République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE ET DES SCIENCES DE LA MATIÈRE

Département de Mathématiques

Polycopié du cours

MATHÉMATIQUES I

1ère **années Sciences Économiques, Commerciales et Sciences de Gestions**

Par : AHMED ALI

Année universitaire : 2022-2023

Table des matières

Avant-propos

Ce cours s'adresse aux étudiants de première année, tronc commun LMD en sciences économiques, commerciales, et des sciences de gestion.

Il est assez détaillé et contient des compléments qui vont parfois au delà du programme prévu. Ce polycopié contient une partie de cours détaillé suivi des exercices de travaux dirigés et se termine par des exercices supplémentaires.

Par ailleurs, ce support de cours peut être exploité par les étudiants et les enseignants pour la confection de leurs cours et de leurs travaux dirigés.

Il est organisé en une séance de cours (magistral) et en une séance de travaux dirigées.

La polycopie est complété par une bibliographie immédiatement abordable par des étudiants de premier cycle.

J'accueillerai volontiers les remarques , critiques qui pourront m'être directement adressés à mon adresse électronique taliahmed2021@gmail.com afin de pouvoir enrichir ce document.

J'espère que cette polycopie aidera tous mes étudiants et leur donnera envie d'apprendre les mathématiques.

Constantine, 27 mai 2023

Ahmed ALI

Chapitre 1

Analyse combinatoire

Sommaire

1.1 Introduction

L'analyse combinatoire est une branche des mathématiques qui étudie comment compter le nombre d'éléments que contient à un ensemble fini. Elle est largement utilisée en probabilité et en statistique.

1.1.1 Notation factorielle

Définition 1.1. *Soit n un entier naturel non nul. On appelle factorielle de n, le produit de tous les nombres naturels non nuls égaux ou inférieurs à n. on note $n!$.*

$$n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1.$$

Par convention $0! = 1$.

Exemple 1.1.

- $1! = 1, \quad 2! = 2 \times 1 = 2, \quad 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$
- $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120.$
- $10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3628800.$
- $\dfrac{8!}{5!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336.$

Propriétie 1.1.1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$(n+1)! = (n+1) \times n!.$$

Exemple 1.2. Soit un entier naturel $n \geqslant 2$. On simplifie les écritures $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$, $\dfrac{(n-2)!}{n!}$.
Commençons par la première expression

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)!}{(n-1)!} &= \frac{(n+1) \times n \times (n-1)!}{(n-1)!} \\
&= (n+1)n \\
&= n^2 + n.
\end{aligned}$$

Pour la deuxième expression on a

$$\begin{aligned}\frac{(n-2)!}{n!} &= \frac{(n-2)!}{n\times(n-1)\times(n-2)!}\\ &= \frac{1}{n(n-1)}\\ &= \frac{1}{n^2-n}.\end{aligned}$$

1.1.2 Principe fondamental du dénombrement

Il s'agit d'un principe fondamental en analyse combinatoire.
Si une première opération peut être effectuée de n_1 manières différentes, puis une seconde opération peut être effectuée de n_2 manières différentes, puis une troisième opération peut être effectuée de n_3 manières différentes et ainsi de suite jusqu'à une p-ième opération qui peut être effectuée de n_p manières différentes.
Alors l'ensemble de toutes ces opérations peut être effectué de :

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_p$$

manières différentes.

Exemple 1.3. Un restaurant propose sur sa carte trois entrées, six plats principaux et cinq desserts. Combien de menus différents composés d'une entrée, d'un plat et d'un dessert peut-on constituer ?

Réponse : Il s'agit de choisir simultanément un entrée parmi 3, puis un plat principal parmi 6, puis un dessert parmi 5, donc il y a $3 \times 6 \times 5 = 90$ menus différents possibles.

Exemple 1.4. Les localités A et B sont reliées par 3 routes différentes et les localités B et C par 2 routes différentes. Combien y a-t-il de trajets de A à C en passant par B ?

Réponse : Il y a $3 \times 2 = 6$ trajets possibles de se rendre par la route de la localité A à la localité C.

1.2 Arrangements

1.2.1 Arrangements sans répétition

Définition 1.2. *Soient n, p deux entiers naturels tels que $1 \leqslant p \leqslant n$. Un arrangement sans répétition de p éléments parmi de n éléments est une disposition ordonnée de p éléments, distincts, choisis dans un ensemble de n éléments donnés.*
Le nombre d'arrangements sans répétition de p éléments parmi n est noté A_n^p.

Observons simplement que le premier objet peut être choisi de n manières, le second de $(n-1)$ manières, le troisième de $(n-2)$,..., le p-ème objet de $n-(p-1) = n-p+1$ manières. Donc d'après le principe fondamental du dénombrement on obtient

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}_{p \text{ facteurs entiers consécutifs}} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

arrangements possible (sans répétition).

Théorème 1.1. *Le nombre de permutations p d'un ensemble de n éléments différents est*

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Exemple 1.5. De combien de façons peut-on jouer un tiercé sur une course de 20 chevaux ?

Réponse : Le nombre de tiercés dans l'ordre avec 20 chevaux au départ est de :

$$A_{10}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6840.$$

Exemple 1.6. Combien y a-t-il de nombres de quatre chiffres différents formés à partir des chiffres 1, 2, 5, 7, 8 et 9 ?

Réponse : Chacun de ces nombres est un arrangement sans répétition de 4 éléments parmi 6, donc il y a $A_6^4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ nombres de quatre chiffres différents.

Exemple 1.7. Combien de mots de 3 lettres distinctes peuvent être formés dans un alphabet de 26 lettres ?

Réponse : Chacun de ces mots est un arrangement sans répétition de 3 éléments parmi 26, donc on a $A_{26}^3 = 26 \times 25 \times 24 = 150600$ mots de 3 lettres distinctes.

Exemple 1.8. Combien de nombres de deux chiffres distincts peut-on former avec les chiffres $1, 2, 3, 4, 5$.

Réponse : On voit bien que c'est un arrangement sans répétition de 2 éléments parmi 5, $A_5^2 = 5 \times 4 = 20$. On peut alors former 20 nombres de deux chiffres distincts

Exemple 1.9. Dans une classe, il y a 20 chaises individuels. De combien de manières différentes les 12 élèves de la classe peuvent-ils se placer ?

Réponse : Chacune de ces manières est une arrangement sans répétition de 12 éléments parmi 12, donc il y a $A_{12}^{12} = 12! = 479001600$ façons différentes de s'asseoir.

1.2.2 Arrangements avec répétitions

Définition 1.3. *Un arrangement avec répétition de p éléments (on dit aussi p-liste) parmi n est une disposition ordonnée de p éléments, distincts ou non, choisis dans un ensemble de n éléments donnés.*

Pour tout élément choisi, il existe n manières pour le ranger parmi n éléments.
Ainsi pour les p éléments choisis, il y aura

$$n^p = \underbrace{n \times n \times \ldots \times n}_{p \text{ facteurs}}$$

arrangements possibles (avec répétitions).

Théorème 1.2. *Le nombre d'arrangements avec répétition de p éléments parmi n est n^p.*

Exemple 1.10. Combien peut-on écrire de nombre de 3 chiffres distincts de 0 ?

Réponse : Un tel nombre est un arrangement avec répétition de 3 éléments parmi 9, donc il y $9^3 = 729$ nombres de 3 chiffres distincts de 0.

Exemple 1.11. Combien existe-t-il de possibilités de tirer, dans un ordre donné et avec remise, 4 boules d'une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10 ?

Réponse : Il y a $10^4 = 10000$ manières possibles de tirage.

Exemple 1.12. Combien peut-on former de plaques d'immatriculation constituées de 3 lettres puis 3 chiffres ?

Réponse : Il y a 26 choix pour chacune des lettres et 10 choix pour chacun des chiffres. On peut former donc $26^3 \times 10^3 = 17576000$ plaques d'immatriculation.

Exemple 1.13. Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9. Combien y-a-t-il de codes possibles ?

Réponse : Un tel code est un arrangement avec répétition de 3 éléments parmi 9, donc il y $9^3 = 729$ codes possibles.

Exemple 1.14. Combien de nombres de deux chiffres peut-on former avec les chiffres : 1, 2, 3, 4, 5. On voit bien que c'est un arrangement avec répétition de 2 éléments parmi 5.

Réponse : On a $5^2 = 25$, donc on peut alors former 25 nombres de deux chiffres

Exemple 1.15. Combien de mots de 3 lettres peuvent être formés dans un alphabet de 26 lettres ?

Réponse : On peut formés $26^3 = 170576$ mots possibles.

1.3 Permutation

1.3.1 Permutation sans répétition

Définition 1.4. *Soit E un ensemble fini non vide de n éléments. Une permutation sans répétition de n éléments est une une disposition ordonnée de ces n éléments distincts.*

Une permutation de n éléments est construite en n étapes successives :
choisir le premier élément, choisir le deuxième élément,$\cdots$, choisir le dernier élément. Le premier élément peut être sélectionné parmi n façons. Une fois choisi, le deuxième élément peut être sélectionné de $n-1$ façons. Une fois choisi, le troisième élément peut être sélectionné de $n-2$ façons, et ainsi de suite.
Par le principe de la multiplication, il y a

$$n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n!$$

permutations de n éléments.

Théorème 1.3. *Le nombre de permutations sans répétition de n éléments est* $n!$*, on le note*

$$P_n = n!$$

Exemple 1.16. De combien de façons 6 élèves peuvent-ils se disposer en file indienne ?

Réponse : Il y a $6! = 720$ façons possibles.

Exemple 1.17. De combien de façons peut-on choisir un président, un secrétaire et un trésorier parmi 3 personnes sachant qu'une personne ne peut pas cumuler de fonction ?

Réponse : Il y a $3! = 6$ façons possibles.

Exemple 1.18. Il y a 8 athlètes qui participent aux course de 100 m. Combien de façons possibles pouvons-nous obtenir comme classement final ?

Réponse :

1. Est-ce que l'ordre est important ? Oui.
2. Est-ce que cela concerne tous les éléments ? Oui.

Donc, on utilise les permutations. Il y a donc $n! = 8! = 40320$ possibilités.

Exemple 1.19. De combien de manières peut-on classer 4 livres dans une étagère ?

Réponse : $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. Donc il y a 24 manières de classer 4 livres dans une étagère.

Exemple 1.20. De combien de façons pouvez-vous ranger 10 livres sur une étagère ?

Réponse : Il y a $10! = 3628800$ façons possibles

Exemple 1.21. Le nombre de permutations (anagrammes) des lettres du mot IMAGE est $5! = 120$.

Exemple 1.22. Les permutations possibles des lettres A, B et C sont : ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Soit $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ permutations.

Exemple 1.23. Quatre Américains, 5 Suisses et 7 japonais doivent s'asseoir sur un même banc, et doivent rester groupés par nationalité. Combien y a-t-il de dispositions possibles ?

Réponse : Il y a $3!4!5!7! = 87091200$ dispositions possibles.

1.3.2 Permutation avec répétitions

Définition 1.5. *Soit n objets pas tous distincts, de p types différents. Supposons qu'il y ait n_1 objets égaux à a_1, n_2 objets égaux à a_2,..., n_p objets égaux à a_p :*

$$\underbrace{a_1, a_1, \ldots, a_1}_{n_1}, \underbrace{a_2, a_2, \ldots, a_2}_{n_2}, \ldots, \underbrace{a_p, a_p, \ldots, a_p}_{n_p}$$

avec $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n$.
Une permutation avec répétition est un groupe ordonné formé de tous les n objets, chacun répété selon sa multiplicité respective.

Pour calculer le nombre de permutations avec répétitions de n éléments dont n_1 sont identiques, n_2 sont identiques,..., n_p sont identiques, on applique le principe de multiplication :
– il y a $C_n^{n_1}$ choix pour le premier sous-ensemble
– il y a $C_{n-n_1}^{n_2}$ choix pour le deuxième sous-ensemble
– il y a $C_{n-n_1-\ldots-n_{p-1}}^{n_p}$ choix pour le p-ième sous-ensemble
Soit au total :

$$C_n^{n_1} \times C_{n-n_1}^{n_2} \times \cdots \times C_{n-n_1-\ldots-n_{p-1}}^{n_p} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_p!}.$$

Théorème 1.4. *Le nombre de permutations avec répétition de n éléments comporte n_1 objets identiques de type 1, n_2 objets identiques de type 2, . . . , n_p objets identiques de type p est*

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_p} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_p!}.$$

Exemple 1.24. Combien y a-t-il de permutations (anagrammes) des lettres du mot STATISTIQUES.

Réponse : Puisque le mot est composé de 11 lettres, avec 2 "S", 3 "T" et 2 "I", il suffit de calculer $P_{11}^{2,3,2} = \dfrac{11!}{2! \times 3! \times 2!} = 1663200$.

Exemple 1.25. Un jardinier a 5 fleurs rouges, 3 jaunes et 2 blanches pour planter en une rangée. Combien y a-t-il de motifs possibles ?

Réponse : Il y a $P_{10}^{5,3,2} = \dfrac{10!}{5! \times 3! \times 2!} = 2520$ motifs possibles.

Exemple 1.26. De combien de manières peut-on répartir une classe de 23 élèves dans une classe de 15 pupitres ?

Réponse : Il y a 7 sièges vides, et donc indiscernables. C'est donc une permutation avec des répétitions. Le nombre recherché est $P_{23}^{7} = \dfrac{23!}{7!} = 5.129 \times 10^{18}$.

Exemple 1.27. Combien d'anagrammes peut-on former avec les lettres du mot « excellence » ?

Réponse : Il y a $P_9^{4,2,2} = \dfrac{9!}{4! \times 2! \times 2!} = 3780$ anagrammes possibles.

1.4 Combinaison

1.4.1 Combinaison sans répétition

Définition 1.6. *Soit E un ensemble fini non vide de n éléments et p un entier naturel tel que $0 \leqslant p \leqslant n$. Une combinaison sans répétition de p éléments parmi n est une disposition non ordonnée de p éléments choisis parmi les n éléments.*

Peut-on trouver une formule pour compter C_n^p le nombre de combinaisons sans répétition de p éléments parmi n ?
Dans un sous-ensemble, les éléments ne sont pas ordonnés, au contraire d'un arrangement. Par conséquence, à chaque sous-ensemble correspond $k!$ arrangements, donc :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Théorème 1.5. *Le nombre de combinaisons sans répétition de p éléments parmi n est*

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Exemple 1.28. Combien de bulletins de Lotto différents est-il possible de remplir (6 numéros à choisir parmi 42) ?

Réponse : Il y a $\mathrm{C}_{49}^{6} = 13983816$.

Exemple 1.29. Avec 10 personnes, combien de groupes de 3 personnes peut-on constituer ?

Réponse : Il y a $\mathrm{C}_{10}^{3} = 120$ groupes possibles.

Exemple 1.30. Un livre comporte 14 chapitres. Combien y-a-t-il de façons de choisir 3 chapitres dans ce livre ?

Réponse : Il y a $\mathrm{C}_{14}^{3} = 364$ chapitres possibles.

Exemple 1.31. On souhaite constituer un comité de 3 personnes dans une entreprise de 60 salariés. Combien y a-t-il de comités possibles.

Réponse : Il y a $\mathrm{C}_{60}^{3} = 34220$ comités possibles.

Propriétie 1.4.1.

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$.
2. $C_n^1 = C_n^{n-1}$. **(Formule de symétrie)**
3. $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$. (**Formule de Pascal**)

1.5 Triangle de Pascal

En utilisant les propriétés précèdent, nous pouvons construire le Triangle de Pascal, qui nous permet de calculer le nombre de combinaisons sans avoir à calculer de factorielles :

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	$\vdots$						$\ddots$

Formule de Pascal

$$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$$

1.6 Formule du binôme de Newton

Sir Isaac n'a pas fait que dormir sous un pommier. Il a par exemple établi que

Théorème 1.6. *Soit a et b des nombres complexes et n un entier naturel non nul, alors*

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p \\ &= a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n.\end{aligned}$$

Exemple 1.32. Avec $a = 1$ et $b = x$, on obtient

$$(1+x)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^p.$$

Exemple 1.33. Avec $a = 1$ et $b = 1$, on obtient

$$2^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p.$$

1.7 Travaux Dirigés

Exercice 1. Calculer sans utiliser la calculatrice

1. A_7^3

2. A_{11}^2

3. A_5^1

4. A_5^5

5. C_{11}^3

6. C_9^6

7. C_6^3

8. C_8^5

9. $C_{17}^7 - C_{17}^{10}$

10. $C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$.

Exercice 2.

1. Combien peut-on former de nombres de quatre chiffres ?
2. Combien peut-on former de nombres de quatre chiffres distincts ?
3. I Combien peut-on former de nombres pairs de quatre chiffres ?
4. Combien peut-on former de nombres pairs de quatre chiffres distincts ?
5. Combien peut-on former de nombres de quatre chiffres distincts contenant au moins l'un des chiffres $0, 1, 2$?

Exercice 3. De combien de manières peut-on ranger quatre paires de chaussettes dans trois tiroirs ?

Exercice 4. Une classe de 30 élèves, 12 filles et 18 garçons, doit élire un comité composé d'un président, un vice-président et un secrétaire.

1. Combien de comités peut-on constituer ?
2. Combien de comités peut-on constituer sachant que le poste de secrétaire doit être occupé par une fille ?
3. Quel est le nombre de comités comprenant l'élève X ?
4. Quel est le nombre de comités pour lesquels le président est un garçon et le secrétaire une fille ?

5. Quel est le nombre de comités pour lesquels le président et le vice-président sont de sexes différents ?

Exercice 5.

1. On appelle anagramme du mot MAI tout mot (ayant un sens ou non) formé des trois lettres M, A et I. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot MAI ?
2. Combien y a-t-il d'anagrammes formées avec les lettres des mots INTERNATIONAL, THEOREME et ANANAS ?

Exercice 6. La nouvelle immatriculation que nous nous attendons à appliquer en Algérie se base sur le modèle $AA - 111 - AA$ (deux lettres, trois chiffres, deux lettres).

1. Combien y a-t-il de plaques d'immatriculation différentes ? En réalité, il y en a moins que cela, car on exclut les lettres I, O et U (du fait de leur trop grande ressemblance avec le 1, le 0 et le V) ainsi que les séries SS et WW du bloc de gauche et la série SS du bloc de droite. De plus, les séries de chiffres démarrent à 001.
2. Avec ces contraintes, combien y a-t-il de plaques d'immatriculation différentes ?
3. Les combinaisons de lettres prêtant à rire KK, PD, PQ, QQ, et WC ne sont cependant pas supprimées. Si c'était le cas, combien y aurait-il de plaques d'immatriculation ?

Exercice 7. [Contrôle de qualité]

1. Dans un lot de vingt pièces fabriquées, on en prélève simultanément quatre. Combien de prélèvements différents peut-on ainsi obtenir ?
2. On suppose alors que sur les vingt pièces, quatre sont mauvaises. Dans combien de prélèvements :
   (a) les quatre pièces sont bonnes ?
   (b) au moins une pièce est mauvaise ?
   (c) une et une seule est mauvaise ?
   (d) deux au moins sont mauvaises ?

Exercice 8. Une multinationale décide de lancer un dentifrice pour chien. Le nom de ce nouveau produit indispensable doit comporter trois lettres.

1. Combien de noms peut-on former avec toutes les lettres de l'alphabet ?
2. Combien de noms peut-on former comportant une consonne et deux voyelles ?
3. Combien de noms peut-on former comportant une consonne et deux voyelles différentes ?

Exercice 9.

1. Combien de mots de 7 lettres peut-on former avec les lettres A, B, C, D, E, F, G, en les utilisant toutes ?
2. Combien y a-t-il de ces mots où les lettres CDE sont toujours ensemble
   — Dans cet ordre ?
   — Dans un ordre quelconque ?

Exercice 10. Au loto, combien a-t-on de possibilités, en choisissant sept numéros (de 1 à 49), d'avoir :

1. Les six bons numéros plus le complémentaire ?
2. Six numéros ?
3. Cinq numéros plus le complémentaire ?
4. Cinq numéros ?
5. Quatre numéros ?
6. Trois numéros ?

Remarque : En dessous de cinq numéros le complémentaire ne joue aucun rôle.

Exercice 11. Julie a le choix entre quatre confitures différentes pour étaler sur une tartine, une biscotte et un toast. Combien a-t-elle de possibilités, sachant qu'elle peut éventuellement, en plus de la confiture, les beurrer ?

Exercice 12. Un club de football est composé de 20 joueurs dont 3 gardiens de but. Combien d'équipes différentes de 11 joueurs peut-on former ? (On ne tient pas compte de la place des joueurs sauf pour les gardiens qui ne peuvent jouer que dans les buts).

Exercice 13. Une urne contient trois boules blanches et cinq boules noires.

On tire simultanément quatre boules de l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages qui contiennent :
   (a) Une seule boule blanche ?
   (b) Deux boules blanches ?
   (c) Trois boules blanches ?
   (d) Quatre boules blanches ?
   (e) Au moins une boule blanche ?
   (f) Quatre boules noires ?
   (g) Deux boules noires ?

Exercice 14.

1. **Démonstration de cours.** Démontrer que, pour tous entiers naturels n et k tels que $1 \leqslant k < n$, on a :
$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k.$$
2. En déduire que pour tous entiers naturels n et k tels que $2 \leqslant k < n-1$, on a :
$$C_{n-2}^{k-2} + 2C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k} = C_n^k.$$

Exercice 15. Un étudiant possède 14 livres de quatre matières différentes : 4 livres de mathématiques, 5 d'économie, 3 de philosophie, 2 d'anglais.

Il veut ranger ces livres sur une étagère.

1. De combien de façon peut-il le faire s'il ne tient pas compte des matières ?
2. De combien de façon peut-il le faire s'il range d'abord les livres d'anglais, puis ceux d'économie, puis ceux de math, et enfin ceux de philo ?
3. De combien de façon peut-il le faire s'il range les livres par matière ?

1.8 Exercices Supplémentaires

Exercice 1. Simplifier les expressions suivantes

1. $\dfrac{(n+2)!}{(n-1)!}$
2. $\dfrac{(n-2)!\,(n+1)!}{(n+1)!}$
3. $\dfrac{(n-1)!\,n!}{(n+1)!}$
4. $\dfrac{(n+3)!\,(n-1)!}{(n-2)!\,(n+2)!}$

Exercice 2.

1. Donnez une expression simple de C_n^0, de C_n^1, de C_n^n, de C_n^{n-1}. Utilisez des simplifications pour calculer à la main C_{20}^3.
2. On donne $C_{13}^5 = 1287$ et $C_{13}^6 = 1716$. Calculez alors à la main C_{13}^8 et C_{14}^9

Exercice 3. Résolvez les équations suivantes

1. $C_n^2 = 136$
2. $C_n^2 + C_{n+1}^{n-1} = 25$
3. $A_n^3 = 4A_n^2$
4. $A_n^2 + A_{n-1}^2 + A_{n-2}^2 = 20$
5. $n! = 24A_n^3$.

Exercice 4. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, $C_{n+2}^3 - C_n^3 = n^2$

Exercice 5. On considère 7 boules numérotées de 1 à 7.

1. On en tire simultanément 3. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Soit k un entier vérifiant $3 \leqslant k \leqslant 7$. Combien y a-t-il de tirages de 3 boules dont le plus grand numéro est k ?
3. En déduire une expression de $\sum_{k=3}^{7} C_{k-1}^2$ sous forme d'un unique coefficient binomial.

Exercice 6. Quel est le coefficient de x^9 dans le polynôme $\left(1+\frac{1}{2}x\right)^{13}$

Exercice 7. Soit a et b deux réels.

1. Développer $(a+b)^3$.
2. A l'aide du triangle de Pascal développer
   (a) $(a+b)^4$,
   (b) $(a+b)^5$,
   (c) $(a+b)^6$.
3. Développer $(a+1)^6$, $(a-1)^5$.

Exercice 8. Trois guides et 4 touristes partent à l'ascension d'une montagne. Ces 7 personnes forment une cordée dont la première et la dernière personne sont des guides.
De combien de façons différentes peuvent-elles le faire ?

Exercice 9. On lance 10 fois un dé à jouer et on prend note des résultats successivement obtenus, par exemple 5321144632.

1. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
2. Combien y a-t-il de résultats avec 6 nombres pairs et 4 nombres impairs ?
3. Combien y a-t-il de résultats avec 1 un, 2 deux, 3 trois et 4 quatre ?
4. Combien y a-t-il de résultats avec au moins 2 six ?
5. Combien y a-t-il de résultats dont la somme des points vaut 12 ?

Exercice 10. Dans un lot de 20 pièces fabriquées, 4 sont mauvaises. De combien de façon différentes peut-on en prélever 4 dans les cas suivants :

1. les 4 pièces sont bonnes.
2. Une au moins d'entre elles est mauvaise.
3. Deux au moins sont mauvaises.

Chapitre 2

Suites numériques

Sommaire

2.1 Généralités

2.1.1 Rappels sur les suites

Définition 2.1. *On appelle suite numérique toute application de* $\mathbb{N}$ *(ou d'une partie de* $\mathbb{N}$*) vers* $\mathbb{R}$*.*

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u(n) = u_n \end{aligned}$$

u_n *est appelé le terme général de la suite u, que l'on note aussi* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou plus simplement* (u_n)*.*

Remarque 2.1. On peut définir une suite (u_n) de deux façons, sous forme explicite ou sous forme récurrente.

1. **Forme explicite :** La première façon de définir une suite est de donner son terme général directement en fonction de n.
   (a) $u_n = n^2 + n + 1$,
   (b) $u_n = 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

   Le principal avantage de ce type de définition qu'il permet de calculer rapidement n'importe quel terme de la suite.
2. **Forme récurrente :** L'autre façon de définir d'une suite est de donner la règle permettant de passer d'un terme au suivant.
   (a) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$ (suite Arithémitico-géométrique)
   (b) $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 2 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$ (suite de Fibonacci)

2.1.2 Représentation graphique d'une suite

Une telle suite est définie à partir d'une formule de type $u_n = f(n)$. Pour représenter (u_n), il suffit de tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f et de ne conserver que les points dont les abscisses sont des entiers naturels

Exemple 2.1. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n^2}{n+1} + 1 = f(n)$

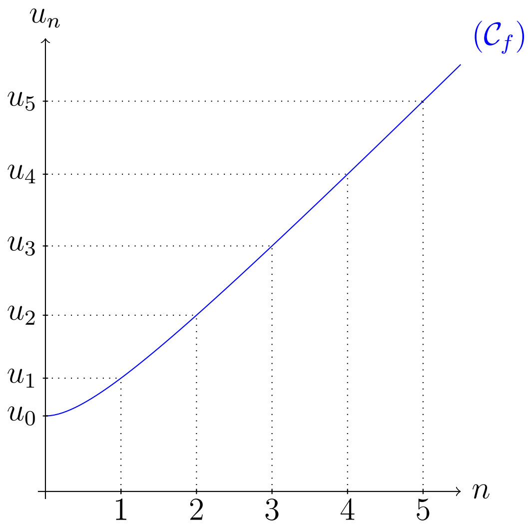


FIGURE 2.1 – Représentation de la suite $u_n = \dfrac{n^2}{n+1} + 1$

Une telle suite est définie par une relation de type $u_{n+1} = f(u_n)$ et la donnée du terme initial. Il existe deux possibilités pour représenter graphiquement une telle suite.

Soit calculer successivement les termes de différents rangs $u_1 = f(u_0)$ puis $u_2 = f(u_1)$, $u_3 = f(u_2)$ …etc, puis reporter sur le graphe les points ainsi obtenus de coordonnées $(0, u_0), (1, u_1), (2, u_2)$ …etc.

Soit utiliser la méthode de construction graphique suivante :

Etape 1 : tracer la courbe représentant la fonction f. Etape 2 : tracer la droite D d'équation $y = x$.

Etape 3 : placer le point de coordonnées $(u_0, 0)$

Etape 4 : chercher le point d'ordonnée $f(u_0)$, on l'obtient en traçant une droite verticale passant par $(u_0, 0)$ et en cherchant son intersection avec la courbe $\mathcal{C}_f$. Ce point a comme ordonnée $f(u_0)$, ce qui correspond à u_1 (puisque $u_1 = f(u_0)$)

Etape 5 : projeter horizontalement le point de coordonnées (u_0, u_1) sur la droite D pour obtenir le point de coordonnées (u_1, u_1), une projection verticale permet ensuite de repporter le point $(u_1, 0)$ sur l'axe des ordonnées.

Réaliser ensuite pour u_1 les même opérations que pour u0 afin d'obtenir u_2 et ainsi de suite pour les termes de rang suivant.

Exemple 2.2. Soit la suite (u_n) définie par la relation de récurrence

$$\begin{cases} u_0 = -1.5 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$$

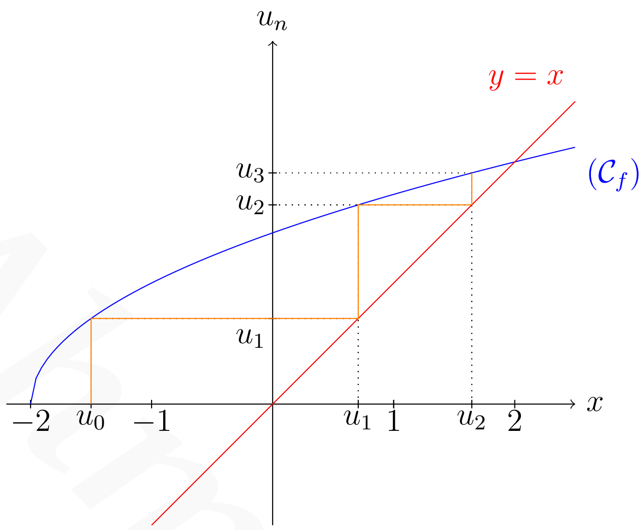


FIGURE 2.2 – Représentation de la suite $u_0 = -1.5$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

2.1.3 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 2.2. *Une suite (u_n) est dite*

1. *Majorée si et seulement si*

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : u_n \leqslant M$$

2. *Minoré si et seulement si*

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : u_n \geqslant m$$

3. *Bornée si et seulement si elle est, à la fois minorée et majorée, c'est à dire*

$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : m \leqslant u_n \leqslant M$$

ou de manière équivalente

$$(u_n) \text{ est bornée } \Leftrightarrow \exists A > 0, \forall n \in \mathbb{N} : |u_n| \leqslant A$$

Exemple 2.3. Soit la suite définit par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}. \end{cases}$

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 1$

En effet : pour $n = 0$, on a $u_0 = 2 > 1$.

Supposons que $u_n > 1$ pour un n fixé et montrons que :$u_{n+1} > 1$.

$$\begin{aligned} u_n > 1 \quad & \Rightarrow \quad \frac{1}{u_n} < 1 \\ & \Rightarrow \quad -\frac{1}{u_n} > -1 \\ & \Rightarrow \quad 2 - \frac{1}{u_n} > 1 \\ & \Rightarrow \quad u_{n+1} > 1 \end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 1$ c'est à dire (u_n) est minorée par 1.

2.1.4 Sens de variation d'une suite

Pour étudier la monotonie d'une suite on calcul le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ou on comparer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 si la suite (u_n) de termes strictement positives.

Définition 2.3. *Une suite (u_n) est dite*

1. *Croissante si et seulement si*

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n \geqslant 0$$

2. *Strictement croissante si et seulement si*

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n > 0$$

3. *Décroissante si et seulement si*

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n \leqslant 0$$

4. *Strictement décroissante si et seulement si*

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n < 0$$

5. *Monotone si elle est croissante ou décroissante.*

Exemple 2.4. Soit la suite (u_n) définit par $u_n = 2 - \dfrac{1}{n+1}$ Alors on a

$$u_{n+1} - u_n = 2 - \frac{1}{n+1} - 2 + \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

Donc la suite (u_n) est croissante.

Définition 2.4 (Suites extraites)**.** *Une suite extraite (ou une sous-suite) de (u_n) est une suite de la forme $(u_{s(n)})$ où $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$est une application strictement croissante.*

Exemple 2.5. Soit la suite $u_n = (-1)^n$, les suites (v_n) et (w_n) telles que $v_n = u_{2n} = 1$ et $w_n = u_{2n+1} = -1$ sont extraies de (u_n).

2.1.5 Limite d'une suite

Définition 2.5. *On dit que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant N : |u_n - l| \leqslant \varepsilon$$

On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ ou encore $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.

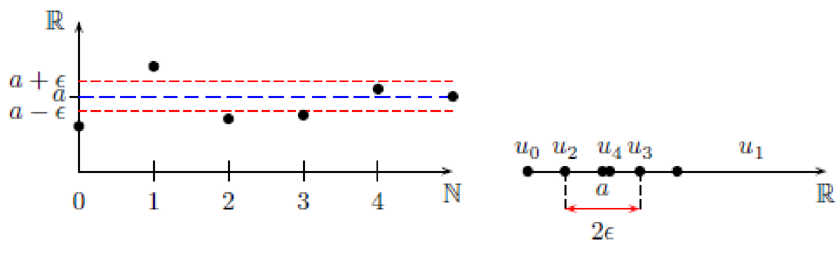


FIGURE 2.3 – Limite d'une suite

Définition 2.6. *La suite (u_n) est dite*

1. *Convergente s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.*
2. *Divergente si sa limite est infinie ou n'existe pas.*

Théorème 2.1 (Théorème des gendarmes). *On considère trois suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) telles que $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ à partir un certain rang. Si les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et de même limite ℓ, la suite (u_n) converge vers ℓ.*

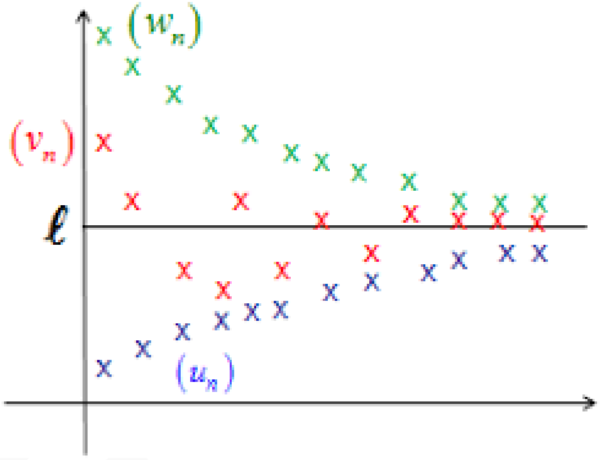


FIGURE 2.4 – Théorème des gendarmes

Exemple 2.6. On calcule $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sin n}{n^2+1}$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$, donc $\dfrac{-1}{n^2+1} \leqslant \dfrac{\sin n}{n^2+1} \leqslant \dfrac{1}{n^2+1}$
mais $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-1}{n^2+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0$.
Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sin n}{n^2+1} = 0$.

Théorème 2.2. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \geqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$. Alors*

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

Exemple 2.7. Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} n!$, on rappelle que $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! \geqslant n$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n! = +\infty$.

Théorème 2.3. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty.$$

Exemple 2.8. On calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n(2+\cos n)$.
On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant \cos n$, donc $1 \leqslant 2+\cos n$
c'est à dire $-2n(2+\cos n) \leqslant -2n$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n = -\infty$.
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n(2+\cos n) = -\infty$

2.1.6 Criteres de convergence pour les suites

Théorème 2.4. *Soit (u_n) une suite donnée, alors*

$$(u_n) \text{ croissante et majorée } \Rightarrow (u_n) \text{ convergente.}$$

$$(u_n) \text{ décroissante et minorée } \Rightarrow (u_n) \text{ convergente.}$$

Proposition 2.1.1. *Si (u_n) converge vers ℓ, toute sous-suite de (u_n) converge vers ℓ.*

Proposition 2.1.2. *S'il existe deux sous-suites de (u_n) qui ont des limites différentes, la suite (u_n) ne converge pas.*

Exemple 2.9. La suite $u_n = (-1)^n$ diverge, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 1 \neq \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -1$.

2.1.7 Suites adjacentes

Définition 2.7. *Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si l'une croissante, l'autre décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.*

Théorème 2.5. *Deux suites adjacentes sont convergentes et convergent vers la même limite.*

Exemple 2.10. Soient les suites $u_n = 4 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 4 + \dfrac{1}{n}$, $(n \in \mathbb{N}^*)$.
La suite (u_n) est croissante car

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} > 0.$$

La suite (v_n) est décroissante puisque

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

De plus

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{-2}{n} = 0$$

Dons (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

2.2 Suites arithmétiques

Définition 2.8. *On dit qu'une suite (u_n) est arithmétique lorsqu'il existe un réel r tel que*

$$u_{n+1} = u_n + r \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Le nombre r est appelé raison de la suite arithmétique.

Théorème 2.6. *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors pour tous entiers n et p, nous avons :*

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

Proposition 2.2.1. *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r \neq 0$.*

- *Si $r < 0$, alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.*
- *Si $r > 0$, alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.*

Théorème 2.7. *La somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme u_0 s'exprime par*

$$S_n = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right).$$

Plus généralement

$$S_n = \textit{ Nombre des termes } \left(\frac{\textit{premier terme } + \textit{ dernier terme}}{2}\right)$$

2.3 Suites géométriques

Définition 2.9. *On dit qu'une suite (u_n) est géométrique lorsqu'il existe un réel q tel que*

$$u_{n+1} = qu_n \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Le nombre q est appelé raison de la suite géométrique.

Théorème 2.8. *Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Alors pour tous entiers n et p, nous avons :*

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Proposition 2.3.1. *Soit q un nombre réel.*

- *Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.*
- *Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.*
- *Si $q < -1$, alors la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ n'existe pas.*

Théorème 2.9. *La somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme u_0 s'exprime par $(q \neq 1)$*

$$S_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Plus généralement

$$S_n = (\text{ premier terme de la somme }) \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}.$$

2.4 Suites récurrentes

Définition 2.10. *Soit f une fonction. Une suite récurrence (u_n) est une suite définie par la donnée de leur premier terme et par une relation de récurrence, valable pour tout entier n*

$$\begin{cases} u_0 \textit{ donnée} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Propriétie 2.4.1. *Si la fonction f est croissante, alors :*

1. *si $u_0 \leqslant u_1$, la suite (u_n) est croissante,*

2. si $u_0 \geqslant u_1$, la suite (u_n) est décroissante.

Théorème 2.10. *Soit la suite (u_n) définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.*
Si (u_n) converge vers ℓ, alors ℓ est une solution de l'équation

$$f(x) = x.$$

ℓ est appelée point fixe de f.

2.4.1 Suites arithmético-géométriques

Définition 2.11. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmético-géométrique s'il existe deux réels a et b tels que :*

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarque 2.2.

1. Si $a = 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante égale à b.
2. Si $a = 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison b.
3. Si $b = 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison a.

Exemple 2.11. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{5}u_n + 3 \end{cases}$$

Pour exprimer u_n en fonction de n, on procède selon les étapes suivantes :

1. On détermine l'unique réel α vérifiant $f(\alpha) = \alpha$ où $f(\alpha) = \dfrac{2}{5}\alpha + 3$

$$\alpha = \frac{2}{5}\alpha + 3 \Longleftrightarrow \frac{3}{5}\alpha = 3.$$

   On a donc $\alpha = 5$.

2. On pose $v_n = u_n - \alpha$, c'est à dire $v_n = u_n - 5$. Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Pour cela, on calcule

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 5 = \frac{2}{5}u_n + 3 - 5 = \frac{2}{5}u_n - 2 = \frac{2}{5}(u_n - 5) = \frac{2}{5}v_n.$$

La suite (v_n) est bien géométrique de raison $\frac{2}{5}$.
On en déduit son expression $v_n = v_0 \left(\frac{2}{5}\right)^n$ avec $v_0 = u_0 - 5 = 1 - 5 = -4$. On a donc $v_n = -4\left(\frac{2}{5}\right)^n$. On en déduit l'expression de (u_n).

$$u_n = v_n + 5 = -4\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5$$

2.5 Applications des suites en économie

Plusieurs phénomènes de la vie courante peuvent être analysés mathématiquement a l'aide des suites numériques. Comme l'augmentation d'un capital déposé a la caisse d'épargne.

2.5.1 Intérêt simple

Un capital est dit placé à intérêts simples lorsque les intérêts calculés uniquement sur le montant de capital. Les intérêts versés à la fin du placement sont calculés proportionnellement à la durée du placement. $K_{n+1} = K_n + i \times K_n$, ($i$ est le taux du placement).

Exemple 2.12. On place le 1^{er} de chaque mois (du 1^{er} janvier 2020 au 1^{er} Décembre 2020 inclus) un montant de 5000 DA sur un compte rémunéré à intérêts simples à $0,4\%$ par mois. On retire le capital acquis le 1^{er} janvier 2021.

1. Calculer le montant de l'intérêt rapporté par chacun des quatre premiers mois.
2. U_n est l'intérêt rapporté par le montant placé le n-ième mois. Montrer que la suite (U_n) est arithmétique et donner sa raison.
3. En déduire le montant total des intérêts acquis, puis le capital acquis.

2.5.2 Intérêt composé

Un capital est dit placé à intérêts composés lorsque à l'issue de chaque période de placement, les intérêts s'ajoutent au capital et portent eux-mêmes intérêts au taux i de placement.
$C_{n+1} = C_n + i \times C_0$

Exemple 2.13. On place un capital initial C_0 de 10 000 DA à intérêts composés au taux annuel de 8%.

Soit C_n le capital dont on dispose au bout de n années.

1. Montrer que (C_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison. Calculer C_5.
2. Au bout de combien d'années de placement, le capital acquis dépassera-t-il le double du capital initial ? Le résultat dépend-t-il du capital C_0 ?

2.6 Travaux Dirigés

Exercice 1.

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique de raison r et de premier terme u_0. Soit la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.
   (a) Sachant que $r = 5$ et $u_0 = 1$, calculer u_4 et S_{10}.
   (b) Sachant que $u_3 = 5$ et $S_4 = 15$, déterminer r et u_0.
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est cette fois une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
   (a) Sachant que $u_0 = 3$ et $q = -5$, calculer u_3 et S_3.
   (b) Sachant que $u_0 = 1$ et $q = 2$, déterminer le rang n pour lequel $S_n = 65535$.

Exercice 2.

1. Soit la somme $S_1 = 17 + 22 + 27 + 32 + \cdots + 2547$.
   (a) Déterminer le nombre de termes de la somme S_1.
   (b) Calculer la valeur de la somme S_1 en rappelant la formule utilisée.
2. Soit la somme $S_2 = 2 + 10 + 50 + 250 + \cdots + 156250$.
   (a) Déterminer le nombre de termes de cette somme S_2.
   (b) Déterminer la valeur de la somme S_2 en rappelant la formule utilisée.

Exercice 3. Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n) :

1. $u_n = n^3 + \dfrac{1}{n}$

2. $u_n = (3n+1)(-7n+5)$

3. $u_n = \dfrac{2n^2+1}{-n^2+6}$

4. $u_n = \dfrac{n^2+3n-5}{n^3-6n^2+1}$

5. $u_n = n\sqrt{n} - n$

6. $u_n = (-2n+3)\dfrac{n+3}{-n^2+n+6}$

7. $u_n = \dfrac{n}{n+\sqrt{n}}$

8. $u_n = \dfrac{9-n^2}{(n+1)(2n+1)}$

9. $u_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{n}{(2n+1)^2}$

10. $u_n = \dfrac{2}{3n} - \dfrac{2n^2+3}{3n^2+n+1}$

Exercice 4. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 10000, \\ u_{n+1} = 0,95u_n + 200. \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 4000$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. En 2020, une espèce animale comptait 10 000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5% chaque début d'année.
   Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021.
   Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».
   Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier précisément la réponse.
   On pourra introduire une suite (p_n) où pn correspond à population animale l'année $2020 + n$.

Exercice 5. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = (u_n)^2 \end{cases}$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 2$.
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Démontrer que la suite (u_n) n'est pas majorée. On pourra raisonner par l'absurde.

4. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 6. (u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$. En déduire que (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite. Déterminer la valeur de ℓ.

Exercice 7. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 4 \end{cases}$$

PARTIE 1 : Conjectures

1.a) Sur un même graphique, tracer les droites d'équation $y = x$ et $y = \dfrac{1}{3}x + 4$.

1.b) Déterminer graphiquement, u_1, u_2, u_3.

1.c) Déterminer par le calcul, u_1, u_2, u_3. Les résultats sont-ils cohérents ?

1.d) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

1.e) Conjecturer la limite de la suite (u_n).

PARTIE 2 : Démonstration des conjectures

2.a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 6$.

2.b) Démontrer la conjecture du 1.d)

2.c) Démontrer la conjecture du 1.e)

PARTIE 3 : Démonstration des conjectures par une seconde méthode On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 6$.

3.a) Déterminer v_0, v_1, v_2.

3.b) Conjecturer la nature de la suite (v_n).

3.c) Démontrer cette conjecture.

3.d) Exprimer v_n en fonction de n. Exprimer u_n en fonction de n.

3.e) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 8. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$$

1. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$u_n \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 9. Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant :

1. Si une suite est décroissante minorée alors elle est convergente.

2. Si une suite est croissante et convergente alors elle est majorée.

3. Si une suite est convergente et majorée alors elle est croissante.

4. Si une suite est croissante alors elle est minorée.

5. Si une suite est croissante alors elle n'est pas majorée.

6. Si une suite est croissante et convergente alors elle est bornée.

2.7 Exercices Supplémentaires

Exercice 1.

1. Soit la somme $S = 6 + 12 + 18 + 24 + \cdots + 2520$.
   (a) Déterminer le nombre de termes de la somme S .
   (b) Calculer la valeur de la somme S en rappelant la formule utilisée.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et la somme $S_n = 9 + \frac{9}{4} + \frac{9}{4^2} + \cdots + \frac{9}{4^n}$.
   (a) Déterminer l'expression de S_n en fonction de n. On rappellera la formule utilisée.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Exercice 2. *(Simulation d'un crédit)*

M. X achète par correspondance à une société qui lui fait un crédit de 900 euros. Le taux mensuel de ce crédit est de $1,5$ %. Chaque mois, M. X doit rembourser 45 euros. Cette somme comprend d'une part les intérêts dus pendant le mois et d'autre part une partie du remboursement du crédit.

1. Calculer les intérêts dus à l'issue du premier mois et en déduire le montant du crédit qu'il reste à rembourser à M. X après son premier versement de 45 euros.
2. On note $U_0 = 900$ le crédit initial et U_n le montant du crédit qu'il reste à rembourser à l'issue du n-ième mois.
   Montrer que pour tout entier n
   $$u_{n+1} = 1,015u_n - 45.$$
3. On pose $V_n = U_n - 3000$.
   (a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
   (c) A partir de combien de mois M. X aura-t-il remboursé la moitié de son crédit ?

Exercice 3. Un étudiant loue une chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bail.

- 1^{er} contrat : un loyer de 200 euros pour le premier mois puis une augmentation de 5 euros par mois jusqu'à la fin du bail.
- $2^{ème}$ contrat : un loyer de 200 euros pour le premier mois puis une augmentation de 2% par mois jusqu'à la fin du bail.

1. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois.
2. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier mois (c'est à dire du 36 ième mois).
3. Quel est le contrat globalement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ? (Justifier à l'aide de calculs)

Exercice 4. On s'intéresse à l'évolution d'une population de tigres dans une réserve en naturelle. En 2019, il y avait 100 tigres. Une étude à montré que chaque année, 10% de la population de tigres meurt. En conséquence on introduit, chaque année, 5 nouveaux tigres à la réserve. On note un le nombre de tigres en $2019 + n$.

1. Déterminer le nombre de tigres dans la réserve en 2020.
2. Donner la valeur de u_0 et justifier que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 0,9u_n + 5$.
3. On pose $v_n = u_n - 50$
   (a) Montrer que (v_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) Déterminer l'expression de v_n puis de un en fonction de n.
   (c) En déduire la limite de la suite (u_n).
   (d) Interpréter dans le contexte les variations et la limites de la suite (u_n).

Exercice 5. On suppose que chaque année la production d'une usine subit une baisse de 4%. Au cours de l'année 2000, la production a été de 25000 unités. On note $P_0 = 25000$ et P_n la production prévue au cours de l'année $2000 + n$.

1. Montrer que (P_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
2. Calculer P_5.

3. Si la production descend au dessous de 15000 unités, l'usine sera en faillite, quand cela risque-t-il d'arriver si la baisse de 4% par an persiste ?

Exercice 6. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 1}$.

1. Montrer que (u_n) est décroissante.
2. Montrer que la suite (u_n) est minorée.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 7. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.

1) Montrer que cette suite est croissante.
2) Montrer que pour tout entier n, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3) Déterminer la limite l de la suite (u_n).

Exercice 8. On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = xe^{-x}$ ainsi que la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) — Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ de f.
   — Construire sur le graphique précédent les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2.
   — Conjecturer le sens de variation de la suite et sa limite.

a) — Démontrer par récurrence que, pour tout entier n, on a $u_n > 0$.
   — Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   — Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite l. Déterminer l.

1. On considère la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

   Écrire un algorithme/programme qui permet de calculer S_n pour n quelconque donné. Calculer S_{100}.

Chapitre 3

Fonctions logarithmiques et exponentielles

Sommaire

3.1 Généralités sur les fonctions

Définition 3.1. *Soient E et F deux parties de $\mathbb{R}$.*

Une fonction numérique f d'une variable réelle x de E est une relation qui à un nombre réel x associe un unique nombre réel y de F noté $f(x)$, On écrit alors

$$\begin{aligned} f: E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto y = f(x). \end{aligned}$$

Étant donné un réel y de F, s'il existe un réel x de E tel que $y = f(x)$, x est alors appelé antécédent de y par la fonction f et y appelé image de x par f.
E est l'ensemble de départ et F l'ensemble d'arrivée.

Définition 3.2. *L'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f est l'ensemble des nombre réel x qui ont effectivement une image $f(x)$.*

Exemple 3.1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction :

$$f(x) = \frac{x+3}{x-3}.$$

La fonction f est définie pour : $x - 3 \neq 0$. C'est-à-dire $x \neq 0$.
L'ensemble de définition est donc

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{3\} =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[.$$

Exemple 3.2. Déterminer le domaine de définition de la fonction :$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.
La fonction f n'est définie que lorsque : $x^2 - 1 \geqslant 0$. C'est-à-dire $(x-1)(x+1) \geqslant 0$. Ce qui donne $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
Le domaine de définition est donc

$$\mathcal{D}_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

.

Définition 3.3. *Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$.*
On appelle graphe de f sur $\mathcal{D}_f$ l'ensemble des points d'abscisse x et d'ordonnée $f(x)$, où x appartient à $\mathcal{D}_f$:

$$C_f = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in \mathcal{D}_f\}.$$

L'équation $y = f(x)$ est appelée équation cartésienne de la courbe représentative de f .

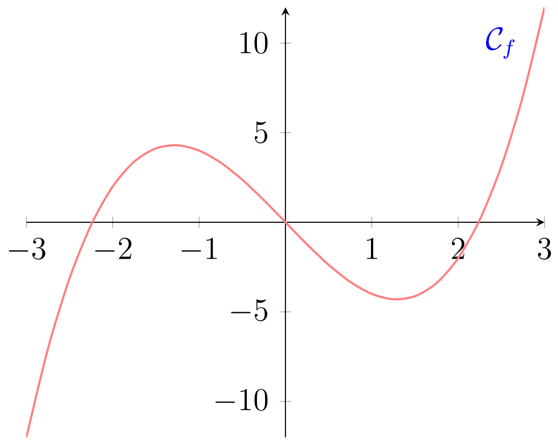


FIGURE 3.1 – La courbe de la fonction $f\colon x \longmapsto f(x) = x^3 - 5x$.

Définition 3.4. *Soient $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ et $I \subset \mathcal{D}_f$. On appelle image de I par f l'ensemble des réels $f(x)$ lorsque x décrit I. On note cet ensemble $f(I)$:*

$$f(I) = \{f(x),\ x \in I\} = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in I,\ y = f(x)\}.$$

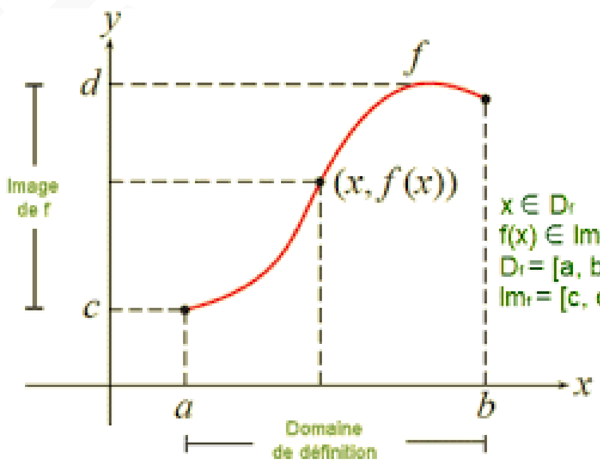


FIGURE 3.2 – Image d'une fonction

Exemple 3.3. L'image de l'intervalle $[-1, 3]$ par la fonction $f\colon x \to x^2$ est l'intervalle $[0, 9]$.

Définition 3.5. *Soient $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$. On appelle composée de f par g la fonction notée $g \circ f$ définie sur $\mathcal{D}_f$ par*

$$g \circ f\colon x \mapsto g(f(x))$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{D}_f \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, dashed, "g \circ f"] & f(\mathcal{D}_f) \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\
x \arrow[r, mapsto] & f(x) \arrow[r, mapsto] & g\big(f(x)\big)
\end{tikzcd}
$$

FIGURE 3.3 – Composée de fonction f par g.

Définition 3.6. *Soit $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction, on dit que f est une fonction paire si pour tout réel x de $\mathcal{D}_f$ on a*

$$-x \in \mathcal{D}_f \quad \text{et} \quad f(-x) = f(x).$$

Proposition 3.1.1. *La courbe représentative d'une fonction paire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe (Oy) du repère.*

Définition 3.7. *Soit $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction, on dit que f est une fonction impaire si pour tout réel x de $\mathcal{D}_f$ on a*

$$-x \in \mathcal{D}_f \quad \text{et} \quad f(-x) = -f(x).$$

Proposition 3.1.2. *La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine O du repère.*

Définition 3.8. *Soit $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction, on dit que f est une fonction périodique de période $T > 0$ (ou p-périodique) si pour tout réel x de $\mathcal{D}_f$ on a*

$$x + T \in \mathcal{D}_f \quad \text{et} \quad f(x+T) = f(x).$$

Proposition 3.1.3. *La courbe représentative d'une fonction f périodique de période T est invariante par translation de vecteur $T\overrightarrow{i}$.*

Définition 3.9. *Soit $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction, on dit que f est croissante sur $\mathcal{D}_f$ si*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f :\; x_1 \leqslant x_2 \implies f(x_1) \leqslant f(x_2).$$

Définition 3.10. *Soit $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction, on dit que f est décroissante sur $\mathcal{D}_f$ si*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f :\; x_1 \leqslant x_2 \implies f(x_1) \geqslant f(x_2).$$

Définition 3.11. *Soient $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction, I un intervalle tel que $I \subset \mathcal{D}_f$ et $x_0 \in I$. La fonction f admet un maximum (local) en x_0 si*

$$\forall x \in I\ ,\ f(x) \leqslant f(x_0).$$

Définition 3.12. *Soient $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction, I un intervalle tel que $I \subset \mathcal{D}_f$ et $x_0 \in I$. La fonction f admet un minimum (local) en x_0 si*

$$\forall x \in I\ ,\ f(x) \geqslant f(x_0).$$

Définition 3.13. *Soient $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction, I un intervalle tel que $I \subset \mathcal{D}_f$ et $m \in \mathbb{R}$. Le réel m est un minorant de la fonction f sur l'intervalle I si*

$$\forall x \in I,\ f(x) > m.$$

Définition 3.14. *Soient $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction, I un intervalle tel que $I \subset \mathcal{D}_f$ et $M \in \mathbb{R}$. Le réel m est un minorant de la fonction f sur l'intervalle I si*

$$\forall x \in I,\ f(x) < M.$$

Définition 3.15. *Soient $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction, I un intervalle tel que $I \subset \mathcal{D}_f$. On dit que f est bornée sur I si elle y admet à la fois un majorant et un minorant.*

3.2 La fonction exponentielle

Définition 3.16. *La fonction exponentielle notée* exp, $x \mapsto \exp(x) = \mathrm{e}^x$, *est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ égale à sa dérivée et vérifiant :* $\mathrm{e}^0 = 1$.

3.2.1 Propriétés des exponentielle

Proposition 3.2.1 (Propriété fondamentale de la fonction exp). *Pour tous nombres réels a et b,*

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b).$$

Théorème 3.1.

1. *Pour tout* x *de* $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$.

2. *La fonction exponentielle* $x \mapsto \mathrm{e}^x$ *est continue, dérivable et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

Proposition 3.2.2 (Propriétés algébriques de la fonction exponentielle). *Soit* a *et* b *deux nombres réels. Alors,*

1. $\mathrm{e}^{-a} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^a}$,
2. $\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$,
3. $(\mathrm{e}^a)^b = \mathrm{e}^{ab}$.

3.2.2 Équations et d'inéquations avec des exponentielles

Proposition 3.2.3. *Soit* a, b *et* x *sont des nombres réels. Alors*

1. $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \;\Leftrightarrow\; a = b$,

2. $\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b \;\Leftrightarrow\; a < b$,

3. $\mathrm{e}^x = 1 \;\Leftrightarrow\; x = 0$,

4. $\mathrm{e}^x > 1 \;\Leftrightarrow\; x > 0$,

5. $\mathrm{e}^x < 1 \;\Leftrightarrow\; x < 0$.

3.2.3 Limites particulières

Proposition 3.2.4.

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0^+$, *La droite d'équation* $y = 0$ *est asymptote verticale à la courbe* $C_{\exp}$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$,
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, *La courbe* $C_{\exp}$ *admet une branche parabolique de direction* (Oy).
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0^+$,
5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$.

3.2.4 Tableau de variation

On peut résumer les variations et les limites de la fonction exp, dans un tableau de variation.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
e^x		$+$		
e^x	0	1	e	$+\infty$

Figure 3.4 – Tableau de variation de la fonction exp

3.2.5 Courbe représentative

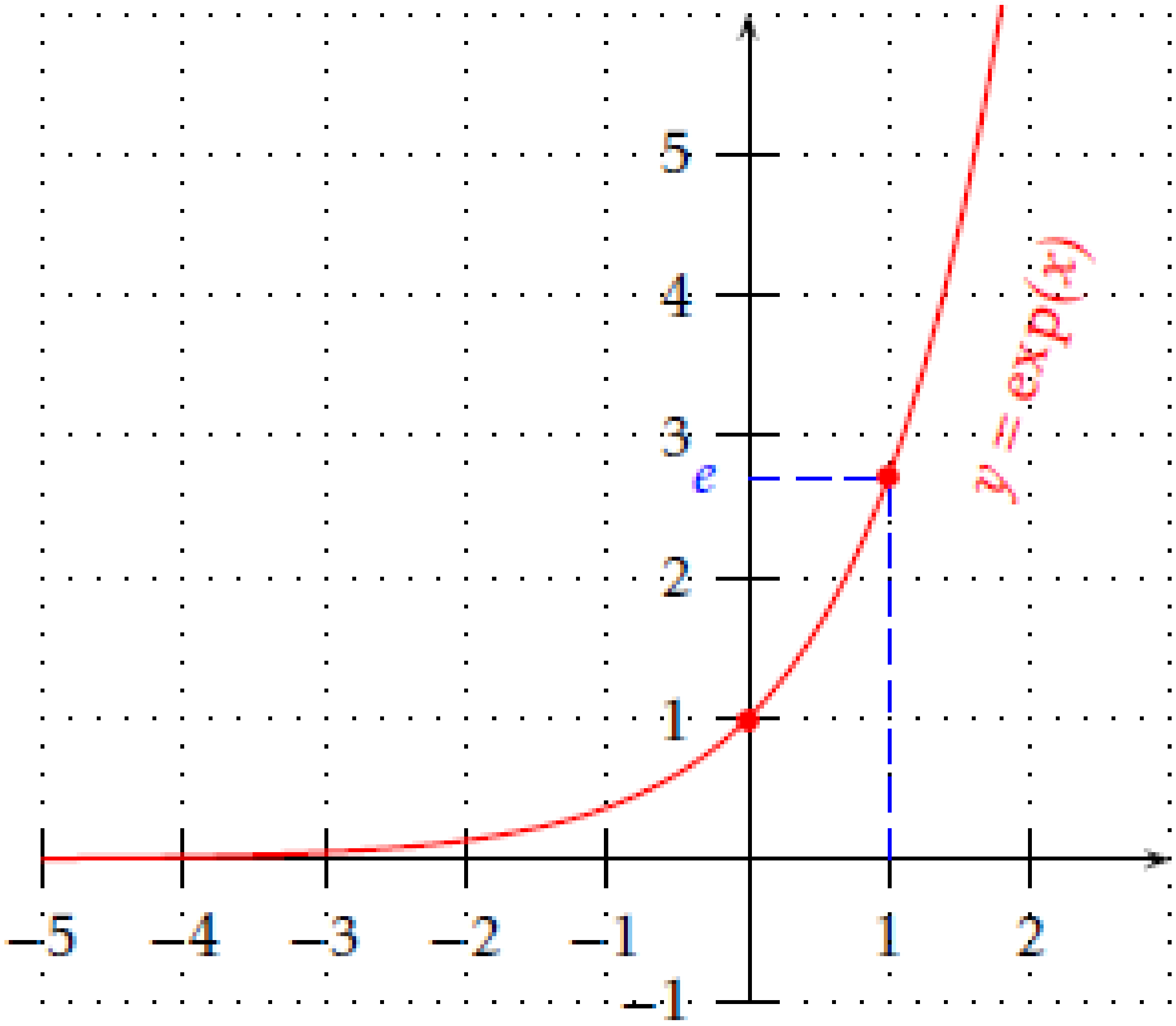


FIGURE 3.5 – Graphique de fonction exponentielle

3.2.6 Dérivabilité de la fonction $\exp \circ u$

Proposition 3.2.5. *Soit u une fonction dérivable sur l'intervalle I, la fonction définie par $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur I et pour tout x de I,*

$$f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}.$$

3.3 La fonction logarithme népérien

Définition 3.17. *On appelle fonction logarithme népérien et l'on note* ln *ou Log, la fonction définie sur* $]0,+\infty[$ *par :*

$$\begin{cases} \ln'(x) = \dfrac{1}{x} \text{ pour tout } x > 0, \\ \ln(1) = 0. \end{cases}$$

Proposition 3.3.1. *La fonction* $x \mapsto \ln x$ *est continue, strictement croissante sur* $]0,+\infty[$ *donc elle définit une bijection de* $]0,+\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$.

Théorème 3.2. *Pour tout* x *de* $\mathbb{R}$ *et tout* y *de* $]0,+\infty[$,

$$y = \mathrm{e}^x \Longleftrightarrow x = \ln y.$$

3.3.1 Propriétés des logarithmes

Proposition 3.3.2 (Propriété fondamentale de la fonction ln**).** *Pour tous nombres réels* a *et* b *strictement positifs, on a :*

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

Exemple 3.4. Soit un réel $x > 0$. Alors

$$\ln(x) + \ln(x-1) = \ln(x(x-1)) \,.\, \ln(x) + \ln(x-1) = \ln\left(x^2 - x\right)$$

Propriétie 3.3.1 (Propriétés algébriques de la fonction ln**).** *Si* a, b *sont des nombres réels strictement positifs, et* α *est un nombre réel. Alors*

1. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$,
2. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$,
3. $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$
4. $\ln(a^\alpha) = \alpha \ln(a)$

3.3.2 Équations et d'inéquations avec des logarithmes

Proposition 3.3.3. *Soit a et b deux réels strictement positifs.*

1. $\ln(a) = \ln(b) \ \Leftrightarrow\ a = b$,
2. $\ln(a) \leqslant \ln(b) \ \Leftrightarrow\ a \leqslant b$,
3. $\ln(a) > \ln(b) \ \Leftrightarrow\ a > b$,
4. $\ln(a) \leqslant 0 \ \Leftrightarrow\ 0 < a \leqslant 1$,
5. $\ln(a) > 0 \ \Leftrightarrow\ a > 1$.

3.3.3 Limites particulières

Proposition 3.3.4.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$, *La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe $C_{\ln}$.*
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, *La courbe $C_{\ln}$ admet une branche parabolique de direction (Ox).*
4. $\lim\limits_{x \to 0} x \ln(x) = 0$
5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

3.3.4 Tableau de variation

x	0	1	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	$\|\|$	$+$	
$\ln x$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

Figure 3.6 – Tableau de variation de la fonction ln

3.3.5 Courbe représentative

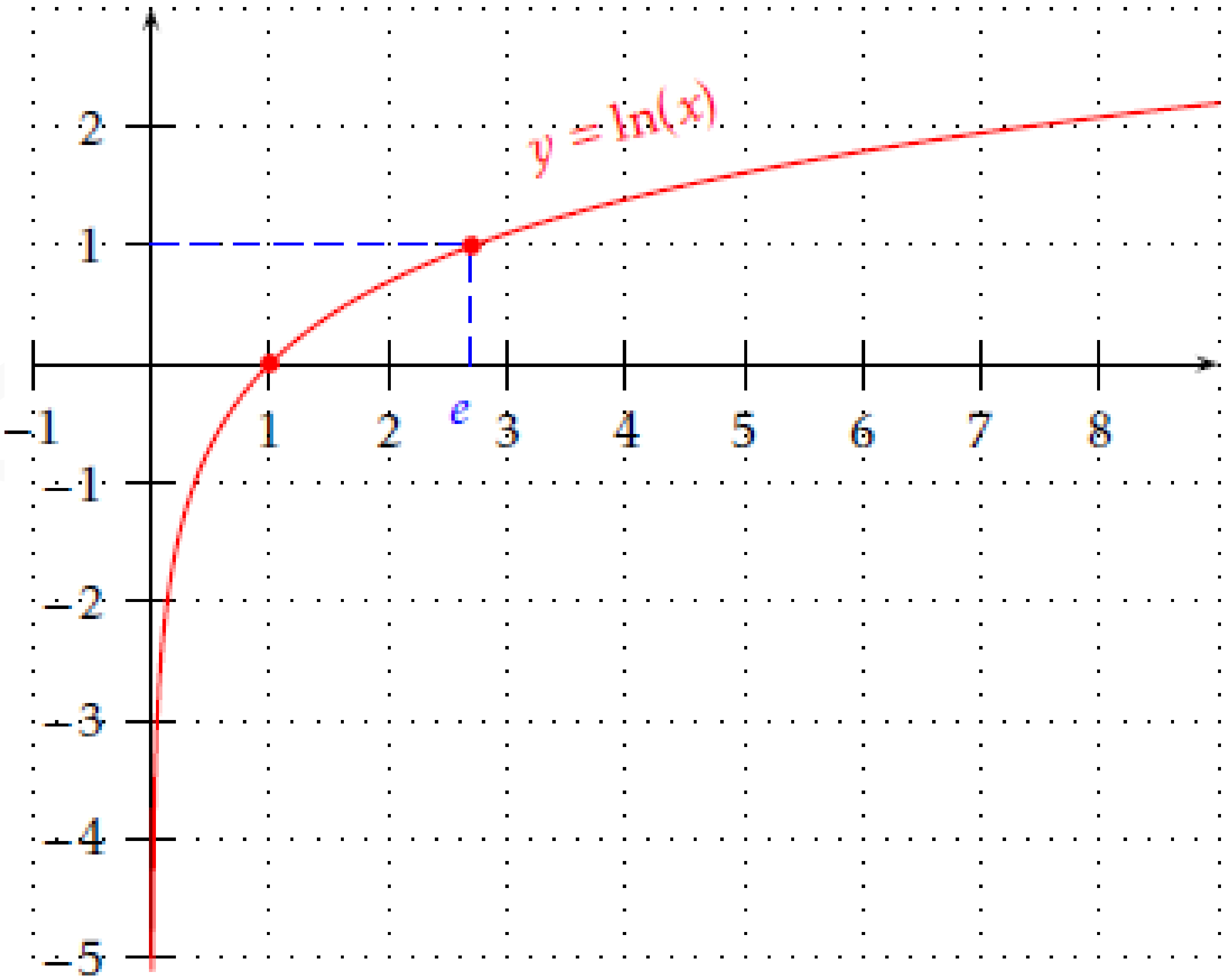


FIGURE 3.7 – Graphique de fonction logarithme népérien

3.3.6 Dérivée de la fonction $\ln \circ u$

Proposition 3.3.5. *Soit u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors la fonction $x \mapsto \ln \circ u$ est dérivable sur I et pour tout x de I*

$$(\ln \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

3.4 Logarithme de base a

Définition 3.18. *Pour $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, on appelle logarithme de base a, notée $\log_a$, la fonction définie pour tout réel $x > 0$ par*

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Remarque 3.1. La fonction logarithme décimal, notée log, est définie pour tout réel $x > 0$ par $\log(x) = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$. Pour tout réel $y > 0$ et pour tout réel x,

$$x = \log y \iff y = 10^x$$

Proposition 3.4.1. *Soit $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. La fonction $\log_a$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $x > 0$,*

$$\log_a'(x) = \frac{1}{x\ln(a)}.$$

3.5 Fonction exponentielle de base $a > 0$

Définition 3.19. *Pour tout nombre réel x, on appelle fonction exponentielle de base a, notée $\exp_a$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\exp_a(x) = a^x = \mathrm{e}^{x\ln a}.$$

Théorème 3.3. *Pour tout réel a strictement positif et différent de 1, la fonction $\exp_a$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,*

$$\exp_a'(x) = (\ln a)a^x.$$

3.6 Croissances comparées

Proposition 3.6.1. *α et β deux réels strictement positifs. Alors :*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} |\ln x|^\alpha x^\beta = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\exp(\beta x)} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha \exp(\beta x) = 0.$$

On peut retenir : "En $+\infty$ l'exponentielle l'emporte sur les puissances qui l'emportent sur le logarithme.", mais il est impératif de savoir précisément écrire ces limites.

3.7 Travaux Dirigés

Exercice 1. Simplifier au maximum chacun des nombres suivants :

1. $\ln 2 + \ln 4 - \ln 8$.

2. $ln(2+\sqrt{3}) + ln(2-\sqrt{3})$.

3. $\frac{1}{3} 3 \ln a + \frac{1}{3} \ln b - \frac{1}{3} \ln c$.

4. $3 \log 2 - 2 \log 3 + \log 81$.

5. $\left(\mathrm{e}^{x^2}\right)^{\dfrac{\ln\left(x^{(\frac{1}{x})}\right)}{x}}$.

6. $\ln(ab) + \ln\left(\frac{a}{b}\right) - \ln(a^2) + \ln \mathrm{e}$.

7. $\ln(\frac{1}{a}) + \ln(a^4) - \ln(a^3) + \ln 1$

8. $\ln(a+b) + \ln(a-b) - \ln(a^2 - b^2)$

9. $\ln(e^2) + 2\ln(\sqrt{\mathrm{e}}) - \ln(\frac{1}{\mathrm{e}}) + \ln(\frac{2}{\mathrm{e}}) + \ln(\frac{e}{2}) - 4$.

10. $\ln\left[3\left(\mathrm{e}^{\ln\sqrt{\frac{a}{b}} - \ln\frac{b^3}{a}}\right)^2 - \ln\frac{a^3}{b^7}\right]$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln(2x+7) = \ln(x-3)$

2. $\ln(1-2x) = \ln(x+2) + \ln 3$

3. $\ln(1-x^2) = \ln(2x-1)$

4. $\ln(2x-4) = \ln 5 + 2\ln 3$.

5. $\ln\sqrt{2x-2} = \ln(4-x) - \frac{1}{2}\ln x$

6. $2\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} = -2$

7. $\mathrm{e}^{x} - 2\mathrm{e}^{-x} - 1 = 0$

8. $\ln(2-x) \leqslant \ln(2x+1) - \ln 3$

9. $\ln(3x+2) > \ln\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)$

10. $\mathrm{e}^{x} > -3$

11. $\exp\left(1 + \frac{2}{x}\right) \leqslant \mathrm{e}^{x}$.

Exercice 3. Déterminer les nombres a et b tels que la fonction f définie sur $]-1+\infty[$ par

$$f(x) = a + b\ln(1+x)$$

vérifiant $f(0) = 3$ et $f'(3) = \frac{3}{4}$.

Exercice 4. Démontrer que pour tout réel x,

1. $\frac{e^{2x}-1}{e^x+1} = e^x \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-x}}$.

2. $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4$.

3. $\frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

4. $e^{-x} - e^{-2x} = \frac{e^x-1}{e^{2x}}$.

Exercice 5.

1. Exprimer en fonction de $\ln 2$ les nombres suivants :

$$A = \ln 8\ ,\ B = \ln\frac{1}{16}\ ,\ C = \frac{1}{2}\ln 16\ ,\ D = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{4}.$$

2. Exprimez en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$ les réels suivants :

$$A = \ln 24\ ,\ B = \ln 144\ ,\ C = \frac{\ln 8}{\ln 9}.$$

3. Écrire les nombres A et B à l'aide d'un seul logarithme :

$$A = 2\ln 3 + \ln 2 + \ln\frac{1}{2} \quad , \quad B = \frac{1}{2}\ln 9 - 2\ln 3.$$

Exercice 6. Résoudre les systèmes proposés :

1. $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2\mathrm{e}^x - 3\mathrm{e}^y = 3 \\ 3\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^y = 7 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^y + 1 \\ 3\mathrm{e}^{-x} + 3 = 2\mathrm{e}^y \end{cases}$

4. $\begin{cases} \ln x + \ln 4 = \ln 3 - \ln y \\ \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2-y} \end{cases}$

Exercice 7. Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \ln(4 - x^2)$,

2. $f_2(x) = \ln(1 - \ln x)$,

3. $f_3(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$,

4. $f_4(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{x^2} - 3\mathrm{e}^x + 2\right)$.

Exercice 8. Calculer les limites

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2+1) - 2\ln x$,

2. $\lim\limits_{x\to+\mathrm{e}} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\ln x - 1}$,

3. $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1} - \dfrac{x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}\right]$,

4. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sqrt{x}}$.

3.8 Exercices Supplémentaires

Exercice 1.

1. Développer l'expression : $A(x) = (x-1)(x+1)(x-2)$.
2. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $\ln(x^3+2) = \ln(2x^2+x)$.
   (b) $\ln(|x|^3+2) = \ln(2x^2+|x|)$.
   (c) $\ln(x^3-x^2-3x+3) = \ln(x^2-2x+1)$.
   (d) $\ln(x^3-x^2-3x+3) = 2\ln(1-x)$.

Exercice 2. On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(ax+b)$ et C sa courbe représentative.

1. Déterminer les nombres a et b tels que $f(2) = 0$ et $f'(3) = \frac{3}{4}$.
2. Déterminer les nombres a et b tels que la courbe C passe par le point $A(2,0)$ et la tangente en A ait pour coefficient directeur ˘2.

Exercice 3. On considère la suite (u_n) de réels strictement positifs, définie par : $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, \ln(u_{n+1}) = 1 + \ln(u_n)$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et préciser la nature de la suite (u_n).
2. Déterminer la monotonie de la suite (u_n), et préciser sa limite.
3.) Exprimer la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.
4. Exprimer la somme $\sum_{k=1}^{n} \ln(u_k)$ en fonction de n. En déduire le calcul de $u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$ en fonction de n.

Exercice 4. On pose $a = \log_{40}(100)$ et $b = \log_{16}(25)$.

Calculer b en fonction a.

Exercice 5. Un capteur solaire récupère de la chaleur par le biais d'un fluide. On s'intéresse à l'évolution de la température du fluide dans un capteur de $1m$ de longueur.

Cette température est modélisée par :

$$T(x) = 170 - 150e^{-0,6x},$$

où $x \in [0; 1]$ est la distance, en mètres, parcourue par le fluide depuis son entré dans le capteur, et $T(x)$ est la température en $^\circ C$.

1. Déterminer la température à l'entrée du capteur.
2. (a) Étudier les variations de la température T sur $[0, 1]$.
   (b) En déduire la température maximale, au degré près, atteinte par le fluide.
   (c) Tracer dans un repère la courbe représentant la température T.

Exercice 6. Calculer la dérivée de la fonction f qui définie par

$$f(x) = [A(x)]^{\alpha} [B(x)]^{beta} [C(x)]^{\gamma},$$

où α, β et γ sont des constantes et où A, B et C sont des fonctions strictement positives.

Chapitre 4

Dérivabilité

Sommaire

4.1 Rappelles et définitions

4.1.1 Continuité

Définition 4.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un nombre réel de I. La fonction f est dite continue en x_0 si elle admet en x_0 une limite égale à $f(x_0)$, c'est à dire si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Remarque 4.1. f est dite continue sur I si elle est continue en tout réel de I.

Exemple 4.1. Soit f la fonction définie sur $I =]1; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.
La fonction f est continue en 2 car : $f(2) = 1$ et $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$.
Plus généralement, cette fonction est continue sur I.

Propriétie 4.1.1.

1. *Les fonctions polynômes, la fonction $x \mapsto \exp(x)$, et la fonction valeur absolue sont continues sur $]-\infty; +\infty[$.*
2. *La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$.*
3. *La fonction $x \mapsto \ln x$ est continue sur $]0; +\infty[$.*
4. *la fonction inverse est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.*

Définition 4.2. *Soit f une fonction définie sur I et $x_0 \in I$. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, la fonction $\widetilde{f}$ définie sur $I \cup \{x_0\}$ par*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

s'appelle le prolongement par continuité de f à x_0.

4.1.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 4.1 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel* *c de $[a, b]$ tel que $f(x) = k$, c'est à dire que f prend au moins une fois toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$.*

Propriétie 4.1.2. *Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$. Alors, pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.*

4.2 Dérivabilité

La notion de dérivée est une notion fondamentale en analyse. Elle permet d'étudier les variations d'une fonction, de construire des tangentes à une courbe et de résoudre des problèmes d'optimisation.

4.2.1 Nombre dérivé

Définition 4.3. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.*
Si la limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

*existe et finie. On la note $f'(x_0)$ ou $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ et on l'appelle **nombre dérivé** de la fonction f en x_0. Dans ce cas, on dit que la fonction f est dérivable en x_0.*
*La quantité $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est appelée **taux de d'accroissement**.*

Remarque 4.2. Si f est dérivable en x_0, en effectuant le changement de variable $h = x - x_0$, on obtient :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

(c'est une définition équivalente).

Exemple 4.2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ pour tout réel x. Soit x_0 un réel, pour tout réel h différent de 0 on a

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{2x_0 h + h^2}{h} = 2x_0 + h.$$

Par suite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 2x_0$$

.

La fonction f est donc dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 2x_0$.

4.2.2 Dérivée à droite et dérivée à gauche

Définition 4.4. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.*

1. *On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si la limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et finie.

Cette limite s'appelle la dérivée de f à gauche en x_0, on la note $f'_g(x_0)$.

2. *On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si la limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et finie.

Cette limite s'appelle la dérivée de f à droite en x_0, on la note $f'_d(x_0)$.

Proposition 4.2.1. *Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est dérivable en $x_0 \in I$ si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.*

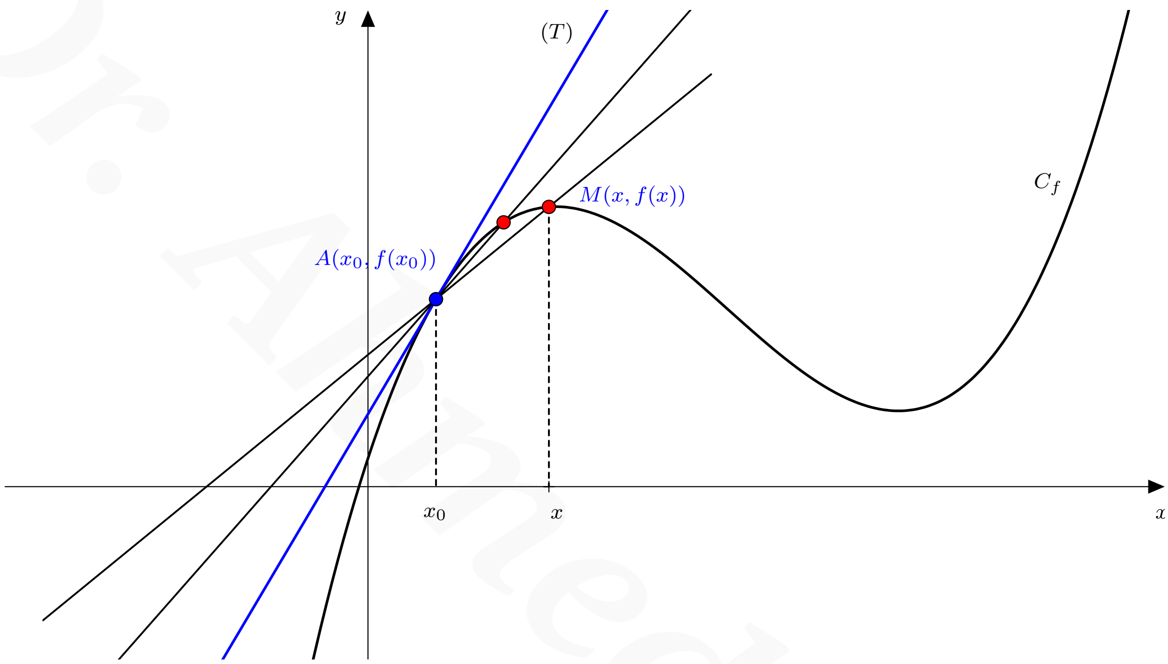
Remarque 4.3. Si $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ existent mais $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$ alors f n'est pas dérivable au point x_0 et le point $(x_0, f(x_0))$ est un point anguleux.

Exemple 4.3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - 0}{x} = 1 = f'_d(0)$.
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x - 0}{x} = -1 = f'_g(0)$.
donc f n'est pas dérivable au point 0 et le point $(0, 0)$ est un point anguleux.

4.2.3 Interprétation géométrique

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un élément de I.
Le taux de variation $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est la pente de la droite (Δ) passant par les points $A(a, f(a))$ et $M(x, f(x))$. Lorsque x tend vers x_0, le point M se « **rapproche** » de A et la droite (Δ) devient la tangente (T) à la courbe C_f en A. (T) a pour coefficient directeur $f'(x_0)$. Une équation de cette tangente est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$



Exemple 4.4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :$f(x) = x^2 - 3x + 2$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 2x - 3$.
Une équation de la tangente (T) à C_f en son point d'abscisse 3 est

$$y = f'(3)(x - 3) + f(3)$$

ou enfin

$$(T): \quad y = 3x - 7.$$

4.2.4 Fonction dérivée

Définition 4.5. *Si f est dérivable pour tout x de I, alors on dit que f est dérivable sur I et on note f' la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x :*

$$\begin{array}{rccc} f': & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

La fonction f' est appelée la fonction dérivée de la fonction f.

Exemple 4.5. Calculons la dérivée de la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^3$.
La taux d'accroissement est

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3}{h} = 3x^2 + 3hx + h^2.$$

Donc

$$\lim_{x \to h} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{x \to h} 3x^2 + 3hx + h^2 = 3x^2.$$

La fonction dérivée de f est donc donnée par $f'(x) = 3x^2$.

4.2.5 Dérivées des fonctions usuelles

fonction f définie par :	**dérivée** f'	**Ensemble de dérivabilité** $\mathcal{D}_{f'}$
c (constante réelle)	0	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n-1}}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
$a^x, a > 0$	$a^x \ln a$	$\mathbb{R}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \ln(a)}$	$]0, +\infty[$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right\}$

4.2.6 Dérivées et opérations

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k est un réel.

Somme	$(u+v)' = u' + v'$
Produit par un réel	$(ku)' = ku'$
Produit	$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$
Inverse	Si $v \neq 0$ sur I, $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
Qoutient	Si $v \neq 0$ sur I, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

4.2.7 Dérivée d'une fonction composée

Définition 4.6. *Soit u et v deux fonctions dérivables respectivement sur les intervalles I et J tel que pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$. Alors la fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et*

$$(v \circ u)' = u'(v' \circ u)$$

Soit

$$\forall x \in I : (v \circ u)'(x) = u'(x)(v' \circ u)(x).$$

La fonction	**La dérivée**
u^n	$nu'(x) \times [u(x)]^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}^*, n \neq 1$ et $u(x) \neq 0$ sur I si $n < 0$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$, $u(x) \neq 0$ sur I
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$, $u(x) > 0$ sur I
e^u	$u'(x) \times e^{u(x)}$
$\ln(u)$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) > 0$
$u(ax+b)$	$a \times u'(ax+b)$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\tan u$	$u'(1+\tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

4.2.8 Dérivées d'ordre supérieur

Définition 4.7. *Si f est dérivable sur I, Sa dérivée f' est appelé dérivée première (ou d'ordre 1) de f. Lorsque f' est elle-même dérivable sur I sa dérivée notée f'' est appelé la dérivée seconde (ou d'ordre 2) de f. Plus généralement on note :*

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'' \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : f^{(n+1)} = (f^{(n)})'.$$

Si la dérivée n-ième $f^{(n)}$ (ou encore $\frac{d^n f}{dx^n}$) existe on dit que f est n fois dérivable (ou d'ordre n).

Exemple 4.6. Soit $f(x) = \sin x$ donc par convention $f^{(0)}(x) = \sin x$
$f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

$f''(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2\frac{\pi}{2})$
$f^{(3)} = \cos(x + 2\frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 3\frac{\pi}{2})$.
On montre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

4.2.9 Dérivée n-ième d'un produit

Théorème 4.2. (**Formule de Leibniz**) *Soient f et g deux fonctions dérivables n fois sur un intervalle I. Alors fg est dérivable n fois sur I et :*

$$(f \cdot g)^n = f^{(n)}g + C_n^1 f^{(n-1)}g^{(1)} + \cdots + C_n^p f^{(n-p)}g^{(p)} + \cdots + fg^n$$

Autrement dit :

$$(f \cdot g)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p f^{(n-p)}g^{(p)}$$

Exemple 4.7. En utilisant la formule de Leibniz, calculons la dérivée d'ordre n de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 e^x$.

Calculons les dérivées successives des fonctions u et v définies par $u(x) = x^3$ et $v(x) = e^x$.

On a $u'(x) = 3x^2$, $u''(x) = 6x$, $u^{(3)}(x) = 4$, puis $u^{(k)}(x) = 0$ pour tout $k \geqslant 4$.

On a aussi pour tout $n \geqslant 0$, $v^{(n)}(x) = e^x$.

D'après la formule de Leibniz, on a

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= C_n^0 x^3(e^x) + C_n^1(3x^2)(e^x) + C_n^2(6x)(e^x) \\ &= x^3 e^x + 3nx^2 e^x + 6\frac{n!}{2!(n-2)!}xe^x \\ &= \left(x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x\right) e^x. \end{aligned}$$

4.2.10 Théorèmes fondamentales sur les fonctions dérivables

Théorème 4.3 (Théorème de Rolle). *Soit $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant les conditions suivantes :*

1. *f est continue sur $[a, b]$.*

2. *f est dérivable sur $]a, b[$.*
3. *$f(a) = f(b)$.*

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Le théorème de Rolle signifie que pour une fonction f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b)$, il existe au moins $c \in]a, b[$, ou la tangente est parallèle à l'axe des abscisses (Ox).

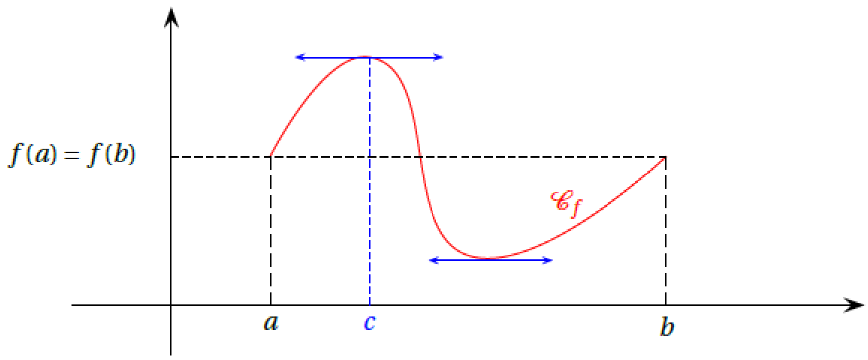


FIGURE 4.1 – Illustration graphique du théorème de Rolle.

Exemple 4.8. Soit f la fonction définie par : $f(x) = 3x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 4x + 2$.
Montrons que f' s'annule au moins une fois sur $]0, 1[$.
La fonction f est continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ et : $f(0) = f(1) = 2$.
Ainsi, d'après le théorème de Rolle, il existe un réel $c \in]0, 1[$ tel que : $f'(c) = 0$, donc f' s'annule au moins une fois sur $]0, 1[$.

Théorème 4.4 (Théorème des accroissements finis). *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Rappellent que le quotient $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est le coefficient directeur de la droite passant par les deux points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.
Sous les hypothèses du théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que la tangente au graphe de f au point $C(c, f(c))$ est parallèle à la droite (AB).

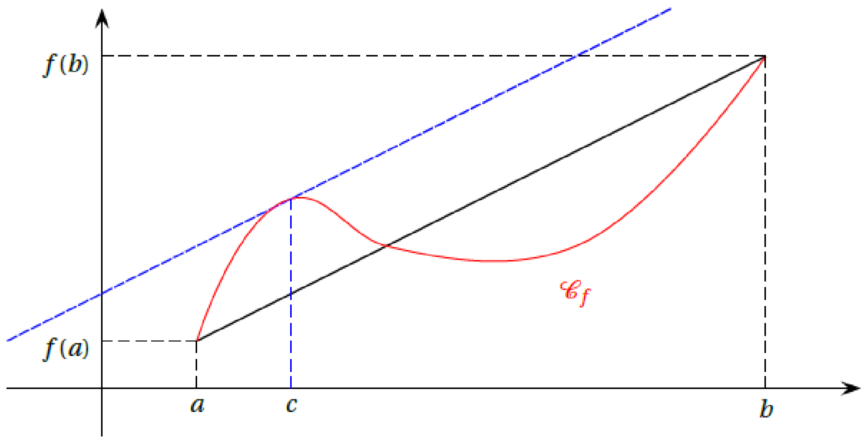


FIGURE 4.2 – Une illustration graphique du théorème des accroissements finis.

Théorème 4.5 (**Fonctions dérivables et sens de variation**). *On suppose que f est une fonction dérivable sur un intervalle I.*

1. $\forall x \in I : f'(x) \geqslant 0$ *si et seulement si f est croissante sur I.*
2. $\forall x \in I : f'(x) \leqslant 0$ *si et seulement si f est décroissante sur I.*
3. $\forall x \in I : f'(x) = 0$ *si et seulement si f est constante sur I.*
4. *Si* $\forall x \in I : f'(x) > 0$ *alors f est strictement croissante sur I.*
5. *Si* $\forall x \in I : f'(x) < 0$ *alors f est strictement décroissante sur I.*

Remarque 4.4. La réciproque au point (4.) (et aussi au (5.)) est fausse. Par exemple la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante et pourtant sa dérivée s'annule en 0.

Théorème 4.6 (**Inégalité des accroissements finis**). *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle $]a, b[$. S'il existe une constante M tel que pour tout $x \in]a, b[$, $|f'(x)| \leqslant M$ alors*

$$\forall x, y \in]a, b[: \quad f(x) - f(y) \leqslant M(x - y)$$

Définition 4.8 (**Règle de l'Hospital**). *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $x_0 \in I$. On suppose que*

- $f(x_0) = g(x_0) = 0.$

- $\forall x \in I\backslash\{x_0\}: \quad g'(x_0) \neq 0.$

$$\textit{Si} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad (\ell \in \mathbb{R}) \quad \textit{alors} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Remarque 4.5. La règle de l'Hospital est aussi valable si $x_0 = \pm\infty$, ou si $\lim\limits_{x\to x_0} f = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g = \pm\infty$.

Exemple 4.9. Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$
On suppose que $f(x) = \ln(x^2+x-1), g(x) = \ln(x)$, donc
$f(1) = g(1) = 0$ et $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x-1}, g'(x) = \dfrac{1}{x}, g'(x) \neq 0.$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{2x^2+x}{x^2+x-1} = 3$$

Alors

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)} = 3$$

4.2.11 Extremums d'une fonction

Définition 4.9. *Soit f une fonction définie sur l'intervalle I et x_0 un réel de I.*
On dit que f admet un maximum global (resp. minimum global) en x_0 si

$$\textit{pour tout } x \in I,\ f(x) \leqslant f(x_0) (\textit{resp. } f(x) \geqslant f(x_0)).$$

Dans ce cas, $f(x_0)$ est appelé maximum (resp. minimum) de f sur I.

Définition 4.10. *Soit f une fonction définie sur l'intervalle I et x_0 un réel de I.*
On dit que f admet un maximum local (resp. minimum local) en x_0, s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 et inclus dans I tel que $f(x) \leqslant f(x_0)$ (resp. $f(x) \leqslant f(x_0)$) pour tout $x \in J$.

Lorsque f admet un minimum ou un maximum local en x_0 on dit que f admet un extremum local en x_0.

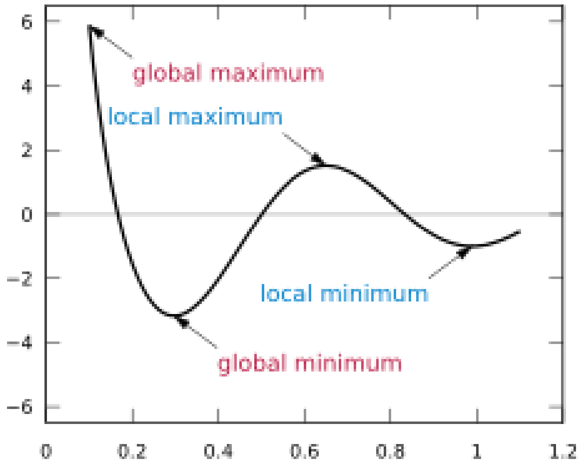


Figure 4.3 – Extremums d'une fonction

Remarque 4.6. f a un extremum local en x_0 si et seulement si $f(x) - f(x_0)$ a un signe constant au voisinage de x_0. Le signe est positif si x_0 est un minimum local et négatif si c'est un maximum local.

Théorème 4.7. *Soit f une fonction définie sur l'intervalle I et x_0 un réel de I. On dit que x_0 est un point critique de f si $f'(x_0) = 0$.*

Théorème 4.8. *Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I, et x_0 un élément de I.*

Si f admet un extremum local en a, alors $f'(x_0) = 0$.

4.2.12 Applications en économie

4.2.13 Coût marginal

Supposons que le coût total de production de q unités d'un produit soit donné par $CT(q)$ où CT une fonction dérivable en q. Le coût de production d'une unité supplémentaire est approché par le coût marginal $Cm(q) = CT'(q)$.

Exemple 4.10. Supposons que le coût de production de q unités d'un produit soit donné par

$$CT(q) = 10 + \sqrt{200q}.$$

Produire 50 unités coûte alors

$$CT(50) = 110 \text{ \$}.$$

Le coût (réel) de production de la 51$^{\text{ème}}$ unité est

$$CT(51) - CT(50) \simeq 0,995.$$

Il est (convenablement) approché par son coût marginal :

$$Cm(50) = CT'(50) = \frac{100}{\sqrt{200 \times 50}} = 1.$$

4.2.14 Coût moyen, coût marginal et optimum technique

Si le coût total de production de $q > 0$ objets est donné par $CT(q)$, le coût moyen de production d'une unité est donné par :

$$CM(q) = \frac{CT(q)}{q}$$

lorsque l'on produit q unités.

On a donc que :

$$CM'(q) = \frac{CT'(q)q - CT(q)}{q^2}$$

est du signe de

$$CT'(q)q - CT(q)$$

ou encore de

$$CT'(q) - \frac{CT(q)}{q}$$

c'est-à-dire de

$$Cm(q) - CM(q).$$

Ainsi, le coût moyen est croissant aux points pour lesquels le coût marginal est supérieur au coût moyen et décroissant aux points pour lesquels le coût marginal est inférieur au coût moyen.

Propriétie 4.2.1. *Le coût moyen est minimal lorsqu'il est égal au coût marginal :*

$$CM(q^*) \text{ } minimal \iff Cm(q^*) = CM(q^*)$$

En d'autres termes, le coût moyen est minimal à l'intersection des courbes du coût moyen et du coût marginal.

4.3 Travaux Dirigés

Exercice 1. Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{2x^3-4x^2+x-2}{x^2-4}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} e^x \sin(e^{-x})$

3. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{\ln(e^x+1)}$

4. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x-1} - x\sqrt{x}$

5. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^{\ln(x)}}{(\ln(x))^x}$

6. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \ln(x)\ln(\ln(x))$

7. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^3-3x-2}$

8. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\cos(x+x^2-1)}{x}$

9. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

10. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}$

11. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{x+1} - (x+1)^x$

12. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{(\sqrt{x}-1)\ln(x)}$

Exercice 2. Étudier la continuité et les possibilités de prolongement par continuité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{e^x-1}{x}$

2. $f(x) = \dfrac{1-x}{1-x^2}$

3. $f(x) = \dfrac{x^2\ln(x)}{\sin(x)}$

4. $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{(x-1)^2}$

5. $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}} + 2x - 3$

6. $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x+1}$

Exercice 3. Étudier la dérivabilité en 0 des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

2. $g(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

3. $h(x) = \begin{cases} x^2+2x-3 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \ln(1+2x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Exercice 4. En utilisant le nombre dérivé d'une fonction que l'on déterminera, calculer les limites.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$.

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^{2021}}{x}$.

3. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$.

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x}$

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$, $(a,b\in\mathbb{R}_+^*)$,

6. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}$.

Exercice 5. Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x)=\sin(2x+1)$.

2. $f(x)=4e^{5x+4}$.

3. $f(x)=\sqrt{x^2+2}$.

4. $f(x)=\sqrt{\cos x}$

5. $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$.

6. $f(x)=\sin x^2$.

7. $f(x)=(\sin x)^2$.

8. $(\sin 2)x$

9. $f(x)=\left(\dfrac{1+2x}{1-x}\right)^2$,

10. $f(x)=\dfrac{1}{1+\tan x}$.

11. $f(x)=\tan(2x+3)$.

12. $f(x)=2e^{3x^2-1}$.

Exercice 6. Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ vérifiant $f(0)=f(1)$.

1. Montrer qu'il existe un réel x tel que $f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=f(x)$.
2. Généraliser en prouvant qu'on peut toujours trouver un x tel que $f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)=f(x)$, pour tout entier $n\geqslant 2$.

Exercice 7. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que

$$\begin{cases} f(a)=g(b)\\ \text{et}\\ g(a)=f(b)\end{cases}$$

Montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $f'(c)=g'(c)$.

Exercice 8. Démontrer que pour tout $x>0$,

1. $\dfrac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\dfrac{1}{x}$.
2. $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}<\sqrt{x+1}-\sqrt{x}<\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Exercice 9. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$: $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$

Exercice 10. En utilisant la règle de l'Hôpital, calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\mathrm{e}^x - 1}$,

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$,

3. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\mathrm{e}^{-x}$,

4. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{7x + \ln 5x}{9x + \ln 3x}$,

5. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^x - 1}{\ln x - x + 1}$,

6. $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\sin x}{x^2 - \pi^2}$,

7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \mathrm{e}^x}{(x+1)e^x - 1}$,

8. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1}{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}$.

Exercice 11. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + \cos^2 x}$$

Montrer que, f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]0, 2\pi[$.

Exercice 12. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. En utilisant la fonction g tel que $g(x) = \ln(f(x))$, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \mathrm{e}^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}.$$

Exercice 13. Soient f et $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues telles que $f(0) = g(1) = 0$ et $f(1) = g(0) = 1$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{R}^+$, il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = kg(x)$.

4.4 Exercices Supplémentaires

Exercice 1. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f est paire si et seulement si f' est impaire.
2. Montrer que si f est impaire, f' est paire. Que dire de la réciproque ?
3. Montrer que si f est périodique, f' est périodique. Que dire de la réciproque ?

Exercice 2. Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$. On suppose que $f(0)=0$ et $f(1)=1$. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f(c)f'(c) = \dfrac{1}{2}$

Indication : On pourra utiliser la fonction $g\colon x \mapsto f^2(x) - x$.

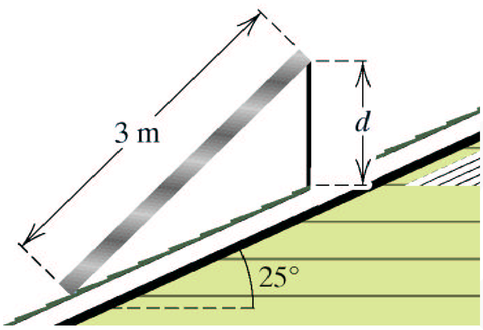
Exercice 3. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. Montrer que, pour tout $x > 0$, il existe $c \in]x, x+1[$ tel que

$$f(x) - f(x+1) = \frac{1}{c^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{c}}.$$

Déterminer

$$\lim_{x\to\infty} x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}}\right)$$

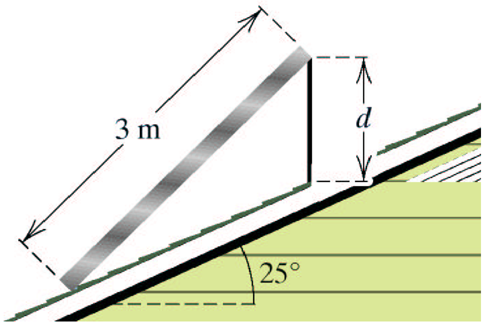
Exercice 4. Vous êtes responsable de l'installation d'un panneau solaire de $3m$ de large qui doit être fixé sur un toit formant un angle de $25°$ avec l'horizontale. Calculer la longueur d du support afin que le panneau fasse un angle de $45°$ avec l'horizontale.



Exercice 5. Une entreprise cherche à fabriquer une boite en carton (étanche), en forme de parallélépipède rectangle, lui permettant de stocker $576cm^3$ de lait. Pour des raison de marketing, la boite doit avoir une base rectangulaire dont un coté est le double de l'autre.

Pour des raisons de coût, la quantité de carton utilisée (en centimètre carré) doit être la plus petite possible.

Existe-t-il une telle boite ? Dans l'affirmative, trouver ses dimensions.



Exercice 6. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{4}(2 - u_n^2)$.

1. On note f la fonction définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{4}(2 - x^2)$. Étudier les variations de f et déterminer ses points fixes.
2. Montrer que $\forall x \in [1, 2]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$, et que $f([1, 2]) \subset [1, 2]$.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1, 2]$, et que $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$.
4. Prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, et en déduire la limite de la suite (u_n).
5. À partir de quel rang a-t-on $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant 10^{-9}$?

Exercice 7. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$.

1. Montrer que l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ a une seule racine dans l'intervalle $]0, 1[$ et préciser la valeur de cette racine, qu'on notera désormais r_2.
2. Montrer que, $\forall x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, $f(x) \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.
3. Calculer la dérivée f' de f et prouver que, $\forall x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{4}{9}$.
4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - r_2| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^n$, et en déduire la convergence de (u_n).

Chapitre 5

Calcul intégral

Sommaire

5.1 Rappels sur les primitives d'une fonction

Dans tout ce chapitre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton.

Définition 5.1. *Soit f une fonction définie sur I. Une primitive de f sur I est une fonction F, dérivable sur I et telle que, pour tout réel x de I.*

$$F'(x) = f(x).$$

Exemple 5.1.

1. La fonction $F\colon x \mapsto 4x^3$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f\colon x \mapsto x^4$.

   En effet
   $$\forall x \in \mathbb{R} : (x^4)' = 4x^3.$$

2. La fonction $F\colon x \mapsto \sin x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f\colon x \mapsto \cos x$, puisque
   $$\forall x \in \mathbb{R} : (\sin x)' = \cos x.$$

Proposition 5.1.1. *Toute fonction continue sur I possède au moins une primitive sur I.*

Définition 5.2. *On appelle intégrale indéfinie de la fonction f et on note $\int f(x)\ \mathrm{d}x$, toute expression de la forme $F(x) + c$ où $c \in \mathbb{R}$ et F est une primitive de f.*

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = F(x) + c.$$

Exemple 5.2. $\int 4x^3 - 6x^2 + 1 - \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x = x^4 - 2x^3 + x - \mathrm{e}^x + c,$

Proposition 5.1.2. *Si F et G sont deux primitives d'une même fonction f sur I, alors leur déférence est une constante, c'est à dire il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout x de I,*

$$F(x) = G(x) + c.$$

Exemple 5.3. $\int 4x^3 dx = x^4 + c, \quad (c \in \mathbb{R}).$

Proposition 5.1.3. *Si f admet une primitive F sur I, elle admet alors une infinité de primitives sur I de la forme $F(x) + c$ où c est une constante.*

Exemple 5.4. Les fonctions

$$F_1 \colon x \mapsto 4x^3 + 1,\ F_2 \colon x \mapsto 4x^3 - \sqrt{3},\ F_3 \colon x \mapsto 4x^3 + \frac{5}{2}$$

sont des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f \colon x \mapsto x^4$.

Définition 5.3. *On appelle intégrale définie de f sur l'intervalle $[a, b]$, le nombre réel défini et noté par*

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemple 5.5. $\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3 = \frac{1}{3}\left((3)^3 - (1)^3\right) = \frac{26}{3}$

5.1.1 Primitives des fonctions usuelles

La lecture du tableau des dérivées des fonctions usuelles dans le sens f' vers f permet d'obtenir les primitives des fonctions usuelles.

Dans le tableau ci-après, f est une fonction définie sur un intervalle et F est une primitive quelconque de f avec c constante réelle.

Fonction f	**Intervalle de validité I**	**Primitive F**
$f(x) = a \quad$ avec $a \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = ax + c$
$f(x) = x^n \quad$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$I =]-\infty, 0[$ ou $I =]0, +\infty[$	$F(x) = -\frac{1}{x} + c$
$f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n} \quad$ avec $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$I =]-\infty, 0[$ ou $I =]0, +\infty[$	$F(x) = \frac{1}{-n+1}x^{-n+1} + c$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$I =]0, +\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \mathrm{e}^x + c$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$I =]0, +\infty[$	$F(x) = \ln x + c$
$f(x) = \cos x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \sin x$

$f(x) = \sin x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = -\cos x$

5.1.2 Opérations sur les primitives

En s'appuyant sur les résultats concernant les opérations sur les fonctions dérivables, on établit que :

Théorème 5.1.

1. *Si F est une primitive de f sur un intervalle I et si G une primitive de g sur I, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.*
2. *Si F est une primitive de f sur un intervalle I, si a est un nombre réel, alors aF est une primitive de af sur I*

f est une fonction définie sur un intervalle I, u est une fonction dérivable sur I, F est une primitive quelconque de f, définie sur I, c est une constante réelle quelconque.

Fonction f	**Conditions**	**Primitive** F
$f(x) = \cos(ax+b)$ avec $a \neq 0$		$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$
$f(x) = \sin(ax+b)$ avec $a \neq 0$		$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$
$f = u' \times u^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$		$F(x) = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$
$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$u > 0$ sur I	$F(x) = 2\sqrt{u} + c$
$f = u'\mathrm{e}^u$		$F(x) = \mathrm{e}^u + c$
$f = \frac{u'}{u}$	$u > 0$ sur I	$F(x) = \ln u + c$

5.2 Méthodes d'intégration

5.2.1 Utilisation de primitives

Exemple 5.6. Calculer $A = \int_0^1 \frac{t}{t^2+4} dt$

Posons $u(t) = t^2 + 4$ alors $u'(t) = 2t$ et $\frac{t}{t^2+4} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(t)}{u(t)}$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \frac{t}{t^2+4} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{u'(t)}{u(t)} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln(t^2+4) \right]_0^1 \\ &= \frac{\ln 5 - \ln 4}{2} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{5}{4} \right). \end{aligned}$$

5.2.2 Intégration par parties

Proposition 5.2.1. *Soient u et v deux fonctions continues et dérivables sur un intervalle $[a, b]$.*

$$\int_a^b u'(x)v(x) \, \mathrm{d}x = [uv]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) \, \mathrm{d}x.$$

Remarque 5.1. La formule d'intégration par parties pour les primitives est la même mais sans les bornes :

$$\int u'(x)v(x) \, \mathrm{d}x = [uv] - \int u(x)v'(x) \, \mathrm{d}x.$$

Exemple 5.7. Soit $I = \int_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$.

On pose $u'(x) = \mathrm{e}^x$, donc $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x + 1$, donc $v'(x) = 1$.

En intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x \ \mathrm{d}x \\
&= [uv]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x) \ \mathrm{d}x \\
&= [(x+1)\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x \ \mathrm{d}x \\
&= [(x+1)\mathrm{e}^x]_0^1 - [(\mathrm{e}^x]_0^1 \\
&= [x\mathrm{e}^x]_0^1 \\
&= \mathrm{e}.
\end{aligned}$$

Il est claire que $x \mapsto x\mathrm{e}^x + c$ est la primitive de $x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^x$ avec c est constante réel.

Exemple 5.8. Soit $J = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \ \mathrm{d}x$.

On pose $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln x \end{cases}$, donc $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

En intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned}
J &= \int_1^{\mathrm{e}} \ln x \ \mathrm{d}x \\
&= [uv]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} u(x)v'(x) \ \mathrm{d}x \\
&= [x \ln x]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} 1 \ \mathrm{d}x \\
&= [x \ln x]_1^{\mathrm{e}} - [x]_1^{\mathrm{e}} \\
&= [x \ln x - x]_1^{\mathrm{e}} \\
&= \mathrm{e}.
\end{aligned}$$

Alors $x \mapsto x \ln x + x$ est une primitive de $x \mapsto \ln x$.

Exemple 5.9. Calculer $K = \displaystyle\int \mathrm{e}^x \sin 2x \ \mathrm{d}x$

Posons $\begin{cases} u'(x) = \mathrm{e}^x \\ v(x) = \sin 2x \end{cases}$, alors $\begin{cases} u'(x) = \mathrm{e}^x \\ v'(x) = 2\cos 2x \end{cases}$

On a donc

$$\begin{aligned} K &= \int \mathrm{e}^x \sin 2x \ \mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^x \sin 2x - 2\int \mathrm{e}^x \cos 2x \ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

On doit effectuer une deuxième intégration par partie

En posant cette fois $\begin{cases} u'(x) = \mathrm{e}^x \\ v(x) = \cos 2x \end{cases}$, alors $\begin{cases} u'(x) = \mathrm{e}^x \\ v'(x) = -2\sin 2x \end{cases}$

On a donc

$$\int \mathrm{e}^x \cos 2x \ \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \cos 2x + 2\int \mathrm{e}^x \sin 2x \ \mathrm{d}x$$

ainsi

$$K = \mathrm{e}^x \sin 2x - 2\mathrm{e}^x \cos 2x - 4\int \mathrm{e}^x \sin 2x \ \mathrm{d}x$$

d'où

$$K = \frac{1}{5}\left(\mathrm{e}^x \sin 2x - 2\mathrm{e}^x \cos 2x\right)$$

5.2.3 Changement de variables

Proposition 5.2.2. *Soit u une fonction dérivable sur un segment $[a,b]$ telle que u' est continue sur $[a,b]$. Soit f une fonction continue sur un segment J tel que $J = u([a,b])$. Alors, on a l'égalité :*

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(t) \ \mathrm{d}t = \int_a^b f(u(x))u'(x) \ \mathrm{d}x.$$

Remarque 5.2. si on pose $t = u(x)$ alors $\mathrm{d}t = u'(x) \ \mathrm{d}x$, si on remplace dans l'expression $f(u(x))u'(x) \ \mathrm{d}x$ la variable $u(x)$ par la variable t on obtient $f(t) \ \mathrm{d}t$

On a aussi

$$\begin{cases} \text{si } x = a \text{ alors } t = u(a) \\ \text{si } x = b \text{ alors } t = u(b) \end{cases}.$$

Donc on dit qu'on a fait un changement de variable et cette technique s'appelle intégration par changement de variable.

Exemple 5.10. Calculer $I = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\ \mathrm{d}x$

posons : $u = 1 + x^2 \implies \mathrm{d}u = 2x\ \mathrm{d}x$.

Si $x = 0$ alors $u = 1$ et si $x = 1$ alors $u = 2$, d'où

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\ \mathrm{d}x \\
&= \int_1^2 \frac{1}{2}\sqrt{u}\ \mathrm{d}u \\
&= \left[\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 \\
&= \frac{\sqrt{8}-1}{3}
\end{aligned}$$

5.2.4 Intégration des fractions rationnelles

L'intégration des fractions rationnelles se fait en utilisant une décomposition en éléments simples.

Exemple 5.11. On calcule $\int \frac{1}{x^2-1}\ \mathrm{d}x$.

On décompose la fraction $\frac{1}{x^2-1}$ en éléments simples sous la forme :

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2-1}\ \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\ \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c.
\end{aligned}$$

Exemple 5.12. calculons $\int \frac{1}{x^3+x}\ \mathrm{d}x$.

On décompose la fraction $\frac{1}{x^3+x}$ en éléments simples sous la forme

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

Par identification, on trouve

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3+x}\ \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x - \int \frac{x}{x^2+1}\ \mathrm{d}x \\ &= \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c \\ &= \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) + c.\end{aligned}$$

5.2.5 L'intégrale et opérations

Proposition 5.2.3 (Linéarité)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I.*

- $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)+g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Proposition 5.2.4 (Relation de Chasles)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. a, b et c trois réels de I. Alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Proposition 5.2.5 (Positivité)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. a et b deux réels de I, si $a \leqslant b$ et si pour tout $x \in I : f(x) \geqslant 0$. Alors*

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$$

5.3 Sommes de Riemann

Définition 5.4. *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Exemple 5.13. Calculons, si elle existe $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right]$.
On peut écrire

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

avec

$$\begin{array}{rccl} f\colon & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)=\dfrac{1}{1+x} \end{array}$$

Le théorème de Riemann assure que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t=\ln(2).$$

5.4 Interprétation de l'intégrale : Aire

Théorème 5.2 (Calcul d'aire)**.** *Si f est une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a,b]$. Dans un repère orthogonal, l'aire du domaine défini par :*

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$$

est

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

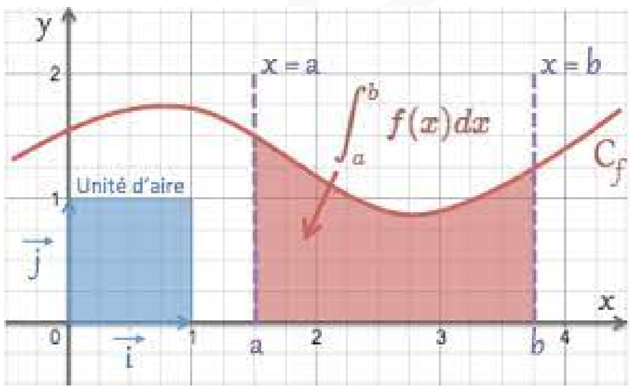


Figure 5.1 – Integrale d'une fonction positive

Dans le cas ou f est une fonction négative, on considère $-f$.

Théorème 5.3. *Si f est une fonction continue et négative sur l'intervalle $[a, b]$. Dans un repère orthogonal, l'aire de la surface délimité par la représentation graphique de f et les deux droites $x = a$ et $x = b$ est :* $\mathcal{A} = \int_a^b -f(x)dx$

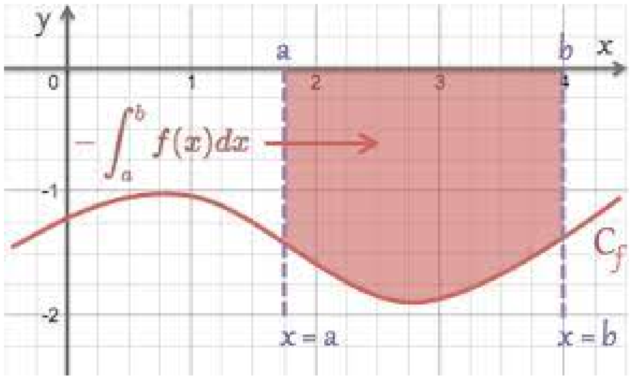


FIGURE 5.2 – Integrale d'une fonction négative

5.5 Valeur moyenne et inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue et bornée sur un intervalle $[a, b]$. Quel que soit le réel x de $[a, b]$, avec $a < b$, on a $m \leqslant f(x) \leqslant M$ (avec m minorant de f et M le majorant de f sur l'intervalle $[a, b]$) d'où :

$$\int_a^b m dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b M dx$$

d'où

$$[mx]_a^b \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant [Mx]_a^b$$

et

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$$

On a donc :

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqslant M$$

Définition 5.5. *Soit f une fonction continue et bornée sur un intervalle I et a et b deux réels de I $(a < b)$. On appelle valeur moyenne de f sur $[a, b]$ le nombre réel :*

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

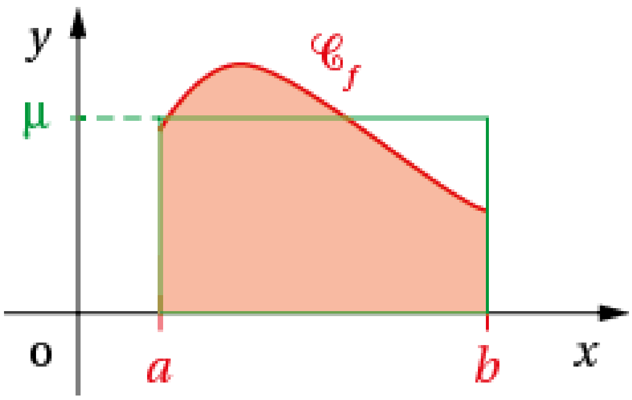


FIGURE 5.3 – La valeur moyenne d'une fonction

Théorème 5.4. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b appartenant à I ($a < b$). Si sur un intervalle $[a, b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors :*

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqslant M$$

La valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est comprise entre m et M.

Exemple 5.14. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln n \leqslant \frac{1}{n}$$

Pour tout $x > 1$, la fonction inverse est continue et strictement décroissante. Ainsi, si x est appartenant à $[n, n+1]$, nous avons

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Appliquons le théorème de l'inégalité de la moyenne sur $[n, n+1]$ on trouve

$$\frac{1}{n+1}(n+1-n) \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{1}{n}(n+1-n)$$

Donc

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln n \leqslant \frac{1}{n}$$

Théorème 5.5. *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Il existe $c \in [a, b]$ tel que :*

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = f'(x)(b-a).$$

Proposition 5.5.1. *Soit f une fonction continué sur $[a, b]$.*

Si pour tout $x \in [a, b]$ il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leqslant M$ alors

$$\left| \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \right| \leqslant M|b - a|.$$

5.6 Travaux Dirigés

Exercice 1. Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2x^4 + 5x^3 - 8x$,

2. $f(x) = -3x^2 + \dfrac{2}{x}$,

3. $f(x) = 4x(6x^2 + 1)$,

4. $f(x) = -6\mathrm{e}^{2x+1}$,

5. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2 - x}$,

6. $f(x) = \dfrac{1}{(1-2x)^3}$,

7. $f(x) = \cos(x)\sin(x)$,

8. $f(x) = \ln(1 + x^2)$

9. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

10. $f(x) = x\sin^3(x)$

11. $f(x) = x\sqrt{1 + 2x^2}$

12. $f(x) = \dfrac{1}{x + x\ln^2(x)}$

13. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$

14. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes :

1. $A = \displaystyle\int_0^4 2x^2 + 5x - 8 \,\mathrm{d}x$, **2.** $B = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{t} \,\mathrm{d}t$, **3.** $C = \displaystyle\int_3^4 \frac{1}{(x-1)(x-2)} \,\mathrm{d}x$.

Pour C : écrire $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$ sous la forme : $\dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x-2}$.

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

Déterminer a et b réels tels que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-x}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Déterminer la primitive F de f vérifiant la condition donnée.

1. $f(x) = 3x(x^2 + 1)^4$ et $F(1) = 0$,
2. $f(x) = \dfrac{\ln^2(x)}{x}$ et $F(\mathrm{e}) = 0$.

Exercice 5. À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

1. $A = \displaystyle\int_0^3 x\sqrt{3-x} \;\mathrm{d}x$,

2. $B = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} \;\mathrm{d}x$,

3. $C = \displaystyle\int_0^{-1} (2x^2 + 1)\mathrm{e}^{3x} \;\mathrm{d}x$.

Exercice 6. La fonction de demande d'un produit est modélisée sur l'intervalle $[1;8]$ par $f(x) = (x+6)e^{-0{,}2x}$. Le nombre $f(x)$ représente la quantité demandée, exprimée en centaines de milliers d'objets, lorsque le prix unitaire est égal à x €.
Déterminer la demande moyenne arrondie au millier d'objets près, lorsque le prix unitaire varie entre 3 et 7 €.

Exercice 7.

1. (a) Déterminer réels a, b et c réels tels que : $\forall x > 0$, $\dfrac{1}{x\,(x^2+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$.

   (b) En déduire l'intégrale : $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x\,(x^2+1)}\, \mathrm{d}x$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $J = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2}\, \mathrm{d}x$.

Exercice 8. Pour tout entier naturel n, on note :

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} Dt \qquad J_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2)\ \mathrm{d}t$$

1. (a) Montrer que : $\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

   (b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $J_n = \dfrac{\ln 2}{n+1} - \dfrac{2}{n+1} I_{n+2}$

3. En déduire la limite de (J_n) et celle de (nJ_n).

Exercice 9. En utilisant le changement de variable indiqué, calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^3 \frac{t \ln(1+t^2)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t \qquad (x = 1+t^2)\ , \quad B = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}} \qquad (t = \sqrt{x})\ .$$

Exercice 10.

1. En posant $y = x^n$, calculer $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n-1}}{1+x^n}\, \mathrm{d}x$

2. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n$.

Exercice 11.

1. (a) Déterminer a et b réels tels que : $\forall t > 1$, $\dfrac{1}{t^2-1} = \dfrac{a}{t-1} + \dfrac{b}{t+1}$.

(b) Calculer : $I = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$.

2. En posant $t = \mathrm{e}^x$, calculer $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{e^x - e^{-x}}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 12.

1. Justifier l'existence et calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-1}^{2} \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

2. Justifier l'existence et calculer l'intégrale suivante :

$$J = \int_{-1}^{2} x\mathrm{e}^{3x-1}\,\mathrm{d}x$$

3. Calculer

$$K = \int_{1}^{2} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

en posant $x = \ln(t)$.

4. On pose

$$L = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad M = \int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x.$$

(a) Justifier que $L + M = 1$

(b) Calculer L, en déduire la valeur de M.

Exercice 13. Calculer les intégrales suivantes :

1. $A = \displaystyle\int_1^4 \frac{2x^3+x^2-5x+1}{x}\,\mathrm{d}x$ **2.** $B = \displaystyle\int_3^4 \frac{2x-2}{x^2-2x}\,\mathrm{d}x$

3. $C = \displaystyle\int_{-\frac{3}{2}}^{-1} e^{2x+3}\,\mathrm{d}x$ **4.** $D = \displaystyle\int_5^{10} \sqrt{t-1}\,\mathrm{d}t$

5. $E = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{x+3}}\,\mathrm{d}x$ **6.** $F = \displaystyle\int_2^3 \frac{x+4}{x^2+8x-9}\,\mathrm{d}x$

7. $G = \displaystyle\int_2^3 \frac{1}{(2x+3)^3}\,\mathrm{d}x$ **8.** $H = \displaystyle\int_0^2 \frac{x^2+2x}{x+1}\,\mathrm{d}x$

Indication : Pour H : écrire $\dfrac{x^2+2x}{x+1}$ sous la forme : $ax + b + \dfrac{c}{x+1}$;

Exercice 14. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 (x-2)(x+1)^5 \,\mathrm{d}x,$

2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\ln 2}{2}} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2} \,\mathrm{d}x\ ,$

3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2(x) \,\mathrm{d}x,$

4. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln(x))^2} \,\mathrm{d}x,$

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^4} \,\mathrm{d}x,$

6. $\displaystyle\int_1^5 |x^2-5x+6| \,\mathrm{d}x$

7. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos(x) \,\mathrm{d}x,$

8. $\displaystyle\int_1^e x\ln^2(x) \,\mathrm{d}x,$

9. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2(x) \,\mathrm{d}x$

10. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} \,\mathrm{d}x$

11. $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x} \,\mathrm{d}x,$

12. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x} \,\mathrm{d}x,$

13. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x,$

14. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x+1}} \,\mathrm{d}x.$

5.7 Exercices Supplémentaires

Exercice 1. Calculer les intégrales et les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x(x+1)} \,\mathrm{d}x,$

2. $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x+1}{x^2-3x-4} \,\mathrm{d}x,$

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{(x^2+1)(x-2)} \,\mathrm{d}x,$

4. $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x^2+x+1)} \,\mathrm{d}x,$

5. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2-4x+3} \,\mathrm{d}x,$

6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2} \,\mathrm{d}x,$

7. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)} \,\mathrm{d}x,$

8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^4+x^2+1)^2} \,\mathrm{d}x$

9. $\displaystyle\int \frac{\cos(x)-\sin(x)}{1+\cos^2(x)} \,\mathrm{d}x,$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{\sqrt{x}}} \,\mathrm{d}x,$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{5+4\sin(x)} \,\mathrm{d}x,$

12. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x+\sqrt{x-1}} \,\mathrm{d}x,$

13. $\displaystyle\int \frac{\tan(x)}{1+\sin^2(x)} \,\mathrm{d}x,$

14. $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{dx}{x},$

15. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+x+1}{(x^2+2)^2} \,\mathrm{d}x.$

Exercice 2. Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in [a, b] : \; f(a + b - x) = f(x)$$

Montrer que l'on a alors :

$$\int_a^b x f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{a+b}{2} \int_a^a f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Exercice 3. On définit, pour tout entier n, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$.

1. Calculer I_1.
2. Montrer que sur $[1; e]$, on a $(\ln x)^{n+1} \leqslant (\ln x)^n$, et en déduire le sens de variation de I_n.
3. Montrer que (I_n) est convergente.
4. Montrer que sur $[1; e]$, $0 \leqslant \ln x \leqslant \dfrac{x}{e}$. En déduire la limite de I_n.
5. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $I_{n+1} = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{n+1}{3} I_n$. En déduire un équivalent de I_n.

Exercice 4. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + t + t^n} \, dt$.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ln 2$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. Pour tout n de $\mathbb{N}$, écrire $\ln 2 - u_n$ sous la forme d'une intégrale.
6. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln 2 - u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
7. Donner la limite de la suite (u_n).

Exercice 5. On considère la suite définie par $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, dt$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Déterminer la limite de la suite (I_n).
3. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
4. On note désormais $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, exprimer S_n en fonction de I_n.

5. Déduire des questions précédentes la convergence et la limite de la suite (S_n).

Exercice 6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

1. Montrer que f est dérivable et déterminer sa dérivée. En déduire le tableau de variations de f.
2. On pose désormais $g(x) = f(x) - \ln x$. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$ et en déduire son signe.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 7. On considère la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$

1. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[-1, 1]$ puis tracer la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.
   (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées).
2. Calculer l'aire en cm^2 du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f et les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 1$.

Exercice 8. On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x}$.

1. Étudier les variations de f sur $]0, +\infty[$,
2. Déterminer l'abscisse a du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses,
3. On note S_1 l'aire de la partie de plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x = \frac{1}{e}$ et $x = 1$.
   On note S_2 l'aire de la partie de plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = m$, $m > 1$.
   Déterminer m pour que $S_1 = S_2$.

Exercice 9. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 9x^2 + 4x$.

1. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0, 2]$. (On notera V_m cette valeur)
2. Déterminer $c \in [0, 2]$ tel que $f(c) = V_m$.
3. Déterminer $b > 0$ tel que la valeur moyenne de f sur $[0, b]$ soit égale à 5.

Exercice 10. Pour tout $x > 0$, on pose $I(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}$.

1. (a) Montrer que si $t \geqslant 0$ on a : $\dfrac{1}{1+t} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

   (b) Montrer que si $t > 0$ on a : $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \leqslant \dfrac{1}{t}$.

2. (a) En déduire, pour $x > 0$, un encadrement de $I(x)$.

   (b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} I(x)$.

Exercice 11. On pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \sqrt{1-t}\ \mathrm{d}t \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier l'existence de I_n.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $I_n \geqslant I_{n+1}$. (Cela signifie que la suite (I_n) est décroissante)
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $I_n \geqslant 0$. (Cela signifie que la suite (I_n) est minorée par 0)

Exercice 12. On considère les fonctions F et G définies sur $I =]0; +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\ \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad G(x) = \int_{1/x}^x \frac{\ln t}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est C^1 sur I et calculer F'.
2. Exprimer $G(x)$ en fonction de $F(x)$ et $F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
3. Montrer que G est dérivable sur I. Calculer G' et $G(1)$. En déduire G.

Bibliographie

[1] EL AMRANI, Mohammed. Suites et séries numériques : Suites et séries de fonctions. Ellipses Marketing, 2011.

[2] BÉGYN, Arnaud. R. Leroy, CONNAN, Guillaume. Mathématiques méthodes et exercices, $3^{\text{ème}}$ édition, Dunod, 2015.

[3] BÉGYN, Arnaud. CONNAN, Guillaume. Mathématiques : Méthodes et exercices BCPST $1^{\text{ère}}$ année, Dunod, Paris, 2010.

[4] C. David, S. Mustapha, Mathématiques tout les cours en fiches, Dunod, 2014.

[5] DODGE, Yadolah. Mathématiques de base pour économistes. Springer Science & Business Media, 2002.

[6] MONIER, Jean-Marie. Les méthodes et exercices de Mathématiques PCSI-PTSI. Dunod, 2008.

[7] MOULIN, François. RUAUD, Jean François. MIQUEL, Anne et SIFRE, Jean-Claude. Mathématiques tout-en-un - $1^{\text{ère}}$ année. Dunod, 2003.

[8] AULIAC, Guy. AVIGNANT, Jean et AZOULAY, Elie. Aide-mémoire de Mathématiques. Edi Science, 2006.

[9] Vincent BLONDEL : Mathématiques - Analyse. Dunod, 2000.

[10] BUFF, Xavier. GARNIER, Josselin. HALBERTSTADT, Emmanuel. LACHAND-ROBERT, Thomas. MOULIN, François et SAULOY, Jacques. Mathématiques tout-en-un pour la licence niveau L1. Dunod, 2006.

[11] GUÉNARD, François. HUG, Patricia, QCM de Mathématiques, volume 1. Dunod, 1993.

[12] EMARD, François Cottet. Analyse : des fonctions réelles aux suites. De Boeck Supérieur, 2018.

[13] DUSSART, Jérémy. JOUKOFF, Natacha. LOULIT, Ahmed et al. Mathématiques appliquées à la gestion. Pearson éducation France, 2004.

[14] BEN JEDDOU, Makrem et HELLA, Hababou. Mathématiques appliquées à l'Économie et à la Gestion, 2008.

[15] LAZZARINI, Giovanni. Mathématiques appliquées à la gestion.

[16] BELHAJ, Skander. Mathématiques pour l'économie et la gestion. Editions Vuibert, Paris, 2011.

[17] SYDSAETER, Knut. HAMMOND, Peter J. STROM, Arne et al. Mathématiques pour l'économie. Pearson, 2020.