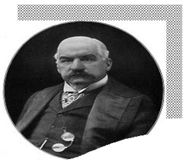
65. 

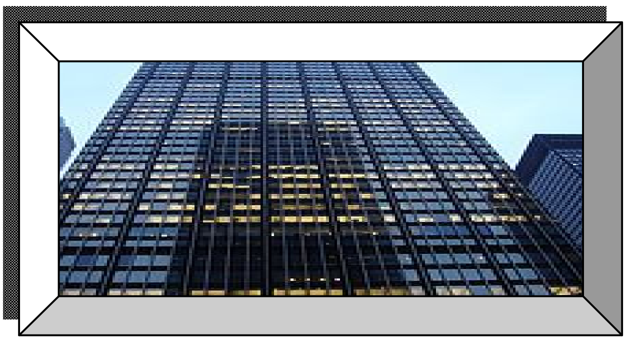
John Virgil Lintner **:** (*Février 9, 1916 - Juin 8, 1983*) économiste américain, il a été professeur à la *Harvard Business School* dans les années *1960* et l'un des co-créateurs (*1965a, b*) de la Capital *Asset Pricing Model* .

66. 

Jean-Marc Boussard **:** Né en *1937*, Economiste français, c'est un Ingénieur agronome, docteur en économie, s'est toujours intéressé à la modélisation des systèmes économiques. Actuellement retraité chez « *French National Institute of Agricultural Research* ».

67.  ***Peter Brian Reginald Hazell*** **:** Avant d'être directeur de la division des stratégies et de la gouvernance du développement au sein de *l'IFPRI* en ***2003***, *Peter B. R. Hazell* a été directeur de la division des technologies de production et de l'environnement, toujours au sein de *l'IFPRI*. Auparavant, il a été économiste en chef auprès du département d'agriculture et de développement rural de la Banque mondiale et directeur du Programme de liaisons pour la croissance agricole auprès de *l'IFPRI*. De nationalité britannique, *Hazell* a étudié l'agriculture au Royaume-Uni et il a ensuite obtenu un doctorat en agro-économie à l'université *Cornell*. Il est spécialiste des politiques agricoles en faveur des pauvres et de l'amélioration durable de la production agricole dans les pays en développement. Il a publié de nombreux articles, notamment sur les méthodes de planification du secteur agricole, sur la gestion des risques en agriculture, sur les liaisons de croissance agricole, sur les systèmes de droit de propriété en Afrique, sur les effets de la révolution verte, ainsi que sur les liens entre la recherche agricole et la réduction de la pauvreté.

68.  ***John Pierpont Morgan*** **:** dit ***J. P. Morgan***, (*17 avril 1837* **-** *31 mars 1913*) est un financier et un banquier américain. Tout d'abord concentré sur les banques, l'empire de ***Morgan*** s'est progressivement étendu à de nombreux autres domaines comme l'électricité, l'acier, le chemin de fer et la navigation. Dans ce dernier domaine, il est le fondateur de l'*International Mercantile Marine Company*, compagnie maritime regroupant nombre de compagnies américaines mais également britanniques (*notamment la White Star Line*). À ce titre, ***Morgan*** est de fait le propriétaire du *Titanic* qui sombre un an avant sa mort. Gérant un capital colossal, il a souvent été décrit comme un magnat des finances à l'influence redoutable. Il se montre également un grand collectionneur d'œuvres d'art, de livres et de montres. Ses collections sont notamment visibles au *Metropolitan Museum of Art* et à la *Pierpont Morgan Library* de New York. Son nom est à l'origine de celui de la ***banque JPMorgan Chase*** issue de la fusion de la ***J.P. Morgan & Co***. et de la ***Chase Manhattan Bank***.



JPMorgan Chase & Co., d'abord connue sous le nom de ***House of Morgan***, fut créée en ***1871*** à *New York* par ***John Pierpont Morgan*** et ***Anthony J. Drexel***. Elle succède à la banque ***J.S. Morgan & Co***., fondée par ***Junius Spencer Morgan***, père de ***John Pierpont***.cotée sur le *NYSE* (*ticker : JPM*) est une holding financière, née de la fusion entre la ***Chase Manhattan Bank*** et ***J.P. Morgan & Co***. en janvier ***2001***. Le siège social du groupe est à *New York*, les sièges sociaux des activités de banque de détail et de banque commerciale sont situés à *Chicago*. Elle figure parmi les plus grandes banques des

États-Unis et même du monde, avec un total de bilan de ***2031** milliards de dollars* en actifs, une valeur de marché de ***166** milliards de dollars*, et des opérations dans plus de ***60*** pays. La firme est un leader dans la banque d'investissement, les services financiers pour les particuliers et les entreprises, les transactions financières, le marché des CDS et des produits dérivés, la gestion d'actifs, la banque privée et le capital-investissement. Elle possède le deuxième plus gros *hedge funds* des États-Unis et du Monde. ***JPMorgan Chase*** compte plus de ***90*** millions de clients. Elle a d'importants bureaux aux États-Unis, au Royaume-Uni (*Bournemouth*, *Londres et Glasgow*) et à Tōkyō. Elle regroupe de nombreuses institutions financières renommées telles que ***JP Morgan***, ***Chase Manhattan***, ***Chemical***, ***Manufacturers Hanover***, ***Bank One***, ***First Chicago***, ***National Bank of Detroit***. Elle était, d'après le *Forbes Global **2000*** de ***2011***, la première entreprise mondiale.

69.  ***Philippe Artzner*** **:** Professeur Université de Strasbourg, Publications ***:*** "*Coherent multiperiod risk adjusted values and the Bellman's principle*"

Bibliographie :

[1] Alazard, Claude et Sépari, Sabine. *"Contrôle De Gestion Manuel Et Applications"*, 2ème édition, DUNOD.

[2] Alexander, Carol. *"Value-at-Risk Models"* ,Market Risk Analysis Volume IV, John Wiley and Sons LTD, 2010.

[3] Bargès, Mathieu. *"Modèles De Dépendance Dans La Théorie Du Risque"*, Thèse de Doctorat, Université Laval, Québec, 2010.

[4] Barthélemy, Bernard et Courrèges, Philippe. *"Gestion Des Risques : Méthode d'Optimisation Globale"*, 2ème Edition, Éditions d'Organisation, 2004.

[5] Bayes, T. *" Essai En Vue De Résoudre Un Problème De La Doctrine Des Chances "*, Philosophical Transaction, 1764.

[6] Bernard , Philippe. *" Le Modèle d'Equilibre des Actifs Financiers (MEDAF) "*, Université Paris-Dauphine, Novembre 2007.

[7] Bernouli ,Daniel. *" Specimen Théorie Novae De Mensura Sortis"*, Die Werke Von Daniel Bernouli, t.II, Basel, Birkauser Verlag, 1731, (trad. Angl. *" Exposition Of A New Theory On The Measurement Of Risk"*, Econometrica, v.22 , 1954 ; trad .fr.*" Esquisse D'une Théorie De Mesure Du Sort"*, Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques, v.VI, pp. 61-77.).

[8] Bernstein, P.L. *" Against The Gods : The Remarkable Story Of Risk "*, New York, 1996.

[9] Bernstein, P.L. *" Capital Ideas: The Improbable Origins Of Modern Wall Street "*, Free Press, New York, 1992.

[10] Bohlmann, G . Poterin Du Motel H, *" Technique De l'Assurance Sur la Vie"*, Encyclopédie Des Sciences Mathématiques, t.I, Vol.IV, 1911.

[11] Borch , K.H . *" A Note On Uncertainty And Indifference Curves"*, Review Of Economic Studies, v.36, n.1 ,1969 , pp. 1-4.

[12] Bru, B. *" Estimations Laplaciennes"*, Journal de la Société de Statistique de Paris, t. CXXIX, n.1-2, pp. 6-45, 1988.

[13] Cadre, Benoit.*"Processus De Renouvellement"*, ENS de Cachan, Bretagne, 2012.

[14] Charpentier, Arthur. *" Mesures De Risque "*, Université Rennes 1, France ,2010.

[15] Cochrn ,W.G. *" Sampling Techniques"*, 3rd Edition, Wiley, New York, 1977.

[16] Cochrn ,W.G. *" Laplace's Ratio Estimator"*, Wiley, New York, pp. 3-10 ,1978.

[17] Cohen,M. *" Security, Potential, Expected Utility : A Three-Criteria Decision Model Under Risk"*, Theory and Decision, v.33, pp.101-34, 1992.

[18] Cramer, H. *" On The Mathematical Theory Of Risk"*, Försäkringaktiebolaget Skandias Festskrift, pp.7-84,1930.

[19] Crépel, Pière. *" Condorcet, la Théorie des probabilités et les Calculs Financiers"*, dans R. Rashed, 1988 ,pp. 267-325.

[20] Crépel, Pière. *" Les Entreprises Ou Les Hommes S'Exposent à une Perte, Dans La Vue D'un Profit. Condorcet et l'Héritage De D'Alembert"*, Revue Economique, v.XLIX, n.5, 1998 , pp. 1365-1405.

[21] Crépel, P. *" Condorcet, La Théorie Des Probabilités Et Les Calculs Financiers "*, Dans R.Rashed, pp.267-325, 1988.

[22] Daston , Lorraine. *" Classical Probability In The Enlightenment "*, Princeton University Press, Princeton, 1988.

[23] Daston , Lorraine. *" The Domestication Of Risk. Mathematical Probability And Insurance 1760-1830"*, Dans The Probabilistic Revolution (L.Krüger, L.Daston , M.Heidelberger eds),MIT Press, Cambridge, 1989.

[24] Denuit, M. and Charpentier, A. *"Mathématiques De l'Assurance Non-Vie : Principes Fondamentaux de Théorie Du Risque"*, Tome 1, Economica , 2004.

[25] Edgeworth, F. Y. *" The Mathematical Theory Of Banking"*, Journal Of The Royal Statistical Society, pp.113-27,1888.

[26] Freund , R.J. *" The Introduction Of Risk Into a Programming Model "*, Econometrica , v. XXI, pp.253-63, 1956.

[27] Gravereau, J et Trauman, J. *"Crises Financières"*, Economica, 2001.

[28] Hennani, R. et Terraza, M. *"Value-at-Risk Stressée Chaotique D'un Portefeuille* bancaire *"*, Université Montpellier 1, France, 2012.

[29] Holton, Glyn A. *"Value-at-Risk: Theory And Practice"*, Elsevier, Academic Press, 2003.

[30] Holton, Glyn A. *" History of Value-at-Risk : 1922-1998"*, VaRHistory.pdf sur www.stat.Wharton.upen.edu, 2002.

[31] Hurlin, Christophe. *" Value-at-Risk et Backtesting"*, Université d'Orléans, Laboratoire D'Economie d'Orléans (UMR CNRS 6221), France, 2008.

[32] Hurlin, Christophe. *"Value-at-Risk : Intoduction à la Value-at-Risk "*, Université d'Orléans, Laboratoire D'Economie d'Orléans (UMR CNRS 6221), France, 2008.

[33] Jallais, S .Pradier P.C, *" L'Erreur De Daniel Bernouli Ou Pascal Incompris"*, Economie Et Sociétés, Série P.E,v.25, n.1,pp.17-48, 1997.

[34] Jorion, P. *"The Value at Risk Fieldbook : The Complete Guide to Implementing VaR "* , McGraw-Hill Companies, 2000.

[35] Kamdem, Jules Sadefo. *"Méthodes Analytiques Pour Le Risque Des Portefeuilles Financiers"*, Thèse de Doctorat, Université de Reims Champagne-Ardenne, France, 2004.

[36] Kramp,C. *" Analyse Des Réfractions Astronomiques et Terrestres "*, Dannbach, Strasbourg, 1799.

[37] Lacroix , S.F . *" Traité Elémentaire Du Calcul Des Probabilités"*, Paris, Bachelier, 1821.

[38] Laplace, P.S. *" Théorie Analytique Des Probabilités "*, (rééd .Œuvres Complètes de Laplace,v.VII), 1812.

[39] Laplace, P.S. *" Mémoire Sur Les Approximations Des Formules Qui Sont Des Fonctions De Très Grands Nombres "*, rééd. Œuvres Complètes de Laplace, v.VII, 1785.

[40] Laplace, P.S. *" Mémoire Sur Les Probabilités "*, rééd. Œuvres Complètes de Laplace, v.IX,pp.383-485, 1781.

[41] Laplace, P.S. *" Sur Les Naissances, Les Mariages et les Morts à Paris Depuis 1771 jusqu'au 1784, et Dans Toute l'Etendue de la France Pendant les Années 1781 et 1782"*, rééd. Œuvres Complètes de Laplace, v.IX, pp.35-46, 1786a.

[42] Laplace, P.S. *" Mémoire Sur Les Approximations Des Formules Qui Sont Des Fonctions De Très Grands Nombres et Sur Leur Application Aux Probabilités"*, rééd. Œuvres Complètes de Laplace, v.XII, pp.301-53, 1786b.

[43] Laplace, P.S . *" Théorie Analytique des Probabilités"*, Rééd. Œuvres Complètes de Laplace,V.VII, 1812.

[44] Lopes,L.L. *" Between Hope and Fear : The Psychology Of Risk"*, Advances In Experimental Social Psychology, v.XX, pp.255-95, 1986.

[45] Lopes,L.L. *" SP/A Theory : The Role Of Security, Potential and Aspiration In Risk Choice"*, Journal Of Mathematical Psychology, v.43,n.2, pp.286-313, 1987.

[46] Markowitz, H.M. *" The Optimization Of A Quadratic Function Subjet To Linear Constraints "*, Naval Research Logistics Quarterly , v. III, pp.111-33, 1956.

[47] Mathlouthi, Imen et Zenaidi, Amel. *"Theorie Des Valeurs Extrêmes, vs ,Méthodes Classiques De Calcul De la VaR : Application au Tunindex "* ECOFI, Institut des Hautes Etudes Commerciales, Carthage, Tunisie.

[48] Moivre, A. *" Miscellanea Analytica De Seriebus Et Quadraturis"*, Tonson And Watts, London, 1730.

[49] Neyman, J et Pearson, E.S. *" On The Use And Interpretation Of Certain Test Criteria For Purposes Of Statistical Inference"*, Biometrika, pp.174-240,pp. 263-94,1928.

[50] Neyman, J et Pearson, E.S. *" On The Problem Of The Most Efficient Tests Of Statistical Hypothèses"*, Philosophical Transactions, ser.A,v. XXIV, pp.289-337,1933a

[51] Neyman, J et Pearson, E.S. *" The Testing Of Statistical Hypotheses In Relation To Probabilities A Priori"*, Proceedings Of The Cambridge Philosophical Society, v. XXIX, pp.492-510,1933b

[52] Olivier François. *"Notes De Cours De Processus Aléatoires"*, Ensimag, Grenoble, 2004.

[53] Racicot, François-Eric et Théoret, Raymond. *" Finance Computationnelle Et Gestion Des Risques : Ingénierie Financière Avec applications Excel (Visual Basic) et Matlab"*, Presses de l'Université du Québec, 2006.

[54] Riboulet, Gaël et Roncalli, Thierry.*"Value at Risk : Mesure de Capital Economique"*,Groupe de Recherche Opérationnelle Crédit Lyonnais, 1999.

[55] Rieucau, Jean-Nicolas . *" Les Entreprises Ou Les Hommes S'Exposent à une Perte, Dans La Vue D'un Profit. Condorcet et l'Héritage De D'Alembert"*, Revue Economique, v.XLIX, n.5, 1998 , pp. 1365-1405.

[56] Rohrbasser, J.M . *" Un Pasteur Actuaire ? Ordre De La Mortalité, Durée De La Vie Et Rentes Viagères Dans L'ordre Divin De J.P.Süssmilch"*, Revue De Synthèse, n.4,pp.385-417, 1997.

[57] Ross, Sheldon M. *"Stochastic Processes"*, John Wiley and Sons, New York, NY, 1983.

[58] Ross, Sheldon M. *"Stochastic Processes"*, John Wiley and Sons, New York, NY, 2nd Edition, 1996.

[59] Roy, A.D. *" Review Of Portfolio Selection "*, American Economic Review,v.LI,pp.99-100, 1961.

[60] Roy, A.D. *" Safety First And The Holding Of Assets "*, Econometrica, v. XX, pp.431-49, 1952.

[61] Rubino, G. *"Processus Stochastiques "*, INRIA / IRISA, Rennes, France, 2006.

[62] Simon , H.A. *" Dynamic Programming Under Uncertainty With A Quadratic Criterion Function "*, Econometrica , v. 33, pp.493-513, 1956.

[63] Soulier, Philippe. *"Bases Mathématiques De l'Assurance"*, Université Paris Ouest, 2012.

[64] Sydor, T. *"La Value at Risk"*, Crédit Agricole Asset Management. Euro-Institut d'Actuariat, 2006.

[65] Thérond, Pierre-Emmanuel. *"Mesure et gestion des risques d'assurance : analyse critique des futurs référentiels prudentiel et d'information financière"*, Thèse de Doctorat, Université Claude Bernard – Lyon 1, France, 2006.

[66] Tosetti Alain , Béhar Thomas , Fromenteau Michel et Ménart Stéphane. *"Assurance : Comptabilité, Réglementation, Actuariat "*, 2ème Edition, Economica , 2002.

[67] Walter, Christian. *" Nouvelles Normes Financières S'Organiser Face à La Crise"*, Springer-Verlag ,France, 2010.

<u>Pour accéder aux macros (VBA-Excel)</u>

- *Activer les Macros.*
- *Sur la barre d'outils appuyiez sur affichage « Macros ».*
- *Choisissez modifier.*
- *Pour le Code appuyiez sur F7.*
- *Pour Exécution appuyiez sur F5.*