République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par : **LELLOUCHE Samah**

Intitulé

Sur les équations de conservation

Dirigé par : Merad Meriem

Devant le jury

PRESIDENT	**PR. BOUAFIA Mosaab**	**Prof**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr. MERAD Meriem**	**MCA**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr. MENACUER Omer**	**MCA**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr. REZGUI Nassima**	**MCB**	**Univ-Guelma**

Année Universitaire 2024/2025

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier profondément le dieu qui a donné le courage, la puissance et la volonté pour finir mon cursus universitaire et réaliser ce modeste travail.

*Avec mes chaleureux sentiments, je tiens à gratifier ma directrice de recherche **Docteur Merad Meriem** pour son soutien, ses orientations, ses conseils et la confiance qu'elle a donné.*

Aux membres du jury

***Pr. BOUAFIA Mosaab.** Mes sincères remerciements Pour avoir acceptéde présider le jury, vous nous offrez le grand honneur et le grand plaisir.*

***Aux Examinateurs de jury. Docteur REZGUI Nassima**, et **Docteur MENACUER Omer,** Vous nous avez fait un grand honneur en acceptant de siéger parmi les membres de jury de cette mémoire.*

Je tiens à remercier également tous les enseignants qui m'ont guidé tout au long de mon parcours éducatif.

Merci également à toutes mes amie, mes collègues et tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin

Dédicace

Je tiens à remercier et louer avant tout le bon dieu pour la santé, le moral, la volonté et la patience qu'il m'a inspirée afin d'accomplir ce modeste travail que je dédie avec plein d'amour et de respect.

À la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur, celle qui toujours sacrifié pour moi, maman que j'adore.

À l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien dans toutes les circonstances, celui qui toujours à côté de moi, mon père que dieu le bénisse et garde pour nous.

À ma grand-mère et a mon grande père leur éducation, leur amour immortel, leur soutien moral me rend une personne forte, je vous dirai merci de tout mon cœur pour chaque instant d'être toujours avec moi.

À ma chère tante pour ses efforts et son aide à moi.
À mes cousins pour leur encouragement et leur soutien, essentiellement mon cousin « Mourad »
À ma chère « Rayen » que dieu le bénisse.
Sans oublier toutes mes autre amies, collègue d'étude qui m'encourageait.

À tous membre de ma famille, petit et grand.
À tous ceux qui m'aime, à tous ce que j'aime.

A vous les lecteurs de ces lignes.

ملخص

نعتبر معادلة حفظ الماء السائل التي تصف عملية تلاقي قطرات الماء التي تسقط بسرعة تحددها قوة الجاذبية، والاحتكاك بين القطرات والهواء وكذلك سرعة هذا الأخير.
هذه المعادلة هي معادلة تلاقي قطرات الماء المتنقلة في الهواء مع زيادة حجمها نتيجة تكثف بخار الماء في الغلاف الجوي، مرفقة برياح عمودية متزايدة .

النتيجة الرئيسية هي وجود حل ثابت للمعادلة في مجال أحادي البعد، وفق بعض الشروط المناسبة.

الكلمات المفتاحية: معادلة الحفظ، تلاقي قطرات الماء ، طريقة المسارات.

Abstract

We consider the conservation equation of water drops describing the coagulation process of water drops falling in the air with a speed determined by the gravitational force, the friction between these droplets and the air as well as the speed of the air. It represents the transport equation of water droplets as well as growth of droplets by condensation in the atmosphere in the presence of a vertical ascending wind.

The principal result is the existence of a stationary solution of the equation in a one-dimensional domain, and under some suitable hypotheses.

Keywords: conservation equation, coagulation of droplets, characteristics method.

Résumé

On considère l’équation de conservation de l’eau liquide décrivant le processus de coagulation des gouttelettes qui tombent avec une vitesse déterminer par la force gravitationnelle, la friction entre les gouttelettes et l’air ainsi que la vitesse de ce dernier.
Il s’agit d’une équation de transport des gouttelettes qui se déplaçant en présence d’un vent croissant vertical, et subissent le processus de coagulation et celui d’accroissement de point dû à la condensation de la vapeur.
Le résultat principal est l’existence d’une solution stationnaire de l’équation dans un domaine monodimensionnel tout en considérant quelques hypothèses appropriées.

Mots clés : Equation de conservation, coagulation de gouttelettes, méthode de caractéristiques.

Table des matières

Introduction

On appelle loi de conservation la traduction mathématiques de loi de la physique, c'est un sujet classique, dont la motivation vient essentiellement de la physique et de la mécanique où naturellement il y a des quantités conservées. Une loi de conservation exprime qu'une propriété mesurable particulière d'un système physique reste constante au cours de l'évolution de ce système.

Dans le premier chapitre on va rappeler la forme générale des équations de conservation, et on présente quelques modèles des équations de conservations dans le cas linéaire et non linéaire, en particulier les équations de conservation de l'air sec, de la vapeur d'eau, et de l'eau liquide.

Dans le deuxième chapitre on va étudier l'équation pour la distribution des gouttelettes qui se déplaçant par un vent vertical et par la force gravitationnelle et subissent le processus de coagulation et celui d'accroissement de poids dû à la condensation de la vapeur sur leur surface. Du point de vue mathématique notre équation est une équation de transport avec les opérateurs intégraux pour une fonction inconnue σ, qui représente la densité de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m. Le résultat principal est l'existence d'une solution stationnaire de l'équation sous certaines hypothèses appropriées. Du point de vue technique, la démonstration s'appuie sur la transformation de l'équation en une équation différentielle ordinaire en utilisant la technique des caractéristiques, il est crucial d'obtenir dans toutes les étapes une estimation convenable de $\sigma(m; z)$, en particulier, dans le voisinage des points $(m; z)$ où la vitesse $u(m; z)$ des gouttelettes de masse m s'annule, et pour les obtenir, nous avons besoin d'une élaboration considérable des estimations, ce qui constitue le point technique principal.

Le contenu du chapitre deux est correspond au travail [10].

Chapitre 1

Loi de conservation

Une variation d'une quantité u (masse, quantité de mouvement, énergie, ...) provient d'une part de perturbation interne de cette quantité et d'autre part des échanges avec l'éxtérieur à travers la frontière.
Dans l'absence de mécanisme de dissipation, la conservation d'une telle quantité u se traduit par l'identité

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla.(f(u)) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \text{ et } t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.0.1}$$

avec $u(t,x)$ désigne la densité de la quantité conservée autour du point x à l'instant t, tandis que f est le flux, cette équation appelée loi de conservation scalaire non-linéaire (si, bien sûr $f(u)$ est non-linéaire). Les équations de ce type décrivent souvent phénomène de transport.

Une loi de conservation scalaire dans une dimension d'espace est une équation différentielle partielle du premier ordre de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ et } t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.0.2}$$

Intégrer (1.0.2) sur un intervalle donné $[a;b]$ on obtient

$$\int_a^b u_t(t,x)dx = -\int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(u)dx$$

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(t,x)dx = f(u(t,a)) - f(u(t,b)).$$

La quantité totale de u contenue à l'intérieur d'un intervalle donné $[a;b]$ ne peut changer que du fait du flux de u à travers les points limites.
Commençons par donner quelques exemples d'équations de conservation intervenant dans des applications classiques issues de la physique, de la mécanique, et de la biologie.... Elles ont en commun leur nature hyperbolique.

1.1 Equation de conservation de la masse

Dans un milieu continu (gaz, liquide), s'il n'y a aucune réaction chimique, aucun phénomène de changement de phase, alors la masse d'un volume matériel est conservée au cours du temps t.
ϱ : la masse volumique, alors la masse totale sur un domaine D est :

$$M = \int_D \varrho d\nu$$

donc

$$\frac{d}{dt}\int_D \varrho d\nu = -\int_{\partial D} \varrho v.\overrightarrow{n}\,ds$$

(la variation dans le volume D est égale à ce qui sort ou ce qui rentre dans D). En utilisant la formule d'Ostrogradsky, on trouve

$$\int_D \partial_t \varrho d\nu = -\int_D \nabla.(\varrho v) d\nu$$

$$\int_D \partial_t \varrho + \nabla.(\varrho v) d\nu = 0$$

cette égalité est vérifier pour tout domaine D, alors on a

$$\partial_t \varrho + \nabla.(\varrho v) = 0.$$

C'est l'équation de conservation de la masse.

1.2 Equation de transport linéaire

L'exemple le plus connues des équations de conservation linéaire est l'équation de transport. Considérons un polluant de densité $u(x,t) > 0$, advecté par un courant de vitesse donnée $v(x,t)$. Cette densité vérifié alors l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla.(v(x,t)u) = 0,$$

On dit aussi qu'il s'agit d'une équation de transport sous forme "conservative". Une variante de l'équation de transport dite :

Equation de transport a vitesse constante

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial u} = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \text{ et } t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{1.2.3}$$

La solution de cette équation peut se trouver par une formule explicite, qui dans le cas où $v(x,t) = c$ est constante s'énonce simplement :

$$u(x,t) = u_0(x - ct)$$

Par conséquent, les solutions classiques de l'équation sont constantes le long de la famille de droites parallèles au vecteur $(c,1)^t$ du plan (x,t). Ce qui prouve l'existence et l'unicité de la solution du problème (1.2.3).
La formule $u(x,t) = u_0(x - ct)$ représente une fonction qui se propage (ou se transporte) sans déformation à la vitesse constante c.

Equation de transport avec second membre : Considérons le problème avec second membre, $f \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t), \\ u(x,0) = u_0(x) & u_0 \in C^1(\mathbb{R}) \end{cases} \tag{1.2.4}$$

Le long d'une caractéristique φ_ξ, la solution du problème (1.2.4) vérifie

$$\frac{d}{dt}u(x(t),t) = f(x(t),t) \Longrightarrow u(x(t),t) = u_0(\xi) + \int_0^t f(x(s),s)ds$$

an a donc nécessairement avec $\xi = x - ct$

$$u(x(t),t) = u_0(x - ct) + \int_0^t f(x - c(t-s),s)ds$$

c'est la formule de Duhamel.

Equation de transport à vitesse variable : Considérons l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} = b(x,t)u(x,t), & \forall x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.2.5}$$

Dans l'hypothèse que u_0 et c sont C^1, et b continue, on peut définir les caractéristiques :

$$\begin{cases} X'(t) = c(X(t),t), \\ X(0) = \xi \end{cases} \tag{1.2.6}$$

D'après le théorème de Cauchy lipschitz, le problème (1.2.6) admet localement une unique solution $X(\xi,t)$ définie dans un petit voisinage du point 0 qu'on note par U_0.
Remarque. Si $c(x,t)$ est bornée on peut prolonger la solution du problème (1.2.6) sur $\mathbb{R}^+$.

L'équation (1.2.5) sur les caractéristiques :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dX}{dt}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + c(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} = b(x,t)u(x,t)$$

d'où

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = b(X(\xi,t),t)u \\ u(\xi,0) = u_0(\xi) \end{cases}$$

on posant $u(X(\xi,t),t) = u(\xi,t)$, et $B(\xi,t) = b(X(\xi,t),t)$, ce qui donne comme solution

$$u(\xi,t) = u_0(\xi)e^{\int_0^t B(\xi,s)ds}$$

On voit que la solution $u(x,t)$ n'est pas constante le long des trajectoires il y a un terme en plus. Retournant aux variables (x,t), on obtient que (1.2.5) possède une unique solution C^1 dans l'ensemble $V \subset \mathbb{R} \times U_0$ pouvant être atteint par les caractéristiques.

1.2.1 Equation de conservation de Burgers

Dans un milieu unidimensionnel constitué des particules soumises à aucune force et se déplaçant chacune par inertie sur une droite. On désigne par $u(x,t)$ la vitesse d'une particule se trouvant à l'abscisse x à l'instant t. D'après la loi de Newton, l'accélération de la particule est nulle.
Si $x = \varphi(t)$ représente la position de la particule, alors

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = u(x,t)$$

et donc
$$\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t) = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dt}u(x,t) = \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$
$$u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$
que l'on peut écrire également
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{u^2}{2}) = 0$$
Cette équation est appelée équation de Burgers non linéaire (sans viscosité), il s'agit en fait d'un cas particulier de l'expression générale d'une loi de conservation ($f(u) = \frac{u^2}{2}$).

L'équation de Burgres sous forme non-conservative s'écrit :
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u.\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$
Exemple : (méthodes des caractéristiques pour l'équation de Bürgers) : on veut résoudre le problème de Cauchy pour l'équation de Bürgers avec la condition initiale :
$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 1 - x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$$
par la méthode des caractéristiques. La droite caractéristique issue de ξ a pour équation :
$$X(t,\xi) = \begin{cases} \xi + t, & \xi \leq 0 \\ \xi + (1-\xi)t, & 0 \leq \xi \leq 1 \\ \xi, & \xi \geq 1 \end{cases}$$
pour $t < 1$, les caractéristiques ne se croisent pas, soit $(x;t)$ donné avec $t < 1$, on détermine le point correspondant ξ
$$\xi = \begin{cases} x - t, & x \leq t \\ \frac{x-t}{1-t}, & t \leq x \leq 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$$

Enfin, $u(x;t) = u_0(\xi)$, et pour tout $(x;t)$ dans $\mathbb{R} \times [0;1)$, on obtient

$$u(t,x) = \begin{cases} 1, & x \leq t \\ \frac{1-x}{1-t}, & t \leq x \leq 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$$

1.3 Les équations de conservation de l'air sec, la vapeur d'eau, et de l'eau liquide

Comme l'atmosphère est un gaz, son mouvement doit être décrit par les équations aux dérivées partielles de la dynamique des gaz. Or, en réalité, la composante H_2O a des comportements particuliers : la vapeur d'eau peut se transformer en liquide ou en solide et vice versa, ses transitions de phase contribuée au changement de la concentration de H_2O en état gazeux ou liquide.

Les quantités physiques qu'on va considérer sont la densité de l'air sec ϱ, la densité de la vapeur d'eau π, la densité de l'eau liquide $\sigma(m)$ contenue dans les gouttelettes de masse m,vitesse $v = (v_1, v_2, v_3)$ de l'air, la vitesse $u(m) = (u_1(m), u_2(m), u_3(m))$ des gouttelettes de masse m. Pour la vitesse $u(m, x, t)$ des gouttelettes de masse m, on adopte l'approximation

$$u(m, x, t) = v(x, t) - \frac{1}{\alpha(m)} \nabla \Phi, \tag{1.3.7}$$

où $\alpha(m)$ est le coefficient de friction d'une gouttelette de masse m avec l'air, tandis que Φ est le potentiel (pour les détails, voir [5], [15]). Il est bon de rappeler que le coefficient de friction $\alpha(m)$ est une fonction décroissante de la masse m et que la relation (1.3.7) correspond, dans une bonne approximation, à la vitesse réelle des gouttelettes (voir [14], [15], [16]).

La loi de la conservation de la masse pour l'air sec (dont la densité est notée ϱ) est exprimée par l'équation de continuité classique (absence de transition de phase)

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho v) = 0. \tag{1.3.8}$$

Pour la vapeur d'eau (dont la densité est notée π), compte tenu de la quantité de H_2O qui résulte de la transition de phase, le principe de la conservation de la masse est exprimé par l'équation

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \nabla \cdot (\pi(t,x)v(t,x)) = -H_{gl}(T,\pi,\sigma). \tag{1.3.9}$$

où H_{gl} la quantité totale de H_2O qui se transforme de gaz en liquide et vice versa.

En ce qui concerne la densité σ de l'eau liquide, rappelons que, si nous suivons dans son déplacement et dans son processus de condensation ou d'évaporation une gouttelette qui a la masse m_0 à l'instant $t = t_0$ la fonction masse $m = m(m_0;t)$ à l'instant t, jusqu'à l'éventuelle rencontre avec une autre gouttelette, doit satisfaire l'équation (voir[15])

$$\frac{d}{dt} m(m_0;t) = m(m_0;t) h_{gl}(T,\pi;m). \tag{1.3.10}$$

avec h_{gl} la quantité de condensation sur les gouttelettes de masse m par unité de temps et par unité de masse de gouttelettes. Naturellement la quantité de H_2O condensée (ou évaporée) sur une gouttelette de masse m sera $mh_{gl}(T,\pi,\sigma)$.
En considérant la masse de gouttelettes m comme une variable "spatiale" et (m,x) comme un point de l'espace $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$ (voir [15]), la relation (1.3.10) nous permet de traiter l'ensemble des gouttelettes comme ensemble de points matériels qui se déplaçant dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$ avec la vitesse

$$\tilde{U}_4(u,T,\pi;m) = (mh_{gl}(T,\pi;m); u_1(m), u_2(m), u_3(m))^T. \tag{1.3.11}$$

Comme $\sigma(m,x,t)$ est une densité non seulement par rapport à dx, mais aussi par rapport à dm, de manière analogue au cas de ϱ et de π, la loi de conservation de la masse de l'eau $\sigma(m,x,t)$ peut être exprimée par

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla_{(m,x)} \cdot (\sigma \tilde{U}_4) = \text{variation de masse.}$$

Quant à la variation de masse des gouttelettes de masse m, elle consiste en deux parties : celle qui résulte de la condensation ou évaporation, et celle qui résulte du processus de coagulation de gouttelettes. La première est donnée par $h_{gl}\sigma$. D'autre part la variation de σ due au processus de coagulation est donné par

$$K[m,z;\sigma,\sigma] + \sigma(m,z)L[m,z;\sigma]$$

où

$$K[m,z;\sigma,\sigma]=\frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m-m',z)\sigma(m',z)dm',$$

$$L[m,z;\sigma]=-m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m',z)dm',$$

$\beta(m,m')$ est la probabilité de rencontre de deux gouttelettes de masse m et m' , et $(m-m',m')$ la probabilité de rencontre de deux gouttelettes de masse $m-m'$ et m'. On en déduit que

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\nabla\cdot(\sigma u)+\frac{\partial(mh_{gl}\sigma)}{\partial m}=h_{gl}\sigma+ \tag{1.3.12}$$

$$+\frac{m}{2}\int_0^m \beta_l(m-m',m')\sigma(m')\sigma(m-m')dm'-m\int_0^\infty \beta(m',m)\sigma(m')\sigma(m)dm'.$$

Chapitre 2

Equation de conservation des gouttelettes avec une vitesse vertical du vent

Dans ce chapitre on va étudier l'équation pour la distribution des gouttelettes qui se déplaçant par un vent vertical et par la force gravitationnelle et subissent le processus de coagulation et celui d'accroissement de poids dû à la condensation de la vapeur sur leur surface. Plus précisément, on considère l'équation intégro-différentielle (1.3.12) pour une fonction inconnue $\sigma = \sigma(m, z)$ se trouve à la hauteur z ($0 \leq z \leq 1$). Comme notre intérêt principal concerne le comportement de la densité σ en présence d'un vent vertical ascendant (ou de la composante verticale positive d'un vent), nous concentrons notre attention sur la variation de σ par rapport à la hauteur z, en négligeant son éventuelle dépendance de la position horizontale. L'équation dans la forme précise va être formulée dans le paragraphe suivant (voir (2.1.1)). On va démontrer, dans la suite, l'existence d'une solution stationnaire de cette équation avec les "conditions d'entrée" pour $\sigma(m, z)$.

2.1 Position du problème

On va considérer la densité $\sigma = \sigma(m, z)$ de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m à la hauteur $z \in [0, 1]$. En désignant par $h_{gl} = h_{gl}(m, z)$ la quantité de condensation sur les gouttelettes de masse m par unité de temps et par unité de masse de gouttelettes.

Nous considérons l'équation

$$\partial_z\big(\sigma(m,z)u(m,z)\big)+\partial_m\big(mh_{gl}(m,z)\sigma(m,z)\big)=h_{gl}\big(m,z\big)\sigma(m,z)+ \tag{2.1.1}$$
$$+\frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',z)\sigma(m-m',z)dm'+$$
$$-m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)dm',$$

dans le domaine

$$\Omega=\{\,(m,z)\in\mathbb{R}^2\,|\,m>\overline{m}_a,\ 0<z<1\,\},\qquad \overline{m}_a>0; \tag{2.1.2}$$

Le choix d'une constante $\overline{m}_a$ strictement positive et convenablement petite et du domaine Ω donné dans (2.1.2) est conforme à la nature physique du problème ; en effet, la courbure élevée des gouttelettes très petites ne leur permet pas de subsister dans l'atmosphère et les gouttelettes se forment exclusivement sur des aérosols ayant une masse supérieure à une valeur critique (voir [8], [14]).
Pour la vitesse des gouttelettes, en adoptant l'approximation (voir [14], [16])

$$u(m,z)=v(z)-\frac{g}{\alpha(m)}, \tag{2.1.3}$$

avec $v(z)$, g et $\alpha(m)$ représentent respectivement la vitesse de l'air (dans la direction de l'axe z), l'accélération gravitationnelle et le coefficient de friction entre les gouttelettes et l'air.
L'équation (2.1.1) va être envisagée dans Ω avec les conditions d'entrée

$$\sigma(m,z)=\overline{\sigma}_0(m,z)\qquad \text{pour}\ \ (m,z)\in S_0\cup S_1\cup S_a, \tag{2.1.4}$$

où

$$S_0=\{\,(m,z)\in\overline{\Omega}\,|\,m\geq\overline{m}_a,\ z=0,\ u(m,0)\geq 0\,\}, \tag{2.1.5}$$
$$S_1=\{\,(m,z)\in\overline{\Omega}\,|\,m\geq\overline{m}_a,\ z=1,\ u(m,1)<0\,\}, \tag{2.1.6}$$
$$S_a=\{\,(m,z)\in\overline{\Omega}\,|\,m=\overline{m}_a,\ 0\leq z\leq 1\,\}. \tag{2.1.7}$$

On suppose que $\overline{\sigma}_0(m,z)$ est continue sur $S_0\cup S_a$ et uniformément continue sur S_1 et que

$$\overline{\sigma}_0(m,z)\geq 0\qquad \forall(m,z)\in S_0\cup S_1\cup S_a, \tag{2.1.8}$$
$$\overline{\sigma}_0(m,z)=0\qquad \text{si}\ \ m\geq\overline{m}_A\quad(\overline{m}_A>\overline{m}_a). \tag{2.1.9}$$

On remarque que $S_0 \cup S_1 \cup S_a$ est la partie de la frontière de Ω où le vecteur $(mh_{gl}, u)^T$ est orienté vers l'intérieur de Ω ; on précise que, d'après la condition (2.1.16) (voir aussi (2.1.15)) formulée dans la suite, on aura $\overline{m}_a h_{gl}(\overline{m}_a, z) > 0$ pour tout $z \in [0,1]$, ce qui nous garantit que le vecteur $(mh_{gl}, u)^T$ est orienté vers l'intérieur de Ω même sur S_a. L'hypothèse de la continuité de $\overline{\sigma}_0(m,z)$ garantira que le problème ne sera pas influencé par la convention sur l'appartenance ou non à S_0 du point $(m,0)$ tel que $u(m,0) = 0$ et sur l'appartenance du point $(\overline{m}_a, 0)$ à S_0 ou à S_a. Quant au point (m,1) tel que $u(m,1) = 0$, nous convenons qu'il n'appartient pas à S_1 et nous formulerons le problème conformément à cette convention.
On suppose que les fonctions $u(m,z)$ et $h_{gl}(m,z)$ sont données, et que

$$v(\cdot) \in C^1([0,1]), \qquad \inf_{z\in[0,1]} v(z) > 0, \tag{2.1.10}$$

$$\alpha(\cdot) \in C^1([\overline{m}_a, \infty[\,), \qquad \frac{d}{dm}\alpha(m) < 0 \quad \forall m \geq \overline{m}_a, \tag{2.1.11}$$

$$0 < \inf_{m\geq\overline{m}_a} \alpha(m) < \sup_{m\geq\overline{m}_a} \alpha(m) < \infty, \tag{2.1.12}$$

$$\inf_{z\in[0,1]} (v(z) - \frac{g}{\alpha(\overline{m}_a)}) > 0, \tag{2.1.13}$$

$$\exists m_1 > \overline{m}_a \quad \text{tel que} \quad \sup_{z\in[0,1]} (v(z) - \frac{g}{\alpha(m_1)}) < 0. \tag{2.1.14}$$

Pour la fonction $h_{gl}(m,z)$ on suppose que

$$h_{gl}(\cdot,\cdot) \in C^1(\overline{\Omega}), \tag{2.1.15}$$

$$0 < \inf_{(m,z)\in\Omega} mh_{gl}(m,z) \leq \sup_{(m,z)\in\Omega} mh_{gl}(m,z) < \infty. \tag{2.1.16}$$

En ce qui concerne $\beta(m_1, m_2)$ on suppose qu'elle vérifie les conditions

$$\beta(\cdot,\cdot) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+), \qquad \beta(m_1,m_2) \geq 0 \ \ \forall \ \ (m_1,m_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \tag{2.1.17}$$

$$\beta(m_1,m_2) = \beta(m_2,m_1), \tag{2.1.18}$$

$$\beta(m_1,m_2) = 0 \quad \text{pour } m_1 + m_2 \geq \overline{m}_A. \tag{2.1.19}$$

Les conditions (2.1.17) et (2.1.18) sont des conditions naturelles de la fonction de probabilité de rencontre de gouttelettes. D'autre part, la condition (2.1.19) est une approximation motivée par le fait que, comme on l'a déjà évoqué, dans l'atmosphère les grandes gouttelettes subissent également le processus de fragmentation, qui contrebalance la croissance de la population de gouttelettes de masse élevée due à la coagulation.

Rappelons que l'écoulement ascendant de l'air cause généralement, par la transformation adiabatique de l'air, la diminution de la température de chaque partie de l'air qui se déplace ; la diminution de la température, à son tour, implique la diminution de la densité de la vapeur saturée, ce qui cause la condensation de la vapeur, si l'humidité de l'air est déjà au niveau de la saturation. Pour que la position de notre problème correspond à cette situation, on suppose que $v(z) > 0$ et $h_{gl} > 0$ (voir (2.1.10), (2.1.16)).

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant.

Théorème 3.1. *Sous les hypothèses* (2.1.17)-(2.1.19) *et* (2.1.10)-(2.1.16), *il existe une constante* $\overline{A}_0 > 0$ *telle que, si*

$$\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_0 \cup S_1 \cup S_a)} \leq \overline{A}_0, \tag{2.1.20}$$

alors l'équation (2.1.1) *avec les conditions* (2.1.4)–(2.1.9) *admette une solution* σ *dans la classe* $L^\infty(\Omega)$ *; cette solution* σ *est non-négative, bornée et continue à morceaux dans* Ω.

La constante $\overline{A}_0$ mentionnée dans l'énoncé du théorème 3.1 pourra être mieux déterminée, comme on le verra dans la remarque 3.2.

2.2 Division du domaine et caractéristiques

On définit d'abord la division du domaine Ω en trois parties Ω_1, Σ_{int}, Ω_2

$$\begin{cases} \Omega_1 = \{\, (m,z) \in \Omega \,|\, u(m,z) > 0 \,\}, \\ \Sigma_{int} = \{\, (m,z) \in \Omega \,|\, u(m,z) = 0 \,\}, \\ \Omega_2 = \{\, (m,z) \in \Omega \,|\, u(m,z) < 0 \,\}. \end{cases} \tag{2.2.21}$$

On pose également

$$\Sigma = \{\, (m,z) \in \overline{\Omega} \,|\, u(m,z) = 0 \,\}.$$

En vertu des conditions (2.1.3), (2.1.10) et (2.1.11) la relation

$$u(m_\Sigma(z), z) = 0, \qquad z \in [0,1],$$

définit une fonction $m_\Sigma(z)$ de classe $C^1([0,1])$ de sorte que Σ est représentée par

$$\Sigma = \{\,(m,z) \in \overline{\Omega} \,|\, m = m_\Sigma(z),\ z \in [0,1]\,\}, \tag{2.2.22}$$

et on a

$$\overline{m}_a < m_\Sigma^- < m_\Sigma^+ < \infty$$

où

$$m_\Sigma^- = \inf_{0\le z\le 1} m_\Sigma(z), \qquad m_\Sigma^+ = \sup_{0\le z\le 1} m_\Sigma(z). \tag{2.2.23}$$

La fonction $m_\Sigma(z)$ jouit de la propriété suivante.

LEMME 3.1. *On a*

$$\frac{dm_\Sigma(z)}{dz} = -\frac{\alpha(m)^2 \frac{dv(z)}{dz}}{g\frac{d\alpha(m)}{dm}}. \tag{2.2.24}$$

DÉMONSTRATION. Comme $m_\Sigma(z)$ est définie par la relation

$$u(m_\Sigma(z), z) = v(z) - \frac{g}{\alpha(m)} = 0,$$

en désignant par $\vec{w}_\Sigma = (\frac{dm_\Sigma(z)}{dz}, 1)^T$ le vecteur tangent à la courbe Σ, de la relation

$$\nabla u \cdot \vec{w}_\Sigma = \frac{g}{\alpha(m)^2}\frac{d\alpha(m)}{dm}\frac{dm_\Sigma(z)}{dz} + \frac{dv(z)}{dz} = 0$$

on obtient (2.2.24).

Le lemme est démontré.

Maintenant on va définir les caractéristiques pour l'équation (2.1.1), qui peut être écrite dans la forme

$$\begin{aligned} u(m,z)\partial_z\sigma(m,z) + mh_{gl}(m,z)\partial_m\sigma(m,z) &= \\ = -\sigma(m,z)\big(\partial_z u(m,z) + m\partial_m h_{gl}(m,z)\big) &+ \\ +\frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',z)\sigma(m-m',z)dm' &+ \\ -m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)dm'. \end{aligned} \tag{2.2.25}$$

De l'expression de l'équation (2.2.25) il résulte que les caractéristiques sont déterminées par le système d'équations

$$\frac{dz(t)}{dt} = u(m(t), z(t)), \tag{2.2.26}$$

$$\frac{dm(t)}{dt} = m(t)h_{gl}(m(t), z(t)) \tag{2.2.27}$$

avec les conditions initiales pour $(m(t_0), z(t_0))$. Comme le second membre des équations (2.2.26)–(2.2.27) est de classe C^1 par rapport à (m, z), pour tout $(m, z) \in \overline{\Omega}$ il existe une courbe et une seule qui est définie par les équations (2.2.26)–(2.2.27) et qui passe par (m, z). On désigne ces courbes par

$$\gamma = \{(m_\gamma(t), z_\gamma(t)) \in \overline{\Omega} \mid t \in [t_0, t_1]\}, \tag{2.2.28}$$

et par Γ l'ensemble de toutes ces caractéristiques γ ; dans (2.2.28) $m_\gamma(t)$ et $z_\gamma(t)$ sont des fonctions qui satisfont au système d'équations (2.2.26)-(2.2.27), tandis que t_0 et t_1 sont tels que $z_\gamma(t_0) = 0$ ou 1 ou $m_\gamma(t_0) = \overline{m}_a$ et $z_\gamma(t_1) = 0$ ou 1, mais, comme on le voit aisément, t_0 peut être choisi arbitrairement.

Lemme 3.2. *Chaque courbe $\gamma \in \Gamma$, définie par les équations (2.2.26)-(2.2.27) et les conditions initiales, peut être représentée par une fonction continue $\widetilde{z}(m) = \widetilde{z}_\gamma(m)$ de $m \in [m_0, m_1]$ à valeurs dans $[0, 1]$ (avec certains m_0, $m_1 \in [\overline{m}_a, \infty[$) et la fonction $\widetilde{z}_\gamma(m)$ est strictement croissante dans la partie où $(m, \widetilde{z}_\gamma(m)) \in \Omega_1$ et strictement décroissante dans la partie où $(m, \widetilde{z}_\gamma(m)) \in \Omega_2$.*

Démonstration. Comme $mh_{gl}(m, z) > 0$ pour tout $(m, z) \in \Omega$ (voir(2.1.16)), l'équation (2.2.27) implique que sur γ la fonction $m_\gamma(t)$ est strictement croissante, ce qui nous permet de représenter γ par une fonction $\widetilde{z}(m) = \widetilde{z}_\gamma(m)$ pour $m \in [m_0, m_1]$, $m_0 = m(t_0), m_1 = m(t_1)$. Des équations (2.2.26)–(2.2.27) on déduit que

$$\frac{d\widetilde{z}(m)}{dm} = \frac{u(m, z)}{mh_{gl}(m, z)} \quad \text{pour} \;\; (m, z) \in \gamma. \tag{2.2.29}$$

La définition des sous-domaine Ω_1 et Ω_2 et la relation (2.2.29) entraînent que $\frac{d\widetilde{z}(m)}{dm} > 0$ si $(m, \widetilde{z}(m)) \in \Omega_1$ et que $\frac{d\widetilde{z}(m)}{dm} < 0$ si $(m, \widetilde{z}(m)) \in \Omega_2$, ce qui prouve la deuxième partie de l'énoncé du lemme. □

On voit aisément que, quel que soit $\gamma \in \Gamma$, Σ et γ possèdent au plus un point commun, qu'on note $(m_\Sigma(\gamma), z_\Sigma(\gamma))$. Si on définit t_Σ par la relation

$$(m_\gamma(t_\Sigma), z_\gamma(t_\Sigma)) \in \Sigma,$$

on a

$$(m_\Sigma(\gamma), z_\Sigma(\gamma)) = (m_\gamma(t_\Sigma), z_\gamma(t_\Sigma)).$$

On remarque que $m_\Sigma(\gamma)$ et $z_\Sigma(\gamma)$ vérifient les relations

$$m_\Sigma(\gamma) = m_\Sigma(z_\Sigma(\gamma)) = m_\gamma(t_\Sigma), \qquad z_\Sigma(\gamma) = \max_{m_0 \le m \le m_1} \widetilde{z}_\gamma(m).$$

On pose

$$\gamma^{(1)} = \gamma \cap \overline{\Omega_1}, \qquad \gamma^{(2)} = \gamma \cap \overline{\Omega_2}, \tag{2.2.30}$$

$$\Gamma^{(1)} = \{\, \gamma^{(1)} = \gamma \cap \overline{\Omega_1} \,|\, \gamma \in \Gamma \,\}, \qquad \Gamma^{(2)} = \{\, \gamma^{(2)} = \gamma \cap \overline{\Omega_2} \,|\, \gamma \in \Gamma \,\},$$

(le fait que $\Gamma^{(1)}$ et $\Gamma^{(2)}$ contiennent l'ensemble vide ne causera pas d'obstacle à nos raisonnements). Comme $\widetilde{z}_\gamma(m)$ est strictement croissante pour $m_0 \le m \le m_\Sigma(\gamma)$ et strictement décroissante dans $m_\Sigma(\gamma) \le m \le m_1$ (voir le lemme 3.2), on peut définir les fonctions $m_\gamma^{(1)}(z)$ et $m_\gamma^{(2)}(z)$ par les relations

$$m = m_\gamma^{(1)}(z) \;\Leftrightarrow\; (m, z) \in \gamma^{(1)}, \qquad m = m_\gamma^{(2)}(z) \;\Leftrightarrow\; (m, z) \in \gamma^{(2)}. \tag{2.2.31}$$

Lemme 3.3. *On suppose que $\Sigma \cap \gamma \neq \emptyset$. Alors, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que*

$$\int_{z_\Sigma(\gamma)-\delta}^{z_\Sigma(\gamma)} \frac{1}{u(m_\gamma^{(1)}(z'), z')}\, dz' \le \varepsilon, \qquad \int_{z_\Sigma(\gamma)}^{z_\Sigma(\gamma)-\delta} \frac{1}{u(m_\gamma^{(2)}(z'), z')}\, dz' \le \varepsilon. \tag{2.2.32}$$

Démonstration. En vertu des conditions (2.1.10)-(2.1.12) on peut choisir un voisinage U_Σ de Σ et quatre constantes c_1, c_2, c_3, c_4 tels que

$$-c_2 \le \frac{g}{\alpha(m)^2} \frac{d\alpha(m)}{dm} \le -c_1 < 0 \qquad \text{dans } \; U_\Sigma, \tag{2.2.33}$$

$$m h_{gl}(m, z) \ge c_3 > 0 \qquad \text{dans } \; U_\Sigma, \tag{2.2.34}$$

$$\left| \frac{dv(z)}{dz} \right| \le c_4 < \infty \qquad \forall z \in [0, 1]. \tag{2.2.35}$$

On se limite d'abord à la partie de γ contenue dans $\overline{\Omega_1}$ et donc à $[t_0, t_\Sigma]$ pour t. On pose

$$\zeta(t) = z_\gamma(t_\Sigma) - z_\gamma(t) = z_\Sigma(\gamma) - z_\gamma(t) \qquad \text{pour} \quad t \in [t_0, t_\Sigma]. \tag{2.2.36}$$

On a alors

$$\frac{d\zeta(t)}{dt} = u(m_\gamma(t_\Sigma), z_\gamma(t_\Sigma)) - u(m_\gamma(t), z_\gamma(t)) = -u(m_\gamma(t), z_\gamma(t)). \tag{2.2.37}$$

Or, comme on a $u(m, z) = 0$ sur Σ, en utilisant la fonction $m_\Sigma(z)$ (voir (2.2.22)), on a

$$-u(m_\gamma(t), z_\gamma(t)) = u(m_\Sigma(z_\gamma(t)), z_\gamma(t)) - u(m_\gamma(t), z_\gamma(t)) = \tag{2.2.38}$$

$$= \int_{m_\gamma(t)}^{m_\Sigma(z_\gamma(t))} \frac{\partial u}{\partial m} dm = \int_{m_\gamma(t)}^{m_\Sigma(z_\gamma(t))} \frac{g}{\alpha(m)^2} \frac{d\alpha(m)}{dm} dm.$$

Maintenant nous nous limitons à t tels que $(m_\gamma(t), z_\gamma(t)) \in \Omega_1 \cap U_\Sigma$. Alors, de (2.2.33), (2.2.37) et (2.2.38) on déduit que

$$\frac{d\zeta(t)}{dt} \leq -c_1(m_\Sigma(z_\gamma(t)) - m_\gamma(t)). \tag{2.2.39}$$

D'autre part, d'après le lemme 3.1, on a

$$m_\gamma(t_\Sigma) - m_\Sigma(z_\gamma(t)) = m_\Sigma(z_\gamma(t_\Sigma)) - m_\Sigma(z_\gamma(t)) = -\int_{z_\gamma(t)}^{z_\gamma(t_\Sigma)} \frac{\alpha(m_\Sigma(z))^2 \frac{dv(z)}{dz}}{g \frac{d\alpha(m)}{dm}|_{m=m_\Sigma(z)}} dz. \tag{2.2.40}$$

Or, comme en vertu de (2.2.33) et (2.2.35) on a

$$-\int_{z_\gamma(t)}^{z_\gamma(t_\Sigma)} \frac{\alpha(m_\Sigma(z))^2 \frac{dv(z)}{dz}}{g \frac{d\alpha(m)}{dm}|_{m=m_\Sigma(z)}} dz \leq \frac{c_4}{c_1}(z_\gamma(t_\Sigma) - z_\gamma(t)) = \frac{c_4}{c_1}\zeta(t),$$

de (2.2.40) on obtient

$$m_\Sigma(z_\gamma(t)) - m_\gamma(t) = m_\gamma(t_\Sigma) - m_\gamma(t) - (m_\gamma(t_\Sigma) - m_\Sigma(z_\gamma(t))) \geq$$

$$\geq m_\gamma(t_\Sigma) - m_\gamma(t) - \frac{c_4}{c_1}\zeta(t),$$

ce qui, joint à (2.2.39), nous donne

$$\frac{d\zeta(t)}{dt} \leq -c_1(m_\gamma(t_\Sigma) - m_\gamma(t)) + c_4\zeta(t). \tag{2.2.41}$$

En outre, en vertu de (2.2.27) et(2.2.34), on a

$$m_\gamma(t_\Sigma) - m_\gamma(t) \geq c_3(t_\Sigma - t),$$

ce qui nous permet de déduire de (2.2.41) que

$$\frac{d\zeta(t)}{dt} \leq -c_1c_3(t_\Sigma - t) + c_4\zeta(t) \qquad \text{pour} \quad t_\Sigma - \widetilde{\delta} \leq t \leq t_\Sigma \tag{2.2.42}$$

avec un certain $\widetilde{\delta} > 0$. Comme la fonction

$$\overline{\zeta}(t) = c_1c_3\int_t^{t_\Sigma}(t_\Sigma - t')e^{-c_4(t'-t)}dt',$$

vérifie l'égalité

$$\frac{d\overline{\zeta}(t)}{dt} = -c_1c_3(t_\Sigma - t) + c_4\overline{\zeta}(t),$$

et que

$$\overline{\zeta}(t_\Sigma) = \zeta(t_\Sigma) = 0,$$

d'après le théorème de comparaison, on déduit de (2.2.42) que

$$\zeta(t) \geq c_1c_3\int_t^{t_\Sigma}(t_\Sigma - t')e^{-c_4(t'-t)}dt' \geq \frac{c_1c_3}{2}(t_\Sigma - t)^2e^{-c_4(t_\Sigma - t)},$$

pour $t_\Sigma - \widetilde{\delta} \leq t \leq t_\Sigma$; en particulier, pour $t_\Sigma - \widetilde{\delta}_1 \leq t \leq t_\Sigma$, $\widetilde{\delta}_1 = \min(\widetilde{\delta}, \frac{\log 2}{c_4})$, on a

$$\zeta(t) \geq \frac{c_1c_3}{4}(t_\Sigma - t)^2,$$

ou

$$t_\Sigma - t \leq \frac{2}{\sqrt{c_1c_3}}\sqrt{\zeta(t)} = \frac{2}{\sqrt{c_1c_3}}\sqrt{z_\gamma(t_\Sigma) - z_\gamma(t)}. \tag{2.2.43}$$

On rappelle que d'après la définition de la vitesse $u(m, z)$, on a

$$t_\Sigma - t = \int_{z_\gamma(t)}^{z_\gamma(t_\Sigma)} \frac{1}{u(m_\gamma^{(1)}(z'), z')}dz'$$

(pour la fonction $m_\gamma^{(1)}(z)$, voir (2.2.31)). Donc, de (2.2.43) on déduit que

$$\int_{z_\gamma(t)}^{z_\gamma(t_\Sigma)} \frac{1}{u(m_\gamma^{(1)}(z'),z')} dz' \le \frac{2}{\sqrt{c_1 c_3}} \sqrt{z_\gamma(t_\Sigma) - z_\gamma(t)},$$

ce qui implique que, étant donné $\varepsilon > 0$, on peut choisir

$$\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2 c_1 c_3}{4},$$

de sorte que la première inégalité de (2.2.32) sera vérifiée.
La deuxième inégalité de (2.2.32) se démontre de manière analogue.
Le lemme est démontré.

Corollaire.3.1. *On pose*

$$z_1^{(\gamma)} = z_\Sigma(\gamma) \quad si \quad \Sigma \cap \gamma \neq \emptyset, \qquad z_1^{(\gamma)} = 1 \quad si \quad \gamma \subset \overline{\Omega_1},$$

$$z_2^{(\gamma)} = z_\Sigma(\gamma) \quad si \quad \Sigma \cap \gamma \neq \emptyset, \qquad z_2^{(\gamma)} = 1 \quad si \quad \gamma \subset \overline{\Omega_2}.$$

Alors, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\int_{z_1^{(\gamma)}-\delta}^{z_1^{(\gamma)}} \frac{1}{u(m_\gamma^{(1)}(z'),z')}\, dz' \le \varepsilon, \qquad \int_{z_2^{(\gamma)}}^{z_2^{(\gamma)}-\delta} \frac{1}{u(m_\gamma^{(2)}(z'),z')}\, dz' \le \varepsilon. \tag{2.2.44}$$

Démonstration. Le corollaire résulte immédiatement du lemme et des hypothèses sur $u(m,z)$. $\square$

2.3 Transformation de l'équation

Les caractéristiques γ étant définies, on peut écrire l'équation (2.2.25) comme la famille d'équations sur $\gamma \in \Gamma$

$$\frac{d}{dt}\sigma(m_\gamma(t), z_\gamma(t)) = \tag{2.3.45}$$

$$= -\sigma(m_\gamma(t), z_\gamma(t))\big(m_\gamma(t)\partial_m h_{gl}(m_\gamma(t), z_\gamma(t)) + \partial_z u(m_\gamma(t), z_\gamma(t))\big) +$$

$$+ \frac{m_\gamma(t)}{2} \int_0^{m_\gamma(t)} \beta(m_\gamma(t)-m', m')\sigma(m', z_\gamma(t))\sigma(m_\gamma(t)-m', z_\gamma(t))dm' +$$

$$-m_\gamma(t)\int_0^\infty \beta(m_\gamma(t),m')\sigma(m_\gamma(t),z_\gamma(t))\sigma(m',z_\gamma(t))dm';$$

ici, pour ne pas alourdir l'écriture, on a écrit

$$\partial_m h_{gl}(m_\gamma(t),z_\gamma(t)),\qquad \partial_z u(m_\gamma(t),z_\gamma(t))$$

au lieu de

$$\partial_m h_{gl}(m,z)\big|_{(m,z)=(m_\gamma(t),z_\gamma(t))},\qquad \partial_z u(m,z)\big|_{(m,z)=(m_\gamma(t),z_\gamma(t))}.$$

Si on introduit les opérateurs $K[m,z;\sigma,\sigma]$ et $L[m,z;\sigma]$ par

$$K[m,z;\sigma,\sigma]=\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m-m',z)\sigma(m',z)dm',\qquad (2.3.46)$$

$$L[m,z;\sigma]=\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m',z)dm',\qquad (2.3.47)$$

on peut écrire l'équation (2.3.45) sur γ dans la forme

$$\frac{d}{dt}\sigma(m_\gamma(t),z_\gamma(t))=\qquad (2.3.48)$$

$$=-\sigma(m_\gamma(t),z_\gamma(t))\big(m_\gamma(t)\partial_m h_{gl}(m_\gamma(t),z_\gamma(t))+\partial_z u(m_\gamma(t),z_\gamma(t))\big)+$$
$$+m_\gamma(t)\Big(\frac{1}{2}K[m_\gamma(t),z_\gamma(t);\sigma,\sigma]-\sigma(m_\gamma(t),z_\gamma(t))L[m_\gamma(t),z_\gamma(t);\sigma]\Big).$$

Si on considère l'équation (2.3.48) séparément sur $\gamma^{(1)}=\gamma\cap\overline{\Omega_1}$ et sur $\gamma^{(2)}=\gamma\cap\overline{\Omega_2}$, on peut même transformer (2.3.48) dans une forme relative à la variable z. On rappelle que sur $\gamma=\gamma^{(1)}\cup\gamma^{(2)}$ on a

$$\frac{d\sigma}{dt}=\frac{d\sigma}{dz}\frac{dz}{dt}=\frac{d\sigma}{dz}u(m_\gamma(t),z_\gamma(t)).\qquad (2.3.49)$$

Considérons d'abord l'équation sur $\gamma^{(1)}$ et utilisons la fonction $m_\gamma^{(1)}(z)$ (voir (2.2.31)). Si on introduit les notations $\sigma(\gamma;z)$, $h_{gl}(\gamma;z)$, $u(\gamma;z)$ par

$$\sigma(\gamma;z)=\sigma(m_\gamma^{(1)}(z);z),\quad h_{gl}(\gamma;z)=h_{gl}(m_\gamma^{(1)}(z);z),\quad u(\gamma;z)=u(m_\gamma^{(1)}(z);z),\qquad (2.3.50)$$

compte tenu de la relation (2.3.49), on peut écrire l'équation (2.3.48) dans la forme

$$\frac{d\sigma(\gamma;z)}{dz}=-\frac{\sigma(\gamma;z)}{u(\gamma;z)}\big(m_\gamma^{(1)}(z)\partial_m h_{gl}(\gamma;z)+\partial_z u(\gamma;z)\big)+\qquad (2.3.51)$$

$$+\frac{m_\gamma^{(1)}(z)}{u(\gamma;z)}\big(\frac{1}{2}K[m_\gamma^{(1)}(z),z;\sigma,\sigma]-\sigma(\gamma;z)L[m_\gamma^{(1)}(z),z;\sigma]\big).$$

L'équation (2.3.51) doit être envisagée sur l'intervalle $[z_0^{(\gamma)},z_1^{(\gamma)}]$ et avec la condition initiale

$$\sigma(\gamma;z_0^{(\gamma)})=\overline{\sigma}_0(m_\gamma^{(1)}(z_0^{(\gamma)}),z_0^{(\gamma)}), \tag{2.3.52}$$

où $z_0^{(\gamma)}$ (resp. $z_1^{(\gamma)}$) est la valeur la plus petite (resp. Grande) de z sur $\gamma^{(1)}$. La condition (2.3.52) n'est autre que la condition (2.1.4) restreinte sur $S_0\cup S_a$ et exprimée par rapport à $\gamma^{(1)}\in\Gamma^{(1)}$.

Sur $\gamma^{(2)}$, en utilisant la fonction $m_\gamma^{(2)}(z)$ et les notations $\sigma(\gamma;z)$, $h_{gl}(\gamma;z)$, $u(\gamma;z)$ tout analogues (avec $m_\gamma^{(2)}(z)$ au lieu de $m_\gamma^{(1)}(z)$ dans (2.3.50)), compte tenu de (2.3.49), l'équation (2.3.48), de manière tout analogue à (2.3.51), peut être écrite dans la forme

$$\frac{d\sigma(\gamma;z)}{dz}=-\frac{\sigma(\gamma;z)}{u(\gamma;z)}\big(m_\gamma^{(2)}(z)\partial_m h_{gl}(\gamma;z)+\partial_z u(\gamma;z)\big)+ \tag{2.3.53}$$

$$+\frac{m_\gamma^{(2)}(z)}{u(\gamma;z)}\big(\frac{1}{2}K[m_\gamma^{(2)}(z),z;\sigma,\sigma]-\sigma(\gamma;z)L[m_\gamma^{(2)}(z),z;\sigma]\big).$$

L'équation (2.3.53) doit être considérée sur l'intervalle $[0,z_2^{(\gamma)}]$, où $z_2^{(\gamma)}$ est la valeur la plus grande de z sur $\gamma^{(2)}$. Si $\gamma^{(2)}\cap\Sigma=\emptyset$, alors $z_2^{(\gamma)}=1$; si $\gamma^{(2)}\cap\Sigma\neq\emptyset$, alors $z_2^{(\gamma)}=z_\Sigma(\gamma)$. La condition (2.1.4) se traduit en

$$\sigma(\gamma;z_2^{(\gamma)})=\sigma(\gamma;1)=\overline{\sigma}_0(m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}),z_2^{(\gamma)})\qquad \text{si}\ \ (m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}),z_2^{(\gamma)})\in S_1. \tag{2.3.54}$$

D'autre part, si $(m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}),z_2^{(\gamma)})\in\Sigma$, alors la valeur de $\sigma(\gamma;z_2^{(\gamma)})$ doit être égale à la valeur au point $z=z_2^{(\gamma)}=z_1^{(\gamma)}$ de la fonction $\sigma(\gamma;z)$ qui satisfait à (2.3.51).

Il est utile de rappeler que dans Ω_1 on a $u(m,z)>0$ et dans Ω_2 on a $u(m,z)<0$. Donc, même si formellement (2.3.53) ne diffère de (2.3.51) que par la présence de $m_\gamma^{(2)}(z)$ au lieu de $m_\gamma^{(1)}(z)$, les signes des facteurs $\frac{\sigma(\gamma;z)}{u(\gamma;z)}$ et $\frac{m_\gamma^{(1)}(z)}{u(\gamma;z)}$ (respectivement $\frac{m_\gamma^{(2)}(z)}{u(\gamma;z)}$) dans leur second membre sont opposés l'un à l'autre.

2.4 Résolution de l'équation dans Ω_1

Pour résoudre l'équation (2.1.1) (ou (2.3.51)) avec les conditions (2.1.4), nous la résolvons d'abord dans Ω_1, en supposant que dans Ω_2 la fonction σ est égale à une fonction donnée $\overline{\sigma}_2$ et puis on va résoudre l'équation dans Ω_2 avec la fonction $\sigma = \sigma_1$ dans Ω_1, σ_1 étant la solution obtenue dans l'étape précédente. On cherchera ensuite un point fixe de l'opérateur qui, à $\overline{\sigma}_2$, associe la solution σ_2 de la seconde étape.
Pour construire la solution $\sigma = \sigma_1$ dans Ω_1 avec la donnée $\overline{\sigma}_2$ dans Ω_2, on suppose qu'une fonction $\overline{\sigma}_2(m,z)$ est donnée dans Ω_2 et vérifie les conditions

$$0 \leq \inf_{(m,z)\in\Omega_2} \overline{\sigma}_2(m,z) \leq \sup_{(m,z)\in\Omega_2} \overline{\sigma}_2(m,z) < \infty. \tag{2.4.55}$$

$$\overline{\sigma}_2(m,z) = 0 \quad \text{pour } m \geq \overline{m}_B, \tag{2.4.56}$$

où

$$\overline{m}_B = \sup\{m_\gamma^{(2)}(0) \,|\, m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}) \leq \overline{m}_A, \;\; \gamma^{(2)} \in \Gamma^{(2)}\}. \tag{2.4.57}$$

Pour préciser les conditions sur l'existence et l'unicité de la solution σ dans Ω_1 avec $\overline{\sigma}_2$ dans Ω_2, on pose

$$C_h = \sup_{(m,z)\in\Omega} |m\partial_m h_{gl}(m,z) + \partial_z u(m,z)|, \tag{2.4.58}$$

$$C_\beta = \sup_{m,m'\in\mathbb{R}_+} m\beta(m,m'). \tag{2.4.59}$$

En vertu du lemme 3.3 on peut choisir un $\delta_1 > 0$ tel que

$$\int_{z_\Sigma(\gamma)-\delta_1}^{z_\Sigma(\gamma)} \frac{1}{u(m_\gamma^{(1)}(z'),z')}\,dz' \leq \tag{2.4.60}$$

$$\leq \frac{1}{4\max(C_h + C_\beta\|\overline{\sigma}_2\|_{L^\infty(\Omega_2)}(\overline{m}_B - m_\Sigma^-), \frac{3C_\beta}{2}(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a))},$$

(pour m_Σ^-, m_Σ^+ voir (2.2.23)). Posons encore

$$M_1 = \sup_{(m,z)\in\Omega_1^{(\delta_1)}} \frac{1}{u(m,z)}, \qquad \Omega_1^{(\delta_1)} = \bigcup_{\gamma^{(1)}\in\Gamma^{(1)}} \{(m,z)\in\gamma^{(1)} \,|\; z \leq z_\Sigma(\gamma) - \delta_1\}. \tag{2.4.61}$$

PROPOSITION 3.1. *On suppose que $\overline{\sigma}_2$ vérifie la condition (2.4.55) et que*

$$\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_0\cup S_a)} < \frac{1}{2(e^{c_1}+\frac{c_2}{c_1}(e^{c_1}-1))}, \tag{2.4.62}$$

où

$$c_1 = 2(C_h + C_\beta\|\overline{\sigma}_2\|_{L^\infty(\Omega_2)}(\overline{m}_B - m_\Sigma^-))M_1, \quad c_2 = 3C_\beta(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a)M_1. \tag{2.4.63}$$

Alors il existe une fonction $\sigma(m,z) = \sigma_1(m,z)$ qui vérifie dans Ω_1 l'équation (2.1.1) dans laquelle on substitue $\overline{\sigma}_2(m,z)$ à la place de $\sigma(m,z)$ pour $(m,z) \in \Omega_2$ et la condition (2.1.4) (restreinte à $S_0 \cup S_a$) ; cette solution est unique dans la classe $L^\infty(\Omega_1)$.

DÉMONSTRATION. Pour construire la solution σ dans Ω_1, on construit d'abord une approximation successive $\{\sigma^{[n]}\}_{n\in\mathbb{N}}$, en utilisant la structure de l'équation (2.3.51) (et de la condition (2.3.52)). On pose

$$\sigma^{[0]}(\gamma;z) = \overline{\sigma}_0(m_\gamma^{(1)}(z_0^{(\gamma)}), z_0^{(\gamma)}) \tag{2.4.64}$$

et, si $\sigma^{[n]}$ est bien définie, on pose

$$\sigma^{[n+1]}(\gamma;z) = \overline{\sigma}_0(m_\gamma^{(1)}(z_0^{(\gamma)}), z_0^{(\gamma)}) + R_1(\sigma^{[n]})(\gamma;z), \tag{2.4.65}$$

où $R_1(\cdot)$ est l'opérateur intégral défini par

$$R_1(\sigma)(\gamma;z) = -\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{\sigma(\gamma;z')}{u(\gamma;z')}(m_\gamma^{(1)}(z')\partial_m h_{gl}(\gamma;z') + \partial_z u(\gamma;z'))dz' + \tag{2.4.66}$$

$$+\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{m_\gamma^{(1)}(z')}{u(\gamma;z')}\Big(\frac{1}{2}K[m_\gamma^{(1)}(z'),z';\sigma,\sigma] - \sigma(\gamma;z')L[m_\gamma^{(1)}(z'),z';\sigma]\Big)dz'.$$

LEMME 3.4. *Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\sigma^{[n]}$ est bien définie et on a*

$$\|\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty(\overline{m}_a,m_\Sigma(z))} \leq \frac{2\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_0\cup S_a)}e^{c_1 z}}{1-2\frac{c_2}{c_1}\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_0\cup S_a)}(e^{c_1 z}-1)} \qquad \textit{pour } 0 \leq z \leq 1. \tag{2.4.67}$$

DÉMONSTRATION DU LEMME. On déduit de (2.4.65) (voir aussi (2.4.66)) que

$$|\sigma^{[n+1]}(\gamma;z)| \leq \overline{\sigma}_0(m_\gamma^{(1)}(z_0^{(\gamma)}), z_0^{(\gamma)}) + \tag{2.4.68}$$

$$+\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z}\frac{|\sigma^{[n]}(\gamma;z')|}{u(\gamma;z')}|m_\gamma^{(1)}(z')\partial_m h_{gl}(\gamma;z')+\partial_z u(\gamma;z')|dz'+$$

$$+\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z}\frac{m_\gamma^{(1)}(z')}{u(\gamma;z')}\Big(\frac{1}{2}|K[m_\gamma^{(1)}(z'),z';\sigma^{[n]},\sigma^{[n]}]|+|\sigma^{[n]}(\gamma;z')L[m_\gamma^{(1)}(z'),z';\sigma^{[n]}]|\Big)dz'.$$

En écrivant $\|\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty}$ et $\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty}$ au lieu de $\|\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty(\overline{m}_a,m_\Sigma(z))}$ et $\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_0\cup S_a)}$, on déduit de (2.4.68) (voir aussi (2.4.58), (2.4.59)) que

$$|\sigma^{[n+1]}(\gamma;z)|\le\overline{\sigma}_0(m_\gamma^{(1)}(z_0^{(\gamma)}),z_0^{(\gamma)})+C_h\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z}\frac{|\sigma^{[n]}(m_\gamma^{(1)},z')|}{u(m_\gamma^{(1)};z')}dz'+ \tag{2.4.69}$$

$$+\frac{C_\beta}{2}\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z}\frac{1}{u(m_\gamma^{(1)};z')}\int_0^m|\sigma^{[n]}(m_\gamma^{(1)}-m',z')\sigma^{[n]}(m',z')|dm'dz'+$$

$$+C_\beta\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z}\frac{1}{u(m_\gamma^{(1)};z')}\int_0^{m_\Sigma}|\sigma^{[n]}(m_\gamma^{(1)},z')\sigma^{[n]}(m',z')|dm'dz'+$$

$$+C_\beta\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z}\frac{1}{u(\gamma;z')}\int_{m_\Sigma}^{\infty}|\sigma^{[n]}(m_\gamma^{(1)},z')\sigma^{[n]}(m',z')|dm'dz',$$

comme $\sigma(m,z)=\overline{\sigma}_2$ pour $(m,z)\in\Omega_2$, alors

$$|\sigma^{[n+1]}(\gamma;z)|\le\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty}+C_h\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z}\frac{\|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}}{u(\gamma;z')}dz'+ \tag{2.4.70}$$

$$+\frac{C_\beta}{2}(m_\Sigma^+-\overline{m}_a)\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z}\frac{\|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}^2}{u(\gamma;z')}dz'+C_\beta(m_\Sigma^+-\overline{m}_a)\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z}\frac{\|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}^2}{u(\gamma;z')}dz'+$$

$$+C_\beta(\overline{m}_B-m_\Sigma^-)\|\overline{\sigma}_2\|_{L^\infty(\Omega_2)}\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z}\frac{\|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}}{u(\gamma;z')}dz',$$

d'où

$$|\sigma^{[n+1]}(\gamma;z)|\le\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty}+ \tag{2.4.71}$$

$$+(C_h+C_\beta\|\overline{\sigma}_2\|_{L^\infty(\Omega_2)}(\overline{m}_B-m_\Sigma^-))\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z}\frac{\|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}}{u(\gamma;z')}dz'+$$

$$+\frac{3C_\beta}{2}(m_\Sigma^+-\overline{m}_a)\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z}\frac{\|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}^2}{u(\gamma;z')}dz'.$$

Or, en décomposant l'intégrale $\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z}$ en

$$\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} = \int_{z_0^{(\gamma)}}^{z_\Sigma(\gamma)-\delta_1} + \int_{z_\Sigma(\gamma)-\delta_1}^{z_\Sigma(\gamma)},$$

De (2.4.61) on obtient

$$|\sigma^{[n+1]}(\gamma;z)| \le \|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty} + \tag{2.4.72}$$

$$+(C_h + C_\beta \|\overline{\sigma}_2\|_{L^\infty(\Omega_2)}(\overline{m}_B - m_\Sigma^-))M_1 \int_{z_0^{(\gamma)}}^{z_\Sigma(\gamma)-\delta_1} \|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty} dz' +$$

$$+(C_h + C_\beta \|\overline{\sigma}_2\|_{L^\infty(\Omega_2)}(\overline{m}_B - m_\Sigma^-)) \sup_{z_\Sigma(\gamma)-\delta_1 \le z' \le z} \|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty} \int_{z_\Sigma(\gamma)-\delta_1}^{z_\Sigma(\gamma)} \frac{1}{u(\gamma;z')} dz' +$$

$$+\frac{3C_\beta}{2}(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a)M_1 \int_{z_0^{(\gamma)}}^{z_\Sigma(\gamma)-\delta_1} \|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}^2 dz' +$$

$$+\frac{3C_\beta}{2}(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a) \sup_{z_\Sigma(\gamma)-\delta_1 \le z' \le z} \|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}^2 \int_{z_\Sigma(\gamma)-\delta_1}^{z_\Sigma(\gamma)} \frac{1}{u(\gamma;z')} dz' +$$

Donc, en vertu de (2.4.60)et (2.4.63) on a

$$|\sigma^{[n+1]}(\gamma;z)| \le \|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty} + \tag{2.4.73}$$

$$+\frac{c_1}{2} \int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty} dz' + \frac{1}{4} \sup_{z_0^{(\gamma)} \le z' \le z} \|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty} +$$

$$+\frac{c_2}{2} \int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}^2 dz' + \frac{1}{4} \sup_{z_0^{(\gamma)} \le z' \le z} \|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}^2,$$

où c_1 et c_2 sont les constantes définies dans (2.4.63). Comme (2.4.71) est valable pour tout $\gamma^{(1)} \in \Gamma^{(1)}$, en définissant de manière naturelle la fonction $\sigma^{[n+1]}(m,z)$ sur Ω_1 et les normes $\|\sigma^{[n+1]}(\cdot,z)\|_{L^\infty(\overline{m}_a, m_\Sigma(z))}$ (pour $m_\Sigma(z)$ voir (2.2.22)), on déduit de (2.4.73) que

$$\|\sigma^{[n+1]}(\cdot,z)\|_{L^\infty} \le \|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty} + \tag{2.4.74}$$

$$+\frac{c_1}{2} \int_0^{z} \|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty} dz' + \frac{1}{4} \sup_{z_0^{(\gamma)} \le z' \le z} \|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty} +$$

$$+\frac{c_2}{2}\int_0^z \|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|^2_{L^\infty}dz' + \frac{1}{4}\sup_{z_0^{(\gamma)}\le z'\le z}\|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|^2_{L^\infty}.$$

On considère la fonction

$$\overline{X}(z) = \frac{2\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty}e^{c_1 z}}{1-2\frac{c_2}{c_1}\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty}(e^{c_1 z}-1)}, \qquad 0\le z\le 1. \tag{2.4.75}$$

On constate que $\overline{X}(z)$ vérifie les relations

$$\frac{d}{dz}\overline{X}(z) = c_1\overline{X}(z) + c_2\overline{X}^2(z), \qquad \overline{X}(0) = 2\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty}$$

et donc

$$\overline{X}(z) = 2\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty} + c_1\int_0^z \overline{X}(z')dz' + c_2\int_0^z(\overline{X}(z'))^2dz'. \tag{2.4.76}$$

D'après (2.4.62) et (2.4.75) on a également

$$\overline{X}(1)\le 1.$$

On va montrer que, quel que soit $n\in\mathbb{N}$, la fonction $\sigma^{[n]}$ vérifie l'inégalité

$$\|\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty}\le\overline{X}(z). \tag{2.4.77}$$

En effet, pour $n=0$, l'inégalité (2.4.77) résulte immédiatement de la définition (2.4.64). Supposons maintenant que $\sigma^{[n]}$ vérifie (2.4.77). En substituant (2.4.77) dans (2.4.74), on a

$$\|\sigma^{[n+1]}(\cdot,z)\|_{L^\infty}\le\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty}+\frac{c_1}{2}\int_0^z\overline{X}(z')dz'+\frac{c_2}{2}\int_0^z\overline{X}^2(z')dz'+\frac{1}{4}\overline{X}(z)+\frac{1}{4}\overline{X}^2(z),$$

compte tenu de la relation $\overline{X}(z)\le\overline{X}(1)\le 1$, on a

$$\|\sigma^{[n+1]}(\cdot,z)\|_{L^\infty}\le\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty}+\frac{c_1}{2}\int_0^z\overline{X}(z')dz'+\frac{c_2}{2}\int_0^z\overline{X}^2(z')dz'+\frac{1}{2}\overline{X}(z).$$

Cette inégalité et l'égalité (2.4.76) entraînent

$$\|\sigma^{[n+1]}(\cdot,z)\|_{L^\infty}\le\overline{X}(z) \quad \text{pour } z\in[0,1],$$

ce qui démontre (2.4.77) et donc (2.4.67). Le lemme est démontré.

Continuation de la démonstration de la proposition 3.1. En faisant la différence entre la $n+m$-ième approximation $\sigma^{[n+m]}$ et la n-ième approximation $\sigma^{[n]}$, des définitions (2.4.65) et (2.4.66) on obtient

$$\sigma^{[n+m]}(\gamma;z)-\sigma^{[n]}(\gamma;z)=-\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z}\frac{\sigma^{[n+m-1]}(\gamma;z')}{u(\gamma;z')}(m_\gamma^{(1)}(z')\partial_m h_{gl}(\gamma;z')+\partial_z u(\gamma;z'))dz'$$

$$+\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z}\frac{m_\gamma^{(1)}(z')}{u(\gamma;z')}\Big(\frac{1}{2}K[m_\gamma^{(1)}(z'),z';\sigma^{[n+m-1]},\sigma^{[n+m-1]}]-\sigma^{[n+m-1]}(\gamma;z')L[m_\gamma^{(1)}(z'),z';\sigma^{[n+m-1]}]\Big)dz'$$

$$+\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z}\frac{\sigma^{[n-1]}(\gamma;z')}{u(\gamma;z')}(m_\gamma^{(1)}(z')\partial_m h_{gl}(\gamma;z')+\partial_z u(\gamma;z'))dz'$$

$$-\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z}\frac{m_\gamma^{(1)}(z')}{u(\gamma;z')}\Big(\frac{1}{2}K[m_\gamma^{(1)}(z'),z';\sigma^{[n-1]},\sigma^{[n-1]}]-\sigma^{[n-1]}(\gamma;z')L[m_\gamma^{(1)}(z'),z';\sigma^{[n+m-1]}]\Big)dz'$$

$$=\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z}\frac{1}{u(\gamma;z')}D(z')dz', \tag{2.4.78}$$

où

$$D(z)=-(\sigma^{[n+m-1]}-\sigma^{[n-1]})(m_\gamma^{(1)}(z)\partial_m h_{gl}(\gamma;z)+\partial_z u(\gamma;z))$$

$$+\frac{m_\gamma^{(1)}(z)}{2}\big(K[m_\gamma^{(1)}(z),z;\sigma^{[n+m-1]},\sigma^{[n+m-1]}]-K[m_\gamma^{(1)}(z),z;\sigma^{[n-1]},\sigma^{[n-1]}]\big)+$$

$$-m_\gamma^{(1)}(z)\big(\sigma^{[n+m-1]}(\gamma;z)L[m_\gamma^{(1)}(z),z;\sigma^{[n+m-1]}]-\sigma^{[n-1]}(\gamma;z)L[m_\gamma^{(1)}(z),z;\sigma^{[n-1]}]\big).$$

D'après les définitions (2.3.46), (2.3.47) et l'inégalité (2.4.67) ainsi que l'hypothèse sur $\overline{\sigma}_2$, il existe un constantes C_0 telles que

$$|D(z)|\leq C_0, \tag{2.4.79}$$

D'après les définitions (2.3.46), (2.3.47) on a

$$|D(z)|\leq|\sigma^{[n+m-1]}-\sigma^{[n-1]}||m_\gamma^{(1)}(z)\partial_m h_{gl}(\gamma;z)+\partial_z u(\gamma;z)|+$$

$$+\frac{m_\gamma^{(1)}(z)}{2}\int_0^m|\beta(m_\gamma^{(1)}-m',z')|(|\sigma^{[n+m-1]}(m)\sigma^{[n+m-1]}(m')-\sigma^{[n-1]}(m)\sigma^{[n-1]}(m')|)dm'+$$

$$+m_\gamma^{(1)}(z)\int_0^\infty|\beta(m_\gamma^{(1)}-m',z')|(|\sigma^{[n+m-1]}(m)\sigma^{[n+m-1]}(m')-\sigma^{[n-1]}(m)\sigma^{[n-1]}(m')|)dm',$$

Donc, en vertu de(2.4.58)et (2.4.59) on obtient

$$|D(z)| \leq C_h|\sigma^{[n+m-1]} - \sigma^{[n-1]}| +$$
$$+\frac{C_\beta}{2}\int_0^m |\sigma^{[n+m-1]}(m)\sigma^{[n+m-1]}(m') - \sigma^{[n-1]}(m)\sigma^{[n-1]}(m')|dm' +$$
$$+C_\beta\int_0^\infty |\sigma^{[n+m-1]}(m)\sigma^{[n+m-1]}(m') - \sigma^{[n-1]}(m)\sigma^{[n-1]}(m')|dm',$$

d'où

$$|D(z)| \leq C_h|\sigma^{[n+m-1]} - \sigma^{[n-1]}| +$$
$$+\frac{C_\beta}{2}\int_0^m |\sigma^{[n+m-1]}(m)(\sigma^{[n+m-1]}(m') - \sigma^{[n-1]}(m')) + \sigma^{[n-1]}(m')(\sigma^{[n+m-1]}(m) - \sigma^{[n-1]}(m))|dm' +$$
$$+C_\beta\int_0^\infty |\sigma^{[n+m-1]}(m)(\sigma^{[n+m-1]}(m') - \sigma^{[n-1]}(m')) + \sigma^{[n-1]}(m')(\sigma^{[n+m-1]}(m) - \sigma^{[n-1]}(m))|dm'$$

ce qui implique que

$$|D(z)| \leq C_1\|\sigma^{[n+m-1]}(\cdot, z) - \sigma^{[n-1]}(\cdot, z)\|_{L^\infty}. \tag{2.4.80}$$

Soit ε un nombre réel strictement positif. D'après le lemme 3.3 il existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\int_{z_\Sigma(\gamma)-\delta(\varepsilon)}^{z_\Sigma(\gamma)} \frac{1}{u(\gamma; z')}dz' = \frac{\varepsilon}{2eC_0} \qquad \forall\gamma^{(1)} \in \Gamma^{(1)}. \tag{2.4.81}$$

On pose

$$L_1(\varepsilon) = \sup_{\gamma^{(1)}\in\Gamma^{(1)}}\{\,\frac{1}{u(\gamma; z)}\,|\,(m, z) \in \gamma^{(1)},\ z \leq z_\Sigma(\gamma) - \delta(\varepsilon)\,\}. \tag{2.4.82}$$

Or, en décomposant l'intégrale $\int_{z_0^{(\gamma)}}^z$ De (2.4.78) on obtient

$$|\sigma^{[n+m]}(\gamma; z) - \sigma^{[n]}(\gamma; z)| \leq \int_{z_0^{(\gamma)}}^{z_\Sigma(\gamma)-\delta(\varepsilon)} \frac{1}{u(\gamma; z')}|D(z')|dz' + \int_{z_\Sigma(\gamma)-\delta(\varepsilon)}^{z_\Sigma(\gamma)} \frac{1}{u(\gamma; z')}|D(z')|dz'$$

Des relations (2.4.78)-(2.4.82) on déduit que

$$|\sigma^{[n+m]}(\gamma; z) - \sigma^{[n]}(\gamma; z)| \leq L_1(\varepsilon)C_1\int_0^z \|\sigma^{[n+m-1]}(\cdot, z') - \sigma^{[n-1]}(\cdot, z')\|_{L^\infty}dz' + \frac{\varepsilon}{2e},$$

d'où

$$\|\sigma^{[n+m]}(\cdot,z)-\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty([\overline{m}_a,m_\Sigma(z)])}\leq$$
$$\leq L_1(\varepsilon)C_1\int_0^z\|\sigma^{[n+m-1]}(\cdot,z')-\sigma^{[n-1]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}dz'+\frac{\varepsilon}{2e}.$$

En répétant une procédure analogue

$$\|\sigma^{[n+m]}(\cdot,z)-\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty([\overline{m}_a,m_\Sigma(z)])}\leq$$
$$\leq L_1(\varepsilon)C_1\int_0^z\|\sigma^{[n+m-1]}(\cdot,z')-\sigma^{[n-1]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}dz'+\frac{\varepsilon}{2e}.$$
$$\|\sigma^{[n+m-1]}(\cdot,z)-\sigma^{[n-1]}(\cdot,z)\|_{L^\infty([\overline{m}_a,m_\Sigma(z)])}\leq$$
$$\leq L_1(\varepsilon)C_1\int_0^z\|\sigma^{[n+m-2]}(\cdot,z')-\sigma^{[n-2]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}dz'+\frac{\varepsilon}{2e}.$$
$$\|\sigma^{[n+m-2]}(\cdot,z)-\sigma^{[n-2]}(\cdot,z)\|_{L^\infty([\overline{m}_a,m_\Sigma(z)])}\leq$$
$$\leq L_1(\varepsilon)C_1\int_0^z\|\sigma^{[n+m-3]}(\cdot,z')-\sigma^{[n-3]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}dz'+\frac{\varepsilon}{2e}.$$

On arrive à l'inégalité

$$\|\sigma^{[n+m]}(\cdot,z)-\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty}\leq(L_1(\varepsilon)C_1)^n\frac{z^n}{n!}\|\sigma^{[m]}-\sigma^{[0]}\|_{L^\infty(\Omega_1)}+\frac{\varepsilon}{2e}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}. \tag{2.4.83}$$

Comme, en vertu du lemme 3.4, il existe un $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tel que

$$(L_1(\varepsilon)C_1)^n\frac{z^n}{n!}\|\sigma^{[m]}-\sigma^{[0]}\|_{L^\infty(\Omega_1)}\leq\frac{\varepsilon}{2}\qquad\forall n\geq n_\varepsilon,$$

on déduit de (2.4.83) que

$$\|\sigma^{[n+m]}(\cdot,z)-\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty(\Omega_1)}\leq\varepsilon\qquad\forall n\geq n_\varepsilon,\quad\forall m\geq 1. \tag{2.4.84}$$

C'est-à-dire, $\{\sigma^{[n]}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans la topologie de $L^\infty(\Omega_1)$ et donc, quand n tend vers l'infini, $\sigma^{[n]}$ converge vers une fonction $\sigma=\sigma_1$ dans $L^\infty(\Omega_1)$.

Il n'est pas difficile à démontrer que la limite $\sigma=\sigma_1$ satisfait à l'équation (2.1.1) dans laquelle on substitue $\overline{\sigma}_2(m,z)$ à la place de $\sigma(m,z)$ pour $(m,z)\in\Omega_2$ et à la condition (2.1.4) et que la solution est unique. $\square$

2.5 Résolution de l'équation dans Ω_2

Maintenant on se propose de résoudre l'équation (2.1.1) dans Ω_2, en supposant que dans Ω_1 la fonction σ est égale à une fonction donnée $\overline{\sigma}_1$ (plus tard on substituera à $\overline{\sigma}_1$ la solution σ_1 de l'équation (2.1.1) dans Ω_1 avec $\overline{\sigma}_2$ donnée dans Ω_2). On suppose que

$$\overline{\sigma}_1 \in C(\overline{\Omega_1}), \qquad 0 \leq \inf_{(m,z)\in\Omega_1} \overline{\sigma}_1(m,z) \leq \sup_{(m,z)\in\Omega_1} \overline{\sigma}_1(m,z) < \infty \tag{2.5.85}$$

et, à l'aide du corollaire du lemme 3.3 on choisit un $\delta_2 > 0$ tel que

$$\int_{z_2^{(\gamma)}-\delta_2}^{z_2^{(\gamma)}} \frac{1}{|u(m_\gamma^{(2)}(z'),z')|}\, dz' \leq \tag{2.5.86}$$

$$\leq \frac{1}{4\max(C_h + \frac{3C_\beta}{2}\|\overline{\sigma}_1\|_{L^\infty(\Omega_1)}(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a) + \frac{C_\beta}{2}\|\overline{\sigma}_1\|_{L^\infty(\Omega_1)}(\overline{m}_B - m_\Sigma^-),\ \frac{3C_\beta}{2}(\overline{m}_B - m_\Sigma^-))}$$

où m_Σ^-, m_Σ^+, C_h et C_β sont les constantes introduites dans (2.4.58), (2.4.59) et (2.2.23) respectivement. On pose en outre

$$M_2 = \sup_{(m,z)\in\Omega_2^{(\delta_2)}} \frac{1}{|u(\gamma;z)|}, \quad \Omega_2^{(\delta_2)} = \bigcup_{\gamma^{(2)}\in\Gamma^{(2)}} \{(m,z)\in\gamma^{(2)} \,|\, z \leq z_\Sigma(\gamma) - \delta_2\,\}. \tag{2.5.87}$$

$$T_2 = \sup_{\gamma^{(2)}\in\Gamma^{(2)}} \int_{z_2^{(\gamma)}}^{0} \frac{1}{u(\gamma,z')} dz'; \tag{2.5.88}$$

on voit aisément que, en vertu de (2.1.3),(2.1.11), et (2.1.16), on a $T_2 < \infty$. Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution $\sigma = \sigma_2$ dans Ω_2, on suppose, de manière analogue à (2.4.62), que

$$\max\left(\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_1)}, \|\overline{\sigma}_1\big|_\Sigma\|_{L^\infty(\Sigma)}\right) + \frac{C_\beta T_2}{2}\|\overline{\sigma}_1\|^2_{L^\infty(\Omega_1)}(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a) \leq \tag{2.5.89}$$

$$\leq \frac{1}{2(e^{c_3} + \frac{c_4}{c_3}(e^{c_3}-1))},$$

où $\overline{\sigma}_1\big|_\Sigma$ est la restriction de $\overline{\sigma}_1$ à Σ et

$$c_3 = (2C_h + 3C_\beta\|\overline{\sigma}_1\|_{L^\infty(\Omega_1)}(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a) + C_\beta\|\overline{\sigma}_1\|_{L^\infty(\Omega_1)}(\overline{m}_B - m_\Sigma^-))M_2, \tag{2.5.90}$$

$$c_4 = 3C_\beta(\overline{m}_B - m_\Sigma^-)M_2.$$

Proposition 3.2. *On suppose que les conditions (2.5.85) et (2.5.89) sont vérifiées. Alors il existe une fonction $\sigma(m,z) = \sigma_2(m,z)$ qui vérifie dans Ω_2 l'équation (2.1.1) dans laquelle on substitue $\overline{\sigma}_1(m,z)$ à la place de $\sigma(m,z)$ pour $(m,z) \in \Omega_1$ et la condition (2.1.4) sur S_1 et la condition $\sigma(m,z) = \overline{\sigma}_1(m,z)$ pour $(m,z) \in \Sigma$; cette solution σ est unique dans la classe $L^\infty(\Omega_2)$.*

Démonstration. Comme pour la proposition 3.1, on va utiliser la forme (2.3.53) sur $\gamma^{(2)}$ de l'équation. Or, dans le cas où le point de départ $(m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)})$ de $\gamma^{(2)}$ se trouve sur Σ, on pose la condition

$$\sigma(\gamma; z_2^{(\gamma)}) = \overline{\sigma}_1(m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)}) \qquad \text{si} \ \ (m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)}) \in \Sigma, \tag{2.5.91}$$

tandis que, dans le cas où $(m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)}) \in S_1$, on considère la condition (2.3.54) déjà introduite précédemment.

Toujours comme dans la démonstration de la proposition 3.1, on construit une approximation successive $\{\sigma^{[n]}\}_{n\in\mathbb{N}}$. On choisit $\sigma^{[0]}(\gamma;z)$ égale à la donnée initiale (2.3.54) ou (2.5.91), c'est-à-dire

$$\sigma^{[0]}(\gamma;z) = \overline{\sigma}_i(m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)}), \tag{2.5.92}$$

où

$$\overline{\sigma}_i = \overline{\sigma}_1 \quad \text{si} \ \ (m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)}) \in \Sigma, \qquad \overline{\sigma}_i = \overline{\sigma}_0 \quad \text{si} \ \ (m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)}) \in S_1,$$

et, si $\sigma^{[n]}$ est bien définie, on pose (avec la même notation $\overline{\sigma}_i(m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)})$ utilisée dans (2.5.92))

$$\sigma^{[n+1]}(\gamma;z) = \overline{\sigma}_i(m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)}) + R_2(\sigma^{[n]})(\gamma;z), \tag{2.5.93}$$

où $R_2(\cdot)$ est défini par

$$R_2(\sigma)(\gamma;z) = -\int_{z_2^{(\gamma)}}^{z} \frac{\sigma(\gamma;z')}{u(\gamma;z')}(m_\gamma^{(2)}(z')\partial_m h_{gl}(\gamma;z') + \partial_z u(\gamma;z'))dz' + \tag{2.5.94}$$

$$+\int_{z_2^{(\gamma)}}^{z} \frac{m_\gamma^{(2)}(z')}{u(\gamma;z')}\Big(\frac{1}{2}K[m_\gamma^{(2)}(z'), z'; \sigma, \sigma] - \sigma(\gamma;z')L[m_\gamma^{(2)}(z'), z'; \sigma]\Big)dz'.$$

Lemme 3.5. *Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\sigma^{[n]}$ est bien définie et on a*

$$\sigma^{[n]}(m,z) = 0 \qquad si \ \ m > \overline{m}_B, \tag{2.5.95}$$

$$\|\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty(m_\Sigma(z),\overline{m}_B)} \leq \frac{2A_{0,1}e^{c_3(1-z)}}{1-2\frac{c_4}{c_3}A_{0,1}(e^{c_3(1-z)}-1)} \qquad pour \;\; 0\leq z\leq 1, \tag{2.5.96}$$

avec

$$A_{0,1} = \max\left(\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_1)}, \|\overline{\sigma}_1\big|_\Sigma\|_{L^\infty(\Sigma)}\right) + \frac{T_2C_\beta}{2}\|\overline{\sigma}_1\|^2_{L^\infty(\Omega_1)}(m^+_\Sigma - \overline{m}_a).$$

Démonstration du lemme. Des conditions (2.1.9), (2.1.19), de la définition de $\overline{m}_B$ (voir (2.4.56)) et de la définition de $\sigma^{[n]}$ on déduit immédiatement que $\sigma^{[n]}(m,z)=0$ pour $m>\overline{m}_B$.

De manière analogue à la déduction de (2.4.71), en écrivant $\|\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty}$ au lieu de $\|\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty(m_\Sigma(z),\overline{m}_B)}$, on déduit de (2.4.58), (2.4.59), (2.5.93) et (2.5.94), que

$$|\sigma^{[n+1]}(\gamma;z)| \leq \max\left(\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_1)}, \|\overline{\sigma}_1\big|_\Sigma\|_{L^\infty(\Sigma)}\right) + C_h\int_{z_2^{(\gamma)}}^z \frac{|\sigma^{[n]}(m^{(2)}_\gamma,z')|}{u(m^{(2)}_\gamma,z')}dz' +$$

$$+\frac{C_\beta}{2}\int_{z_2^{(\gamma)}}^z \frac{1}{u(m^{(2)}_\gamma,z')}\int_0^{m_\Sigma(z)} |\sigma^{[n]}(m^{(2)}_\gamma - m',z')\sigma^{[n]}(m',z')|dm'dz' +$$

$$+\frac{C_\beta}{2}\int_{z_2^{(\gamma)}}^z \frac{1}{u(m^{(2)}_\gamma,z')}\int_{m_\Sigma(z)}^{m} |\sigma^{[n]}(m^{(2)}_\gamma - m',z')\sigma^{[n]}(m',z')|dm'dz' +$$

$$+C_\beta\int_{z_2^{(\gamma)}}^z \frac{1}{u(m^{(2)}_\gamma,z')}\int_0^{m_\Sigma(z)} |\sigma^{[n]}(m^{(2)}_\gamma,z')\sigma^{[n]}(m',z')|dm'dz' +$$

$$+C_\beta\int_{z_2^{(\gamma)}}^z \frac{1}{u(m^{(2)}_\gamma,z')}\int_{m_\Sigma(z)}^{\infty} |\sigma^{[n]}(m^{(2)}_\gamma,z')\sigma^{[n]}(m',z')|dm'dz',$$

alors

$$|\sigma^{[n+1]}(\gamma;z)| \leq \max\left(\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_1)}, \|\overline{\sigma}_1\big|_\Sigma\|_{L^\infty(\Sigma)}\right) + \tag{2.5.97}$$

$$+\frac{C_\beta}{2}\|\overline{\sigma}_1\|^2_{L^\infty(\Omega_1)}(m^+_\Sigma - \overline{m}_a)\int_{z_2^{(\gamma)}}^z \frac{1}{u(\gamma;z')}dz' +$$

$$+(C_h+\frac{3C_\beta}{2}\|\overline{\sigma}_1\|_{L^\infty(\Omega_1)}(m^+_\Sigma - \overline{m}_a)+\frac{C_\beta}{2}\|\overline{\sigma}_1\|_{L^\infty(\Omega_1)}(\overline{m}_B - m^-_\Sigma))\int_{z_2^{(\gamma)}}^z \frac{\|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}}{u(\gamma;z')}dz' +$$

$$+\frac{3C_\beta}{2}(\overline{m}_B - m_\Sigma^-)\int_{z_2^{(\gamma)}}^{z} \frac{\|\sigma^{[n]}(\cdot, z')\|_{L^\infty}^2}{u(\gamma; z')} dz'.$$

Or, en décomposant l'intégrale $\int_{z_2^{(\gamma)}}^{z}$ en

$$\int_{z_2^{(\gamma)}}^{z} = \int_{z_2^{(\gamma)}}^{\max(z_2^{(\gamma)}-\delta_2,\, z)} + \int_{\max(z_2^{(\gamma)}-\delta_2,\, z)}^{z},$$

et en utilisant (2.5.86), (2.5.87) et (2.5.90), de manière analogue à l'obtention de (2.4.74) on déduit de (2.5.97) que

$$\|\sigma^{[n+1]}(\gamma; z)\|_{L^\infty} \leq A_{0,1} + \tag{2.5.98}$$

$$+\frac{c_3}{2}\int_z^1 \|\sigma^{[n]}(\cdot, z')\|_{L^\infty} dz' + \frac{1}{4}\sup_{z \leq z' \leq 1} \|\sigma^{[n]}(\cdot, z')\|_{L^\infty} +$$

$$+\frac{c_4}{2}\int_z^1 \|\sigma^{[n]}(\cdot, z')\|_{L^\infty}^2 dz' + \frac{1}{4}\sup_{z \leq z' \leq 1} \|\sigma^{[n]}(\cdot, z')\|_{L^\infty}^2.$$

Ayant obtenu une inégalité similaire à (2.4.74), on peut procéder de la même manière, en définissant

$$\overline{Y}(z) = \frac{2A_{0,1}e^{c_3(1-z)}}{1 - 2\frac{c_4}{c_3}A_{0,1}(e^{c_3(1-z)} - 1)} \qquad \text{pour } \ 0 < z < 1, \tag{2.5.99}$$

On constate que $\overline{Y}(z)$ vérifie les relations

$$\frac{d}{dz}\overline{Y}(z) = c_3\overline{Y}(z) + c_4\overline{Y}^2(z), \qquad \overline{Y}(1) = 2A_{0,1}$$

et donc

$$\overline{Y}(z) = 2A_{0,1} + c_3\int_z^1 \overline{Y}(z')dz' + c_4\int_z^1 (\overline{Y}(z'))^2 dz'. \tag{2.5.100}$$

D'après (2.5.89) et (2.5.99) on a également

$$\overline{Y}(1) \leq 1.$$

On va montrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\sigma^{[n]}$ vérifie l'inégalité

$$\|\sigma^{[n]}(\cdot, z)\|_{L^\infty} \leq \overline{Y}(z). \tag{2.5.101}$$

En effet, pour $n = 0$, l'inégalité (2.5.101) résulte immédiatement de la définition (2.5.92). Supposons maintenant que $\sigma^{[n]}$ vérifie (2.5.101). En substituant (2.5.101) dans (2.5.98), on a

$$\|\sigma^{[n+1]}(\cdot,z)\|_{L^\infty} \leq A_{0,1} + \frac{c_3}{2}\int_z^1 \overline{Y}(z')dz' + \frac{c_4}{2}\int_z^1 \overline{Y}^2(z')dz' + \frac{1}{4}\overline{Y}(z) + \frac{1}{4}\overline{Y}^2(z),$$

compte tenu de la relation $\overline{Y}(z) \leq \overline{Y}(1) \leq 1$, on a

$$\|\sigma^{[n+1]}(\cdot,z)\|_{L^\infty} \leq A_{0,1} + \frac{c_3}{2}\int_z^1 \overline{Y}(z')dz' + \frac{c_4}{2}\int_z^1 \overline{Y}^2(z')dz' + \frac{1}{2}\overline{Y}(z).$$

Cette inégalité et l'égalité (2.5.100) entraînent

$$\|\sigma^{[n+1]}(\cdot,z)\|_{L^\infty} \leq \overline{Y}(z) \quad \text{pour } z \in [0,1],$$

ce qui démontre (2.5.101) et donc (2.5.96).

Continuation de la démonstration de la proposition 3.2. Une fois construite la suite de solutions approchées $\sigma^{[n]}$ vérifiant les relations (2.5.95), (2.5.96), on peut procéder de manière tout analogue à la démonstration de la proposition 3.1, en faisant la différence $\sigma^{[n+m]}(\gamma;z) - \sigma^{[n]}(\gamma;z)$ (pour $\sigma^{[n]}$ construites dans le lemme 3.5) comme dans (2.4.78) et en l'estimant comme dans (2.4.79)-(2.4.84), de sorte que la démonstration de la proposition 3.2 sera complétée. □

2.6 Estimations de σ_1 sur Ω_1 et de σ_2 sur Ω_2

Même si la démonstration des propositions 3.1 et 3.2 contient implicitement (voir les lemmes 3.4 et 3.5) une majoration de la norme de σ_1 dans $L^\infty(\Omega_1)$ et de celle de σ_2 dans $L^\infty(\Omega_2)$, pour nos ultérieurs raisonnements il nous convient d'améliorer ces estimations. On commence par la démonstration de la positivité de σ_1.

Lemme 3.6. *Soit $\sigma = \sigma_1$ la solution de l'équation (2.1.1) dans Ω_1, obtenue dans la proposition 3.1 (sous les conditions de la proposition 3.1). Alors on a*

$$\sigma_1(m,z) \geq 0 \qquad \forall (m,z) \in \Omega_1. \tag{2.6.102}$$

En outre, σ_1 est continue dans Ω_1.

DÉMONSTRATION. On rappelle que $\sigma = \sigma_1$ satisfait, sur chaque $\gamma^{(1)} \in \Gamma^{(1)}$, à l'équation (2.3.51) et que, en vertu de la définition (2.3.46) de K, on a

$$\frac{m_\gamma^{(1)}(z)}{u(\gamma; z)} K[m_\gamma^{(1)}(z), z; \sigma, \sigma] \geq 0.$$

Donc la condition $\sigma(\gamma; z_0^{(\gamma)}) \geq 0$ (voir (2.3.52), (2.1.4)) et l'expression du second membre de l'équation (2.3.51), considérée comme équation différentielle ordinaire, impliquent que $\sigma(\gamma; z) \geq 0$ là où $\sigma(\gamma; z)$ est bien définie.

La continuité de σ_1 résulte de la continuité de $\overline{\sigma}_0$ sur $S_0 \cup S_a$ et du fait que, sur chaque $\gamma^{(1)} \in \Gamma^{(1)}$, σ_1 est la solution de l'équation (2.3.51), dont les coefficients sont continus. $\square$

A l'aide du lemme 3.3 on choisit un $\vartheta_1 > 0$ tel que

$$\int_{z_\Sigma(\gamma)-\vartheta_1}^{z_\Sigma(\gamma)} \frac{1}{u(m_\gamma^{(1)}(z'), z')} dz' \leq \frac{1}{4\max(C_h, C_\beta(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a))} \tag{2.6.103}$$

et on pose

$$\mu_1 = \sup_{(m,z)\in\Omega_1^{(\vartheta_1)}} \frac{1}{u(m,z)}, \qquad \Omega_1^{(\vartheta_1)} = \bigcup_{\gamma^{(1)}\in\Gamma^{(1)}} \{(m,z) \in \gamma^{(1)} \mid \ z \leq z_\Sigma(\gamma) - \vartheta_1 \}, \tag{2.6.104}$$

$$a_1 = 2C_h\mu_1, \qquad a_2 = 2C_\beta(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a)\mu_1. \tag{2.6.105}$$

On a le lemme suivant.

LEMME 3.7. *Soit $\sigma = \sigma_1$ la solution de l'équation (2.1.1) dans Ω_1, obtenue dans la proposition 3.1 (sous les conditions de la proposition 3.1). Alors on a*

$$\sigma_1(m, z) \leq \overline{A}_1 \qquad \forall (m, z) \in \Omega_1, \tag{2.6.106}$$

où

$$\overline{A}_1 = \frac{2e^{a_1}\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_0\cup S_a)}}{1 - 2\frac{a_2}{a_1}\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_0\cup S_a)}(e^{a_1} - 1)}. \tag{2.6.107}$$

DÉMONSTRATION. On considère de nouveau l'équation (2.3.51) vérifiée par σ. En vertu de la condition (2.4.55) et du lemme 3.6 on a

$$\sigma(\gamma; z)L[m_\gamma^{(1)}(z), z; \sigma] \geq 0,$$

ce qui nous permet de déduire de (2.3.51) que

$$\frac{d\sigma(\gamma;z)}{dz} \leq -\frac{\sigma(\gamma;z)}{u(\gamma;z)}\big(m_\gamma^{(1)}(z)\partial_m h_{gl}(\gamma;z) + \partial_z u(\gamma;z)\big) +$$

$$+\frac{m_\gamma^{(1)}(z)}{2u(\gamma;z)} K[m_\gamma^{(1)}(z), z; \sigma, \sigma]$$

D'où

$$|\sigma(\gamma;z)| \leq \|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty} + \int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{|\sigma(\gamma;z)|}{u(\gamma;z)} \big|m_\gamma^{(1)}(z)\partial_m h_{gl}(\gamma;z) + \partial_z u(\gamma;z)\big| dz' +$$

$$+\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{m_\gamma^{(1)}(z)}{2u(\gamma;z)} |K[m_\gamma^{(1)}(z), z; \sigma, \sigma]| dz'$$

alors

$$|\sigma(\gamma;z)| \leq \|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty} + C_h \int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{\|\sigma(\cdot,z')\|_{L^\infty}}{u(\gamma;z')} dz' + \tag{2.6.108}$$

$$+C_\beta(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a)\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{\|\sigma(\cdot,z')\|_{L^\infty}^2}{u(\gamma;z')} dz',$$

où on a écrit $\|\sigma(\cdot,z)\|_{L^\infty}$ et $\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty}$ au lieu de $\|\sigma(\cdot,z)\|_{L^\infty(\overline{m}_a, m_\Sigma(z))}$ et $\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_0 \cup S_a)}$.

L'inégalité (2.6.108) étant établie, on peut procéder d'une manière analogue à la démonstration du lemme 3.4 (en particulier, à partir de (2.4.71)), en y remplaçant c_1 et c_2 par a_1 et a_2 définis dans (2.6.105) (vois aussi (2.6.103), (2.6.104)). De la sorte on aura

$$\|\sigma(\cdot,z)\|_{L^\infty} \leq \frac{2\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_0\cup S_a)} e^{a_1 z}}{1 - 2\frac{a_2}{a_1}\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_0\cup S_a)}(e^{a_1 z} - 1)} \qquad \text{pour} \quad 0 \leq z \leq 1,$$

d'où le lemme. □

Remarque 3.1. La valeur $\overline{A}_1$ donnée dans (2.6.107) ne dépend pas $\overline{\sigma}_2$. En effet, a_1 et a_2 ne dépendent pas de $\overline{\sigma}_2$ (voir (2.6.103)-(2.6.105)).

Maintenant on considère l'équation (2.1.1) dans Ω_2 avec $\sigma = \sigma_1$ dans Ω_1, où σ_1 est la solution de l'équation (2.1.1) dans Ω_1 obtenue dans la proposition 3.1. Pour mieux caractériser la solution $\sigma = \sigma_2$ de ce problème, en désignant par $\overline{\gamma}_b$ la caractéristique qui passe par le point $(m_\Sigma(1), 1)$ (pour la notation $m_\Sigma(z)$, voir (2.2.22)), on divise Ω_2 en deux parties

$$\Omega_{2,1} = \{\, (m,z) \in \Omega_2 \,|\, m_\Sigma(z) < m \leq m_{\overline{\gamma}_b}^{(2)}(z) \,\}, \tag{2.6.109}$$

$$\Omega_{2,2} = \Omega_2 \backslash \Omega_{2,1} = \{\, (m,z) \in \Omega_2 \,|\, m > m^{(2)}_{\overline{\gamma}_b}(z) \,\}, \tag{2.6.110}$$

où $m^{(2)}_{\gamma}(z)$ est la fonction définie dans (2.2.31).

Lemme 3.8. *Soit $\sigma = \sigma_2$ la solution de l'équation (2.1.1) dans Ω_2, obtenue dans la proposition 3.2 (sous les conditions de la proposition 3.2) avec $\overline{\sigma}_1 = \sigma_1$ dans Ω_1, où σ_1 est la solution de l'équation (2.1.1) dans Ω_1 obtenue dans la proposition 3.1. Alors on a*

$$\sigma_2(m,z) \geq 0 \qquad \forall (m,z) \in \Omega_2. \tag{2.6.111}$$

En outre, σ_2 est continue dans $\Omega_{2,1}$ et continue dans $\Omega_{2,2}$.

Démonstration. On procède d'une manière analogue à la démonstration du lemme 3.6. On rappelle d'abord que $\sigma = \sigma_2$ satisfait, sur chaque $\gamma^{(2)} \in \Gamma^{(2)}$, à l'équation (2.3.53) et que, en vertu de la définition de K, on a

$$\frac{m^{(2)}_{\gamma}(z)}{|u(\gamma;z)|} K[m^{(2)}_{\gamma}(z), z; \sigma, \sigma] \geq 0.$$

Rappelons que les conditions initiales sur S_1 sont données par (2.3.54) et elles sont non-négatives par l'hypothèse (2.1.8), tandis que celles sur Σ sont données par (2.5.91) et elles sont non-négatives en vertu du lemme 3.6. Par suite l'expression du second membre de l'équation (2.3.53) implique que $\sigma(\gamma;z) \geq 0$ là où $\sigma(\gamma;z)$ est bien définie.

La continuité de σ_2 résulte de la continuité de $\overline{\sigma}_0$ sur S_1, de celle de σ_1 sur Σ et du fait que, sur chaque $\gamma^{(2)} \in \Gamma^{(2)}$, σ_2 est la solution de l'équation (2.3.51), dont les coefficients sont continus. $\square$

Analoguement au cas précédent, on choisit un $\vartheta_2 > 0$ tel que

$$\int_{z_\Sigma(\gamma)-\vartheta_2}^{z_\Sigma(\gamma)} \frac{1}{|u(m^{(2)}_{\gamma}(z'), z')|}\, dz' \leq \tag{2.6.112}$$

$$\leq \frac{1}{4\max(C_h + C_\beta \overline{A}_1(m^+_\Sigma - \overline{m}_a), C_\beta(\overline{m}_B - m^-_\Sigma))},$$

et on pose

$$\mu_2 = \sup_{(m,z)\in\Omega_2^{(\vartheta_2)}} \frac{1}{|u(m,z)|}, \qquad \Omega_2^{(\vartheta_2)} = \bigcup_{\gamma^{(2)}\in\Gamma^{(2)}} \{(m,z) \in \gamma^{(2)} \,|\; z \leq z_\Sigma(\gamma) - \vartheta_2 \,\}, \tag{2.6.113}$$

$$a_3 = 2(C_h + C_\beta \overline{A}_1(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a))\mu_2, \qquad a_4 = 2C_\beta(\overline{m}_B - m_\Sigma^-)\mu_2. \tag{2.6.114}$$

On a le lemme suivant.

Lemme 3.9. *Soit $\sigma = \sigma_2$ la solution de l'équation (2.1.1) dans Ω_2, obtenue dans la proposition 3.2 (sous les conditions de la proposition 3.2) avec $\overline{\sigma}_1 = \sigma_1$ dans Ω_1, où σ_1 est la solution de l'équation (2.1.1) dans Ω_1 obtenue dans la proposition 3.1. Alors on a*

$$\sigma_2(m,z) \leq \overline{A}_2 \qquad \forall (m,z) \in \Omega_2, \tag{2.6.115}$$

où

$$\overline{A}_2 = \frac{2e^{a_3} \max(\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_1)}, \overline{A}_1)}{1 - 2\frac{a_4}{a_3} \max(\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_1)}, \overline{A}_1)(e^{a_3} - 1)}. \tag{2.6.116}$$

Démonstration. Comme dans la démonstration du lemme 3.7, on considère l'équation (2.3.53) vérifiée par σ sur $\gamma^{(2)}$. En vertu des lemmes 3.6 et 3.8 on a $\sigma_1 \geq 0$ et $\sigma_2 \geq 0$, et donc

$$\sigma(\gamma; z) L[m_\gamma^{(2)}(z), z; \sigma] \geq 0.$$

Compte tenu de cette relation, on déduit de (2.3.53) que

$$|\sigma(\gamma;z)| \leq \max\left(\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_1)}, \|\overline{\sigma}_1\big|_\Sigma\|_{L^\infty(\Sigma)}\right) + C_h \int_{z_2^{(\gamma)}}^z \frac{|\sigma(m_\gamma^{(2)}, z')|}{u(m_\gamma^{(2)}, z')} dz' +$$

$$+ C_\beta \int_{z_2^{(\gamma)}}^z \frac{1}{u(m_\gamma^{(2)}, z')} \int_0^{m_\Sigma} |\sigma(m_\gamma^{(2)}, z')\sigma(m', z')| dm' dz' +$$

$$+ C_\beta \int_{z_2^{(\gamma)}}^z \frac{1}{u(m_\gamma^{(2)}, z')} \int_{m_\Sigma}^\infty |\sigma(m_\gamma^{(2)}, z')\sigma(m', z')| dm' dz',$$

ce qui implique que

$$|\sigma(\gamma;z)| \leq \max(\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty}, \|\sigma_1\big|_\Sigma\|_{L^\infty}) + \tag{2.6.117}$$

$$+ (C_h + C_\beta \overline{A}_1(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a)) \int_{z_2^{(\gamma)}}^z \frac{\|\sigma(\cdot, z')\|_{L^\infty}}{u(m_\gamma^{(2)}, z')} dz' + C_\beta(\overline{m}_B - m_\Sigma^-) \int_{z_2^{(\gamma)}}^z \frac{\|\sigma(\cdot, z')\|_{L^\infty}^2}{u(m_\gamma^{(2)}; z')} dz'.$$

L'inégalité (2.6.117) étant établie, on peut procéder d'une manière analogue à la démonstration du lemme 3.5 (en particulier, à partir de (2.5.97)), en y remplaçant c_3 et c_4 par a_3 et a_4 définis dans (2.6.114). De la sorte, en rappelant la continuité de σ_1 sur chaque $\gamma^{(1)} \in \Gamma^{(1)}$, on aura

$$\|\sigma(\cdot,z)\|_{L^\infty} \leq \frac{2e^{a_3(1-z)}\max(\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_1)},\overline{A}_1)}{1-2\frac{a_4}{a_3}(e^{a_3(1-z)}-1)\max(\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_1)},\overline{A}_1)} \qquad \text{pour } 0 \leq z \leq 1.$$

A l'aide du lemme 3.7 on en déduit le lemme. $\square$

2.7 Existence de la solution dans Ω

On va maintenant compléter la démonstration du théorème 3.1. On commence par définir l'ensemble

$$B_0 = \left\{\sigma_2 \in L^\infty(\Omega_2), 0 \leq \sigma_2(m,z) \leq \overline{A}_2\right\} \tag{2.7.118}$$

où $\overline{A}_2$ est la constante définie dans (2.6.116).

Si $\overline{\sigma}_2 \in B_0$, alors en vertu de la proposition 3.1 et des lemmes 3.6 et 3.7 il existe une unique fonction $\sigma_1(m,z)$ qui vérifie dans Ω_1 l'équation (2.1.1) dans laquelle on substitue $\overline{\sigma}_2(m,z)$ à la place de $\sigma(m,z)$ pour $(m,z) \in \Omega_2$, la condition (2.1.4) (restreinte à $S_0 \cup S_a$) et l'inégalité

$$0 \leq \sigma_1(m,z) \leq \overline{A}_1 \qquad \forall (m,z) \in \Omega_1,$$

où $\overline{A}_1$ est la constante définie dans (2.6.107). Ceci nous permet de définir l'opérateur

$$G_1 : B_0 \to L^\infty(\Omega_1), \tag{2.7.119}$$

qui, à $\overline{\sigma}_2 \in B_0$, associe la solution $\sigma_1 \in L^\infty(\Omega_1)$ obtenue dans la proposition 3.1 et on a

$$G_1(B_0) \subset \{\, \sigma_1 \in L^\infty(\Omega_1) \,|\, 0 \leq \sigma_1(m,z) \leq \overline{A}_1 \ \forall (m,z) \in \Omega_1 \,\}. \tag{2.7.120}$$

Maintenant, à l'aide de la proposition 3.2, on peut définir l'opérateur

$$G_2 : G_1(B_0) \to L^\infty(\Omega_2), \tag{2.7.121}$$

qui, à $\sigma_1 \in G_1(B_0)$, associe la fonction $\sigma_2 \in L^\infty(\Omega_2)$ qui vérifie dans Ω_2 l'équation (2.1.1) dans laquelle on substitue $\sigma_1(m,z)$ à la place de $\sigma(m,z)$ pour $(m,z) \in \Omega_1$ et la condition (2.1.4) sur S_1 et la condition $\sigma(m,z) = \sigma_1(m,z)$ pour $(m,z) \in \Sigma$. En outre, en vertu des lemmes 3.8 et 3.9, on a

$$G_2(G_1(B_0)) \subset B_0. \tag{2.7.122}$$

On pose

$$G = G_2 \circ G_1, \tag{2.7.123}$$

$$B = \overline{\mathrm{conv}(G(B_0))}, \tag{2.7.124}$$

où la fermeture $\overline{\cdot}$ est prise par rapport à la topologie induite par la norme

$$\|\varphi\| = \sup_{(m,z)\in\Omega_2} |\varphi(m,z)|,$$

tandis que "conv(A)" désigne l'ensemble convexe le plus petit qui contient A.

Lemme 3.10. *On a*

$$G(B) \subset B, \tag{2.7.125}$$

et

$$B \textit{ est convexe.} \tag{2.7.126}$$

Démonstration. L'affirmation (2.7.126) résulte immédiatement de la définition (2.7.124), tandis que (2.7.125) se déduit de (2.7.122) et des définitions (2.7.123)-(2.7.124). □

On va démontrer l'équicontinuité de $G(B_0)$ dans $\Omega_{2,2}$ et celle dans $\Omega_{2,1}$.

Lemme 3.11. *Il existe une fonction continue $\widetilde{\varepsilon}(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que*

$$\widetilde{\varepsilon}(r) \to 0 \qquad \textit{pour} \quad r \to 0 \tag{2.7.127}$$

et que, quel que soit $\sigma_2 \in G(B_0)$ et quel que soit $((m_1,z_1),(m_2,z_2)) \in \Omega_{2,2} \times \Omega_{2,2}$ ou $\in \Omega_{2,1} \times \Omega_{2,1}$, on ait

$$|\sigma_2(m_1,z_1) - \sigma_2(m_2,z_2)| \leq \widetilde{\varepsilon}(|m_1 - m_2| + |z_2 - z_1|). \tag{2.7.128}$$

Démonstration. Comme la démonstration de (2.7.128) pour $((m_1,z_1),(m_2,z_2)) \in \Omega_{2,1} \times \Omega_{2,1}$ ne diffère pas beaucoup de celle pour $((m_1,z_1),(m_2,z_2)) \in \Omega_{2,2} \times \Omega_{2,2}$, on examine de manière détaillée le cas de $((m_1,z_1),(m_2,z_2)) \in \Omega_{2,2} \times \Omega_{2,2}$ et nous nous limiterons à des commentaires essentielles pour le cas de $((m_1,z_1),(m_2,z_2)) \in \Omega_{2,1} \times \Omega_{2,1}$.

Considérons deux points (m_1,z_1) et (m_2,z_2) appartenant à $\Omega_{2,2}$ et supposons, sans restreindre la généralité, que $z_1 \leq z_2$. Désignons par γ_1 (resp. γ_2) la caractéristique qui passe par (m_1,z_1) (resp. (m_2,z_2)). On pose en outre

$$m_1^{(z_2)} = m_{\gamma_1}^{(2)}(z_2).$$

En rappelant la définition des caractéristiques γ (voir (2.2.26)-(2.2.27)) et les hypothèses sur $u(m,z)$ et $h_{gl}(m,z)$, on voit aisément qu'il existe une fonction $\widetilde{d}_m$ telle que

$$|m_1^{(z_2)} - m_2| = |m_{\gamma_1}^{(2)}(z_2) - m_2| \leq \widetilde{d}_m(|m_1 - m_2| + |z_2 - z_1|). \tag{2.7.129}$$

En vertu de (2.7.129), pour démontrer l'existence d'une fonction $\widetilde{\varepsilon}(\cdot)$ vérifiant (2.7.127) et (2.7.128), il suffit de montrer l'existence d'une fonction continue $\widetilde{\varepsilon}_z(\cdot)$ telle que

$$\widetilde{\varepsilon}_z(r) \to 0 \qquad \text{pour} \quad r \to 0, \tag{2.7.130}$$

$$|\sigma_2(\gamma; z_1) - \sigma_2(\gamma; z_2)| \leq \widetilde{\varepsilon}_r(|z_2 - z_1|) \tag{2.7.131}$$

(ici $\sigma_2(\gamma; z)$ désigne la valeur de $\sigma_2(m,z)$ sur la courbe γ comme dans (2.3.53)) et l'existence d'une fonction continue $\widetilde{\varepsilon}_m(\cdot)$ telle que

$$\widetilde{\varepsilon}_m(r) \to 0 \qquad \text{pour} \quad r \to 0, \tag{2.7.132}$$

$$|\sigma_2(m_1, z) - \sigma_2(m_2, z)| \leq \widetilde{\varepsilon}_m(|m_1 - m_2|). \tag{2.7.133}$$

Or, de l'équation (2.3.53) on déduit que

$$|\sigma_2(\gamma; z_1) - \sigma_2(\gamma; z_2)| = \int_{z_1}^{z_2} \Big|\frac{\Phi(\gamma; z)}{u(\gamma; z)}\Big| dz,$$

où $\Phi(\gamma; z)$ est le second membre de (2.3.53) multiplié par $u(\gamma; z)$. Comme on le voit aisément, les hypothèses sur h_{gl}, u, β implique qu'il existe une constante C_1 telle que

$$|\Phi(\gamma; z)| \leq C_1$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$ et pour tout $z \in [0,1]$. Donc, d'après le corollaire du lemme 3.3, il existe une fonction continue $\widetilde{\varepsilon}_z(\cdot) : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ vérifiant (2.7.130) et (2.7.131).

Pour montrer l'existence de la fonction $\widetilde{\varepsilon}_m(\cdot)$, on considère un nombre ε strictement positif. Si $(m_1, z), (m_2, z) \in \Omega_{2,2}$, $(m_1, z) \in \gamma_1$, $(m_2, z) \in \gamma_2$, alors il résulte de l'équation (2.3.53) que

$$\sigma_2(m_1, z) - \sigma_2(m_2, z) = \sigma(\gamma_1; z) - \sigma(\gamma_2; z) = \tag{2.7.134}$$

$$= \sigma_2(m_{\gamma_1}^{(2)}, 1) - \sigma_2(m_{\gamma_2}^{(2)}, 1) + \int_1^z \Big(\frac{\Phi(\gamma_1; z')}{u(\gamma_1; z')} - \frac{\Phi(\gamma_2; z')}{u(\gamma_2; z')}\Big) dz'.$$

En vertu du corollaire du lemme 3.3 il existe un $\delta_{1,\varepsilon}$ tel que

$$\int_{\max(z,1-\delta_{1,\varepsilon})}^{1} \Big|\frac{\Phi(\gamma_1;z')}{u(\gamma_1;z')} - \frac{\Phi(\gamma_2;z')}{u(\gamma_2;z')}\Big| dz' \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.7.135}$$

D'autre part, comme les hypothèses sur $u(m,z)$ implique que

$$\sup_{(m,z)\in\Omega_{2,2},z\leq 1-\delta_{1,\varepsilon}} \frac{1}{|u(m,z)|} < \infty,$$

les hypothèses de la régularité des coefficients qui figurent dans le second membre de (2.3.53) impliquent que

$$\int_{z}^{\max(z,1-\delta_{1,\varepsilon})} \Big|\frac{\Phi(\gamma_1;z')}{u(\gamma_1;z')} - \frac{\Phi(\gamma_2;z')}{u(\gamma_2;z')}\Big| dz' \leq \varphi_{1,\varepsilon}(\mathrm{dist}(\gamma_1,\gamma_2)), \tag{2.7.136}$$

où $\varphi_{1,\varepsilon}(\cdot)$ est une fonction continue telle que $\varphi_{1,\varepsilon}(r) \to 0$ pour $r \to 0$, tandis que

$$\mathrm{dist}(\gamma_1,\gamma_2) = \sup_{z\in[0,1]} |m_{\gamma_1}^{(2)}(z) - m_{\gamma_2}^{(2)}(z)|. \tag{2.7.137}$$

On rappelle en outre que, comme le système d'équations (2.2.26)-(2.2.27) peut être résolu avec les conditions "initiales" $(m(t_0), z(t_0)) = (m_1, z)$ ou $(m(t_0), z(t_0)) = (m_2, z)$ dans toutes les deux directions de t et les coefficients sont des fonctions lipschitziennes, il existe une fonction continue $\widetilde{\delta}_m : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\mathrm{dist}(\gamma_1,\gamma_2) \leq \widetilde{\delta}_m(|m_1 - m_2|) \tag{2.7.138}$$

et que

$$\widetilde{\delta}_m(r) \to 0 \qquad \text{pour} \quad r \to 0.$$

Enfin, en vertu de la régularité supposée pour $\overline{\sigma}_0$, il existe une fonction continue φ_0 telle que $\varphi_0(r) \to 0$ pour $r \to 0$ et que

$$|\overline{\sigma}_0(m_1,1) - \overline{\sigma}_0(m_2,1)| \leq \varphi_0(|m_1 - m_2|).$$

On a donc

$$|\sigma_2(m_{\gamma_1}^{(2)},1) - \sigma_2(m_{\gamma_2}^{(2)},1)| \leq \varphi_0(\mathrm{dist}(\gamma_1,\gamma_2)). \tag{2.7.139}$$

Des relations (2.7.134)-(2.7.139) on déduit qu'il existe un $\delta_\varepsilon > 0$ tel que, si

$$|m_1 - m_2| \leq \delta_\varepsilon,$$

alors on ait

$$|\sigma_2(m_1, z) - \sigma_2(m_2, z)| \leq \varepsilon,$$

ce qui implique l'existence d'une fonction continue $\widetilde{\varepsilon}_m(\cdot)$ vérifiant (2.7.132) et (2.7.133). □

Corollaire.3.2. *L'ensemble B est compact dans la topologie induite par la norme $\|\varphi\| = \sup_{(m,z)\in\Omega_2} |\varphi(m, z)|$.*

Démonstration. D'après le lemme 3.11, $G(B_0)$ est équicontinu. Donc l'est aussi B. D'autre part, en vertu des lemmes 3.8 et 3.9, B est uniformément borné. Donc d'après le théorème d'Ascoli-Arzelà l'ensemble B est compact. □

Maintenant on va démontrer que l'opérateur G est continu.

Lemme 3.12. *L'opérateur G est continu de B dans lui même dans la topologie induite par la norme*

$$\|\varphi\| = \sup_{(m,z)\in\Omega_2} |\varphi(m, z)|.$$

Démonstration. On va montrer la continuité de G_1 et celle de G_2, qui impliqueront la continuité de G.

On va d'abord montrer que G_1 est continu. On remarque que, comme les fonctions appartenant à B sont continués à morceaux et celles de $G_1(B)$ sont continués, ici on peut utiliser la norme de L^∞. En effet, si on pose

$$\sigma_1 = G_1(\overline{\sigma}_2), \qquad \sigma_1^* = G_1(\overline{\sigma}_2^*), \qquad \Xi = \sigma_1 - \sigma_1^*, \qquad \Pi = \overline{\sigma}_2 - \overline{\sigma}_2^*, \tag{2.7.140}$$

on déduit de (2.3.51) (voir aussi (2.3.46), (2.3.47)) que, en désignant $\Xi(\gamma; z) = \sigma_1(\gamma; z) - \sigma_1^*(\gamma; z)$, etc..., on a

$$|\Xi(\gamma; z)| \leq C_h \int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{|\Xi(\gamma; z')|}{u(\gamma; z')} dz' + \tag{2.7.141}$$

$$+ C_\beta \int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{1}{u(\gamma; z')} \int_0^{m_\gamma(z')} \big(|\sigma_1(m', z')\Xi(m-m', z')| + |\sigma_1^*(m-m', z')\Xi(m', z')|\big) dm' dz' +$$

$$+ C_\beta \int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{\sigma_1(\gamma; z')}{u(\gamma; z')} \Big[\int_0^{m_\Sigma(z')} |\Xi(m', z')| dm' + \int_{m_\Sigma(z')}^{\infty} |\Pi(m', z')| dm' \Big] dz' +$$

$$+C_\beta \int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{|\Xi(\gamma;z')|}{u(\gamma;z')}\Big[\int_0^{m_\Sigma(z')} \sigma_1^*(m',z')dm' + \int_{m_\Sigma(z')}^{\infty} \overline{\sigma}_2^*(m',z')dm'\Big]dz',$$

où C_h et C_β sont les constantes définies dans (2.4.58)-(2.4.59).

Comme en vertu des lemmes 3.7-3.11 et de la définition de B les valeurs $\sigma_1(m,z)$, $\sigma_1^*(m,z)$, $\overline{\sigma}_2(m,z)$, $\overline{\sigma}_2^*(m,z)$ sont uniformément bornées et $\overline{\sigma}_2(m,z) = \overline{\sigma}_2^*(m,z) = 0$ pour $m \geq \overline{m}_B$, en vertu du corollaire du lemme 3.3 il existe un certain $\delta > 0$ tel que le second membre de (2.7.141) restreint à l'intégrale sur l'intervalle $[\min(z, z_1^{(\gamma)} - \delta), z]$ est majoré par $\frac{1}{2}\sup_{0\leq z'\leq z}(\|\Xi(\cdot,z')\|_{L^\infty} + \|\Pi(\cdot,z')\|_{L^\infty})$ et donc, compte tenu que $\frac{1}{u(m,z)}$ avec $z \leq z_1^{(\gamma)} - \delta$ est uniformément borné, on déduit de (2.7.141) que

$$|\Xi(\gamma;z)| \leq \frac{1}{2}\sup_{0\leq z'\leq z}(\|\Xi(\cdot,z')\|_{L^\infty} + \|\Pi(\cdot,z')\|_{L^\infty}) +$$

$$+C\int_{z_0^{(\gamma)}}^{\min(z,z_1^{(\gamma)}-\delta)} \|\Xi(\cdot,z')\|_{L^\infty}dz' + C'\int_{z_0^{(\gamma)}}^{\min(z,z_1^{(\gamma)}-\delta)} \|\Pi(\cdot,z')\|_{L^\infty}dz',$$

où C et C' sont deux constantes. Comme cette inégalité est valable pour tout $\gamma^{(1)} \in \Gamma^{(1)}$, on en déduit que

$$y(z) \leq \frac{1}{2}y(z) + C\int_0^z y(z')dz' + \big(\frac{1}{2} + C'\big)\|\Pi\|_{L^\infty(\Omega_2)},$$

c'est-à-dire

$$y(z) \leq 2C\int_0^z y(z')dz' + \big(1 + 2C'\big)\|\Pi\|_{L^\infty(\Omega_2)},$$

où

$$y(z) = \sup_{0\leq z'\leq z}\|\Xi(\cdot,z')\|_{L^\infty}.$$

Maintenant, on applique le lemme de Gronwall, on arrive à

$$y(z) \leq \big(1 + 2C'\big)\|\Pi\|_{L^\infty(\Omega_2)}e^{\int_0^z 1dz'}$$

On en déduit qu'il existe une constante C'' telle que

$$\|\Xi\|_{L^\infty(\Omega_2)} \leq C''\|\Pi\|_{L^\infty(\Omega_2)},$$

on à alors

$$\|G_1(\overline{\sigma}_2) - G_1(\overline{\sigma}_2^*)\| \leq C''\|\overline{\sigma}_2 - \overline{\sigma}_2^*,\|$$

ce qui prouve la continuité de G_1.

En ce qui concerne la continuité de G_2, on verra qu'elle peut être démontrée d'une manière analogue à celle de G_1. $\square$

Démonstration du théorème 3.1. En vertu des lemmes 3.10-3.12 et leur corollaire, B est convexe et compact, on a $G(B) \subset B$ et l'opérateur G est continu. Par conséquent d'après le théorème de Schauder il existe un élément $\overline{\sigma}_2 \in L^\infty(\Omega_2)$ tel que $G(\overline{\sigma}_2) = \overline{\sigma}_2$, c'est-à-dire $\overline{\sigma}_2 = \sigma_2$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Remarque 3.2. La constante $\overline{A}_0$ mensionnée dans l'énoncé du théorème 3.1 pourra être mieux déterminée. En effet la constante doit vérifier les conditions (2.4.62) et (2.5.89), qui peuvent être réécrites par

$$\overline{A}_0 < \frac{1}{2(e^{c_1(\overline{A}_0)} + \frac{c_2}{c_1(\overline{A}_0)}(e^{c_1(\overline{A}_0)} - 1))} = \psi_1(\overline{A}_0), \tag{2.7.142}$$

$$\max(\overline{A}_0, \overline{A}_1(\overline{A}_0)) + \frac{C_\beta}{2} T_2 \overline{A}_1^2(\overline{A}_0)(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a) \leq \tag{2.7.143}$$

$$\leq \frac{1}{2(e^{c_3(\overline{A}_0)} + \frac{c_4}{c_3(\overline{A}_0)}(e^{c_3(\overline{A}_0)} - 1))} = \psi_2(\overline{A}_0)$$

où

$$\overline{A}_1(\overline{A}_0) = \frac{2e^{a_1}\overline{A}_0}{1 - 2\frac{a_2}{a_1}\overline{A}_0(e^{a_1} - 1)},$$

$$c_1(\overline{A}_0) = 2(C_h + C_\beta \overline{A}_1(\overline{A}_0)(\overline{m}_B - m_\Sigma^-))M_1$$

$$c_3(\overline{A}_0) = (2C_h + 3C_\beta \overline{A}_1(\overline{A}_0)(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a) + C_\beta \overline{A}_1(\overline{A}_0)(\overline{m}_B - m_\Sigma^-))M_2.$$

Comme $\psi_1(0) > 0$, $\psi_2(0) > 0$, et que $\psi_1(\cdot)$ et $\psi_2(\cdot)$ sont continués, on peut trouver $\overline{A}_0 > 0$ tel que les inégalités (2.7.142) et (2.7.143) soient vérifiées.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons démontrer l'existence et l'unicité d'une solution stationnaire, d'une équation intégro-différentielle qui modélise le déplacement et la variation de la masse des gouttelettes.

Bibliographie

[1] Dubovski, P. B. : An iterative method for solving of the coagulation equation with space-nonhomogeneous velocity fields. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. **30** (1990), pp. 1755-1757 (English translation : pp. 116-117).

[2] Dubovski, P. B. : Solutions of a spatially inhomogeneous coagulation equation with particle fractionation taken into account. *Differential Equations*, vol. **26** (1990), pp. 508-513 (English translation : pp. 380-384).

[3] Dubovskii, P. B. : Solvability of the transport equation in coagulation and fragmentation kinetics (in Russian). *Izv. Ross. Akad. Nauk, Ser. Mat.* vol. **65** (2001), pp. 3-24.

[4] Fujita Yashima, H. : Modelación matemática del movimiento de la atmósfera con la transición de fase del agua. *Rev. Invest. Operac.*, vol. **34** (2013), pp. 93-104.

[5] Fujita Yashima, H., Campana, V., Aissaoui, M. Z. : Système d'équations d'un modèle du mouvement de l'air impliquant la transition de phase de l'eau dans l'atmosphère. *Ann. Math. Afr.*, vol. **2** (2011), pp. 66-92.

[6] Galkin, V. A. : Smoluchowski Equation of the Kinetic Theory of Coagulation for Spatially Nonuniform Systems. *Sov. Phys. Dokl.*, vol. **30** (12), 1985, pp. 1012-1014.

[7] Galkin, V. A., Dubovski, P. B. : Solution of the Coagulation Equation with Unbounded Kernels. *Differential Equations*, vol. **22**, 1986, pp. 504-509 (English translation : pp. 373-378).

[8] Kikoïne, A. K., Kikoïne, I. K. : *Physique moléculaire* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1979.

[9] Melzak, A. Z. : A scalar transport equation. *Transactions AMS*, vol. **85** (1957), pp. 547-560.

[10] Merad, M., Aissaoui, M.Z., Fujita Yashima, H. : Solution stationnaire de l'équation de coagulation de gouttelettes avec un vent vertical. REV. ROUMAINE MATH. PURES APPL. 62 (2017), 2, 309-338.

[11] Merad, M., Belhireche, H., Fujita Yashima, H. : Solution stationnaire de l'équation de coagulation de gouttelettes en chute avec le vent horizontal. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.* vol 129, (2013). pp 205–224.

[12] Merad, M. These de Doctorat LMD. Etude de l'équation de coagulation des gouttelettes en mouvement avec le vent. Université 8 Mai 1945. Guelma (2014).

[13] Müller, H. : Zur allgemeinen Theorie der raschen Koagulation. *Kolloidchem. Beib.*, vol. **27** (1928), pp. 223–250.

[14] Prodi, F., Battaglia, A. : *Meteorologia - Parte II, Microfisica.* Grafica Pucci, Roma, 2004. (voir aussi le site :
http ://www.meteo.uni-bonn.de/mitarbeiter/battaglia/teaching.html).

[15] Selvaduray, S., Fujita Yashima, H. : Equazioni del moto dell'aria con la transizione di fase dell'acqua nei tre stati : gassoso, liquido e solido. A paraître sur *Memorie Accad. Sci. Torino.*

[16] Sheng, P.-X., Mao, J.-T., Li, J.-G., Zhang, A.-C., Sang, J.-G., Pan, N.-X. : *Physique de l'atmosphère* (en chinois). Publ. Univ. Pékin, Pékin, 2003.