République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles Et Analyse Numérique**

Par : **MENAI Chayma**

Intitulé

Estimation d'erreur de certaines règles de quadrature impliquant au plus cinq points

Dirigé par : Dr. Meftah Badreddine

Devant le jury

PRESIDENT	Dr . LAKHAL	Fahim	Pr.	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr . MEFTAH	Badreddine	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. AZZOUZA	Noureddine	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr . ARIES	M. Essalih	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2024

شكر وعرفان

"...وَآخِرُ دَعْوَاهُمْ أَنِ الْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ" (يونس:10)

الحمد لله الذي ما تم جهد ولا ختم سعي إلا بفضله، وما تخطيت هذه العقبات والصعوبات إلا بتوفيقه.

فحمدا لك ربي حمدا لا عد ولا حد له وشكرا لك ربي أولا وآخرا على ما عليه أنا الآن.

اعترافا بالود وحفاظا للجميل وتقديرا للامتنان أتقدم بجزيل الشكر الذي لا يستحقه إلا من سعى حقا فكان السعي مشكورا لأولي الفضل:

على رأسهم أستاذي الفاضل الدكتور **"مفتاح بدر الدين"** المشرف على هذه المذكرة، والذي أفاض علي من بحر علمه وكنوز معرفته وحصيلة أفكاره لينير دربي لأرقى على درجات العلم وما عساي إلّا أن أقول:

"تقديري وشكري الجزيل لك، بوركت وبورك مسعاك وجُعل طريق العلم يرجو رضاك... دمت دخرا وحللت في الآفاق فخرا".

كما أتوجه بالشكر والتقدير إلى اللجنة المشرفة على مناقشة مذكرة تخرجي.

والشكر موصول أيضا إلى كل من علمني حرفا، إلى من أزالوا غيمة الجهل برياح العلم، إلى أساتذتي المحترمين فردا فردا الذين كان لهم كل الفضل في تكويني خلال مسيرتي الدراسية والجامعية.

وكما لا أنسى كل من دعمني وشجعني بالكلمة الطيبة والابتسامة والدعاء.

شكرا جزيل الشكر.

إهداء

بسم خالقي وميسر أموري وعصمت أمري، لك كل الحمد والامتنان ...

إلى سكان قلبي:

إلى الرجل الأبرز الأول في حياتي الذي أنار دربي والسراج الذي لا ينطفئ نوره بقلبي، إلى من كلل العرق جبينه وهو يعلمني أن الحياة صراع وسلاحها العلم.

(والدي العزيز حفظه الله وبارك في عمره)

إلى نبراس أيامي ووهج حياتي من أفنت عمرها في سبيل أن أحقق طموحاتي وأحلق في أعلى المراتب، إلى من سهرت وساندت وكافحت دوما من أجل أن تراني ألبس قلادة شرف التخرج.

(والدتي العزيزة شفاها الله وبارك في عمرها)

إلى الشموع التي تنير طريقي إلى ضلعي الثابت وأمان أيامي، إلى من شددت عضدي بهم، إلى الداعمين الساندين، إلى أرضي الصلبة وجداري المتين من يذكروني بمدى قوتي واستطاعتي.

(إخوتي وأخواتي)

لكل من كان عونا وسندا في هذا الطريق، للأصدقاء ورفقاء السنين وأصحاب الشدائد والأزمات، إلى من أفاضني بمشاعره ونصائحه المخلصة، إلى الذين شاركوني هذا الطريق وهونوا تعبه وشقاءه.

(صديقاتي وأصدقائي)

لله الشكر كله أن وفقني لهذه اللحظة، فالحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف المرسلين.

ملخص

في هذه المذكرة، سنركز على دراسة المتراجحات التكاملية من نوع نيوتن-كوتس.

في الفصل الأول، سنستعرض بعض التعريفات الأساسية، مثل التكامل التقريبي، بالإضافة إلى بعض الصيغ التربيعية المعروفة التي سنحتاجها في الفصول اللاحقة.

في الفصل الثاني، سنبحث في المتراجحات من نوع نيوتن-كوتس ذات التباين المحدود، مع تخصيص جزء من هذا الفصل للنتائج الجديدة في هذا المجال.

الفصل الثالث، سيخصص لدراسة المتراجحات من نوع نيوتن-كوتس فيما يتعلق بالدوال الليبشيتزية والمحدودة,

أما الفصل الرابع، فسيخصص لدراسة المتراجحات من نوع نيوتن-كوتس للدوال التي تنتمي مشتقاتها للفضاء L^p.

و في الفصل الأخير، سندرس المتراجحات من نوع نيوتن-كوتس للدوال التي مشتقاتها الأولى ممتدة s-محدبة.

الكلمات المفتاحية: تربيعات نيوتن-كوتس، الدالة s-محدبة، الدالة الليبشيتزية، الدالة المحدودة.

Abstract

In this memory, we will focus on the study of Newton-Cotes type integral inequalities.

In the first chapter, we will review some basic definitions, such as approximate integration and the quadrature formulation of simple interpolation type, as well as some known formulas that we will need in the following chapters.

In the second chapter, we will study Newton-Cotes type inequalities for functions of bounded variation, dedicating part of this chapter to new results in this field.

The third chapter will be devoted to the study of Newton-Cotes type inequalities for lipschitzian and bounded functions.

As for the fourth chapter, it will be dedicated to the study of Newton-Cotes type inequalities for functions whose first derivatives belong to the L^p space.

In the last chapter, we will focus on the study of Newton-Cotes type inequalities for functions whose first derivatives are extended s-convex.

Keywords: Newton-Cotes type integrals, s-convex functions, lipschitzian and bounded functions.

Résumé

Dans mémoire, nous nous concentrerons sur l'étude des inégalités intégrales de type Newton-Cotes.
Dans le premier chapitre, nous passerons en revue quelques définitions de base, telles que l'intégration approchée et la formulation quadrature de type interpolation simple, ainsi que quelques formules connues dont nous aurons besoin dans les chapitres suivants.
Dans le deuxième chapitre, nous étudierons les inégalités de type Newton-Cotes pour les fonctions à variation bornée, en consacrant une partie de ce chapitre aux nouveaux résultats dans ce domaine.
Le troisième chapitre sera consacré à l'étude des inégalités de type Newton-Cotes pour les fonctions lipschitziennes et bornées.
Quant au quatrième chapitre, il sera dédié à l'étude des inégalités de type Newton-Cotes pour les fonctions dont les dérivées premières appartiennent aux espaces L^p .
Dans le dernier chapitre, nous nous concentrerons sur l'étude des inégalités de type Newton-Cotes pour les fonctions dont les premières dérivées sont s-convexes étendue.

Mots clés: Intégrales de type Newton-Cotes, fonctions s-convexes, fonctions lipschitziennes, fonctions bornées.

Table des matières

Introduction

Les inégalités représentent un outil puissant et jouent un rôle important dans diverses branches des mathématiques modernes telles que la théorie qualitative des équations différentielles et des équations aux différences, la théorie des probabilités et des statistiques, l'analyse réelle, l'analyse complexe et l'analyse numérique. Plus précisément dans l'estimation de l'erreur des quadratures, qui est le but de ce travail.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier l'estimation d'erreur de plusieurs quadratures de type Newton-Cotes pour différentes classes de fonctions, à savoir la classe de fonctions à variation bornée, la classe des fonctions lipschitziennes, les fonctions bornées, les fonctions convexes et les fonctions résidant dans les espaces L_p. Notons qu'à chaque chapitre, nous commencerons par un petit rappel de quelques notions de base et outils qui seront sollicités. Ensuite, nous énoncerons quelques résultats connus dans la littérature avant d'établir nos résultats principaux. Enfin, nous conclurons par une discussion des résultats pouvant découler de nos résultats principaux ainsi que des résultats existants, dont ces derniers seront présentés sous forme d'une remarque globale.

Ce mémoire est structuré comme suit :

Le premier chapitre traite les inégalités de type Newton-Cotes pour les fonctions à variation bornée.

Le deuxième chapitre étudie les inégalités de type Newton-Cotes pour les fonctions lipschitziennes et les fonctions bornées.

Le troisième chapitre est dévoué aux inégalités de type Newton-Cotes pour les fonctions appartenant aux espaces L_p avec $1 \leq p \leq \infty$.

Tandis que le quatrième chapitre discute les inégalités de type Newton-Cotes sous contrainte de la convexité.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous donnerons un petit rappel d'analyse numérique portant sur l'intégration approchée, ainsi que quelques quadratures de Newton-Cotes impliquant au plus cinq point (voir [17]).

1.1 L'intégration approchée

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a, b]$, on appel intégrale de f sur $[a, b]$ la quantité ci-dessous notée par I

$$I = \int_a^b f(t)dt. \tag{1.1}$$

L'intégration numérique consiste à remplacer l'intégrale (1.1) par une somme discrète sur un nombre fini de points.

$$I \approx I_N = (b-a)\sum_{i=0}^{N} w_i f(t_i), \tag{1.2}$$

où w_i, t_i sont des valeurs à déterminer qui dépendent de la méthode utilisée. De plus, chaque méthode doit satisfaire la condition

$$\lim_{N \to \infty} I_N = I. \tag{1.3}$$

Tout simplement, l'intégrale numérique est calculée à partir de l'évaluation de la fonction f en un nombre de point N distincts.

Ces méthodes sont appelées les formules de quadrature. Plusieurs types subsistent dans la littérature, parmi ses méthodes.

1.1.1 Formulation de quadrature de type interpolation simple

Ces formules sont également appelées les méthodes de Cotes ou de Newton-Cotes.

Le principe général des méthodes de Newton-Cotes simples est d'approximer la fonction $f(t)$ à intégrer par un polynôme $P(t)$ de degré p qui coïncide avec $f(x)$ en $p+1$ points distincts et équidistants entre les bornes a et b.

Ces points sont donnés par la relation suivante :

$$t_i = a + ih, i = 0, 1..., p \text{ où } h = \tfrac{b-a}{p}. \tag{1.4}$$

Ainsi, nous aurons :

$$P(t_i) = f_i = f(t_i), \forall i \in \{0, 1, ..., p\}. \tag{1.5}$$

Dont la formule est donnée par :

$$\widetilde{I} = \int_a^b P(t)dt. \tag{1.6}$$

Remarque 1.1 *Des polynômes de degrés différents définissent des méthodes différentes.*

1.2 Quelques quadratures

Pour approximer $I = \int_a^b f(t)dt$ on peut adapter l'une des méthodes suivantes selon les cas qui se présentent. Pour plus de détails nous renvoyons les lecteurs intéressés à consulter [31].

1.2.1 Quadratures à un point

Quadrature du point milieu

$$I \approx (b-a)\, f\left(\tfrac{a+b}{2}\right).$$

Quadrature d'Ostrowski

$$I \approx (b-a)\, f(x),$$

où $x \in [a,b]$.

1.2.2 Quadratures à deux points

Quadrature des trapèzes

$$I \approx \tfrac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right).$$

Quadrature deux points Ostrowski (Compagnon Ostrowski)

$$I \approx \tfrac{b-a}{2}\left(f(x) + f(a+b-x)\right),$$

où $x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$.

1.2.3 Quadratures à trois points

Quadrature de $\frac{1}{8}$-Simpson

$$I \approx \tfrac{b-a}{6} \left(f\left(a\right) + 4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f\left(b\right) \right).$$

Quadrature de Bullen

$$I \approx \tfrac{b-a}{4} \left(f\left(a\right) + 2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f\left(b\right) \right).$$

Quadrature de Simpson corrigée

$$I \approx \tfrac{b-a}{30} \left(7f\left(a\right) + 16f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + 7f\left(b\right) \right).$$

Quadrature de Spline

$$I \approx \tfrac{b-a}{16} \left(3f\left(a\right) + 10f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + 3f\left(b\right) \right).$$

Quadrature de Maclaurin

$$I \approx \tfrac{b-a}{8} \left(3f\left(\tfrac{5a+b}{6}\right) + 2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + 3f\left(\tfrac{a+5b}{6}\right) \right).$$

Quadrature d'Euler-Maclaurin corrigée

$$I \approx \tfrac{b-a}{80} \left(27f\left(\tfrac{5a+b}{6}\right) + 26f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + 27f\left(\tfrac{a+5b}{6}\right) \right).$$

1.2.4 Quadratures à quatre points

Quadrature de $\frac{3}{8}$-Simpson

$$I \approx \tfrac{b-a}{8}\left(f\left(a\right)+3f\left(\tfrac{2a+b}{3}\right)+3f\left(\tfrac{a+2b}{3}\right)+f\left(b\right)\right).$$

Quadrature de $\frac{3}{8}$-Simpson corrigée

$$I \approx \tfrac{b-a}{80}\left(13f\left(a\right)+27f\left(\tfrac{2a+b}{3}\right)+27f\left(\tfrac{a+2b}{3}\right)+13f\left(b\right)\right).$$

1.2.5 Quadratures à cinq points

Quadrature de Boole

$$I \approx \tfrac{b-a}{90}\left(7f\left(a\right)+32f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+12f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+32f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+7f\left(b\right)\right).$$

Quadrature de Bullen-Simpson

$$I \approx \tfrac{b-a}{12}\left(f\left(a\right)+4f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+4f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+f\left(b\right)\right).$$

Chapitre 2

Inégalités intégrales de type Newton-Cotes pour les fonctions à variation bornée

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à l'estimation d'erreur pour les quadratures admettant au plus cinq points pour les fonctions à variation bornée. Dans la première section, nous rappellerons quelques définitions ainsi que certaines propriétés fondamentales concernant les fonctions à variation bornée. La deuxième section sera consacrée aux résultats publiés traitant des inégalités intégrales pour les fonctions appartenant à cette classe de fonction. La troisième section sera dédiée aux nouveaux résultats qui sont soumis pour une éventuelle publication. Enfin, dans la dernière section, nous allons discuter certains cas particuliers qui peuvent découler de notre résultat principal.

2.1 Préliminaire

Considérons la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. $\Omega_i = \{\xi_{i,0} = a, \xi_{i,1}, ..., \xi_{i,n} = b\}$ une subdivision de $[a, b]$, $\mathcal{P}([a, b])$ la famille des partitions de $[a, b]$ et $\Delta f(\xi_i) = f(\xi_{i+1}) - f(\xi_i)$.

Définition 2.1 ([19, 30, 68]) *On dit que f est à variation bornée s'il existe $M > 0$ tel* *que pour toute subdivision Ω_i on a :*

$$\sum |\Delta f(\xi_i)| \leq M.$$

Définition 2.2 ([19, 30, 68]) *Soit f une fonction à variation bornée sur $[a, b]$, et $\sum(\mathcal{P})$ représente la somme $\sum |\Delta f(\xi_i)|$ correspondant à la partition $\mathcal{P}$ de $[a, b]$. La variation totale de f sur $[a, b]$ est notée par le nombre*

$$\overset{b}{\underset{a}{\vee}}(f) = \sup \left\{ \sum(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathcal{P}([a, b]) \right\}.$$

Exemple 2.1 *Les fonctions monotones sont des fonctions à variation bornée.*

Exemple 2.2 *La fonction $f(x) = [x]$ sur $[a, b]$, où $-\infty < a < b < +\infty$, est une fonction à variation bornée où $[x]$ désigne la partie entière de x.*

Remarque 2.1 *Une fonction continue n'est pas nécessairement à variation bornée.*

Exemple 2.3 *La fonctions* $\begin{cases} f(x) = x \sin \frac{1}{x} \;\; si\ x \neq 0 \\ 0 \;\; si\ x = 0 \end{cases}$ *est continue par contre elle n'est pas à variation bornée.*

Proposition 2.1 ([19, 30, 68]) *Une fonction réelle (continue) est à variation bornée si, et seulement si, elle est différence de deux fonctions monotones croissantes (continues). En particulier, une fonction à variation bornée admet au plus un nombre dénombrable de discontinuités de première espèce.*

2.1.1 Intégration au sens de Stieltjes

L'intégration de Stieltjes représente une généralisation de l'intégrale de Riemann, où les accroissements $x_{i+1} - x_i$ dans les sommes de Riemann sont remplacés par $g(x_{i+1}) - g(x_i)$, où g est une fonction à variation bornée.

Proposition 2.2 *Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions, où f est continue sur $[a,b]$ et g est une fonction à variation bornée sur $[a,b]$, alors nous avons :*

$$\int_a^b f(t)\, dg(t) = f(t)\, g(t)\big|_a^b - \int_a^b f'(t)\, g(t)\, dt. \tag{2.1}$$

Exemple 2.4 *Calculer l'intégrale suivante : $\int_0^3 (x^2-1)\, d(2x - [x])$, où $[x]$ est la partie entière de x.*

En appliquant la formule (2.1) on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^3 \left(x^2-1\right) d(2x-[x]) &= \left(x^2-1\right)(2x-[x])\big|_0^3 - \int_0^3 2x\,(2x-[x])\, dx \\ &= 24 - \left(\int_0^1 4x^2 dx + \int_1^2 \left(4x^2-2x\right) dx + \int_2^3 \left(4x^2-4x\right) dx\right) \\ &= 1.\end{aligned}$$

Remarque 2.2 *Toutes les propriétés de l'intégrale de Riemann restent valables.*

Lemme 2.1 ([19, 30]) *Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions, où f est continue sur $[a,b]$ et g est une fonction à variation bornée sur $[a,b]$, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\, dg(t)$ existe et de plus, on a :*

$$\left|\int_a^b f(t)\, dg(t)\right| \leq \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| \bigvee_a^b (g). \tag{2.2}$$

2.2 Quelques résultats connus

Plusieurs auteurs ont examiné différentes quadratures concernant les fonctions à variations bornées, parmi lesquels les travaux du Professeur Dragomir, ainsi que ceux de

Alomari, Budak, Sarikaya, Erden, Iftikhar, Kumam, Thounthong, etc. Nous rappelons certains résultats sans démonstration.

2.2.1 Quadrature à un point

Inégalité du point milieu

Théorème 2.1 ([24]) *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application à variation bornée dans $[a, b]$, alors l'inégalité suivante :*

$$\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\, dx \right| \leq \tfrac{1}{2} \bigvee_a^b (f),$$

est satisfaite, où $\bigvee_a^b (f)$ est la variation totale de f sur $[a, b]$.

Inégalité d'Ostrowski

Théorème 2.2 ([19]) *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application à variation bornée dans $[a, b]$, alors l'inégalité suivante :*

$$\left| f(x) - \tfrac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\, dx \right| \leq \left[\tfrac{1}{2} + \left| \tfrac{x - \frac{a+b}{2}}{b-a} \right| \right] \bigvee_a^b (f),$$

est satisfaite, où $\bigvee_a^b (f)$ est la variation totale de f sur $[a, b]$.

2.2.2 Quadrature à deux points

Inégalité des trapèzes

Théorème 2.3 ([26]) *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une application à variation bornée dans* $[a,b]$, *alors l'inégalité suivante :*

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \frac{1}{2} \bigvee_a^b (f),$$

est satisfaite, où $\bigvee_a^b (f)$ *est la variation totale de* f *sur* $[a,b]$.

Inégalité d'Ostrowski à deux points (Companaion Ostrowski)

Théorème 2.4 ([3, 28]) *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une application à variation bornée dans* $[a,b]$, *alors l'inégalité suivante :*

$$\left| \frac{f(x)+f(a+b-x)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \frac{1}{b-a} \left(\frac{b-a}{4} + \left| x - \frac{3a+b}{4} \right| \right) \bigvee_a^b (f),$$

est satisfaite, où $\bigvee_a^b (f)$ *est la variation totale de* f *sur* $[a,b]$.

2.2.3 Quadrature à trois points

Inégalité de $\frac{1}{8}$-Simpson

Théorème 2.5 ([22]) *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une application à variation bornée dans* $[a,b]$, *alors l'inégalité suivante :*

$$\left| \frac{1}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \frac{1}{3} \bigvee_a^b (f),$$

est satisfaite, où $\bigvee_a^b (f)$ *est la variation totale de* f *sur* $[a,b]$.

Inégalité de Bullen

Théorème 2.6 ([36]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application à variation bornée dans $[a,b]$, alors l'inégalité suivante :*

$$\left| \tfrac{1}{4} \left(f(a) + 2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) - \tfrac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| \leq \tfrac{1}{4} \bigvee_a^b (f),$$

est satisfaite, où $\bigvee\limits_a^b (f)$ est la variation totale de f sur $[a,b]$.

Inégalité paramétrique à trois points

Théorème 2.7 ([36]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application à variation bornée dans $[a,b]$, alors l'inégalité suivante :*

$$\left| \tfrac{\lambda}{2} f(a) + (1-\lambda) f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + \tfrac{\lambda}{2} f(b) - \tfrac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| \leq \tfrac{1}{2} \max\{\lambda, 1-\lambda\} \bigvee_a^b (f),$$

est satisfaite, où $\lambda \in [0,1]$ et $\bigvee\limits_a^b (f)$ est la variation totale de f sur $[a,b]$.

2.2.4 Quadrature à quatre points

Inégalité de $\frac{3}{8}$-Simpson

Théorème 2.8 ([30, 35]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application à variation bornée dans $[a,b]$, alors l'inégalité suivante :*

$$\left| \tfrac{1}{8} \left(f(a) + 3f\left(\tfrac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\tfrac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right) - \tfrac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| \leq \tfrac{5}{24} \bigvee_a^b (f),$$

est satisfaite, où $\bigvee\limits_a^b (f)$ est la variation totale de f sur $[a,b]$.

2.3 Nouveaux résultats

2.3.1 Inégalités intégrales de type Newton-Cotes pour les fonctions à variation bornée

Lemme 2.2 *Soit $\mathcal{S} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I°, $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in I^{\circ}$ avec $\mathcal{L}_1 < \mathcal{L}_2$, et $\mathcal{S}' \in L^1[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2]$, alors l'identité suivante :*

$$\mathcal{C}_{\lambda,\gamma}(\mathcal{L}_1, x, \mathcal{L}_2; \mathcal{S}) - \frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2} \mathcal{S}(u)\,du \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2} \mathcal{K}(u,x)\,\mathcal{S}(u)\,du \\
&= \frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\left(\int_{\mathcal{L}_1}^{x}\left(u-\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)d\mathcal{S}(u) + \int_{x}^{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}\left(u-\frac{(1+2\gamma)\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}\right)d\mathcal{S}(u)\right. \\
&\quad \left. + \int_{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}^{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}\left(u-\frac{\mathcal{L}_1+(1+2\gamma)\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}\right)d\mathcal{S}(u) + \int_{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}^{\mathcal{L}_2}\left(u-\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)d\mathcal{S}(u)\right),
\end{aligned}$$

est satisfaite, où

$$\begin{aligned}
&\mathcal{C}_{\lambda,\gamma}(\mathcal{L}_1, x, \mathcal{L}_2; \mathcal{S}) \\
&= \frac{\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{(1+\gamma)(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}\mathcal{S}(\mathcal{L}_1) + \frac{(\mathcal{L}_2-x)+(1-2\lambda)(x-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}\mathcal{S}(x) + \frac{\gamma}{1+\gamma}\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right) \\
&\quad + \frac{(\mathcal{L}_2-x)+(1-2\lambda)(x-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}\mathcal{S}(\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x) + \frac{\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{(1+\gamma)(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}\mathcal{S}(\mathcal{L}_2),
\end{aligned} \tag{2.4}$$

et

$$\mathcal{K}(u,x) = \begin{cases}
u - \frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma} & \textit{if } u \in [\mathcal{L}_1, x], \\
u - \frac{(1+2\gamma)\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)} & \textit{if } u \in \left[x, \frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right], \\
u - \frac{\mathcal{L}_1+(1+2\gamma)\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)} & \textit{if } u \in \left[\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}, \mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x\right], \\
u - \frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma} & \textit{if } u \in [\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x, \mathcal{L}_2],
\end{cases} \tag{2.5}$$

avec $\lambda, \gamma \in [0,1]$ *et* $x \in \left[\mathcal{L}_1, \frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right]$.

Preuve. Comme $\mathcal{S}$ est à variation bornée de plus $\left(u - \frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)$, $\left(u - \frac{(1+2\gamma)\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}\right)$, $\left(u - \frac{\mathcal{L}_1+(1+2\gamma)\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}\right)$ et $\left(u - \frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)$ sont continues sur $[\mathcal{L}_1, x]$, $\left[x, \frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right]$, $\left[\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}, \mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x\right]$ et $[\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x, \mathcal{L}_2]$, respectivement, alors toutes les intégrales de Riemann-Stieltjes existent. Maintenant, on utilise l'intégration par partie au sens de Riemann-Stieltjes (2.1), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{L}_1}^{x} \left(u - \frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right) d\mathcal{S}(u) \qquad (2.6)\\
&= \left(u - \frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right) \mathcal{S}(u)\Big|_{\mathcal{L}_1}^{x} - \int_{\mathcal{L}_1}^{x} \mathcal{S}(u)\, du\\
&= \frac{(1+\gamma-\lambda)(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\mathcal{S}(x) + \frac{\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\mathcal{S}(\mathcal{L}_1) - \int_{\mathcal{L}_1}^{x} \mathcal{S}(u)\, du.
\end{aligned}$$

D'une façon analogue, on a :

$$\begin{aligned}
&\int_{x}^{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}} \left(u - \frac{(1+2\gamma)\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}\right) d\mathcal{S}(u) \qquad (2.7)\\
&= \frac{\gamma(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)}\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right) + \frac{(\mathcal{L}_2-x)-(1+2\gamma)(x-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)}\mathcal{S}(x) - \int_{x}^{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}} \mathcal{S}(u)\, du,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}^{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x} \left(u - \frac{\mathcal{L}_1+(1+2\gamma)\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}\right) d\mathcal{S}(u) \qquad (2.8)\\
&= \frac{\mathcal{L}_2-x-(1+2\gamma)(x-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)}\mathcal{S}(\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x) + \frac{\gamma(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)}\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right) - \int_{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}^{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x} \mathcal{S}(u)\, du
\end{aligned}$$

et

$$\int_{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}^{\mathcal{L}_2}\left(u-\tfrac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)d\mathcal{S}(u) \tag{2.9}$$
$$=\tfrac{\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\mathcal{S}(\mathcal{L}_2)+\tfrac{(1+\gamma-\lambda)(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\mathcal{S}(\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x)-\int_{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du.$$

En additionnant les équations (2.6)-(2.9), puis en multipliant le résultat obtenu par $\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}$, on trouve (2.3). ■

Le résultat suivant est basé sur l'identité ci-dessus.

Théorème 2.9 *Soit $\mathcal{S}:[\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2]\to\mathbb{R}$ une application à variation bornée, alors on a :*

$$\left|\mathcal{C}_{\lambda,\gamma}(\mathcal{L}_1,x,\mathcal{L}_2;\mathcal{S})-\tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du\right| \tag{2.10}$$
$$\leq \tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\max\left\{\tfrac{1+\gamma+|1+\gamma-2\lambda|}{2(1+\gamma)}(x-\mathcal{L}_1),\tfrac{\gamma(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)},\tfrac{|\mathcal{L}_2-x-(1+2\gamma)(x-\mathcal{L}_1)|}{2(1+\gamma)}\right\}\bigvee_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}(\mathcal{S}),$$

où $\lambda,\gamma\in[0,1]$, $x\in\left[\mathcal{L}_1,\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right]$ et $\bigvee_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}(\mathcal{S})$ représente la variation totale de $\mathcal{S}$ sur $[\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2]$.

Preuve. Prenons la valeur absolue aux deux côtés de (2.3) et utilisons (2.2), on obtient :

$$\left|\mathcal{C}_{\lambda,\gamma}(\mathcal{L}_1,x,\mathcal{L}_2;\mathcal{S})-\tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du\right|$$
$$\leq \tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\left(\left|\int_{\mathcal{L}_1}^{x}\left(u-\tfrac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)d\mathcal{S}(u)\right|+\left|\int_{x}^{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}\left(u-\tfrac{(1+2\gamma)\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}\right)d\mathcal{S}(u)\right|\right.$$
$$\left.+\left|\int_{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}^{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}\left(u-\tfrac{\mathcal{L}_1+(1+2\gamma)\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}\right)d\mathcal{S}(u)\right|+\left|\int_{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}^{\mathcal{L}_2}\left(u-\tfrac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)d\mathcal{S}(u)\right|\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\left(\sup_{u\in[\mathcal{L}_1,x]}\left|u-\tfrac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right|\bigvee_{\mathcal{L}_1}^{x}(\mathcal{S})\right.\\
&\quad+\sup_{u\in\left[x,\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right]}\left|u-\tfrac{(1+2\gamma)\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}\right|\bigvee_{x}^{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}(\mathcal{S})\\
&\quad+\sup_{u\in\left[x,\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right]}\left|u-\tfrac{\mathcal{L}_1+(1+2\gamma)\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}\right|\bigvee_{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}^{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}(\mathcal{S})\\
&\quad\left.+\sup_{u\in[\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x,\mathcal{L}_2]}\left|u-\tfrac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right|\bigvee_{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}^{\mathcal{L}_2}(\mathcal{S})\right)\\
&= \tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\left(\max\left\{\tfrac{\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma},\tfrac{(1+\gamma-\lambda)(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right\}\bigvee_{\mathcal{L}_1}^{x}(\mathcal{S})\right.\\
&\quad+\max\left\{\tfrac{\gamma(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)},\tfrac{|\mathcal{L}_2-x-(1+2\gamma)(x-\mathcal{L}_1)|}{2(1+\gamma)}\right\}\bigvee_{x}^{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}(\mathcal{S})\\
&\quad+\max\left\{\tfrac{\gamma(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)},\tfrac{|\mathcal{L}_2-x-(1+2\gamma)(x-\mathcal{L}_1)|}{2(1+\gamma)}\right\}\bigvee_{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}^{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}(\mathcal{S})\\
&\quad\left.+\max\left\{\tfrac{\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma},\tfrac{(1+\gamma-\lambda)(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right\}\bigvee_{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}^{\mathcal{L}_2}(\mathcal{S})\right)\\
&= \tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\left(\tfrac{1+\gamma+|1+\gamma-2\lambda|}{2(1+\gamma)}(x-\mathcal{L}_1)\left(\bigvee_{\mathcal{L}_1}^{x}(\mathcal{S})+\bigvee_{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}^{\mathcal{L}_2}(\mathcal{S})\right)\right.\\
&\quad+\max\left\{\tfrac{\gamma(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)},\tfrac{|\mathcal{L}_2-x-(1+2\gamma)(x-\mathcal{L}_1)|}{2(1+\gamma)}\right\}\\
&\quad\left.\times\left(\bigvee_{x}^{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}(\mathcal{S})+\bigvee_{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}^{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}(\mathcal{S})\right)\right)\\
&= \tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\left(\tfrac{1+\gamma+|1+\gamma-2\lambda|}{2(1+\gamma)}(x-\mathcal{L}_1)\left(\bigvee_{\mathcal{L}_1}^{x}(\mathcal{S})+\bigvee_{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}^{\mathcal{L}_2}(\mathcal{S})\right)\right.\\
&\quad\left.+\max\left\{\tfrac{\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma},\tfrac{(1+\gamma-\lambda)(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right\}\left(\bigvee_{x}^{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}(\mathcal{S})+\bigvee_{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}^{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}(\mathcal{S})\right)\right)\\
&\leq \tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\max\left\{\tfrac{1+\gamma+|1+\gamma-2\lambda|}{2(1+\gamma)}(x-\mathcal{L}_1),\tfrac{\gamma(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)},\tfrac{|\mathcal{L}_2-x-(1+2\gamma)(x-\mathcal{L}_1)|}{2(1+\gamma)}\right\}\\
&\quad\times\left(\bigvee_{\mathcal{L}_1}^{x}(\mathcal{S})+\bigvee_{x}^{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}(\mathcal{S})+\bigvee_{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}^{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}(\mathcal{S})+\bigvee_{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}^{\mathcal{L}_2}(\mathcal{S})\right)\\
&= \tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\max\left\{\tfrac{1+\gamma+|1+\gamma-2\lambda|}{2(1+\gamma)}(x-\mathcal{L}_1),\tfrac{\gamma(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)},\tfrac{|\mathcal{L}_2-x-(1+2\gamma)(x-\mathcal{L}_1)|}{2(1+\gamma)}\right\}\bigvee_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}(\mathcal{S}).
\end{aligned}
$$

La preuve est ainsi achevée. ■

2.4 Discussion de quelques cas particuliers

Corollaire 2.1 *Dans le Théorème 2.9, si l'on prend* $x = \frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}$*, on obtient l'inégalité de type Simpson suivante :*

$$\begin{aligned} & \left| \tfrac{\lambda}{2(1+\gamma)} \mathcal{S}\left(\mathcal{L}_1\right) + \tfrac{1+\gamma-\lambda}{1+\gamma} \mathcal{S}\left(\tfrac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right) + \tfrac{\lambda}{2(1+\gamma)} \mathcal{S}\left(\mathcal{L}_2\right) - \tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1} \int\limits_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2} \mathcal{S}\left(u\right) du \right| \\ \leq \quad & \max\left\{ \tfrac{1+\gamma+|1+\gamma-2\lambda|}{4(1+\gamma)}, \tfrac{\gamma}{2(1+\gamma)} \right\} \bigvee_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2} \left(\mathcal{S}\right) = \tfrac{1+\gamma+|1+\gamma-2\lambda|}{4(1+\gamma)} \bigvee_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2} \left(\mathcal{S}\right). \end{aligned}$$

Corollaire 2.2 *Dans le Corollaire 2.1, si l'on prend* $\gamma = 0$ *et* $\lambda = \frac{7}{15}$*, on obtient l'inégalité de Simpson corrigée suivante :*

$$\left| \tfrac{1}{30} \left(7\mathcal{S}\left(\mathcal{L}_1\right) + 16\mathcal{S}\left(\tfrac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right) + 7\mathcal{S}\left(\mathcal{L}_2\right)\right) - \tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1} \int\limits_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2} \mathcal{S}\left(u\right) du \right| \leq \tfrac{4}{15} \bigvee_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2} \left(\mathcal{S}\right).$$

Corollaire 2.3 *Dans le Corollaire 2.1, si l'on prend* $\gamma = 0$ *et* $\lambda = \frac{3}{8}$*, on obtient l'inégalité de Spline suivante :*

$$\left| \left(\tfrac{1}{16} \left(3\mathcal{S}\left(\mathcal{L}_1\right) + 10\mathcal{S}\left(\tfrac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right) + 3\mathcal{S}\left(\mathcal{L}_2\right)\right)\right) - \tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1} \int\limits_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2} \mathcal{S}\left(u\right) du \right| \leq \tfrac{5}{16} \bigvee_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2} \left(\mathcal{S}\right).$$

Corollaire 2.4 *Dans le Théorème 2.9, si l'on prend* $x = \frac{3\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{4}, \lambda = \frac{14}{39}$ *et* $\gamma = \frac{2}{13}$*, on obtient l'inégalité de Boole suivante :*

$$\left| \tfrac{7\mathcal{S}(\mathcal{L}_1)+32\mathcal{S}\left(\frac{3\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{4}\right)+12\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+32\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+3\mathcal{L}_2}{4}\right)+7\mathcal{S}(\mathcal{L}_2)}{90} - \tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1} \int\limits_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2} \mathcal{S}\left(u\right) du \right| \leq \tfrac{11}{60} \bigvee_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2} \left(\mathcal{S}\right).$$

Corollaire 2.5 *Dans le Théorème 2.9, si l'on prend* $x = \frac{3\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{4}, \lambda = \frac{2}{5}$ *et* $\gamma = \frac{1}{5}$*, on* *obtient l'inégalité de Bullen-Simpson suivante :*

$$\left|\frac{\mathcal{S}(\mathcal{L}_1)+4\mathcal{S}\left(\frac{3\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{4}\right)+2\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+4\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+3\mathcal{L}_2}{4}\right)+\mathcal{S}(\mathcal{L}_2)}{12}-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du\right|\leq\frac{1}{6}\bigvee_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}(\mathcal{S}).$$

Corollaire 2.6 *Dans le Théorème 2.9, si l'on prend* $x=\frac{2\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{3},\lambda=\frac{3}{8}$ *et* $\gamma=0$, *on obtient l'inégalité de* $\frac{3}{8}$*-Simpson suivante :*

$$\left|\frac{1}{8}\left(\mathcal{S}(\mathcal{L}_1)+3\mathcal{S}\left(\frac{2\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{3}\right)+3\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+2\mathcal{L}_2}{3}\right)+\mathcal{S}(\mathcal{L}_2)\right)-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du\right|\leq\frac{5}{24}\bigvee_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}(\mathcal{S}).$$

Corollaire 2.7 *Dans le Théorème 2.9, si l'on prend* $x=\frac{5\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{6},\lambda=0$ *et* $\gamma=\frac{1}{3}$, *on obtient l'inégalité de Maclaurin suivante :*

$$\left|\frac{1}{8}\left(3\mathcal{S}\left(\frac{5\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{6}\right)+2\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+3\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+5\mathcal{L}_2}{6}\right)\right)-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du\right|\leq\frac{5}{24}\bigvee_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}(\mathcal{S}).$$

Corollaire 2.8 *Dans le Théorème 2.9, si l'on prend* $x=\frac{5\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{6},\lambda=0$ *et* $\gamma=\frac{13}{27}$, *on obtient l'inégalité corrigée d'Euler-Maclaurin suivante :*

$$\left|\frac{1}{80}\left(27\mathcal{S}\left(\frac{5\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{6}\right)+26\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+27\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+5\mathcal{L}_2}{6}\right)\right)-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du\right|\leq\frac{41}{240}\bigvee_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}(\mathcal{S}).$$

2.4.1 Remarques

1/ Le Théorème 2.9 sera réduit au Théorème 2.1, si l'on prend $x=\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}$ et $\lambda=0$.

2/ Le Théorème 2.9 sera réduit au Théorème 2.3, si l'on prend $x=\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2},\gamma=0$ et $\lambda=1$.

3/ Le Théorème 2.9 sera réduit au Théorème 2.4, si l'on prend $\lambda=\gamma=0$.

4/ Le Théorème 2.9 sera réduit au Théorème 2.5, si l'on prend $x=\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2},\gamma=0$ et $\lambda=\frac{1}{3}$.

5/ Le Théorème 2.9 sera réduit au Théorème 2.6, si l'on prend $x = \frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}, \gamma = 0$ et $\lambda = \frac{1}{2}$.

6/ Le Théorème 2.9 sera réduit au Théorème 2.7, si l'on prend $x = \frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}$ et $\gamma = 0$.

7/ Le Théorème 2.9 sera réduit au Théorème 2.7, si l'on prend $x = \frac{2\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{3}, \gamma = 0$ et $\lambda = \frac{3}{8}$.

Chapitre 3

Inégalités intégrales de type Newton-Cotes pour les fonctions lipschitziennes et les fonctions bornées

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à deux autres classes de fonctions qui ont été extensivement étudiées, connues sous le nom de la classe des fonctions lipschitziennes et la classe des fonctions bornées. Avant d'exposer notre travail, nous allons tout d'abord rappeler quelques notions et outils que nous solliciterons par la suite, puis nous énoncerons, sans démonstrations, des résultats établis par autrui. Enfin, nous discuterons nos nouveaux résultats, qui sont soumis pour une éventuelle publication.

3.0.2 Préliminaire

Considérons la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Définition 3.1 ([25]) *On dit que f est bornée s'il existe $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{M}$ deux constante réelles* *telles que pour tout $x \in [a,b]$, on a :*

$$\mathfrak{m} \leq f(x) \leq \mathfrak{M}.$$

Définition 3.2 ([25]) *On dit que f est lipschitzienne de rapport L sur $[a,b]$ si, pour tout $x, y \in [a,b]$, on a :*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Lemme 3.1 ([25]) *Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que f est Riemann intégrable sur $[a,b]$ et g est une fonction L-lipschitzienne, alors on a :*

$$\left|\int_a^b f(t)\,dg(t)\right| \leq L\int_a^b |f(t)|\,dt. \tag{3.1}$$

3.1 Quelques résultats connus

Les résultats suivants traitent les inégalités intégrales de type Newton-Cotes pour les fonctions lipschitziennes et les fonctions bornées et peuvent être facilement trouvés dans la littérature.

3.1.1 Quadrature à un point

Inégalité du point milieu

Théorème 3.1 ([25]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable dans $[a,b]$. Si f' est L-lipshitzienne, alors l'inégalité suivante :*

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{1}{4}(b-a)L,$$

est satisfaite.

Théorème 3.2 ([60]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable dans $[a,b]$. Si $f' \in L_1[a,b]$ et de plus bornée pour tout $x \in [a,b]$, alors l'inégalité suivante :*

$$\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \tfrac{(b-a)(\mathfrak{M}-\mathfrak{m})}{8},$$

est satisfaite.

Inégalité d'Ostrowski

Théorème 3.3 ([19]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable dans $[a,b]$. Si f' est L-lipshitzienne, alors l'inégalité suivante :*

$$\left| f(x) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \left[\tfrac{1}{4} + \left(\tfrac{x-\frac{a+b}{2}}{b-a}\right)^2\right](b-a)\,L,$$

est satisfaite.

3.1.2 Quadrature à deux points

Inégalité des trapèzes

Théorème 3.4 ([22]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable dans $[a,b]$. Si f' est L-lipshitzienne, alors l'inégalité suivante :*

$$\left| \tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \tfrac{1}{4}(b-a)\,L,$$

est satisfaite.

Théorème 3.5 ([66]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable dans $[a,b]$. Si*

$f' \in L_1[a,b]$ et de plus bornée pour tout $x \in [a,b]$, alors l'inégalité suivante :

$$\left| \tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx \right| \leq \tfrac{(b-a)(\mathfrak{M}-\mathfrak{m})}{8},$$

est satisfaite.

Inégalité d'Ostrowski à deux points (Companaion Ostrowski)

Théorème 3.6 ([33]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable dans $[a,b]$. Si f' est L-lipshitzienne, alors l'inégalité suivante :*

$$\left| \tfrac{f(x)+f(a+b-x)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx \right| \leq \tfrac{1}{b-a}\left((x-a)^2 + \left(\tfrac{a+b}{2}-x\right)^2 \right) L,$$

est satisfaite.

Théorème 3.7 ([1]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable dans $[a,b]$. Si $f' \in L_1[a,b]$ et de plus bornée pour tout $x \in [a,b]$, alors l'inégalité suivante :*

$$\left| \tfrac{f(x)+f(a+b-x)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx \right| \leq (b-a)\left(\tfrac{1}{16} + \left(\tfrac{x-\frac{3a+b}{4}}{b-a} \right)^2 \right) (\mathfrak{M}-\mathfrak{m}),$$

est satisfaite.

3.1.3 Quadrature à trois points

Inégalité de $\frac{1}{8}$-Simpson

Théorème 3.8 ([65]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable dans $[a,b]$. Si f' est L-lipshitzienne, alors l'inégalité suivante :*

$$\left| \tfrac{1}{6}\left(f(a) + 4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) - \tfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx \right| \leq \tfrac{5}{36}(b-a)L,$$

est satisfaite.

Théorème 3.9 ([66]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable dans $[a,b]$. Si $f' \in L_1[a,b]$ et de plus bornée pour tout $x \in [a,b]$, alors l'inégalité suivante :*

$$\left| \frac{1}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \frac{5(b-a)(\mathfrak{M}-\mathfrak{m})}{72},$$

est satisfaite.

Inégalité de Bullen

Théorème 3.10 ([65]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable dans $[a,b]$. Si f' est L-lipshitzienne, alors l'inégalité suivante :*

$$\left| \frac{1}{4}\left(f(a) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \frac{1}{8}(b-a)\,L,$$

est satisfaite.

Théorème 3.11 ([66]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable dans $[a,b]$. Si $f' \in L_1[a,b]$ et de plus bornée pour tout $x \in [a,b]$, alors l'inégalité suivante :*

$$\left| \frac{1}{4}\left(f(a) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \frac{(b-a)(\mathfrak{M}-\mathfrak{m})}{16},$$

est satisfaite.

Inégalité paramétrique à trois points

Théorème 3.12 ([65]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable dans $[a,b]$. Si f' est L-lipshitzienne, alors l'inégalité suivante :*

$$\left|\tfrac{\lambda}{2} f(a) + (1-\lambda) f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + \tfrac{\lambda}{2} f(b) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \tfrac{\lambda^2+(1-\lambda)^2}{4}(b-a)L,$$

est satisfaite.

Théorème 3.13 ([2]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable dans $[a,b]$. Si $f' \in L_1[a,b]$ et de plus bornée pour tout $x \in [a,b]$, alors l'inégalité suivante :*

$$\left|\tfrac{\lambda}{2} f(a) + (1-\lambda) f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + \tfrac{\lambda}{2} f(b) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \tfrac{\lambda^2+(1-\lambda)^2}{8}(b-a)(\mathfrak{M}-\mathfrak{m}),$$

est satisfaite.

3.1.4 Quadrature à quatre points

Inégalité de $\frac{3}{8}$-Simpson

Théorème 3.14 ([30]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable dans $[a,b]$. Si f' est L-lipshitzienne, alors l'inégalité suivante :*

$$\left|\tfrac{1}{8}\left(f(a) + 3f\left(\tfrac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\tfrac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \tfrac{25}{288}(b-a)L,$$

est satisfaite.

Théorème 3.15 ([2]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable dans $[a,b]$. Si*

$f' \in L_1[a,b]$ et de plus bornée pour tout $x \in [a,b]$, alors l'inégalité suivante :

$$\left| \frac{1}{8}\left(f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \frac{25(b-a)(\mathfrak{M}-\mathfrak{m})}{576},$$

est satisfaite.

3.2 Nouveaux résultats

Tout d'abord, notons que les résultats de cette section reposent sur l'identité fournie par le Lemme 2.2. On commence par le premier résultat qui concerne les fonctions dont les dérivées premières sont lipschitziennes.

Théorème 3.16 *Soit $\mathcal{S} : [\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2] \to \mathbb{R}$ une application L-Lipschitzienne sur $[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2]$, alors on a :*

$$\left| \mathcal{C}_{\lambda,\gamma}(\mathcal{L}_1, x, \mathcal{L}_2; \mathcal{S}) - \frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2} \mathcal{S}(u)\,du \right|$$
$$\leq \begin{cases} \frac{L}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\left(\left(\frac{\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)^2 + \left(\frac{(1+\gamma-\lambda)(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)^2 + \left(\frac{\gamma(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)}\right)^2 \right. \\ \quad \left. + \left(\frac{\mathcal{L}_2-x-(1+2\gamma)(x-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)}\right)^2\right) \qquad si\ \gamma \leq \frac{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}-x}{x-\mathcal{L}_1}, \\ \frac{L}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\left(\left(\frac{\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)^2 + \left(\frac{(1+\gamma-\lambda)(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)^2 + \left(\frac{\gamma(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)}\right)^2 \right. \\ \quad \left. - \left(\frac{(1+2\gamma)(x-\mathcal{L}_1)-(\mathcal{L}_2-x)}{2(1+\gamma)}\right)^2\right) \qquad si\ \gamma > \frac{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}-x}{x-\mathcal{L}_1}, \end{cases}$$

où $\lambda, \gamma \in [0,1]$ et $x \in \left[\mathcal{L}_1, \frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right]$.

Preuve. En appliquant la valeur absolue aux deux membres de (2.3) et en utilisant (3.1), on obtient :

$$\left| \mathcal{C}_{\lambda,\gamma}(\mathcal{L}_1, x, \mathcal{L}_2; \mathcal{S}) - \frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2} \mathcal{S}(u)\,du \right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{L}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\left(\int\limits_{\mathcal{L}_1}^{x}\left|u-\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right|du+\int\limits_{x}^{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}\left|u-\frac{(1+2\gamma)\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}\right|du\right.\\
&\quad\left.+\int\limits_{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}^{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}\left|u-\frac{\mathcal{L}_1+(1+2\gamma)\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}\right|du+\int\limits_{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}^{\mathcal{L}_2}\left|u-\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right|du\right)\\
&= \frac{L}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\left(\int\limits_{\mathcal{L}_1}^{\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}}\left(\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}-u\right)du\right.\\
&\quad+\int\limits_{\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}}^{x}\left(u-\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)du\\
&\quad+\int\limits_{x}^{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}\left|u-\frac{(1+2\gamma)\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}\right|du+\int\limits_{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}^{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}\left|u-\frac{\mathcal{L}_1+(1+2\gamma)\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}\right|du\\
&\quad\left.+\int\limits_{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}^{\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}}\left(\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}-u\right)du+\int\limits_{\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}}^{\mathcal{L}_2}\left(u-\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)du\right).
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Deux cas se présentent.

Si $\gamma > \frac{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}-x}{x-\mathcal{L}_1}$, alors (3.2) donne :

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathcal{C}_{\lambda,\gamma}\left(\mathcal{L}_1,x,\mathcal{L}_2;\mathcal{S}\right)-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int\limits_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}\left(u\right)du\right|\\
&\leq \frac{L}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\left(\int\limits_{\mathcal{L}_1}^{\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}}\left(\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}-u\right)du+\int\limits_{\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}}^{x}\left(u-\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)du\right.\\
&\quad+\int\limits_{x}^{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}\left(u-\frac{(1+2\gamma)\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}\right)du+\int\limits_{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}^{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}\left(\frac{\mathcal{L}_1+(1+2\gamma)\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}-u\right)du\\
&\quad\left.+\int\limits_{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}^{\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}}\left(\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}-u\right)du+\int\limits_{\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}}^{\mathcal{L}_2}\left(u-\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)du\right)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{L}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\left(\left(\frac{\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)^2+\left(\frac{(1+\gamma-\lambda)(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)^2+\left(\frac{\gamma(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)}\right)^2-\left(\frac{(1+2\gamma)(x-\mathcal{L}_1)-(\mathcal{L}_2-x)}{2(1+\gamma)}\right)^2\right).$$

Dans le cas où $\gamma \le \frac{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}-x}{x-\mathcal{L}_1}$, (3.2) entraîne :

$$\begin{aligned}
&\left|\mathcal{C}_{\lambda,\gamma}\left(\mathcal{L}_1,x,\mathcal{L}_2;\mathcal{S}\right)-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}\left(u\right)du\right| \\
\le\ & \frac{L}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\left(\int_{\mathcal{L}_1}^{\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}}\left(\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}-u\right)du\right. \\
&+\int_{\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}}^{x}\left(u-\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)du \\
&+\int_{x}^{\frac{(1+2\gamma)\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}}\left(\frac{(1+2\gamma)\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}-u\right)du+\int_{\frac{(1+2\gamma)\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}}^{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}\left(u-\frac{(1+2\gamma)\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}\right)du \\
&+\int_{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}^{\frac{\mathcal{L}_1+(1+2\gamma)\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}}\left(\frac{\mathcal{L}_1+(1+2\gamma)\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}-u\right)du+\int_{\frac{\mathcal{L}_1+(1+2\gamma)\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}}^{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}\left(u-\frac{\mathcal{L}_1+(1+2\gamma)\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}\right)du \\
&+\int_{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}^{\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}}\left(\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}-u\right)du \\
&\left.+\int_{\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}}^{\mathcal{L}_2}\left(u-\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)du\right) \\
=\ & \frac{L}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\left(\left(\frac{\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)^2+\left(\frac{(1+\gamma-\lambda)(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)^2+\left(\frac{\mathcal{L}_2-x-(1+2\gamma)(x-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)}\right)^2+\left(\frac{\gamma(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)}\right)^2\right).
\end{aligned}$$

La preuve est terminée. ■

Le résultat suivant traite les fonctions dont les dérivées premières sont bornées.

Théorème 3.17 *Soit* $\mathcal{S}:[\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2]\to\mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur* $[\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2]$. *Si* $\mathcal{S}'\in$

$L^1[\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2]$ et $\mathfrak{m} \leq \mathcal{S}'(u) \leq \mathfrak{M}$ pour tout $u \in [\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2]$, alors on a :

$$\left|\mathcal{C}_{\lambda,\gamma}(\mathcal{L}_1,x,\mathcal{L}_2;\mathcal{S}) - \tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du\right|$$
$$\leq \begin{cases} \frac{(\mathfrak{M}-\mathfrak{m})}{2(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}\left(\left(\frac{\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)^2+\left(\frac{(1+\gamma-\lambda)(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)^2+\left(\frac{\gamma(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)}\right)^2 \right. \\ \qquad \left. +\left(\frac{\mathcal{L}_2-x-(1+2\gamma)(x-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)}\right)^2\right) \ \textit{if } \gamma \leq \frac{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}-x}{x-\mathcal{L}_1}, \\ \frac{(\mathfrak{M}-\mathfrak{m})}{2(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}\left(\left(\frac{\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)^2+\left(\frac{(1+\gamma-\lambda)(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)^2+\left(\frac{\gamma(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)}\right)^2 \right. \\ \qquad \left. -\left(\frac{(1+2\gamma)(x-\mathcal{L}_1)-(\mathcal{L}_2-x)}{2(1+\gamma)}\right)^2\right) \quad \textit{if } \gamma > \frac{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}-x}{x-\mathcal{L}_1}, \end{cases}$$

où $\lambda,\gamma \in [0,1]$ et $x \in \left[\mathcal{L}_1, \frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right]$.

Preuve. Par un simple calcul d'intégrale on aboutit à :

$$\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{K}(t,x)\,dt = 0, \tag{3.3}$$

où $\mathcal{K}(t,x)$ est défini par (2.5).

Soit $\mathcal{C} = \frac{\mathfrak{m}+\mathfrak{M}}{2}$, d'après (2.3), on a :

$$\begin{aligned} & \mathcal{C}_{\lambda,\gamma}(\mathcal{L}_1,x,\mathcal{L}_2;\mathcal{S}) - \tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du \\ = \ & \tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{K}(t,x)\,d\mathcal{S}(t) = \tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{K}(t,x)\,\mathcal{S}'(t)dt = \tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{K}(t,x)\,(\mathcal{S}'(t)-\mathcal{C}+\mathcal{C})\,dt \\ = \ & \tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{K}(t,x)\,(\mathcal{S}'(t)-\mathcal{C})\,dt + \tfrac{\mathcal{C}}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{K}(t,x)\,dt \\ = \ & \tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{K}(t,x)\,(\mathcal{S}'(t)-\mathcal{C})\,dt, \end{aligned} \tag{3.4}$$

où nous avons utilisé (3.3). Maintenant, appliquons la valeur absolue aux deux membres de (3.4). On trouve :

$$\left|\mathcal{C}_{\lambda,\gamma}\left(\mathcal{L}_1,x,\mathcal{L}_2;\mathcal{S}\right)-\tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int\limits_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}\left(u\right)du\right|$$
$$\leq \tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int\limits_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\left|\mathcal{K}\left(t,x\right)\right|\left|\mathcal{S}'\left(t\right)-\mathcal{C}\right|dt\leq \tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\max_{t\in[\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2]}\left|\mathcal{S}'\left(t\right)-\mathcal{C}\right|\int\limits_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\left|\mathcal{K}\left(t,x\right)\right|dt. \tag{3.5}$$

D'autre part, on a :

$$\int\limits_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\left|\mathcal{K}\left(t,x\right)\right|dt=\begin{cases}\left(\frac{\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)^2+\left(\frac{(1+\gamma-\lambda)(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)^2+\left(\frac{\gamma(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)}\right)^2\\ \quad+\left(\frac{\mathcal{L}_2-x-(1+2\gamma)(x-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)}\right)^2 \text{ if } \gamma\leq\frac{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}-x}{x-\mathcal{L}_1},\\ \left(\frac{\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)^2+\left(\frac{(1+\gamma-\lambda)(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)^2+\left(\frac{\gamma(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)}\right)^2\\ \quad-\left(\frac{(1+2\gamma)(x-\mathcal{L}_1)-(\mathcal{L}_2-x)}{2(1+\gamma)}\right)^2\Bigg) \quad \text{ if } \gamma>\frac{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}-x}{x-\mathcal{L}_1},\end{cases} \tag{3.6}$$

et

$$\max_{t\in[\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2]}\left|\mathcal{S}'\left(t\right)-\mathcal{C}\right|\leq\tfrac{\mathfrak{M}-\mathfrak{m}}{2}. \tag{3.7}$$

En combinant (3.5)-(3.7), on obtient :

$$\left|\mathcal{C}_{\lambda,\gamma}\left(\mathcal{L}_1,x,\mathcal{L}_2;\mathcal{S}\right)-\tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int\limits_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}\left(u\right)du\right|$$
$$\leq\begin{cases}\frac{(\mathfrak{M}-\mathfrak{m})}{2(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}\left(\left(\frac{\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)^2+\left(\frac{(1+\gamma-\lambda)(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)^2+\left(\frac{\gamma(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)}\right)^2\right.\\ \quad\left.+\left(\frac{\mathcal{L}_2-x-(1+2\gamma)(x-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)}\right)^2\right) \text{ if } \gamma\leq\frac{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}-x}{x-\mathcal{L}_1},\\ \frac{(\mathfrak{M}-\mathfrak{m})}{2(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}\left(\left(\frac{\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)^2+\left(\frac{(1+\gamma-\lambda)(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)^2+\left(\frac{\gamma(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)}\right)^2\right.\\ \quad\left.-\left(\frac{(1+2\gamma)(x-\mathcal{L}_1)-(\mathcal{L}_2-x)}{2(1+\gamma)}\right)^2\right) \quad \text{ if } \gamma>\frac{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}-x}{x-\mathcal{L}_1}.\end{cases}$$

Ainsi, la preuve est achevée. ■

3.2.1 Discussion de quelques cas particuliers

Corollaire 3.1 *Dans le Théorème 3.16, si l'on prend* $x = \frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}$*, on obtient l'inégalité de type Simpson suivante :*

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\lambda}{2(1+\gamma)} \mathcal{S}(\mathcal{L}_1) + \frac{1+\gamma-\lambda}{1+\gamma} \mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right) + \frac{\lambda}{2(1+\gamma)} \mathcal{S}(\mathcal{L}_2) - \frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1} \int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2} \mathcal{S}(u)\, du \right| \\ \leq\ & \frac{\lambda^2+(1+\gamma-\lambda)^2}{4(1+\gamma)^2} (\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1) L. \end{aligned}$$

Corollaire 3.2 *Dans le Corollaire 3.1, si l'on prend* $\gamma = 0$ *et* $\lambda = \frac{7}{15}$*, on obtient l'inégalité de Simpson corrigée suivante :*

$$\left| \frac{1}{30} \left(7\mathcal{S}(\mathcal{L}_1) + 16\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right) + 7\mathcal{S}(\mathcal{L}_2)\right) - \frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1} \int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2} \mathcal{S}(u)\, du \right| \leq \frac{113}{900} (\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1) L.$$

Corollaire 3.3 *Dans le Corollaire 3.1, si l'on prend* $\gamma = 0$ *et* $\lambda = \frac{3}{8}$*, on obtient l'inégalité de Spline suivante :*

$$\left| \left(\frac{1}{16} \left(3\mathcal{S}(\mathcal{L}_1) + 10\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right) + 3\mathcal{S}(\mathcal{L}_2)\right)\right) - \frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1} \int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2} \mathcal{S}(u)\, du \right| \leq \frac{17}{128} (\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1) L.$$

Corollaire 3.4 *Dans le Théorème 3.16, si l'on prend* $x = \frac{3\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{4}, \lambda = \frac{14}{39}$ *et* $\gamma = \frac{2}{13}$*, on obtient l'inégalité de Boole suivante :*

$$\left| \frac{7\mathcal{S}(\mathcal{L}_1)+32\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+3\mathcal{L}_2}{4}\right)+12\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+32\mathcal{S}\left(\frac{3\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{4}\right)+7\mathcal{S}(\mathcal{L}_2)}{90} - \frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1} \int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2} \mathcal{S}(u)\, du \right| \leq \frac{239}{3240} (\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1) L.$$

Corollaire 3.5 *Dans le Théorème 3.16, si l'on prend* $x = \frac{3\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{4}, \lambda = \frac{2}{5}$ *et* $\gamma = \frac{1}{5}$*, on obtient l'inégalité de Bullen-Simpson suivante :*

$$\left| \frac{\mathcal{S}(\mathcal{L}_1)+4\mathcal{S}\left(\frac{3\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{4}\right)+2\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+4\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+3\mathcal{L}_2}{4}\right)+\mathcal{S}(\mathcal{L}_2)}{12} - \frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1} \int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2} \mathcal{S}(u)\, du \right| \leq \frac{5}{72} (\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1) L.$$

Corollaire 3.6 *Dans le Théorème 3.17, si l'on prend* $x = \frac{5\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{6}, \lambda = 0$ *et* $\gamma = \frac{1}{3}$*, on* *obtient l'inégalité de Maclaurin suivante :*

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{8}\left(3\mathcal{S}\left(\frac{5\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{6}\right)+2\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+3\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+5\mathcal{L}_2}{6}\right)\right)-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int\limits_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du \right| \\ \leq\ & \frac{25(\mathfrak{M}-\mathfrak{m})}{576}\left(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1\right). \end{aligned}$$

Corollaire 3.7 *Dans le Théorème 3.17, si l'on prend* $x=\frac{5\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{6}, \lambda=0$ *et* $\gamma=\frac{13}{27}$*, on obtient l'inégalité d'Euler-Maclaurin corrigée suivante :*

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{80}\left(27\mathcal{S}\left(\frac{5\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{6}\right)+26\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+27\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+5\mathcal{L}_2}{6}\right)\right)-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int\limits_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du \right| \\ \leq\ & \frac{2401(\mathfrak{M}-\mathfrak{m})}{57600}\left(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1\right). \end{aligned}$$

Corollaire 3.8 *Dans le Théorème 3.17, si l'on prend* $x=\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}$*, on obtient l'inégalité de type Simpson suivante :*

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\lambda}{2(1+\gamma)}\mathcal{S}(\mathcal{L}_1)+\frac{1+\gamma-\lambda}{1+\gamma}\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+\frac{\lambda}{2(1+\gamma)}\mathcal{S}(\mathcal{L}_2)-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int\limits_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du \right| \\ \leq\ & \frac{\left(\lambda^2+(1+\gamma-\lambda)^2\right)(\mathfrak{M}-\mathfrak{m})}{8(1+\gamma)^2}\left(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1\right). \end{aligned}$$

Corollaire 3.9 *Dans le Théorème 3.17, si l'on prend* $x=\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}, \lambda=\frac{7}{15}$ *et* $\gamma=0$*, on obtient l'inégalité de Simpson corrigée suivante :*

$$\left| \frac{1}{30}\left(7\mathcal{S}(\mathcal{L}_1)+16\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+7\mathcal{S}(\mathcal{L}_2)\right)-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int\limits_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du \right| \leq \frac{113(\mathfrak{M}-\mathfrak{m})}{1800}\left(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1\right).$$

Corollaire 3.10 *Dans le Théorème 3.17, si l'on prend* $x=\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}, \lambda=\frac{3}{8}$ *et* $\gamma=0$*, on obtient l'inégalité de spline suivante :*

$$\left| \left(\frac{1}{16}\left(3\mathcal{S}(\mathcal{L}_1)+10\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+3\mathcal{S}(\mathcal{L}_2)\right)\right)-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int\limits_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du \right| \leq \frac{17(\mathfrak{M}-\mathfrak{m})}{256}\left(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1\right).$$

Corollaire 3.11 *Dans le Théorème 3.17, si l'on prend* $x=\frac{3\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{4}, \lambda=\frac{14}{39}$ *et* $\gamma=\frac{2}{13}$*, on obtient l'inégalité de Boole suivante :*

$$\begin{aligned}&\left|\frac{7\mathcal{S}(\mathcal{L}_1)+32\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+3\mathcal{L}_2}{4}\right)+12\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+32\mathcal{S}\left(\frac{3\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{4}\right)+7\mathcal{S}(\mathcal{L}_2)}{90}-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int\limits_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du\right|\\ \leq\;& \frac{239(\mathfrak{M}-\mathfrak{m})}{6480}\left(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1\right).\end{aligned}$$

Corollaire 3.12 *Dans le Théorème 3.17, si l'on prend* $x=\frac{3\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{4}, \lambda=\frac{2}{5}$ *et* $\gamma=\frac{1}{5}$*, on obtient l'inégalité de Bullen-Simpson suivante :*

$$\left|\frac{\mathcal{S}(\mathcal{L}_1)+4\mathcal{S}\left(\frac{3\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{4}\right)+2\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+4\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+3\mathcal{L}_2}{4}\right)+\mathcal{S}(\mathcal{L}_2)}{12}-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int\limits_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du\right|\leq\frac{5(\mathfrak{M}-\mathfrak{m})}{144}\left(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1\right).$$

3.2.2 Remarques

1/ Le Théorème 2.16 sera réduit au Théorème 3.1, si l'on prend $x=\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}$ et $\lambda=0$.

2/ Le Théorème 2.16 sera réduit au Théorème 3.4, si l'on prend $x=\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}, \gamma=0$ et $\lambda=1$.

3/ Le Théorème 2.16 sera réduit au Théorème 3.6, si l'on prend $\lambda=\gamma=0$.

4/ Le Théorème 2.16 sera réduit au Théorème 3.8, si l'on prend $x=\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}, \gamma=0$ et $\lambda=\frac{1}{3}$.

5/ Le Théorème 2.16 sera réduit au Théorème 3.10, si l'on prend $x=\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}, \gamma=0$ et $\lambda=\frac{1}{2}$.

6/ Le Théorème 2.16 sera réduit au Théorème 3.12, si l'on prend $x=\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}$ et $\gamma=0$.

7/ Le Théorème 2.16 sera réduit au Théorème 3.14, si l'on prend $x=\frac{2\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{3}, \gamma=0$ et $\lambda=\frac{3}{8}$.

8/ Le Théorème 2.17 sera réduit au Théorème 3.2, si l'on prend $x=\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}$ et $\lambda=0$.

9/ Le Théorème 2.17 sera réduit au Théorème 3.5, si l'on prend $x=\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}, \gamma=0$ et $\lambda=1$.

10/ Le Théorème 2.17 sera réduit au Théorème 3.7, si l'on prend $\lambda=\gamma=0$.

11/ Le Théorème 2.17 sera réduit au Théorème 3.9, si l'on prend $x=\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}, \gamma=0$ et

$\lambda = \frac{1}{3}$.

12/ Le Théorème 2.17 sera réduit au Théorème 3.11, si l'on prend $x = \frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}, \gamma = 0$ et $\lambda = \frac{1}{2}$.

13/ Le Théorème 2.17 sera réduit au Théorème 3.13, si l'on prend $x = \frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}$ et $\gamma = 0$.

14/ Le Théorème 2.17 sera réduit au Théorème 3.15, si l'on prend $x = \frac{2\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{3}, \gamma = 0$ et $\lambda = \frac{3}{8}$.

Chapitre 4

Inégalités intégrales de type Newton-Cotes pour les fonctions dont les dérivées premières appartiennent aux espaces L^p avec $p \in [1, \infty]$

Dans ce chapitre, nous nous concentrerons sur la classe de fonctions dont les dérivées premières résident dans l'espace $L^p[a, b]$, où $p \in [1, \infty]$ ou simplement l'espace des fonctions dont les dérivées sont p-intégrables. Nous donnons tout d'abord un bref rappel de quelques notions utilisées dans ce chapitre.

4.0.3 Préliminaire

Considérons la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Définition 4.1 ([30]) *On dit que f est intégrable sur $[a,b]$ où $f \in L^1[a,b]$, si*

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx < \infty.$$

Définition 4.2 ([30]) *On dit que f est p-intégrable sur $[a,b]$ où $f \in L^p[a,b]$, si*

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Définition 4.3 ([30]) *On dit que f est essentiellement bornée sur $[a,b]$ où $f \in L_\infty[a,b]$, si*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| < \infty.$$

Théorème 4.1 ([61]) *Soit $p,q \geq 1$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Si $|f| \in L^p[a,b]$ et $|g| \in L^q[a,b]$, alors $|fg|$ est intégrable sur $[a,b]$ et on a :*

$$\int_a^b |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

4.1 Quelques résultats connus

Les résultats suivants traitent des inégalités de type Newton-Cotes pour les fonctions lipschitziennes et les fonctions bornées, ces dernières pouvant être facilement trouvées dans la littérature.

4.1.1 Quadrature à un point

Inégalité du point milieu

Théorème 4.2 ([11]) *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une application différentiable dans $[a,b]$. Si f' $\in L^p[a,b]$, on a :*

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{1+q}\right)^{\frac{1}{q}} \|f'\|_p.$$

Théorème 4.3 ([11]) *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une application différentiable dans* $[a,b]$. *Si* $f' \in L_\infty[a,b]$, *alors l'inégalité suivante :*

$$\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \tfrac{b-a}{4}\left\| f' \right\|_\infty ,$$

est satisfaite.

Théorème 4.4 ([11]) *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une application différentiable dans* $[a,b]$. *Si* $f' \in L^1[a,b]$, *alors l'inégalité suivante :*

$$\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \tfrac{1}{2}\left\| f' \right\|_1 ,$$

est satisfaite.

Inégalité d'Ostrowski

Théorème 4.5 ([11]) *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une application différentiable dans* $[a,b]$. *Si* $f' \in L^p[a,b]$, *alors l'inégalité suivante :*

$$\left| f(x) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \tfrac{1}{b-a}\left(\tfrac{(x-a)^{q+1}+(b-x)^{q+1}}{q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left\| f' \right\|_p ,$$

est satisfaite.

Théorème 4.6 ([11]) *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une application différentiable dans* $[a,b]$. *Si* $f' \in L_\infty[a,b]$, *alors l'inégalité suivante :*

$$\left| f(x) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \tfrac{(x-a)^2+(b-x)^2}{2(b-a)}\left\| f' \right\|_\infty ,$$

est satisfaite.

Théorème 4.7 ([11]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable dans $[a,b]$. Si f' $\in L^1[a,b]$, alors l'inégalité suivante :*

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \left[\frac{1}{2} + \frac{\left|x - \frac{a+b}{2}\right|}{b-a} \right] \|f'\|_1 ,$$

est satisfaite.

4.1.2 Quadrature à deux points

Inégalité des trapèzes

Théorème 4.8 ([12]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable dans $[a,b]$. Si f' $\in L^p[a,b]$, alors l'inégalité suivante :*

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{1+q}\right)^{\frac{1}{q}} \|f'\|_p ,$$

est satisfaite.

Théorème 4.9 ([12]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable dans $[a,b]$. Si f' $\in L_\infty[a,b]$, alors l'inégalité suivante :*

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \frac{(b-a)}{4} \|f'\|_\infty ,$$

est satisfaite.

Théorème 4.10 ([12]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable dans $[a,b]$. Si $f' \in L^1[a,b]$, alors l'inégalité suivante :*

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \frac{1}{2} \|f'\|_1 ,$$

est satisfaite.

Inégalité d'Ostrowski à deux points (Companaion Ostrowski)

Théorème 4.11 ([27]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable dans $[a,b]$. Si $f' \in L^p[a,b]$, alors l'inégalité suivante :*

$$\left|\frac{f(x)+f(a+b-x)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \left(\frac{2(b-a)}{q+1}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{q+1} + \left(\frac{\frac{a+b}{2}-x}{b-a}\right)^{q+1}\right)^{\frac{1}{q}} \|f'\|_p,$$

est satisfaite.

Théorème 4.12 ([27]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable dans $[a,b]$. Si $f' \in L_\infty[a,b]$, alors l'inégalité suivante :*

$$\left|\frac{f(x)+f(a+b-x)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq (b-a)\left(\frac{1}{8} + 2\left(\frac{x-\frac{3a+b}{4}}{b-a}\right)^2\right)\|f'\|_\infty,$$

est satisfaite.

Théorème 4.13 ([27]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable dans $[a,b]$. Si $f' \in L^1[a,b]$, alors l'inégalité suivante :*

$$\left|\frac{f(x)+f(a+b-x)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \left(\frac{1}{4} + \left|\frac{x-\frac{3a+b}{4}}{b-a}\right|\right)\|f'\|_1,$$

est satisfaite.

4.1.3 Quadrature à trois points

Inégalité de $\frac{1}{8}$-Simpson

Théorème 4.14 ([20]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable dans $[a,b]$. Si $f' \in L_\infty[a,b]$, alors l'inégalité suivante :*

$$\left|\frac{1}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{5(b-a)}{36}\|f'\|_\infty,$$

est satisfaite.

Théorème 4.15 ([20]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable dans $[a,b]$. Si $f' \in L^p[a,b]$, alors l'inégalité suivante :*

$$\left| \frac{1}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \frac{(b-a)^{\frac{1}{q}}}{6} \left(\frac{2^{q+1}+1}{3(q+1)} \right)^{\frac{1}{q}} \|f'\|_p ,$$

est satisfaite.

Théorème 4.16 ([20]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable dans $[a,b]$. Si $f' \in L^1[a,b]$, alors l'inégalité suivante :*

$$\left| \frac{1}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \frac{b-a}{3} \|f'\|_1 ,$$

est satisfaite.

Inégalité de Bullen

Théorème 4.17 ([3]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable dans $[a,b]$. Si f' $\in L_\infty[a,b]$, alors l'inégalité suivante :*

$$\left| \frac{1}{4} \left(f(a) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \frac{b-a}{8} \|f'\|_\infty ,$$

est satisfaite.

Théorème 4.18 ([3]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable dans $[a,b]$. Si f' $\in L^p[a,b]$, alors l'inégalité suivante :*

$$\left| \frac{1}{4} \left(f(a) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \frac{1}{4} \left(\frac{b-a}{q+1} \right)^{\frac{1}{q}} \|f'\|_p ,$$

est satisfaite.

Inégalité paramétrique à trois points

Théorème 4.19 ([3]) *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable dans $[a, b]$. Si $f' \in L_\infty [a, b]$, alors l'inégalité suivante :*

$$\left| \frac{\lambda}{2} f(a) + (1-\lambda) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{\lambda}{2} f(b) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \frac{\lambda^2 + (1-\lambda)^2}{4} (b-a) \|f'\|_\infty,$$

est satisfaite.

Théorème 4.20 ([3]) *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable dans $[a, b]$. Si $f' \in L^p [a, b]$, alors l'inégalité suivante :*

$$\left| \frac{\lambda}{2} f(a) + (1-\lambda) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{\lambda}{2} f(b) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \frac{(b-a)^{\frac{1}{q}}}{2} \left(\frac{\lambda^{q+1} + (1-\lambda)^{q+1}}{q+1} \right)^{\frac{1}{q}} \|f'\|_p,$$

est satisfaite.

4.1.4 Quadrature à quatre points

Inégalité de $\frac{3}{8}$-Simpson

Théorème 4.21 ([30]) *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable dans $[a, b]$. Si $f' \in L_\infty [a, b]$, alors l'inégalité suivante :*

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{8} \left(f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \right| \\ \leq \; & \frac{25}{288} (b-a) \|f'\|_\infty, \end{aligned}$$

est satisfaite.

Théorème 4.22 ([3]) *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable dans $[a, b]$. Si f'*

$\in L^p[a,b]$, *alors l'inégalité suivante :*

$$\begin{aligned}&\left|\tfrac{1}{8}\left(f(a)+3f\left(\tfrac{2a+b}{3}\right)+3f\left(\tfrac{a+2b}{3}\right)+f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|\\ \leq\ &\left(\tfrac{2(b-a)}{q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\tfrac{3^{q+1}+4^{q+1}+5^{q+1}}{24^{q+1}}\right)^{\frac{1}{q}}\|f'\|_p\,,\end{aligned}$$

est satisfaite.

4.1.5 Nouveaux résultats

Les résultats de cette section s'appuient également sur l'identité du Lemme 2.2. Elle comporte trois théorèmes. Dans le premier théorème, nous nous intéresserons au cas où $\mathcal{S}'\in L^p[\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2]$, le deuxième théorème traitera le cas où $\mathcal{S}'\in L_\infty[\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2]$, et dans le troisième théorème, nous discuterons le cas où $\mathcal{S}'\in L^1[\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2]$.

Théorème 4.23 *Soit* $\mathcal{S}:[\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2]\to\mathbb{R}$ *une application absolument continue sur* $[\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2]$. *Si* $\mathcal{S}'$ *appartient à* $L^p[\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2]$, *alors on a :*

$$\begin{aligned}&\left|\mathcal{C}_{\lambda,\gamma}(\mathcal{L}_1,x,\mathcal{L}_2;\mathcal{S})-\tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du\right|\\ \leq\ &\begin{cases}\dfrac{2^{\frac{1}{q}}}{(1+q)^{\frac{1}{q}}(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}\left(\Omega-\left(\tfrac{(1+2\gamma)(x-\mathcal{L}_1)-(\mathcal{L}_2-x)}{2(1+\gamma)}\right)^{q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\|\mathcal{S}'\|_p & \textit{if } \gamma>\dfrac{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}-x}{x-\mathcal{L}_1},\\ \dfrac{2^{\frac{1}{q}}}{(1+q)^{\frac{1}{q}}(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}\left(\Omega+\left(\tfrac{\mathcal{L}_2-x-(1+2\gamma)(x-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)}\right)^{q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\|\mathcal{S}'\|_p & \textit{if } \gamma\leq\dfrac{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}-x}{x-\mathcal{L}_1},\end{cases}\end{aligned}$$

où

$$\Omega=\tfrac{\lambda^{q+1}+(1+\gamma-\lambda)^{q+1}}{(1+\gamma)^{q+1}}(x-\mathcal{L}_1)^{q+1}+\tfrac{\gamma^{q+1}}{2^{q+1}(1+\gamma)^{q+1}}(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)^{q+1}\,,$$

$\lambda,\gamma\in[0,1]$ *et* $x\in\left[\mathcal{L}_1,\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right]$.

Preuve. En prenant la valeur absolue aux deux côtés de (2.3) puis en utilisant l'inégalité de Hölder, nous obtenons :

$$\left|\mathcal{C}_{\lambda,\gamma}\left(\mathcal{L}_1,x,\mathcal{L}_2;\mathcal{S}\right)-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int\limits_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}\left(u\right)du\right| \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int\limits_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\left|\mathcal{K}\left(t,x\right)\right|\left|\mathcal{S}'\left(t\right)\right|dt \\
&\leq \frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\left(\int\limits_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\left|\mathcal{K}\left(t,x\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\left|\mathcal{S}'\left(t\right)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\left(\int\limits_{\mathcal{L}_1}^{x}\left|t-\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right|^q dt+\int\limits_{x}^{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}\left|t-\frac{(1+2\gamma)\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}\right|^q dt\right. \\
&\left.+\int\limits_{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}^{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}\left|t-\frac{\mathcal{L}_1+(1+2\gamma)\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}\right|^q dt+\int\limits_{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}^{\mathcal{L}_2}\left|t-\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\left\|\mathcal{S}'\right\|_p .
\end{aligned}$$

Deux cas se présentent. Si $\gamma>\frac{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}-x}{x-\mathcal{L}_1}$, alors (4.1) donne :

$$\left|\mathcal{C}_{\lambda,\gamma}\left(\mathcal{L}_1,x,\mathcal{L}_2;\mathcal{S}\right)-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int\limits_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}\left(u\right)du\right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\left(\int\limits_{\mathcal{L}_1}^{\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}}\left(\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}-t\right)^q dt\right. \\
&+\int\limits_{\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}}^{x}\left(t-\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)^q dt \\
&+\int\limits_{x}^{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}\left(t-\frac{(1+2\gamma)\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}\right)^q dt+\int\limits_{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}^{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}\left(\frac{\mathcal{L}_1+(1+2\gamma)\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}-t\right)^q dt \\
&+\int\limits_{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}^{\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}}\left(\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}-t\right)^q dt \\
&\left.+\int\limits_{\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}}^{\mathcal{L}_2}\left(t-\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\left\|\mathcal{S}'\right\|_p
\end{aligned}$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{q}}}{(1+q)^{\frac{1}{q}}(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}\left(\left(\frac{\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)^{q+1}+\left(\frac{(1+\gamma-\lambda)(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)^{q+1}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\gamma(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)}\right)^{q+1}-\left(\frac{(1+2\gamma)(x-\mathcal{L}_1)-(\mathcal{L}_2-x)}{2(1+\gamma)}\right)^{q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left\|\mathcal{S}'\right\|_p. \tag{4.2}$$

Dans le cas où $\gamma \leq \frac{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}-x}{x-\mathcal{L}_1}$, alors (4.1) donne :

$$\left|\mathcal{C}_{\lambda,\gamma}(\mathcal{L}_1,x,\mathcal{L}_2;\mathcal{S})-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du\right|$$
$$\leq \frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\left(\int_{\mathcal{L}_1}^{\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}}\left(\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}-t\right)^q dt\right.$$
$$+\int_{\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}}^{x}\left(t-\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)^q dt$$
$$+\int_{x}^{\frac{(1+2\gamma)\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}}\left(\frac{(1+2\gamma)\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}-t\right)^q dt+\int_{\frac{(1+2\gamma)\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}}^{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}\left(t-\frac{(1+2\gamma)\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}\right)^q dt$$
$$+\int_{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}^{\frac{\mathcal{L}_1+(1+2\gamma)\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}}\left(\frac{\mathcal{L}_1+(1+2\gamma)\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}-t\right)^q dt+\int_{\frac{\mathcal{L}_1+(1+2\gamma)\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}}^{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}\left(t-\frac{\mathcal{L}_1+(1+2\gamma)\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}\right)^q dt$$
$$+\int_{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}^{\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}}\left(\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}-t\right)^q dt$$
$$\left.+\int_{\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}}^{\mathcal{L}_2}\left(t-\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\left\|\mathcal{S}'\right\|_p$$
$$= \frac{2^{\frac{1}{q}}}{(1+q)^{\frac{1}{q}}(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}\left(\left(\frac{\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)^{q+1}+\left(\frac{(1+\gamma-\lambda)(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)^{q+1}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\mathcal{L}_2-x-(1+2\gamma)(x-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)}\right)^{q+1}+\left(\frac{\gamma(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)}\right)^{q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left\|\mathcal{S}'\right\|_p. \tag{4.3}$$

Le résultat souhaité découle de (4.2) et (4.3). La démonstration est ainsi terminée.

Théorème 4.24 *Soit* $\mathcal{S}:[\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2]\to\mathbb{R}$ *une application absolument continue sur* $[\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2]$.

Si $\mathcal{S}'$ appartient à $L_\infty\left[\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2\right]$, alors on a :

$$\begin{aligned}&\left|\mathcal{C}_{\lambda,\gamma}\left(\mathcal{L}_1,x,\mathcal{L}_2;\mathcal{S}\right)-\tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int\limits_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}\left(u\right)du\right|\\ \leq&\left\{\begin{array}{l}\tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\left(\Phi-\left(\tfrac{(1+2\gamma)(x-\mathcal{L}_1)-(\mathcal{L}_2-x)}{2(1+\gamma)}\right)^2\right)\left\|\mathcal{S}'\right\|_\infty\ \textit{if}\ \gamma>\tfrac{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}-x}{x-\mathcal{L}_1},\\ \tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\left(\Phi+\left(\tfrac{\mathcal{L}_2-x-(1+2\gamma)(x-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)}\right)^2\right)\left\|\mathcal{S}'\right\|_\infty\ \textit{if}\ \gamma\leq\tfrac{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}-x}{x-\mathcal{L}_1},\end{array}\right.\end{aligned}$$

où

$$\Phi=\tfrac{\lambda^2+(1+\gamma-\lambda)^2}{(1+\gamma)^2}\left(x-\mathcal{L}_1\right)^2+\tfrac{\gamma^2}{4(1+\gamma)^2}\left(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1\right)^2,$$

$\lambda,\gamma\in[0,1]$ *et* $x\in\left[\mathcal{L}_1,\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right]$.

■

Preuve. En prenant la valeur absolue aux deux côtés de (2.3), et en utilisant le fait que $|S'|$ est bornée, on a :

$$\begin{aligned}&\left|\mathcal{C}_{\lambda,\gamma}\left(\mathcal{L}_1,x,\mathcal{L}_2;\mathcal{S}\right)-\tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int\limits_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}\left(u\right)du\right| \qquad (4.4)\\ \leq&\ \tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int\limits_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\left|\mathcal{K}\left(t,x\right)\right|\left|\mathcal{S}'\left(t\right)\right|dt\leq\tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\left\|\mathcal{S}'\right\|_\infty\int\limits_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\left|\mathcal{K}\left(t,x\right)\right|dt\\ =&\ \tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\left(\int\limits_{\mathcal{L}_1}^{x}\left|t-\tfrac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right|dt+\int\limits_{x}^{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}\left|t-\tfrac{(1+2\gamma)\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}\right|dt\right.\\ &\left.+\int\limits_{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}^{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}\left|t-\tfrac{\mathcal{L}_1+(1+2\gamma)\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}\right|dt+\int\limits_{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}^{\mathcal{L}_2}\left|t-\tfrac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right|dt\right)\left\|\mathcal{S}'\right\|_\infty.\end{aligned}$$

Nous distinguons deux cas. Si $\gamma>\frac{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}-x}{x-\mathcal{L}_1}$, alors (4.4) donne :

$$\begin{aligned}&\left|\mathcal{C}_{\lambda,\gamma}\left(\mathcal{L}_1,x,\mathcal{L}_2;\mathcal{S}\right)-\tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int\limits_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}\left(u\right)du\right|\\ \leq&\ \tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\left(\int\limits_{\mathcal{L}_1}^{\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}}\left(\tfrac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}-t\right)dt\right.\end{aligned}$$

$$+ \int\limits_{\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}}^{x} \left(t - \frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right) dt$$

$$+ \int\limits_{x}^{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}} \left(t - \frac{(1+2\gamma)\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}\right) dt + \int\limits_{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}^{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x} \left(\frac{\mathcal{L}_1+(1+2\gamma)\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)} - t\right) dt$$

$$+ \int\limits_{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}^{\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}} \left(\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma} - t\right) dt$$

$$+ \int\limits_{\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}}^{\mathcal{L}_2} \left(t - \frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right) dt \Bigg) \left\|\mathcal{S}'\right\|_\infty$$

$$= \frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1} \left(\left(\frac{\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)^2 + \left(\frac{(1+\gamma-\lambda)(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)^2 \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\gamma(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)}\right)^2 - \left(\frac{(1+2\gamma)(x-\mathcal{L}_1)-(\mathcal{L}_2-x)}{2(1+\gamma)}\right)^2 \right) \left\|\mathcal{S}'\right\|_\infty . \tag{4.5}$$

Et pour $\gamma \leq \frac{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}-x}{x-\mathcal{L}_1}$, de (4.4) on obtient :

$$\left| \mathcal{C}_{\lambda,\gamma}\left(\mathcal{L}_1, x, \mathcal{L}_2; \mathcal{S}\right) - \frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1} \int\limits_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2} \mathcal{S}\left(u\right) du \right|$$

$$\leq \frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1} \left(\int\limits_{\mathcal{L}_1}^{\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}} \left(\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma} - t\right) dt \right.$$

$$+ \int\limits_{\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}}^{x} \left(t - \frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right) dt$$

$$+ \int\limits_{x}^{\frac{(1+2\gamma)\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}} \left(\frac{(1+2\gamma)\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)} - t\right) dt + \int\limits_{\frac{(1+2\gamma)\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}}^{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}} \left(t - \frac{(1+2\gamma)\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}\right) dt$$

$$+ \int\limits_{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}^{\frac{\mathcal{L}_1+(1+2\gamma)\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}} \left(\frac{\mathcal{L}_1+(1+2\gamma)\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)} - t\right) dt + \int\limits_{\frac{\mathcal{L}_1+(1+2\gamma)\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}}^{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x} \left(t - \frac{\mathcal{L}_1+(1+2\gamma)\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}\right) dt$$

$$+ \int\limits_{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}^{\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}} \left(\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma} - t\right) dt$$

$$\left. + \int\limits_{\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}}^{\mathcal{L}_2} \left(t - \frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right) dt \right) \left\|\mathcal{S}'\right\|_\infty$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\left(\left(\frac{\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)^2+\left(\frac{(1+\gamma-\lambda)(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right)^2\right. \\
&\quad \left.+\left(\frac{\mathcal{L}_2-x-(1+2\gamma)(x-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)}\right)^2+\left(\frac{\gamma(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)}\right)^2\right)\left\|\mathcal{S}'\right\|_\infty . \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

Le résultat souhaité découle de (4.5) et (4.6). La preuve est terminée. ■

Théorème 4.25 *Soit $\mathcal{S} : [\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2] \to \mathbb{R}$ une application continûment différentiable sur $[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2]$. Si $\mathcal{S}' \in L^1[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2]$, alors on a :*

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathcal{C}_{\lambda,\gamma}(\mathcal{L}_1, x, \mathcal{L}_2; \mathcal{S}) - \frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du\right| \\
\leq\ & \max\left\{\frac{(1+\gamma-\lambda)}{1+\gamma}\left(\frac{x-\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\right), \frac{\lambda}{1+\gamma}\left(\frac{x-\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\right), \left|\frac{(1+2\gamma)(x-\mathcal{L}_1)-(\mathcal{L}_2-x)}{2(1+\gamma)(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}\right|, \frac{\gamma}{2(1+\gamma)}\right\}\left\|\mathcal{S}'\right\|_1,
\end{aligned}
$$

où $\lambda, \gamma \in [0,1]$ et $x \in \left[\mathcal{L}_1, \frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right]$.

Preuve. En utilisant la valeur absolue aux deux côtés de (2.3), on a :

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathcal{C}_{\lambda,\gamma}(\mathcal{L}_1, x, \mathcal{L}_2; \mathcal{S}) - \frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du\right| \\
\leq\ & \frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\left|\mathcal{K}(t,x)\right|\left|\mathcal{S}'(t)\right|dt \\
\leq\ & \frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\left(\int_{\mathcal{L}_1}^{x}\left|t-\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_1+\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right|\left|\mathcal{S}'(t)\right|dt + \int_{x}^{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}\left|t-\frac{(1+2\gamma)\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}\right|\left|\mathcal{S}'(t)\right|dt\right. \\
&\left.+\int_{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}^{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}\left|t-\frac{\mathcal{L}_1+(1+2\gamma)\mathcal{L}_2}{2(1+\gamma)}\right|\left|\mathcal{S}'(t)\right|dt + \int_{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}^{\mathcal{L}_2}\left|t-\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right|\left|\mathcal{S}'(t)\right|dt\right)
\end{aligned}
$$

$$\leq \frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\left(\max\left\{\frac{(1+\gamma-\lambda)(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}, \frac{\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}\right\}\left(\int_{\mathcal{L}_1}^{x}|\mathcal{S}'(t)|\,dt \int_{\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}}^{\mathcal{L}_2}|\mathcal{S}'(t)|\,dt\right)\right.$$

$$\left.+\max\left\{\left|\frac{(1+2\gamma)(x-\mathcal{L}_1)-(\mathcal{L}_2-x)}{2(1+\gamma)}\right|, \frac{\gamma(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)}\right\}\left(\int_{x}^{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}|\mathcal{S}'(t)|\,dt+\int_{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}^{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}|\mathcal{S}'(t)|\,dt\right)\right)$$

$$\leq \frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\max\left\{\frac{(1+\gamma-\lambda)(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}, \frac{\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}, \left|\frac{(1+2\gamma)(x-\mathcal{L}_1)-(\mathcal{L}_2-x)}{2(1+\gamma)}\right|, \frac{\gamma(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)}\right\}$$

$$\times\left(\int_{\mathcal{L}_1}^{x}|\mathcal{S}'(t)|\,dt+\int_{x}^{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}|\mathcal{S}'(t)|\,dt+\int_{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}}^{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2-x}|\mathcal{S}'(t)|\,dt+\int_{\frac{(1+\gamma)\mathcal{L}_2-\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}}^{\mathcal{L}_2}|\mathcal{S}'(t)|\,dt\right)$$

$$\leq \frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\max\left\{\frac{(1+\gamma-\lambda)(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}, \frac{\lambda(x-\mathcal{L}_1)}{1+\gamma}, \left|\frac{(1+2\gamma)(x-\mathcal{L}_1)-(\mathcal{L}_2-x)}{2(1+\gamma)}\right|, \frac{\gamma(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{2(1+\gamma)}\right\}\|\mathcal{S}'\|_1 .$$

La preuve est ainsi achevée. ■

4.1.6 Discussion de quelques cas particuliers

Corollaire 4.1 *Dans le Théorème 4.23, si l'on prend* $x=\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}$*, on obtient l'inégalité de type Simpson suivante :*

$$\left|\frac{\lambda}{2(1+\gamma)}\mathcal{S}(\mathcal{L}_1)+\frac{1+\gamma-\lambda}{1+\gamma}\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+\frac{\lambda}{2(1+\gamma)}\mathcal{S}(\mathcal{L}_2)-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda^{q+1}+(1+\gamma-\lambda)^{q+1}}{(1+\gamma)^{q+1}}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}{1+q}\right)^{\frac{1}{q}}\|\mathcal{S}'\|_p .$$

Corollaire 4.2 *Dans le Théorème 4.23, si l'on prend* $x=\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}, \gamma=0$ *et* $\lambda=\frac{7}{15}$*, on obtient l'inégalité de Simpson corrigée suivante :*

$$\left|\frac{1}{30}\left(7\mathcal{S}(\mathcal{L}_1)+16\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+7\mathcal{S}(\mathcal{L}_2)\right)-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du\right|$$

$$\leq \left(\frac{7^{q+1}+8^{q+1}}{30^{q+1}}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{2(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{1+q}\right)^{\frac{1}{q}}\|\mathcal{S}'\|_p .$$

Corollaire 4.3 *Dans le Théorème 4.23, si l'on prend* $x = \frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}, \gamma = 0$ *et* $\lambda = \frac{3}{8}$*, on obtient l'inégalité de spline suivante :*

$$\begin{aligned}
&\left| \tfrac{1}{16}\left(3\mathcal{S}\left(\mathcal{L}_1\right) + 10\mathcal{S}\left(\tfrac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right) + 3\mathcal{S}\left(\mathcal{L}_2\right)\right) - \tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2} \mathcal{S}\left(u\right) du \right| \\
\leq\ & \left(\tfrac{3^{q+1}+5^{q+1}}{16^{q+1}}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\tfrac{2(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{1+q}\right)^{\frac{1}{q}} \left\|\mathcal{S}'\right\|_p .
\end{aligned}$$

Corollaire 4.4 *Dans le Théorème 4.23, si l'on prend* $x = \frac{3\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{4}$*, on obtient l'inégalité de type Newton-Cotes à* 5*-point suivante :*

$$\begin{aligned}
&\left| \tfrac{\lambda\mathcal{S}(\mathcal{L}_1)+(2-\lambda)\mathcal{S}\left(\frac{3\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{4}\right)+4\gamma\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+(2-\lambda)\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+4\mathcal{L}_2}{4}\right)+\lambda\mathcal{S}(\mathcal{L}_2)}{4(1+\gamma)} - \tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2} \mathcal{S}\left(u\right) du \right| \\
\leq\ & \left(\tfrac{\lambda^{q+1}+(1+\gamma-\lambda)^{q+1}+2^{q+1}\gamma^{q+1}+(1-\gamma)^{q+1}}{4^{q+1}(1+\gamma)^{q+1}}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\tfrac{2(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{1+q}\right)^{\frac{1}{q}} \left\|\mathcal{S}'\right\|_p .
\end{aligned}$$

Corollaire 4.5 *Dans le Théorème 4.23, si l'on prend* $x = \frac{3\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{4}, \lambda = \frac{2}{5}$ *et* $\gamma = \frac{1}{5}$*, on obtient l'inégalité de Bullen-Simpson suivante :*

$$\begin{aligned}
&\left| \tfrac{\mathcal{S}(\mathcal{L}_1)+4\mathcal{S}\left(\frac{3\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{4}\right)+2\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+4\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+3\mathcal{L}_2}{4}\right)+\mathcal{S}(\mathcal{L}_2)}{12} - \tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2} \mathcal{S}\left(u\right) du \right| \\
\leq\ & \left(\tfrac{1+2^{q+1}}{12^{q+1}}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\tfrac{4(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{1+q}\right)^{\frac{1}{q}} \left\|\mathcal{S}'\right\|_p .
\end{aligned}$$

Corollaire 4.6 *Dans le Théorème 4.23, si l'on prend* $x = \frac{2\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{3}$*, on obtient l'inégalité de type Newton-Cotes à* 5*-point suivante :*

$$\begin{aligned}
&\left| \tfrac{2\lambda\mathcal{S}(\mathcal{L}_1)+(3-2\lambda)\mathcal{S}\left(\frac{2\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{3}\right)+6\gamma\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+(3-2\lambda)\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+2\mathcal{L}_2}{3}\right)+2\lambda\mathcal{S}(\mathcal{L}_2)}{6(1+\gamma)} - \tfrac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2} \mathcal{S}\left(u\right) du \right| \\
\leq\ & \begin{cases} \left(\tfrac{2^{q+1}\lambda^{q+1}+2^{q+1}(1+\gamma-\lambda)^{q+1}+3^{q+1}\gamma^{q+1}-(2\gamma-1)^{q+1}}{6^{q+1}(1+\gamma)^{q+1}}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\tfrac{2(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{1+q}\right)^{\frac{1}{q}} \left\|\mathcal{S}'\right\|_p & \text{if } \gamma > \frac{1}{2}, \\ \left(\tfrac{2^{q+1}\lambda^{q+1}+2^{q+1}(1+\gamma-\lambda)^{q+1}+3^{q+1}\gamma^{q+1}+(1-2\gamma)^{q+1}}{6^{q+1}(1+\gamma)^{q+1}}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\tfrac{2(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{1+q}\right)^{\frac{1}{q}} \left\|\mathcal{S}'\right\|_p & \text{if } \gamma \leq \frac{1}{2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Corollaire 4.7 *Dans le Théorème 4.23, si l'on prend* $x = \frac{5\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{6}$*, on obtient l'inégalité* *de type Newton-Cotes à 5-point suivante :*

$$\left|\frac{\lambda\mathcal{S}(\mathcal{L}_1)+(3-\lambda)\mathcal{S}\left(\frac{5\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{6}\right)+6\gamma\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+(3-\lambda)\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+5\mathcal{L}_2}{6}\right)+\lambda\mathcal{S}(\mathcal{L}_2)}{6(1+\gamma)}-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du\right|$$
$$\leq \left(\frac{\lambda^{q+1}+(1+\gamma-\lambda)^{q+1}+3^{q+1}\gamma^{q+1}+(2-\gamma)^{q+1}}{6^{q+1}(1+\gamma)^{q+1}}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{2(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{1+q}\right)^{\frac{1}{q}}\left\|\mathcal{S}'\right\|_p.$$

Corollaire 4.8 *Dans le Théorème 4.23, si l'on prend $x=\frac{5\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{6},\lambda=0$ et $\gamma=\frac{13}{27}$, on obtient l'inégalité d'Euler-Maclaurin corrigée suivante :*

$$\left|\frac{1}{80}\left(27\mathcal{S}\left(\frac{5\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{6}\right)+26\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+27\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+5\mathcal{L}_2}{6}\right)\right)-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du\right|$$
$$\leq \left(\frac{39^{q+1}+40^{q+1}+41^{q+1}}{240^{q+1}}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{2(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{1+q}\right)^{\frac{1}{q}}\left\|\mathcal{S}'\right\|_p.$$

Corollaire 4.9 *Dans le Théorème 4.24, si l'on prend $x=\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}$, on obtient l'inégalité de type Simpson suivante :*

$$\left|\frac{\lambda}{2(1+\gamma)}\mathcal{S}(\mathcal{L}_1)+\frac{1+\gamma-\lambda}{1+\gamma}\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+\frac{\lambda}{2(1+\gamma)}\mathcal{S}(\mathcal{L}_2)-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du\right|$$
$$\leq \frac{\left(\lambda^2+(1+\gamma-\lambda)^2\right)(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{4(1+\gamma)^2}\left\|\mathcal{S}'\right\|_\infty.$$

Corollaire 4.10 *Dans le Théorème 4.24, si l'on prend $x=\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2},\gamma=0$ et $\lambda=\frac{7}{15}$, on obtient l'inégalité de Simpson corrigée suivante :*

$$\left|\frac{1}{30}\left(7\mathcal{S}(\mathcal{L}_1)+16\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+7\mathcal{S}(\mathcal{L}_2)\right)-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du\right|\leq\frac{113(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{900}\left\|\mathcal{S}'\right\|_\infty.$$

Corollaire 4.11 *Dans le Théorème 4.24, si on prend $\gamma=0$ et $\lambda=\frac{3}{8}$, on obtient l'inégalité de spline suivante :*

$$\left|\frac{1}{16}\left(3\mathcal{S}(\mathcal{L}_1)+10\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+3\mathcal{S}(\mathcal{L}_2)\right)-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du\right|\leq\frac{17(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{128}\left\|\mathcal{S}'\right\|_\infty.$$

Corollaire 4.12 *Dans le Théorème 4.24, si l'on prend* $x=\frac{3\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{4}$*, on obtient l'inégalité de type Newton-Cotes à 5-point suivante :*

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\lambda\mathcal{S}(\mathcal{L}_1)+(2-\lambda)\mathcal{S}\left(\frac{3\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{4}\right)+4\gamma\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+(2-\lambda)\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+4\mathcal{L}_2}{4}\right)+\lambda\mathcal{S}(\mathcal{L}_2)}{4(1+\gamma)}-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du\right|\\ \leq\ &\frac{\left(\lambda^2+(1+\gamma-\lambda)^2+4\gamma^2+(1-\gamma)^2\right)(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{16(1+\gamma)^2}\left\|\mathcal{S}'\right\|_\infty.\end{aligned}$$

Corollaire 4.13 *Dans le Théorème 4.24, si l'on prend* $x=\frac{3\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{4}, \lambda=\frac{14}{39}$ *et* $\gamma=\frac{2}{13}$*, on obtient l'inégalité de Boole suivante :*

$$\begin{aligned}&\left|\frac{7\mathcal{S}(\mathcal{L}_1)+32\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+3\mathcal{L}_2}{4}\right)+12\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+32\mathcal{S}\left(\frac{3\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{4}\right)+7\mathcal{S}(\mathcal{L}_2)}{90}-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du\right|\\ \leq\ &\frac{239(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{3240}\left\|\mathcal{S}'\right\|_\infty.\end{aligned}$$

Corollaire 4.14 *Dans le Théorème 4.24, si l'on prend* $x=\frac{3\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{4}, \lambda=\frac{2}{5}$ *et* $\gamma=\frac{1}{5}$*, on obtient l'inégalité de Bullen-Simpson suivante :*

$$\left|\frac{\mathcal{S}(\mathcal{L}_1)+4\mathcal{S}\left(\frac{3\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{4}\right)+2\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+4\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+3\mathcal{L}_2}{4}\right)+\mathcal{S}(\mathcal{L}_2)}{12}-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du\right|\leq\frac{5(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{72}\left\|\mathcal{S}'\right\|_\infty.$$

Corollaire 4.15 *Dans le Théorème 4.24, si l'on prend* $x=\frac{2\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{3}$*, on obtient l'inégalité de type Newton-Cotes à 5-point suivante :*

$$\begin{aligned}&\left|\frac{2\lambda\mathcal{S}(\mathcal{L}_1)+(3-2\lambda)\mathcal{S}\left(\frac{2\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{3}\right)+6\gamma\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+(3-2\lambda)\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+2\mathcal{L}_2}{3}\right)+2\lambda\mathcal{S}(\mathcal{L}_2)}{6(1+\gamma)}-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du\right|\\ \leq\ &\begin{cases}\frac{\left(4\lambda^2+4(1+\gamma-\lambda)^2+9\gamma^2-(2\gamma-1)^2\right)(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{36(1+\gamma)^2}\left\|\mathcal{S}'\right\|_\infty & \text{if } \gamma>\frac{1}{2},\\ \frac{\left(4\lambda^2+4(1+\gamma-\lambda)^2+9\gamma^2+(1-2\gamma)^2\right)(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{36(1+\gamma)^2}\left\|\mathcal{S}'\right\|_\infty & \text{if } \gamma\leq\frac{1}{2}.\end{cases}\end{aligned}$$

Corollaire 4.16 *Dans le Théorème 4.24, si l'on prend* $x=\frac{5\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{6}$*, on obtient l'inégalité* *de type Newton-Cotes à 5-point suivante :*

$$\left|\frac{\lambda\mathcal{S}(\mathcal{L}_1)+(3-\lambda)\mathcal{S}\left(\frac{5\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{6}\right)+6\gamma\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+(3-\lambda)\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+5\mathcal{L}_2}{6}\right)+\lambda\mathcal{S}(\mathcal{L}_2)}{6(1+\gamma)}-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du\right|$$
$$\leq \frac{\left(\lambda^2+(1+\gamma-\lambda)^2+9\gamma^2+(2-\gamma)^2\right)(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{36(1+\gamma)^2}\left\|\mathcal{S}'\right\|_\infty .$$

Corollaire 4.17 *Dans le Théorème 4.24, si l'on prend* $x=\frac{5\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{6}, \lambda=0$ *et* $\gamma=\frac{1}{3}$, *on obtient l'inégalité de Maclaurin suivante :*

$$\left|\frac{1}{8}\left(3\mathcal{S}\left(\frac{5\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{6}\right)+2\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+3\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+5\mathcal{L}_2}{6}\right)\right)-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du\right|$$
$$\leq \frac{25(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{288}\left\|\mathcal{S}'\right\|_\infty .$$

Corollaire 4.18 *Dans le Théorème 4.24, si l'on prend* $x=\frac{5\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{6}, \lambda=0$ *et* $\gamma=\frac{13}{27}$, *on obtient l'inégalité d'Euler-Maclaurin corrigée suivante :*

$$\left|\frac{1}{80}\left(27\mathcal{S}\left(\frac{5\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{6}\right)+26\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+27\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+5\mathcal{L}_2}{6}\right)\right)-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du\right|$$
$$\leq \frac{2401(\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1)}{28800}\left\|\mathcal{S}'\right\|_\infty .$$

Corollaire 4.19 *Dans le Théorème 4.25, si l'on prend* $x=\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}$, *on obtient l'inégalité de type Simpson suivante :*

$$\left|\frac{\lambda}{2(1+\gamma)}\mathcal{S}(\mathcal{L}_1)+\frac{1+\gamma-\lambda}{1+\gamma}\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+\frac{\lambda}{2(1+\gamma)}\mathcal{S}(\mathcal{L}_2)-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}(u)\,du\right|$$
$$\leq \frac{1}{2}\max\left\{\frac{1+\gamma-\lambda}{1+\gamma},\frac{\lambda}{1+\gamma},\frac{\gamma}{1+\gamma}\right\}\left\|\mathcal{S}'\right\|_1 .$$

Corollaire 4.20 *Dans le Théorème 4.25, si l'on prend* $x=\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}$ *et* $\gamma=0$, *on obtient* *l'inégalité de type Simpson suivante :*

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\lambda}{2}\mathcal{S}\left(\mathcal{L}_1\right)+(1-\lambda)\,\mathcal{S}\left(\tfrac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+\frac{\lambda}{2}\mathcal{S}\left(\mathcal{L}_2\right)-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}\left(u\right)du\right|\\ \leq\;& \frac{1}{2}\max\left\{1-\lambda,\lambda\right\}\left\|\mathcal{S}'\right\|_1=\frac{1+|1-2\lambda|}{4}\left\|\mathcal{S}'\right\|_1.\end{aligned}$$

Corollaire 4.21 *Dans le Théorème 4.25, si l'on prend* $x=\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}, \gamma=0$ *et* $\lambda=\frac{1}{2}$, *on obtient l'inégalité de Bullen suivante :*

$$\left|\frac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{S}(\mathcal{L}_1)+\mathcal{S}(\mathcal{L}_2)}{2}+\mathcal{S}\left(\tfrac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)\right)-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}\left(u\right)du\right|\leq\frac{1}{4}\left\|\mathcal{S}'\right\|_1.$$

Corollaire 4.22 *Dans le Théorème 4.25, si l'on prend* $x=\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}, \gamma=0$ *et* $\lambda=\frac{7}{15}$, *on obtient l'inégalité de Simpson corrigée suivante :*

$$\left|\frac{1}{30}\left(7\mathcal{S}\left(\mathcal{L}_1\right)+16\mathcal{S}\left(\tfrac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+7\mathcal{S}\left(\mathcal{L}_2\right)\right)-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}\left(u\right)du\right|\leq\frac{1}{60}\left\|\mathcal{S}'\right\|_1.$$

Corollaire 4.23 *Dans le Théorème 4.25, si l'on prend* $x=\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}, \gamma=0$ *et* $\lambda=\frac{3}{8}$, *on obtient l'inégalité de spline suivante :*

$$\left|\left(\frac{1}{16}\left(3\mathcal{S}\left(\mathcal{L}_1\right)+10\mathcal{S}\left(\tfrac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+3\mathcal{S}\left(\mathcal{L}_2\right)\right)\right)-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}\left(u\right)du\right|\leq\frac{5}{16}\left\|\mathcal{S}'\right\|_1.$$

Corollaire 4.24 *Dans le Théorème 4.25, si l'on prend* $x=\frac{3\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{4}$, *on obtient l'inégalité de type Newton-Cotes à* 5*-point suivante :*

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\lambda\mathcal{S}(\mathcal{L}_1)+(2-\lambda)\mathcal{S}\left(\frac{3\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{4}\right)+4\gamma\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+(2-\lambda)\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+4\mathcal{L}_2}{4}\right)+\lambda\mathcal{S}(\mathcal{L}_2)}{4(1+\gamma)}-\frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{S}\left(u\right)du\right|\\ \leq\;& \max\left\{\frac{(1+\gamma-\lambda)}{4(1+\gamma)},\frac{\lambda}{4(1+\gamma)},\frac{1-\gamma}{4(1+\gamma)},\frac{\gamma}{2(1+\gamma)}\right\}\left\|\mathcal{S}'\right\|_1.\end{aligned}$$

Corollaire 4.25 *Dans le Théorème 4.25, si l'on prend* $x = \frac{3\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{4}, \lambda = \frac{14}{39}$ *et* $\gamma = \frac{2}{13}$, *on obtient l'inégalité de Boole suivante :*

$$\left| \frac{7\mathcal{S}(\mathcal{L}_1)+32\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+3\mathcal{L}_2}{4}\right)+12\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+32\mathcal{S}\left(\frac{3\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{4}\right)+7\mathcal{S}(\mathcal{L}_2)}{90} - \frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2} \mathcal{S}(u)\,du \right| \leq \frac{11}{60} \left\| \mathcal{S}' \right\|_1 .$$

Corollaire 4.26 *Dans le Théorème 4.25, si l'on prend* $x = \frac{3\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{4}, \lambda = \frac{2}{5}$ *et* $\gamma = \frac{1}{5}$, *on obtient l'inégalité de Bullen-Simpson suivante :*

$$\left| \frac{\mathcal{S}(\mathcal{L}_1)+4\mathcal{S}\left(\frac{3\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{4}\right)+2\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+4\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+3\mathcal{L}_2}{4}\right)+\mathcal{S}(\mathcal{L}_2)}{12} - \frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2} \mathcal{S}(u)\,du \right| \leq \frac{1}{6} \left\| \mathcal{S}' \right\|_1 .$$

Corollaire 4.27 *Dans le Théorème 4.25, si l'on prend* $x = \frac{2\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{3}$, *on obtient l'inégalité de type Newton-Cotes à* 5*-point suivante :*

$$\begin{aligned} &\left| \frac{2\lambda\mathcal{S}(\mathcal{L}_1)+(3-2\lambda)\mathcal{S}\left(\frac{2\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{3}\right)+6\gamma\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+(3-2\lambda)\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+2\mathcal{L}_2}{3}\right)+2\lambda\mathcal{S}(\mathcal{L}_2)}{6(1+\gamma)} - \frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2} \mathcal{S}(u)\,du \right| \\ \leq\ & \max\left\{ \frac{1+\gamma-\lambda}{3(1+\gamma)}, \frac{\lambda}{3(1+\gamma)}, \frac{|2\gamma-1|}{6(1+\gamma)}, \frac{\gamma}{2(1+\gamma)} \right\} \left\| \mathcal{S}' \right\|_1 . \end{aligned}$$

Corollaire 4.28 *Dans le Théorème 4.25, si l'on prend* $x = \frac{5\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{6}, \lambda = 0$ *et* $\gamma = \frac{1}{3}$ *on obtient l'inégalité de Maclaurin suivante :*

$$\left| \frac{3\mathcal{S}\left(\frac{5\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{6}\right)+2\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+3\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+5\mathcal{L}_2}{6}\right)}{8} - \frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2} \mathcal{S}(u)\,du \right| \leq \frac{5}{24} \left\| \mathcal{S}' \right\|_1 .$$

Corollaire 4.29 *Dans le Théorème 4.25, si l'on prend* $x = \frac{5\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{6}, \lambda = 0$ *et* $\gamma = \frac{13}{27}$, *on obtient l'inégalité d'Euler-Maclaurin suivante :*

$$\left| \frac{27\mathcal{S}\left(\frac{5\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{6}\right)+26\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2}\right)+27\mathcal{S}\left(\frac{\mathcal{L}_1+5\mathcal{L}_2}{6}\right)}{80} - \frac{1}{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2} \mathcal{S}(u)\,du \right| \leq \frac{41}{240} \left\| \mathcal{S}' \right\|_1 .$$

Chapitre 5

Inégalités intégrales de type Newton-Cotes pour les fonctions dont les dérivées premières sont s-convexes étendus

Dans ce chapitre nous allons étudier les inégalités intégrales de type Newton-Cotes faisant intervenir au plus cinq points, dont les dérivées premières sont s-convexes étendues.

5.1 Préliminaire

Nous allons rappeler quelques classes de convexité classique, puis nous donnerons une variante de l'inégalité de Hölder.

Définition 5.1 ([56]) *Un ensemble $I \subseteq \mathbb{R}$ est dit convexe si pour tout $x, y \in I$ et pour tout $t \in [0,1]$, si*

$$tx + (1-t)\, y \in I.$$

Définition 5.2 ([56]) *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe, si*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y),$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0,1]$.

Définition 5.3 ([18]) *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite P-fonction, si*

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(x) + f(y),$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$.

Définition 5.4 ([32]) *Une fonction positive $f : I \to \mathbb{R}$ est dite fonction de Godunova-Levin ou Q-fonction, si*

$$f(tx + (1-t)y) \leq \tfrac{f(x)}{t} + \tfrac{f(y)}{1-t},$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et $t \in (0,1)$.

Définition 5.5 ([29]) *Une fonction positive $f : I \to \mathbb{R}$ est dite fonction s-Godunova-Levin, où $s \in [0,1]$, si*

$$f(tx + (1-t)y) \leq \tfrac{f(x)}{t^s} + \tfrac{f(y)}{(1-t)^s},$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et $t \in (0,1)$.

Définition 5.6 ([9]) *Une fonction positive $f : I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ est dite s-convexe au second sens pour un certain nombre fixé $s \in (0,1]$, si*

$$f(tx + (1-t)y) \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y),$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$.

Définition 5.7 ([61]) *Une fonction positive $f : I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ est dite s-convexe* *étendue pour un certain nombre fixé* $s \in [-1,1]$, *si*

$$f(tx+(1-t)y) \ \le t^s f(x)+(1-t)^s f(y),$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ *et* $t \in (0,1)$.

Théorème 5.1 **(**[55]**)** *Soit* $q \geq 1$. *Si* $|f| \in L^1[a,b]$ *et* $|f(x)|^{\frac{1}{q}}|g(x)| \in L^q[a,b]$, *alors* $|fg|$ *est intégrable sur* $[a,b]$ *et on a*

$$\int_a^b |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|\, dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)|\, |g(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Les résultats concernant cette classe de fonctions étant massivement abondants, nous ne citerons pas les résultats déjà établis et nous ne discuterons pas les cas particuliers. Nous nous abstiendrons seulement de discuter nos nouveaux résultats qui sont soumis pour une éventuelle publication. Nous invitons toutefois les lecteurs à consulter [4-8, 10, 13-16, 34, 38-60, 63, 64].

5.1.1 Nouveaux résultats

Lemme 5.1 *Soit* $\mathcal{S} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur* I°, $\vartheta_1, \vartheta_2 \in I^\circ$ *avec* $\vartheta_1 < \vartheta_2$ *et* $\mathcal{S}' \in L^1[\vartheta_1, \vartheta_2]$, *alors l'équation suivante est vérifiée pour tout* $\lambda, \gamma \in [0,1]$ *et* $x \in \left]\vartheta_1, \frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right[$

$$\begin{aligned}
& Q(\vartheta_1, x, \vartheta_2; \mathcal{S}) - \tfrac{1}{\vartheta_2-\vartheta_1}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \mathcal{S}(u)\, du \\
= \ & \tfrac{(x-\vartheta_1)^2}{\vartheta_2-\vartheta_1}\int_0^1 \left(h-\tfrac{\lambda}{1+\gamma}\right)\mathcal{S}'\left((1-h)\,\vartheta_1+hx\right) dh \\
& +\tfrac{(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)^2}{4(\vartheta_2-\vartheta_1)}\int_0^1 \left(h-\tfrac{(\vartheta_2-x)-(1+2\gamma)(x-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)}\right)\mathcal{S}'\left((1-h)\,x+h\tfrac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right) dh \\
& +\tfrac{(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)^2}{4(\vartheta_2-\vartheta_1)}\int_0^1 \left(h-\tfrac{\gamma(\vartheta_2-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)}\right)\mathcal{S}'\left((1-h)\,\tfrac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}+h\,(\vartheta_1+\vartheta_2-x)\right) dh \\
& +\tfrac{(x-\vartheta_1)^2}{\vartheta_2-\vartheta_1}\int_0^1 \left(h-\tfrac{1+\gamma-\lambda}{1+\gamma}\right)\mathcal{S}'\left(((1-h)\,(\vartheta_1+\vartheta_2-x)+h\vartheta_2)\right) dh,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} Q\left(\vartheta_1, x, \vartheta_2; \mathcal{S}\right) &= \tfrac{\lambda(x-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_2-\vartheta_1)}\mathcal{S}\left(\vartheta_1\right) + \tfrac{(\vartheta_2-\vartheta_1)-2\lambda(x-\vartheta_1)}{2(1+\gamma)(\vartheta_2-\vartheta_1)}\mathcal{S}\left(x\right) + \tfrac{\gamma}{1+\gamma}\mathcal{S}\left(\tfrac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right) \\ &\quad + \tfrac{(\vartheta_2-\vartheta_1)-2\lambda(x-\vartheta_1)}{2(1+\gamma)(\vartheta_2-\vartheta_1)}\mathcal{S}\left(\vartheta_1+\vartheta_2-x\right) + \tfrac{\lambda(x-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_2-\vartheta_1)}\mathcal{S}\left(\vartheta_2\right). \end{aligned}$$

Preuve. Soit

$$I = \tfrac{(x-\vartheta_1)^2}{\vartheta_2-\vartheta_1}I_1 + \tfrac{(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)^2}{4(\vartheta_2-\vartheta_1)}I_2 + \tfrac{(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)^2}{4(\vartheta_2-\vartheta_1)}I_3 + \tfrac{(x-\vartheta_1)^2}{\vartheta_2-\vartheta_1}I_4, \tag{5.1}$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \left(h - \tfrac{\lambda}{1+\gamma}\right)\mathcal{S}'\left(\left(1-h\right)\vartheta_1 + hx\right)dh, \\ I_2 &= \int_0^1 \left(h - \tfrac{(\vartheta_2-x)-(1+2\gamma)(x-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)}\right)\mathcal{S}'\left(\left(1-h\right)x + h\tfrac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)dh, \\ I_3 &= \int_0^1 \left(h - \tfrac{\gamma(\vartheta_2-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)}\right)\mathcal{S}'\left(\left(1-h\right)\tfrac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2} + h\left(\vartheta_1+\vartheta_2-x\right)\right)dh, \\ I_4 &= \int_0^1 \left(h - \tfrac{1+\gamma-\lambda}{1+\gamma}\right)\mathcal{S}'\left(\left(\left(1-h\right)\left(\vartheta_1+\vartheta_2-x\right) + h\vartheta_2\right)\right)dh. \end{aligned}$$

Par le biais de l'intégration par partie, I_1 donne :

$$\begin{aligned} I_1 &= \tfrac{1}{x-\vartheta_1}\left(h - \tfrac{\lambda}{1+\gamma}\right)\mathcal{S}\left(\left(1-h\right)\vartheta_1 + hx\right)\Big|_0^1 - \tfrac{1}{x-\vartheta_1}\int_0^1 \mathcal{S}\left(\left(1-h\right)\vartheta_1 + hx\right)dh \\ &= \tfrac{1+\gamma-\lambda}{(1+\gamma)(x-\vartheta_1)}\mathcal{S}\left(x\right) + \tfrac{\lambda}{(1+\gamma)(x-\vartheta_1)}\mathcal{S}\left(\vartheta_1\right) - \tfrac{1}{x-\vartheta_1}\int_0^1 \mathcal{S}\left(\left(1-h\right)\vartheta_1 + hx\right)dh \\ &= \tfrac{\lambda}{(1+\gamma)(x-\vartheta_1)}\mathcal{S}\left(\vartheta_1\right) + \tfrac{1+\gamma-\lambda}{(1+\gamma)(x-\vartheta_1)}\mathcal{S}\left(x\right) - \tfrac{1}{(x-\vartheta_1)^2}\int_{\vartheta_1}^x \mathcal{S}\left(u\right)du. \end{aligned} \tag{5.2}$$

De manière similaire, on trouve :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \tfrac{2}{\vartheta_1+\vartheta_2-2x}\left(h-\tfrac{(\vartheta_2-x)-(1+2\gamma)(x-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)}\right)\mathcal{S}\left((1-h)\,x+h\tfrac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)\Big|_0^1 \\
&\quad -\tfrac{2}{\vartheta_1+\vartheta_2-2x}\int_0^1 \mathcal{S}\left((1-h)\,x+h\tfrac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)dh \\
&= \tfrac{2\gamma(\vartheta_2-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)^2}\mathcal{S}\left(\tfrac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)+\tfrac{2(\vartheta_2-x)-2(1+2\gamma)(x-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)^2}\mathcal{S}\left(x\right) \\
&\quad -\tfrac{4}{(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)^2}\int_x^{\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}} \mathcal{S}\left(u\right)du,
\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \tfrac{2}{\vartheta_1+\vartheta_2-2x}\left(h-\tfrac{\gamma(\vartheta_2-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)}\right)\mathcal{S}\left((1-h)\,\tfrac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}+h\left(\vartheta_1+\vartheta_2-x\right)\right)\Big|_0^1 \\
&\quad -\tfrac{2}{\vartheta_1+\vartheta_2-2x}\int_0^1 \mathcal{S}\left((1-h)\,\tfrac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}+h\left(\vartheta_1+\vartheta_2-x\right)\right)dt \\
&= \tfrac{2(\vartheta_2-x)-2(1+2\gamma)(x-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)^2}\mathcal{S}\left(\vartheta_1+\vartheta_2-x\right)+\tfrac{2\gamma(\vartheta_2-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)^2}\mathcal{S}\left(\tfrac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right) \\
&\quad -\tfrac{4}{(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)^2}\int_{\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}}^{\vartheta_1+\vartheta_2-x} \mathcal{S}\left(u\right)du
\end{aligned} \tag{5.4}$$

et

$$\begin{aligned}
I_4 &= \tfrac{1}{x-\vartheta_1}\left(h-\tfrac{1+\gamma-\lambda}{1+\gamma}\right)\mathcal{S}\left(((1-h)\left(\vartheta_1+\vartheta_2-x\right)+h\vartheta_2)\right)\Big|_0^1 \\
&\quad -\tfrac{1}{x-\vartheta_1}\int_0^1 \mathcal{S}\left(((1-h)\left(\vartheta_1+\vartheta_2-x\right)+h\vartheta_2)\right)dh \\
&= \tfrac{\lambda}{(1+\gamma)(x-\vartheta_1)}\mathcal{S}\left(\vartheta_2\right)+\tfrac{1+\gamma-\lambda}{(1+\gamma)(x-\vartheta_1)}\mathcal{S}\left(\vartheta_1+\vartheta_2-x\right) \\
&\quad -\tfrac{1}{(x-\vartheta_1)^2}\int_{\vartheta_1+\vartheta_2-x}^{\vartheta_2} \mathcal{S}\left(u\right)du.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

En substituant (5.2)-(5.5) dans (5.1), on aboutit au résultat désiré. ■

Théorème 5.2 *Soit* $\mathcal{S} : I \subset \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur* I°, $\vartheta_1, \vartheta_2 \in I^{\circ}$ *avec* $\vartheta_1 < \vartheta_2$ *et* $\mathcal{S}' \in L^1[\vartheta_1, \vartheta_2]$. *Si* $|\mathcal{S}'|$ *est* s*-convexe étendue sur* $[\vartheta_1, \vartheta_2]$, *alors on a :*

$$\begin{aligned}
&\left| Q(\vartheta_1, x, \vartheta_2; \mathcal{S}) - \tfrac{1}{\vartheta_2 - \vartheta_1} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \mathcal{S}(u)\, du \right| \\
\leq\ & \tfrac{(x-\vartheta_1)^2}{\vartheta_2-\vartheta_1} \left(\left(\tfrac{\lambda(s+2)-(1+\gamma)}{(1+\gamma)(s+1)(s+2)} + \tfrac{2}{(s+1)(s+2)} \left(\tfrac{1+\gamma-\lambda}{1+\gamma} \right)^{s+2} \right) (|\mathcal{S}'(\vartheta_1)| + |\mathcal{S}'(\vartheta_2)|) \right. \\
&+ \left. \left(\tfrac{(1+\gamma-\lambda)(s+1)-\lambda}{(1+\gamma)(s+1)(s+2)} + \tfrac{2}{(s+1)(s+2)} \left(\tfrac{\lambda}{1+\gamma} \right)^{s+2} \right) (|\mathcal{S}'(x)| + |\mathcal{S}'(\vartheta_1 + \vartheta_2 - x)|) \right) \\
&+ \tfrac{(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)^2}{4(\vartheta_2-\vartheta_1)} \left(N_{s,\gamma}(x, \vartheta_1, \vartheta_2) (|\mathcal{S}'(x)| + |\mathcal{S}'(\vartheta_1 + \vartheta_2 - x)|) \right. \\
&+ \left. 2M_{s,\gamma}(x, \vartheta_1, \vartheta_2) \left| \mathcal{S}'\left(\tfrac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2} \right) \right| \right),
\end{aligned}$$

où $x \in \left]\vartheta_1, \frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right[$, $\lambda, \gamma \in [0,1]$ *et* $s \in (-1, 1]$ *et* $N_{s,\gamma}(x, \vartheta_1, \vartheta_2)$ *et* $M_{s,\gamma}(x, \vartheta_1, \vartheta_2)$ *sont donnés par (5.8) et (5.9), respectivement.*

Preuve. En utilisant le Lemme 5.1, la valeur absolue et la s-convexité étendu de $|\mathcal{S}'|$, on a :

$$\begin{aligned}
&\left| Q(\vartheta_1, x, \vartheta_2; \mathcal{S}) - \tfrac{1}{\vartheta_2 - \vartheta_1} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \mathcal{S}(u)\, du \right| \\
\leq\ & \tfrac{(x-\vartheta_1)^2}{\vartheta_2-\vartheta_1} \int_0^1 \left| h - \tfrac{\lambda}{1+\gamma} \right| |\mathcal{S}'((1-h)\vartheta_1 + hx)|\, dh \\
&+ \tfrac{(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)^2}{4(\vartheta_2-\vartheta_1)} \int_0^1 \left| h - \tfrac{(\vartheta_2-x)-(1+2\gamma)(x-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)} \right| \left| \mathcal{S}'\left((1-h)x + h\tfrac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2} \right) \right| dh \\
&+ \tfrac{(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)^2}{4(\vartheta_2-\vartheta_1)} \int_0^1 \left| h - \tfrac{\gamma(\vartheta_2-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)} \right| \\
&\times \left| \mathcal{S}'\left((1-h)\tfrac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2} + h(\vartheta_1 + \vartheta_2 - x) \right) \right| dh \\
&+ \tfrac{(x-\vartheta_1)^2}{\vartheta_2-\vartheta_1} \int_0^1 \left| h - \tfrac{1+\gamma-\lambda}{1+\gamma} \right| |\mathcal{S}'(((1-h)(\vartheta_1 + \vartheta_2 - x) + h\vartheta_2))|\, dh \\
\leq\ & \tfrac{(x-\vartheta_1)^2}{\vartheta_2-\vartheta_1} \int_0^1 \left| h - \tfrac{\lambda}{1+\gamma} \right| ((1-h)^s |\mathcal{S}'(\vartheta_1)| + h^s |\mathcal{S}'(x)|)\, dh \\
&+ \tfrac{(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)^2}{4(\vartheta_2-\vartheta_1)} \int_0^1 \left| h - \tfrac{(\vartheta_2-x)-(1+2\gamma)(x-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)} \right| \left((1-h)^s |\mathcal{S}'(x)| + h^s \left| \mathcal{S}'\left(\tfrac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2} \right) \right| \right) dh
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\tfrac{(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)^2}{4(\vartheta_2-\vartheta_1)}\int\limits_0^1 \left|h-\tfrac{\gamma(\vartheta_2-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)}\right| \\
& \times\left((1-h)^s\left|\mathcal{S}'\left(\tfrac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)\right|+h^s\left|\mathcal{S}'\left(\vartheta_1+\vartheta_2-x\right)\right|\right)dh \\
& +\tfrac{(x-\vartheta_1)^2}{\vartheta_2-\vartheta_1}\int\limits_0^1\left|h-\tfrac{1+\gamma-\lambda}{1+\gamma}\right|\left((1-h)^s\left|\mathcal{S}'\left(\vartheta_1+\vartheta_2-x\right)\right|+h^s\left|\mathcal{S}'\left(\vartheta_2\right)\right|\right)dh \\
= \; & \tfrac{(x-\vartheta_1)^2}{\vartheta_2-\vartheta_1}\left(\left|\mathcal{S}'\left(\vartheta_1\right)\right|\int\limits_0^1\left|h-\tfrac{\lambda}{1+\gamma}\right|(1-h)^s\,dh+\left|\mathcal{S}'(x)\right|\int\limits_0^1\left|h-\tfrac{\lambda}{1+\gamma}\right|h^s dh\right) \\
& +\tfrac{(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)^2}{4(\vartheta_2-\vartheta_1)}\left(\left|\mathcal{S}'(x)\right|\int\limits_0^1\left|h-\tfrac{(\vartheta_2-x)-(1+2\gamma)(x-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)}\right|(1-h)^s\,dh\right. \\
& \left.+\left|\mathcal{S}'\left(\tfrac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)\right|\int\limits_0^1\left|h-\tfrac{(\vartheta_2-x)-(1+2\gamma)(x-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)}\right|h^s dh\right) \\
& +\tfrac{(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)^2}{4(\vartheta_2-\vartheta_1)}\left(\left|\mathcal{S}'\left(\tfrac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)\right|\int\limits_0^1\left|h-\tfrac{\gamma(\vartheta_2-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)}\right|(1-h)^s\,dh\right. \\
& \left.+\left|\mathcal{S}'\left(\vartheta_1+\vartheta_2-x\right)\right|\int\limits_0^1\left|h-\tfrac{\gamma(\vartheta_2-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)}\right|h^s dh\right) \\
& +\tfrac{(x-\vartheta_1)^2}{\vartheta_2-\vartheta_1}\left(\left|\mathcal{S}'\left(\vartheta_1+\vartheta_2-x\right)\right|\int\limits_0^1\left|h-\tfrac{1+\gamma-\lambda}{1+\gamma}\right|(1-h)^s\,dh\right. \\
& \left.+\left|\mathcal{S}'\left(\vartheta_2\right)\right|\int\limits_0^1\left|h-\tfrac{1+\gamma-\lambda}{1+\gamma}\right|h^s dh\right) \\
= \; & \tfrac{(x-\vartheta_1)^2}{\vartheta_2-\vartheta_1}\left(\left(\tfrac{\lambda(s+2)-(1+\gamma)}{(1+\gamma)(s+1)(s+2)}+\tfrac{2}{(s+1)(s+2)}\left(\tfrac{1+\gamma-\lambda}{1+\gamma}\right)^{s+2}\right)\left(\left|\mathcal{S}'\left(\vartheta_1\right)\right|+\left|\mathcal{S}'\left(\vartheta_2\right)\right|\right)\right. \\
& \left.+\left(\tfrac{(1+\gamma-\lambda)(s+1)-\lambda}{(1+\gamma)(s+1)(s+2)}+\tfrac{2}{(s+1)(s+2)}\left(\tfrac{\lambda}{1+\gamma}\right)^{s+2}\right)\left(\left|\mathcal{S}'(x)\right|+\left|\mathcal{S}'\left(\vartheta_1+\vartheta_2-x\right)\right|\right)\right) \\
& +\tfrac{(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)^2}{4(\vartheta_2-\vartheta_1)}\left(N_{s,\gamma}\left(x,\vartheta_1,\vartheta_2\right)\left(\left|\mathcal{S}'(x)\right|+\left|\mathcal{S}'\left(\vartheta_1+\vartheta_2-x\right)\right|\right)\right. \\
& \left.+\,2M_{s,\gamma}\left(x,\vartheta_1,\vartheta_2\right)\left|\mathcal{S}'\left(\tfrac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)\right|\right),
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé

$$\begin{aligned} L_1(s,\lambda,\gamma) &= \int_0^1 \left| h - \tfrac{\lambda}{1+\gamma} \right| (1-h)^s\, dh = \int_0^1 \left| h - \tfrac{1+\gamma-\lambda}{1+\gamma} \right| h^s dh \\ &= \tfrac{\lambda(s+2)-(1+\gamma)}{(1+\gamma)(s+1)(s+2)} + \tfrac{2}{(s+1)(s+2)} \left(\tfrac{1+\gamma-\lambda}{1+\gamma} \right)^{s+2}, \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned} L_2(s,\lambda,\gamma) &= \int_0^1 \left| h - \tfrac{\lambda}{1+\gamma} \right| h^s dh = \int_0^1 \left| h - \tfrac{1+\gamma-\lambda}{1+\gamma} \right| (1-h)^s\, dh \\ &= \tfrac{(1+\gamma-\lambda)(s+1)-\lambda}{(1+\gamma)(s+1)(s+2)} + \tfrac{2}{(s+1)(s+2)} \left(\tfrac{\lambda}{1+\gamma} \right)^{s+2}, \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned} N_{s,\gamma}(x,\vartheta_1,\vartheta_2) &= \int_0^1 \left| h - \tfrac{(\vartheta_2-x)-(1+2\gamma)(x-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)} \right| (1-h)^s\, dh \qquad (5.8) \\ &= \int_0^1 \left| \tfrac{\gamma(\vartheta_2-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)} - h \right| h^s dh \\ &= \begin{cases} \begin{array}{c} \frac{(s+1-\gamma)(\vartheta_2-x)-((1+2\gamma)(s+1)+\gamma)(x-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)(s+1)(s+2)} \\ +\frac{2}{(s+1)(s+2)} \left(\frac{\gamma(\vartheta_2-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)} \right)^{s+2} \end{array} & \text{if } \gamma \leq \frac{\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}-x}{x-\vartheta_1}, \\ \frac{\gamma(\vartheta_2-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)(s+1)} - \frac{1}{(s+2)} & \text{if } \gamma > \frac{\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}-x}{x-\vartheta_1}, \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} M_{s,\gamma}(x,\vartheta_1,\vartheta_2) &= \int_0^1 \left| h - \tfrac{(\vartheta_2-x)-(1+2\gamma)(x-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)} \right| h^s dh \qquad (5.9) \\ &= \int_0^1 \left| \tfrac{\gamma(\vartheta_2-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)} - h \right| (1-h)^s\, dh \\ &= \begin{cases} \begin{array}{c} -\frac{1}{(s+1)(s+2)} + \frac{\gamma(\vartheta_2-\vartheta_1)}{(s+1)(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)} \\ +\frac{2}{(s+1)(s+2)} \left(1 - \frac{\gamma(\vartheta_2-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)} \right)^{s+2} \end{array} & \text{if } \gamma \leq \frac{\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}-x}{x-\vartheta_1}, \\ \frac{\gamma(\vartheta_2-\vartheta_1)}{(s+1)(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \text{if } \gamma > \frac{\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}-x}{x-\vartheta_1}. \end{cases} \end{aligned}$$

Notons que pour (5.8) et (5.9), nous avons utilisé le fait que

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{\gamma(\vartheta_2-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)} \leq 1 \text{ if } \gamma \leq \frac{\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}-x}{x-\vartheta_1}, \\ \frac{\gamma(\vartheta_2-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)} > 1 \text{ if } \gamma > \frac{\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}-x}{x-\vartheta_1}. \end{cases}$$

La preuve est terminée. ■

Théorème 5.3 *Sous les conditions du Théorème 5.1. Si $|\mathcal{S}'|^q$ est s-convexe étendu sur $[\vartheta_1, \vartheta_2]$ où $q > 1$ avec $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, alors on a :*

$$\begin{aligned} & \left| Q(\vartheta_1, x, \vartheta_2; \mathcal{S}) - \frac{1}{\vartheta_2-\vartheta_1} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \mathcal{S}(u)\, du \right| \\ \leq\ & \frac{(x-\vartheta_1)^2}{\vartheta_2-\vartheta_1} \left(\frac{1}{p+1} \left(\left(\frac{\lambda}{1+\gamma} \right)^{p+1} + \left(\frac{1+\gamma-\lambda}{1+\gamma} \right)^{p+1} \right) \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \times \left(\left(\frac{|\mathcal{S}'(\vartheta_1)|^q + |\mathcal{S}'(x)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|\mathcal{S}'(\vartheta_1+\vartheta_2-x)|^q + |\mathcal{S}'(\vartheta_2)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\ & + \frac{(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)^2}{4(\vartheta_2-\vartheta_1)} \left(\Delta(\gamma, \vartheta_1, \vartheta_2) \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \times \left(\left(\frac{|\mathcal{S}'(x)|^q + \left|\mathcal{S}'\left(\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)\right|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{\left|\mathcal{S}'\left(\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)\right|^q + |\mathcal{S}'(\vartheta_1+\vartheta_2-x)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \right), \end{aligned}$$

où $\Delta(\gamma, \vartheta_1, \vartheta_2)$ est donné par (5.10).

Preuve. D'après le Lemme 5.1, la valeur absolue, l'inégalité de Hölder et la s-convexité étendu de $|\mathcal{S}'|^q$, on a :

$$\begin{aligned} & \left| Q(\vartheta_1, x, \vartheta_2; \mathcal{S}) - \frac{1}{\vartheta_2-\vartheta_1} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \mathcal{S}(u)\, du \right| \\ \leq\ & \frac{(x-\vartheta_1)^2}{\vartheta_2-\vartheta_1} \left(\int_0^1 \left| h - \frac{\lambda}{1+\gamma} \right|^p dh \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |\mathcal{S}'((1-h)\vartheta_1 + hx)|^q\, dh \right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \frac{(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)^2}{4(\vartheta_2-\vartheta_1)} \left(\int_0^1 \left| h - \frac{(\vartheta_2-x)-(1+2\gamma)(x-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)} \right|^p dh \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \times \left(\int_0^1 \left| \mathcal{S}'\left((1-h)x + h\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right) \right|^q dh \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\tfrac{(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)^2}{4(\vartheta_2-\vartheta_1)}\left(\int_0^1\left|h-\tfrac{\gamma(\vartheta_2-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)}\right|^p dh\right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times\left(\int_0^1\left|\mathcal{S}'\left((1-h)\tfrac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}+h\left(\vartheta_1+\vartheta_2-x\right)\right)\right|^q dh\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\tfrac{(x-\vartheta_1)^2}{\vartheta_2-\vartheta_1}\left(\int_0^1\left|h-\tfrac{1+\gamma-\lambda}{1+\gamma}\right|^p dh\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|\mathcal{S}'\left(((1-h)\left(\vartheta_1+\vartheta_2-x\right)+h\vartheta_2)\right)\right|^q dh\right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq\ & \tfrac{(x-\vartheta_1)^2}{\vartheta_2-\vartheta_1}\left(\int_0^1\left|h-\tfrac{\lambda}{1+\gamma}\right|^p dh\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\int_0^1\left((1-h)^s\left|\mathcal{S}'\left(\vartheta_1\right)\right|^q+h^s\left|\mathcal{S}'\left(x\right)\right|^q\right)dh\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
& \left.+\left(\int_0^1\left((1-h)^s\left|\mathcal{S}'\left(\vartheta_1+\vartheta_2-x\right)\right|^q+h^s\left|\mathcal{S}'\left(\vartheta_2\right)\right|^q\right)dh\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
& +\tfrac{(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)^2}{4(\vartheta_2-\vartheta_1)}\left(\int_0^1\left|h-\tfrac{\gamma(\vartheta_2-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)}\right|^p dh\right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times\left(\left(\int_0^1\left((1-h)^s\left|\mathcal{S}'\left(x\right)\right|^q+h^s\left|\mathcal{S}'\left(\tfrac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)\right|^q\right)dh\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
& \left.+\left(\int_0^1\left((1-h)^s\left|\mathcal{S}'\left(\tfrac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)\right|^q+h^s\left|\mathcal{S}'\left(\vartheta_1+\vartheta_2-x\right)\right|^q\right)dh\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
=\ & \tfrac{(x-\vartheta_1)^2}{\vartheta_2-\vartheta_1}\left(\tfrac{1}{p+1}\left(\left(\tfrac{\lambda}{1+\gamma}\right)^{p+1}+\left(\tfrac{1+\gamma-\lambda}{1+\gamma}\right)^{p+1}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times\left(\left(\tfrac{\left|\mathcal{S}'(\vartheta_1)\right|^q+\left|\mathcal{S}'(x)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{\left|\mathcal{S}'(\vartheta_1+\vartheta_2-x)\right|^q+\left|\mathcal{S}'(\vartheta_2)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
& +\tfrac{(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)^2}{4(\vartheta_2-\vartheta_1)}\left(\Delta\left(\gamma,\vartheta_1,\vartheta_2\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times\left(\left(\tfrac{\left|\mathcal{S}'(x)\right|^q+\left|\mathcal{S}'\left(\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{\left|\mathcal{S}'\left(\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)\right|^q+\left|\mathcal{S}'(\vartheta_1+\vartheta_2-x)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right),
\end{aligned}
$$

où

$$
\int_0^1\left|h-\tfrac{\lambda}{1+\gamma}\right|^p dh=\tfrac{1}{p+1}\left(\left(\tfrac{\lambda}{1+\gamma}\right)^{p+1}+\left(\tfrac{1+\gamma-\lambda}{1+\gamma}\right)^{p+1}\right)
$$

et

$$\Delta(\gamma,\vartheta_1,\vartheta_2)=\int_0^1\left|h-\frac{\gamma(\vartheta_2-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)}\right|^p dh \tag{5.10}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{p+1}\left(\left(\frac{\gamma(\vartheta_2-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)}\right)^{p+1}+\left(1-\frac{\gamma(\vartheta_2-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)}\right)^{p+1}\right) & \text{if } \gamma\leq\frac{\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}-x}{x-\vartheta_1},\\ \frac{1}{p+1}\left(\left(\frac{\gamma(\vartheta_2-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)}\right)^{p+1}-\left(\frac{\gamma(\vartheta_2-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)}-1\right)^{p+1}\right) & \text{if } \gamma>\frac{\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}-x}{x-\vartheta_1}.\end{cases}$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Théorème 5.4 *Sous les conditions du Théorème 5.1. Si $|\mathcal{S}'|^q$ est s-convexe étendu sur $[\vartheta_1,\vartheta_2]$ où $q\geq 1$, alors on a :*

$$\begin{aligned}&\left|Q(\vartheta_1,x,\vartheta_2;\mathcal{S})-\frac{1}{\vartheta_2-\vartheta_1}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\mathcal{S}(u)\,du\right|\\ \leq\ &\frac{(x-\vartheta_1)^2}{\vartheta_2-\vartheta_1}\left(\frac{\lambda^2+(1+\gamma-\lambda)^2}{2(1+\gamma)^2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left(L_1(s,\lambda,\gamma)|\mathcal{S}'(\vartheta_1)|^q+L_2(s,\lambda,\gamma)|\mathcal{S}'(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\ &\left.+\left(L_2(s,\lambda,\gamma)|\mathcal{S}'(\vartheta_1+\vartheta_2-x)|^q+L_1(s,\lambda,\gamma)|\mathcal{S}'(\vartheta_2)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right)\\ &+\frac{(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)^2}{4(\vartheta_2-\vartheta_1)}\left(\Omega(\gamma,\vartheta_1,\vartheta_2)\right)^{1-\frac{1}{q}}\\ &\times\left(\left(N_{s,\gamma}(x,\vartheta_1,\vartheta_2)|\mathcal{S}'(x)|^q+M_{s,\gamma}(x,\vartheta_1,\vartheta_2)\left|\mathcal{S}'\left(\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\ &\left.+\left(M_{s,\gamma}(x,\vartheta_1,\vartheta_2)\left|\mathcal{S}'\left(\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)\right|^q+N_{s,\gamma}(x,\vartheta_1,\vartheta_2)|\mathcal{S}'(\vartheta_1+\vartheta_2-x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right),\end{aligned}$$

où $L_1(s,\lambda,\gamma)$, $L_2(s,\lambda,\gamma)$, $N_{s,\gamma}(x,\vartheta_1,\vartheta_2)$ et $M_{s,\gamma}(x,\vartheta_1,\vartheta_2)$ sont définis dans (2.6)-(2.9), respectivement.

Preuve. D'après le Lemme 5.1, la valeur absolue, l'inégalité des moyennes de puissance et la s-convexité étendu de $|\mathcal{S}'|^q$, on a :

$$\begin{aligned}&\left|Q(\vartheta_1,x,\vartheta_2;\mathcal{S})-\frac{1}{\vartheta_2-\vartheta_1}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\mathcal{S}(u)\,du\right|\\ \leq\ &\frac{(x-\vartheta_1)^2}{\vartheta_2-\vartheta_1}\left(\int_0^1\left|h-\frac{\lambda}{1+\gamma}\right|dh\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left|h-\frac{\lambda}{1+\gamma}\right||\mathcal{S}'((1-h)\vartheta_1+hx)|^q\,dh\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

$$+\frac{(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)^2}{4(\vartheta_2-\vartheta_1)}\left(\int_0^1\left|h-\frac{(\vartheta_2-x)-(1+2\gamma)(x-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)}\right|dh\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int_0^1\left|h-\frac{(\vartheta_2-x)-(1+2\gamma)(x-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)}\right|\left|\mathcal{S}'\left((1-h)\,x+h\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)\right|^q dh\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)^2}{4(\vartheta_2-\vartheta_1)}\left(\int_0^1\left|h-\frac{\gamma(\vartheta_2-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)}\right|dh\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int_0^1\left|h-\frac{\gamma(\vartheta_2-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)}\right|\left|\mathcal{S}'\left((1-h)\,\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}+h\,(\vartheta_1+\vartheta_2-x)\right)\right|^q dh\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(x-\vartheta_1)^2}{\vartheta_2-\vartheta_1}\left(\int_0^1\left|h-\frac{1+\gamma-\lambda}{1+\gamma}\right|dh\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int_0^1\left|h-\frac{1+\gamma-\lambda}{1+\gamma}\right|\left|\mathcal{S}'\left(((1-h)\,(\vartheta_1+\vartheta_2-x)+h\vartheta_2)\right)\right|^q dh\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{(x-\vartheta_1)^2}{\vartheta_2-\vartheta_1}\left(\int_0^1\left|h-\frac{\lambda}{1+\gamma}\right|dh\right)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg(\left(\int_0^1\left|h-\frac{\lambda}{1+\gamma}\right|\left((1-h)^s\left|\mathcal{S}'(\vartheta_1)\right|^q+h^s\left|\mathcal{S}'(x)\right|^q\right)dh\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_0^1\left|h-\frac{1+\gamma-\lambda}{1+\gamma}\right|\left((1-h)^s\left|\mathcal{S}'(\vartheta_1+\vartheta_2-x)\right|^q+h^s\left|\mathcal{S}'(\vartheta_2)\right|^q\right)dh\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg)$$

$$+\frac{(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)^2}{4(\vartheta_2-\vartheta_1)}\left(\int_0^1\left|h-\frac{\gamma(\vartheta_2-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)}\right|dh\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\Bigg(\left(\int_0^1\left|h-\frac{(\vartheta_2-x)-(1+2\gamma)(x-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)}\right|\left((1-h)^s\left|\mathcal{S}'(x)\right|^q+h^s\left|\mathcal{S}'\left(\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)\right|^q\right)dh\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\Bigg(\int_0^1\left|h-\frac{\gamma(\vartheta_2-\vartheta_1)}{(1+\gamma)(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)}\right|$$

$$\times\left((1-h)^s\left|\mathcal{S}'\left(\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)\right|^q+h^s\left|\mathcal{S}'(\vartheta_1+\vartheta_2-x)\right|^q\right)dh\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg)$$

$$=\frac{(x-\vartheta_1)^2}{\vartheta_2-\vartheta_1}\left(\frac{\lambda^2+(1+\gamma-\lambda)^2}{2(1+\gamma)^2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg(\bigg(\left|\mathcal{S}'(\vartheta_1)\right|^q\int_0^1\left|h-\frac{\lambda}{1+\gamma}\right|(1-h)^s\,dh$$

$$+\left|\mathcal{S}'(x)\right|^q\int_0^1\left|h-\frac{\lambda}{1+\gamma}\right|h^s dh\bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\Bigg(\left|\mathcal{S}'(\vartheta_1+\vartheta_2-x)\right|^q\int_0^1\left|h-\frac{1+\gamma-\lambda}{1+\gamma}\right|(1-h)^s\,dh$$

$$
\begin{aligned}
& + \left|\mathcal{S}'\left(\vartheta_2\right)\right|^q \int_0^1 \left|h-\tfrac{1+\gamma-\lambda}{1+\gamma}\right| h^s dh\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg) \\
& +\tfrac{\left(\vartheta_1+\vartheta_2-2x\right)^2}{4\left(\vartheta_2-\vartheta_1\right)}\left(\Omega\left(\gamma,\vartheta_1,\vartheta_2\right)\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times\Bigg(\Bigg(\left|\mathcal{S}'\left(x\right)\right|^q \int_0^1 \left|h-\tfrac{\left(\vartheta_2-x\right)-\left(1+2\gamma\right)\left(x-\vartheta_1\right)}{\left(1+\gamma\right)\left(\vartheta_1+\vartheta_2-2x\right)}\right|\left(1-h\right)^s dh \\
& + \left|\mathcal{S}'\left(\tfrac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)\right|^q \int_0^1 \left|h-\tfrac{\left(\vartheta_2-x\right)-\left(1+2\gamma\right)\left(x-\vartheta_1\right)}{\left(1+\gamma\right)\left(\vartheta_1+\vartheta_2-2x\right)}\right| h^s dh\Bigg)^{\frac{1}{q}} \\
& + \Bigg(\left|\mathcal{S}'\left(\tfrac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)\right|^q \int_0^1 \left|h-\tfrac{\gamma\left(\vartheta_2-\vartheta_1\right)}{\left(1+\gamma\right)\left(\vartheta_1+\vartheta_2-2x\right)}\right|\left(1-h\right)^s dh \\
& + \left|\mathcal{S}'\left(\vartheta_1+\vartheta_2-x\right)\right|^q \int_0^1 \left|h-\tfrac{\gamma\left(\vartheta_2-\vartheta_1\right)}{\left(1+\gamma\right)\left(\vartheta_1+\vartheta_2-2x\right)}\right| h^s dh\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg) \\
= \; & \tfrac{\left(x-\vartheta_1\right)^2}{\vartheta_2-\vartheta_1}\left(\tfrac{\lambda^2+\left(1+\gamma-\lambda\right)^2}{2\left(1+\gamma\right)^2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left(L_1\left(s,\lambda,\gamma\right)\left|\mathcal{S}'\left(\vartheta_1\right)\right|^q+L_2\left(s,\lambda,\gamma\right)\left|\mathcal{S}'\left(x\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
& \left.+\left(L_2\left(s,\lambda,\gamma\right)\left|\mathcal{S}'\left(\vartheta_1+\vartheta_2-x\right)\right|^q+L_1\left(s,\lambda,\gamma\right)\left|\mathcal{S}'\left(\vartheta_2\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
& +\tfrac{\left(\vartheta_1+\vartheta_2-2x\right)^2}{4\left(\vartheta_2-\vartheta_1\right)}\left(\Omega\left(\gamma,\vartheta_1,\vartheta_2\right)\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times\left(\left(N_{s,\gamma}\left(x,\vartheta_1,\vartheta_2\right)\left|\mathcal{S}'\left(x\right)\right|^q+M_{s,\gamma}\left(x,\vartheta_1,\vartheta_2\right)\left|\mathcal{S}'\left(\tfrac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
& \left.+\left(M_{s,\gamma}\left(x,\vartheta_1,\vartheta_2\right)\left|\mathcal{S}'\left(\tfrac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)\right|^q+N_{s,\gamma}\left(x,\vartheta_1,\vartheta_2\right)\left|\mathcal{S}'\left(\vartheta_1+\vartheta_2-x\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right),
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé (5.6)-(5.9) et

$$
\begin{aligned}
& \Omega\left(\gamma,\vartheta_1,\vartheta_2\right)=\int_0^1\left|h-\tfrac{\gamma\left(\vartheta_2-\vartheta_1\right)}{\left(1+\gamma\right)\left(\vartheta_1+\vartheta_2-2x\right)}\right| dh \qquad (5.11) \\
= \; & \begin{cases} \tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{2\gamma\left(\vartheta_2-\vartheta_1\right)}{\left(1+\gamma\right)\left(\vartheta_1+\vartheta_2-2x\right)}+2\left(\tfrac{\gamma\left(\vartheta_2-\vartheta_1\right)}{\left(1+\gamma\right)\left(\vartheta_1+\vartheta_2-2x\right)}\right)^2\right) \text{ if } \gamma\leq\tfrac{\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}-x}{x-\vartheta_1}, \\ \tfrac{1}{p+1}\left(\tfrac{2\gamma\left(\vartheta_2-\vartheta_1\right)}{\left(1+\gamma\right)\left(\vartheta_1+\vartheta_2-2x\right)}-1\right) \text{ if } \gamma>\tfrac{\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}-x}{x-\vartheta_1}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

La preuve est terminée. ■

5.1.2 Discussion de quelque cas particuliers

Corollaire 5.1 *Dans le Théorème 5.1, si l'on prend* $x = \frac{3\vartheta_1+\vartheta_2}{4}, \gamma = \frac{2}{13}$ *et* $\lambda = \frac{14}{39}$, *on obtient l'inégalité de Boole suivante :*

$$\left| \frac{7\mathcal{S}(\vartheta_1)+32\mathcal{S}\left(\frac{3\vartheta_1+\vartheta_2}{4}\right)+12\mathcal{S}\left(\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)+32\mathcal{S}\left(\frac{\vartheta_1+3\vartheta_2}{4}\right)+7\mathcal{S}(\vartheta_2)}{90} - \frac{1}{\vartheta_2-\vartheta_1}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \mathcal{S}(u)\,du \right|$$
$$\leq \frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{16(s+1)(s+2)} \left(\left(\frac{14s-17}{45} + 2\left(\frac{31}{45}\right)^{s+2} \right) \left(|\mathcal{S}'(\vartheta_1)| + |\mathcal{S}'(\vartheta_2)|\right) \right.$$
$$+ \left(\frac{64s+38}{45} + 2\left(\frac{4}{15}\right)^{s+2} + 2\left(\frac{14}{45}\right)^{s+2} \right) \left(\left|\mathcal{S}'\left(\frac{3\vartheta_1+\vartheta_2}{4}\right)\right| + \left|\mathcal{S}'\left(\frac{\vartheta_1+3\vartheta_2}{4}\right)\right| \right)$$
$$\left. + 2\left(\frac{4s-7}{15} + 2\left(\frac{11}{15}\right)^{s+2} \right) \left|\mathcal{S}'\left(\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)\right| \right).$$

Corollaire 5.2 *Dans le Théorème 5.1, si l'on prend* $x = \frac{3\vartheta_1+\vartheta_2}{4}, \gamma = \frac{1}{5}$ *et* $\lambda = \frac{2}{5}$, *on obtient l'inégalité de Bullen-Simpson suivante :*

$$\left| \frac{\mathcal{S}(\vartheta_1)+4\mathcal{S}\left(\frac{3\vartheta_1+\vartheta_2}{4}\right)+2\mathcal{S}\left(\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)+4\mathcal{S}\left(\frac{\vartheta_1+3\vartheta_2}{4}\right)+\mathcal{S}(\vartheta_2)}{12} - \frac{1}{\vartheta_2-\vartheta_1}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \mathcal{S}(u)\,du \right|$$
$$\leq \frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{16(s+1)(s+2)} \left(\left(\frac{s-1}{3} + 2\left(\frac{2}{3}\right)^{s+2} \right) \left(|\mathcal{S}'(\vartheta_1)| + 2\left|\mathcal{S}'\left(\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)\right| + |\mathcal{S}'(\vartheta_2)| \right) \right.$$
$$\left. + 2\left(\frac{2s+1}{3} + 2\left(\frac{1}{3}\right)^{s+2} \right) \left(\left|\mathcal{S}'\left(\frac{3\vartheta_1+\vartheta_2}{4}\right)\right| + \left|\mathcal{S}'\left(\frac{\vartheta_1+3\vartheta_2}{4}\right)\right| \right) \right).$$

Corollaire 5.3 *Dans le Théorème 5.1, si l'on prend* $x = \frac{5\vartheta_1+\vartheta_2}{6}, \gamma = \frac{1}{3}$ *et* $\lambda = 0$, *on obtient l'inégalité de Maclaurin suivante :*

$$\left| \frac{1}{8}\left(3\mathcal{S}\left(\frac{5\vartheta_1+\vartheta_2}{6}\right) + 2\mathcal{S}\left(\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right) + 3\mathcal{S}\left(\frac{\vartheta_1+5\vartheta_2}{6}\right) \right) - \frac{1}{\vartheta_2-\vartheta_1}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \mathcal{S}(u)\,du \right|$$
$$\leq \frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{36(s+1)(s+2)} \left(|\mathcal{S}'(\vartheta_1)| + |\mathcal{S}'(\vartheta_2)| + \left(3s-2+10\left(\frac{5}{8}\right)^{s+1} \right) \left|\mathcal{S}'\left(\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)\right| \right.$$
$$\left. + \left(\frac{7s+4}{2} + 3\left(\frac{3}{8}\right)^{s+1} \right) \left(\left|\mathcal{S}'\left(\frac{5\vartheta_1+\vartheta_2}{6}\right)\right| + \left|\mathcal{S}'\left(\frac{\vartheta_1+5\vartheta_2}{6}\right)\right| \right) \right).$$

Corollaire 5.4 *Dans le Théorème 5.1, si l'on prend* $x = \frac{5\vartheta_1+\vartheta_2}{6}, \gamma = \frac{13}{27}$ *et* $\lambda = 0$, *on* *obtient l'inégalité d'Euler-Maclaurin corrigée suivante :*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{80}\left(27\mathcal{S}\left(\frac{5\vartheta_1+\vartheta_2}{6}\right)+26\mathcal{S}\left(\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)+27\mathcal{S}\left(\frac{\vartheta_1+5\vartheta_2}{6}\right)\right)-\frac{1}{\vartheta_2-\vartheta_1}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\mathcal{S}(u)\,du\right| \\
\leq\ & \frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{36(s+1)(s+2)}\left(\left|\mathcal{S}'(\vartheta_1)\right|+\left|\mathcal{S}'(\vartheta_2)\right|+\left(\frac{39s-2}{10}+\frac{41}{5}\left(\frac{41}{80}\right)^{s+1}\right)\left|\mathcal{S}'\left(\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)\right|\right. \\
&\left.+\left(\frac{61s+22}{20}+\frac{39}{10}\left(\frac{39}{80}\right)^{s+1}\right)\left(\left|\mathcal{S}'(x)\right|+\left|\mathcal{S}'(\vartheta_1+\vartheta_2-x)\right|\right)\right).
\end{aligned}$$

Corollaire 5.5 *Dans le Théorème 5.1, si l'on prend* $x=\frac{2\vartheta_1+\vartheta_2}{3}, \gamma=0$ *et* $\lambda=\frac{3}{8}$, *on obtient l'inégalité de* $\frac{3}{8}$*-Simpson suivante :*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\mathcal{S}(\vartheta_1)+3\mathcal{S}\left(\frac{2\vartheta_1+\vartheta_2}{3}\right)+3\mathcal{S}\left(\frac{\vartheta_1+2\vartheta_2}{3}\right)+\mathcal{S}(\vartheta_2)}{8}-\frac{1}{\vartheta_2-\vartheta_1}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\mathcal{S}(u)\,du\right| \\
\leq\ & \frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{36(s+1)(s+2)}\left(\left(\frac{3s-2}{2}+\frac{25}{8}\left(\frac{5}{8}\right)^s\right)\left(\left|\mathcal{S}'(\vartheta_1)\right|+\left|\mathcal{S}'(\vartheta_2)\right|\right)+\left|\mathcal{S}'\left(\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)\right|\right. \\
&\left.+\left(\frac{7s+4}{2}+\frac{9}{8}\left(\frac{3}{8}\right)^s\right)\left(\left|\mathcal{S}'\left(\frac{2\vartheta_1+\vartheta_2}{3}\right)\right|+\left|\mathcal{S}'\left(\frac{\vartheta_1+2\vartheta_2}{3}\right)\right|\right)\right).
\end{aligned}$$

Corollaire 5.6 *Dans le Théorème 5.1, si l'on prend* $\gamma=\lambda=0$, *on obtient l'inégalité d'Ostrowski à deux point suivante :*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\mathcal{S}(x)+\mathcal{S}(\vartheta_1+\vartheta_2-x)}{2}-\frac{1}{\vartheta_2-\vartheta_1}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\mathcal{S}(u)\,du\right| \\
\leq\ & \frac{(x-\vartheta_1)^2}{(s+1)(s+2)(\vartheta_2-\vartheta_1)}\left(\left|\mathcal{S}'(\vartheta_1)\right|+\left|\mathcal{S}'(\vartheta_2)\right|+(s+1)\left(\left|\mathcal{S}'(x)\right|+\left|\mathcal{S}'((\vartheta_1+\vartheta_2-x))\right|\right)\right) \\
&+\frac{(\vartheta_1+\vartheta_2-2x)^2}{4(s+1)(s+2)(\vartheta_2-\vartheta_1)}\left((s+1)\left(\left|\mathcal{S}'(x)\right|+\left|\mathcal{S}'(\vartheta_1+\vartheta_2-x)\right|\right)+2\left|\mathcal{S}'\left(\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)\right|\right).
\end{aligned}$$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'estimation des erreurs des quadratures de type Newton-Cotes impliquant au plus cinq points pour différentes classes de fonctions. Nous avons effectué une collecte des résultats déjà établis, puis nous nous sommes appuyés sur de nouvelles identités afin d'établir des résultats plus généraux, introduisant ainsi de nouvelles découvertes et généralisant une grande partie des travaux déjà connus. Nous pensons et espérons que notre travail sera très bénéfique et utile pour les chercheurs souhaitant s'initier au domaine des inégalités intégrales, notamment les inégalités portant sur l'estimation d'erreur des quadratures.

Bibliographie

[1] M. W. Alomari, A companion of Ostrowski's inequality with applications. Transylv. J. Math. Mech. 3 (2011), no. 1, 9–14.

[2] M. W. Alomari, A generalization of companion inequality of Ostrowski's type for mappings whose first derivatives are bounded and applications in numerical integration, Trans. J. Math. Mech., 4(2) (2012), 103–109.

[3] M. W. Alomari, A companion of Dragomir's generalization of the Ostrowski inequality and applications to numerical integration. Ukrainian Math. J. 64 (2012), no. 4, 491–510.

[4] N. Azzouza and B. Meftah, Some weighted integral inequalities for differentiable $beta$-convex functions. J. Interdiscip. Math. 25 (2022), no. 2, 373-393.

[5] N. Azzouza and B. Meftah, Some Fractional Simpson type inequalities for differentiable preinvex functions. Indian J. Math. 64 (2022), no. 1, 109–131.

[6] S. Bouhadjar and B. Meftah , Fractional Simpson like type inequalities for differentiable s-convex functions. Jordan J. Math. Stat. 16 (2023), no.3, 563-584.

[7] H. Boulares, B. Meftah, A. Moumen, R. Shafqat, H. Saber, T. Alraqad and E. Ahmad, Fractional multiplicative Bullen type inequalities for multiplicative differentiable functions. Symmetry, 15 (2023), no. 2, 451.

[8] N. Boutelhig, B. Meftah, W. Saleh and A. Lakhdari, Parameterized Simpson-like inequalities for differentiable Bounded and Lipschitzian functions with application

example from management science. J. appl. math., stat., inform., 19 (2023), no.1, 79-91.

[9] W. W. Breckner, Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer Funktionen in topologischen linearen Räumen. (German) Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 23 (37) (1978), 13–20.

[10] H. Budak and M. Z. Sarikaya, A companion of Ostrowski type inequalities for mappings of bounded variation and some applications. Trans. A. Razmadze Math. Inst. 171 (2017), no. 2, 136–143.

[11] P. Cerone and S. S. Dragomir, Midpoint-type rules from an inequalities point of view. Handbook of analytic-computational methods in applied mathematics, 135–200, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2000.

[12] P. Cerone and S. S. Dragomir, Trapezoidal-type rules from an inequalities point of view. Handbook of analytic-computational methods in applied mathematics, 65–134, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2000.

[13] T. Chiheb, B. Meftah and A. Dih, Dual Simpson type inequalities for functions whose absolute value of the first derivatives are preinvex. Konuralp J. Math. 10 (2022), no. 1, 73-78.

[14] T. Chiheb, H. Boulares, M. Imsatfia, B. Meftah and A. Moumen, On s-convexity of dual Simpson type integral inequalities. Symmetry, 15 (2023), no. 3, 733.

[15] M. Djenaou and B. Meftah, Milne type inequalities for differentiable s-convex functions. Honam Mathematical J. 44 (2022), no. 3, pp. 325–338.

[16] S. Djenaoui and B. Meftah, Fractional Maclaurin type inequalities for functions whose first derivatives are s-convex functions. Jordan J. Math. Stat. 16 (2023), no. 3, 483-506.

[17] P. J. Davis and P. Rabinowitz, Methods of numerical integration. Computer Science and Applied Mathematics. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers]\ New York-London, 1975.

[18] S. S. Dragomir, J. E. Pečarić and L. E. Persson, Some inequalities of Hadamard type. Soochow J. Math. 21 (1995), no. 3, 335–341.

[19] S. S. Dragomir, The Ostrowski integral inequality for mappings of bounded variation. Bull. Austral. Math. Soc. 60 (1999), no. 3, 495–508.

[20] S. S. Dragomir, On Simpson's quadrature formula for Lipschitzian mappings and applications. Soochow J. Math. 25 (1999), no. 2, 175–180.

[21] S. S.Dragomir, The Ostrowski's integral inequality for Lipschitzian mappings and applications. Comput. Math. Appl. 38 (1999), no. 11-12, 33–37.

[22] S. S. Dragomir, On the trapezoid quadrature formula for Lipschitzian mappings and applications. Tamkang J. Math. 30 (1999), no. 2, 133–138.

[23] S. S. Dragomir, On Simpson's quadrature formula for mappings of bounded variation and applications. Tamkang J. Math. 30 (1999), no. 1, 53–58.

[24] S. S. Dragomir, On the midpoint quadrature formula for mappings with bounded variation and applications. Kragujevac J. Math. 22 (2000), 13–19.

[25] S. S. Dragomir, On the midpoint quadrature formula for Lipschitzian mappings and applications. Kragujevac J. Math. 22 (2000), 5–11.

[26] S. S. Dragomir, On the trapezoid quadrature formula and applications. Kragujevac J. Math. 23 (2001), 25–36.

[27] S. S. Dragomir, Some companions of Ostrowski's inequality for absolutely continuous functions and applications. Bull. Korean Math. Soc. 42 (2005), no. 2, 213–230.

[28] S. S. Dragomir, A companion of Ostrowski's inequality for functions of bounded variation and applications. Int. j. nonlinear analysis appl. , 5 (2014), no. 1, 89-97.

[29] S. S. Dragomir, nequalities of Hermite-Hadamard type for h-convex functions on linear spaces. Proyecciones 34 (2015), no. 4, 323–341.

[30] S. Erden, S. Iftikhar, P. Kumam and P. Thounthong, On error estimations of Simpson's second type quadrature formula. Math. Methods Appl. Sci. 2020, 1-13.

[31] I. Franjić, J. Pečarić, I. Perić and A. Vukelić, Euler integral identity, quadrature formulae and error estimations (from the point of view of inequality theory). Monographs in Inequalities, 2. ELEMENT, Zagreb, 2011.

[32] E. K. Godunova and V. I. Levin, Inequalities for functions of a broad class that contains convex, monotone and some other forms of functions. (Russian) Numerical mathematics and mathematical physics (Russian), 138–142, 166, Moskov. Gos. Ped. Inst., Moscow, 1985.

[33] A. Guessab and G. Schmeisser, Sharp integral inequalities of the Hermite-Hadamard type. J. Approx. Theory 115 (2002), no. 2, 260–288.

[34] S. Hamida and B. Meftah, Fractional Bullen type inequalities for differentiable preinvex functions. ROMAI J. 16 (2020) no. 2, 63–74.

[35] M. N. Heljiu, On Newton's quadrature formula for mappings of bounded variation. Transylv. J. Math. Mech. 2 (2010), no. 2, 153–158.

[36] N. Irshad, A. R. Khan and A. Nazir, Extension of Ostrowki type inequality via moment generating function. Adv. Inequal. Appl., 2020, 2020 :2. https ://doi.org/10.28919/aia/3600.

[37] N. Kamouche, S. Ghomrani and B. Meftah, Fractional Simpson like type inequalities for differentiable s-convex functions. J. Appl. Math. Stat. Inform. 18 (2022), no. 1, 73–91.

[38] F. Lakha, Ostrowski type inequalities for k-$beta$-convex functions via Riemann–Liouville k-fractional integrals. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 70 (2021), no. 3, 1561–1578.

[39] F. Lakhal and B. Meftah, New Hermite-Hadamard type inequalities for k-β-convex functions via generalized k-fractional conformable integral operators. Facta Univ. Ser. Math. Inform. 37 (2022), no. 3, 559–584.

[40] A. Lakhdari and B. Meftah, Some fractional weighted trapezoid type inequalities for preinvex functions. Int. J. Nonlinear Anal. 13 (2022) 1, 3567-3587.

[41] A. Lakhdari, W. Saleh, B. Meftah, A. Iqbal, Corrected dual Simpson type inequalities for differentiable generalized convex functions on fractal set. Fractal fract. 6 (2022), no.12, 710.

[42] N. Laribi and B. Meftah, 3/8-Simpson type inequalities for differentiable s-convex functions. Jordan J. Math. Stat. 16 (2023), no. 1, 79-98.

[43] B. Meftah, Hermite-Hadamard's inequalities for functions whose first derivatives are (s, m)-preinvex in the second sense. Journal of New theory, (2016), no. 10, 54-65.

[44] B. Meftah, Some new Ostrwoski's inequalities for functions whose nth derivatives are r-convex. Int. J. Anal. 2016, Art. ID 6749213, 7 pp.

[45] B. Meftah, Ostrowski inequalities for functions whose first derivatives are logarithmically preinvex. Chin. J. Math. (N.Y.) 2016, Art. ID 5292603, 10 pp.

[46] B. Meftah, New Ostrowski's inequalities. Rev. Colombiana Mat. 51 (2017), no. 1, 57–69.

[47] B. Meftah, Some new Ostrowski's inequalities for n-times differentiable mappings which are quasi-convex. Facta Univ. Ser. Math. Inform. 32 (2017), no. 3, 319-327.

[48] B. Meftah, Ostrowski inequality for functions whose first derivatives are s-preinvex in the second sense. Khayyam J. Math. 3 (2017), no. 1, 61-80.

[49] B. Meftah, Fractional Ostrowski type inequalities for functions whose first derivatives are s-preinvex in the second sense. Int. J. of Anal. and App. 15 (2017), no. 2, 146-154.

[50] B. Meftah, Fractional Hermite-Hadamard type integral inequalities for functions whose modulus of derivatives are co-ordinated log-preinvex. Punjab Univ. J. Math. (Lahore). 51 (2019), no. 2, 21-37.

[51] B. Meftah and K. Mekalfa, Some weighted trapezoidal inequalities for differentiable log-convex functions. J. Interdiscip. Math. 23 (2020), 1-13.

[52] B. Meftah and K. Mekalfa, Some weighted trapezoidal type inequalities via h-preinvexity. Rad Hrvat. Akad. Znan. Umjet. Mat. Znan. 24 (2020), 81-97.

[53] B. Meftah and K. Mekalfa, Some weighted trapezoidal inequalities for differentiable log-convex functions. J. Interdiscip. Math. 24 (2021),no. 3, 505-517.

[54] B. Meftah and A. Souahi, Some new Čebyšev type inequalities for functions whose modulus of the mixed derivatives are co-ordinated quasi- (α, QC)- and (s, QC)-convex. Engineering and Applied Science Letters. 4 (2021), no 1, pp. $14-20$.

[55] B. Meftah and N. Allel, Maclaurin's inequalities for functions whose first derivatives are preinvex. Journal of Mathematical Analysis and Modeling, 3 (2022), no. 2, 52-64.

[56] B. Meftah, A. Lakhdari and D. C. Benchettah, Some new Hermite-Hadamard type integral inequalities for twice differentiable s-convex functions. Comput. Math. Model. 33 (2022), no. 3, 330–353.

[57] B. Meftah, Maclaurin type inequalities for multiplicatively convex functions. Proc. Amer. Math. Soc. 151 (2023), no. 5, 2115–2125.

[58] B. Meftah, A. Lakhdari, W. Saleh and A. Kiliçman, Some new fractal Milne-type integral inequalities via generalized convexity with applications. Fractal and fract. 7 (2023), no.2, 166.

[59] M. Merad, B. Meftah, H. Boulares, A. Moumen and M. Bouye, Fractional Simpson-like Inequalities with Parameter for Differential s-tgs-Convex Functions. Fractal fract. 7 (2023), no. 11, 772.

[60] M. A. Noor, K. I. Noor and M. U. Awan, Fractional Ostrowski inequalities for (s, m)-Godunova-Levin functions. Facta Univ. Ser. Math. Inform. 30 (2015), no. 4, 489–499.

[61] D. S. Mitrinović, Analytic inequalities. In cooperation with P. M. Vasić. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 165. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1970.

[62] J. E. Pečarić, F. Proschan and Y. L. Tong, Convex functions, partial orderings, and statistical applications. Mathematics in Science and Engineering, 187. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992.

[63] M. Z. Sarikaya, E. Set and M. E. Özdemir, On new inequalities of Simpson's type for convex functions, RGMIA Res. Rep. Coll, 13 (2010), no. 2. Article 2.

[64] M. Z. Sarikaya, H. Budak and S. Erden, On new inequalities of Simpson's type for generalized convex functions. Korean J. Math. 27 (2019), no. 2, 279–295.

[65] K.-L. Tseng, S.-R. Hwang and K.-C. Hsu, Hadamard-type and Bullen-type inequalities for Lipschitzian functions and their applications. Comput. Math. Appl. 64 (2012), no. 4, 651–660.

[66] N. Ujević, A generalization of Ostrowski's inequality and applications in numerical integration. Appl. Math. Lett. 17 (2004), no. 2, 133–137.

[67] B.-Y. Xi and F. Qi, Inequalities of Hermite-Hadamard type for extended s-convex functions and applications to means. J. Nonlinear Convex Anal. 16 (2015), no. 5, 873–890.

[68] W. P. Ziemer, Weakly differentiable functions. Sobolev spaces and functions of bounded variation. Graduate Texts in Mathematics, 120. Springer-Verlag, New York, 1989.