

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma



Faculté des mathématiques et de l'informatique et des sciences de la matière
Département de mathématiques
Laboratoire des mathématiques appliquées et de modélisation

THÈSE
EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE
DOCTORAT EN 3^{ème} CYCLE

Domaine : Mathématiques et informatique
Filière : Mathématiques Appliquées
Spécialité : Modélisation, Contrôle et Optimisation

Présentée par
Mohamed Lamine MERIKHI

Intitulée

**Modélisation asymptotique des problèmes d'évolutions par les Dérivées
Fractionnaires Conformes**

Soutenue le : 08/10/2024

Devant le Jury composé de :

Mr AISSAOUI Mohamed Zine	Prof	Univ. de Guelma	Président
Mr BERABIA Nouredine	MCA	Univ. de Souk Ahras	Encadreur
Mr BEKKOUCHE Mohamed Moumen	MCA	Univ. d'El-Oued	Co-Encadreur
Mr GHEZAL Ahmed	Prof	C.Univ. de Mila	Examineur
Mr MESBAHI Salim	Prof	Univ. de Setif 1	Examineur
Mr DEBBAR Rabah	MCA	Univ. de Guelma	Examineur

DEDICACES

À mon Dieu, à l'âme de ma grand-mère, à ma famille et à mes amis, qui ont toujours été là pour moi avec un soutien indéfectible et une compréhension infinie, je dédie ce travail. Vos encouragements constants et votre patience ont été une source inépuisable de motivation et d'inspiration.

Un merci spécial à ma femme **Amina** et à mes enfants, **Walaeddine, Alaa, Iline, Nour Mina et Mohamed** pour leur amour, leur patience et leur soutien sans faille. Votre présence réconfortante et vos sourires ont été des rayons de soleil durant les moments les plus intenses de ce projet.

Merci également à mes parents pour leur amour inconditionnel et leur soutien moral, ainsi qu'à mes amis pour leur écoute attentive et leurs conseils avisés. Vous avez tous été une véritable ancre tout au long de cette aventure.

Enfin, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mes amis, **Hamza Guebbai, Hatem Belhlou, Samir Ouartsi et Sami Segni**, pour leur soutien indéfectible et leur présence constante tout au long de ces années. Ils ont toujours cru en moi et m'ont encouragé à persévérer dans mes études, même dans les moments de doute et de difficulté. Je suis reconnaissant de leur amour inconditionnel, de leur compréhension et de leurs sacrifices. Ce doctorat n'aurait pas été possible sans leur soutien indéfectible et leur foi inébranlable en mes capacités.

RÉSUMÉ EN ARABE

في هذه الدراسة المعمقة، نقوم بإجراء تحليل شامل لنظام بروكسل من خلال دمج الأساليب التحليلية والعددية. لتلخيص مناهجنا بإيجاز، نقوم بإعادة النظر في نظام بروكسل الكلاسيكي من خلال استخدام نهج امتثالي يعتمد على المشتقات الكسرية المتوافقة. ومن خلال إعادة الصياغة المبتكرة هذه، نستنتج معادلة غير خطية من نوع فولتيرا. يتيح لنا هذا التحول في الوقت نفسه إثبات وجود الحل وتفرد، مع تزويدنا بالأدوات اللازمة لتصميم طريقة تقريبية رقمية فعالة لحل المشكلات. وبعد ذلك، نقدم محاكاة عددية تعتمد على طريقة نيستروم.

الكلمات المفتاحية: نظام بروسيلاتور، المشتقات الكسرية المتطابقة، معادلة فولتيرا غير الخطية، طريقة نيستروم.

RÉSUMÉ

Dans cette étude approfondie, nous effectuons une analyse complète du système bruxellois en intégrant des approches analytiques et numériques. Pour résumer succinctement notre méthodologie initiale, nous revisitons le système classique de Brusselator en employant une approche conforme basée sur les dérivées fractionnaires. De cette reformulation innovante, nous déduisons une équation non linéaire de type Volterra. Cette transformation nous permet simultanément d'établir l'existence et l'unicité de la solution, tout en nous dotant des outils nécessaires pour concevoir une méthode d'approximation numérique efficace pour la résolution de problèmes. Par la suite, nous présentons une simulation numérique basée sur la méthode Nyström.

Mots clés : système de Brusselator, Dérivées Fractionnaires Conforme, équation non linéaire de type Volterra, méthode de Nyström

ABSTRACT

In this in-depth study, we conduct a comprehensive analysis of the Brusselator system by integrating both analytical and numerical approaches. To encapsulate our initial methodology succinctly, we revisit the classical Brusselator system employing a conformable fractional derivative-based approach. Stemming from this innovative reformulation, we derive a nonlinear Volterra-type equation. This transformation allows us to concurrently establish the existence and uniqueness of the solution, while equipping us with the necessary tools to devise an effective numerical approximation method for problem resolution. Subsequently, we present a numerical simulation based on the Nyström method.

Keywords : Brusselator system, Conformable Fractional Dérivatives, Volterra-type nonlinear equation, Nyström method

REMERCIEMENTS

Je loue et remercie Dieu, sans qui je n'aurais pu réussir et mener à terme cette recherche. Merci, mon Seigneur.

Au terme de ce long et enrichissant parcours doctoral, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à son aboutissement. Ce doctorat représente l'aboutissement de nombreuses années de travail acharné, de persévérance et de passion. Je suis immensément reconnaissant pour le soutien et les encouragements que j'ai reçus tout au long de cette aventure intellectuelle.

Je débute par exprimer ma sincère reconnaissance et mes remerciements les plus distingués à mes directeurs de thèse, **Dr. Noureddine Benrabia** et **Dr. Mohamed Moumen Bekkouche**. Je leur suis profondément reconnaissant de m'avoir accordé l'opportunité de travailler sur un sujet aussi captivant et d'avoir partagé avec moi leur expertise inestimable et leurs précieux conseils tout au long de ces années. Leur patience, leur disponibilité et leur bienveillance ont été une source inépuisable d'inspiration et de motivation. Je suis particulièrement honoré d'avoir bénéficié de leur encadrement hors pair et de leur confiance indéfectible. Grâce à leurs conseils avisés et à leur soutien constant, j'ai pu mener à bien ce projet de recherche avec rigueur, persévérance et une profonde passion.

Je tiens également à remercier chaleureusement chaque membre du jury de ma thèse pour leur contribution significative et leur dévouement exemplaire.

Pr. Mohamed Zine Aissaoui, président de mon jury de thèse : Merci infiniment d'avoir accepté de présider ce jury. Votre expertise et votre regard critique ont été essentiels pour enrichir cette thèse et en améliorer la qualité.

Pr. Ahmed Ghezal, Votre participation en tant qu'examineur a été inestimable. Vos remarques pertinentes et constructives ont grandement contribué à la

profondeur et à la rigueur de ce travail. Merci pour votre temps précieux et votre engagement dans l'évaluation de cette thèse. Vos observations et conseils ont été extrêmement précieux pour son aboutissement.

Pr. Salim Mesbahi, Votre analyse approfondie et vos suggestions judicieuses ont apporté une perspective enrichissante et ont renforcé la qualité de ce travail.

Dr. Rabah Debbar, Je vous suis reconnaissant pour votre contribution en tant qu'examinateur. Vos critiques constructives et vos recommandations ont joué un rôle crucial dans l'amélioration de cette thèse.

Je n'oublierai jamais mes collègues du laboratoire LMAM, qui ont su créer un environnement de travail convivial, stimulant et propice à l'épanouissement intellectuel. Je suis particulièrement reconnaissant au **Pr. Hamza Guebbai** pour son soutien indéfectible, ses encouragements constants et sa confiance en mes capacités. Ses conseils avisés et sa disponibilité ont été d'une aide précieuse tout au long de mon parcours doctoral. Je tiens également à remercier tous les autres membres du laboratoire pour leur camaraderie, leur esprit d'entraide et leurs précieux conseils.

TABLE DES MATIÈRES

Dedicaces	i
Résumé en Arabe	ii
Résumé	iii
Abstract	iv
Remerciements	v
1 Introduction	1
2 Préliminaires et Outils	10
1 Dérivée Fractionnaires	10
1.1 Dérivée Fractionnaires Classiques non Conforme	11
1.2 Dérivées Fractionnaires Conformes	13
2 Modèle Brusselator	17
3 Équation non linéaire de Volterra	21
3.1 Classifications des Équations de Volterra	21
3.2 Étude analytique	23
3.3 Méthode numérique	24
3 Brusselator avec vitesse constante	28
1 Modèle fractionnaire	28
2 Étude analytique	32
3 Simulation Numérique	40
4 Brusselator avec vitesse variable	47
1 Modèle fractionnaire	47
2 Étude analytique	51
3 Simulation Numérique	58

5 Conclusion	63
---------------------	-----------

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

La chimie cinétique, en tant que discipline fondamentale de la chimie, se consacre à l'étude approfondie de la vitesse des réactions chimiques et des mécanismes qui les régissent. Elle explore les divers facteurs influençant cette vitesse. Cette compréhension fine des processus réactionnels est essentielle pour de nombreux domaines de la science et de l'industrie, allant de la synthèse de nouveaux composés à la compréhension des réactions biochimiques fondamentales.

Le processus de modélisation mathématique consiste à interpréter et à représenter un problème du monde réel, à l'aide de symboles abstraits, ce qui conduit à ce qu'on appelle la modélisation mathématique.

On appelle modèle toute construction simplifiée visant à reproduire un processus (physique, biologique, ...), afin d'en dégager des informations peu accessibles (par l'observation ou l'expérimentation) dans la réalité. Dès lors, l'étude d'un modèle mathématique peut permettre, entre autres, de mieux comprendre le phénomène considéré (ici biologique), permettant d'obtenir des informations difficiles à observer ou à expérimenter, de contribuer à sa gestion optimale ou de faire de la prédiction sur son comportement.

Pour être valide, un modèle doit respecter certaines propriétés telles que la cohérence des relations mathématiques et l'interprétabilité directe des variables, celui-ci devant représenter de façon approximative la réalité. Notre étude se focalise sur une approche spécifique pour représenter et étudier un système biochimiques.

La présente thèse s'inscrit dans ce cadre en se proposant d'interpréter et de représenter de manière abstraite, à l'aide de formules mathématiques, une réaction chimique en utilisant le modèle BRUSSLATOR [14]. Ce modèle, bien qu'abstrait, offre

une base solide pour étudier les comportements dynamiques des systèmes chimiques. Dans ce contexte, les relations mathématiques établies doivent être cohérentes et les variables doivent être interprétables comme des quantités de concentration en moles. Cela permettra d'obtenir une description mathématique précise des phénomènes étudiés.

L'objectif principal de cette thèse est de réaliser une évaluation sur un intervalle de temps considérable, en exploitant le comportement asymptotique pour déterminer d'éventuelles propriétés locales et globales des courbes d'évolution des différentes réactions. Cette approche permettra d'effectuer des prédictions sur le comportement du système sur de très longues périodes, ouvrant ainsi la voie à une meilleure compréhension des processus réactionnels à l'échelle temporelle.

Pour atteindre cet objectif, nous utilisons l'outil de la dérivée fractionnaire conforme [21] afin de modéliser ce problème d'évolution. Cette approche est choisie en raison de sa capacité à conserver l'effet mémoire, ce qui est essentiel pour prendre en compte l'impact des données historiques sur le comportement actuel du système. En utilisant la dérivée fractionnaire conforme [21], nous visons à développer un modèle mathématique précis et robuste, qui permettra une compréhension approfondie de la réaction chimique et de ses dynamiques associées sur de longues périodes de temps.

Les outils de dérivation fractionnaire ont émergé comme des outils puissants dans divers domaines scientifiques et techniques. La dérivation fractionnaire, généralise le concept traditionnel de la dérivation entière en permettant l'utilisation d'ordres non entiers, souvent représentés par des exposants fractionnaires. Cette généralisation permet de capturer des phénomènes dynamiques complexes et non linéaires, qui ne peuvent pas être modélisés efficacement à l'aide de dérivées entières classiques.

L'une des applications les plus importantes des dérivées fractionnaires est dans la modélisation de systèmes dynamiques avec mémoire. Contrairement aux dérivées entières, les dérivées fractionnaires conservent l'effet mémoire, ce qui signifie qu'elles prennent en compte l'histoire des données passées dans le comportement actuel du système. Cette capacité est cruciale dans de nombreux domaines tels que la physique, la biologie, la finance et l'ingénierie, où les systèmes exhibent souvent des comportements non stationnaires et des dépendances à long terme.

En plus de leur capacité à capturer l'effet mémoire, les dérivées fractionnaires offrent une flexibilité remarquable pour modéliser une grande variété de phénomènes. Elles permettent d'aborder des problèmes impliquant des fractales, des processus stochastiques, des mouvements browniens fractionnaires, des systèmes dynamiques

chaotiques, entre autres. Leur utilisation s'étend également à des domaines tels que le traitement du signal, le contrôle de systèmes, la théorie des circuits électriques, et bien d'autres encore.

En outre, les dérivées fractionnaires conformes représentent une avancée significative dans le domaine de la modélisation des systèmes dynamiques. Contrairement aux dérivées fractionnaires classiques telles que les dérivées de Riemann-Liouville et de Caputo, les dérivées fractionnaires conformes sont conçues pour répondre à des critères spécifiques de stabilité, de causalité et d'interprétation physique.

Les outils de dérivation fractionnaire conforme, offrent des avantages mathématiques significatifs, notamment dans la résolution d'équations différentielles non linéaires, l'analyse de fonctions spéciales et la théorie de l'intégration. Ils fournissent également des techniques analytiques et numériques pour étudier la stabilité, la convergence et les propriétés de régularité des solutions.

Une caractéristique importante des dérivées fractionnaires conformes est leur capacité à conserver l'effet mémoire tout en garantissant la stabilité et la causalité du système. Cela signifie qu'elles sont capables de capturer l'histoire des données passées tout en maintenant la cohérence temporelle et la capacité de prédire le comportement futur du système. Cette propriété est essentielle pour de nombreuses applications où une compréhension précise de l'évolution temporelle est nécessaire.

De plus, les dérivées fractionnaires conformes offrent une interprétation physique claire, ce qui les rend particulièrement attrayantes dans des domaines tels que la physique, la biologie et l'ingénierie. Leurs propriétés mathématiques bien définies permettent une modélisation précise des phénomènes dynamiques complexes.

En outre, les dérivées fractionnaires conformes présentent des avantages en termes de stabilité numérique et de convergence dans les méthodes de résolution. Leur formulation mathématique rigoureuse, basée sur la théorie des intégrales complexes et des fonctions spéciales, en fait un outil puissant pour la modélisation et l'analyse des systèmes dynamiques complexes.

En résumé, les dérivées fractionnaires conformes, constituent des outils précieux pour modéliser et analyser une grande variété de phénomènes complexes. Elles offrent une approche améliorée pour la modélisation des systèmes dynamiques, en combinant stabilité, causalité, interprétation physique et précision mathématique. Leur utilisation continue de croître dans de nombreux domaines scientifiques et techniques, offrant de nouvelles perspectives et des solutions innovantes pour aborder des problèmes difficiles.

Après avoir discuté des dérivées fractionnaires, en particulier des dérivées fractionnaires conformes, et de leur utilité en tant qu'outils de modélisation, notamment pour les systèmes dynamiques complexes, on abordera un modèle biologique surprenant de la nature connu sous le nom du modèle Brusselator [14]. Nous utiliserons ce modèle pour effectuer une modélisation asymptotique basée sur les dérivées fractionnaires conformes.

La nature, une source inépuisable d'inspiration pour les scientifiques, révèle souvent sa complexité la plus profonde dans le domaine biologique. Les phénomènes biologiques offrent une exposition fascinante de comportements dynamiques et parfois imprévisibles. Parmi les exemples les plus remarquables de cette complexité se trouve le modèle Brusselator [14], qui est issu du système Belousov-Zhabotinsky (BZ) [4], [16], [25].

Le modèle Brusselator [14], un outil mathématique élégant et puissant, joue un rôle central dans la compréhension des phénomènes oscillatoires et des comportements dynamiques observés dans divers domaines scientifiques. Initialement développé pour modéliser les variations chimiques dans le système Belousov-Zhabotinsky (BZ), il a rapidement élargi son champ d'application. Sa polyvalence et son utilité en font un instrument de choix pour explorer une variété de phénomènes complexes, trouvant des applications significatives dans des domaines divers tels que la biologie, y compris la croissance des plantes, la formation des nuages et la propagation des maladies [1] [2] [15].

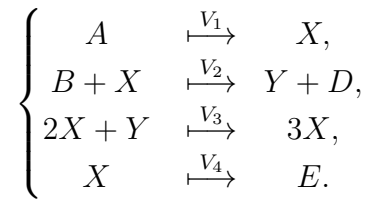
En raison de l'importance du modèle Brusselator, de nombreux mathématiciens l'étudient de manière exhaustive sous des perspectives analytiques et numériques.

Parmi les chercheurs qui ont développé des méthodes avancées, on trouve certaines contributions remarquables dans des articles qui ont ouvert la voie à des simulations numériques précises du comportement du Brusselator dans diverses conditions, telles que "Numerical Simulation of the Brusselator Model" de Wang et al [?] et "Efficient Numerical Methods for the Brusselator Model" de Zhang et al [28]. Ces avancées ont permis la prédiction précise des réponses du système à différentes configurations et paramètres.

D'un point de vue analytique, les chercheurs ont examiné la stabilité du Brusselator, posant ainsi les bases de notre compréhension des comportements oscillatoires du système. L'article "Stability Analysis of the Brusselator Model" de Thomas et Glansdorff [10] est un exemple notable de ces contributions. De plus, des études sur la dynamique du système, telles que "Dynamical Behavior of the Brusselator

Model" de Cross et Rasmussen, ont permis une exploration détaillée des régimes d'oscillation du Brusselator [27].

Le modèle Brusselator est caractérisé par les types de réactions chimiques suivants :



Le système Brusselator implique deux réactifs, notés A et B , qui interagissent entre eux pour produire les produits chimiques X et Y . Les paramètres V_1 et V_2 représentent les constantes de vitesse associées aux réactions impliquant les réactifs A et B , respectivement. Ces constantes de vitesse déterminent la vitesse à laquelle les réactifs sont convertis en produits. Les paramètres V_3 et V_4 sont également des constantes de vitesse, mais ils sont associés aux réactions impliquant les produits chimiques X et Y , respectivement. Donner par ses équations différentielles,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} [X] = V_1 [A] - V_2 [B] [X] + V_3 [X]^2 [Y] - V_4 [X], \\ \frac{d}{dt} [Y] = V_2 [B] [X] - V_3 [X]^2 [Y], \\ [X] (0) = [Y] (0) = 0, \end{array} \right.$$

le modèle permet de représenter les fluctuations de concentration chimique au fil du temps. Son utilité dépasse de loin la chimie, fournissant un cadre mathématique pour modéliser et comprendre des phénomènes biologiques complexes. Par conséquent, les chercheurs peuvent analyser les mécanismes sous-jacents des comportements oscillatoires, prédire leur évolution et éventuellement intervenir pour mieux comprendre et influencer les processus biologiques.

Tout à fait, le modèle Brusselator est fascinant car il offre une explication du vivant et permet de modéliser une variété de phénomènes en chimie et en biologie. Notre objectif est d'étudier le comportement et l'évolution des deux composantes X et Y au fil du temps.

Le deuxième chapitre de notre étude se concentre sur l'utilisation de vitesses constantes V_i , pour modéliser le système Brusselator. Cependant, cette approche présente des limitations importantes. En effet, l'utilisation de vitesses constantes

dans les réactions chimiques est une simplification qui s'éloigne de la réalité. Les vitesses réelles des réactions chimiques fluctuent en raison de divers facteurs, tels que les variations de température, la concentration des réactifs et l'influence des catalyseurs. Cette simplification peut ne pas capturer les nuances et les variations subtiles du comportement du système dans des conditions réelles.

Pour cela, on a consacré Le troisième chapitre à l'étude du système, on'utilisant des vitesses variables $V_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$ pour modéliser le système Brusselator. Cette approche est justifiée par plusieurs points importants.

En utilisant des vitesses variables $V_i(t)$, on se rapproche davantage de la réalité en tenant compte des variations naturelles des vitesses chimiques. Cela permet d'obtenir une modélisation plus précise du système et de mieux comprendre son comportement réel.

En revanche, l'utilisation des vitesses constantes ne permet pas de capturer les petits sauts qui peuvent se produire dans le système. Ces petits sauts peuvent être importants pour comprendre le comportement global du système, en particulier lorsqu'ils s'accumulent sur de longues périodes.

De plus, en considérant les vitesses chimiques comme des entités variables, on reconnaît leur comportement quantique et leur instabilité intrinsèque. Cela permet d'explorer des aspects plus profonds du système qui ne peuvent être capturés avec des vitesses constantes.

En conclusion, le choix d'utiliser des vitesses variables dans le troisième chapitre est pertinent et permet d'obtenir une modélisation plus précise et plus réaliste du système Brusselator. Cette approche permet de capturer les petits sauts et les fluctuations naturelles des vitesses chimiques, ce qui est crucial pour comprendre le comportement réel du système. De plus, elle ouvre la voie à l'exploration des aspects quantiques du système, qui ne peuvent être étudiés avec des vitesses constantes.

Oui, en effet, le modèle mathématique classique du Brusselator présente des inconvénients, notamment en termes de stabilité numérique lors de la simulation. C'est pourquoi nous explorons une approche alternative en utilisant la dérivée fractionnaire conforme de Caputo-Fabrizio. Cette approche pourrait nous permettre de surmonter les limitations rencontrées avec le modèle classique et d'obtenir des résultats plus précis et stables, notamment lors de simulations numériques.

Nous appliquons l'outil de dérivation fractionnaire conforme de Caputo-Fabrizio au modèle Brusselator. Après avoir modélisé asymptotiquement ce problème d'évolu-

tion, nous obtenons ainsi une équation intégrale non linéaire de Volterra avec second membre. Cependant, son noyau est une fonctionnelle de X , et cette fonctionnelle est un opérateur de Volterra qui contient un noyau à l'intérieure. Grâce à cette trouvaille, nous tournons notre attention vers l'équation de Volterra non linéaire du second ordre.

Depuis un siècle, le domaine des mathématiques numériques s'est grandement intéressé à l'étude des équations intégrales. Dans cette thèse, nous allons examiner à la fois sur le plan analytique et numérique les équations intégrales de Volterra. Plus précisément, nous aborderons les équations non linéaires de Volterra avec second membre, définies par la relation suivante :

$$u(x) = f(x) + \int_0^t K(x, t, u(t)) dt, \quad \forall t \in [a, b].$$

Dans cette équation intégrale, K représente le noyau, f est une fonction continue de x , et u est une fonction inconnue à déterminer.

Les équations intégrales de Volterra du deuxième type sont résolues en utilisant le processus d'approximations successives de Picard, également appelé méthode d'itération de Picard. Cette méthode fournit un schéma utilisé pour résoudre des problèmes à valeur initiale ou des équations intégrales. Dans cette approche, nous commençons par remplacer la fonction inconnue u sous le signe intégral de l'équation de Volterra par une fonction continue à valeurs réelles sélectionnée u_0 . Cette substitution nous permet d'obtenir l'approximation u_1 , ainsi de suite, nous continuons le processus en utilisant l'approximation obtenue à l'étape précédente pour calculer la prochaine approximation jusqu'à u_n .

L'utilisation d'une étude à pas constant sur de petits intervalles représente une stratégie judicieuse pour surmonter les limitations associées à la méthode de Lipschitz locale. Cette approche présente plusieurs avantages significatifs. Tout d'abord, elle améliore la stabilité de la méthode, garantissant ainsi que les solutions convergent de manière fiable vers les résultats attendus. De plus, en utilisant des intervalles plus petits, nous pouvons obtenir une précision accrue dans les résultats, ce qui nous permet d'obtenir des solutions plus proches de la réalité.

Le choix de la Lipschitzité locale reste logique car elle offre une mesure de la régularité des fonctions dans un voisinage de chaque point, ce qui est essentiel pour garantir l'unicité et la stabilité des solutions. En combinant cette méthode avec une étude à pas constant sur de petits intervalles, nous avons un meilleur contrôle sur

les approximations et une réduction des erreurs accumulées, ce qui est essentiel pour obtenir des résultats précis et fiables.

Une fois que l'existence et l'unicité de la solution ont été établies, on peut passer à la phase de simulation numérique en utilisant la méthode de Nyström. Cette méthode constitue un outil puissant pour résoudre numériquement les équations intégrales, en particulier lorsque le noyau de l'équation est régulier. La méthode de Nyström consiste à approximer l'intégrale continue par une somme pondérée des valeurs de la fonction à des points spécifiques, généralement choisis judicieusement sur le domaine d'intégration. En appliquant cette méthode à notre équation intégrale de Volterra, on peut obtenir une solution numérique précise qui reflète fidèlement le comportement du système sous différentes conditions et paramètres. Cette approche permet de visualiser et d'analyser le système dans des situations réalistes, offrant ainsi des informations précieuses sur son évolution temporelle et son comportement dynamique.

Dans notre étude, on a soutenu notre travail en menant des tests numériques approfondis et en utilisant des graphiques pour illustrer les variations observées. On a pris en compte les variables qui surviennent dans la réalité et qui ont un effet direct sur les changements de vitesse ou les facteurs qui facilitent la réaction. Les vitesses réelles des réactions chimiques fluctuent en raison de divers facteurs, tels que les variations de température, la concentration des réactifs et l'influence des catalyseurs. En tenant compte de ces variables, on a pu analyser comment elles influent sur la dynamique du système étudié. Nos tests numériques ont mis en évidence des tendances significatives et des phénomènes intéressants, ce qui nous a permis de mieux comprendre les mécanismes sous-jacents et d'évaluer l'impact de ces variables sur le système dans des situations réalistes.

Les graphiques générés ont joué un rôle crucial en facilitant la visualisation des résultats et en offrant des insights précieux sur les interactions entre les différentes variables et leur effet sur la réaction. Grâce à ces graphiques, on a pu observer visuellement comment les variations des paramètres influent sur le comportement du système, ce qui a enrichi notre compréhension des processus réactionnels étudiés. En intégrant ces éléments dans notre analyse, on a renforcé de manière significative la robustesse de nos conclusions et démontré la validité de notre approche dans la modélisation et la compréhension des processus réactionnels complexes. Les données visuelles fournies par les graphiques ont ainsi complété et consolidé nos résultats, renforçant la fiabilité de notre étude et la pertinence de nos conclusions.

Notre thèse se compose de trois chapitres distincts, chacun explorant un aspect spécifique de notre recherche. Le premier chapitre joue un rôle crucial en établissant

un fondement théorique essentiel, en fournissant une synthèse des outils mathématiques fondamentaux nécessaires à une compréhension approfondie des phénomènes étudiés. Ce chapitre met en lumière les dérivées fractionnaires classiques et conformes, le modèle Brusselator, les équations intégrales de Volterra du deuxième type et la méthode de Nyström. En combinant ces concepts, il établit les bases théoriques indispensables à l'analyse et à la modélisation de systèmes complexes. Ensemble, ces outils forment une base solide pour l'étude et la résolution de problèmes complexes, jetant ainsi les fondations théoriques nécessaires à la recherche entreprise dans les chapitres suivants.

Le deuxième chapitre de notre thèse se concentre sur la modélisation fractionnaire conforme du phénomène de Brusselator des vitesses chimiques constantes, en adoptant une approche qui combine à la fois des analyses analytiques et numériques. Nous débutons par une révision du système Brusselator, où une dérivation fractionnaire conforme est employée pour reformuler le système classique, offrant ainsi une perspective adaptée à notre étude. Cette reformulation conduit à l'obtention d'une équation non linéaire de type Volterra, marquant une avancée significative dans notre modélisation. Nous démontrons ensuite l'existence et l'unicité de la solution de cette équation reformulée, renforçant ainsi la validité de notre approche. Par la suite, nous développons une méthode d'approximation numérique en utilisant la méthode de Nyström, ce qui nous permet d'obtenir une solution numérique précise et efficace. Enfin, nous illustrons le comportement du système à l'aide de simulations numériques, offrant ainsi des insights supplémentaires sur son dynamisme et son évolution.

Dans le troisième chapitre, nous étendons l'étude entreprise dans le chapitre précédent en incluant des vitesses chimiques variables. Nous revisitons le système Brusselator en tenant compte de ces variations des vitesses de réaction chimique. Une équation non linéaire de type Volterra est dérivée dans ce contexte, et nous démontrons à nouveau l'existence et l'unicité de la solution. Nous développons également une méthode d'approximation numérique adaptée à cette extension du modèle, toujours en utilisant la méthode de Nyström. Enfin, nous réalisons une simulation numérique pour analyser l'impact des vitesses chimiques variables sur le comportement du système.

Les points forts de notre étude résident dans son approche innovante, faisant usage de dérivées fractionnaires conformes pour modéliser le système Brusselator, ainsi que dans la combinaison d'analyses analytiques et numériques, offrant ainsi une compréhension complète du système. De plus, le développement de méthodes d'approximation numériques efficaces et les simulations numériques réalisées permettent d'illustrer de manière approfondie le comportement du système et l'impact

des vitesses chimiques variables.

En conclusion, notre étude présente une analyse approfondie du système Brusselator en utilisant des dérivées fractionnaires conformes et en intégrant à la fois des vitesses chimiques constantes et variables. Cette approche ouvre la voie à de futures recherches sur des modèles encore plus complexes dans ce domaine.

CHAPITRE 2

PRÉLIMINAIRES ET OUTILS

Dans ce premier chapitre, on présente un ensemble d'outils mathématiques essentiels, pour aborder les problèmes de modélisation et d'analyse des systèmes dynamiques. On commence par introduire les équations différentielles fractionnaires (EDF), qui sont des outils fondamentaux pour décrire l'évolution des systèmes dans le temps. Ensuite, on explore les équations intégrales non linéaires de Volterra, qui permettent de modéliser des phénomènes avec une dépendance non seulement sur les valeurs instantanées, mais aussi sur l'histoire passée du système. On discute également des méthodes numériques pour résoudre ces équations, telles que la méthode d'approximation de Nystrom pour les équations intégrales. Enfin, on aborde les notions de stabilité et de convergence, qui sont cruciales pour évaluer la performance des solutions obtenues à partir de ces outils mathématiques. Bien sûr, on examine également le modèle Brusselator dans ce contexte. En résumé, ce premier chapitre fournit une base solide de connaissances mathématiques nécessaires pour la modélisation et l'analyse des systèmes dynamiques.

1 Dérivée Fractionnaires

La théorie de la dérivation fractionnaire a revêtu une importance considérable dans la recherche mathématique au cours des dernières décennies. La définition de la dérivée fractionnaire, est une dérivée d'ordre α étend le concept traditionnel de dérivée d'ordre entier n . Elle est caractérisée par l'opérateur différentiel fractionnaire D^α , où α est un nombre réel positif. On restreint notre étude à $\alpha \in]0, 1[$ car notre question concerne spécifiquement la vitesse.

Cependant, elles ne possèdent pas de forme standard clairement définie, c'est-à-dire

qu'elles ne sont pas toutes équivalentes. Elle peut être divisée en deux catégories principales : la dérivation fractionnaire non conforme et la dérivation fractionnaire conforme.

La dérivation fractionnaire non conforme englobe des définitions telles que celles de Riemann-Liouville et de Caputo [24], qui sont parmi les plus couramment utilisées. Ces définitions ne garantissent pas toujours la continuité des opérateurs de dérivation. Cette non-continuité peut poser des problèmes pour l'analyse et la résolution d'équations différentielles fractionnaires. Notamment difficultés d'analyse et problèmes de convergence. Ainsi, leurs noyaux peuvent présenter des singularités, rendant parfois leur utilisation moins intuitive.

D'autre part, la dérivation fractionnaire conforme représente une approche alternative où les opérateurs de dérivation sont choisis de manière à maintenir certaines propriétés souhaitables, telles que la continuité et la régularité des noyaux. Les définitions de dérivées fractionnaires conformes sont assez variées. On peut citer en particulier celles proposées par Khalil et al. [12] [17] [11].

Les dérivées fractionnaires conformes visent à fournir une base plus rigoureuse pour la modélisation des systèmes dynamiques, en assurant une meilleure cohérence mathématique et une interprétation physique plus claire.

Cependant, malgré les défis rencontrés dans l'utilisation de cette théorie, la théorie de la dérivation fractionnaire, avec ses différentes approches, continue de jouer un rôle essentiel dans la modélisation et l'analyse de phénomènes complexes dans divers domaines scientifiques et d'ingénierie.

1.1 Dérivée Fractionnaires Classiques non Conforme

Pour parvenir à une décision éclairée sur le choix de la dérivée fractionnaire comme outil de modélisation pour notre problème, on doit entreprendre une évaluation critique de plusieurs dérivées, en tenant compte de notre modèle qui vise à étudier (Le Brusselator) [20]. On commencera par examiner les plus célèbres parmi elles, en analysant leur pertinence et leur adéquation à notre contexte spécifique. Ce processus nous permettra de déterminer quelle dérivée fractionnaire est la plus appropriée pour représenter efficacement les aspects dynamiques de notre système. En particulier, les dérivées de Riemann-Liouville et de Caputo se distinguent comme des dérivées fractionnaires classiques les plus connues. Elles sont définies de la manière suivante :

Définition 1. Riemann-Liouville [24]

Pour tout $f \in C^0 [a, b]$, $\forall x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ et $0 < \alpha < 1$,

$$D_{RL}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x - t)^{-\alpha} f(t) dt.$$

Où la fonction Euler gamma Γ , est une fonction spéciale dans la théorie du calcul fractionnaire. définie par,
 $\forall \alpha \in]0, 1[$,

$$\Gamma(1 - \alpha) = \int_0^{+\infty} t^{-\alpha} e^{-t} dt,$$

Bien que la dérivée de Riemann-Liouville offre de nombreux avantages, elle présente des limitations lorsqu'il s'agit de modéliser des phénomènes du monde réel. En particulier, la dérivée d'une constante selon la définition de Riemann-Liouville n'est pas nulle. Cela peut sembler contre-intuitif dans un contexte physique où la dérivée d'une constante conventionnelle est toujours nulle. Ainsi, la dérivée de Riemann-Liouville donne pour une constante C [24] ,

$$D_{RL}^\alpha C = C \frac{(t - a)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}$$

De plus, le noyau associé à cet opérateur de dérivation porte une singularité, ce qui complique l'analyse et la résolution de certains problèmes. Ainsi, cette dérivée ne satisfait pas toujours les propriétés mathématiquement souhaitables, notamment la commutativité [24]. Ces limitations peuvent rendre son utilisation plus complexe dans certains contextes.

Définition 2. Caputo [24]

Pour tout $f \in C^1 [a, b]$, $\forall x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ et $0 < \alpha < 1$,

$$D_C^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{-\alpha} f'(t) dt.$$

En particulier, lorsque $0 < \alpha < 1$, on a,

$$(D_C^\alpha f)(x) = (D_{RL}^\alpha f)(x) - \frac{f(a)}{\Gamma(1 - \alpha)} (x - a)^{-\alpha}$$

La dérivée de Caputo est similaire à la dérivée précédente de Riemann-Liouville en ce sens qu'elles présentent des propriétés de linéarité similaires, facilitant ainsi leur manipulation dans les calculs. Cependant, leur commutativité est limitée à certains cas spécifiques, ce qui peut compliquer l'analyse dans certains contextes.

D'autre part, la dérivée de Caputo est conforme à des conditions plus élevées, c'est-à-dire $f \in C^2$ (théorème ci dessous). Cela signifie qu'elle peut être utilisée dans des contextes où des conditions plus strictes sont nécessaires.

Théorème 1. *Pour tout $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ et $0 < \alpha < 1$, la dérivée fractionnaire de Caputo est conforme, c'est-à-dire $\lim_{\alpha \rightarrow 1} D_C^\alpha f(x) = f'(x)$, si et seulement si $f \in C^2[a, b]$, lorsque α tend vers 1.*

Démonstration. Pour tout $f \in C^2[a, b]$, $\forall x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ et $0 < \alpha < 1$,

$$D_C^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f'(t) dt,$$

par intégration par partie on obtient,

$$D_C^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\{ \left[-(x-t)^{1-\alpha} f'(t) \right]_a^x + \int_a^x (x-t)^{1-\alpha} f''(t) dt \right\},$$

ce qui donne,

$$D_C^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\{ (x-a)^{1-\alpha} f'(a) + \int_a^x (x-t)^{1-\alpha} f''(t) dt \right\},$$

et quand α tend vers 1, on obtient,

$$D_C^\alpha f(x) = f'(a) + \int_a^x f''(t) dt,$$

et on résulte,

$$D_C^\alpha f(x) = f'(x).$$

Ce qui achève la preuve du théorème. □

Face à ces limitations, des chercheurs ont exploré des alternatives telles que les dérivées fractionnaires conformes. Ces dérivées offrent une approche améliorée pour modéliser les systèmes dynamiques en atténuant les difficultés rencontrées avec les dérivées classiques. Les dérivées fractionnaires conformes sont caractérisées par des noyaux réguliers et des propriétés mathématiques mieux définies, ce qui facilite leur manipulation et leur interprétation.

1.2 Dérivées Fractionnaires Conformes

Les dérivées fractionnaires conformes gagnent en popularité dans divers domaines de recherche, notamment en physique, en biologie, en ingénierie et en finance. Elles permettent de mieux saisir les phénomènes complexes, d'améliorer la précision des modèles et de mieux comprendre les mécanismes sous-jacents à divers phénomènes dynamiques.

Contrairement aux dérivées fractionnaires classiques non conformes telles que les dérivées de Riemann-Liouville et de Caputo, les dérivées fractionnaires conformes sont caractérisées par des noyaux réguliers et des propriétés mathématiques mieux définies. Leur définition repose sur la théorie des intégrales complexes et les fonctions spéciales, offrant ainsi une approche plus cohérente et rigoureuse pour modéliser les systèmes dynamiques complexes, telles que notre modèle qui s'appelle le Brusselator. Cette dérivée définie par,

Pour tout $f \in C^1 [a, b]$ et $0 < \alpha < 1$,

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} D^\alpha f(x) &= f(x), \\ \lim_{\alpha \rightarrow 1} D^\alpha f(x) &= f'(x), \end{aligned}$$

nous permet une modélisation asymptotique des problèmes d'évolutions, plus une interprétation physique plus claire et une meilleure compréhension des phénomènes sous-jacents, ce qui en fait un outil précieux dans divers domaines de recherche, notamment en physique, en biologie et en ingénierie.

les dérivées fractionnaires conformes ont suscité un intérêt croissant parmi les chercheurs. Conduisant à de nombreuses études et applications novatrices dans différents domaines scientifiques et technologiques. La contribution majeure de Khalil [12] a ainsi jeté les bases d'un nouveau domaine de recherche dynamique et en pleine expansion, depuis son introduction en 2014, à travers cette définition et le théorème suivant :

Définition 3. [12] Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Pour tout $t \in \mathbb{R}$. Soit $0 < \alpha < 1$.

$$D_{Kh}^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t + ht^{1-\alpha}) - f(t)}{h}.$$

Théorème 2. [12]

$$\forall f \in C^1, \lim_{\alpha \rightarrow 0} f^\alpha(t) = tf(t).$$

Cependant, ce résultat est moins naturelle, car l'apparition du t la rend illogique, ainsi qu'elle n'est pas pertinente pour notre étude, car elle se concentre sur des aspects locaux, tandis que notre sujet de recherche nécessite une prise en compte de l'effet de mémoire.

En 2016, Hamza Guebbai et Mourad Ghat [11], ont proposé une nouvelle définition plus conforme par rapport à celle de Khalil et al, comme suit,

Définition 4. [11] Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction croissante et positive, (c'est-à-dire $f(t) > 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$).

Pour $0 < \alpha < 1$, la dérivée fractionnaire (α -fractionnaire de f en $t \in \mathbb{R}$), notée $D^\alpha f(t)$, est définie par,

$$D^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f\left(t + hf(t)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right) - f(t)}{h} \right)^\alpha, \quad h > 0.$$

Le théorème suivant, permet de fournir les propriétés de $D^\alpha f(t)$, selon [11],

Théorème 3. [11] Soit $0 < \alpha \leq 1$ et $f; g$ des fonctions positives, croissantes et α -différentiables à $t \in \mathbb{R}$, on a,

1. $D^\alpha(af) = aD^\alpha(f)$, pour tout $a > 0$.

2. $D^\alpha(f + g) = \frac{(f+g)^{\frac{1}{\alpha}}}{(1-\alpha)^\alpha} \left((D^\alpha f)^{\alpha-1} + \frac{(f+g)}{(g)^{\frac{1}{\alpha}}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} (D^\alpha g)^{\frac{1}{\alpha}}$.

3. $D^\alpha(t^n) = n^\alpha t^{n-\alpha}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ si n est pair ou pour $t \geq 0$.

4. $D^\alpha(a) = 0$, pour tout $a \geq 0$.
5. $D^\alpha(fg)(t) = [f(t)^{\alpha-1}(D^\alpha g(t))^\alpha + g(t)^{\alpha-1}(D^\alpha f(t))^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}}$.
6. Si $\beta < \alpha$, alors f est β -différentiable en t et $D^\beta f(t) = f(t)^{1-\frac{\alpha}{\beta}}(D^\alpha f(t))^{\frac{\alpha}{\beta}}$.
En particulier, si f est différentiable, alors,
 $D^\alpha f(t) = f(t)^{1-\alpha} f'(t)^\alpha$.

En revanche, la dérivée fractionnaire de Guebbai-Ghiat est plus appropriée pour capturer l'effet mémoire. Toutefois, son adaptation à notre sujet pose des défis, notamment la nécessité que la fonction soit croissante et positive.

Donc ces deux approches ne conviennent pas à notre étude, qui porte principalement sur la non localité et l'effet mémoire, ainsi que sur l'importance des propriétés physiques indispensables.

En 2015, la découverte de la dérivée fractionnaire conforme de Caputo-Fabrizio a été un développement crucial qui s'est avéré être une solution adéquate pour améliorer la modélisation de notre problème. Cette méthode spécifique nous convient et nous permet de mieux représenter les phénomènes que nous étudions, car l'intégral représente bien l'effet mémoire. Cette dérivée est définie par la formule suivante :

Définition 5. Soit $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, pour $0 < \alpha \leq 1$.

$$D_{CF}^\alpha f(x) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^x f'(t) \exp\left(-\frac{\alpha(x-t)}{1-\alpha}\right) dt.$$

Avec,

$$M(\alpha) = 1, \quad \text{si } \alpha \in \{0, 1\}.$$

L'introduction de la fonction de normalisation $M(\alpha)$ a considérablement amélioré la flexibilité et la précision des dérivées fractionnaires conformes, élargissant leur utilisation dans divers domaines scientifiques et techniques. Elles jouent ainsi un rôle essentiel dans la cohérence et l'application des dérivées fractionnaires conformes aux exigences des systèmes dynamiques étudiés.

Ainsi, notre choix de sélectionner la dérivée fractionnaire conforme de Caputo-Fabrizio est motivé par sa pertinence physique. Elle satisfait l'approximation asymptotique de la dérivée, c'est-à-dire,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} D^\alpha f(x) = f'(x)$$

,
ce qui permet de capturer efficacement la non-localité et l'évolution en temps réel des phénomènes.

Enfin, Cette dérivée présente un effet de mémoire, ce qui signifie qu'elle intègre l'historique des données dans le comportement du système, et respecte la cosalité. De plus, la propriété selon laquelle la dérivée d'une constante est égale à zéro est essentielle, offrant une représentation plus réaliste des processus dynamiques. En outre, la présence d'un noyau non singulier confère une stabilité supplémentaire au système étudié, renforçant ainsi la robustesse de notre approche.

L'introduction de la dérivée fractionnaire de Caputo-Fabrizio a apporté une contribution significative à la théorie des dérivées fractionnaires. Sa capacité à imposer des conditions initiales standard et sa simplicité d'utilisation, en font un outil précieux pour modéliser et analyser des phénomènes complexes dans divers domaines scientifiques et d'ingénierie.

Cependant, l'utilisation de la formule d'intégration fractionnaire développée par Moumen Bekouche [19], à savoir,

$$\forall x \in [a, b], \quad \forall f \in C^1[a, b], \quad D_{CF}^\alpha f(x) = F(x, f(x)),$$

est équivalent à,

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) = \left(\frac{\alpha}{M(\alpha)} \right) \int_a^x F(t; f(t)) dt + \frac{1 - \alpha}{M(\alpha)} F(x, f(x)).$$

confère une puissance et une utilité considérable à la dérivée fractionnaire de Caputo-Fabrizio. Cela permet de passer d'un espace restreint C^1 à un espace plus large C^0 .

En conclusion, bien que les dérivées fractionnaires classiques aient été largement utilisées et étudiées, les dérivées fractionnaires conformes offrent une alternative prometteuse avec des propriétés mathématiques mieux définies et une plus grande applicabilité dans divers domaines scientifiques et d'ingénierie.

2 Modèle Brusselator

La chimie cinétique, en tant que discipline fondamentale de la chimie, se penche sur l'analyse minutieuse de la vitesse des réactions chimiques et des mécanismes qui les régissent. Elle explore en profondeur les divers facteurs influant sur cette vitesse, tels que la température, la concentration des réactifs, la présence de catalyseurs et la surface de contact entre les réactifs. La vitesse de réaction, qui représente le changement de concentration des réactifs ou des produits par rapport au temps, constitue un concept central dans cette étude. En outre, l'ordre de réaction, déterminant la manière dont la concentration des réactifs affecte la vitesse de la réaction, offre une perspective approfondie sur les interactions moléculaires en jeu. Les mécanismes de réaction, quant à eux, décrivent les différentes étapes du processus réactionnel, tandis que les équations de vitesse fournissent une formalisation mathématique de la relation entre la vitesse et les concentrations. Cette compréhension approfondie de la chimie cinétique est cruciale pour prédire et modéliser les réactions chimiques dans divers domaines scientifiques, de la biologie à l'industrie des matériaux, où elle contribue à l'optimisation et à la conception de processus chimiques industriels.

Nos travaux de recherche doctorale se focalisent sur une analyse approfondie du modèle Brusselator [14], un outil d'investigation approfondie en chimie cinétique non linéaire. Offre une perspective plus approfondie lorsqu'on le considère à travers la lentille de la concentration. En délaissant la représentation bidimensionnelle conventionnelle, cette approche permet d'appréhender l'influence directe de la quantité des espèces chimiques sur les réactions en jeu. En analysant la dynamique du système Brusselator en fonction de la concentration, on peut explorer les comportements oscillatoires, étudier la stabilité du système et appréhender les nuances de la cinétique non linéaire. Cette approche offre ainsi une vision plus riche et plus précise de la chimie cinétique, en permettant de comprendre en détail les mécanismes sous-jacents aux phénomènes observés et en ouvrant la voie à l'étude de comportements plus complexes.

Le modèle Brusselator, par sa simplicité élégante, permet de démystifier les mécanismes réactionnels complexes sous-jacents aux oscillations du système BZ. En réduisant un réseau réactionnel dense à deux réactions autocatalytiques élémentaires, il offre une plateforme idéale pour explorer les concepts fondamentaux de la chimie cinétique, tels que l'ordre de réaction, les points d'équilibre et la stabilité dynamique.

Conçu par le célèbre physicien et chimiste belge, Ilya Prigogine dans les années 1960. À l'origine développé pour étudier les fluctuations chimiques dans le système Belousov-Zhabotinsky (BZ) [4], [16], [25], le Brusselator s'est rapidement révélé être un instrument précieux pour modéliser les oscillations et les dynamiques observées

dans une multitude de systèmes réactionnels complexes. Mon objectif principal est d'enrichir notre compréhension de ce modèle en examinant ses implications théoriques et en développant des méthodes numériques avancées pour simuler son comportement cinétique. Cette approche promet d'apporter de nouvelles perspectives sur les mécanismes sous-jacents des réactions chimiques, ouvrant ainsi la voie à de nouvelles applications potentielles dans divers domaines scientifiques et d'ingénierie.

La sophistication mathématique et l'élégance du modèle Brusselator en font un pilier essentiel dans la compréhension des phénomènes oscillatoires et des comportements dynamiques observés dans différents domaines scientifiques. Initialement développé pour modéliser les variations chimiques dans le système Belousov-Zhabotinsky, le Brusselator a rapidement élargi son champ d'application. Sa polyvalence en fait un choix privilégié pour explorer des phénomènes complexes, trouvant des applications significatives dans des domaines aussi variés que la biologie, la météorologie et la santé publique [1] [2] [15].

L'origine de la vie constitue l'un des domaines les plus intrigants de la biologie, et le modèle Brusselator apporte des éclairages précieux sur cette question en examinant comment les premières formes de vie ont pu émerger de la matière inerte. En simulant les réactions chimiques et les processus dynamiques qui pourraient avoir eu lieu sur la Terre primitive.

Le modèle Brusselator se révèle comme un outil fondamental dans l'étude de la diversité biologique, fournissant un cadre théorique robuste pour analyser les mécanismes sous-jacents à l'évolution de la vie. En examinant des questions cruciales telles que l'origine de la vie, l'évolution des formes et des fonctions, il offre une approche distincte pour appréhender les processus complexes qui ont façonné la biodiversité que nous observons aujourd'hui. En effet, le Brusselator permet d'explorer une variété d'hypothèses concernant les conditions et les mécanismes ayant potentiellement conduit à l'apparition de la vie.

La stabilité en mode Turing du modèle Brusselator dans l'espace en deux dimensions est représentée ci dessous. Chaque courbe de stabilité colorée représente un mode spécifique. (Voir Figure 1.)

Parallèlement, le modèle Brusselator ouvre des perspectives uniques sur l'évolution des formes et des fonctions des organismes vivants. En analysant les interactions complexes entre les réactifs et les produits au sein d'un système biologique, il permet de mieux comprendre comment les différentes espèces se sont diversifiées au fil du temps, ainsi que les processus qui ont engendré l'émergence de nouvelles structures et de nouvelles fonctions biologiques.

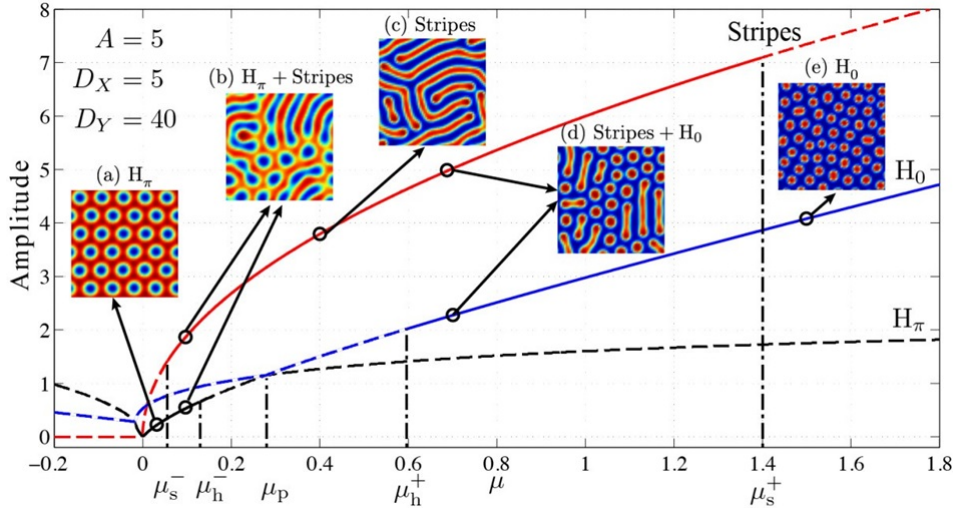
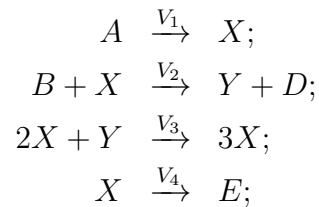


FIGURE 2.1 – Évolution des Motifs : Brusselator version de Turing.

Nos travaux de recherche dans cette thèse, se concentrent sur une analyse approfondie du modèle Brusselator, un outil puissant d'étude en chimie cinétique non linéaire. En adoptant une perspective centrée sur la concentration, cette approche va au-delà de la représentation bidimensionnelle habituelle, permettant ainsi de mieux comprendre l'impact direct de la quantité des espèces chimiques sur les réactions impliquées.

Le schéma réactionnel du modèle Brusselator est caractérisé par un ensemble de réactions chimiques, à savoir,



Dans ce schéma, deux réactifs, A et B, interagissent pour produire les produits chimiques X et Y. Les constantes (V_1) , (V_2) , (V_3) , et (V_4) représentent les vitesses de réaction associées aux différentes étapes du processus. Les équations différentielles

associées au modèle permettent de suivre l'évolution des concentrations de X et Y au fil du temps, offrant ainsi un aperçu détaillé de la cinétique temporelle du système.

Tandis que les équations de vitesse fournissent une formalisation mathématique de la relation entre la vitesse et les concentrations qui se caractérise par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} [X] = V_1 [A] - V_2 [B] [X] + V_3 [X]^2 [Y] - V_4 [X], \\ \frac{d}{dt} [Y] = V_2 [B] [X] - V_3 [X]^2 [Y], \\ [X] (0) = [Y] (0) = 0, \end{cases}$$

Le potentiel du modèle Brusselator ne se limite pas à la sphère théorique. Au-delà de son application initiale en chimie, le Brusselator trouve des implications profondes et s'étendent à divers domaines, tels que l'optimisation des processus chimiques, la compréhension des systèmes biologiques et le développement de matériaux intelligents. En tant qu'outil de recherche puissant, il ouvre la voie à des innovations et des découvertes prometteuses dans un large éventail de disciplines.

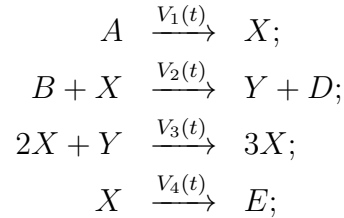
Des chercheurs utilisent ce modèle pour simuler et analyser des phénomènes tels que les oscillations chimiques, les bifurcations, et les états stationnaires. Cette capacité à modéliser des systèmes réels tout en restant mathématiquement gérable en fait un outil de choix.

En conclusion, le Brusselator émerge comme un pilier essentiel dans l'arsenal des outils théoriques en chimie cinétique. Sa simplicité théorique, combinée à sa capacité à capturer l'essence des réseaux de réactions complexes, en fait un choix judicieux pour les chercheurs cherchant à explorer les mécanismes intimes des phénomènes chimiques qui offrent une perspective novatrice sur l'évolution des formes et des fonctions des organismes vivants. Les avancées continues dans la compréhension du Brusselator, promettent de conduire à des applications plus vastes et à une meilleure intégration des théories avec les observations expérimentales, marquant ainsi une étape significative dans le domaine de la chimie cinétique.

Cependant, le Brusselator n'est pas sans limites. Son application est souvent restreinte à des systèmes spécifiques, et il peut ne pas saisir toutes les subtilités des réseaux de réactions réels. Ces limitations, cependant, ouvrent la voie à des améliorations et à des extensions du modèle pour mieux représenter la diversité des phénomènes chimiques et biologiques observés dans la réalité.

Pour cela, nous avons consacré le troisième chapitre à l'étude du système en utilisant des vitesses variables $V_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$ issue du système Brusselator, ce qui

s'écrit,



Cette approche est justifiée par plusieurs points importants. En utilisant des vitesses variables $V_i(t)$, on se rapproche davantage de la réalité en tenant compte des variations naturelles des vitesses chimiques. Cela permet d'obtenir une modélisation plus précise du système et de mieux comprendre son comportement réel. Le modèle chimique sera ainsi représenté par le modèle physique suivant.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} [X] = V_1(t) [A] - V_2(t) [B] [X] + V_3(t) [X]^2 [Y] - V_4(t) [X], \\ \frac{d}{dt} [Y] = V_2(t) [B] [X] - V_3(t) [X]^2 [Y], \\ [X] (0) = [Y] (0) = 0, \end{cases}$$

En revanche, l'utilisation des vitesses constantes ne permet pas de capturer les petits sauts qui peuvent se produire dans le système. Ces petits sauts peuvent être importants pour comprendre le comportement global du système, en particulier lorsqu'ils s'accumulent sur de longues périodes.

De plus, en considérant les vitesses chimiques comme des entités variables, nous reconnaissons leur comportement quantique et leur instabilité intrinsèque. Cela permet d'explorer des aspects plus profonds du système qui ne peuvent être capturés avec des vitesses constantes.

En conclusion, le choix d'utiliser des vitesses variables dans le troisième chapitre est pertinent et permet d'obtenir une modélisation plus précise et plus réaliste du système Brusselator. Cette approche permet de capturer les petits sauts et les fluctuations naturelles des vitesses chimiques, ce qui est crucial pour comprendre le comportement réel du système. De plus, elle ouvre la voie à l'exploration des aspects quantiques du système, qui ne peuvent être étudiés avec des vitesses constantes.

3 Équation non linéaire de Volterra

Dans cette partie, notre objectif est de familiariser le lecteur de cette thèse avec le concept des équations intégrales de Volterra en présentant les différentes formes et classifications qui les caractérisent. On abordera également l'origine et l'utilité de ces équations en exposant brièvement quelques modèles représentatifs d'une classe plus générale. Dans cette démarche, on rappellera de manière systématique le cadre fonctionnel des équations intégrales ainsi que la méthode de résolution des équations de type non linéaire de Volterra.

3.1 Classifications des Équations de Volterra

Les équations intégrales, fondamentales en mathématiques appliquées, ont une histoire riche et diversifiée marquée par les contributions de plusieurs mathématiciens éminents. Jean Fourier, au début du 19^{ème} siècle, a joué un rôle crucial, en introduisant ces équations et en développant les premières techniques pour les analyser. Par la suite, Joseph Liouville a établi des liens profonds entre les équations intégrales et les équations différentielles, soulignant l'importance de résoudre ces dernières, en utilisant des méthodes intégrales. Vers la fin du 19^{ème} siècle, Vito Volterra a apporté des avancées significatives en introduisant la méthode des noyaux itérés pour résoudre les équations intégrales, élargissant ainsi leur applicabilité aux équations intégro-différentielles et aux équations intégrales singulières. Parallèlement, David Hilbert a formalisé l'approche théorique des équations intégrales, jetant les bases de leur étude systématique. Ces contributions collectives ont jeté les bases d'une théorie puissante et ont ouvert la voie à de nombreuses applications dans divers domaines scientifiques.

Les équations intégrales de Volterra, établissent une relation entre une fonction inconnue et son intégrale sur un intervalle donné, permettant de représenter les interactions complexes entre différentes variables au fil du temps.

Ces équations se présentent sous différentes formes. L'une des formulations courantes est celle de l'équation de première espèce,

$$u(x) = \int_a^x K(x, t)u(t)dt, \quad a \leq t \leq x \leq b.$$

Où $u \in C[a, b]$, est la fonction inconnue à valeurs réelles données, qui doit être déterminé. $K : [a, b]^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est le noyau de l'équation à valeurs réelles, et a est la borne inférieure de l'intégrale. Une autre forme fréquente est celle de l'équation

de seconde espèce,

$$u(x) = g(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt, \quad a \leq t \leq x \leq b.$$

Ici, g est une fonction donnée appelée second membre, λ est un paramètre numérique constant, et les autres termes conservent la même signification que dans l'équation de première espèce.

Une équation est dite homogène lorsque le second membre g est nul, ce qui simplifie l'équation à,

$$u(x) = \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt, \quad a \leq t \leq x \leq b.$$

De plus, une équation est dite linéaire si le noyau K est linéaire, ce qui facilite l'analyse et la résolution de l'équation.

L'équation qui nous intéresse est l'équation intégrale non linéaire de Volterra. Cette équation revêt un intérêt particulier en mathématiques en raison de sa complexité et de ses nombreuses applications pratiques. Elle se présente sous la forme générale suivante :

$$u(x) = g(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, u(t))dt, \quad a \leq t \leq x \leq b.$$

Dans cette équation, le noyau K non linéaire, ce qui rend la résolution de l'équation plus complexe que dans le cas des équations intégrales linéaires.

Les équations intégrales de Volterra ont de nombreuses applications pratiques. Elles peuvent modéliser la cinétique chimique en décrivant la vitesse des réactions et l'évolution des concentrations, ou encore les processus de diffusion tels que la dispersion des polluants dans l'environnement. De plus, elles sont utilisées pour représenter la croissance des populations dans les systèmes biologiques, ou pour résoudre des problèmes de contrôle optimal dans les systèmes dynamiques.

En conclusion, les équations intégrales de Volterra constituent un domaine de recherche actif, avec des applications étendues dans de nombreux domaines scientifiques et techniques.

Dans le contexte des équations intégrales de Volterra, il est important de souligner que la classe sur laquelle on travaille n'est pas simplement définie par un noyau, mais plutôt par une fonctionnelle. Cette distinction est cruciale car elle implique que l'on manipule des fonctions de fonctions, ce qui ajoute une complexité supplémentaire à l'analyse et à la résolution de l'équations.

Lorsque l'on explore des concepts tels que la Lipschitzité locale ou d'autres propriétés des équations intégrales de Volterra, il est crucial de prendre en compte la nature fonctionnelle de la classe sous-jacente. Cela nécessite souvent une analyse approfondie de la régularité de cette classe de fonctions.

3.2 Étude analytique

La méthode d'itération de Picard [21], également connue sous le nom de méthode des approximations successives [21], est un outil puissant pour résoudre les équations intégrales de Volterra du deuxième type, qui sont caractérisées par leur nature non linéaire. Cette approche itérative repose sur un processus graduel d'approximation de la fonction inconnue, jusqu'à ce que un niveau de précision satisfaisant soit atteint.

Pour commencer, on choisit une approximation initiale $u_0(x)$ continue sur l'intervalle d'intégration $[a, b]$. Ensuite, on itère le processus en calculant successivement les approximations $u_1(x)$, $u_2(x)$, et ainsi de suite, en utilisant la formule récursive ci dessous [21] [1] [2],

$$u_n(x) = g(x) + \int_a^x K(x, t, u_{n-1}(t))dt \quad a \leq t \leq x \leq b. \quad (3.1)$$

La méthode d'itération de Picard converge sous certaines conditions, notamment la continuité Lipschitzienne du noyau $K(x, t, u)$ par rapport à u dans un voisinage de chaque point (x, t) , ainsi que la bornitude de l'approximation initiale $u_0(x)$ sur $[a, b]$. Ce processus d'approximation est relativement simple. On devrait initialement définir $u_0(x) = g(x)$.

Le théorème suivant permet d'assurer l'existence et l'unicité de la solution,

Théorème 4. *Supposons que les fonctions g et $K(x, t, u)$ sont continues dans $a \leq x \leq b$ et le noyau satisfait une condition de Lipschitz de la forme ,*

$$\begin{aligned} &\exists L > 0, \text{ telle que,} \\ &\| K(x, t, V) - K(x, t, W) \|_{C^0[a,b]} \leq L \| V - W \|_{C^0[a,b]} . \end{aligned}$$

Alors u a une solution unique continue pour tout x fini.

Démonstration. voir [21] □

Théorème 5. *Le théorème suivant, montre de la convergence, si les conditions suivantes sont satisfaites :*

- 1) *La fonction g dans l'équation intégrale est continue sur l'intervalle $a \leq x \leq b$,*
- 2) *Le noyau $K(x, t, u)$ est également continu sur l'intervalle $a \leq t \leq x \leq b$,*

Alors la suite des approximations successives $u_n(x)$ pour $n \geq 0$ converge vers la solution $u(x)$.

Démonstration. voir [21] □

Ce processus se poursuit jusqu'à ce que la différence entre deux approximations successives devienne suffisamment petite, indiquant ainsi que nous avons atteint une solution satisfaisante. Autrement dit, On va fournir des conditions suffisantes vérifiées par K et g , qui nous garantissent l'existence et l'unicité de la solution. Ainsi, à la limite, la solution $u(x)$ est obtenue comme suit,

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$$

Pour améliorer la convergence, une approche d'analyse pas à pas peut être employée. Cette méthode implique la discrétisation de l'intervalle d'intégration en sous-intervalles plus petits et l'application de la méthode d'itération de Picard sur chaque sous-intervalle avec un pas constant.

En combinant la méthode d'itération de Picard avec l'analyse pas à pas, on obtient une approche robuste pour résoudre les équations intégrales de Volterra du deuxième type non linéaires. Cette méthode offre un meilleur contrôle sur les approximations, réduisant les erreurs accumulées et produisant des résultats précis et fiables.

3.3 Méthode numérique

Pour résoudre numériquement les équations intégrales de Volterra, on utilise la méthode de Nyström. Cette méthode approxime l'intégrale en utilisant une somme pondérée des valeurs de la fonction à des points discrétisés de l'intervalle d'intégration. La formule de cette méthode est la suivante :

$$\int_a^b \varphi(t) dt \approx h \sum_{i=0}^n p_i \varphi(t_i), \quad 0 \leq i \leq n.$$

Les poids p_i sont choisis de manière à ce que la norme maximale des poids soit bornée par une constante $\max_{0 \leq i \leq n} |p_i| \leq P$ sur les intervalles.

Avant de poursuivre avec cette méthode, il est nécessaire de passer d'un espace continu à un espace discret. Cela implique la subdivision de l'intervalle d'intégration en segments plus petits, ce qui nous permet de calculer une solution approchée en utilisant des méthodes numériques (la méthode de Nyström). Cette étape est essentielle car elle permet de rendre le calcul réalisable sur un ordinateur en utilisant un programme MATLAB, évitant ainsi les calculs infinis.

Après la discrétisation de l'intervalle $[a, b]$, il est important de définir la borne supérieure de l'intervalle discrétisé, notée x_i , où i varie de 0 à n , en fonction de la subdivision choisie. Typiquement, x_i est défini par,

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + ih, \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n = b.$$

On fait l'approche suivante après avoir fixé $x = x_n$, où x la borne supérieure de l'intégrale, le système devient,
 $\forall x \in]a, b] , 1 \leq i \leq n$

$$(S) = \begin{cases} U_0 & = g(a), \\ U_n & = g(x_n) + h \sum_{i=0}^n P_i K(x_n, x_i, U_i). \end{cases}$$

avec,

$$U_n \approx u(x_n).$$

Cette technique de discrétisation nous fournit un système (S) discret, sur lequel on peut appliquer la méthode de Nyström pour obtenir une solution numérique approximée.

Le théorème suivant permet d'assurer l'existence et l'unicité de la solution du système (S) .

Théorème 6. *Pour h suffisamment petit, le système (S) admet une unique solution*

Démonstration. voir [21]. □

Dans le but de programmer le problème, qui est primordiale en analyse numérique, il faut distinguer entre les valeurs exactes $u(x_i)$ et leurs valeurs approchées U_i , respectivement. Car la machine ne peut pas traiter une relation binaire de la forme \approx .

Pour que la méthode numérique construite converge vers la solution exacte de l'équation et puisqu'on travaille sur $C[a, b]$, on définit une erreur ε , comme suit,

$$\forall i = 0, \dots, n \quad |\varepsilon_i| = |U_i - u(t_i)|.$$

La méthode sera convergente si,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\max_{0 \leq i \leq n} |\varepsilon_i| \right) = 0.$$

Le théorème suivant permet d'assurer la convergence de l'approximation du $U_n - u(t_n)$.

Théorème 7. *Si l'approximation est bien construite alors l'erreur de consistance est acceptable, et la méthode sera convergente*

Démonstration. voir [21]. □

La méthode de Nyström est appréciée pour son efficacité, tant au niveau local que global, dans la résolution numérique des équations intégrales.

L'efficacité locale de la méthode de Nyström se réfère à sa capacité à capturer avec précision le comportement de la solution dans des régions locales du domaine d'intégration. Cette méthode permet de sélectionner judicieusement les points d'échantillonnage pour approximer l'intégrale, ce qui conduit à des résultats précis même dans des zones où la fonction à intégrer peut présenter des variations rapides ou des singularités locales. En conséquence, la méthode de Nyström est particulièrement adaptée pour résoudre des problèmes où la solution varie rapidement sur de petites échelles, offrant ainsi une efficacité locale élevée.

D'autre part, l'efficacité globale de la méthode de Nyström se réfère à sa capacité à produire des résultats précis sur l'ensemble du domaine d'intégration. Grâce à une sélection appropriée des points d'échantillonnage et à une gestion efficace de l'erreur d'approximation, cette méthode peut fournir une solution numérique précise et

stable sur tout le domaine d'intégration. Cela signifie qu'elle est capable de capturer le comportement global de la solution de manière satisfaisante, même lorsque celle-ci présente des variations significatives sur une large gamme de valeurs.

En résumé, la méthode de Nyström offre à la fois une efficacité locale et globale élevée, ce qui en fait un outil précieux pour la résolution numérique des équations intégrales dans une variété de contextes scientifiques et d'ingénierie. Son utilisation permet d'obtenir des résultats fiables et précis, même dans des situations complexes où d'autres méthodes numériques pourraient rencontrer des difficultés.

CHAPITRE 3

MODÉLISATION FRACTIONNAIRE CONFORME DU PHÉNOMÈNE BRUSSELATOR AVEC VITESSES CHIMIQUES CONSTANTES

Dans ce chapitre, on s'intéresse à une analyse complète du système de Brusselator. en combinant à la fois des approches analytiques et numériques. En résumé, notre approche initiale implique une révision du système classique de Brusselator, en utilisant une approche basée sur une dérivation fractionnaire conforme. À partir de cette reformulation innovante, on obtien une équation de type Volterra non linéaire. Cette transformation nous permet de démontrer simultanément l'existence et l'unicité de la solution, tout en nous fournissant les outils nécessaires pour développer une méthode d'approximation numérique efficace, pour résoudre le problème. Ensuite, nous présentons une simulation numérique basée sur la méthode de Nyström.

1 Modèle fractionnaire

Initialement, en simplifiant la notation de notre système d'équations, nous allons Procéder à une notation des composantes X , Y , A et B avec leurs concentrations respectives $[X]$, $[Y]$, $[A]$ et $[B]$, ce qui nous permet d'écrire le modèle suivant : Pour $T \gg 1$ et $t \in [0, T]$, on a le système Brusselator s'écrit,

$$X'(t) = V_1A - V_2BX(t) + V_3X^2(t)Y(t) - V_4X(t), \quad (1.1)$$

$$Y'(t) = V_2BX(t) - V_3X^2(t)Y(t), \quad (1.2)$$

$$X(0) = Y(0) = 0. \quad (1.3)$$

Notre approche initiale vise à réduire le nombre d'inconnues, à cet égard, on considère l'équation (1.2), avec sa condition initiale,

$$Y'(t) + V_3 X^2(t)Y(t) = V_2 B X(t), \quad (1.4)$$

$$Y(0) = 0. \quad (1.5)$$

elle est de la forme,

$$Y'(t) + f(t)Y(t) = g(t),$$

$$Y(0) = 0.$$

On prendre (1.4) et (1.5) et on commence par la solution de l'équation homogène,

$$\begin{aligned} Y'(t) + V_3 X^2(t)Y(t) = 0 &\Rightarrow \ln Y(t) = - \int_0^t (V_3 X^2(s) ds) + c, \\ &\Rightarrow Y(t) = C \exp \left(-V_3 \int_0^t X^2(s) ds \right). \end{aligned}$$

Pour déterminer Y en fonction de X , on utilise la méthode des variations des constantes ce qui donne,

$$Y(t) = C(t) \exp \left(-V_3 \int_0^t X^2(s) ds \right). \quad (1.6)$$

Donc,

$$\begin{aligned} Y'(t) &= C'(t) \exp \left(-V_3 \int_0^t X^2(s) ds \right) \\ &\quad - V_3 C(t) X^2(t) \exp \left(-V_3 \int_0^t X^2(s) ds \right), \end{aligned} \quad (1.7)$$

En remplaçant (1.6),(1.7) dans (1.4) on trouve,

$$C'(t) \exp \left(-V_3 \int_0^t X^2(s) ds \right) = V_2 B X(t),$$

par consequent

$$\Rightarrow C'(t) = V_2 B X(t) \exp \left(-V_3 \int_t^0 X^2(s) ds \right).$$

On integre cette derniere équation, on obtient,

$$C(t) = V_2 B \int_0^t X(s) \exp \left(-V_3 \int_s^0 X^2(\theta) d\theta \right) + c',$$

Savons que la solution générale de l'équation (1.4) est donnée pour tous $t \in [0, T]$, par

$$\begin{aligned} Y(t) &= \left(V_2 B \int_0^t X(s) \exp \left(-V_3 \int_s^0 X^2(\theta) d\theta \right) ds + c' \right) \\ &\times \exp \left(-V_3 \int_0^t X^2(s) ds \right). \end{aligned}$$

Cependant, en tenant compte de la condition initiale $Y(0) = 0$, on trouvent $c' = 0$.

Alors, on obtient, $\forall t \in [0, T]$,

$$Y(t) = V_2 B \int_0^t X(s) \exp \left(-V_3 \int_s^t X^2(\theta) d\theta \right) ds. \quad (1.8)$$

En substituant (1.8) dans (1.1), nous obtenons pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} X'(t) &= V_1 A - (V_4 + V_2 B) X(t) \\ &+ V_3 V_2 B X^2(t) \int_0^t X(s) \exp \left(-V_3 \int_s^t X^2(\theta) d\theta \right) ds. \end{aligned} \quad (1.9)$$

La nouvelle perspective dans notre travail, est d'introduire $D_{CF}^\alpha X(t)$ à la place de $X'(t)$, ce qui donne le modèle fractionnaire de Brusselator suivant :

$$\begin{aligned} D_{CF}^\alpha X(t) &= V_1 A - (V_4 + V_2 B) X(t) \\ &+ V_3 V_2 B X^2(t) \int_0^t X(s) \exp \left(-V_3 \int_s^t X^2(\theta) d\theta \right) ds \end{aligned} \quad (1.10)$$

Utilisant la formule d'intégration fractionnaire développée dans [19], à savoir,

$$\forall t \in [0, T], \quad \forall X \in C^1 [0, T], \quad D_{CF}^\alpha X(t) = F(t, X(t)),$$

ce qui est équivalent à, d'après [19],

$$\begin{aligned} & \forall t \in [0, T], \\ & X(t) = \left(\frac{\alpha}{M(\alpha)} \right) \int_0^t F(s; X(s)) ds + \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} F(t, X(t)). \end{aligned} \quad (1.11)$$

En appliquant la formule (1.11) dans (1.10), on obtient,

Pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} (-V_4 - V_2 B) X(t) \\ &+ \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} V_3 V_2 B X^2(t) \int_0^t X(s) \exp\left(-V_3 \int_s^t X^2(\theta) d\theta\right) ds \\ &+ \frac{\alpha}{M(\alpha)} V_1 A t \\ &+ \frac{\alpha}{M(\alpha)} \left(\int_0^t V_1 A - (V_4 + V_2 B) X(s) \right. \\ &\left. + V_3 V_2 B X^2(s) \left(\int_0^s X(\theta) \exp\left(-V_3 \int_\theta^s X^2(\tau) d\tau\right) d\theta \right) ds \right), \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} & \left(1 + \left(\frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \right) (V_4 + V_2 B) \right) X(t) \\ &= \left(\frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \right) (V_3 V_2 B) X^2(t) \int_0^t X(s) \exp\left(-V_3 \int_s^t X^2(\theta) d\theta\right) ds \\ &+ \left(\frac{\alpha}{M(\alpha)} \right) V_1 A t \\ &- \left(\frac{\alpha}{M(\alpha)} \right) (V_4 + V_2 B) \int_0^t X(s) ds \\ &+ \left(\frac{\alpha}{M(\alpha)} \right) (V_3 V_2 B) \int_0^t X^2(s) \left(\int_0^s X(\theta) \exp\left(-V_3 \int_\theta^s X^2(\tau) d\tau\right) d\theta \right) ds. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Comme α approche 1, et en utilisant les paramètres de vitesse V_2 et V_3 au voisinage 0, le terme ci-dessous devient négligeable, c'est-à-dire,

$$\left(\frac{1-\alpha}{M(\alpha)}\right) (V_3 V_2 B) X^2(t) \int_0^t X(s) \exp\left(-V_3 \int_s^t X^2(\theta) d\theta\right) ds \approx 0,$$

Cela nous permet d'écrire la forme finale de notre problème comme suit,

Trouver, $X \in C^0[0, T], \forall t \in [0, T],$

$$X(t) = \int_0^t N[X](s) ds + G(t). \quad (1.13)$$

Où, $C^0[0, T]$, l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0, T]$ dans \mathbb{R} , équipé de sa norme habituelle $\forall X \in C^0[0, T],$

$$\|X\|_{C^0[\beta, \gamma]} = \max_{t \in [0, T]} |X(t)|.$$

où les fonctions,

pour $X \in C^0[0, T]$ et $s \in [0, T]$, la fonction N , est définie par,

$$\begin{aligned} N : C^0[0, T] &\longrightarrow C^0[0, T] \\ X &\longmapsto N[X](s). \end{aligned}$$

avec,

$$\begin{aligned} N[X](s) &= \mu_\alpha X(s) \\ &+ \eta_\alpha X^2(s) \int_0^s X(\theta) \exp\left(-V_3 \int_\theta^s X^2(\tau) d\tau\right) d\theta. \end{aligned} \quad (1.14)$$

où,

$$\mu_\alpha = -\frac{\alpha(V_4 + V_2 B)}{M(\alpha) + (1-\alpha)(V_4 + V_2 B)},$$

et,

$$\eta_\alpha = \frac{\alpha (V_2 V_3 B)}{M(\alpha) + (1 - \alpha) (V_4 + V_2 B)}.$$

et enfin,

$$G(t) = \frac{\alpha V_1 A}{M(\alpha) + (1 - \alpha) (V_4 + V_2 B)} t$$

On remarque bien que, $M(\alpha) + (1 - \alpha) (V_4 + V_2 B)$ de l'équation (1.13) est non nulle.

2 Étude analytique

Pour, $[\beta, \gamma] \subset [0, T]$ et $a, b \in \mathbb{R}$, on introduit l'ensemble.,

$$B_{a,b}[\beta, \gamma] = \{X \in C^0[\beta, \gamma] : \forall s \in [\beta, \gamma], a \leq X(s) \leq b\}.$$

Dans la suite, nous considérons que X se prolonge par 0 sur $[0, T] \setminus [\beta, \gamma]$, l'équation (1.13) s'écrit,

$$N[X](s) = \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} \mu_\alpha X(s) + \eta_\alpha X^2(s) \int_\beta^s X(\theta) \exp\left(-V_3 \int_\theta^s X^2(\tau) d\tau\right) d\theta, & s \in [\beta, \gamma], \\ 0, & s \in [0, T] \setminus [\beta, \gamma]. \end{cases}$$

Le théorème suivant montre que N , est lipchitzienne,

Théorème 8. $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$, $\forall X, Y \in B_{a,b}[\beta, \gamma]$, $\exists L_{a,b} > 0$

$$\| N[X] - N[Y] \|_{C^0[\beta, \gamma]} \leq L_{a,b} \| X - Y \|_{C^0[\beta, \gamma]} \quad (2.2)$$

Démonstration. Comme $| N[X](s) - N[Y](s) | = 0$ pour $s \in [0, \beta \cup] \gamma, T]$,
Il suffit de prouver la solution (2.2) sur l'intervalle $[\beta, \gamma]$, où l'on entame uniquement
pour s de cet intervalle.,
pour, $s \in [\beta, \gamma]$,

$$\begin{aligned} | N[X](s) - N[Y](s) | &= | \mu_\alpha(X(s) - Y(s)) \\ &+ \eta_\alpha \left(X^2(s) \int_\beta^s X(\theta) \exp \left(-V_3 \int_\theta^s X^2(\tau) d\tau \right) d\theta \right. \\ &\left. - Y^2(s) \int_\beta^s Y(\theta) \exp \left(-V_3 \int_\theta^s Y^2(\tau) d\tau \right) d\theta \right) |, \quad (2.3) \end{aligned}$$

on rajoute le terme $Y^2(s) \int_\beta^s X(\theta) \exp \left(-V_3 \int_\theta^s X^2(\tau) d\tau \right) d\theta$ et on le soustrait
dans l'équation (2.3) ce qui donne pour tout $s \in [\beta, \gamma]$,

$$\begin{aligned} | N[X](s) - N[Y](s) | &= | \mu_\alpha(X(s) - Y(s)) \\ &+ \eta_\alpha \left(X^2(s) \int_\beta^s X(\theta) \exp \left(-V_3 \int_\theta^s X^2(\tau) d\tau \right) d\theta \right. \\ &- Y^2(s) \int_\beta^s X(\theta) \exp \left(-V_3 \int_\theta^s X^2(\tau) d\tau \right) d\theta \\ &+ Y^2(s) \int_\beta^s X(\theta) \exp \left(-V_3 \int_\theta^s X^2(\tau) d\tau \right) d\theta \\ &\left. - Y^2(s) \int_\beta^s Y(\theta) \exp \left(-V_3 \int_\theta^s Y^2(\tau) d\tau \right) d\theta \right) |, \end{aligned}$$

cela donne,

pour, $s \in [\beta, \gamma]$,

$$\begin{aligned} | N[X](s) - N[Y](s) | &\leq | \mu_\alpha \| X(s) - Y(s) | \\ &+ I_1 + I_2, \quad (2.4) \end{aligned}$$

où,

$$I_1 = | \eta_\alpha \| X^2(s) - Y^2(s) \| \int_\beta^s X(\theta) \exp \left(-V_3 \int_\theta^s X^2(\tau) d\tau \right) d\theta |,$$

alors,

$$I_1 = | \eta_\alpha | | X(s) + Y(s) | | X(s) - Y(s) | \left| \int_\beta^s X(\theta) \exp \left(-V_3 \int_\theta^s X^2(\tau) d\tau \right) d\theta \right| .$$

Ce qui donne,

$$I_1 \leq | \eta_\alpha | | X(s) | + | Y(s) | | X(s) - Y(s) | \left| \int_\beta^s X(\theta) \exp \left(-V_3 \int_\theta^s X^2(\tau) d\tau \right) d\theta \right| ,$$

donc,

$$I_1 \leq 2 | \eta_\alpha | (\max(|a|, |b|))^2 \max |s - \beta| \max_{\beta \leq s \leq \gamma} |X(s) - Y(s)| .$$

Il est clair que, pour tout $X \in B_{a,b}[\beta, \gamma]$, $\|X\|_{C^0[\beta, \gamma]} = \max_{\beta \leq s \leq \gamma} |X(s)| \leq \max(|a|, |b|)$.

On conclut alors,

$$I_1 \leq 2 | \eta_\alpha | \max(a^2, b^2) T \|X - Y\|_{C^0[\beta, \gamma]} .$$

Et,

$$\begin{aligned} I_2 &= | \eta_\alpha | | Y(s) |^2 \\ &\times \left| \int_\beta^s X(\theta) \exp \left(-V_3 \int_\theta^s X^2(\tau) d\tau \right) d\theta \right. \\ &- \left| \int_\beta^s Y(\theta) \exp \left(-V_3 \int_\theta^s X^2(\tau) d\tau \right) d\theta \right. \\ &+ \left| \int_\beta^s Y(\theta) \exp \left(-V_3 \int_\theta^s X^2(\tau) d\tau \right) d\theta \right. \\ &- \left. \int_\beta^s Y(\theta) \exp \left(-V_3 \int_\theta^s Y^2(\tau) d\tau \right) d\theta \right| , \end{aligned}$$

par suit,

$$\begin{aligned}
 I_2 &\leq |\eta_\alpha| \max(a^2, b^2) \int_\beta^s |X(\theta) - Y(\theta)| \exp\left(-V_3 \int_\theta^s X^2(\tau) d\tau\right) d\theta \\
 &+ |\eta_\alpha| \max(|a|, |b|)^2 \int_\beta^s |Y(\theta)| \times \\
 &\times \underbrace{\left| \exp\left(-V_3 \int_\theta^s X^2(\tau) d\tau\right) - \exp\left(-V_3 \int_\theta^s Y^2(\tau) d\tau\right) \right|}_{I_3} d\theta.
 \end{aligned}$$

Autrement, on a,

$$I_3 = \left| \exp\left(-V_3 \int_\theta^s X^2(\tau) d\tau\right) - \exp\left(-V_3 \int_\theta^s Y^2(\tau) d\tau\right) \right|,$$

mais nous savons que, d'après le théorèmes des accroissements finis, $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$, $|e^{-t_1} - e^{-t_2}| \leq |t_1 - t_2|$. En effet,

$\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$, $\exists \xi$ entre t_1 et t_2 ,

$$\begin{aligned}
 |e^{-t_1} - e^{-t_2}| &= |-e^{-\xi}| |t_1 - t_2|, \\
 &\leq |t_1 - t_2|.
 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$I_3 \leq \left| V_3 \int_\theta^s X^2(\tau) d\tau - V_3 \int_\theta^s Y^2(\tau) d\tau \right|,$$

par suit,

$$\begin{aligned}
 I_3 &\leq V_3 \left| \int_\theta^s (X(\tau) + Y(\tau))(X(\tau) - Y(\tau)) d\tau \right|, \\
 I_3 &\leq V_3 \left| \int_\theta^s d\tau \|X(\tau) + Y(\tau)\| \|X(\tau) - Y(\tau)\| \right|, \\
 I_3 &\leq V_3 \left| \int_\theta^s d\tau \|X(\tau)\| + \|Y(\tau)\| \|X(\tau) - Y(\tau)\| \right|, \\
 I_3 &\leq 2V_3 \max(|a|, |b|) \max |s - \theta| \max_{\beta \leq \tau \leq \gamma} |X(\tau) - Y(\tau)|.
 \end{aligned}$$

par définition de la norme C^0 , il est clair que, pour $X \in B_{a,b}[\beta, \gamma]$, $\|X\|_{C^0[\beta, \gamma]} = \max_{\beta \leq s \leq \gamma} |X(s)| \leq \max(|a|, |b|)$, cela donne,

$$I_3 \leq 2V_3 T \max(|a|, |b|) \|X - Y\|_{C^0[\beta, \gamma]}.$$

En substituant I_3 dans I_2 , on aura,

$$\begin{aligned} I_2 &\leq |\eta_\alpha| \max(a^2, b^2) T \|X - Y\|_{C^0[\beta, \gamma]} \\ &\quad + 2V_3 |\eta_\alpha| \max(a^4, b^4) T^2 \|X - Y\|_{C^0[\beta, \gamma]} \end{aligned}$$

En substituant I_1 et I_2 dans (2.4), cela donne,

$$\begin{aligned} |N[X](s) - N[Y](s)| &\leq |\mu_\alpha| \|X - Y\|_{C^0[\beta, \gamma]} \\ &\quad + 2T |\eta_\alpha| \max(a^2, b^2) \|X - Y\|_{C^0[\beta, \gamma]} \\ &\quad + 2T^2 V_3 |\eta_\alpha| \max(a^4, b^4) \|X - Y\|_{C^0[\beta, \gamma]}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Cela nous permet d'écrire (2.5), sa forme finale comme suit,
 $\forall X, Y \in B_{a,b}[\beta, \gamma]$,

$$\|N[X] - N[Y]\|_{C^0[\beta, \gamma]} \leq L_{a,b} \|X - Y\|_{C^0[\beta, \gamma]},$$

où,

$$L_{a,b} = (|\mu_\alpha| + 2T |\eta_\alpha| \max(a^2, b^2) + 2V_3 T^2 |\eta_\alpha| \max(a^4, b^4)).$$

□

Le théorème suivant, assure l'existence et l'unicité de la solution (1.13).

Théorème 9. *L'équation*

$$X(t) = \int_0^t N[X](s) ds + G(t).$$

a une solution unique continue X dans $C^0[0, T]$.

Démonstration. Soit $T_1 \in]0, T]$, suffisamment proche de zéro. Pour $t \in [0, T_1]$, nous définissons la suite de Picard $\{X_n\}_{n \geq 0}$ [21],

$$\begin{cases} X_0(t) &= G(t), \\ X_{n+1}(t) &= \int_0^t N[X_n](s) ds + G(t), \quad n \geq 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Cependant, si $Z \in C^0[0, T_1]$, tel que

$$\|Z - G\|_{C^0[0, T_1]} \leq \frac{1}{1 - \delta} \|M[G]\|_{C^0[0, T_1]},$$

où $\delta \in]0, 1[$ et $M[G](t) = \int_0^t N[G](s) ds$.

Cela entraîne que $\forall s \in [0, T_1]$,

$$-\frac{1}{1 - \delta} \|M[G]\|_{C^0[0, T_1]} \leq Z(s) - G(s) \leq \frac{1}{1 - \delta} \|M[G]\|_{C^0[0, T_1]},$$

ce qui donne,

$$a \leq Z(s) \leq b,$$

telle que,

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{1 - \delta} \|M[G]\|_{C^0[0, T_1]} + \min_{0 \leq s \leq T_1} G(s), \\ b &= \frac{1}{1 - \delta} \|M[G]\|_{C^0[0, T_1]} + \max_{0 \leq s \leq T_1} G(s). \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après le théorème 8,

$$\exists L_{a,b} > 0, \forall X, Y \in B_{a,b}[0, T_1],$$

$$\|N[X] - N[Y]\|_{C^0[0, T_1]} \leq L_{a,b} \|X - Y\|_{C^0[0, T_1]}. \quad (2.7)$$

On choisit T_1 suffisamment proche de 0 pour obtenir,

$$T_1 L_{a,b} \leq \delta. \quad (2.8)$$

On introduit l'énoncé mathématique pour $n \geq 1$,

$$(P_n) \begin{cases} \| X_n - G \|_{C^0[0, T_1]} \leq \frac{1}{1 - \delta} \| M[G] \|_{C^0[0, T_1]}, \\ \| X_{n+1} - X_n \|_{C^0[0, T_1]} \leq \delta^n \| X_1 - X_0 \|_{C^0[0, T_1]}. \end{cases} \quad (2.9)$$

On procède par induction et d'après (2.6). On a,
 $\forall t \in [0, T_1]$,

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \int_0^t N[G](s) ds + G(t). \\ | X_1(t) - G(t) | &= \left| \int_0^t N[X_0](s) ds + G(t) - G(t) \right|, \\ | X_1(t) - G(t) | &\leq \max_{0 \leq t \leq T_1} \left| \int_0^t N[G](s) ds \right|, \\ \| X_1 - G \|_{C^0[0, T_1]} &\leq \frac{1}{1 - \delta} \| M[G] \|_{C^0[0, T_1]}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

D'après (2.7) et (2.8), cela nous permet d'effectuer,
 $\forall t \in [0, T_1]$

$$\begin{aligned} | X_2(t) - X_1(t) | &= \left| \int_0^t (N[X_1](s) - N[X_0](s)) ds \right|, \\ &\leq \max_{0 \leq t \leq T_1} | t - 0 | L_{a,b} \| X_1 - X_0 \|_{C^0[0, T_1]}, \\ &\leq T_1 L_{a,b} \| X_1 - X_0 \|_{C^0[0, T_1]}, \\ &\leq \delta \| X_1 - X_0 \|_{C^0[0, T_1]}. \end{aligned}$$

Maintenant, supposons que (P_n) est vrai et démontrons (P_{n+1}) ,
 on a d'après (2.9) et (2.10),

$$\begin{aligned} \| X_{n+1} - G \|_{C^0[0, T_1]} &\leq \| X_{n+1} - X_n \|_{C^0[0, T_1]} + \| X_n - X_{n-1} \|_{C^0[0, T_1]} \\ &+ \dots + \| X_1 - X_0 \|_{C^0[0, T_1]}, \\ &\leq \delta^n \| X_1 - X_0 \|_{C^0[0, T_1]} + \delta^{n-1} \| X_1 - X_0 \|_{C^0[0, T_1]} \\ &+ \dots + \delta^0 \| X_1 - X_0 \|_{C^0[0, T_1]}, \\ &\leq (\delta^n + \delta^{n-1} + \dots + \delta^0) \| X_1 - X_0 \|_{C^0[0, T_1]}, \\ &\leq \frac{1 - \delta^{n+1}}{1 - \delta} \| X_1 - X_0 \|_{C^0[0, T_1]}, \\ &\leq \frac{1}{1 - \delta} \| M[G] \|_{C^0[0, T_1]}. \end{aligned}$$

Cela nous permet de procéder pour tous $t \in [0, T_1]$

$$\begin{aligned}
 | X_{n+2}(t) - X_{n+1}(t) | &= \left| \int_0^t (N[X_{n+1}](s) - N[X_n](s)) ds \right|, \\
 &\leq \max_{0 \leq t \leq T_1} |t - 0| L_{a,b} \| X_{n+2} - X_{n+1} \|_{C^0[0, T_1]}, \\
 &\leq T_1 L_{a,b} \| X_{n+1} - X_n \|_{C^0[0, T_1]}, \\
 &\leq \delta^{n+1} \| X_1 - X_0 \|_{C^0[0, T_1]}.
 \end{aligned}$$

Maintenant, nous démontrons l'existence de la solution en définissant la sé-
quence :

$$\forall n \geq 1, \quad X_n = \sum_{k=1}^n (X_k - X_{k-1}) + G. \tag{2.11}$$

Mais, $\sum_{k=1}^n (X_k - X_{k-1})$ converge normalement, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
 \left\| \sum_{k=1}^n (X_k - X_{k-1}) \right\|_{C^0[0, T_1]} &\leq \sum_{k=1}^n \| X_k - X_{k-1} \|_{C^0[0, T_1]}, \\
 &\leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} \delta^k \right) \| X_1 - X_0 \|_{C^0[0, T_1]}, \\
 &\leq \frac{1}{1 - \delta} \| X_1 - X_0 \|_{C^0[0, T_1]}.
 \end{aligned}$$

alors,

$\exists X \in C^0[0, T_1]$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} X_{n+1}(t) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^t N[X_n](s) ds + G(t), \\
 \lim_{n \rightarrow +\infty} X_{n+1}(t) &= \int_0^t \lim_{n \rightarrow +\infty} N[X_n](s) ds + G(t), \\
 \lim_{n \rightarrow +\infty} X_{n+1}(t) &= \int_0^t N \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n \right] (s) ds + G(t).
 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\forall t \in [0, T_1], \quad X(t) = \int_0^t N[X](s)ds + G(t). \quad (2.12)$$

Pour montrer l'unicité de la solution existante, nous supposons sur $[0, T_1]$, qu'il existe deux solutions de notre équation X et \tilde{X} , avec,

$$\forall t \in [0, T_1], \quad \tilde{X}(t) = \int_0^t N[\tilde{X}](s)ds + G(t). \quad (2.13)$$

De même, on conclut que,

$$\|X - \tilde{X}\|_{C^0[0, T_1]} \leq \delta \|X - \tilde{X}\|_{C^0[0, T_1]},$$

cela signifie que,

$$\begin{aligned} \|X - \tilde{X}\|_{C^0[0, T_1]} = 0 &\Rightarrow X - \tilde{X} = 0, \\ &\Rightarrow X = \tilde{X}, \end{aligned}$$

ce qui prouve, l'unicité de la solution X .

Pour $t > T_1$, Nous choisissons T_2 plus proche de T_1 , de la même manière, et nous réécrivons notre équation sous la forme suivante :

$$\forall t \in [T_1, T_2], \quad X(t) = \int_{T_1}^t N[X](s)ds + G_1(t), \quad (2.14)$$

où,

$$G_1(t) = \int_{T_1}^{T_2} N[X_1](s)ds + G(t),$$

et X_1 est la solution unique obtenue précédemment sur $[T_0, T_1]$. En utilisant le Théorème 1, qui prouve la propriété de Lipschitz local de N et en suivant les

mêmes étapes qu'auparavant, nous montrons que (2.7) a une solution unique $X_2 \in C^0 [T_1, T_2]$.

Nous remarquons que $X_1(T_1) = X_2(T_2)$, ce qui prouve que

$$X_{12} = \begin{cases} X_1(t) & [0, T_1], \\ X_2(t) & [T_1, T_2], \end{cases}$$

appartient à $C^0 [T_0, T_2]$ et c'est la solution unique de notre équation sur $[T_0, T_2]$.

Nous répétons ce même processus pour les intervalles $[T_i, T_{i+1}]$, $2 \leq i \leq N-1$, afin de construire la solution unique de notre équation dans $C^0 [0, T]$. \square

3 Simulation Numérique

Dans cette section, nous proposons une simulation numérique basée sur la méthode de Nyström [26] [21], avec la règle du trapèze [30] [5]. Pour cela, nous introduisons une subdivision de $[0, T]$ comme suit : $\forall n \geq 2$, $h = \frac{T}{n+1}$, $t_j = (j-1)h$, $1 \leq j \leq n$.

Les poids de la méthode d'intégration numérique sont donnés pour $1 \leq j \leq n$ par :

$$\begin{cases} W_1 = W_n = \frac{1}{2}, \\ W_j = 1, \quad 2 \leq j \leq n-1. \end{cases}$$

Une fois cette méthode appliquée à notre équation, nous obtenons, pour $n \geq 2$, le système non linéaire suivant :

$$\begin{aligned} X_1 &= 0, \\ X_i &= h \sum_{j=1}^i W_j \left(\mu_\alpha X_j + \eta_\alpha h X_j^2 \sum_{p=1}^j W_p X_p \exp \left(-V_3 h \sum_{q=p}^j W_q X_q^2 \right) \right) \\ &\quad + G(t_i), \quad 2 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Que nous réécrivons comme suit :

$$\begin{aligned} X_1 &= 0, \\ X_i &= \phi_i(X_i) + \psi_i, \quad 2 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

où,

$$\begin{aligned} \phi_i(X_i) &= hW_i (\mu_\alpha X_i + \eta_\alpha hW_i X_i^3 \exp(-V_3 hW_i X_i^2)), \\ \psi_i &= h \sum_{j=1}^{i-1} W_j \left(\mu_\alpha X_j + \eta_\alpha hX_j^2 \sum_{p=1}^j W_p X_p \exp\left(-V_3 h \sum_{q=p}^j W_q X_q^2\right) \right) + G(t_i). \end{aligned}$$

Pour chaque $2 \leq i \leq n$, X_i est approché en utilisant une séquence de Banach de la forme

$$\begin{aligned} X_i^0 &= X_{i-1}, \\ X_i^{\nu+1} &= \phi_i(X_i^\nu) + \psi_i, \quad \nu \geq 0, \end{aligned}$$

Avec la condition d'arrêt suivante $|X_i^{\text{new}} - X_i^{\text{old}}| < 10^{-7}$.

La séquence $\{X_i\}_{i=1}^n$, une fois calculée, sera utilisée pour approximer la fonction Y en utilisant

$$\begin{aligned} Y_1 &= 0, \\ Y_i &= V_2 B h \sum_{j=1}^i W_j X_j \exp\left(-V_3 h \sum_{p=j}^i W_p X_p\right), \quad 2 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Si nous prenons $A = 0.5$, $B = 0.7$, $V_1 = 2$, $V_2 = 2$, $V_3 = 2.7$, $V_4 = 1.4$,
 $\alpha = 0.99999$, $T = 10$ et $n = 1000$,
pour $V_3 > V_2$, nous obtenons une situation où X domine Y , voir figure 1.

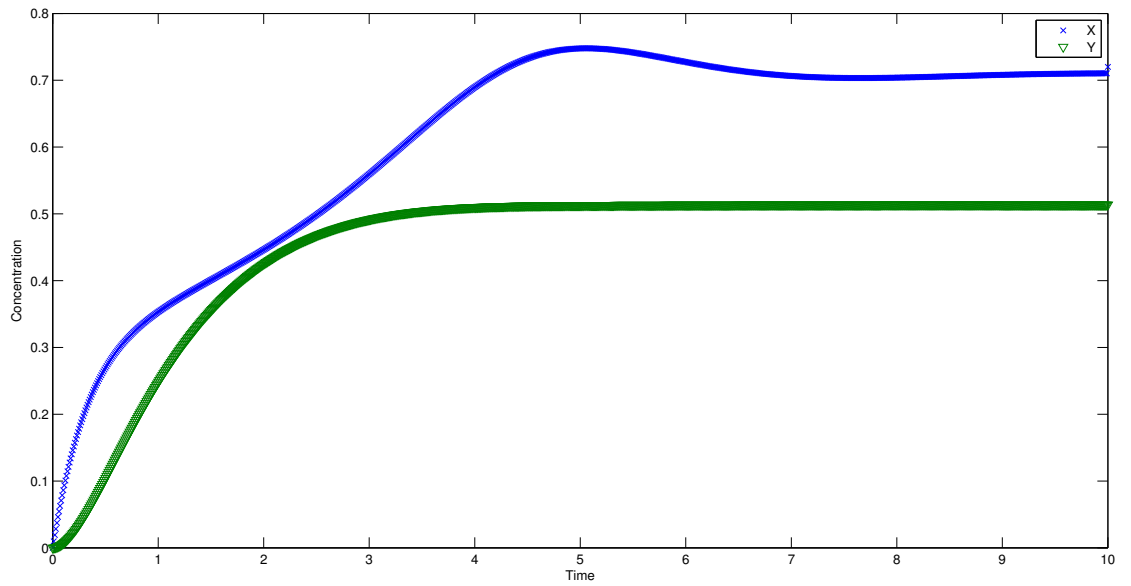


FIGURE 3.1 – X domine Y

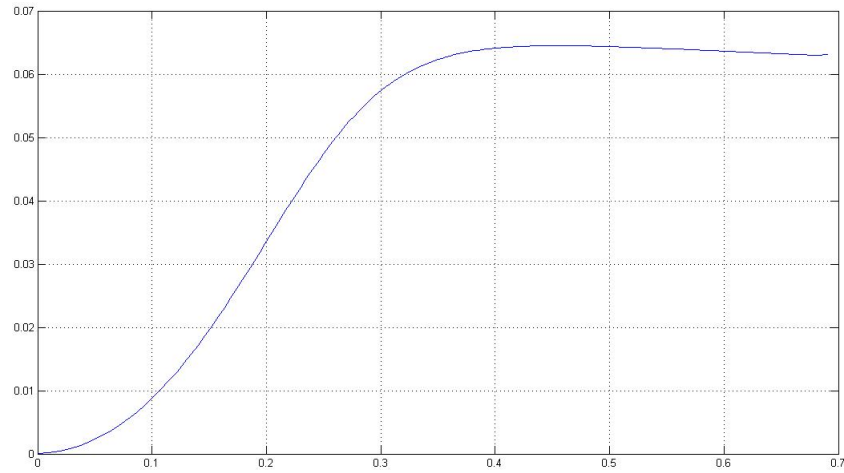


FIGURE 3.2 – Y en fonction de X lorsque X domine Y

Si nous prenons $A = 0.5$, $B = 0.7$, $V_1 = 2$, $V_2 = 2$, $V_3 = 1.4$, $V_4 = 1.4$,
 $\alpha = 0.99999$, $T = 10$ et $n = 1000$,
pour $V_2 > V_3$, nous obtenons une situation où Y domine X , voir figure 2.

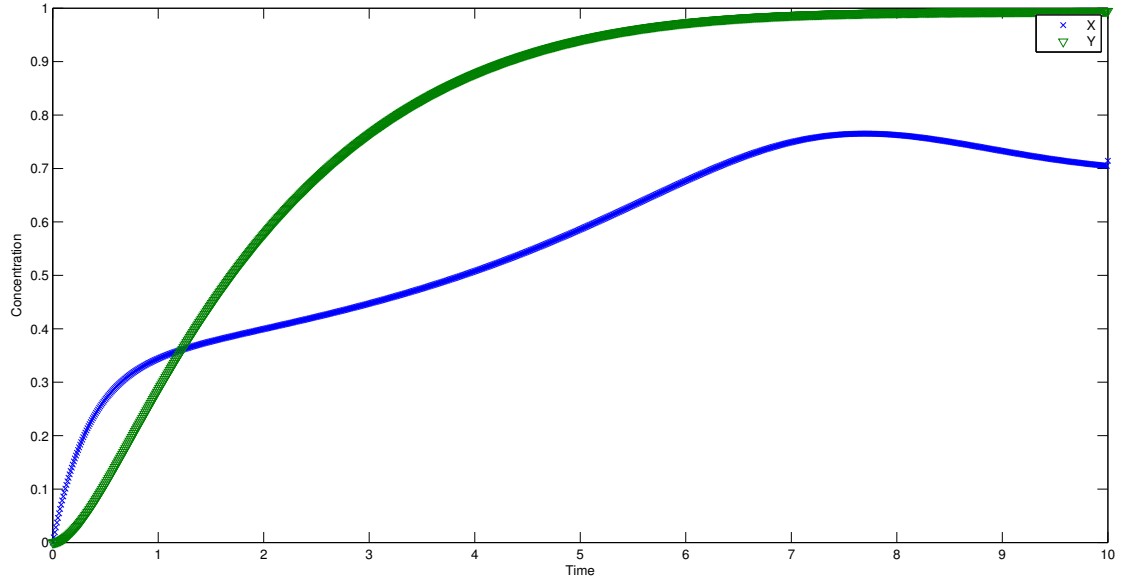


FIGURE 3.3 – Y domine X

Si nous prenons $A = 0.5$, $B = 0.7$, $V_1 = 2$, $V_2 = 2$, $V_3 = 2.2$, $V_4 = 1.4$, $\alpha = 0.99999$, $T = 10$ et $n = 1000$,
pour $V_3 = V_2$, nous obtenons une situation où il n'y a pas de domination, voir figure 3.

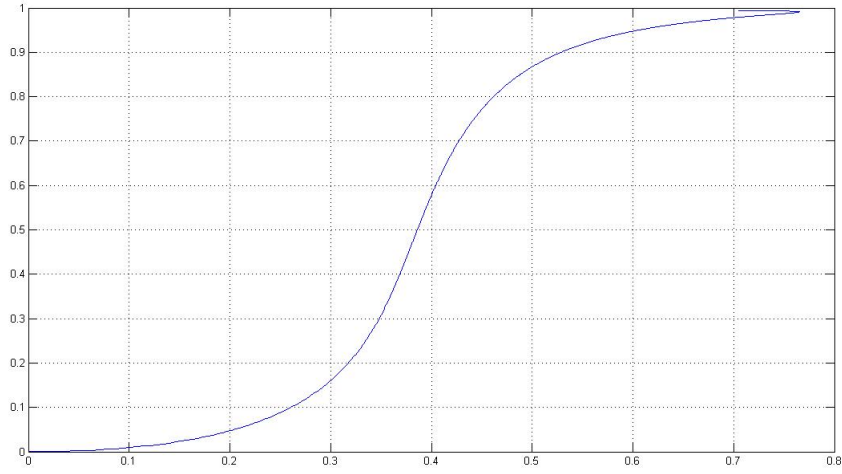


FIGURE 3.4 – Y en fonction de X lorsque Y domine X

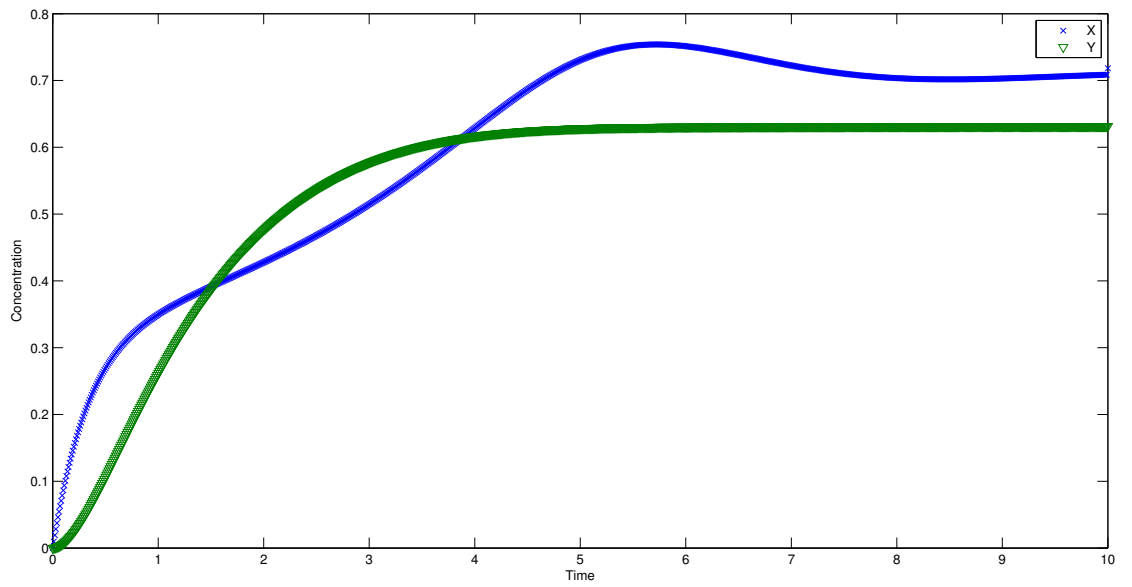


FIGURE 3.5 – Oscillation

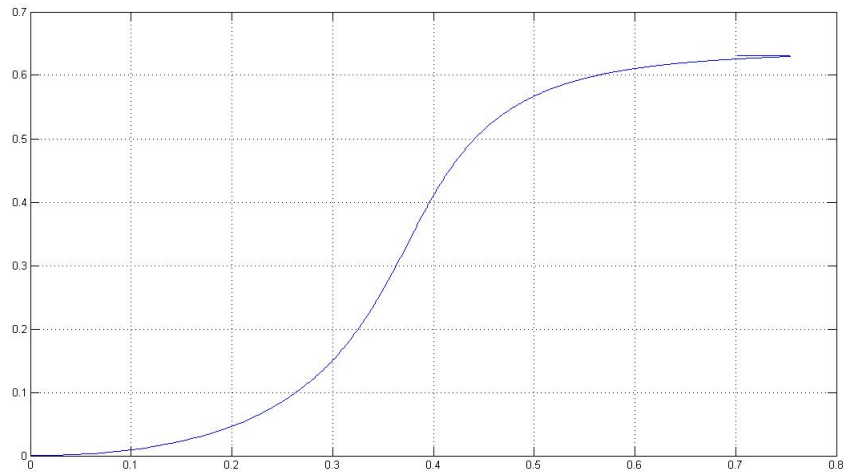


FIGURE 3.6 – Y en fonction de X lorsqu'on a Oscillation

CHAPITRE 4

MODÉLISATION FRACTIONNAIRE CONFORMABLE DU PHÉNOMÈNE BRUSSELTOR AVEC VITESSE CHIMIQUE VARIABLE

Contrairement au chapitre précédent. Dans ce chapitre, nous menons une analyse exhaustive du système de Brusselator en intégrant à la fois des approches analytiques et numériques, mais avec des vitesses de réaction chimique qui seront choisies variables au cours du temps et non constantes. Pour booster notre méthodologie initiale de manière succincte, nous revisitons le système classique de Brusselator en employant une approche basée sur les dérivées fractionnaires conformes. Découlant de cette reformulation innovante, nous dérivons une équation non linéaire de type Volterra. Cette transformation nous permet d'établir simultanément l'existence et l'unicité de la solution, tout en nous équipant des outils nécessaires pour concevoir une méthode d'approximation numérique efficace, pour la résolution du problème. Par la suite, nous présentons une simulation numérique basée sur la méthode de Nyström.

1 Modèle fractionnaire

De la même manière que le chapitre précédent, pour simplifier la notation de notre système d'équations, nous posons l'égalité entre les éléments X , Y , $A(t)$, et $B(t)$ à leurs concentrations respectives $[X]$, $[Y]$, $[A]$, et $[B]$. Cette simplification est valable $T \gg 1$ et $t \in [0, T]$, où T représente une valeur de temps très grande et t une variable de temps variant entre 0 et T , alors notre système s'écrit,

$$\begin{aligned} X'(t) &= V_1(t)A(t) - V_2(t)B(t)X(t) \\ &\quad + V_3(t)X^2(t)Y(t) - V_4(t)X(t), \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$Y'(t) = V_2(t)B(t)X(t) - V_3(t)X^2(t)Y(t), \quad (1.2)$$

$$X(0) = Y(0) = 0. \quad (1.3)$$

Notre approche initiale vise à réduire le nombre d'inconnues, en suivant les mêmes étapes que celles du chapitre précédent. Dans ce contexte, nous observons que la solution générale de l'équation Y' dans (1.2) est valable pour toutes les valeurs de $t \in [0, T]$ comme suit :

$$\begin{aligned} Y(t) &= \left(\int_0^t V_2(s)B(s)X(s) \exp \left(- \int_s^0 V_3(\theta) X^2(\theta) d\theta \right) ds + c \right) \\ &\quad \times \exp \left(- \int_0^t V_3(s) X^2(\theta) d\theta \right). \end{aligned}$$

Cependant, en tenant compte de la condition initiale $Y(0) = 0$, nous obtenons :

$$\forall t \in [0, T],$$

$$Y(t) = \int_0^t V_2(s)B(s)X(s) \exp \left(- \int_s^t V_3(\theta) X^2(\theta) d\theta \right) ds. \quad (1.4)$$

En substituant (1.4) dans (1.1) on obtient, pour toutes les valeurs de $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} X'(t) &= V_1(t)A(t) - (V_4(t) + V_2(t)B(t)) X(t) \\ &\quad + V_3(t)X^2(t) \int_0^t V_2(s)B(s)X(s) \exp \left(- \int_s^t V_3(\theta) X^2(\theta) d\theta \right) ds. \end{aligned}$$

Une approche novatrice dans notre étude implique de substituer $D_{CF}^\alpha X(t)$ à la place de $X'(t)$, ce qui conduit à la formulation du modèle de Brusselator fractionnaire devient,

$$\begin{aligned} D_{CF}^\alpha X(t) &= V_1(t)A(t) - (V_4(t) + V_2(t)B(t)) X(t) \\ &\quad + V_3(t)X^2(t) \int_0^t V_2(s)B(s)X(s) \exp \left(- \int_s^t V_3(\theta) X^2(\theta) d\theta \right) ds \end{aligned} \quad (1.5)$$

Utilisant la formule d'intégration fractionnaire établie dans [19], qui affirme,

$$\forall t \in [0, T], \quad \forall X \in C^1 [0, T], \quad D_{CF}^\alpha X(t) = F(t, X(t)),$$

cela peut être exprimé comme une équivalence,

$$\begin{aligned} & \forall t \in [0, T], \\ X(t) &= \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_0^t F(s; X(s)) ds + \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} F(t, X(t)). \end{aligned} \tag{1.6}$$

On appliquant la formule (1.6) sur (1.5), cela donne, pour $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} X(t) &= - \left(\frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \right) (V_4(t) + V_2(t)B(t)) X(t) \\ &+ \left(\frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \right) V_3(t)X^2(t) \int_0^t V_2(s)B(s)X(s) \exp \left(- \int_s^t V_3(\theta)X^2(\theta)d\theta \right) ds \\ &+ \left(\frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \right) (V_1(t)A(t) - V_1(0)A(0)) \\ &+ \left(\frac{\alpha}{M(\alpha)} \right) \int_0^t V_1(s)A(s)ds \\ &- \left(\frac{\alpha}{M(\alpha)} \right) \int_0^t (V_4(s) + V_2(s)B(s)) X(s)ds \\ &+ \left(\frac{\alpha}{M(\alpha)} \right) \int_0^t V_3(s)X^2(s) \times \\ &\times \left(\int_0^s V_2(\theta)B(\theta)X(\theta) \exp \left(- \int_\theta^s V_3(\tau)X^2(\tau)d\tau \right) d\theta \right) ds, \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned}
 & \left(1 + \left(\frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \right) (V_4(t) + V_2(t)B(t)) \right) X(t) \\
 &= \left(\frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \right) V_3(t)X^2(t) \int_0^t V_2(s)B(s)X(s) \exp \left(- \int_s^t V_3(\theta)X^2(\theta)d\theta \right) ds \\
 &+ \left(\frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \right) (V_1(t)A(t) - V_1(0)A(0)) \\
 &+ \left(\frac{\alpha}{M(\alpha)} \right) \int_0^t V_1(s)A(s)ds \\
 &- \left(\frac{\alpha}{M(\alpha)} \right) \int_0^t (V_4(s) + V_2(s)B(s)) X(s)ds \\
 &+ \left(\frac{\alpha}{M(\alpha)} \right) \int_0^t V_3(s)X^2(s) \left(\int_0^s V_2(\theta)B(\theta)X(\theta) \exp \left(- \int_\theta^s V_3(\tau)X^2(\tau)d\tau \right) d\theta \right) ds.
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Comme le paramètre α tend vers 1 et en utilisant les paramètres de vitesse $V_2(s)$ et $V_3(s)$ qui tendent vers 0, le terme suivant devient négligeable, à savoir,

$$\left(\frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \right) V_3(t)X^2(t) \int_0^t V_2(s)B(s)X(s) \exp \left(- \int_s^t V_3(\theta)X^2(\theta)d\theta \right) ds \approx 0,$$

Cela donne la forme finale de notre problème qu'est la suivante :

Trouver $X \in C^0 [0, T]$, pour tous t, s de $[0, T]$, tel que,

$$X(t) = \int_0^t N[X](t, s)ds + G(t). \tag{1.8}$$

Où, $C^0 [0, T]$, l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0, T]$ dans \mathbb{R} , équipé de sa norme usuelle,

$$\forall X \in C^0 [0, T], \quad \| X \|_{C^0[0, T]} = \max_{t \in [0, T]} | X(t) |$$

Donc, notre fonction est,

$$\begin{aligned}
 N : C^0 [0, T] &\longrightarrow C^0 [0, T] \\
 X &\longmapsto N[X](t, s).
 \end{aligned}$$

où,

$$\begin{aligned}
 N[X](t, s) &= \mu_\alpha(t, s)X(s) \\
 &+ \eta_\alpha(t, s)X^2(s) \int_0^s V_2(\theta)B(\theta)X(\theta) \\
 &\times \exp\left(-\int_\theta^s V_3(\tau)X^2(\tau)d\tau\right) d\theta,
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

tel que,
 $\mu_\alpha(t, s) = -\alpha\Omega_\alpha(t) (V_4(s) + V_2(s)B(s)),$

et

$$\eta_\alpha(t, s) = \alpha\Omega_\alpha(t)V_3(s).$$

avec

$$\begin{aligned}
 G(t) &= \int_0^t \alpha\Omega_\alpha(t)V_1(s)A(s)ds \\
 &+ (1 - \alpha)\Omega_\alpha(t) (V_1(t)A(t) - V_1(0)A(0)).
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

où,

$$\Omega_\alpha(t) = \frac{1}{M(\alpha) + (1-\alpha)(V_4(t) + V_2(t)B(t))},$$

Soulignant le fait évident que

$$M(\alpha) + (1 - \alpha) (V_4(t) + V_2(t)B(t)) \neq 0$$

2 Étude analytique

Pour $[\beta, \gamma] \subset [0, T]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, nous introduisons l'ensemble,

$$B_{a,b}[\beta, \gamma] = \{X \in C^0[\beta, \gamma] : \forall t, s \in [\beta, \gamma], a \leq X(s) \leq b\}.$$

Dans ce qui suit, nous considérons que X est étendue par 0 sur $[0, T] \setminus]\beta, \gamma[$, ainsi (1.8), s'écrit après prolongement,

$$N[X](t, s) = \tag{2.1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} = \mu_\alpha(t, s)X(s) + \eta_\alpha(t, s)X^2(s) \int_\beta^s V_2(\theta)B(\theta)X(\theta) \\ \times \exp\left(-\int_\theta^s V_3(\tau)X^2(\tau)d\tau\right) d\theta, \quad \text{si } s \in [\beta, \gamma], \\ = 0, \quad \text{si } s \in [0, T] \setminus]\beta, \gamma[. \end{array} \right.$$

Le théorème suivant, démontre que (2.1) est lipchizienne,

Théorème 10. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\forall X, Y \in B_{a,b}[\beta, \gamma]$, $\exists K_{a,b} > 0$,

$$\|N[X] - N[Y]\|_{C^0[\beta, \gamma]} \leq K_{a,b} \|X - Y\|_{C^0[\beta, \gamma]} \tag{2.2}$$

Démonstration. Puisque $|N[X](t, s) - N[Y](t, s)| = 0$ pour $s \in [0, \beta] \cup [\gamma, T]$. Donc, on procède à démontrer la lipschitzianité de (2.2) sur l'intervalle $[\beta, \gamma]$.

$\forall t, s \in [\beta, \gamma]$,

$$\begin{aligned} \|N[X](t, s) - N[Y](t, s)\|_{C^0[\beta, \gamma]} &= |\mu_\alpha(t, s)(X(s) - Y(s)) \\ &+ \eta_\alpha(t, s) \left(X^2(s) \int_\beta^s V_2(\theta)B(\theta)X(\theta) \right. \\ &\times \exp\left(-\int_\theta^s V_3(\tau)X^2(\tau)d\tau\right) d\theta \\ &- Y^2(s) \int_\beta^s V_2(\theta)B(\theta)Y(\theta) \\ &\left. \times \exp\left(-\int_\theta^s V_3(\tau)Y^2(\tau)d\tau\right) d\theta \right)|. \end{aligned} \tag{2.3}$$

On rajoute le terme $Y^2(s) \int_\beta^s V_2(\theta)B(\theta)X(\theta) \exp\left(-\int_\theta^s V_3(\tau)X^2(\tau)d\tau\right) d\theta$ et on le soustrait dans l'équation (2.3), cela donne pour tout s dans $[\beta, \gamma]$,

$$\begin{aligned}
\| N[X](t, s) - N[Y](t, s) \|_{C^0[\beta, \gamma]} &= | \mu_\alpha(t, s)(X(s) - Y(s)) \\
&+ \eta_\alpha(t, s) \left(X^2(s) \int_\beta^s V_2(\theta) B(\theta) X(\theta) \right. \\
&\times \exp \left(- \int_\theta^s V_3(\tau) X^2(\tau) d\tau \right) d\theta \\
&- Y^2(s) \int_\beta^s V_2(\theta) B(\theta) X(\theta) \\
&\times \exp \left(- \int_\theta^s V_3(\tau) X^2(\tau) d\tau \right) d\theta \\
&+ Y^2(s) \int_\beta^s V_2(\theta) B(\theta) X(\theta) \\
&\times \exp \left(- \int_\theta^s V_3(\tau) X^2(\tau) d\tau \right) d\theta \\
&- Y^2(s) \int_\beta^s V_2(\theta) B(\theta) Y(\theta) \\
&\times \left. \exp \left(- \int_\theta^s V_3(\tau) Y^2(\tau) d\tau \right) d\theta \right|.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
| N[X](t, s) - N[Y](t, s) | &\leq | \mu_\alpha(t, s) \| X(s) - Y(s) | \\
&+ I_1 + I_2.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

où

$$\begin{aligned}
I_1 &= | \eta_\alpha(t, s) \| X^2(s) - Y^2(s) | \\
&\times \left| \int_\beta^s V_2(\theta) B(\theta) X(\theta) \exp \left(- \int_\theta^s V_3(\tau) X^2(\tau) d\tau \right) d\theta \right|,
\end{aligned}$$

ce qui donne,

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq | \eta_\alpha(t, s) \| X(s) + Y(s) \| X(s) - Y(s) | \\
&\times \left| \int_\beta^s V_2(\theta) B(\theta) X(\theta) \exp \left(- \int_\theta^s V_3(\tau) X^2(\tau) d\tau \right) d\theta \right|,
\end{aligned}$$

il est clair que pour $\forall X \in B_{a,b}[\beta, \gamma]$, on a $\| X \|_{C^0[\beta, \gamma]} \leq \max(|a|, |b|)$ et $0 < v \leq V_i(t) \leq V$, pour $1 \leq i \leq 4$,

ainsi, $0 \leq A(t) \leq A$, et $0 \leq B(t) \leq B$,
ce qui implique,

$$I_1 \leq 2 |\eta_\alpha(t, s)| \max(|a|, |b|)^2 \max |s - \beta| \|X(s) - Y(s)\|,$$

il est clair que, pour tout $X \in B_{a,b}[\beta, \gamma]$,
 $\|X\|_{C^0[\beta, \gamma]} = \max_{\beta \leq s \leq \gamma} |X(s)| \leq \max(|a|, |b|)$.

On conclut alors,

$$I_1 \leq \frac{2\alpha V^2 B T \max(a^2, b^2)}{M(\alpha) + v(1 - \alpha)} \|X - Y\|_{C^0[\beta, \gamma]}.$$

et

$$\begin{aligned} I_2 &= |\eta_\alpha(t, s)| \|Y(s)\|^2 \left| \int_\beta^s V_2(\theta) B(\theta) \right. \\ &\quad \times \left. \left(X(\theta) \exp\left(-\int_\theta^s V_3(\tau) X^2(\tau) d\tau\right) - Y(\theta) \exp\left(-\int_\theta^s V_3(\tau) Y^2(\tau) d\tau\right) \right) d\theta \right| \end{aligned}$$

de même, pour $\forall X \in B_{a,b}[\beta, \gamma]$, on a $\|X\|_{C^0[\beta, \gamma]} \leq \max(|a|, |b|)$ et $0 < v \leq V_i(t) \leq V$, pour $1 \leq i \leq 4$,
et $0 \leq A(t) \leq A$, et $0 \leq B(t) \leq B$,

$$\begin{aligned} I_2 &\leq |\eta_\alpha(t, s)| (\max(a^2, b^2)) \int_\beta^s V_2(\theta) B(\theta) |X(\theta) - Y(\theta)| \\ &\quad \times \exp\left(-\int_\theta^s V_3(\tau) X^2(\tau) d\tau\right) d\theta \\ &\quad + |\eta_\alpha(t, s)| \int_\beta^s |V_2(\theta) B(\theta) Y(\theta)| \\ &\quad \times \underbrace{\left| \exp\left(-\int_\theta^s V_3(\tau) X^2(\tau) d\tau\right) - \exp\left(-\int_\theta^s V_3(\tau) Y^2(\tau) d\tau\right) \right|}_{I_3} d\theta. \end{aligned}$$

mais nous savons que, d'après le théorèmes des accroissements finis, $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$,
 $|e^{-t_1} - e^{-t_2}| \leq |t_1 - t_2|$. En effet,

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \left| \int_{\theta}^s V_3(\tau) (X^2(\tau) - Y^2(\tau)) d\tau \right|, \\ &\leq 2TV \max(|a|, |b|) \|X - Y\|_{C^0[\beta, \gamma]}. \end{aligned}$$

Cela donne,

$$I_2 \leq \frac{(1 - 2TV)(\alpha TBV^2 \max(a^2, b^2))}{M(\alpha) + v(1 - \alpha)} \|X - Y\|_{C^0[\beta, \gamma]}$$

En substituant I_1 et I_2 into (2.3), nous trouvons,

$$\begin{aligned} |N[X](t, s) - N[Y](t, s)| &\leq \frac{2\alpha V^2 BT \max(a^2, b^2)}{M(\alpha) + v(1 - \alpha)} \|X - Y\|_{C^0[\beta, \gamma]} \\ &+ \frac{\alpha V(1 + B)}{M(\alpha) + v(1 - \alpha)} \|X - Y\|_{C^0[\beta, \gamma]} \\ &+ \frac{(1 - 2TV)(\alpha TBV^2 \max(a^2, b^2))}{M(\alpha) + v(1 - \alpha)} \|X - Y\|_{C^0[\beta, \gamma]}. \end{aligned}$$

Nous concluons que $\forall X, Y \in B_{a,b}[\beta, \gamma]$,

$$\|N[X] - N[Y]\|_{C^0[\beta, \gamma]} \leq K_{a,b} \|X - Y\|_{C^0[\beta, \gamma]},$$

avec

$$K_{a,b} = \frac{\alpha V(1 + B) + 2\alpha V^2 BT \max(a^2, b^2) + (1 - 2TV)(\alpha TBV^2 \max(a^2, b^2))}{M(\alpha) + v(1 - \alpha)}.$$

□

Théorème 11. :

L'équation

$$X(t) = \int_0^t N[X](t, s) ds + G(t). \quad (2.5)$$

A une solution continue unique X dans $C^0[0, T]$.

Démonstration. Soit $T_1 \in]0, T]$, suffisamment proche de zéro. Pour $t, s \in [0, T_1]$, nous définissons la suite de Picard $\{X_n\}_{n \geq 0}$ comme suit :

$$\begin{cases} X_0(t) &= G(t), \\ X_{n+1}(t) &= \int_0^t N[X_n](t, s) ds + G(t), \quad n \geq 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Maintenant, si $Z \in C^0[0, T_1]$, tel que

$$\|Z - G\|_{C^0[0, T_1]} \leq \frac{1}{1 - \delta} \|M[G]\|_{C^0[0, T_1]},$$

où,

$$\delta \in]0, 1[$$

et

$$M[G](t) = \int_0^t N[G](t, s) ds$$

Cela entraîne $\forall s \in [0, T_1]$,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{1 - \delta} \|M[G]\|_{C^0[0, T_1]} &\leq Z(s) - G(s) \leq \frac{1}{1 - \delta} \|M[G]\|_{C^0[0, T_1]}, \\ &= -\frac{1}{1 - \delta} \|M[G]\|_{C^0[0, T_1]} + \min_{0 \leq s \leq T_1} G(s) \leq Z(s) \leq \frac{1}{1 - \delta} \|M[G]\|_{C^0[0, T_1]} \\ &+ \max_{0 \leq s \leq T_1} G(s) = b. \end{aligned}$$

Cela conduit à,

$$\exists K_{a,b} > 0, \forall X, Y \in B_{a,b}[0, T_1],$$

$$\|N[X] - N[Y]\|_{C^0[0, T_1]} \leq K_{a,b} \|X - Y\|_{C^0[0, T_1]}.$$

Nous choisissons T_1 suffisamment proche de 0 pour obtenir

$$T_1 K_{a,b} \leq \delta.$$

Nous introduisons l'énoncé mathématique pour $n \geq 1$

$$(P_n) \begin{cases} \| X_n - G \|_{C^0[0, T_1]} & \leq \frac{1}{1 - \delta} \| M[G] \|_{C^0[0, T_1]}, \\ \| X_{n+1} - X_n \|_{C^0[0, T_1]} & \leq \delta^n \| X_1 - X_0 \|_{C^0[0, T_1]}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Nous procédons par induction, nous avons, $\forall t \in [0, T_1]$,

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \int_0^t N[G](t, s) ds + G(t), \\ | X_1(t) - G(t) | &\leq \max_{0 \leq t \leq T_1} \left| \int_0^t N[G](t, s) ds \right|, \\ \| X_1 - G \|_{C^0[0, T_1]} &\leq \frac{1}{1 - \delta} \| M[G] \|_{C^0[0, T_1]}, \end{aligned}$$

Cela nous permet d'effectuer, $\forall t, s \in]0, T_1]$

$$\begin{aligned} | X_2(t) - X_1(t) | &= \left| \int_0^t (N[X_1](t, s) - N[X_0](t, s)) ds \right|, \\ &\leq T_1 K_{a,b} \| X_1 - X_0 \|_{C^0[0, T_1]}, \\ &\leq \delta \| X_1 - X_0 \|_{C^0[0, T_1]}. \end{aligned}$$

Maintenant, supposons que (P_n) est vrai et démontrons (P_{n+1})

$$\begin{aligned} \| X_{n+1}(t) - G(t) \|_{C^0[0, T_1]} &\leq \| X_{n+1}(t) - X_n(t) \|_{C^0[0, T_1]} + \| X_n(t) - X_{n-1}(t) \|_{C^0[0, T_1]} \\ &\quad + \dots + \| X_1(t) - X_0(t) \|_{C^0[0, T_1]}, \\ &\leq \delta^n \| X_1 - X_0 \|_{C^0[0, T_1]} + \delta^{n-1} \| X_1 - X_0 \|_{C^0[0, T_1]} \\ &\quad + \dots + \delta^0 \| X_1 - X_0 \|_{C^0[0, T_1]}, \\ &\leq \frac{1 - \delta^{n+1}}{1 - \delta} \| X_1 - X_0 \|_{C^0[0, T_1]}, \\ &\leq \frac{1}{1 - \delta} \| M[G] \|_{C^0[0, T_1]}. \end{aligned}$$

Cela nous permet d'effectuer pour tout $\forall t, s \in [0, T_1]$

$$\begin{aligned} | X_{n+2}(t) - X_{n+1}(t) | &= \left| \int_0^t (N[X_{n+1}](t, s) - N[X_n](t, s)) ds \right|, \\ &\leq T_1 K_{a,b} \| X_{n+1} - X_n \|_{C^0[0, T_1]}, \\ &\leq \delta^{n+1} \| X_1 - X_0 \|_{C^0[0, T_1]}. \end{aligned}$$

□

Dans ce qui suit, nous établissons l'existence de la solution en introduisant la séquence :

$$\forall n \geq 1, \quad X_n = \sum_{k=1}^n (X_k - X_{k-1}) + G.$$

Mais, $\sum_{k=1}^n (X_k - X_{k-1})$ est normalement convergente, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n (X_k - X_{k-1}) \right\|_{C^0[0, T_1]} &\leq \sum_{k=1}^n \| X_k - X_{k-1} \|_{C^0[0, T_1]}, \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} \delta^k \right) \| X_1 - X_0 \|_{C^0[0, T_1]}, \\ &\leq \frac{1}{1 - \delta} \| X_1 - X_0 \|_{C^0[0, T_1]}. \end{aligned}$$

alors,

$$\exists X \in C^0 [0, T_1], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} X_{n+1}(t) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^t N [X_n](t, s) ds + G(t), \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} X_{n+1}(t) &= \int_0^t \lim_{n \rightarrow +\infty} N [X_n](t, s) ds + G(t), \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} X_{n+1}(t) &= \int_0^t N \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n \right](t, s) ds + G(t). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\forall t, s \in [0, T_1], \quad X(t) = \int_0^t N [X](t, s) ds + G(t).$$

Supposant que sur $[0, T_1]$, notre équation a deux solutions X et \tilde{X} , avec,

$$\forall t, s \in [0, T_1], \quad \tilde{X}(t) = \int_0^t N [\tilde{X}](t, s) ds + G(t). \tag{2.8}$$

De même, nous concluons que,

$$\| X - \tilde{X} \|_{C^0[0, T_1]} \leq \delta \| X - \tilde{X} \|_{C^0[0, T_1]} .$$

Par conséquent, $\| X - \tilde{X} \|_{C^0[0, T_1]} = 0$. Cela établit l'unicité de la solution X .

Pour $t > T_1$, nous sélectionnons T_2 plus proche de T_1 de la même manière, et nous réécrivons notre équation sous la forme suivante :

$$\forall t, s \in [T_1, T_2], \quad X(t) = \int_{T_1}^t N[X](t, s) ds + G_1(t), \quad (2.9)$$

$$\text{où, } G_1(t) = \int_{T_1}^{T_2} N[X_1](t, s) ds + G(t),$$

et X_1 est la solution unique obtenue précédemment sur $[T_0, T_1]$. En utilisant le Théorème 1, qui établit la propriété de Lipschitz locale de N et en suivant les mêmes étapes qu'auparavant, nous démontrons que (18) a une solution unique $X_2 \in C^0[T_1, T_2]$.

Il est à noter que $X_1(T_1) = X_2(T_1)$, confirmant que

$$X_{1,2} = \begin{cases} X_1(t) & [0, T_1], \\ X_2(t) & [T_1, T_2]. \end{cases}$$

Appartenant à $C^0[T_0, T_2]$, elle se présente comme la solution unique de notre équation sur $[T_0, T_2]$.

En répétant ce processus pour les intervalles $[T_i, T_{i+1}]$, $2 \leq i \leq N - 1$, nous sommes en mesure de construire la solution exclusive de notre équation dans $C^0[0, T]$.

3 Simulation Numérique

Dans cette section, nous présentons une simulation numérique en utilisant la méthode de Nyström [26] avec la règle du trapèze [30]. Pour faciliter cela, nous introduisons une subdivision de $[0, T]$ comme suit :

$$\text{Pour tout } n \geq 2, \quad h = \frac{T}{n+1}, \quad t_j = (j-1)h, \quad 1 \leq i \leq j \leq n.$$

Les poids de la méthode d'intégration numérique sont donnés pour $1 \leq j \leq n$, par :

$$\begin{cases} W_1 = W_n = \frac{1}{2}, \\ W_j = 1, \quad 2 \leq j \leq n-1. \end{cases}$$

Une fois cette méthode appliquée à notre équation, nous obtenons, pour $n \geq 2$, le système non linéaire suivant :

$$\begin{aligned} X_1 &= 0, \\ X_i &= h \sum_{j=1}^i W_j (\mu_\alpha(t_i, t_j) X_j + \eta_\alpha(t_i, t_j) \\ &\quad h X_j^2 \sum_{p=1}^j W_p V_2(t_p) B_2(t_p) X_p \exp \left(-h \sum_{q=p}^j W_q V_3(t_q) X_q^2 \right)) + G(t_i), \quad 2 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

et $G(t_i)$ est approché en utilisant

$$G(t_i) \approx h \sum_{j=1}^i W_j \alpha \Omega_\alpha(t_i) V_1(t_j) A_1(t_j) + (1 - \alpha) \Omega_\alpha(t_i) (V_1(t_i) A_1(t_i) - V_1(t_1) A_1(t_1))$$

Que nous réécrivons comme

$$\begin{aligned} X_1 &= 0, \\ X_i &= \Phi_i(X_i) + \Psi_i, \quad 2 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

où,

$$\begin{aligned} \Phi_i(X_i) &= h W_i (\mu_\alpha(t_i, t_i) X_i + \eta_\alpha(t_i, t_i) h W_i V_2(t_i) B(t_i) X_i^3 \exp(-h W_i V_3(t_i) X_i^2)), \\ \Psi_i &= h \sum_{j=1}^{i-1} W_j (\mu_\alpha(t_i, t_j) X_j + \eta_\alpha(t_i, t_j) h X_j^2 \\ &\quad \sum_{p=1}^j W_p V_2(t_p) B(t_p) X_p \exp \left(-h \sum_{q=p}^j W_q V_3(t_q) X_q^2 \right)) + G(t_i). \end{aligned}$$

Pour chaque $2 \leq i \leq n$, X_i est approché en utilisant une suite de Banach de la forme

$$\begin{aligned} X_i^0 &= X_{i-1}, \\ X_i^{\nu+1} &= \Phi_i(X_i^\nu) + \Psi_i, \quad \nu \geq 0, \end{aligned}$$

avec la condition d'arrêt suivante $|X_i^{\text{new}} - X_i^{\text{old}}| < 10^{-7}$.

The sequence $\{X_i\}_{i=1}^n$, once computed, will be used to approximate the function Y using

$$Y_1 = 0,$$

$$Y_i = h \sum_{j=1}^i W_j V_2(t_j) B(t_j) X_j \exp \left(-h \sum_{p=j}^i W_p V_3(t_p) X_p^2 \right), \quad 2 \leq i \leq n.$$

Si nous prenons $t \in [0, 50]$, $A = 0.5 + 0.2 \cos(15\pi t)$, $B = 0.7 + 0.2 \cos(15\pi t)$, $V_1 = 2 + 0.2 \cos(15\pi t)$, $V_2 = 2 + 0.2 \cos(15\pi t)$, $V_3 = 2.4 + 0.1 \cos(15\pi t)$, $V_4 = 1.4 + 0.2 \cos(15\pi t)$, $\alpha = 0.999$ and $n = 1000$, nous obtenons la figure 4.1.

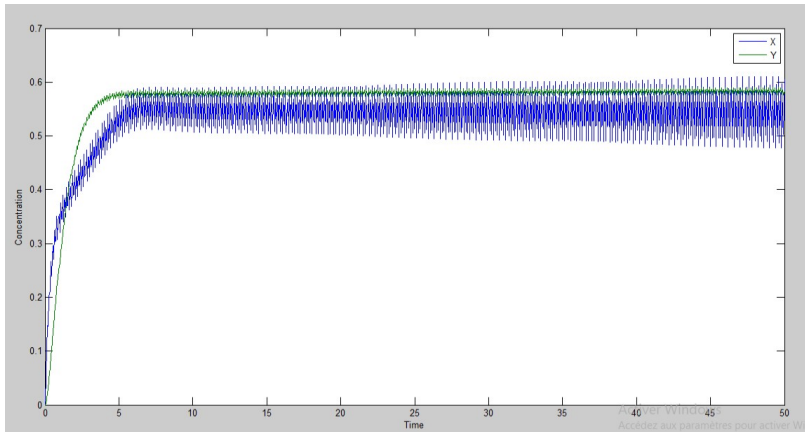


FIGURE 4.1 – $X(t)$ et $Y(t)$

Si nous prenons $t \in [0, 20]$, $A = 0.5 + 0.2 \cos(15\pi t)$, $B = 0.7 + 0.2 \cos(15\pi t)$, $V_1 = 2 + 0.2 \cos(15\pi t)$, $V_2 = 2 + 0.2 \cos(15\pi t)$, $V_3 = 2.4 + 0.1 \cos(15\pi t)$, $V_4 = 1.4 + 0.2 \cos(15\pi t)$, $\alpha = 0.999$ and $n = 200$, nous obtenons la figure 4.2.

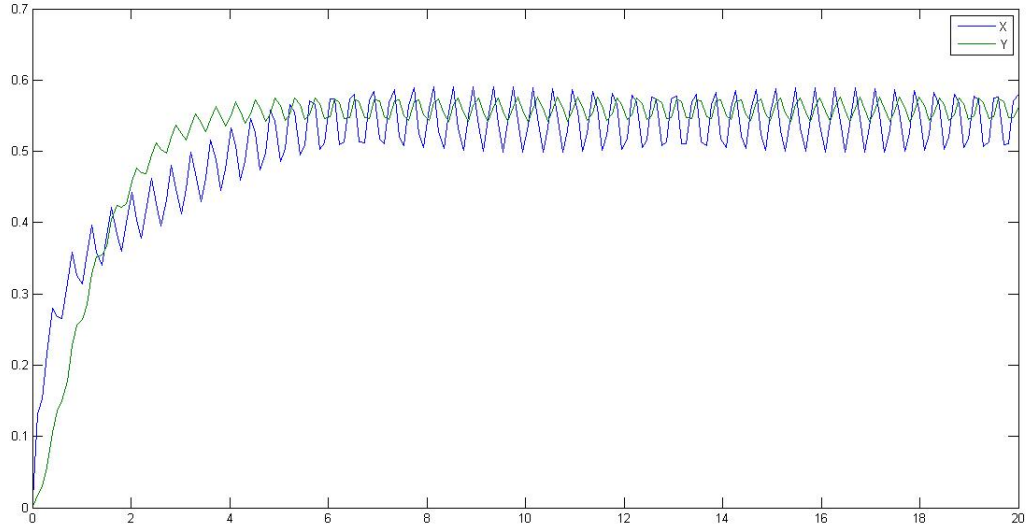


FIGURE 4.2 – $X(t)$ et $Y(t)$

$t \in [0, 5]$, $A = 0.5 + 0.2 \cos(15\pi t)$, $B = 0.7 + 0.2 \cos(15\pi t)$, $V_1 = 2 + 0.2 \cos(15\pi t)$, $V_2 = 2 + 0.2 \cos(15\pi t)$, $V_3 = 2.4 + 0.1 \cos(15\pi t)$, $V_4 = 1.4 + 0.2 \cos(15\pi t)$, $\alpha = 0.999$ and $n = 100$, nous obtenons la figure 4.4.

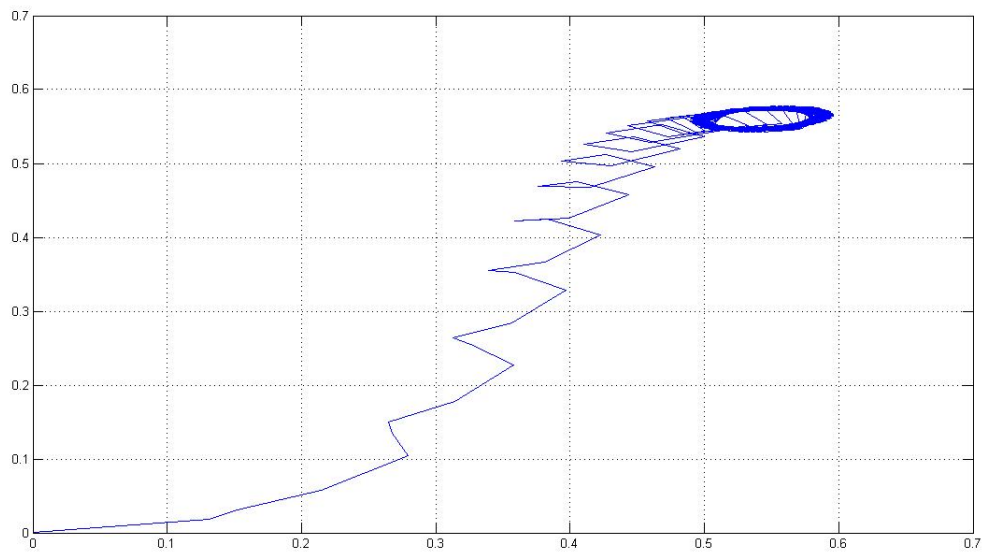


FIGURE 4.3 – Y en fonction de X

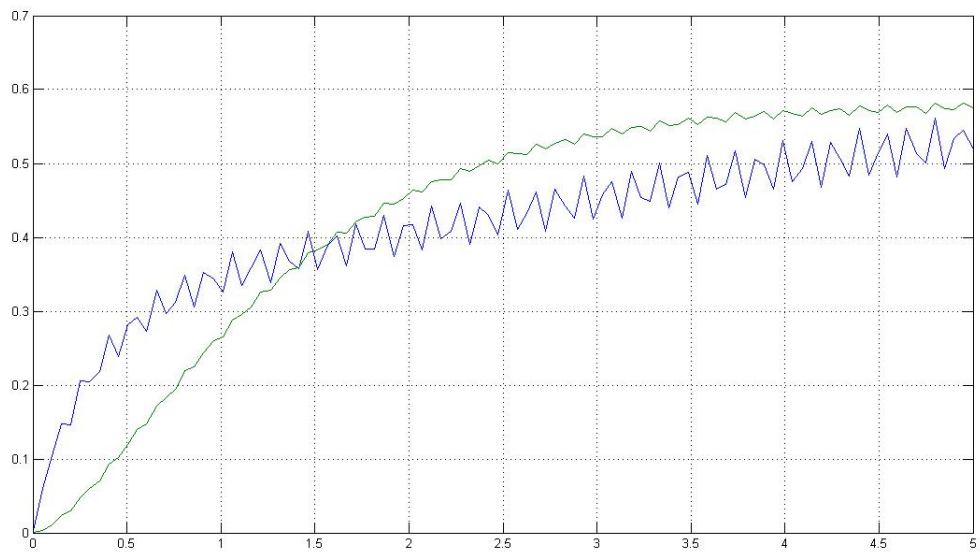


FIGURE 4.4 – $X(t)$ et $Y(t)$

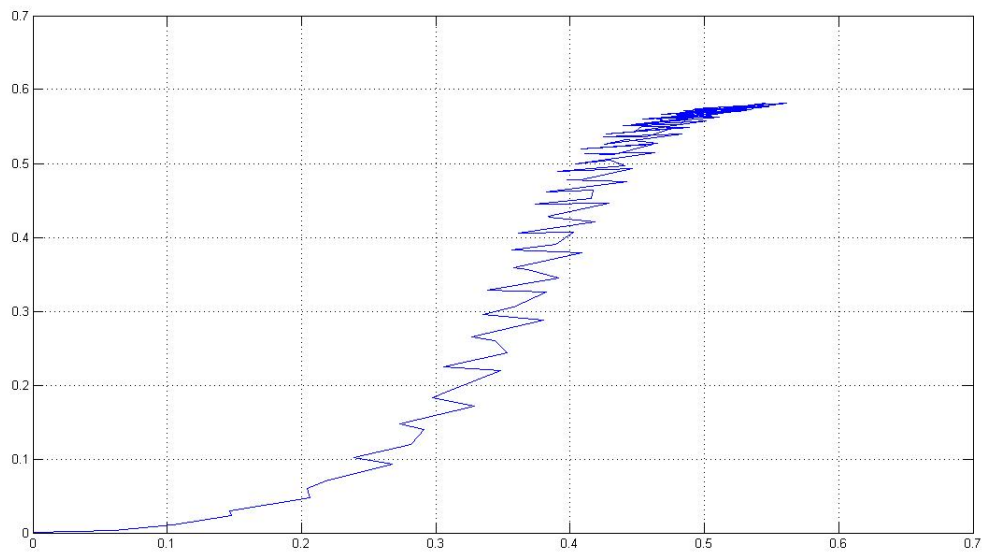


FIGURE 4.5 – Y en fonction de X

La présente thèse s'est attachée à approfondir la compréhension et l'application des modèles mathématiques dans l'analyse des phénomènes dynamiques complexes, en particulier en utilisant le modèle de Brusselator. En adoptant des méthodes analytiques et numériques innovantes, nous avons pu reformuler et étendre ce modèle par l'introduction de dérivées fractionnaires conformes. Cette approche a permis non seulement de capturer des comportements dynamiques plus riches et variés, mais aussi de proposer des solutions plus robustes et précises pour des systèmes non linéaires.

Nos travaux ont démontré que l'intégration de dérivées fractionnaires conformes, en particulier celle de Caputo-Fabrizio, dans le cadre du modèle de Brusselator offre une perspective nouvelle et prometteuse pour la modélisation de phénomènes oscillatoires et de diffusion. Nous avons établi l'existence et l'unicité de solution pour l'équation résultante, et développé des méthodes de simulation numérique performantes, telles que la méthode de Nyström, pour résoudre ces équations avec une précision accrue.

En outre, les simulations numériques ont confirmé la validité et l'efficacité de notre approche, montrant une concordance remarquable avec les phénomènes observés. Ces résultats ouvrent la voie à de nouvelles applications potentielles dans divers domaines scientifiques, tels que la biologie, la chimie, et la physique, où la modélisation des dynamiques complexes est essentielle.

En conclusion, cette thèse contribue significativement à l'avancement des méthodes mathématiques et numériques pour l'analyse des systèmes dynamiques complexes. Elle propose une méthodologie robuste et adaptable, enrichissant ainsi le

corpus de connaissances et d'outils disponibles pour les chercheurs. Nous espérons que ces travaux inspireront de futures recherches et applications, et qu'ils serviront de base solide pour des développements ultérieurs dans le domaine des systèmes dynamiques non linéaires.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Atangana, A., Baleanu, D. (2017). Fractional variational calculus with applications in mechanics. Springer.
- [2] Atkinson, K. E. The numerical solution of integral equations of the second kind. Cambridge University Press (1997).
- [3] Atkinson, K., Han, W. Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Approach. Springer New York (2009).
- [4] Belousov, B. P. (1959). A reaction with a periodic variation of the colour. Collection of Abstracts of Scientific Papers, Institute of Biological Physics, Academy of Sciences of the USSR, Moscow, 145-147.
- [5] Caputo Michel, Mauro Fabrizio. A new Denition of Fractional Derivative Without Singular Kernel. Progr. Frat. Dier. Appl. 2015 Apr, 1 (2) : 1-3. <https://doi.org/10.12785/pfda/010201>.
- [6] Cross, M. C., Rasmussen, P. G. (1978). Pattern formation in the Belousov-Zhabotinsky reaction. Journal of Chemical Physics, 69(7), 3239-3250.
- [7] Fang, Y., Wang, H. (2019). A Brusselator based model for the growth of a single cell under nutrient limitation. Scientific Reports, 9(1), 1-10.
- [8] Gautschi, Walter : Numerical Analysis, Springer, New York, 2012.
- [9] Grassberger, P., Mandelbrot, B. B. (1984). The strange attractor of the Belousov-Zhabotinsky reaction. Physics Letters A, 99(1-2),
- [10] Goryunov, V. E. The Andronov-Hopf Bifurcation in a Biophysical Model of the Belousov Reaction. Aut. Control Comp. Sci. 52, 694-699 (2018). <https://doi.org/10.3103/S0146411618070118>

- [11] Guebbai Hamza and Mourad Ghiat, New Conformable Fractional Derivative Denition for Positive and Increasing Functions and its Generalization, *Advances in Dynamical Systems and Applications*, Volume11, Number2, pp. 105111 (2016)
- [12] Gurevich, Y. M.Melnikov, A. V. (1978). Oscillations in a model of the Belousov-Zhabotinsky reaction. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1(1), 1-19
- [13] Ilya, Prigogine. and Lefever, R. (1971). Symmetry breaking in irreversible processes. *Journal of Chemical Physics*, 54(12), 4648-4654.
- [14] Kaplan, D. Nijhout,H.F. (1976). Oscillatory behavior in a model of the Belousov-Zhabotinsky reaction. *Journal of Chemical Physics*,
- [15] Khalil, R. Al Horani, M. Yousef, A. Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264,65-70.
- [16] Kundepudi, D and I. Prigogine, *Modern Thermodynamics : From Heat Engines to Dissipative Structures*, John Wiley and Sons, 1998,New York.
- [17] Liu, Y. Li, W. (2012). A Brusselator model for the spatial spread of epidemics. *Journal of Theoretical Biology*, 298, 106-112.
- [18] Linz, P. *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations*. SIAM Studies in Applied Mathematics. Philadelphia (1985)
- [19] Linz, P. *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations*, Society for Industrial Mathematics, (1987)
- [20] Manohara, G., Kumbinarasaiah, S. Fibonacci wavelet collocation method for the numerical approximation of fractional order Brusselator chemical model. *J Math Chem* (2023). <https://doi.org/10.1007/s10910-023-01521-4>
- [21] *Mathematical Modeling of the Brusselator* <https://www3.nd.edu/powers/mcdowell.pdf>
- [22] Moumen Bekkouche, M., Guebbai, H., Kurulay, M. et al. A new fractional integral associated with the Caputo–Fabrizio fractional derivative. *Rend. Circ. Mat. Palermo,II. Ser 70*, 1277–1288 (2021). <https://doi.org/10.1007/s12215-020-00557-8>
- [23] Tair Boutheina, Mourad Ghait, Hamza Guebbai, Mohemd Zine Aissaoui. Numerical Solution of Non-linear Volterra Integral Equation of the First Kind, *Bol. Soc. Paran. Mat.* 2023, 41, 1-11

- [24] Tsuda, T. Mori, H. (1994). A coupled Brusselator model for the formation of clouds and rain. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 51 (16), 2737-2749.
- [25] Saad A. Manaa, Rostam K. Saeed, Fadhil H. Easif, Numerical Stability of Brusselator System, *Raf. J. of Comp. and Maths.* Vol.8, No.2, 2011
- [26] Samko, S.G. Kilbas, A.A. Marichev, O.I. (1993). *Fractional integrals and derivatives: Theory and applications*. New York, NY: Gordon and Breach.
- [27] Sarwar, S. S, Iqbal. Stability analysis, dynamical behavior and analytical solutions of nonlinear fractional differential system arising in chemical reaction, *Chinese Journal of Physics*, Volume 56, 2018, 374-384, <https://doi.org/10.1016/j.cjph.2017.11.009>.
- [28] Segni, S. M. Ghiat and Hamza Guebbai, New approximation method for Volterra nonlinear integro-differential equation. <https://doi.org/10.1142/S1793557119500165>
- [29] Singh, P. (1983). Applications of the Brusselator model to chemical, biological and ecological systems. *Progress in Theoretical Physics*, 70(6), 1779-1792.
- [30] Sukhtayev, A. Zumbrun, K. Jung, S. and al. Diffusive Stability of Spatially Periodic Solutions of the Brusselator Model. *Commun. Math. Phys.* 358, 143 (2018). <https://doi.org/10.1007/s00220-017-3056-x>