

Ministère de l'Enseignement Supérieur  
et de la Recherche Scientifique  
Université 8 mai 1945 Guelma



وزارة التعليم العالي  
و البحث العلمي  
جامعة 8 ماي 1945 قالمة

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
et des Sciences de la Matière

Département de Mathématiques

## THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat

Option : Mathématiques

Intitulé

**Factorisation de matrices structurées et applications**

Par

***Amer MESBAHI***

Devant le jury composé de :

Mr. Mohamed Zine AISSAOUI	Prof. Université de Guelma	Président
Mr. Fateh ELLAGGOUNE	MCA. Université de Guelma	Encadreur
Mr. Abdeslem Hafid BENTBIB	Prof. Université de Marrakech	Examineur
Mr. Mohamed HAIOUR	Prof. Université de Annaba	Examineur
Mr. Messaoud MAOUNI	MCA. Université de Skikda	Examineur
Mr. Hamza GUEBBAI	MCA. Université de Guelma	Examineur

Thèse soutenue le : 25 Mai 2016



## ملخص

نقدم في الفصول الأول، الثاني و الثالث من هذه الأطروحة أدوات ومفاهيم في الجبر الخطي وطرق كتابة المصفوفات المهيكلة (هاملتونية، ضد هاملتونية، ...) على شكل جداء عوامل من المصفوفات، واستخدام مثل هذه الطرق هو أكثر كفاءة من وجهتي نظر : الاستقرار العددي وسرعة الحساب.

في الفصل الرابع نهتم بمصفوفات مهيكلة من نوع خاص، ونتيجتنا الأساسية هنا هي نظرية تعطي شكل شور مهيكل وهذا باستعمال عاكسات متعامدة ومهيكلة، وقد أظهرت النتائج العددية فعالية النهج المقترح.

**الكلمات المفتاحية :** مصفوفات مهيكلة، عاكسات مهيكلة، تفكيك متعامد، تفكيك إلى قيم مفردة، هاوس هولدر مهيكل، تفكيك شور.

## Résumé

Nous présentons dans les chapitres 1, 2 et 3 de cette thèse des outils d'algèbre linéaire et des méthodes de factorisation de matrices structurées (Hamiltonienne, anti-Hamiltonienne, symplectique). L'utilisation de telles méthodes est plus efficace de deux points de vue : stabilité numérique et rapidité de calcul. Le chapitre 4, il est principalement dédié aux matrices symplectiques. Notre principal résultat ici est un théorème qui donne une forme de Schur symplectique en utilisant des réflecteurs orthogonaux et symplectiques. Les résultats numériques montrent l'efficacité des approches proposées.

*Mots clés et phrases : matrice symplectique, réflecteurs symplectiques, décomposition ortho-SR, décomposition SVD, Householder symplectique, décomposition de Schur.*

# Abstract

We present in Chapters 1, 2 and 3 of this thesis linear algebra tools and methods of structured matrix factorization (Hamiltonian, anti-Hamiltonian, symplectic). The use of such methods is more efficient from two points of view: numerical stability and speed of calculation. Chapter 4, it is mainly devoted to symplectic matrices. Our main result here is a theorem that gives a form of Schur symplectic using orthogonal and symplectic reflectors. Numerical results show the effectiveness of proposed approaches.

***Key words and phrases :*** *symplectic matrix, symplectic reflector, ortho-SR decomposition, SVD decomposition, symplectic Householder, Schur decomposition.*

## Remerciements

Cette thèse a été effectuée entre octobre 2012 et janvier 2016 à la Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière de l'université 8 mai 1945 de Guelma, et la Faculté des Sciences et Techniques de l'université Cadi Ayyad de Marrakech.

J'espère avoir, au cours de mes études, et particulièrement de ces dernières années, remercié les personnes qui ont compté pour moi. Cependant ces quelques lignes me donnent l'occasion de réitérer ces remerciements pour certains et de les donner peut-être pour la première fois à d'autres.

Pour le soutien qu'il m'a accordé, je remercie vivement Monsieur Abdeslem Hafid Bentbib, professeur à la faculté des sciences et techniques de l'université de Marrakech, d'avoir accepté le co-encadrement de cette thèse et également de m'avoir accueilli au sein de LAMAI (Laboratoire de Mathématiques Appliquées et Informatique) où j'ai pu effectuer une grande partie de mon travail. Je lui suis reconnaissant de l'aide qu'il m'a apporté sur de multiples aspects théoriques à travers de nombreuses discussions, qui m'ont permises d'avancer sur le plan méthodologique. De plus, la grande disponibilité, ses précieux conseils et la patience qu'il m'a accordée tout au long de ce travail ont conduit à un encadrement idéal. J'ai également très apprécié son aide à la rédaction de ce manuscrit et à la préparation de la soutenance.

Mes vifs remerciements vont au monsieur Fateh Ellaggoune maître de conférence à l'université de Guelma, Il a très efficacement dirigé ce travail. Je lui exprime également toute ma gratitude pour les nombreux

conseils et remarques, ainsi que pour toutes les discussions fructueuses que nous avons eues. Je tiens à saluer aussi toute la confiance qu'il m'a accordée durant ce travail. Qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance et de mon amitié.

Mon respect et mes remerciements pour tout ce qu'ils m'ont appris et pour la bonne ambiance qui règne au sein de LAMAI, en particulier le professeur Nour Eddine Alaa pour son accueil et son gentillesse, et monsieur Ahmed Kanber membre au LAMAI. Je garderai de très bons souvenirs de mon passage à ce laboratoire.

Je tiens à remercier également Monsieur Mohamed Zine Aissaoui, professeur à l'université de Guelma, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury et aussi pour tout ce qu'il m'a appris, monsieur Mohamed Haiour, professeur à l'université d'Annaba, le maître de conférence Hamza Guebbai de l'université de Guelma et le maître de conférence Messaoud Maouni de l'université de Skikda, les rapporteurs de cette thèse. Je les remercie chaleureusement pour leur disponibilité, leur soutien et l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être membres du jury.

Par ailleurs, mes remerciements s'adressent également à tous les membres du département de Mathématiques de l'université de Guelma et de Souk Ahras, en particulier Dr. Abdeslem Bouguerra.

Je remercie ma mère, toute ma famille, et je remercie également mon frère Dr. Salim Mesbahi qui m'a guidé jusqu'à ce que je connaissais le professeur Abdeslem Hafid Bentbib, et sur les conseils donnés à moi toujours pour accomplir ce travail, et je remercie, aussi, tous mes amis, pour tout ce qu'ils m'ont apporté et que s'est avéré inestimable. ...Merci !

*À la mémoire de mon père,  
À ma mère,  
À Meriem et mes enfants Asma, Abdennour et Djoumana.*



# Table des matières

0.1	Table des notations . . . . .	4
0.2	Introduction générale . . . . .	5
<b>1</b>	<b>Outils de développement théoriques</b>	<b>14</b>
1.1	Introduction . . . . .	14
1.2	Définitions et propriétés . . . . .	15
1.3	Matrices structurées . . . . .	20
1.3.1	Matrice symplectique . . . . .	20
1.3.2	Matrice Hamiltonienne . . . . .	20
1.3.3	Matrice anti-Hamiltonienne . . . . .	21
1.3.4	Matrice $J$ -triangulaire . . . . .	22
1.4	La décomposition $SR$ et la forme $J$ -Hessenberg . . . . .	25
1.4.1	Produit scalaire associé à la matrice $J$ . . . . .	27
1.4.2	Normalisation . . . . .	30
1.4.3	Normes matricielles . . . . .	32
<b>2</b>	<b>Décomposition symplectique de type <math>SVD</math></b>	<b>35</b>
2.1	Introduction . . . . .	35
2.2	Décomposition en valeurs singulières . . . . .	40
2.2.1	Décomposition en valeurs singulières classique . . . . .	40
2.2.2	$SVD$ par matrice augmentée . . . . .	44
2.3	Algorithme $SVD$ –Jordan . . . . .	48

2.3.1	Forme canonique de Jordan . . . . .	49
2.3.2	Algorithme de décomposition <i>SVD</i> . . . . .	52
2.4	Algorithme <i>SVD</i> symplectique . . . . .	53
2.4.1	Algorithme du réflecteur symplectique . . . . .	53
2.4.2	Algorithme du réflecteur unitaire et symplectique . . . . .	55
2.4.3	Cas particulier : Réflecteur symplectique dans $\mathbb{R}^{2n \times 2}$ . . . . .	56
2.4.4	Decomposition de Schur d'une matrice anti-symétrique . . . . .	57
2.4.5	Algorithme <i>SVD</i> symplectique . . . . .	58
2.4.6	<i>SVD</i> d'une matrice symplectique . . . . .	66
2.5	Applications . . . . .	74
2.5.1	Imagerie numérique . . . . .	74
2.5.2	La corde vibrante . . . . .	75
2.5.3	Exemples Numériques . . . . .	77
<b>3</b>	<b>Transformation de Householder symplectique</b>	<b>80</b>
3.1	Introduction . . . . .	80
3.2	Householder symplectique . . . . .	81
3.3	Détermination du vecteur de Householder symplectique . . . . .	85
3.4	Transformations de Householder symplectique . . . . .	90
3.5	Transformations de Householder orthogonales et symplectiques . . . . .	94
3.6	Householder symplectique par bloc . . . . .	97
3.7	Relation entre Householder et réflecteur symplectique . . . . .	97
3.7.1	Relation dans le cas réel . . . . .	99
3.8	Exemples numériques . . . . .	100
3.9	Conclusion . . . . .	102
<b>4</b>	<b>Forme de Schur pour une matrice symplectique</b>	<b>103</b>
4.1	Introduction . . . . .	103
4.2	Notations et quelques définitions . . . . .	104

4.3	Réfecteurs Symplectiques dans $\mathbb{R}^{2n \times 2}$ . . . . .	106
4.3.1	Matrices symplectiques . . . . .	107
4.4	Décomposition $SR$ orthogonale . . . . .	112
4.5	Forme de Schur ortho-symplectique . . . . .	113
4.6	Exemples Numériques . . . . .	121
4.7	Conclusion Générale . . . . .	123
	Bibliographie . . . . .	123

## 0.1 Table des notations

$\mathbb{R}$	le corps des nombres réels.
$\mathbb{C}$	le corps des nombres complexes.
$\mathbb{k}$	corps commutatif, le corps de base. En général, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ .
$\mathbb{R}^{m \times n}$	l'espace des matrices à $m$ lignes et $n$ colonnes, à coefficients dans $\mathbb{R}$ .
$O_n(\mathbb{R})$	l'ensemble des matrices réelles orthogonales.
$M_n(\mathbb{R})$	l'ensemble des matrices réelles d'ordre $n$ .
$I_n$	la matrice identité d'ordre $n$ .
$I$	$I_n$ s'il n'y a pas de confusion.
$0_n$	la matrice nulle d'ordre $n$ .
$e_k$	la $k^{\text{ième}}$ colonne de $I$ .
$sp(A)$	le spectre de la matrice $A$ .
$A^{-1}$	l'inverse de la matrice $A$ .
$vect(A)$	Sous-espace engendré par les vecteurs colonnes de la matrice $A$ .
$span(e_1, e_2, \dots, e_3)$	Sous-espace engendré par la famille $(e_1, e_2, \dots, e_3)$ .
$A^T$	la matrice transposée de $A$ .
$A^{-T}$	$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ .
$A^H$	le transconjugué de la matrice $A$ .
$det(A)$	le déterminant de la matrice $A$ .
$\lambda(A)$	valeur propre de la matrice $A$ .
$tr(A)$	la trace de la matrice $A$ .
$x^T$	le transposé de vecteur $x$ .
$x^H$	le transconjugué de vecteur $x$ .
$\ x\ $	la norme euclidienne du vecteur $x$ .
$\langle, \rangle$	le produit scalaire usuel.
$\square$	fin de la démonstration.

## 0.2 Introduction générale

Les premiers vecteurs et valeurs propres viennent des équations différentielles (Lagrange 1759, *théorie du son*, par des matrices  $6 \times 6$  dans le but de calculer les perturbations séculaires des orbites des 6 planètes connues à l'époque). Aujourd'hui, le calcul des valeurs et vecteurs propres est indispensable dans toutes les branches de la science, en particulier pour la solution des systèmes des équations différentielles linéaires, en théorie de stabilité, pour les questions de convergence de processus itératifs, et en physique et chimie (mécanique, circuits, cinétique chimique, équation de Schrödinger).

Plusieurs livres traitant de méthodes numériques pour la résolution des problèmes de valeurs propres avec des matrices symétriques (ou hermitiques) ont été écrits et il ya quelques logiciels à la fois publiques et commerciales disponibles. Le livre de B. N. Parlett [26] est un excellent traité du problème. Malgré une assez forte demande par les ingénieurs et les scientifiques il ya peu d'écrits sur les problèmes non symétriques et encore moins est disponible en termes de logiciels. Le livre de J. H. Wilkinson [36] constitue toujours une référence importante. Certes, la science a évolué depuis la rédaction du livre de Wilkinson et a donc l'environnement informatique et de la demande pour résoudre de gros problèmes de la matrice. Les problèmes sont de plus en plus grande et plus complexe tout en même temps les ordinateurs sont en mesure de livrer des performances toujours plus élevées. Je souhaite que ce livre sera un petit pas à combler le fossé entre la littérature sur ce qui est disponible dans le cas symétrique et le cas non symétrique.

Les calculs des valeurs propres et les vecteurs propres de matrices est un des problèmes les plus importants en analyse numérique linéaire. Les techniques requérant la connaissance du spectre de matrices sont utilisées dans des domaines aussi variés que la mécanique quantique, l'analyse des structures, la théorie des graphes, les modèles de l'économie et le classement des pages de la Toile informatique par les moteurs de recherche. Par exemple, en mécanique des structures, les problèmes de « résonances » ou de « vibrations » de structures mécaniques, décrits par l'analyse spectrale, se ramènent à des calculs de valeurs et de vecteurs propres. Les problèmes de valeurs propres apparaissent

dans l'analyse de la stabilité de systèmes dynamiques. Dans un tout autre domaine, la chimie quantique donne lieu à des problèmes symétriques aux valeurs propres qui peuvent être gigantesques, tant par leur taille que par le nombre de valeurs et de vecteurs propres à extraire. Le théorème spectral énonce qu'une matrice normale peut être diagonalisée par une base orthonormée de vecteurs propres. On peut voir la décomposition en valeurs singulières SVD comme une généralisation du théorème spectral à des matrices arbitraires, qui ne sont pas nécessairement carrées, est primordiale en statistique et dans les problèmes de la « nouvelle économie » (reconnaissance de formes, fouille de données, exploitation de données, etc.).

Les problèmes de valeurs propres sont très riches, tant par leur variété que par le type de matrices que l'on doit traiter et par les méthodes et algorithmes de calcul à utiliser, les matrices peuvent être symétriques ou non symétriques, creuses ou pleines, et les problèmes peuvent être classiques ou généralisés ou même quadratiques. Il existe des applications qui requièrent le calcul d'un très petit nombre de valeurs propres, d'autres au contraire un grand nombre de valeurs propres ou même tout le spectre.

Le problème aux valeurs propres généralisées structuré  $P(\lambda)v = \sum_{i=0}^k \lambda^i M_i v = 0$  appelé aussi problème polynomial aux valeurs propres à structure Hamiltonienne apparaît dans de nombreuses applications en sciences de l'ingénieur, allant de l'analyse dynamique des systèmes structurels, tels que les ponts et les bâtiments, aux théories des particules élémentaires en physique atomique, la théorie du contrôle et des systèmes dynamiques. Ce problème peut être linéarisé afin d'obtenir un problème aux valeurs propres polynomial de degré 1 appelé aussi Pencil.

Nous présentons ci-dessous, quelques exemples de problème pencil :

**Exemple 1** voir [8] L'étude des points singuliers des matériaux élastiques anisotropes conduit à des problèmes aux valeurs propres généralisés sous la forme

$$\left( \begin{bmatrix} 0 & M \\ -K & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} M & 0 \\ G & M \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = 0$$

où  $M = M^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $K = K^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $G = -G^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Les matrices  $M$ ,  $K$  et  $G$  sont obtenues à partir d'une discrétisation par les éléments finis. Dans ce pencil, la première matrice est Hamiltonienne et la deuxième est anti-Hamiltonienne. Si nous multiplions le pencil par la matrice  $J = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}$  à gauche, nous obtenons le pencil équivalent suivant

$$\left( \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} G & M \\ -M & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = 0$$

**Exemple 2** voir [23] Un problème quadratique linéaire de contrôle optimal pour les systèmes descripteur conduit à un problème aux valeurs propres généralisé sous la forme

$$\left( \begin{bmatrix} A & BB^T \\ C^T C & -A^T \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E^T \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = 0$$

La première matrice est Hamiltonienne et la deuxième matrice est anti-Hamiltonienne. De même, nous pouvons multiplier par  $J$  afin d'obtenir le pencil équivalent suivant

$$\left( \begin{bmatrix} C^T C & -A^T \\ -A & -BB^T \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 0 & E^T \\ -E & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = 0$$

Dans laquelle la première matrice est symétrique et la deuxième est antisymétrique. Pour résoudre ce problème de valeurs propres généralisés, nous travaillons avec des matrices Hamiltoniennes et anti-Hamiltoniennes.

Le calcul de valeurs propres et de sous espaces invariants pour des matrices structurées a connu ces dernières années beaucoup de développement, il est la base de la résolution de problèmes dans plusieurs applications dont nous citons par exemple : la théorie du contrôle, le traitement de signal et le traitement d'image. La conservation de la structure d'origine de la matrice permet de donner des méthodes numériques moins coûteuses et plus précises. La modélisation de problèmes que nous rencontrons en physique, en

mécanique, en chimie en sciences de l'ingénieur, etc ... , conduit à la résolution d'équations algébriques de types Sylvester, Riccati et autres. Ces équations algébriques se ramènent au calcul de valeurs propres, de vecteurs propres et de sous-espaces invariants de matrices structurées.

Une matrice  $H$  de dimension  $2n \times 2n$  réelle est dite Hamiltonienne si elle est sous la forme

$$H = \begin{pmatrix} A & R \\ G & -A^T \end{pmatrix}$$

où  $A$ ,  $G$  et  $R$  dans  $\mathbb{R}^{n \times n}$  telles que  $G^T = G$  et  $R^T = R$ , Cela est équivalent à dire que  $H^J = -H$  où  $H^J = J^T H^T J$ .

Une matrice  $M$  de dimension  $2n \times 2n$  réelle est dite anti-Hamiltonienne si elle est sous la forme  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix}$  avec  $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , avec  $B^T = -B$  et  $C^T = -C$ . Cela est équivalent à dire que  $M^J = M$ .

Celle-ci est obtenue à partir de l'équation matricielle de Riccati :

$$G + AX + XA^T - XRX = 0 \tag{1}$$

La solution de l'équation (1) est liée au calcul de sous-espaces invariants de la matrice Hamiltonienne  $M$  associée.

Si les matrices  $Y, Z, W$  dans  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , avec  $Z$  non singulière, satisfont :

$$\begin{pmatrix} A & R \\ G & -A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} W$$

Alors  $X = YZ^{-1}$  est l'unique solution de l'équation algébrique de Riccati (1). Donc la résolution de l'équation (1) est liée à la détermination des sous-espaces invariants  $\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$  de la matrice Hamiltonienne correspondante  $H$ .



Si nous arrivons à déterminer une matrice inversible  $P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$  telle que

$P^{-1}HP$  soit réduite à la forme  $\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0_n & R_{22} \end{pmatrix}$ ; alors

$$H \begin{pmatrix} P_{11} \\ P_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} \\ P_{21} \end{pmatrix} R_{11}$$

donc  $X = P_{11}P_{21}^{-1}$  est solution de (1). Pour profiter de la structure Hamiltonienne de  $H$ , nous allons nous intéresser à chercher  $P$  symplectique. Celle-ci est obtenue à partir de l'équation matricielle de Riccati (1). La solution de l'équation (1) est liée au calcul de sous-espaces invariants de la matrice Hamiltonienne  $H$  associée.

Le calcul de la solution de l'équation algébrique de Riccati (1), intervient dans le problème de contrôle optimal. Comme par exemple, le problème de contrôle linéaire quadratique (LQ) suivant :

$$\min \int_0^{+\infty} [y(t)^T G y(t) + u(t)^T u(t)] dt$$

Où  $y(t) \in \mathbb{R}^n$  et le contrôle  $u(t) \in \mathbb{R}^n$  vérifient l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (2)$$

Il existe une solution unique  $\bar{u}$  du problème (LQ).

Sous des hypothèses classiques,  $\bar{u}$  est donné par la loi de Feedback  $\bar{u}(t) = -B^T \bar{X} \bar{y}(t)$  où  $\bar{X} > 0$  est solution de l'équation algébrique de Riccati :

$$G + AX + XA^T - XRX = 0 \quad \text{avec} \quad R = BB^T$$

**Théorème : (Factorisation QR).** Soit  $A$  une matrice réelle inversible. Il existe un

unique couple de matrices  $(Q, R)$ , où  $Q$  est unitaire ( $Q^{-1} = Q^*$ ), et  $R$  triangulaire supérieure dont tous les éléments diagonaux sont positifs, tel que

$$A = QR.$$

La méthode  $QR$  classique ne permet pas de conserver la structure d'origine de la matrice. Elle la traite comme n'importe quelle matrice de taille  $2n \times 2n$ . Par contre, l'utilisation de la décomposition  $SR$  dans une méthode de type  $QR$  garde la structure d'origine de la matrice. Plusieurs travaux ont été fait dans ce sens pour calculer les sous espaces invariants d'une matrice Hamiltonienne et donc de résoudre l'équation algébrique de Riccati, voir [5, 12, 13, 27, 32, 37]. D'autres approches ont été proposées dans la littérature, comme par exemple l'exploitation du carré de la matrice Hamiltonienne (anti-Hamiltonienne) pour calculer les valeurs propres, voir [41].

La décomposition  $SR$  qui n'est que l'équivalent de la factorisation  $QR$  dans le cas symplectique, est un étape fondamental dans les méthodes numériques proposées [6, 11, 14, 10, 15, 18, 25, 32, 33, 35]. Il existe deux types de factorisation  $SR$ . La première est une décomposition  $SR$  telle que  $S$  est orthogonale et symplectique et  $R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$  semi-J-triangulaire [25, 32] ( $R_{11}$  triangulaire supérieure et  $R_{21}$  strictement triangulaire supérieure). La deuxième est une factorisation  $SR$  telle que  $S$  est symplectique mais non-orthogonale et  $R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$  J-triangulaire [12] ( $R_{11}, R_{12}, R_{22}$  sont triangulaires supérieures et  $R_{21}$  strictement triangulaire supérieure). Paige et Van Loan [25] proposent la décomposition  $SR$  par l'utilisation de transformations orthogonales et symplectiques définies de deux manières. La première est basée sur l'utilisation de transformation de Householder orthogonale et symplectique, et la deuxième est basée sur les rotations de Givens symplectique, voir [32]. Gerstner et Mehrmann [12] proposent aussi une décomposition  $SR$  où  $S$  est symplectique non-orthogonale. Leur méthode est basée sur des transformations symplectiques.

L'objectif de cette thèse est de développer des méthodes numériques de résolution de problème aux valeurs propres généralisés qui respectent la structure et les propriétés spectrales du problème, et de contribuer au développement d'algorithmes numériques fiables pour les matrices symplectiques. Nous proposons une méthode itérative pour calculer la forme de Schur pour une matrice symplectique, en utilisant les réflecteurs orthosymplectiques. Ceci est dans le but de réduire le coût de calcul afin d'augmenter la précision. Le problème des valeurs propres des matrices Hamiltoniennes, anti-Hamiltoniennes et symplectiques a fait l'objet d'une grande attention ces dernières années du fait de ses applications dans la théorie de contrôle et le traitement du signal.

**Cette thèse est constituée de quatre chapitres :**

**Chapitre 1 :** Nous présentons les outils de développement théoriques nécessaires que nous utiliserons tout au long de cette thèse. Nous donnons quelques définitions, propriétés et remarques sur les matrices structurées (Hamiltoniennes, anti-Hamiltoniennes, symplectiques). Nous supposons connus les concepts classiques d'analyse numérique. Cependant, nous rappelons quelques notions et détails quand cela sera nécessaire.

**Chapitre 2 :** Dans ce chapitre on s'intéresse à savoir la décomposition de type SVD (Singular Value Decomposition) qui est utilisée, entre autres, dans le calcul de pseudo-inverse, dans la résolution de problèmes aux moindres carrés et dans les méthodes de régularisation. On l'emploie également en statistiques, en traitement du signal, en reconnaissance de formes. L'auteur Hongguo Xu, voir [38], a donné un algorithme qui calcule une décomposition de type SVD pour une matrice rectangulaire. Le théorème de la SVD classique peut s'énoncer comme suit : pour une matrice triangulaire  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , il existe  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \sigma_r \geq \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0$ , des matrices orthogonales  $U = [u_1, \dots, u_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $V = [v_1, \dots, v_m] \in \mathbb{R}^{m \times m}$  tels que  $A = \sum_{j=1}^r \sigma_j u_j v_j^T$  on a aussi  $Au_j = \sigma_j v_j$  et  $A^T v_j = \sigma_j u_j$ . Un vecteur singulier gauche  $u$  est un vecteur propre de  $AA^T$  associé à la valeur propre  $\sigma_i^2$ . Un vecteur singulier droit  $v$  est un vecteur propre de  $A^T A$  associé à la valeur propre  $\sigma_i^2$ . Le théorème d'Eckart-Young affirme que  $A^* = \sum_{j=1}^r \sigma_j u_j v_j^T$  est la meilleure approximation de  $A$  au sens des moindres carrés par une matrice rang  $k$ .

**Chapitre 3 :** Nous présentons, dans ce chapitre, la transformation de Householder symplectique définie dans le module libre  $\mathbb{R}^{2n \times 2}$ . Celle-ci présente une ressemblance formelle avec la transformation de Householder classique dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^{2n}$ . Un algorithme, qui produit la décomposition  $SR$  par les transformations de Householder symplectique ou orthogonal et symplectique, est obtenu par le même schéma que la décomposition  $QR$  par la transformation de Householder classique. Ces transformations décomposent une matrice  $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2p}$  sous la forme  $A = SR$  où  $S \in \mathbb{R}^{2n \times 2p}$  est symplectique ou orthogonale et symplectique et  $R$  soit J-triangulaire ou semi-J-triangulaire. Ses études présente l'avantage de transformer une matrice  $X \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$  en une matrice  $E_1C$  avec  $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  via une seule transformation de Householder symplectique. Plusieurs testes numériques montrent l'efficacité de ses transformations. Une comparaison est donné avec les transformations de Paige et Van Loan ainsi que celles données dans [29].

**Chapitre 4 :** Nous présentons dans ce chapitre une méthode itérative constructive pour calculer la forme de Schur orthogonale et symplectique. cette forme est utilisé pour calculer les valeurs propres et sous-espaces invariants de matrices symplectiques. Parce que, il est un problème ouvert de longue date pour calculer les valeurs propres et la forme de Schur en particulier celle comment a conservé la structure des matrices [6, 7]. Dans le cas d'un problème de valeurs propres de matrices structurées, la préservation de cette structure peut aider à exploiter la symétrie du problème et d'améliorer la précision et l'efficacité des calculs de sous-espaces invariants et les valeurs propres [16]. Notre méthode proposée ici, est basée sur une factorisation  $SR$  orthogonale et symplectique, qui est basée sur des réflecteurs orthogonaux et symplectiques.

L'orthogonalité est utilisé pour préserver la stabilité, et la symplecticité pour préserver la structure. Nous donnons et prouvons un théorème sur la forme orthogonale et symplectique de Schur pour une matrice symplectique réelle. Un algorithme qui calcule la forme de Schur structurée est donnée et les résultats expérimentaux numériques sont présentés pour illustrer l'efficacité de notre approche.

On termine cette thèse par une conclusion et quelques références.

# Chapitre 1

## Outils de développement théoriques

### 1.1 Introduction

Ce chapitre examine la théorie de la matrice de base et introduit certains notation, définitions et propriétés élémentaires utilisés dans les autres chapitre de thèse. Les matrices sont des objets qui représentent les applications linéaires entre espaces vectoriels. Les notions qui seront principalement utilisés sont très intimement liée à ces applications linéaires et il est possible de discuter de valeurs propres des opérateurs linéaires sans jamais mentionner leurs représentations matricielles.

Toutefois, l'analyste numérique, ou de l'ingénieur, toute théorie qui serait développé de cette manière serait insuffisant en ce qu'il ne sera pas d'un grand secours dans le développement ou la compréhension des algorithmes de calcul. L'abstraction des applications linéaires sur les espaces vectoriels ne fournit cependant des définitions très concis et quelques théorèmes importants.

Aussi, dans ce chapitre, nous donnons, particulièrement, les définitions et les propriétés des matrices structurées (Hamiltonienne, anti-Hamiltonienne, symplectique, ...). Nous étudions chaque type de matrice et nous donnons des relations entre elles. Nous rappelons quelques outils déjà définis dans la thèse de Agoujil [3] et la thèse de Kanber [21] qui seront très utile tout au long de cette thèse. On ne considère que des matrices

carrées, les matrices rectangulaires peuvent être étudiées de la même manière. Dans le cas où la taille des matrices n'est pas précisée, nous choisissons  $2n \times 2n$ .

## 1.2 Définitions et propriétés

### Définition 1.2.1

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ . La matrice  $A$  est dite

- diagonale si  $A_{ij} = 0$  pour tout  $(i, j)$  tel que  $i \neq j$

(on désigne alors  $A$  par  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ , où  $\lambda_i = A_{ii}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ ),

- Symétrique si  $A = A^T$ ,
- Orthogonale si  $A^{-1} = A^T$ ,
- Unitaire si  $A^{-1} = A^*$ ,
- Normale si  $AA^* = A^*A$ ,
- hermitienne si  $A = A^*$  et  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,
- Auto-adjointe si  $A = A^*$ ,
- Symétrique positive, lorsque  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , si  $A$  est symétrique et si pour tout vecteur

$v$  de  $\mathbb{K}^m$ ,  $v^T Av \geq 0$ ,

- Symétrique définie positive, lorsque  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , si  $A$  est symétrique et si pour tout vecteur  $v$  de  $\mathbb{K}^m \setminus \{0\}$ ,  $v^T Av > 0$ .

- hermitienne positive, lorsque  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , si  $A$  est hermitienne et si pour tout vecteur  $v$  de  $\mathbb{K}^m$ ,  $\bar{v}^T Av \geq 0$ ,

- hermitienne définie positive, lorsque  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , si  $A$  est hermitienne et si pour tout vecteur  $v$  de  $\mathbb{K}^m \setminus \{0\}$ ,  $\bar{v}^T Av > 0$ .

- Triangulaire inférieure si  $\alpha_{ij} = 0$  pour tout  $(i, j)$  tel que  $i < j$ .

- Triangulaire supérieure si  $\alpha_{ij} = 0$  pour tout  $(i, j)$  tel que  $i > j$ .

### Quelques exemples de matrices

- Une matrice symétrique non hermitienne :  $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ .

- Une matrice hermitienne non symétrique :  $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ .
- Une matrice symétrique et hermitienne :  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .
- La transposée d'une matrice  $A = (\alpha_{ij})$  est notée par  $A^T = (\alpha_{ji})$ . Nous posons  $J = J_{2n} = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}$  où  $0_n$  et  $I_n$  sont respectivement la matrice nulle et la matrice identité de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . La matrice  $J$  est antisymétrique et orthogonale ( $J^T = -J = J^{-1}$ ). La matrice  $J$  joue un rôle important dans l'étude des matrices structurées. Nous commençons par étudier ces propriétés, le déterminant de  $J$  vaut 1.

**Définition 1.2.2** Nous définissons le  $J$ -transposé ( $J$ -conjugué) d'une matrice réelle de dimension  $2n \times 2n$  par  $M^J = J^T M^T J$ .

**Définition 1.2.3** On dit que la matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$  est inversible ou régulière s'il existe une matrice  $B$  telle que  $AB = BA = I$  ( $I$  désigne la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ ). La matrice  $B$  est notée  $A^{-1}$  et appelée inverse de  $A$ .

**Propriété 1.2.1**  $\forall M, N \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,

$$(M + N)^J = M^J + N^J, \quad (MN)^J = N^J M^J, \quad (M^J)^J = M, \quad (M^{-1})^J = (M^J)^{-1}$$

Démonstration. D'après la définition 1.2.2, nous avons

$$\begin{aligned} (M + N)^J &= J_{2n}^T (M + N)^T J_{2n} = J_{2n}^T M^T J_{2n} + J_{2n}^T N^T J_{2n} = M^J + N^J \\ (MN)^J &= J_{2n}^T (MN)^T J_{2n} = J_{2n}^T N^T M^T J_{2n} \end{aligned}$$

comme la matrice  $J$  est orthogonale, nous obtenons  $J_{2n} J_{2n}^T = I_{2n}$ .

$$\begin{aligned} (MN)^J &= J_{2n}^T N^T M^T J_{2n} = J_{2n}^T N^T J_{2n} J_{2n}^T M^T J_{2n} = N^J M^J \\ (M^J)^J &= J_{2n}^T J_{2n}^T M^T J_{2n} J_{2n} = M \\ (M^{-1})^J &= J_{2n}^T (M^{-1})^T J_{2n} = J_{2n}^T (M^{-1})^T J_{2n} = J_{2n}^T (M^T)^{-1} J_{2n} \end{aligned}$$



puisque  $J_{2n}^T = -J_{2n} = J_{2n}^{-1}$ , nous obtenons  $(M^{-1})^J = (J_{2n}^T M^T J_{2n})^{-1} = (M^J)^{-1}$ .  $\square$

Soit  $(e_i)_{1 \leq i \leq 2n}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^{2n}$ . Posons  $E_i = [e_i \ e_{n+i}]$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$  et  $K = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

Nous avons  $e_{n+i} = -J e_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ .

La famille  $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$  forme une base symplectique dans le  $K$ -module libre  $\mathbb{R}^{2n \times 2}$  avec  $K = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Elle vérifie,

$$E_i J_2 = J_{2m} E_i, \quad E_i^J = E_i^T \quad \text{et} \quad E_i^J E_j = \delta_{ij} I_2 \quad \text{où} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

**Remarque 1.2.1** La matrice  $J$  est symplectique.

Considérons la matrice de permutation  $P = [e_1, e_3, \dots, e_{2n-1}, e_2, \dots, e_{2n}]$

La matrice  $P^T$  est explicitement donnée par  $P^T = [e_1, e_{n+1}, e_2, e_{n+2}, \dots, e_n, e_{2n}]$

De plus, nous avons  $P^T \text{diag}(J_2, \dots, J_2) P = J$ .

**Proposition 1.2.1** L'ensemble  $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$  où  $V_i = [v_i \ v_{n+i}] \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) est une base du  $K$ -module libre  $\mathbb{R}^{2n \times 2}$  ( $K = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ) si et seulement si  $(v_i)_{1 \leq i \leq 2n}$  est une base de l'espace  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Démonstration. Soient  $W = [xy]$  une matrice réelle d'ordre  $2n \times 2n$  et  $(v_i)_{1 \leq i \leq 2n}$  une base de l'espace  $\mathbb{R}^{2n}$ . Les vecteurs  $x$  et  $y$  sont écrits comme combinaison linéaire de  $(v_i)_{1 \leq i \leq 2n}$  sur  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i v_i \\ y = \sum_{j=1}^{2n} \beta_j v_j \end{cases}, \quad \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R} \quad \text{pour } i, j = 1, \dots, 2n$$

Donc,

$$\begin{aligned}
W &= \left[ \sum_{i=1}^{2n} \alpha v_i \quad \sum_{j=1}^{2n} \beta_j v_j \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \left[ \alpha_i v_i + \alpha_{n+i} v_{n+i} \quad \beta_i v_i + \beta_{n+i} v_{n+i} \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \left[ v_i \quad v_{n+i} \right] \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \alpha_{n+i} & \beta_{n+i} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^n V_i M_i \quad \text{avec} \quad V_i = [ v_i \quad v_{n+i} ] \quad \text{et} \quad M_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \alpha_{n+i} & \beta_{n+i} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

L'espace  $\mathbb{R}^{2n \times 2}$  peut être considéré comme un espace vectoriel à droite sur  $K = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , de dimension  $n$ , c'est à dire tout  $U \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$  peut être représenté, d'une façon unique, comme une combinaison linéaire à droite  $U = \sum_{i=1}^n E_i M_i$ , où  $M_i = E_i^T U = E_i^J U \in K$ .

**Proposition 1.2.2** Soit  $U = [ u \quad v ]$  une matrice réelle de taille  $2n \times 2$  avec  $u = \sum_{i=1}^{2n} u_i e_i$  et  $v = \sum_{j=1}^{2n} v_j e_j$ . Alors  $U$  s'écrit d'une façon unique comme combinaison linéaire de  $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$  sur l'anneau  $K = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

$$U = \sum_{i=1}^n E_i M_i \quad \text{où} \quad M_i = \begin{pmatrix} u_i & v_i \\ u_{n+i} & v_{n+i} \end{pmatrix}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
U &= \left[ \sum_{i=1}^{2n} u_i e_i \quad \sum_{j=1}^{2n} v_j e_j \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \left[ u_i e_i + u_{n+i} e_{n+i} \quad v_i e_i + v_{n+i} e_{n+i} \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \left[ e_i \quad e_{n+i} \right] \begin{pmatrix} u_i & v_i \\ u_{n+i} & v_{n+i} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Cela montre que toute matrice dans  $\mathbb{R}^{2n \times 2}$  s'écrit d'une façon unique comme combinaison linéaire de  $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$  sur l'anneau  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ .  $\square$

**Lemme 1.2.1** Soit  $M$  une matrice réelle de dimension  $(2n \times 2n)$ . Alors  $M$  s'écrit d'une façon unique sous la forme suivante :

$$M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p E_i M_{ij} E_j^T \quad \text{où} \quad M_{ij} = \begin{pmatrix} m_{ij} & m_{i,p+j} \\ m_{n+i,j} & m_{n+i,p+j} \end{pmatrix}$$

Son  $J$ -transposé est donné par,

$$M^J = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_j M_{ij}^J E_i^T \quad \text{où} \quad M_{ij}^J = \begin{pmatrix} m_{n+i,n+j} & -m_{i,n+j} \\ -m_{n+i,j} & m_{ij} \end{pmatrix}$$

Démonstration. Nous avons,  $M = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} e_i m_{ij} e_j^T$  donc,

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} e_i m_{ij} e_j^T \\ &= \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^n (e_i m_{ij} e_j^T + e_i m_{i,j+n} e_{j+n}^T) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (e_i m_{ij} e_j^T + e_{i+n} m_{n+ij} e_j^T + e_i m_{ij+n} e_{j+n}^T + e_{n+i} m_{n+ij+n} e_{j+n}^T) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_i \begin{pmatrix} m_{ij} & m_{i,n+j} \\ m_{n+i,j} & m_{n+i,n+j} \end{pmatrix} E_j^T \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_i M_{ij} E_j^T \end{aligned}$$

Comme  $M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_i M_{ij} E_j^T$  alors  $M^J = J_{2n}^T (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_i M_{ij} E_j^T)^T J_{2n}$ .

Puisque  $J_{2n}^T J_{2n} = J_{2n} J_{2n}^T = I_{2n}$  et  $E_i^T = E_i^J$  nous avons,

$$M^J = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n J_{2n}^T E_j J_{2n} J_{2n}^T M_{ij}^T J_{2n} J_{2n}^T E_i^T J_{2n}$$

D'où le résultat souhaité,  $M^J = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_j M_{ij}^J E_i^T$ .  $\square$

**Définition 1.2.4** Une matrice  $A$  est normal si et seulement si chacun de ses vecteurs

propres est aussi un vecteur propre de  $A^H$ .

**Corollaire 1.2.1** Une matrice normale dont les valeurs propres sont réelles est hermitienne.

## 1.3 Matrices structurées

### 1.3.1 Matrice symplectique

**Définition 1.3.1** Une matrice  $S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  est dite symplectique si et seulement si

$$S^H J S = J$$

**Exemples de matrices symplectiques :**

- La matrice  $J_{2n} = \begin{pmatrix} I_n & O_n \\ O_n & -I_n \end{pmatrix}$  est symplectique. elle est aussi orthogonale, car

$$J_{2n}^{-1} = J_{2n}^T = J_{2n}^H$$

- La matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a pour valeurs propres  $2i, -2i, \frac{i}{2}, -\frac{i}{2}$ .

### 1.3.2 Matrice Hamiltonienne

**Définition 1.3.2** Une matrice  $H \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  est dite Hamiltonienne si et seulement si  $H^J = -H$ . Autrement dit, une matrice  $H$  est Hamiltonienne si elle est sous la forme

suivante  $H = \begin{pmatrix} A & F \\ G & -A^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  où  $A, F$  et  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  avec  $F^T = F$  et  $G^T = G$ .

**Propriétés 1.3.1**

- \* La transposée d'une matrice Hamiltonienne est Hamiltonienne.
- \* La trace d'une matrice Hamiltonienne est nulle.
- \* Les valeurs propres de  $M$  sont symétriques par rapport à l'axe imaginaire.
- \* L'exponentiel d'une matrice Hamiltonienne est symplectique.
- \* Le carré d'une matrice Hamiltonienne est anti-Hamiltonien.

**Lemme 1.3.1** Soit  $H = \begin{pmatrix} A & E \\ F & -A^T \end{pmatrix}$  une matrice Hamiltonienne où  $A, E, F \in$

$\mathbb{R}^{n-k \times n-k}$  avec  $1 \leq k \leq n$ . Alors  $M = \begin{pmatrix} I_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & E \\ 0 & 0 & -I_k & 0 \\ 0 & F & 0 & -A^T \end{pmatrix}$  est une matrice Hamilto-

nienne d'ordre  $2n \times 2n$ .

Démonstration.  $H$  est Hamiltonienne équivaut à  $H^J = -H$ . Posons

$$M = \begin{pmatrix} I_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & E \\ 0 & 0 & -I_k & 0 \\ 0 & F & 0 & -A^T \end{pmatrix} \quad \text{alors,} \quad M^J = \begin{pmatrix} -I_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A & 0 & -E^T \\ 0 & 0 & I_k & 0 \\ 0 & -F^T & 0 & A^T \end{pmatrix}$$

Or  $E^T = E$  et  $F^T = F$  Donc  $M^J = -M$ . D'où  $M$  est Hamiltonienne.  $\square$

### 1.3.3 Matrice anti-Hamiltonienne

**Définition 1.3.3** Une matrice  $M \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  est dite anti-Hamiltonienne si et seulement si  $M^J = M$ . Autrement dit,  $M$  est anti-Hamiltonienne si elle est sous la forme

suivante  $M = \begin{pmatrix} A & F \\ G & A^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  où  $A, F$  et  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  avec  $F^T = -F$  et  $G^T = -G$ .

**Propriétés 1.3.2**

- \* Si  $M$  est une matrice Hamiltonienne alors  $M^2$  est anti-Hamiltonienne.
- \* Si  $S$  est une matrice symplectique alors  $S + S^{-1}$  est anti-Hamiltonienne..
- \* Toute matrice anti-Hamiltonienne est obtenue par le carré d'une matrice Hamiltonienne.

Démonstration.

\* Posons  $M = H^2$ . Puisque  $H$  est Hamiltonienne ( $H^J = -H$ ),  $W^J = H^J H^J = H^2 = W$ . D'où  $M$  est anti-Hamiltonienne.

\*  $S$  est symplectique équivalent à  $S^J S = I_2$ . Ceci donne  $S^J = S^{-1}$ . Posons  $M = S + S^{-1}$ , alors  $M^J = (S + S^J)^J = S^J + S = S + S^{-1} = M$ . D'où  $M$  est anti-Hamiltonienne.  $\square$

### 1.3.4 Matrice $J$ -triangulaire

#### Matrice $J$ -triangulaire inférieure

**Définition 1.3.4** Une matrice réelle  $L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_i L_{ij} E_j^T$  de taille  $2n \times 2n$  est dite  $J$ -triangulaire inférieure si  $L_{ij} = 0_{2 \times 2}$  pour  $j > i$  et  $L_{ii} = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$ , (i.e.,  $L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i E_i L_{ij} E_j^T$ ).

#### Matrice $J$ -triangulaire supérieure

**Définition 1.3.5** Une matrice réelle  $U = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_i U_{ij} E_j^T$  de taille  $2n \times 2n$  est dite  $J$ -triangulaire supérieure si  $U_{ij} = 0_{2 \times 2}$  pour  $i > j$  et  $U_{ii} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ , (i.e.,  $U = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n E_i U_{ij} E_j^T$ ).

#### Remarques 1.3.1

- Une matrice réelle de taille  $2n \times 2n$  qui est à la fois  $J$ -triangulaire supérieure et  $J$ -triangulaire inférieure est diagonale.
- Si  $U$  est une matrice  $J$ -triangulaire supérieure (respectivement,  $J$ -triangulaire inférieure), alors  $P^T U P$  est  $J$ -triangulaire supérieure (respectivement,  $J$ -triangulaire inférieure).

rieure) où  $P = [e_1, e_{n+1}, e_2, e_{n+2}, \dots, e_n, e_{2n}]$ .

**Proposition 1.3.1** Soient  $M$  et  $N$  deux matrices réelles  $J$ -triangulaires supérieures de taille  $2n \times 2n$  (respectivement,  $J$ -triangulaires inférieures). Le produit  $P = MN$  reste  $J$ -triangulaire supérieure (respectivement,  $J$ -triangulaire inférieure).

Démonstration. Soient  $M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n E_i M_{ij} E_j^T$  et  $N = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n E_i N_{ij} E_j^T$  deux matrices réelles  $J$ -triangulaires supérieures de taille  $2n \times 2n$ . Le produit des matrices  $M$  et  $N$  donne

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n E_i M_{ij} \sum_{k=j}^n N_{jk} E_k^T \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n E_i \underbrace{\left( \sum_{j=i}^k M_{ij} N_{jk} \right)}_{P_{ik}} E_k^T \end{aligned}$$

Ce qui montre que  $P = MN$  reste  $J$ -triangulaire supérieure. (La preuve est semblable, lorsque  $M$  et  $N$  sont  $J$ -triangulaires inférieures).  $\square$

**Définition 1.3.6**  $U = [u_1, u_2] \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$  est appelée  $J$ -isotropique si

$$U^J U = (u_1^T J u_2) I_2 = 0_2$$

## L'inverse d'une matrice $J$ -triangulaire

**Proposition 1.3.2** L'inverse d'une matrice réelle régulière  $J$ -triangulaire supérieure (respectivement,  $J$ -triangulaire inférieure) de taille  $2n \times 2n$  est également  $J$ -triangulaire supérieure (respectivement,  $J$ -triangulaire inférieure).

Démonstration. Soit  $U = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n E_i U_{ij} E_j^T$  une matrice réelle  $J$ -triangulaire supérieure de taille  $2n \times 2n$ . La proposition suivante ( $P_k$ ) :  $U^{-1} E_k = \sum_{l=1}^k E_l C_l$ , où  $(C_l)_{1 \leq l \leq k}$  sont des matrices réelles de taille  $2 \times 2$ , est vrai pour  $k = 1$ . Supposons que  $(P_i)_{1 \leq i \leq k}$  soient vraies pour  $1 \leq i \leq k$ , ( $k < n$ ). Alors pour  $i = k + 1$ , nous avons

$U^{-1}E_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} E_i U_{ik+1}$ , donc

$$\begin{aligned} \underbrace{U^{-1}(UE_{k+1})}_{E_{k+1}} &= U^{-1} \left( \sum_{i=1}^k E_i U_{i,k+1} + E_{k+1} U_{k+1,k+1} \right) \\ &= \sum_{i=1}^k U^{-1} E_i U_{i,k+1} + U^{-1} E_{k+1} U_{k+1,k+1} \end{aligned}$$

Comme  $U_{k+1,k+1} = \begin{pmatrix} u_{k+1,k+1} & * \\ 0 & u_{n+k+1,n+k+1} \end{pmatrix}$  est inversible et grâce à l'hypothèse de récurrence, nous obtenons

$$\begin{aligned} U^{-1}E_{k+1} &= E_{k+1}U_{k+1,k+1}^{-1} - \sum_{i=1}^k U^{-1}E_i (U_{i,k+1}U_{k+1,k+1}^{-1}) \\ &= E_{k+1}U_{k+1,k+1}^{-1} - \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^i E_j C_j \right) (U_{i,k+1}U_{k+1,k+1}^{-1}) \\ &= E_{k+1}U_{k+1,k+1}^{-1} - \sum_{j=1}^k E_j C_j \left( \sum_{i=j}^k U_{i,k+1}U_{k+1,k+1}^{-1} \right) \\ &= \sum_{l=1}^{k+1} E_l G_l \end{aligned}$$

avec

$$G_{k+1,k+1} = U_{k+1,k+1}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u_{k+1,k+1}} & * \\ 0 & \frac{1}{u_{n+k+1,n+k+1}} \end{pmatrix}$$

□



## 1.4 La décomposition $SR$ et la forme $J$ -Hessenberg

On appelle décomposition  $SR$  d'une matrice  $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ , une décomposition  $A = SR$  telle que  $S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  est symplectique ( $S^{-1} = S^J$ ) et  $R$  est  $J$ -triangulaire supérieure. La décomposition  $SR$  joue un rôle fondamental dans la recherche de sous espaces invariants de matrices structurées (Hamiltonienne, anti-Hamiltonienne, symplectique). Pour plus de détails sur la décomposition  $SR$ , voir [3].

**Définition 1.4.1** Une matrice  $H$  est dite sous la forme  $J$ -Hessenberg, si

$$H = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i-1}^n E_i H_{ij} E_j^T$$

avec  $H_{i,i-1} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  sont des matrices diagonales, ( $H_{ij} = 0_2$  pour  $i - j > 1$ ).

Pour la recherche de sous espaces invariants de matrices structurées, on réduit d'abord  $A$  sous la forme  $J$ -Hessenberg ( $H = S^J A S$ ), puis on applique une méthode de type  $QR$  de Francis, où à l'étape  $QR$  on fait une décomposition  $SR$  voir [3].

La réduction sous la forme  $J$ -Hessenberg est importante, puisque cette forme est conservée dans le processus de la méthode symplectique de type  $QR$ .

Démonstration. soit  $H$  la forme de  $J$ -Hessenberg. Nous avons

$$H = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i-1}^n E_i H_{ij} E_j^T$$

où  $H_{i,i-1} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  sont des matrices diagonales et  $H_{ij} = 0_2$  pour  $i - j > 1$ .

Nous appliquons la décomposition  $SR$  à la matrice  $H$ . Nous avons  $H = SR$ , avec  $S$  une matrice symplectique et  $R = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n E_i R_{ij} E_j^T$  une matrice  $J$ -triangulaire avec  $R_{ii}$  diagonales.

Posons  $S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_i S_{ij} E_j^T$ ; alors nous obtenons

$$SR = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_i S_{ij} E_j^T \right) \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n E_i R_{ij} E_j^T \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{j=l}^n E_i S_{il} R_{lj} E_j^T \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_i \left( \sum_{l=l}^j S_{il} R_{lj} \right) E_j^T
\end{aligned}$$

D'où

$$H_{ij} = \sum_{l=l}^j S_{il} R_{lj}$$

Nous savons que  $H_{ij} = 0_2$  pour  $i - 1 > j$ . Donc  $\sum_{l=l}^j S_{il} R_{lj} = 0_2$ . D'où,

pour  $j = 1$ , nous avons  $S_{i1} R_{11} = H_{i1}$ . Ce qui implique que  $S_{i1} = 0_2$  pour  $i > 2$ . Pour  $j = 2$ ,  $S_{i1} R_{12} + S_{i2} R_{22} = H_{i2}$ . Ce qui implique que  $S_{i2} = 0_2$  pour  $i > 3$ . Nous continuons ainsi, jusqu'à  $j = n - 2$ . Nous obtenons alors que  $S$  est sous la forme de  $J$ -Hessenberg. Posons  $\tilde{H} = RS$ , montrons que  $\tilde{H}$  est sous la forme de  $J$ -Hessenberg.

**En effet**, nous avons

$$\begin{aligned}
\tilde{H} &= RS \\
&= \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n E_i R_{ij} E_j^T \right) \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_i S_{ij} E_j^T \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{j=l}^n E_i R_{il} S_{lj} E_j^T \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_i \left( \sum_{l=l}^j R_{il} S_{lj} \right) E_j^T
\end{aligned}$$

Donc

$$\tilde{H}_{ij} = \sum_{l=l}^j R_{il} S_{lj}$$

Or  $S_{ij} = 0_2$  pour  $i > j + 1$  et  $R_{ij} = 0_2$  pour  $i > j$ , alors  $\tilde{H}_{ij} = 0_2$  pour  $i > j + 1$ . Cela montre bien que  $\tilde{H}$  est sous la forme  $J$ -Hessenberg.

### 1.4.1 Produit scalaire associé à la matrice $J$

Considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{C}^{2n \times 2} \times \mathbb{C}^{2n \times 2} &\longrightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2} \\ (U, V) &\longmapsto \varphi(U, V) = V^J U\end{aligned}$$

**Proposition 1.4.1** L'application  $\varphi$  est une forme  $J$ -sesquilineaire,  $J$ -symétrique et non-dégénérée. Nous noterons par  $\varphi$  toute forme  $J$ -sesquilineaire ou  $J$ -produit scalaire.

Démonstration.

1) La  $J$ -sesquilinearité,

$\forall U, U_1, V, V_1 \in \mathbb{C}^{2n \times 2}$  et  $\forall M_1, N_1 \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  nous avons,

$$\begin{aligned}\varphi(U + U_1 M_1, V) &= V^J (U + U_1 M_1) \\ &= V^J U + V^J U_1 M_1 \\ &= \varphi(U, V) + \varphi(U_1, V) M_1\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi(U, V + V_1 N_1) &= (V + V_1 N_1)^J U \\ &= (V^J + N_1^J V_1^J) U \\ &= \varphi(U, V) + N_1^J \varphi(U, V_1)\end{aligned}$$

2) La  $J$ -symétrie,

$$\begin{aligned}\varphi(U, V) &= V^J U \\ &= (U^J V)^J \\ &= \varphi(V, U)^J\end{aligned}$$

3) La non-dégénérescence,

$$\varphi(U, V) = 0_{2,2}, \quad \forall V \in \mathbb{C}^{2n \times 2} \Rightarrow U = 0_{2n \times 2}.$$

**En effet**, soient  $U = [u_1 \ u_2]$  et  $V = [v_1 \ v_2]$ . Nous avons,

$$\varphi(U, V) = V^J U = \begin{pmatrix} -v_2^H J u_1 & -v_2^H J u_2 \\ v_1^H J u_1 & v_1^H J u_2 \end{pmatrix}$$

Si  $\varphi(U, V) = 0_{2,2}, \forall V \in \mathbb{C}^{2n \times 2}$ , alors  $v_2^H J u_1 = v_2^H J u_2 = 0$  et  $v_1^H J u_1 = v_1^H J u_2 = 0, \forall v_1, v_2 \in \mathbb{C}^{2n}$ . Ce qui nous donne  $J u_1$  et  $J u_2$  orthogonaux à tout l'espace  $\mathbb{C}^{2n}$ . Par conséquent  $U = 0_{2n \times 2}$ .  $\square$

**Définition 1.4.2** Soit  $A$  une matrice réelle de taille  $2n \times 2n$ . Le  $J$ -adjoint de  $A$  par rapport à la forme  $J$ -sesquilinéaire  $\varphi$  est défini par

$$\varphi(AU, V) = \varphi(U, A^J V), \quad \forall U, V \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$$

Nous avons  $\varphi(U, AV) = J_2^T V^T J_{2n} J^T A^T J_{2n} U$  or  $\varphi(U, AV) = V^J A^J U = \varphi(A^J U, V)$  D'où  $J_{2n}^T A^T J_{2n} = A^J$ . Donc le  $J$ -adjoint de  $A$  est le  $J$ -conjugué de  $A$ .

**Proposition 1.4.2** Soient  $U = [u_1 \ u_2]$  et  $V = [v_1 \ v_2]$  deux matrices complexes d'ordre  $2n \times 2$ ; alors  $\varphi(U, V) = \begin{pmatrix} -v_2^H J u_1 & -v_2^H J u_2 \\ v_1^H J u_1 & v_1^H J u_2 \end{pmatrix}$ .

Si  $V = U$  alors  $\varphi(U, U) = \begin{pmatrix} \bar{z} & -u_2^H J u_2 \\ u_1^H J u_1 & z \end{pmatrix}$  où  $z = u_1^H J u_2$ .

Démonstration. Nous avons,  $\varphi(U, V) = V^J U$ . Puisque

$$V^J = J_2^T V^T J_{2n} = \begin{pmatrix} -v_2^H & J \\ v_1^H & J \end{pmatrix}$$

$$\varphi(U, V) = \begin{pmatrix} -v_2^H J u_1 & -v_2^H J u_2 \\ v_1^H J u_1 & v_1^H J u_2 \end{pmatrix}.$$

Si  $V = U$ , alors  $\varphi(U, U) = \begin{pmatrix} -u_2^H J u_1 & -u_2^H J u_2 \\ u_1^H J u_1 & u_1^H J u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z} & -u_2^H J u_2 \\ u_1^H J u_1 & z \end{pmatrix}$  avec  $z = u_1^H J u_2$ .  $\square$

**Remarque 1.4.1** Dans le cas réel,  $u^T J u = 0$ ,  $\forall u \in \mathbb{R}^{2n}$ . Si  $U = [u_1 \ u_2] = \sum_{i=1}^n E_i M_i \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$ ; alors  $\varphi(U, U) = \alpha I_2$  avec  $\alpha = u_1^T J u_2 = \sum_{i=1}^n \det(M_i)$ .

**Définition 1.4.3** (matrice non-isotropique)

Une matrice  $U = [u_1 \ u_2] \in \mathbb{C}^{2n \times 2}$  est dite non-isotropique si et seulement si  $\det(\varphi(U, U)) \neq 0$  (équivalent à  $u_1^T J u_2 \neq 0$  dans le cas réel).

**Proposition 1.4.3** Soit  $S$  une matrice réelle de taille  $2n \times 2n$ . La matrice  $S$  est dite symplectique si et seulement si  $\varphi(SU, SV) = \varphi(U, V)$ ,  $\forall U, V \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$ . Cela montre que la forme  $J$ -sesquilinéaire  $\varphi$  est invariante par la transformation  $S$ .

Démonstration. Soient  $U, V \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$  et supposons que  $S$  est symplectique ( $S^J S = I_{2n}$ ). Alors

$$\begin{aligned} \varphi(SU, SV) &= \varphi(U, S^J SV) \\ &= \varphi(U, V) \end{aligned}$$

$\square$

**Proposition 1.4.4** Soient  $U = \sum_{i=1}^n E_i M_i$  et  $V = \sum_{j=1}^n E_j N_j$  deux matrices dans  $\mathbb{R}^{2n \times 2}$ . Alors  $\varphi(U, V) = V^J U = \sum_{i=1}^n N_i^J M_i$ .

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \varphi(U, V) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n E_i M_i, \sum_{j=1}^n E_j N_j\right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n E_j N_j\right)^J \sum_{i=1}^n E_i M_i \\ &= \sum_{i=1}^n N_i^J M_i \end{aligned}$$

$\square$

**Corollaire 1.4.1** Soit  $U = \sum_{i=1}^n E_i M_i$  une matrice dans  $\mathbb{R}^{2n \times 2}$ . Alors  $\varphi(U, E_i) = E_i^J U = M_i$  et  $\varphi(E_i, U) = U^J E_i = M_i^J$ .

Démonstration. Nous avons,  $\varphi(U, E_i) = E_i^J U$ . Or  $E_j^J E_i = 0_2$  si  $i \neq j$ ,  $E_j^J E_j = I_2$  et  $U = \sum_{j=1}^n E_j M_j$  donc  $\varphi(U, E_i) = M_i$ . De même, nous montrons que  $\varphi(E_i, U) = M_i^J$ .  $\square$

**Lemme 1.4.1** Si  $U \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  alors  $U^J U = U U^J = \det(U) I_2$  et  $U^J + U = \text{tr}(U) I_2$ .

Démonstration. Soit  $U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Nous avons  $U^J = \begin{pmatrix} u_4 & -u_2 \\ -u_3 & u_1 \end{pmatrix}$ .

Donc

$$U^J + U = \begin{pmatrix} u_4 + u_1 & 0 \\ 0 & u_4 + u_1 \end{pmatrix} = \text{tr}(U) I_2$$

Nous avons aussi,

$$U^J U = U U^J = \begin{pmatrix} u_4 u_1 - u_2 u_3 & 0 \\ 0 & u_4 u_1 - u_2 u_3 \end{pmatrix} = \det(U) I_2$$

$\square$

## 1.4.2 Normalisation

Nous définissons le normalisé d'une matrice non-isotropique dans  $\mathbb{R}^{2n \times 2}$ , cette normalisation est nécessaire pour définir le réflecteur symplectique donné dans la suite.

**Définition 1.4.4** Pour toute matrice  $U = [u \ v] \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$ , nous définissons la matrice  $q(U)$  par,

$$q(U) = \begin{cases} \sqrt{\alpha} I_2 & \text{si } \alpha > 0 \\ \sqrt{-\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}, \quad \text{où } \alpha = u^T J v$$

**Proposition 1.4.5** La matrice normalisée  $V = U q(U)^{-1}$  vérifie  $V^J V = I_2$ .

Démonstration. La matrice  $q(U)$  donnée ci-dessus, vérifie  $q(U)^J q(U) = U^J U$ . D'où

$$\begin{aligned} V^J V &= [Uq(U)^{-1}]^J Uq(U)^{-1} \\ &= q(U)^{-J} U^J U q(U)^{-1} \\ &= I_2. \end{aligned}$$

- **Algorithme du réflecteur unitaire et symplectique**

Dans l'algorithme 5.1 voir [3], posons à chaque itération  $k$ ,  $X = [b_1 - Jb_1]$ . Dans ce cas, la matrice  $S$  obtenue est unitaire et symplectique et la matrice  $R$  est semi- $J$ -triangulaire.

**Algorithme 1.4.1** réflecteur unitaire et symplectique

**Entrée :** Une matrice réelle  $A = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2p}]$  d'ordre  $2n \times 2p$ .

**Sortie :** Une matrice unitaire symplectique  $S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  et une matrice  $R \in \mathbb{R}^{2n \times 2p}$  semi- $J$ -triangulaire.

Posons  $A := [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2p}]$  et  $S = I_{2n}$ .

**Pour**  $k = 1, 2, \dots, p$  **faire**

Posons  $b := \begin{pmatrix} A(k : n, k) \\ A(n+k : 2n, k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2(n-k+1)}$ .

**Si**  $X = [b - Jb]$  est non-isotropique **alors** calculons  $W = Xq(X)^{-1}$  le normalisé de  $X$  et le réflecteur unitaire symplectique

$$H = \begin{pmatrix} H_{1,1} & H_{1,2} \\ H_{2,1} & H_{2,2} \end{pmatrix} = (W + E_1^{(n-k+1)})M^{-1}(W + E_1^{(n-k+1)})^J - I_{2n}$$

où  $H_{i,j} \in \mathbb{C}^{(n-k+1) \times (n-k+1)}$  pour  $i, j = 1, 2$ .

Posons  $P := \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0_{(k-1) \times (n-k+1)} & 0_{k-1} & 0_{(k-1) \times (n-k+1)} \\ 0_{(n-k+1) \times (k-1)} & \mathbf{H}_{1,1} & 0_{(n-k+1) \times (k-1)} & \mathbf{H}_{1,2} \\ 0_{k-1} & 0_{(k-1) \times (n-k+1)} & I_{k-1} & 0_{(k-1) \times (n-k+1)} \\ 0_{(n-k+1) \times (k-1)} & \mathbf{H}_{2,1} & 0_{(n-k+1) \times (k-1)} & \mathbf{H}_{2,2} \end{pmatrix}$  et mettons à jour  $A := PA$ ,  $S := SP^J$ .

**Fin si**

**Fin boucle**

Posons  $R := A$ .

### 1.4.3 Normes matricielles

Dans ce paragraphe, nous rappelons les définitions de quelques normes que nous utiliserons pour calculer la précision des factorisations  $R^J R$  d'une matrice anti-Hamiltonienne  $M$ . Pour trouver cette erreur, nous calculons la norme de  $M - R^J R$ .

Dans tout espace vectoriel, la notion de norme est très importante car elle permet de définir les distances, donc de quantifier la qualité d'un résultat. L'un des problèmes les plus fréquents où intervient le calcul matriciel est la résolution des systèmes linéaires et bien que théoriquement on sache trouver la solution exacte de ce problème, il est important de regarder dans quelle mesure une erreur dans les données influe sur la précision du résultat. En effet, lors de la résolution numérique d'un problème, les coefficients ne sont pas exactement conservés, et il y a lieu de savoir quelle confiance on peut accorder au résultat fourni par l'algorithme de résolution. Nous rappelons la définition d'une norme d'une matrice réelle dans le cas de dimensions finies.

#### Définition 1.4.5

Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice. La norme de Frobenius de  $A$  est définie par

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^2}$$

La  $p$ -norme de  $A$  est définie par

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p$$

où  $p$  est un entier plus grand ou égal à 1, ou  $p = \infty$ .

#### Propriétés 1.4.1



\* *Inégalité triangulaire*

$$\|Ax\|_p \leq \|A\|_p \|x\|_p$$

\* *Equivalence des normes*

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \|A\|_2$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1$$

\* *Bornes pour  $\|\cdot\|_2$*

$$\max_{i,j} |a_{ij}| \leq \|A\|_2 \leq n \max_{i,j} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}$$

\* *Valeur de  $\|\cdot\|_1$*

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

\* *Valeur de  $\|\cdot\|_\infty$*

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

\* *Valeur de  $\|\cdot\|_2$*

Soit la décomposition en valeurs singulières de  $A$ ,

$$A = U \Sigma V^T$$

où  $U$  et  $V$  sont des matrices orthonormales et  $\Sigma$  une matrice diagonale dont éléments  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  sont non négatifs. On les appelle valeurs singulières. Notons que les valeurs propres de  $AA^T$  sont les carrés des valeurs singulières de  $A$ . Nous savons que la norme 2

de  $A$  est égale à sa plus grande valeur singulière, i.e.

$$\|A\|_2 = \max_j \sigma_j(A)$$

Notons que si  $A$  est symétrique, les valeurs singulières sont les valeurs propres prises en valeur absolue.

# Chapitre 2

## Décomposition symplectique de type *SVD*

### 2.1 Introduction

La décomposition en valeurs singulières (ou **SVD** : Singular Value Decomposition) d'une matrice est un outil important de factorisation de matrices rectangulaires réelles ou complexes, elle est l'une des méthodes de factorisation la plus générale et peut être la plus utile.

Le calcul explicite, analytique, de la SVD d'une matrice est difficile dans le cas général. On utilise, en particulier dans les applications, des algorithmes spécialisés. Si la matrice possède plus de lignes que de colonnes, on effectue tout d'abord une décomposition  $QR$ . Le facteur  $R$  est ensuite réduit sous forme bidiagonale. Pour ceci, on peut effectuer des transformations de Householder alternativement sur les colonnes et sur les lignes de la matrice. Les valeurs singulières et vecteurs singuliers sont alors trouvés en effectuant une itération de type  $QR$  bidiagonale.

La SVD est utilisée, entre autres, dans le calcul de pseudo-inverse, dans la résolution de problèmes aux moindres carrés et dans les méthodes de régularisation. On l'emploie également en statistiques, en traitement du signal, en reconnaissance de formes, et dans

le traitement informatique des langues naturelles. Elle s'énonce ainsi :

Soit  $A$  une matrice quelconque de taille  $(n \times m)$  et de rang  $r$ . Il existe une matrice orthogonale  $U$  d'ordre  $(n \times n)$ , une matrice orthogonale  $V$  d'ordre  $(m \times m)$  et une matrice diagonale  $\Sigma$  de taille  $(m \times n)$  telles que :  $A = U\Sigma V^T$ .

Le théorème de la SVD classique peut s'énoncer sous cette version : étant donné une matrice triangulaire  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  alors il existe  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \sigma_r \geq \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0$ , des matrices orthogonales  $U = [u_1, \dots, u_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $V = [v_1, \dots, v_m] \in \mathbb{R}^{m \times m}$  tels que  $A = \sum_{j=1}^r \sigma_j u_j v_j^T$  on a aussi  $Au_j = \sigma_j v_j$  et  $A^T v_j = \sigma_j u_j$ . Un vecteur singulier gauche  $u$  est un vecteur propre de  $AA^T$  associé à la valeur propre  $\sigma_i^2$ . Un vecteur singulier droit  $v$  est un vecteur propre de  $A^T A$  associé à la valeur propre  $\sigma_i^2$ .

Soit

$$A = U\Sigma V^T = U \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_n \end{pmatrix} V^T$$

alors,

- Les  $\sigma_i$  sont les valeurs singulières de  $A$ .
- Si la matrice  $A$  est singulière, il y a des  $\sigma_i$  nulles.
- En générale  $\text{rang}(A) =$  au nombre de  $\sigma_i$  non nulles.
- L'ensemble des  $\sigma_i$  est unique.

**Généralement**, la SVD trouve son application dans les problèmes de grandes matrices, avec des dimensions qui peuvent atteindre des milliers. donc, il existe des algorithmes efficaces et précises pour son calcul qui rend la SVD soit satisfaite par exemple, la SVD peut être utilisé comme une estimation numérique fiable du rang efficace d'une matrice. Une deuxième application de la SVD est au calcul de l'inverse généralisé d'une matrice. Ceci est lié au problème linéaire des moindres carrés, Donc, on peut choisir le vecteur  $x$  de façon à minimiser

$$|Ax - b|$$

Soit la SVD de  $A$  est  $A = U\Sigma V^T$  (où  $U$  et  $V$  des matrices carrées orthogonales,  $\Sigma$  est

rectangulaire avec la même dimension que  $A$ ), nous avons

$$\begin{aligned} Ax - b &= U\Sigma V^T x - b \\ &= U(\Sigma V^T x) - U(U^T b) \\ &= U(\Sigma y - c) \end{aligned}$$

où  $y = V^T x$  et  $c = U^T b$ . Dans cette méthode nous calculons  $c$  comme le produit de  $U^T$  et  $b$ , après, on résoud  $U^T b$  le problème des moindres carrés pour  $\Sigma$  et  $c$ , cela trouver un vecteur  $y$  de sorte que  $|\Sigma y - c|$  est minimal. maintenant, comme  $y = V^T x$  on peut déterminer  $x$  depuis  $Vy$ , Cela donne le vecteur solution  $x$ , ainsi que l'erreur.

Aussi, La SVD peut traiter les inverses des matrices,  $A = U\Sigma V^T$  alors,  $A^{-1} = (V^T)^{-1} \Sigma^{-1} U^{-1} = V \Sigma^{-1} U^T$ , puisque l'inverse d'une matrice orthonormale est sa transposée, et puisque  $\Sigma$  est diagonale,  $\Sigma^{-1}$  est aussi diagonale avec les inverses multiplicatifs des  $\sigma_i$ . plus de ça, la SVD est utilisée dans la comparaison de matrices, on a la norme de Frobenius est couramment utilisée comme norme d'une matrice  $\|A\|_F = \sum_i \sum_j a_{ij}^2$  et peut être calculée au moyen de la SVD,  $\|A\|_F = \sum_i \sigma_i^2$ .

- **Structure géométrique d'une matrice :**

A toute matrice  $A$  de dimension  $n \times m$ , il est possible d'associer une application linéaire qui envoie tout vecteur de  $\mathcal{E}_m$  (espace vectoriel de dimension  $m$ , dans  $\mathcal{E}_n$ , espace vectoriel de dimension  $n$ . Soit la sphère unité dans  $\mathcal{E}_m$  (i.e. l'ensemble des vecteurs de longueur unité), multiplier ces vecteurs par la matrice  $A$  donne de nouveaux vecteurs qui définissent une ellipsoïde de dimension  $r$  dans l'espace  $\mathcal{E}_n$ , où  $r$  est le nombre de valeurs non singulières de  $A$ . Les valeurs singulières  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$  correspondent aux longueurs respectives des axes principaux de cet ellipsoïde. Intuitivement donc, les valeurs singulières caractérisent le facteur de déformation que va subir chacun des vecteurs initiaux par action de  $A$ . Par ailleurs, puisque la matrice  $V$  est orthogonale, l'équation  $A = U\Sigma V^T$  s'écrit encore  $AV = U\Sigma$ . Les directions de ces axes principaux sont donc données par les colonnes de  $U$  et les antécédents de ces mêmes axes par les colonnes de  $V$ .

- **Valeurs propres et vecteurs propres**

**Définition 2.1.1**

- Un scalaire  $\lambda$  complexe est appelé une valeur propre de la matrice carrée  $A$  si il existe un vecteur  $u$  non nul de  $\mathbb{C}^n$  tels que  $Au = \lambda u$ . Le vecteur  $u$  est appelé un vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda$ . L'ensemble de toutes les valeurs propres de  $A$  est appelé le spectre de  $A$  et on note  $\Lambda(A)$ .

Une valeur propre  $\lambda$  de  $A$  est une racine du polynôme caractéristique  $\det(A - \lambda I) = 0$ . Donc, il ya au plus  $n$  valeurs propres distinctes. Le module maximum des valeurs propres est appelé rayon spectral et est désignée par  $\rho(A)$  est noté par

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \Lambda(A)} |\lambda|$$

- La trace d'une matrice est égale à la somme de tous ses éléments diagonaux

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Il peut être facilement démontré que cela est aussi égal à la somme de ses valeurs propres comptés avec leurs multiplicités que les racines du polynôme caractéristique.

**Proposition 2.1.1** Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ , alors  $\bar{\lambda}$  est une valeur propre de  $A^H$ . Un vecteur propre  $v$  de  $A^H$  associé à la valeur propre  $\bar{\lambda}$  est appelé vecteur propre gauche de  $A$ . Alors,

$$Au = \lambda u, \quad v^H A = \bar{\lambda} v^H$$

ou, de manière équivalente,

$$u^H A^H = \bar{\lambda} u^H, \quad A^H v = \bar{\lambda} v$$

La décomposition *SVD* symplectique  $SAQ = \Sigma$  avec  $A \in \mathbb{R}^{2n \times m}$ ,  $S$  symplectique et  $Q$  orthogonale est utilisé pour le calcul de sous espaces invariants des matrices structurées (Hamiltonienne et anti-Hamiltonienne). Un exemple cité dans [38] est le problème de

sous-espaces propres et de valeurs propres de la matrice

$$F = \begin{pmatrix} -C & -G \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

laquelle provient du système de gyroscopie [17, 31, 38]

$$q'' + Cq' + Gq = 0; \quad q(0) = q_0; \quad q'(0) = q_1$$

La matrice  $G \in \mathbb{R}^{m \times m}$  est symplectique et semi-définie positive, elle se décompose alors sous la forme  $G = LL^T$ , et  $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$  est anti-symétrique. En utilisant l'égalité

$$\begin{pmatrix} -C & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}C & I \\ I & 0 \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} \frac{1}{2}C & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

avec  $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ , la matrice  $F$  est semblable à la matrice Hamiltonienne

$$J \begin{pmatrix} \frac{1}{2}C & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & LL^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}C & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}C & I \\ L^T & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}C & I \\ L^T & 0 \end{pmatrix}$$

Le problème de valeurs propres de  $F$  peut être résolu en calculant la décomposition *SVD* symplectique de la matrice  $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}C & I \\ L^T & 0 \end{pmatrix}$ .

Nous commençons par donner la décomposition en valeurs singulières classique en deux approches en montrant par des exemples numériques l'avantage de l'approche matrice augmenté.

## 2.2 Décomposition en valeurs singulières

**Définition 2.2.1** Les valeurs singulières de  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$  sont les racines carrées positives des valeurs propres de  $A^*A$  (qui est hermitienne positive).

### 2.2.1 Décomposition en valeurs singulières classique

**Théorème 2.2.1** (SVD classique)

Soit  $A$  une matrice réelle de  $\mathbb{R}^{n \times m}$ . Il existe  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  orthogonale et  $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$  orthogonale tel que :  $A = Q\Sigma P^T$  où  $\Sigma = \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , avec  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p > \sigma_{p+1} = \dots = \sigma_n = 0$ ,  $p \leq \min\{m, n\}$

Démonstration. Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  une matrice rectangulaire de rang maximale. On pose  $B = A^T A$ . Alors  $B$  est une matrice symétrique définie positive. Par le théorème spectral, il existe  $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$  orthogonale, des réels positifs  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  tels que :

$$A^T A = P \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_m^2 \end{pmatrix} P^T$$

soit encore  $(A^T A)P = PD$  avec,  $D = \text{diag}[\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_m^2]$ . On note  $p_i = Ae_i$  le  $i$ -ème vecteur colonne de  $P$ . Si on pose

$$q_i = \left(\frac{1}{\sigma_i}\right).Ap_i \quad \text{soit alors} \quad Ap_i = \sigma_i q_i$$



on obtient

$$\begin{aligned}
\langle q_i, q_j \rangle &= \left( \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \right) \langle Ap_i, Ap_j \rangle \\
&= \left( \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \right) \langle p_i, A^T Ap_j \rangle \\
&= \left( \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \right) \langle p_i, \sigma_j^2 p_j \rangle \\
&= \left( \frac{\sigma_j}{\sigma_i} \right) \langle p_i, p_j \rangle \begin{cases} = 0 \text{ si } i \neq j \\ = 1 \text{ si } i = j \end{cases}
\end{aligned}$$

$Q = [q_1 q_2 \dots q_m]$  et donc orthogonale et vérifie  $AP = Q\Sigma$  avec  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$ .  $\square$

**Théorème 2.2.2** (Décomposition *SVD*)

Soit  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$  de rang  $k$ . Elle admet alors  $k$  valeurs singulières strictement positives  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_k > 0$ . Et il existe  $U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$  unitaire ( $U^{-1} = U^*$ ) et  $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  unitaire ( $V^{-1} = V^*$ ) telles que  $A = USV^*$  avec  $S \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$  de la forme

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } D = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$$

Démonstration. On a :

$$x \in \ker(A^*A) \Rightarrow x^*A^*Ax = 0 \Rightarrow \|Ax\| = 0 \Rightarrow x \in \ker(A).$$

$$x \in \ker(A) \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow A^*Ax = 0 \Rightarrow x \in \ker(A^*A).$$

Ainsi,  $\ker(A^*A) = \ker(A)$  et donc  $A^*A$  a exactement  $k$  valeurs propres strictement positives non nécessairement distinctes et  $(n - k)$  valeurs propres nulles. Notons  $\sigma_i^2$ ,  $i = 1, \dots, k$  ces valeurs propres. Soit  $\{v_1, \dots, v_k\}$  une famille orthonormée de vecteurs propres de  $A^*A$  associés aux  $\sigma_i^2$ . Soit  $u_i = \sigma_i^{-1}Av_i$ .

Alors

$$AA^*u_i = \sigma_i^{-1}AA^*Av_i = \sigma_i^{-1}\sigma_i^2Av_i = \sigma_i^2u_i.$$

et

$$(u_i, u_j) = (\sigma_i^{-1}Av_i, \sigma_j^{-1}Av_j) = \sigma_i^{-1}\sigma_j^{-1}\sigma_i^2(v_i, v_j) = \delta_{ij}.$$

Ainsi, les  $u_i$  sont des valeurs propres de  $AA^*$  associés aux  $\sigma_i^2$  qui constituent une famille orthonormale. On complète les deux familles par des vecteurs pour constituer des familles orthonormales :

$$u_1, \dots, u_k \text{ complétée par } u_{k+1}, \dots, u_m \rightarrow U \text{ unitaire.}$$

$$v_1, \dots, v_k \text{ complétée par } v_{k+1}, \dots, v_n \rightarrow V \text{ unitaire.}$$

On a enfin  $U^*AV$  :

$$U^*AV = U^*(\sigma_1u_1 \dots \sigma_ku_k \ 0 \dots 0)$$

car  $Av_i = \sigma_iu_i$  par définition des  $u_i$ . Ainsi,

$$U^*AV = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ & & \sigma_k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & & \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puisque  $U$  est unitaire.

**Remarque 2.2.1** Dans le cas où la matrice  $A$  n'est pas de rang maximale on construit comme ci-dessus les  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, \text{rang}(A)$  puis on complète par  $m - \text{rang}(A)$  vecteurs pour obtenir une base orthonormale.

**Théorème 2.2.3** Avec les notations du théorème 2.2.1 on a :

1.  $\text{rang}(A) = r$
2.  $\ker(A) = \text{Vect}(v_{r+1}, \dots, v_n)$
3.  $\text{Im}(A) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_r)$

4.  $A = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T = U_r \Sigma_r V_r$  où  $U_r = [u_1 \dots u_r]$ ,  $\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ ,  $V_r = [v_1 \dots v_r]$ .

5.  $\|A\|_{\mathcal{F}} = \sum_{i=1}^r \sigma_i^2$  et  $\|A\|_2 = \sigma_1$

Démonstration.

1.  $A$  et  $\Sigma$  sont équivalentes, donc  $\text{rang}(A) = \text{rang}(\Sigma) = r$ .

2. D'après ce qui précède :

- Si  $m < n$  on a :  $Av_k = \sigma_k u_k$  pour  $k = 1, \dots, m$  et  $Av_k = 0$  pour  $k = m + 1, \dots, n$ .

- Si  $m > n$  on a :  $Av_k = \sigma_k u_k$  pour  $k = 1, \dots, n$ .

donc, dans tous les cas on peut écrire :  $Av_k = 0$  pour  $k = r + 1, \dots, n$ . Soit alors,  $\ker(A) = \text{Vect}(v_{r+1}, \dots, v_n)$ .

3. On a également dans tous les cas :  $Av_k = \sigma_k u_k$  pour  $k = 1, \dots, r$  donc :

$$\text{Im}(A) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_r)$$

4.

$$\begin{aligned} A &= U \Sigma V = [u_1 \dots u_r \quad u_{r+1} \dots u_n] \Sigma V \\ &= [\sigma_1 u_1 \dots \sigma_r u_r \quad 0 \dots 0] \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_r^T \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T \end{aligned}$$

**Remarque 2.2.2** La décomposition *SVD* d'une matrice  $A$  de taille  $m \times n$  nécessite

$$4m^2n + 8mn^2 + 9n^3$$

opérations élémentaires.

## 2.2.2 SVD par matrice augmentée

Soit  $A$  une matrice réelle de taille  $n \times m$  ( $n \geq m$ ) et  $\text{rang}(A) = r \leq m = \min\{n, m\}$ .

On pose  $\bar{A} = \begin{pmatrix} O_{n,n} & A \\ A^T & O_{m,m} \end{pmatrix}$ . La matrice  $\bar{A}$  est symétrique d'ordre  $(n + m)$ .

On a,  $\text{rang}(\bar{A}) = \dim(\text{Vect}\{\bar{A}\})$  où

$$\begin{aligned} \text{Vect}\{\bar{A}\} &= \left\{ \bar{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ tel que, } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } y \in \mathbb{R}^m \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} Ay \\ A^T x \end{pmatrix}, \text{ tel que, } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } y \in \mathbb{R}^m \right\} \\ &= \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} Ay \\ 0 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}^m \right\}}_{\dim=\text{rang}(A)=r} \oplus \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ A^T x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^n \right\}}_{\dim=\text{rang}(A^T)=r} \end{aligned}$$

Donc

$$\text{rang}(\bar{A}) = 2r$$

Soit  $\sigma \in \mathbb{R}$  une valeur propre de  $\bar{A}$  et  $w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  un vecteur propre de  $\bar{A}$  non nul, avec  $u \in \mathbb{R}^n$  et  $v \in \mathbb{R}^m$  on a :

$$\bar{A} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} Av = \sigma u \\ A^T u = \sigma v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (A^T A)v = \sigma A^T u \\ (A^T A)u = \sigma^2 v \end{cases}$$

Alors  $\sigma^2$  est une valeur propre de  $A^T A$ .

On a aussi

$$\begin{cases} A(-v) = -\sigma u \\ A^T u = -\sigma(-v) \end{cases}$$

Alors

$$\bar{A} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} = -\sigma \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$$

Par suite  $-\sigma$  est aussi une valeur propre de  $\bar{A}$ .

$\bar{A}$  est une matrice symétrique,  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$  les deux vecteurs propres de  $\bar{A}$  associés à deux valeurs propres distinctes donc

$$\left\langle \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \right\rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$$

On a  $w$  est un vecteur unitaire, alors

$$\|w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 = 1$$

Or

$$\|u\|^2 - \|v\|^2 = 0 \Rightarrow \|u\|^2 = \|v\|^2$$

Donc

$$\|w\|^2 = 2\|v\|^2 = 1$$

Par suite

$$\|u\| = \|v\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Les vecteurs colonnes de la matrice  $\sqrt{2U}$  et de la matrice  $\sqrt{2V}$  sont orthonormés. **En effet**, soit  $i \neq j$  :

$$\left\langle \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \left\langle \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_j \\ -v_j \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Donc,  $\langle u_i, u_j \rangle + \langle v_i, v_j \rangle = 0$  et  $\langle u_i, u_j \rangle - \langle v_i, v_j \rangle = 0$  ainsi

$$\langle u_i, u_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = 0$$

Comme  $\text{rang}(\bar{A}) = 2r$ , on a  $r$  valeurs propres  $\sigma_i > 0$ . Soit  $\begin{pmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times r}$  une famille orthonormée de vecteurs propres de  $\bar{A}$  associée aux  $r$  valeurs propres  $\sigma_i > 0$ .  $\begin{pmatrix} \bar{U} \\ -\bar{V} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times r}$  est une famille orthonormée de vecteurs propres de  $\bar{A}$  associée aux  $r$  valeurs propres  $\sigma_i < 0$ .

On pose

$$\bar{W} = \begin{pmatrix} \bar{U} & \bar{U} \\ \bar{V} & -\bar{V} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times 2r}$$

$\bar{W}$  vérifie :

$$\begin{aligned} \bar{W}^T \bar{A} \bar{W} &= \begin{pmatrix} \bar{U}^T & \bar{V}^T \\ \bar{U}^T & -\bar{V}^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} O_{n,n} & A \\ A^T & O_{m,m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{U} & \bar{U} \\ \bar{V} & -\bar{V} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{V}^T A^T \bar{U} + \bar{U}^T A \bar{V} & \bar{V}^T A^T \bar{U} - \bar{U}^T A \bar{V} \\ -\bar{V}^T A^T \bar{U} + \bar{U}^T A \bar{V} & -\bar{V}^T A^T \bar{U} - \bar{U}^T A \bar{V} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{\Sigma} & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & -\bar{\Sigma} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc

$$\bar{V}^T A^T \bar{U} - \bar{U}^T A \bar{V} = 0 \Rightarrow \bar{V}^T A^T \bar{U} = -\bar{U}^T A \bar{V} = (\bar{V}^T A^T \bar{U})^T$$

Alors

$$2\bar{U}^T A \bar{V} = \bar{\Sigma}$$

Où

$$\bar{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_r \end{pmatrix} \quad \text{avec } \sigma_i > 0 \text{ pour } i = 1, \dots, r$$

On note dans la suite  $\bar{U} \leftarrow \sqrt{2}\bar{U}$  et  $\bar{V} \leftarrow \sqrt{2}\bar{V}$  on a donc :

$$\bar{U}^T A \bar{V} = \bar{\Sigma}$$

On complète  $\bar{W} = \begin{pmatrix} \bar{U} & \bar{U} \\ \bar{V} & -\bar{V} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times 2r}$  par  $\bar{W}_{c2} = \begin{pmatrix} \bar{U}_c & \bar{U}_{c2} \\ \bar{V}_c & -\bar{V}_{c2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m-2r)}$   
avec  $\bar{U}_c \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ ,  $\bar{U}_{c2} \in \mathbb{R}^{n \times (m-r)}$  et  $\bar{V}_c \in \mathbb{R}^{m \times (n-r)}$ ,  $\bar{V}_{c2} \in \mathbb{R}^{m \times (m-r)}$  de sorte que :

$$\bar{W}_c = \begin{pmatrix} \bar{U} & \bar{U} & \bar{U}_c & \bar{U}_{c2} \\ \bar{V} & -\bar{V} & \bar{V}_c & \bar{V}_{c2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$$

est une matrice orthogonale.

$$\text{On pose } \Sigma = \begin{pmatrix} \bar{\Sigma} & 0_{r,m-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,m-r} \end{pmatrix}, U = [\bar{U} \quad \bar{U}_c] \text{ et } V = [\bar{V} \quad \bar{V}_{c2}]$$

Les matrices  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$  sont donc orthogonales et vérifient :  $A = U \Sigma V^T$ .

**En effet :**

$$\begin{aligned} U \Sigma V^T &= [\bar{U} \quad \bar{U}_c] \begin{pmatrix} \bar{\Sigma} & 0_{r,m-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,m-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{V}^T \\ \bar{V}_{c2}^T \end{pmatrix} \\ &= [\bar{U} \quad \bar{U}_c] \begin{pmatrix} \bar{\Sigma} \bar{V}^T \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \overline{U \Sigma V}^T = A. \end{aligned}$$











**Lemme 2.3.1** Si  $B = \begin{pmatrix} \Lambda & I_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & I_2 \\ 0 & 0 & \cdots & \Lambda \end{pmatrix}$  est une matrice réelle de type  $2s \times 2s$

avec  $\Lambda = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ . Donc,  $B = FG$  avec

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \vdots \\ & & & 1 & \\ 1 & 0 & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 & \Lambda \\ \vdots & \vdots & & \cdots & I_2 \\ & & \cdots & & \vdots \\ & & & \Lambda & \\ \Lambda & I_2 & & & 0 \end{pmatrix}$$

sont des matrices réelles et symétriques.

## 2.3.2 Algorithme de décomposition $SVD$

### • Algorithme 2.3.1 : Décomposition $SVD$

1. **Entrée :**  $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2m}$  ( $n \geq m$ )
2. On calcul la matrice anti-symétrique et Hamiltonienne :  $M = A^J A \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$
3. Par le théorème 3.3.2 soit  $V \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$  symplectique telle que  $V^J M V$  est sous la forme (1)

#### 4. **Pour** $i = 1, 2, \dots, s$ **faire**

5. Par le lemme 3.3.1, on écrit  $B_i = F_i G_i \in \mathbb{R}^{r_i \times r_i}$  avec  $F_i$  et  $G_i$  symétriques.

6. On extrait de la matrice  $V \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$

$$V_i = [v_{l_i+1}, v_{l_i+2}, \dots, v_{l_i+r_i}, v_{m+l_i+1}, v_{m+l_i+2}, \dots, v_{m+l_i+r_i}]$$

avec  $l_i = r_1 + r_2 + \dots + r_i$  ( $l_s = r_1 + r_2 + \dots + r_s = m$ )

7. Soit  $W_i = AV_i$ ,  $W_i^J W_i = V_i^J M V_i = \underbrace{V_i^J V_i}_{I_{2r_i}} \begin{pmatrix} B_i & 0_{r_i \times r_i} \\ 0_{r_i \times r_i} & B_i^T \end{pmatrix}$

8. On pose  $\sum_i = \begin{pmatrix} 0_{r_i} & -F_i \\ G_i & 0_{r_i} \end{pmatrix}$  on obtient  $\sum_i^J \sum_i = W_i^J W_i$  et donc  $U_i = AV_i \sum_i^{-1}$  est symplectique ( $U_i^J U_i = I_{2r_i}$ )

9. On prend  $U_i = \left[ \underbrace{u_{l_i+1}, u_{l_i+2}, \dots, u_{l_i+r_i}}_{U_i^1}, \underbrace{u_{m+l_i+1}, u_{m+l_i+2}, \dots, u_{m+l_i+r_i}}_{U_i^2} \right] \in \mathbb{R}^{2n \times 2r_i}$

10. **Fin pour.**

11. On choisit  $\bar{U} = [U_1^1, U_2^1, \dots, U_s^1, U_1^2, U_2^2, \dots, U_s^2] \in \mathbb{R}^{2n \times 2m}$  qui vérifie  $\bar{U}^J \bar{U} = I_{2m}$

12. On calcul  $\bar{U}$  pour obtenir  $U \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  symplectique.

$$AV = U \begin{pmatrix} & & & -F_i & & \\ & 0 & & \vdots & & \\ & & & & & -F_s \\ G_1 & & & & & \\ \vdots & & & & 0 & \\ & & G_s & & & \end{pmatrix}$$

## 2.4 Algorithme *SVD* symplectique

### 2.4.1 Algorithme du réflecteur symplectique

Nous allons donner, dans ce paragraphe, un algorithme de la décomposition *SR* basé sur le réflecteur symplectique, pour une matrice  $A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{2p}] \in \mathbb{C}^{2n \times 2p}$ .

Il permet de factoriser la matrice  $A$  sous la forme  $A = SR$  avec  $S \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$  est symplectique et  $R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$  une matrice telle que  $R_{11}$ ,  $R_{12}$ ,  $R_{21}$ ,  $R_{22}$  sont

triangulaires supérieures. La matrice  $R$  est sous la forme suivante,

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

• **Algorithme 2.4.1 : Réflecteur symplectique (SRA)**

**Entrée :** Une matrice complexe  $A = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_{2p}]$  d'ordre  $2n \times 2p$ .

**Sortie :** Une matrice symplectique  $S \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$  et une matrice  $R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \in$

$\mathbb{R}^{2n \times 2p}$  telle que  $R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}$  sont triangulaires.

Posons  $A := [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_{2p}]$  et  $S = I_{2n}$ .

**Pour**  $k = 1, 2, \dots, p$  faire

Posons  $X = [b_1 \ b_2] := \begin{pmatrix} A(k : n, k) & A(k : n, p+k) \\ A(n+k : 2n, k) & A(n+k : 2n, p+k) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(n-k+1) \times 2}$ .

**Si**  $X$  est non-isotropique; **alors** calculons  $W = Xq(X)^{-1}$  son normalisé de  $X$  et le réflecteur symplectique

$$H = \begin{pmatrix} H_{1,1} & H_{1,2} \\ H_{2,1} & H_{2,2} \end{pmatrix} = (W + E_1^{(n-k+1)})M^{-1}(W + E_1^{(n-k+1)})^J - I_{2n}$$

où  $H_{i,j} \in \mathbb{C}^{(n-k+1) \times (n-k+1)}$  pour  $i, j = 1, 2$ .

$$\text{Posons } P := \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0_{(k-1) \times (n-k+1)} & 0_{k-1} & 0_{(k-1) \times (n-k+1)} \\ 0_{(n-k+1) \times (k-1)} & H_{1,1} & 0_{(n-k+1) \times (k-1)} & H_{1,2} \\ 0_{k-1} & 0_{(k-1) \times (n-k+1)} & I_{k-1} & 0_{(k-1) \times (n-k+1)} \\ 0_{(n-k+1) \times (k-1)} & H_{2,1} & 0_{(n-k+1) \times (k-1)} & H_{2,2} \end{pmatrix}$$

et mettons à jour  $A := PA, S := SP^J$ .

**Fin si**

**Fin de la boucle**

Posons  $R := A$ .

## 2.4.2 Algorithme du réflecteur unitaire et symplectique

Si nous prenons, à chaque itérations  $k$  pour tout  $k = 1, \dots, p$  dans l'algorithme ci-dessus (algorithme 2.4.1), la matrice  $X = [b_1 - Jb_1]$ ; alors la matrice symplectique  $S$  obtenue par l'algorithme ci-dessus devient unitaire et symplectique et la matrice  $R$  est semi- $J$ -triangulaire.

- **Algorithme 2.4.2 : Réflecteur unitaire et symplectique (USRA)**

**Entrée :** Une matrice complexe  $A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{2p}]$  d'ordre  $2n \times 2p$ .

**Sortie :** Une matrice unitaire symplectique  $S \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$  et une matrice  $R \in \mathbb{C}^{2n \times 2p}$  semi- $J$ -triangulaire.

Posons  $A := [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{2p}]$  et  $S = I_{2n}$ .

**Pour**  $k = 1, 2, \dots, p$  faire

Posons  $b := \begin{pmatrix} A(k : n, k) \\ A(n+k : 2n, k) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2(n-k+1)}$ .

**Si**  $X = [b \ -Jb]$  est non-isotropique alors calculons  $W = Xq(X)^{-1}$  le normalisé de  $X$  et le réflecteur unitaire symplectique

$$H = \begin{pmatrix} H_{1,1} & H_{1,2} \\ H_{2,1} & H_{2,2} \end{pmatrix} = (W + E_1^{(n-k+1)})M^{-1}(W + E_1^{(n-k+1)})^J - I_{2n}$$

où  $H_{i,j} \in \mathbb{C}^{(n-k+1) \times (n-k+1)}$  pour  $i, j = 1, 2$ .

$$\text{Posons } P := \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0_{(k-1) \times (n-k+1)} & 0_{k-1} & 0_{(k-1) \times (n-k+1)} \\ 0_{(n-k+1) \times (k-1)} & H_{1,1} & 0_{(n-k+1) \times (k-1)} & H_{1,2} \\ 0_{k-1} & 0_{(k-1) \times (n-k+1)} & I_{k-1} & 0_{(k-1) \times (n-k+1)} \\ 0_{(n-k+1) \times (k-1)} & H_{2,1} & 0_{(n-k+1) \times (k-1)} & H_{2,2} \end{pmatrix}$$

et mettons à jour  $A := PA$ ,  $S := SP^J$ .

**Fin si**

**Fin boucle**

Posons  $R := A$ .

### 2.4.3 Cas particulier : Réflecteur symplectique dans $\mathbb{R}^{2n \times 2}$

Nous présentons dans ce paragraphe le réflecteur symplectique dans  $\mathbb{R}^{2n \times 2}$ . Son étude présente quelques différences par rapport au cas complexe.

Si  $U \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$ . Nous remarquons que la matrice  $q(U)$  est diagonale avec  $V = Uq(U)^{-1}$  le normalise de  $U$ . D'où  $SU = E_1q(U)$  est sous la forme suivante,

$$\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & * \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \swarrow n+1$$

Cette forme diffère de celle obtenue dans le cas complexe par les termes (1,2) et  $(n+1, 1)$  qui sont nuls.

Dans le cas où la matrice  $C = I_2 + E_1^J W$  est singulière, la remarque ci-dessous nous montre comment procéder dans ce cas.

**Remarque 2.4.1** Si la matrice  $C = I_2 + E_1^J W$  donné ci-dessus est singulière alors  $-1$  est la valeur propre de  $C_1 = E_1^J W$ . Nous distinguons deux cas :

**1<sup>er</sup> cas :** Si  $1$  n'est pas valeur propre de  $C_1 = E_1^J W$  ; alors le réflecteur symplectique  $S = (W - E_1)(I_2 - E_1^J W)^{-1}(W - E_1)^J - I_{2n}$  est bien défini et transforme  $W$  en  $-E_1$ .

**2<sup>ème</sup> cas :** Si  $1$  est valeur propre de  $C_1 = E_1^J W$  ; alors il existe une matrice  $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  non singulière telle que  $C_1 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$  ( $C_1$  matrice diagonalisable). Posons

$$N = P \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{pmatrix} P^{-1} \text{ où } \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, +1\} \text{ et } \overline{W} = WN. \text{ Nous obtenons alors,}$$



$$E_1^J \overline{W} = P \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & -\gamma^{-1} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Or  $N^J N = \det(N) I_2 = I_2$  et  $\overline{W}^J \overline{W} = I_2$  donc la matrice  $I_2 + E_1^J \overline{W} = \begin{pmatrix} 1 + \gamma & 0 \\ 0 & 1 - \gamma^{-1} \end{pmatrix}$

est non singulière et le réflecteur symplectique

$$S = (\overline{W} + E_1) (I_2 + E_1^J \overline{W})^{-1} (\overline{W} + E_1)^J - I_{2n}$$

est bien défini et transforme  $\overline{W}$  en  $E_1$  et donc  $W$  en  $E_1 N^{-1}$ .

**Remarque 2.4.2** Par des réflecteurs symplectiques, toute matrice  $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ , peut s'écrire  $A = SR$  avec  $S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  symplectique et  $R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  J-triangulaire avec en plus  $R_{12} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice triangulaire supérieure stricte. La matrice  $R$  est sous la forme

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & & 0 & \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & & \cdot \end{pmatrix}$$

#### 2.4.4 Décomposition de Schur d'une matrice anti-symétrique

Nous rappelons ci-dessous la décomposition de Schur d'une matrice réelle anti-symétrique.

**Théorème 2.4.1** Etant donné une matrice  $A \in \mathbb{R}^{2n \times m}$ , il existe une matrice orthogonale  $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$  telle que

$$A^T J A = Q \begin{pmatrix} O_p & \Sigma_p^2 & O \\ -\Sigma_p^2 & O_p & O \\ O & O & O_{m-2p} \end{pmatrix} Q^T$$

avec  $\Sigma_p = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$ ,  $\sigma_i > 0$ ,  $\forall i$  et  $p = \text{rank}(A^T J A)$ .

Démonstration. Voir [38]  $\square$

### 2.4.5 Algorithme $SVD$ symplectique

Nous commençons par le lemme suivant :

**Lemme 2.4.1** Si  $V$  est une matrice réelle appartenant à  $\mathbb{R}^{2n \times m}$  vérifiant

$$V^T J_{2n} V = \begin{pmatrix} O_p & I_p & O \\ -I_p & O_p & O \\ O & O & O_{m-2p} \end{pmatrix}$$

Alors on peut construire, par des réflecteurs symplectiques, une matrice  $S \in \mathbb{R}^{2n \times 2m}$  symplectique et une matrice  $Q_X$  orthogonale telle que :

$$SV\overline{Q}_X = \begin{pmatrix} I_p & O_p & O_{p \times q} & O_{p \times (m-2p-q)} \\ O_{q \times p} & O_{q \times p} & I_q & O_{q \times (m-2p-q)} \\ O_{(n-p-q) \times p} & O_{(n-p-q) \times p} & O_{(n-p-q) \times q} & O_{(n-p-q) \times (m-2p-q)} \\ O_p & I_q & O_{p \times q} & O_{p \times (m-2p-q)} \\ O_{(n-p) \times p} & O_{(n-p) \times p} & O_{(n-p) \times q} & O_{(n-p) \times (m-2p-q)} \end{pmatrix}$$

( $q = \text{rank}(V) - 2p$ ).

Démonstration. Posons  $V = [V_1 \ V_2 \ V_3]$ , avec  $V_1 = [v_{1,1}, \dots, v_{1,p}] \in \mathbb{R}^{2n \times p}$ ,  $V_2 = [v_{2,1}, \dots, v_{2,p}] \in \mathbb{R}^{2n \times p}$ ,  $V_3 = [v_{3,1}, \dots, v_{3,m-2p}] \in \mathbb{R}^{2n \times (m-2p)}$ .

**Étape 1 :**

Posons  $U_1 = [v_{1,1}, v_{2,1}] \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$ . on a  $U_1^J U_1 = I_2$ , soit alors  $S_1 = (U_1 + E_1)(I_2 + E_1^J U_1)^{-1}(U_1 + E_1)^J - I_{2n}$  le réflecteur symplectique tel que  $S_1 U_1 = E_1$ .

la  $(n+1)$ -ème composante de  $(S_1 v_{1,k})$  vaut zéro pour  $k = 2, 3, \dots, p$ . **En effet**, d'une part on a  $(S_1 v_{1,1})^T J S_1 v_{1,k} = v_{1,1}^T J v_{1,k} = 0$  d'autre part  $(S_1 v_{1,1})^T J S_1 v_{1,k} = e_1^T J (S_1 v_{1,k})$  est la  $(n+1)$ -ème composante de  $(S_1 v_{1,k})$ .

Même chose pour la  $(n+1)$ -ème composante de  $(S_1 v_{2,k})$  pour  $k = 2, 3, \dots, p$  et la  $(n+1)$ -ème composante de  $(S_1 v_{3,k})$  pour  $k = 2, 3, \dots, m - 2p$ .

Sachant que  $(S_1 v_{2,1})^T J S_1 v_{1,k} = 0$  et  $S_1 v_{2,1} = e_{n+1}$ , la première composante du vecteur

$(S_1 v_{1,k})$  vaut zéro pour  $k = 2, 3, \dots, p$ . Même chose pour la première composante de  $(S_1 v_{2,k})$  pour  $k = 2, 3, \dots, p$  et la première composante de  $(S_1 v_{3,k})$  qui vaut aussi zéro pour  $k = 2, 3, \dots, m - 2p$ . On obtient finalement,

$$S_1 V = \begin{pmatrix} \begin{array}{ccc} \xrightarrow{p} & \xleftarrow{p} & \xleftarrow{m-2p} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \uparrow n & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & * & \dots & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \downarrow n & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & * & \dots & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & * & \dots & \dots & * & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & * & \dots & \dots & * & \end{array} \end{pmatrix}$$

On initialise  $V$  on posant  $V := S_1 V$ .

**Étape 2 :**

Soit  $U_2 = [v_{1,2}, v_{2,2}] \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$  satisfaisant  $U_2^J U_2 = I_2$ . Soit alors

$$S_2 = (U_2 + E_2) (I_2 + E_2^J U_2)^{-1} (U_2 + E_2)^J - I_{2n}$$

le réflecteur symplectique telle que

$$S_2 U_2 = E_2 S_2$$

est sous la forme

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & * & * & \vdots & * & * & * \\ \vdots & * & * & * & \vdots & * & * & * \\ 0 & * & * & * & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & * & * & * & 0 & * & * & * \\ \vdots & * & * & * & \vdots & * & * & * \\ 0 & * & * & * & 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

Par le même raisonnement que dans l'étape 1 on obtient

$$S_2 S_1 V = \begin{pmatrix} \xrightarrow{p} & \xleftarrow{p} & \xleftarrow{m-2p} \\ \uparrow n & & \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & * & \cdots & * & 0 & 0 & * & \cdots & * & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * & 0 & 0 & * & \cdots & * & * & * & * & * \\ \downarrow n & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & * & \cdots & * & 0 & 0 & * & \cdots & * & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * & 0 & 0 & * & \cdots & * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

On construit alors, par récurrence,  $p$  réflecteurs symplectiques  $S_1, S_2, \dots, S_p$  de sorte que  $S_p S_2 \dots S_1 V$  est sous la forme

$$S_p \dots S_2 S_1 V = \begin{pmatrix} I_{n,p} & 0_{n,p} & 0_{p,m-2p} V_{31} \\ 0_{n,p} & I_{n,p} & 0_{p,m-2p} V_{32} \end{pmatrix}$$

Posons  $X = \begin{pmatrix} V_{31} \\ V_{32} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2(n-p) \times (m-2p)}$  on a  $X^T J X = 0$ . On construit la suite des réflecteurs  $Z_k$ ,  $k = 1, \dots, q$  ( $\text{rank}(X) = q$ ) associé à  $X$ . On pose  $Z = I_{2(n-p)}$ . On pose  $u_1 = X(:, 1)$ . Si  $\|u_1\| = 0$  on multiplie par une suite de permutations orthogonales définient comme suit

• **Algorithme 2.4.3 :**

$$Q_X = I_{m-2p}$$

**Pour**  $j = 2, \dots, m - 2p$

$$P_X = I_{m-2p}$$

$$P_X(j-1, j) = P_X(j, j-1) = 1$$

$$P_X(j-1, j-1) = P_X(j, j) = 0$$

$$X = X * P_X, Q_X = Q_X * P_X$$

**Fin Pour**

**Si** (c.à.d,  $\|u_1\| \neq 0$ ).

On construit un réflecteur symplectique

$$Z_1 = (U_1 + E_1) (I_2 + E_1^J U_1)^{-1} (U_1 + E_1)^J - I_{2n}$$

associé à

$$U_1 = \left[ \frac{u_1}{\|u_1\|}, -J \frac{u_1}{\|u_1\|} \right] \text{ tel que } Z_1 X e_1 = e_1.$$

$$Z := Z_1 * Z \text{ et } X := Z_1 * X.$$

La deuxième étape est sénilaire à la première, on prend  $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ X(2 : n-p, 2) \\ 0 \\ X(n-p+2 : 2(n-p), 2) \end{pmatrix}$ .

Si  $\|u_2\| = 0$ , on utilise le même algorithme de l'étape1 : on décale les colonnes vers la gauche. Sinon on construit un réflecteur symplectique et orthogonal

$$Z_2 = (U_2 + E_2) (I_2 + E_2^J U_2)^{-1} (U_2 + E_2)^J - I_{2n}$$

associé à  $U_2 = \left[ \frac{u_2}{\|u_2\|}, -J \frac{u_2}{\|u_2\|} \right]$  tel que  $Z_2 X e_2 = e_2$ .

On continue jusqu'à ce que le vecteur  $X$  est sous la forme

$$X := Z_q \dots Z_2 Z_1 X = \begin{pmatrix} \xrightarrow{p} & & \xleftarrow{m-2p-q} \\ \uparrow & & \\ 1 & * & \cdots & \cdots & * & * & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 1 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & \cdots & * \\ q \downarrow & & & & & * & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & * & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & \cdots & \cdots & * \\ \uparrow & & & & & & & & & \\ n-p-q & & & & & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$Z = Z_q \dots Z_2 Z_1$  est ortho-symplectique.

On pose  $W = X (1 : q, 1 : m - 2p) \in \mathbb{R}^{q \times (m-2p)}$  avec,  $\text{rang}(W) = q$ . En utilisant la decomposition  $QR$  à la matrice  $W^T \in \mathbb{R}^{(m-2p) \times q}$  on obtient

$$W^T = Q_W \begin{pmatrix} R_{11} \in \mathbb{R}^{q \times q} \\ 0 \end{pmatrix}$$

où  $Q_W \in \mathbb{R}^{(m-2p) \times (m-2p)}$  est orthogonale et  $R_{11}$  triangulaire et inversible ( $\text{rang}(W^T) = q$ ).

on a,  $W = \begin{pmatrix} R_{11} & 0_{q, m-2p-q} \end{pmatrix} Q_W^T$ . Posons  $Q = Q_X * Q_W$  et  $X := X * Q_W$  qui est sous la forme

$$X = \begin{pmatrix} R_{11}^T & 0_{q, m-2p-q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On décompose  $Z$  par bloque sous la forme

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}$$

Soit  $S_{p+1} = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_{11} & 0 & Z_{12} \\ 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & Z_{21} & 0 & Z_{22} \end{pmatrix}$  qui est orthogonale et symplectique. On a  $Q_X \in \mathbb{R}^{m-2p \times m-2p}$  est orthogonale. Soit alors  $\bar{Q}_X = \text{diag}(I_{2p}, Q_X) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  qui reste orthogonale et symplectique, en outre, elle commute avec  $\Gamma = \begin{pmatrix} \sum_p & O & O \\ O & \sum_p & O \\ O & O & I_{m-2p} \end{pmatrix}$ .

Soit Finalement  $S_{p+2} = \text{diag}(I_p, R_{11}^{-1}, I_{m-p-q}, I_p, R_{11}, I_{m-p-q})$  qui est symplectique et vérifie

$$\underbrace{S_{p+2} S_{p+1} S_p \dots S_2 S_1}_S V \bar{Q}_X = \Delta = \begin{pmatrix} I_p & O_p & O_{p \times q} & O_{p \times (m-2p-q)} \\ O_{q \times p} & O_{q \times p} & I_q & O_{q \times (m-2p-q)} \\ O_{(n-p-q) \times p} & O_{(n-p-q) \times p} & O_{(n-p-q) \times q} & O_{(n-p-q) \times (m-2p-q)} \\ O_p & I_q & O_{p \times q} & O_{p \times (m-2p-q)} \\ O_{(n-p) \times p} & O_{(n-p) \times p} & O_{(n-p) \times q} & O_{(n-p) \times (m-2p-q)} \end{pmatrix}$$

d'où la forme cherchée.  $\square$ .

**Théorème 2.4.2** (Décomposition  $SVD$  symplectique) : Soit  $A \in \mathbb{R}^{2n \times m}$  une matrice réelle rectangulaire. On peut construire, une matrice symplectique réelle  $S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  et

une matrice orthogonale  $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$  tels que

$$SAQ = \begin{pmatrix} \Sigma_p & O & O & O \\ O & O & I_q & O \\ O & O & O & O \\ O & \Sigma_p & O & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix}$$

Démonstration. Par le théorème 3.4.2, il existe  $Q$  orthogonale telle que

$$A^T J A = Q \begin{pmatrix} O_p & \Sigma_p^2 & O \\ -\Sigma_p^2 & O_p & O \\ O & O & O_{m-2p} \end{pmatrix} Q^T$$

Soit  $V = A Q \Gamma^{-1}$  avec  $\Gamma = \begin{pmatrix} \Sigma_p & O & O \\ O & \Sigma_p & O \\ O & O & I_{m-2p} \end{pmatrix}$ . Sachant que  $V^T J V = \Gamma^{-1} Q^T A^T J A Q \Gamma^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} O_p & I_p & O \\ -I_p & O_p & O \\ O & O & O_{m-2p} \end{pmatrix}, \text{ on a}$$

$$SV\bar{Q}_X = \Delta = \begin{pmatrix} I_p & O_p & O_{p \times q} & O_{p \times (m-2p-q)} \\ O_{q \times p} & O_{q \times p} & I_q & O_{q \times (m-2p-q)} \\ O_{(n-p-q) \times p} & O_{(n-p-q) \times p} & O_{(n-p-q) \times q} & O_{(n-p-q) \times (m-2p-q)} \\ O_p & I_q & O_{p \times q} & O_{p \times (m-2p-q)} \\ O_{(n-p) \times p} & O_{(n-p) \times p} & O_{(n-p) \times q} & O_{(n-p) \times (m-2p-q)} \end{pmatrix}$$



Or  $\Gamma^{-1}$  et  $\overline{Q}_X$  commutent, donc,

$$SAQ\overline{Q}_X = \Delta\Gamma = \begin{pmatrix} \Sigma_p & O & O & O \\ O & O & I_q & O \\ O & O & O & O \\ O & \Sigma_p & O & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix}$$

□

• **Algorithme 2.4.4 : Algorithme SVD-symplectique**

1. Entrée : une matrice rectangulaire  $A \in \mathbb{R}^{2n \times m} (n \geq m)$
2. On forme la matrice anti-symétrique  $M = A^T J A \in \mathbb{R}^{m \times m}$
3. Il existe une matrice orthogonale  $Q$  telle que

$$Q^T M Q = \begin{pmatrix} O_p & \Sigma_p^2 & O \\ -\Sigma_p^2 & O_p & O \\ O & O & O_{m-2p} \end{pmatrix}$$

4. On forme le bloque diagonale  $\Gamma = \begin{pmatrix} \Sigma_p & O & O \\ O & \Sigma_p & O \\ O & O & I_{m-2p} \end{pmatrix}$
5. On calcul la matrice rectangulaire  $V = A Q \Gamma^{-1} \in \mathbb{R}^{2 \times 2m}$
6. Il existe une matrice symplectique  $S$  telle que

$$SV = \Delta = \begin{pmatrix} I_p & O_p & O_{p \times q} & O_{p \times (m-2p-q)} \\ O_{q \times p} & O_{q \times p} & I_q & O_{q \times (m-2p-q)} \\ O_{(n-p-q) \times p} & O_{(n-p-q) \times p} & O_{(n-p-q) \times q} & O_{(n-p-q) \times (m-2p-q)} \\ O_p & I_q & O_{p \times q} & O_{p \times (m-2p-q)} \\ O_{(n-p) \times p} & O_{(n-p) \times p} & O_{(n-p) \times q} & O_{(n-p) \times (m-2p-q)} \end{pmatrix}$$



on a

$$S^{-T} = P \begin{pmatrix} \sigma_1^{-1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_{2n}^{-1} \end{pmatrix} Q^T$$

Or  $S$  symplectique, donc  $S = S^{-J} = J^T S^{-T} J$ . Ceci prouve que  $S^{-T}$  et  $S$  ont même valeurs singulières, par suite  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{2n}\} = \{\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_{2n}^{-1}\}$   $\square$

Nous allons donner le lemme technique suivant qui nous sera utile pour la preuve de la  $SVD$  ortho-symplectique.

**Lemme 2.4.2** Avec les notations du théorème précédant on a :

$$\begin{aligned} & S [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n \ -Jq_1 \ -Jq_2 \ \dots \ -Jq_n] \\ = & [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n \ -Jp_1 \ -Jp_2 \ \dots \ -Jp_n] \begin{pmatrix} D & \\ & D^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où  $D = \begin{pmatrix} w_1 & & \\ & \ddots & \\ & & w_n \end{pmatrix}$ ,  $Qe_i = q_i$  et  $Pe_i = p_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  sont les  $n$  premières colonnes de  $Q$  et  $P$  respectivement.

Démonstration. On a d'après la décomposition  $SVD$  donnée dans le théorème ci-dessus,  $Sq_i = w_i p_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Or  $S$  symplectique, donc

$$S(Jq_i) = J J^T S(Jq_i) = J S^{-T} q_i = w_i^{-1} J p_i$$

$$\text{car } S^{-T} = P \begin{pmatrix} \omega_1^{-1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \omega_n^{-1} & & & \\ & & & \omega_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \omega_n \end{pmatrix} Q^T. \quad \square$$

**Remarque 2.4.4** Si on pose  $\bar{Q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n \ -Jq_1 \ -Jq_2 \ \dots \ -Jq_n]$  et  $\bar{P} = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n \ -Jp_1 \ -Jp_2 \ \dots \ -Jp_n]$  alors

$$S\bar{Q} = \bar{P} \begin{pmatrix} D & & \\ & D^{-1} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} w_1 & & \\ & \ddots & \\ & & w_n \end{pmatrix}$$

Nous allons maintenant donner le théorème de la décomposition *SVD* ortho-symplectique.

**Théorème 2.4.4** Soit  $S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  une matrice symplectique, il existe deux matrices  $U, V \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  orthogonales et symplectiques, des nombres réels positifs  $w_1, w_2, \dots, w_n$  tels qu'on a :

$$S = U^T \begin{pmatrix} w_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & w_n & & & \\ & & & w_1^{-1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & w_n^{-1} \end{pmatrix} V$$

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur  $n$ . prenons la décomposition *SVD* classique donnée dans le théorème ci-dessus,  $Qe_i = q_i$  et  $Pe_i = p_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  sont les  $n$  premières colonnes de  $Q$  et  $P$  respectivement.

Pour  $n = 1$  on a  $SQ = P \begin{pmatrix} w_1 & \\ & w_1^{-1} \end{pmatrix}$ . On pose  $U = [p_1 \ -Jp_1]$  et  $V = [q_1 \ -Jq_1]$ .

On a d'après le lemme 2.4.2,  $S(-Jq_1) = w_1^{-1}Jp_1$  donc  $SV = U \begin{pmatrix} w_1 & \\ & w_1^{-1} \end{pmatrix}$  avec  $U$  et  $V$  ortho-symplectiques.

Prenons maintenant  $n > 1$ , et reprenons les notations du théorème et le lemme ci-dessus. Soit  $U_1$  le réflecteur qui envoie  $[p_1 \ -Jp_1]$  vers  $E_1 = [e_1 \ e_{n+1}]$  et  $V_1$  le réflecteur qui envoie  $[q_1 \ -Jq_1]$  vers  $E_1$ . De l'égalité  $S[q_1 \ -Jq_1] = [p_1 \ -Jp_1] \begin{pmatrix} w_1 & \\ & w_1^{-1} \end{pmatrix}$  on obtient

$$(U_1SV_1^T) E_1 = E_1 \begin{pmatrix} w_1 & \\ & w_1^{-1} \end{pmatrix}$$

donc  $S_1 = U_1SV_1^T$  est de la forme

$$S_1 = \begin{pmatrix} w_1 \times \cdots \times & 0 \times \cdots \times \\ 0 \ * \ * \ * & \vdots \ * \ * \ * \\ \vdots \ * \ * \ * & \vdots \ * \ * \ * \\ 0 \ * \ * \ * & 0 \ * \ * \ * \\ 0 \times \cdots \times & w_1^{-1} \times \cdots \times \\ \vdots \ * \ * \ * & 0 \ * \ * \ * \\ \vdots \ * \ * \ * & \vdots \ * \ * \ * \\ 0 \ * \ * \ * & 0 \ * \ * \ * \end{pmatrix}$$

Or  $S_1$  est symplectique comme produit de matrices symplectiques, donc les éléments  $\times$

ci-dessus sont nuls. La matrice  $S_1$  est donc sous la forme

$$S_1 = \begin{pmatrix} w_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ 0 & * & * & * & \vdots & * & * & * \\ \vdots & * & * & * & \vdots & * & * & * \\ 0 & * & * & * & 0 & * & * & * \\ 0 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & w_1^{-1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & * & * & * & 0 & * & * & * \\ \vdots & * & * & * & \vdots & * & * & * \\ 0 & * & * & * & 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

La matrice  $S_1$  s'écrit  $S_1 = E_1 \begin{pmatrix} w_1 & \\ & w_1^{-1} \end{pmatrix} E_1^T + \bar{S}_1$  où  $\bar{S}_1 = \sum_{i=2} \sum_{j=2} E_i M_{ij} E_j^T$ .

$\bar{S}_1$  est symplectique, **en effet**,  $S_1 = E_1 \begin{pmatrix} w_1 & \\ & w_1^{-1} \end{pmatrix} E_1^T + \bar{S}_1$  donc

$$S_1^J = E_1 \begin{pmatrix} w_1^{-1} & \\ & w_1 \end{pmatrix} E_1^T + \bar{S}_1^J.$$

Or  $I_{2n} = \sum_{i=1} E_i E_i^T = S_1^J S_1 = E_1 E_1^T + \bar{S}_1^J \bar{S}_1$ , donc  $\bar{S}_1^J \bar{S}_1 = I_{2(n-1)}$  et par conséquent  $\bar{S}_1$  est symplectique. D'après l'hypothèse de récurrence il existe  $\bar{U}_1, \bar{V}_1 \in \mathbb{R}^{2(n-1) \times 2(n-1)}$  ortho-symplectiques, des nombres réels positifs  $w_2, \dots, w_n$  tels que :

$$\bar{S}_1 = \bar{U}_1^T \begin{pmatrix} \omega_2 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \omega_n & & & & & & \\ & & & \omega_2^{-1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \omega_n^{-1} & & & \end{pmatrix} \bar{V}_1$$

On pose

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ 0_{n-1,1} & \bar{U}_1(1:n-1, 1:n-1) & \bar{U}_1(1:n-1, 1:n-1) \\ 0 & & 1 \\ 0 & \bar{U}_1(1:n-1, 1:n-1) & \bar{U}_1(1:n-1, 1:n-1) \end{pmatrix}$$

et

$$\bar{V} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ 0_{n-1,1} & \bar{V}_1(1:n-1, 1:n-1) & \bar{V}_1(1:n-1, 1:n-1) \\ 0 & & 1 \\ 0 & \bar{V}_1(1:n-1, 1:n-1) & \bar{V}_1(1:n-1, 1:n-1) \end{pmatrix}$$

On prenant  $U = \bar{U}U_1$  et  $V = \bar{V}V_1$  on obtient  $USV^T = \begin{pmatrix} \omega_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \omega_n & & \\ & & & \omega_1^{-1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \omega_n^{-1} \end{pmatrix}$ . □

• **Algorithme 2.4.5 : SVD pour une matrice symplectique**

1. **Entrée** : Une matrice symplectique  $S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$

2. **Sortie** : Deux matrices orthogonales et symplectiques  $U, V \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  telles que

$$S = U^T \begin{pmatrix} \omega_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \omega_n & & \\ & & & \omega_1^{-1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \omega_n^{-1} \end{pmatrix} V$$

3. **Initialisation**  $U = I_{2n}; V = I_{2n}; D = S$

4. Il existe deux matrices orthogonales  $P, Q$  des nombres réels positives  $w_1, w_2, \dots, w_n$

tels que  $S = P \begin{pmatrix} \omega_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \omega_n & & & \\ & & & \omega_1^{-1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \omega_n^{-1} \end{pmatrix} Q^T$

On pose  $p_i = Pe_i$  et  $q_i = Qe_i$

$$\bar{P} = [p_1 \ p_2 \dots \ p_n \ -Jp_1 \ -Jp_2 \dots \ -Jp_n] \text{ et } \bar{Q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n \ -Jq_1 \ -Jq_2 \ \dots \ -Jq_n]$$

**5. Pour**  $k = 1, \dots, n$

$$u = \bar{P}e_k \text{ et } v = \bar{Q}e_k$$

**Pour**  $j = 1, \dots, k - 1$  à

$$u(j) \leftarrow 0, \ u(n+j) \leftarrow 0 \text{ et } v(j) \leftarrow 0, \ v(n+j) \leftarrow 0$$

**Fin** ( $j$ )

$$\text{Si } \|u\| \neq 0 \text{ et } \|v\| \neq 0 \text{ alors } u \leftarrow \frac{u}{\|u\|} \text{ et } v \leftarrow \frac{v}{\|v\|}$$

On pose  $X = [u \ -Ju]$ ,  $Y = [v \ -Jv]$  et  $E_k = [I_{2n}(:, k), I_{2n}(:, n+k)]$  On construit

les réflecteurs symplectiques  $R_X, R_Y$  :

$$R_X = (X + E_1)(I_2 + E_1^J X)^{-1}(X + E_1)^J - I_{2(n-k)}$$

$$R_Y = (Y + E_1)(I_2 + E_1^J Y)^{-1}(Y + E_1)^J - I_{2(n-k)}$$

Posons  $U := UU_k U$ ,  $PT := UU_k PT$ ,  $V := VV_k V$  et  $QT := VV_k QT$

**FinSi**

**FinPour**

**Fin.**



**Remarque 2.4.5** L'algorithme se termine car si

$$\begin{aligned} & S [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n \ - Jq_1 \ - Jq_2 \ \dots \ - Jq_n] \\ = & [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n \ - Jp_1 \ - Jp_2 \ \dots \ - Jp_n] \begin{pmatrix} D & \\ & D^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} & U_1 S V_1^T V_1 [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n \ - Jq_1 \ - Jq_2 \ \dots \ - Jq_n] \\ = & U_1 [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n \ - Jp_1 \ - Jp_2 \ \dots \ - Jp_n] \begin{pmatrix} D & \\ & D^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} & S_1 [q'_1 \ q'_2 \ \dots \ q'_n \ - Jq'_1 \ - Jq'_2 \ \dots \ - Jq'_n] \\ = & [p'_1 \ p'_2 \ \dots \ p'_n \ - Jp'_1 \ - Jp'_2 \ \dots \ - Jp'_n] \begin{pmatrix} D & \\ & D^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a en particulier

$$S_1 q'_2 = w_2 p'_2$$

En prenant  $\bar{q}_2 = \begin{bmatrix} q'_2 [2 : n] \\ q'_2 [n + 1 : 2n] \end{bmatrix}$  et  $\bar{p}_2 = \begin{bmatrix} p'_2 [2 : n] \\ p'_2 [n + 1 : 2n] \end{bmatrix}$  on obtient alors

$$\bar{S}_1 \bar{q}_2 = w_2 \bar{p}_2$$

Le processus se termine en fin.

## 2.5 Applications

On donne ici, un bref aperçu de certaines applications qui donnent lieu au problèmes de valeurs propres d'une matrice. Ces applications peuvent être classés dans trois catégories différentes. La première catégorie, de loin le plus grand du point de vue des applications, se compose de problèmes liés à l'analyse des vibrations. Ceux-ci génèrent généralement des problèmes de valeurs propres généralisées symétriques. La seconde est la classe des problèmes liés à l'analyse de stabilité, comme par exemple l'analyse de la stabilité électrique d'un réseau. En général, cette deuxième catégorie de problèmes génère des matrices non symétriques. La troisième catégorie comprend les applications physiques liés aux systèmes de mécanique quantique, en particulier les problèmes générés par l'équation de Schrodinger.

### 2.5.1 Imagerie numérique

L'imagerie numérique a longtemps été un exemple d'application de la *SVD*. Maintenant, il existe des moyens plus élaborés et plus efficaces. Ici l'utilisation de la *SVD* pour le transfert d'image. Une photo en noir et blanc peut être assimilée à une matrice  $A$  dont les éléments correspondent à des niveaux de gris pour les différents pixels qui constituent l'image. Chaque  $A_{ij}$  donne le niveau de gris du pixel  $(i, j)$  de l'image.  $A_{ij} \in [0, 1]$ , avec par exemple  $A_{ij} = 0$  pour un pixel  $(i, j)$  blanc et  $A_{ij} = 1$  pour un pixel  $(i, j)$  noir.

Dans le livre de Allaire et Kaber, les auteurs présentent le cas d'un portrait noir et blanc avec une image originale de taille  $558 \times 768$  pixels dont la matrice  $A$  représentative est générée par un logiciel de lecture de l'image (via un scanner ou un appareil photo numérique). Le résultat renvoyé correspond à une matrice  $A$  de rang 555. La matrice admet donc 555 valeurs singulières non nulles. Soit  $\sigma_{\max}$  la valeur maximale de ces valeurs singulières  $\sigma_1, \dots, \sigma_{555}$ . On sait alors qu'il existe  $U \in \mathcal{M}_{558}(\mathbb{C})$ ,  $V \in \mathcal{M}_{768}(\mathbb{C})$  tels que  $A = U[\text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{555}, 0, 0, 0) \ 0_{\mathbb{C}^{558 \times 210}}]V$ .

En désignant par  $u_i$  les vecteurs colonnes de  $U$  et par  $v_i^*$  les vecteurs lignes de  $V$ , on

obtient que  $A = \sum_{i=1}^{555} \sigma_i u_i v_i^*$ .

La connaissance de  $A$  elle-même équivaut à la connaissance de  $558 \times 768$  nombres (i.e. 428544 nombres). Si on regarde l'expression de droite, la connaissance de  $A$  est donnée par la connaissance de 555 valeurs singulières, plus 555 vecteurs de taille 558, plus 555 vecteurs de taille 768. On n'y est pas gagnant.

Par contre, si on regarde de plus près les valeurs singulières non nulles  $\sigma_1, \dots, \sigma_{555}$ , on constate que nombreuses d'entre elles sont très petites devant les autres. On peut alors décider que si  $\frac{\sigma_i}{\sigma_{\max}} < \epsilon$  (où  $\epsilon$  est un filtre choisi par l'utilisateur, exple  $\epsilon = 10^{-3}$ ), alors  $\sigma_i$  est considérée comme nulle. On réduit ainsi le nombre de  $\sigma_i$  à conserver dans l'expression de  $A$  selon la décomposition  $SVD$ .

Notons  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  les valeurs singulières ainsi conservées. Dans l'exemple proposé dans le livre de Allaire et Kaber, avec  $k = 10$ , l'image est floue mais on constate aisément qu'il s'agit d'un portrait. Pour  $k = 40$ , l'image est déjà ressemblante et l'individu reconnaissable. Pour  $k = 80$ , il est impossible de dire, de l'image obtenue ou de l'image originale, laquelle est la plus vraie. Avec  $k = 80$ , on a alors  $A \approx \sum_{i=1}^{80} \sigma_i u_i v_i^*$ . La connaissance de  $A$  est alors donnée par la connaissance de 80 valeurs singulières, plus 80 vecteurs de taille 558, plus 80 vecteurs de taille 768, soit un total de 106160 nombres.

## 2.5.2 La corde vibrante

Déflexion d'une corde tenue en ses deux extrémités ( $x = 0$  et  $x = 1$ ). On note  $u(t, x)$  sa déflexion en son point  $x \in [0, 1]$ , au temps  $t$ . On se place dans le cas où la corde n'est pas soumise à des forces extérieures. Son évolution dépend donc de sa position au temps initial  $u(0, x)$ . Elle vérifie le problème aux limites

$$\begin{cases} m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0 \\ u(t, 0) = 0, \quad u(t, 1) = 0 \end{cases}$$

où  $k$  et  $m$  désignent respectivement la raideur et la masse linéique de la corde que l'on suppose constantes le long de la corde.

On cherche des solutions périodiques en temps :  $u(t, x) = v(x)e^{i\omega t}$  où  $\omega$  est appelée fréquence de vibration de la corde et est une inconnue du problème.

On obtient le système en  $v$

$$\begin{cases} -v''(x) = \frac{m\omega^2}{k}v(x) \\ v(0) = 0, \quad v(1) = 0 \end{cases}$$

Si  $k$  et  $m$  sont non constantes et variables selon  $x$ , il est en général impossible de trouver une solution exacte du problème. On "discrétise" alors l'équation différentielle. On va en fait chercher une approximation de la solution en un nombre fini de points  $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$ . Prenons par exemple  $x_i = \frac{i}{n}$ . Soit  $v_i$  la valeur approchée de  $v(x_i)$ .

Ensuite, on approche la dérivée seconde de  $v$  via la formule de Taylor

$$-v''(x_i) \approx \frac{2v(x_i) - v(x_{i-1}) - v(x_{i+1}))}{n^{-2}}$$

On obtient un système d'équations

$$\begin{cases} \frac{2v_i - v_{i-1} - v_{i+1}}{n^{-2}} = \lambda v_i, \quad \forall i \in \{1, n-1\} \\ v_0 = 0, \quad v_n = 0 \end{cases}$$

ce qui s'écrit  $A_n v = \lambda v$  avec  $\lambda = \frac{m\omega^2}{k}$ ,  $v = (v_1, \dots, v_n)^T$  et

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La détermination de la fréquence de vibration  $\omega$  se ramène ainsi à un problème aux valeurs propres.

### 2.5.3 Exemples Numériques

Les exemples numériques sont programmés sous Matlab 9 et exécutés dans un micro processeur Core Duo Pentium. Nous donnons dans ce paragraphe des tests numériques comparant les algorithmes (algorithme 2.4.4 et algorithme 2.4.5) avec la méthode de Xu donnée dans [38].

**Exemple 1 :**

Soit  $B$  la matrice rectangulaire définie par

$$B = Q \begin{pmatrix} \Sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U^T$$

avec  $Q$  une matrice orthogonale arbitrairement choisie et  $U$  une matrice appartenant à  $\mathbb{R}^{14 \times 14}$  orthogonale et symplectique. Nous donnons ci-dessous l'erreur en fonction de  $\Sigma$  matrice des valeurs singulières.

	Alg 2.4.4	méthode de Xu
$\Sigma = \text{diag}(4, 3, 2, 1)$	$6.9263e - 015$	$6.6697e - 015$
$\Sigma = \text{diag}(10^{-4}, 10^{-2}, 1, 10^2)$	$5.2122e - 009$	141.6480
$\Sigma = \text{diag}(10^2, 2, 1, 10^{-2})$	$1.6946e - 010$	141.7189

**Exemple 2 :**

Dans cet exemple nous traitons la matrice symplectique définie ainsi. Soit  $D = \text{diag}(v)$  une matrice diagonale où  $v$  est construit ainsi :

Pour  $i = 1$  à fixe  $(n/2)$

$$v(2 * i - 1) = 10^{\log(i)}, \quad v(2 * i) = 10^{-\log(i)}$$

$$v(n) = 10^{-n}$$

où fixe  $(n/2)$  désigne la partie entière inférieure de  $n/2$ .

A partir de la matrice diagonale  $\Delta = \begin{pmatrix} D & 0_n \\ 0_n & D^{-1} \end{pmatrix}$ , on construit une matrice symplectique  $A$  en subissant à  $\Delta$  des transformations symplectiques et similaires arbitraires en utilisant les réflecteurs symplectiques.

On obtient les résultats numérique en prenant  $n = 5$  jusqu'à  $n = 10$ .

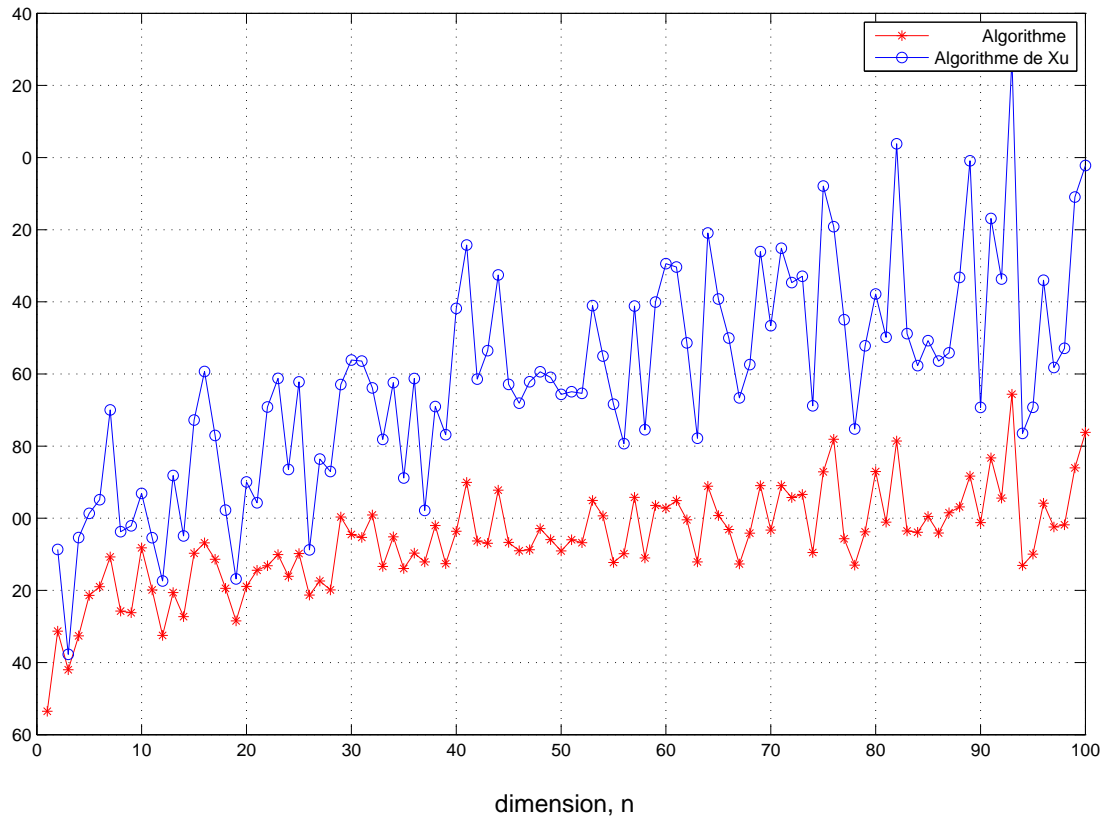
	Notre Algorithme	Algorithme de Xu
$n = 5$	$1.2909e - 009$	$7.5570e - 004$
$n = 10$	$9.4812e - 006$	$1.7747e + 005$

**Exemple 3 :**

Dans cet exemple nous étudions la matrice symplectique définie par :

Soit  $D = \text{diag}[1, 2, \dots, n]$  une matrice diagonale. On construit une matrice symplectique  $A$  en subissant à  $\begin{pmatrix} D & 0_n \\ 0_n & D^{-1} \end{pmatrix}$  des transformations symplectiques et similaires arbitraires en utilisant les réflecteurs symplectiques. On obtient les résultats numérique en prenant  $n = 1$  jusqu'à  $n = 100$ .

### SVD-like decomposition pour une matrice symplectique



# Chapitre 3

## Transformation de Householder symplectique

### 3.1 Introduction

La transformation de Householder jouer un rôle important dans l'algèbre linéaire numérique. Leurs caractéristiques intéressantes sont largement utilisés pour la construction des algorithmes efficaces et stables. Ainsi, par exemple, la factorisation  $QR$  bien connu, est utilisé pour résoudre une grande variété de problèmes que les systèmes linéaires. Elle décompose une matrice  $A$  de taille  $m \times n$  sous la forme  $A = QR$ . Celle-ci se réalise par la construction de matrices de Householder  $P_1, \dots, P_n$  telles que  $P_n P_{n-1} \dots P_1 A$  est triangulaire supérieure et  $Q = P_n P_{n-1} \dots P_1$  est orthogonale. La décomposition  $QR$  ne conserve pas la structure d'origine d'une matrice (Hamiltonienne, anti-Hamiltonienne et symplectique). Elle la traite comme n'importe quelle matrice de taille  $2n \times 2n$ . Paige et Van loan [25] utilisent la matrice de Householder orthogonale et symplectique de type  $H = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$  où  $P = I_n - 2 \frac{vv^T}{v^T v}$  la matrice de Householder classique et la transformation de Givens symplectique  $G = \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix}$  avec  $C = \text{diag} \left( \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k-1}, c, 1, \dots, 1 \right)$  et



$S = \text{diag} \left( \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-1}, s, 0, \dots, 0 \right)$  où  $c^2 + s^2 = 1$ . Ces transformations permettent de décomposer une matrice  $M \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  sous la forme  $M = SR$  avec  $S$  orthogonale et symplectique et  $R$  semi-J-triangulaire. Salam, El-Farouk et Al-Aidarous [30] ont proposé une décomposition  $SR$ , qui permet de factoriser une matrice  $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  sous la forme  $A = SR$  avec  $S$  symplectique et  $R$  J-triangulaire; en utilisant les transvections symplectiques. Pour transformer une matrice  $X \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$  en une matrice  $Y \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$ , ils ont appliqué deux transvections successive avec la condition  $X^J X = Y^J Y$ . Dans le cas où  $Y = E_1 C$  avec  $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , ils ont utilisé la décomposition élémentaire  $SR$ , voir [28] pour construire la matrice  $C$ . Leur construction est liée à la décomposition  $SR$  élémentaire à paramètres libres.

Nous présentons, dans ce chapitre, la transformation de Householder symplectique, voir [3] définie dans le module libre  $\mathbb{R}^{2n \times 2}$ . Celle-ci présente une ressemblance formelle avec la transformation de Householder classique dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^{2n}$ . Un algorithme, qui produit la décomposition  $SR$  par les transformations de Householder symplectique ou orthogonal et symplectique, est obtenu par le même schéma que la décomposition  $QR$  par la transformation de Householder classique. Ces transformations décomposent une matrice  $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2p}$  sous la forme  $A = SR$  où  $S \in \mathbb{R}^{2n \times 2p}$  est symplectique ou orthogonale et symplectique et  $R$  J-triangulaire ou semi-J-triangulaire. Notre approche présente l'avantage de transformer une matrice  $X \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$  en une matrice  $E_1 C$  avec  $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  via une seule transformation de Householder symplectique. Des tests numériques sont présentés. Ils montrent l'efficacité de notre approche. Une comparaison est donné avec les transformations de Paige et Van Loan ainsi que celles données dans [29].

## 3.2 Householder symplectique

En algèbre linéaire, un  $K$ -module est une structure algébrique qui généralise celle d'un espace vectoriel. Il possède des propriétés moins riches, par exemple l'existence

d'une base n'est pas assurée. Dans un espace vectoriel, l'ensemble des scalaires forment un corps tandis que dans un module, il est de manière générale munis d'une structure d'anneau (non nécessairement commutatif). Un  $K$ -module est dit libre s'il possède une base.

Dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , la matrice de Householder connue également sous le nom de transformation de Householder ou réflecteur est un outil très utilisé dans l'algèbre linéaire. Elle est utile dans la réduction orthogonale et fournit la factorisation  $QR$  efficace et stable. Elle est définie par

$$P = I_n - 2 \frac{vv^T}{v^T v} \quad \text{où } v = x \pm \|x\|e_1 \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}^n$$

La matrice de Householder  $P$  est symétrique, orthogonale ( $P^T = P$  et  $P^T P = P^2 = I_n$ ) et elle conserve la norme euclidien ( $\|Px\| = \|x\|$ ). Du point de vue géométrique, la matrice de Householder  $P$  est une symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan perpendiculaire à  $v$ .

Nous commençons à définir et donner les principales propriétés de la matrice de Householder symplectique dans le  $K$ -module libre  $\mathbb{R}^{2n \times 2}$  avec  $K = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

**Définition 3.2.1** Soit  $V = [u \ v] \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$  une matrice non-isotropique ( $\varphi(V, V) = \alpha I_2$  où  $\alpha = u^T J v \neq 0$ ). Nous définissons la matrice de Householder symplectique par

$$H = I_{2n} - 2V\varphi(V, V)^{-1}V^J$$

**Proposition 3.2.1** La matrice de Householder symplectique  $H$  définie ci-dessus est symplectique et anti-Hamiltonienne ( c'est à dire,  $H^J H = I_{2n}$  et  $H^J = H$  ).

Démonstration. Le caractère anti-Hamiltonienne est claire. Nous montrons par ce

simple calcul que  $H$  est symplectique,

$$\begin{aligned}
H^J H &= (I_{2n} - 2V\varphi(V, V)^{-1}V^J)(I_{2n} - 2V\varphi(V, V)^{-1}V^J) \\
&= I_{2n} - 4V\varphi(V, V)^{-1}V^J + 4V\varphi(V, V)^{-1}V^J V\varphi(V, V)^{-1}V^J \quad \text{or} \quad \varphi(V, V) = V^J V \\
&= I_{2n}.
\end{aligned}$$

Dans le cas classique; nous avons  $P((\alpha v) = P(v)$  pour tout  $(\alpha \neq 0$ . Nous traitons l'équivalent de ce résultat dans le  $\mathbb{K}$ -module  $\mathbb{R}^{2n \times 2}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ).

**Proposition 3.2.2** Soient  $V \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$  une matrice non-isotropique et  $W = VG$  avec  $G \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  une matrice non singulière. Alors la matrice de Householder symplectique associée à  $W$  est la même que celle associée à  $V$ .

Démonstration. Soit  $W = VG$  où  $G \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$  une matrice non singulière. Alors la matrice de Householder symplectique associée à  $W$  est donnée par,

$$H(W) = I_{2n} - 2W(W^J W)^{-1}W^J$$

nous avons,

$$\begin{aligned}
H(W) &= I_{2n} - 2W(W^J W)^{-1}W^J \\
&= I_{2n} - 2VG(G^J V^J VG)^{-1}G^J V^J
\end{aligned}$$

Comme  $V^J V = \alpha I_2$  et  $G^J G = GG^J = \det(G)I_2$ . Donc

$$\begin{aligned}
H(W) &= I_{2n} - 2VG(G^J V^J VG)^{-1}G^J V^J \\
&= I_{2n} - 2\alpha^{-1}VV^J \\
&= H(V).
\end{aligned}$$

□

**Proposition 3.2.3** La matrice de Householder symplectique  $H$  définit une symétrie J-orthogonale par rapport à l'hyperplan  $\{V\}^{\perp} = \{W \in \mathbb{R}^{2n \times 2} / \varphi(V, W) = W^J V = 0_2\}$ ; autrement dit  $HU = U$  pour tout  $U \in \{V\}^{\perp}$  et  $HW = -W$  pour tout  $W = VM$  où  $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  une matrice non singulière.

Démonstration. La matrice de Householder symplectique associée à  $V$  est définie par,  $H = I_{2n} - 2V\varphi(V, V)^{-1}V^J$ .

Or pour toute  $U \in \{V\}^{\perp}$  nous avons  $\varphi(U, V) = V^J U = 0_2$  donc,

$$\begin{aligned} HU &= U - 2V\varphi(V, V)^{-1}V^J U \\ &= U. \end{aligned}$$

Pour toute  $W = VM$  avec  $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  nous avons,

$$\begin{aligned} HW &= W - 2V\varphi(V, V)^{-1}V^J W \\ &= W - 2V\varphi(V, V)^{-1}V^J VM \end{aligned}$$

Puisque  $\varphi(V, V) = V^J V$  donc  $\varphi(V, V)^{-1}V^J V = I_2$ . Finalement, nous obtenons,

$$\begin{aligned} HW &= W - 2VM \\ &= -W \end{aligned}$$

C'est ce que nous qualifions par une symétrie J-orthogonale par rapport à l'hyperplan  $\{V\}^{\perp}$ .  $\square$

**Proposition 3.2.4** La matrice de Householder symplectique  $H$  est invariante par rapport au J-produit scalaire  $\varphi$ .

Démonstration. Nous avons

$$\varphi(HU, HV) = \varphi(U, \underbrace{H^J HV}_{I_{2n}}) = \varphi(U, V).$$

On a le lemme suivant

**Lemme 3.2.1** Dans le cas réel, si  $U \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  alors

$$U^J U = U U^J = \det(U) I_2 \quad \text{et} \quad U^J + U = \text{tr}(U) I_2.$$

Démonstration. voir [3].

### 3.3 Détermination du vecteur de Householder symplectique

Dans le cas classique, étant donné un vecteur  $x \neq 0_n$ , le vecteur de Householder qui lui est associé est donné par  $v = x \pm \|x\| e_1$ . La matrice de Householder  $P = I_n - 2 \frac{v v^T}{v^T v}$  associée à  $v = x \pm \|x\| e_1$  vérifie  $Px = \alpha e_1$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pour toute matrice non-isotropique  $X$  dans  $\mathbb{R}^{2n \times 2}$ , nous cherchons à construire la matrice  $V$  associée à la matrice de Householder symplectique  $H = I_{2n} - 2V\varphi(V, V)^{-1}V^J$  telle que  $HX = E_1 D$  avec  $D$  une matrice non singulière de taille  $2 \times 2$ . Nous referons à  $V$  par vecteur de Householder symplectique.

**Lemme 3.3.1** Soit  $X = \sum_{i=1}^n E_i M_i \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$  une matrice non-isotropique. Supposons que  $X$  admet au moins une composante régulière  $M_i \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  avec  $i > 1$ . S'il existe une matrice de Householder symplectique  $H$  associée à une matrice non-isotropique  $V \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$  telle que  $HX = E_1 D$  où  $D \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  est une matrice non nulle. Alors  $D$  est non singulière et  $V$  est nécessairement sous la forme  $X + E_1 C$  où  $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  une matrice non singulière.

Démonstration. Soit  $V \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$  et  $H = I_{2n} - 2V\varphi(V, V)^{-1}V^J$  la matrice de Householder symplectique associée à  $V$ .

Supposons que  $HX = E_1 D$ . D'une part  $D^J D = \det(D) I_2$  ( d'après le lemme 3.2.1), et d'autre part  $D^J D = X^J \underbrace{H^J H}_{I_{2n}} X = X^J X \neq 0_2$ . Donc la matrice  $D$  est non singulière.

Posons  $N = V^J X$  nous avons  $N \neq 0_2$ . Car sinon,

$$\begin{aligned} HX &= I_{2n} - 2V\varphi(V, V)^{-1} \underbrace{V^J X}_{N=0_2} \\ &= X \\ &= E_1 D. \end{aligned}$$

Ceci est contradictoire d'après l'hypothèse du lemme,  $X$  admet au moins une composante régulière  $M_i \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  avec  $i > 1$ . D'où  $N = V^J X \neq 0_2$ .

Nous distinguons alors deux cas :

**1<sup>er</sup> cas :** Si  $N = V^J X$  est non singulière, alors  $V = \frac{\alpha}{2}(XN^{-1} - E_1DN^{-1})$ . Ce qui implique que  $V$  est sous la forme  $V = XC_1 + E_1C_2$  où  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  deux matrices non singulières. D'après la proposition 3.2.1,  $V$  s'écrit sous la forme  $X + E_1C$  où  $C = C_2C_1^{-1}$  est non singulière.

**2<sup>ème</sup> cas :** Si  $N = V^J X$  est singulière. Par le lemme 3.2.1. ( $NN^J = N^JN = \det(N)I_2 = 0_2$ ), nous avons :

$HX = E_1D$  équivalent à  $X - 2\alpha^{-1}VN = E_1D$  où  $\alpha I_2 = \varphi(V, V)$ . Multiplions les deux membres de l'égalité par  $N^J$ . Alors nous obtenons

$$XN^J = E_1DN^J$$

Comme

$$E_i^J E_j = E_i^T E_j = 0_2 \quad \text{pour tout } i \neq j$$

Donc

$$E_i^J XN^J = E_i^J E_1DN^J = 0_2$$

Ce qui implique que

$$M_i N^J = 0_2 \quad \text{pour } i \neq 1.$$

D'où  $M_i$  est singulière qui est contradictoire par l'hypothèse du lemme ( $X$  admet au

moins une composante régulière  $M_i \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  avec  $i > 1$ ).  $\square$

**Théorème 3.3.1** Soit  $X = [x_1 \ x_2] \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$  une matrice non-isotropique vérifiant les conditions du lemme 3.3.1. Alors il existe  $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  une matrice non singulière telle que la matrice de Householder symplectique  $H$  associée à  $V = X + E_1 C$  vérifie  $HX = E_1 D$  avec  $D \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  une matrice non singulière.

Démonstration. Soit  $(M_i)_{i=1, \dots, n}$  les composantes de  $X$  relativement à la base canonique  $(E_i)_{i=1, \dots, n}$  du  $K$ -module  $\mathbb{R}^{2n \times 2}$  ( $K = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ).

Posons  $V = [v_1 \ v_2] = X + E_1 C$  avec  $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  une matrice non singulière. Supposons que  $HX = E_1 D$  où  $H$  la matrice de Householder symplectique associée à  $V$ .

Puisque  $\varphi(V, V) = V^J V = \alpha I_2$  où  $\alpha = \langle v_1, Jv_2 \rangle$  et  $E_1^J X = M_1$ ,  $X^J E_1 = M_1^J$  donc,

$$\begin{aligned} \varphi(V, V) &= (X + E_1 C)^J (X + E_1 C) \\ &= X^J X + X^J E_1 C + C^J E_1^J X + C^J C \\ &= X^J X + M_1^J C + C^J M_1 + C^J C. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V^J X &= (X + E_1 C)^J X \\ &= X^J X + C^J E_1^J X \\ &= X^J X + C^J M_1. \end{aligned}$$

Or  $X^J X = \beta I_2$  avec  $\beta = \langle x_1, Jx_2 \rangle$ . Donc  $V^J X = \beta I_2 + C^J M_1$  et  $V^J V = \beta I_2 + M_1^J C + C^J M_1 + C^J C$ .

Nous avons

$$\begin{aligned} HX &= X - 2V(V^J V)^{-1} V^J X \\ &= X - 2\alpha^{-1} V(\beta I_2 + C^J M_1) \end{aligned}$$

Comme  $V = X + E_1C$  alors

$$HX = X - 2\alpha^{-1}[\beta(X + E_1C) + XC^J M_1 + E_1CC^J M_1].$$

D'après le lemme 3.2.1.  $CC^J = C^J C = \delta I_2$  donc

$$\begin{aligned} HX &= X[I_2 - 2\alpha^{-1}(\beta I_2 + C^J M_1)] - 2\alpha^{-1}E_1(\delta M_1 + \beta C) \\ &= E_1[M_1(I_2 - 2\alpha^{-1}(\beta I_2 + C^J M_1)) - 2\alpha^{-1}(\delta M_1 + \beta C)] \\ &\quad + \sum_{i=2}^n E_i[M_i(I_2 - 2\alpha^{-1}(\beta I_2 + C^J M_1))]. \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse ci-dessus ( $\det(M_i) \neq 0$  pour au moins un  $i > 1$ ) alors,

$$\begin{aligned} HX &= E_1 D \Rightarrow I_2 - 2\alpha^{-1}(\beta I_2 + C^J M_1) = 0_2 \\ &\Rightarrow C^J M_1 = \underbrace{\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right)}_{\gamma} I_2 \end{aligned}$$

Nous distinguons deux cas :

**a)** Si  $M_1$  est non singulière, alors  $\gamma = \frac{\alpha}{2} - \beta \neq 0 \dots (*)$  et par le lemme 3.2.1.,  
 $C = \frac{\gamma}{\det(M_1)} M_1$ .  
 Or  $C^J M_1 = M_1^J C = \gamma I_2$  et  $V^J V = \beta I_2 + M_1^J C + C^J M_1 + C^J C = \alpha I_2$ ; alors  $\alpha = \beta + 2\gamma + \frac{\gamma^2}{\det(M_1)}$ . Remplaçons  $\alpha$  dans (\*), nous obtenons  $\gamma = \frac{1}{2}(\beta + 2\gamma + \gamma^2 \frac{1}{\det(M_1)}) - \beta$ .

D'où

$$\gamma = \pm \sqrt{\beta \det(M_1)} \text{ et } C = \pm \frac{\sqrt{\beta \det(M_1)}}{\det(M_1)} M_1$$



Donc

$$\begin{aligned}
 V &= X + E_1 C \\
 &= E_1(M_1 + C) + \sum_{i=2}^n E_i M_i \\
 &= \left(1 \pm \frac{\sqrt{\beta \det(M_1)}}{\det(M_1)}\right) E_1 M_1 + \sum_{i=2}^n E_i M_i.
 \end{aligned}$$

Pour des raisons de stabilité numérique, prenons  $C = \text{signe}(\det(M_1)) \frac{\sqrt{\beta \det(M_1)}}{\det(M_1)} M_1$ .  
 Comme  $HX = 2\alpha^{-1} E_1(CC^J M_1 + CX^J X)$  et  $C^J M_1 + X^J X = \frac{\alpha}{2} I_2$ ; alors  $CC^J M_1 + CX^J X = \frac{\alpha}{2} C$ . Et

$$HX = -E_1 C = -\text{signe}(\det(M_1)) \frac{\sqrt{\beta \det(M_1)}}{\det(M_1)} E_1 M_1$$

d'où

$$D = -C = -\text{signe}(\det(M_1)) \frac{\sqrt{\beta \det(M_1)}}{\det(M_1)} M_1.$$

Finalement,  $HX = E_1 D$  est sous la forme suivante

$$\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ * & * \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \swarrow n+1.$$

b) Si  $\det(M_1) = 0$ ; alors  $C^J M_1 = (\frac{\alpha}{2} - \beta)I_2 = 0_2$ . Or

$$V^J V = \alpha I_2 = \beta I_2 + \underbrace{M_1^J C + C^J M_1}_{0_2} + C^J C,$$

ce qui implique que  $\alpha = \delta + \beta$ .

D'où  $\det(C) = \delta = \beta = \frac{\alpha}{2}$ . Puisque  $C^J C = X^J X$  alors prenons

$$\begin{cases} C = \begin{pmatrix} \sqrt{\beta} & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta} \end{pmatrix} & \text{si } \beta > 0 \\ C = \begin{pmatrix} -\sqrt{-\beta} & 0 \\ 0 & \sqrt{-\beta} \end{pmatrix} & \text{si } \beta < 0 \end{cases}$$

Donc  $HX = X - 2\beta\alpha^{-1}V = X - V = -E_1 C$  ce qui donne  $D = -C$  et  $HX$  est sous la forme suivante

$$\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & * \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \swarrow n+1$$

□.

### 3.4 Transformations de Householder symplectique

Soit  $A = [a_1 a_2 \dots a_{2n}]$  une matrice réelle d'ordre  $2n \times 2n$  avec  $\alpha_i \in \mathbb{R}^{2n}$ , pour  $i = 1, 2, \dots, 2n$ . Nous notons par  $(E_i^{(k)})_{1 \leq i \leq n-k+1}$  la base canonique du  $K$ -module  $\mathbb{R}^{2(n-k+1) \times 2}$  pour  $k = 1, 2, \dots, n$  ( $K = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ). Nous traitons l'algorithme de la décomposition  $SR$  par

la transformation de Householder symplectique. Il permet de décomposer une matrice  $A$  sous la forme  $A = SR$  avec  $S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  une matrice symplectique et  $R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$  une matrice J-triangulaire.

• **Algorithme 3.4.1 : Householder symplectique (SHA)**

**Entrée :** Une matrice  $A = [a_1 a_2 \dots a_{2n}] \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ .

**Sortie :** Une matrice symplectique  $S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  et une matrice J-triangulaire  $R \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  telle que  $A = SR$ .

**Posons :**  $A := [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2n}]$ ,  $S := I_{2n}$ .

**Pour**  $k = 1, 2, \dots, n$  **Faire**

**Posons**  $X = [b_1, b_2] := \begin{pmatrix} A(k : n, k) & A(k : n, n+k) \\ A(n+k : 2n, k) & A(n+k : 2n, n+k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2(n-k+1) \times 2}$ .

Et  $\beta = \langle b_1, Jb_2 \rangle$ .

**Si**  $X$  est non-isotropique; **alors**

**Si**  $M_1 = [E_1^{(n-k+1)}] J X$  est non singulière; **alors**

**Si** la composante  $M_1(2, 1) \neq 0$ ; alors appliquons une transformation symplectique de Givens  $G$  à la matrice  $A$  pour annuler la composante  $M_1(2, 1) = X(n-k+2, 1)$ . Mettons à jour  $S := SG^T$ ,  $A := GA$ ,  $X := GX$  et  $M_1 := [E_1^{(n-k+1)}] J X$ .

**Fin de si**

**Calculons**  $C = \text{signe}(\det(M_1)) \frac{\sqrt{\beta \det(M_1)}}{\det(M_1)} M_1$ .

**Sinon**

**Si**  $\beta > 0$ , **alors**  $C = \sqrt{\beta} I_2$  **Sinon**  $C = \sqrt{-\beta} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  **Fin de Si.**

**Fin de Si.**

Calculons la matrice de Householder symplectique  $H = \begin{pmatrix} H_{1,1} & H_{1,2} \\ H_{2,1} & H_{2,2} \end{pmatrix}$  associée à  $V = X + E_1^{(n-k+1)} C$  avec  $H_{i,j} \in \mathbb{R}^{(n-k+1) \times (n-k+1)}$  pour  $i, j = 1, 2$ .

$$\mathbf{Posons} \ P := \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0_{(k-1) \times (n-k+1)} & 0_{k-1} & 0_{(k-1) \times (n-k+1)} \\ 0_{(n-k+1) \times (k-1)} & H_{1,1} & 0_{(n-k+1) \times (k-1)} & H_{1,2} \\ 0_{k-1} & 0_{(k-1) \times (n-k+1)} & I_{k-1} & 0_{(k-1) \times (n-k+1)} \\ 0_{(n-k+1) \times (k-1)} & H_{2,1} & 0_{(n-k+1) \times (k-1)} & H_{2,2} \end{pmatrix}$$

et mettons à jour  $S := SP^J$ ,  $A := PA$ .

**Fin de Si.**

**Fin de Pour**

Posons  $R := A$ .

Nous illustrons cet algorithme pour  $n = 4$  sous ce schéma :

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{la 1ère étape est} \\ \text{de mettre zéro} \\ \text{les positions} \\ (2 : 8, 1), (2 : 4, 5) \\ \text{et } (6 : 8, 5) \\ \longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * & 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * & 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * & 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * & 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{array}{c}
 \left( \begin{array}{cccc|cccc}
 * & * & * & * & * & * & * & * \\
 0 & * & * & * & 0 & * & * & * \\
 0 & * & * & * & 0 & * & * & * \\
 0 & * & * & * & 0 & * & * & * \\
 \hline
 0 & * & * & * & * & * & * & * \\
 0 & * & * & * & 0 & * & * & * \\
 0 & * & * & * & 0 & * & * & * \\
 0 & * & * & * & 0 & * & * & *
 \end{array} \right)
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{2ème étape est} \\
 \text{de mettre zéro} \\
 \text{les positions} \\
 (3 : 4, 2), (6 : 8, 2), \\
 (3 : 4, 6) \text{ et } (7 : 8, 6) \\
 \longrightarrow
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left( \begin{array}{cccc|cccc}
 * & * & * & * & * & * & * & * \\
 0 & * & * & * & 0 & * & * & * \\
 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & * & * \\
 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & * & * \\
 \hline
 0 & * & * & * & * & * & * & * \\
 0 & 0 & * & * & 0 & * & * & * \\
 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & * & * \\
 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & * & *
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

donc

$$\begin{array}{c}
 \left( \begin{array}{cccc|cccc}
 * & * & * & * & * & * & * & * \\
 0 & * & * & * & 0 & * & * & * \\
 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & * & * \\
 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & * & * \\
 \hline
 0 & * & * & * & * & * & * & * \\
 0 & 0 & * & * & 0 & * & * & * \\
 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & * & * \\
 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & * & *
 \end{array} \right)
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{3ème étape est} \\
 \text{de mettre zéro} \\
 \text{les positions} \\
 (4, 3), (7 : 8, 3), \\
 (4, 7) \text{ et } (8, 7) \\
 \longrightarrow
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left( \begin{array}{cccc|cccc}
 * & * & * & * & * & * & * & * \\
 0 & * & * & * & 0 & * & * & * \\
 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & * & * \\
 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & * \\
 \hline
 0 & * & * & * & * & * & * & * \\
 0 & 0 & * & * & 0 & * & * & * \\
 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & * & * \\
 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & *
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

En fin, la dernière étape est de mettre zéro la position (8,4) pour obtenir la forme J-

triangulaire voulue,

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & * \\ \\ 0 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

L'algorithme ci-dessus décrit la décomposition  $SR$  par les transformations de Householder symplectiques où  $R$  est J-triangulaire et  $S$  symplectique non-orthogonale.

### 3.5 Transformations de Householder orthogonales et symplectiques

Paige et Van Loan [25] définissent la transformation de Householder orthogonale et symplectique par  $H = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$  avec  $P = I_n - 2\frac{xx^T}{x^Tx}$  la matrice de Householder classique associé à  $x \in \mathbb{R}^n$ . Nous traitons dans ce paragraphe la transformation de Householder orthogonale et symplectique dans la structure du  $K$ -module libre  $\mathbb{R}^{2n \times 2}$  avec  $K = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Elle est basée sur la forme J-sesquilinéaire.

**Définition 3.5.1** Soit  $V = [v \quad -Jv] \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$  une matrice non-isotropique avec  $v \in \mathbb{R}^{2n}$  un vecteur non nul. Alors la matrice de Householder orthogonale et symplectique associée à  $V$  est définie par

$$H = I_{2n} - 2V\varphi(V, V)^{-1}V^J.$$

$H$  est orthogonale, symplectique et anti-Hamiltonienne c'est à dire,  $H^J H = I_{2n}$  et  $H^J =$

$$H^T = H.$$

Nous abordons la relation qui existe entre la transformation de Householder orthogonale et symplectique que Paige et Van Loan, voir [25] définissent et celle que nous avons donné ci-dessus, par la proposition suivante :

**Proposition 3.5.1** La transformation de Householder orthogonale et symplectique que nous avons défini devient celle de Paige et Van Loan [25] si  $v$  est sous la forme suivante  $v = \begin{pmatrix} x \\ 0_n \end{pmatrix}$  ou  $v = \begin{pmatrix} 0_n \\ x \end{pmatrix}$  avec  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Démonstration. Soit  $x$  un vecteur non null dans  $\mathbb{R}^n$ . Posons  $v = \begin{pmatrix} x \\ 0_n \end{pmatrix}$  et  $V = [v \quad -Jv] \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$ ; alors la matrice de Householder associée à  $V$  est définie par,

$$\begin{aligned} H &= I_{2n} - 2V\varphi(V, V)^{-1}V^J \\ &= \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \frac{xx^T}{x^T x} & 0 \\ 0 & \frac{xx^T}{x^T x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_n - 2\frac{xx^T}{x^T x} & 0 \\ 0 & I_n - 2\frac{xx^T}{x^T x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous retrouvons le même résultat si  $v = \begin{pmatrix} 0_n \\ x \end{pmatrix}$ .  $\square$

• **Algorithme 3.5.1 : Householder orthogonal et symplectique (OSH)**

**Entrée :** Une matrice  $A = [a_1 a_2 \dots a_{2n}] \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ .

**Sortie :**  $S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  est orthogonale et symplectique et  $R \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  semi-J- triangulaire telle que  $A = SR$ .

Posons  $A := [a_1 a_2 \dots a_{2n}]$ ,  $S := I_{2n}$ .

**Pour**  $k = 1, 2, \dots, n$  **Faire**

Posons  $X = [b_1, -Jb_1]$  où  $b_1 := \begin{pmatrix} A(k : n, k) \\ A(n+k : 2n, k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2(n-k+1)}$ .

Et  $\beta = \langle b_1, Jb_1 \rangle \neq 0$  si  $b_1 \neq 0_{2(n-k+1),1}$ .

**Si**  $M_1 = [E_1^{(n-k+1)}]JX$  est non singulière; **alors**

**Si** la composante  $M_1(2, 1) \neq 0$ ; **alors** appliquons une transformation symplectique de Givens  $G$  à la matrice  $A$  pour annuler la composante  $M_1(2, 1) = X(n-k+2, 1)$ .  
Mettons à jour  $S := SG^T$ ,  $A := GA$ ,  $X := GX$  et  $M_1 := [E_1^{(n-k+1)}]JX$ .

**Fin de si**

Calculons  $C = \text{signe}(\det(M_1)) \frac{\sqrt{\beta \det(M_1)}}{\det(M_1)} M_1$ .

**Sinon**

**Si**  $\beta > 0$ ; **alors**  $C = \sqrt{\beta} I_2$  **Sinon**  $C = \sqrt{-\beta} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  **Fin de Si.**

**Fin de Si.**

Calculons la matrice de Householder symplectique  $H = \begin{pmatrix} H_{1,1} & H_{1,2} \\ H_{2,1} & H_{2,2} \end{pmatrix}$  associée à

$V = X + E_1^{(n-k+1)}C$  avec  $H_{i,j} \in \mathbb{R}^{(n-k+1) \times (n-k+1)}$  pour  $i, j = 1, 2$ .

Posons  $P := \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0_{(k-1) \times (n-k+1)} & 0_{k-1} & 0_{(k-1) \times (n-k+1)} \\ 0_{(n-k+1) \times (k-1)} & H_{1,1} & 0_{(n-k+1) \times (k-1)} & H_{1,2} \\ 0_{k-1} & 0_{(k-1) \times (n-k+1)} & I_{k-1} & 0_{(k-1) \times (n-k+1)} \\ 0_{(n-k+1) \times (k-1)} & H_{2,1} & 0_{(n-k+1) \times (k-1)} & H_{2,2} \end{pmatrix}$  et met-

tons à jour  $S := SP^J$ ,  $A := PA$ .

**Fin de Si.**

**Fin de Pour**

Posons  $R := A$ .

**Remarque 3.5.1** La matrice semi-J-triangulaire  $R$  produite par l'algorithme ci-



dessus est sous la forme suivante

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

### 3.6 Householder symplectique par bloc

Nous pouvons généraliser la notion de J-produit scalaire à une structure du K-module  $\mathbb{R}^{2n \times 2p}$  avec  $K = \mathbb{R}^{2p \times 2p}$ . Nous définissons, dans cette partie, la matrice de Householder symplectique par bloc.

**Définitions 3.6.1** Soit  $W$  une matrice réelle de dimension  $2n \times 2p$  ( $p < n$ ), avec  $\det(\varphi(W, W)) \neq 0$ . La matrice de Householder symplectique associée à  $W$  est définie par

$$H = I_{2n} - 2W\varphi(W, W)^{-1}W^J$$

La matrice  $H$  est symplectique et anti-Hamiltonienne,  $H^J H = I_{2n}$  et  $H^J = H$ .

### 3.7 Relation entre Householder et réflecteur symplectique

Dans un espace Euclidien, le réflecteur élémentaire  $r$  n'est que Householder classique avec le signe négative. **En effet**,

Le réflecteur élémentaire est défini par  $r = \frac{(u+v)(u+v)^H}{1+v^H u} - I_n$  où  $u, v \in \mathbb{C}^n$  vérifiant  $u^H u = v^H v = 1$ . Posons  $w = u+v$  alors la matrice de Householder associée à  $w$  est définie par  $P = I_n - 2\frac{ww^H}{w^H w}$ .

Or  $w^H w = 2(1 + u^H v)$  donc

$$\begin{aligned}
P &= I_n - 2 \frac{(u+v)(u+v)^H}{2(1+u^H v)} \\
&= I_n - \frac{(u+v)(u+v)^H}{(1+u^H v)} \\
&= -r
\end{aligned}$$

Contrairement au cas symplectique, nous avons en général, le réflecteur symplectique n'a pas de relation avec Householder symplectique. **En effet**, d'après ce qui précède, Householder symplectique associée à  $W \in \mathbb{C}^{2n \times 2}$  est définie par  $H = I_{2n} - 2W(W^J W)^{-1}W^J$ .

Posons  $W = U + V$  où  $U, V \in \mathbb{C}^{2n \times 2}$  vérifiant  $U^J U = V^J V = I_2$ ; alors  $\varphi(W, W) = W^J W = 2I_2 + V^J U + U^J V$ . Puisque, en général, la forme J-sesquilinéaire  $\varphi$  n'est pas symétrique, c'est à dire  $\varphi(U, V) \neq \varphi(V, U)$  ( $V^J U \neq U^J V$ ). Donc  $\varphi(W, W) \neq 2(I_2 + V^J U)$ , cela implique que

$$\begin{aligned}
H &= I_{2n} - 2W\varphi(W, W)^{-1}W^J \\
&= I_{2n} - 2(U+V)(2I_2 + V^J U + U^J V)^{-1}(U+V)^J \\
&\neq S = (U+V)C^{-1}(U+V)^J - I_{2n} \quad \text{où } C = I_2 + V^J U.
\end{aligned}$$

**Proposition 3.7.1** Soient  $U = \sum_{i=1}^n E_i M_i \in \mathbb{C}^{2n \times 2}$  une matrice non-isotropique et  $G \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  vérifiant  $G^J G = U^J U$ . Si  $C = U^J U + G^J M_1$  est non singulière, alors le réflecteur symplectique  $S = (U + E_1 G)C^{-1}(U + E_1 G)^J - I_{2n}$  transforme  $U$  en  $E_1 G$ . Si en plus  $G^J M_1 = M_1^J G$ , alors  $S = -H$  avec  $H = I_{2n} - 2W\varphi(W, W)^{-1}W^J$  la transformation de Householder symplectique associée à  $W = U + E_1 G$ .

Démonstration. Soit  $H = I_{2n} - 2W(W^J W)^{-1}W^J$  la transformation de Householder symplectique associée à  $W = U + E_1 G$ . Supposons que  $G^J G = U^J U$  et  $G^J M_1 = M_1^J G$ ,

alors

$$\begin{aligned}
H &= I_{2n} - 2W(W^J W)^{-1}W^J \\
&= I_{2n} - 2(U + E_1 G)(W^J W)^{-1}(U + E_1 G)^J \quad \text{or} \quad W^J W = 2(U^J U + G^J M_1) \\
&= I_{2n} - (U + E_1 G)(U^J U + G^J M_1)^{-1}(U + E_1 G)^J \\
&= I_{2n} - (U + E_1 G)C^{-1}(U + E_1 G)^J \\
&= -S
\end{aligned}$$

□.

Nous constatons qu'il est difficile de trouver  $G \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  vérifiant  $G^J G = U^J U$  et  $G^J M_1 = M_1^J G$ . Cela reste une question ouverte à résoudre. Dans le cas réel, ce problème qui est relativement facile.

### 3.7.1 Relation dans le cas réel

Ici, nous décrivons la relation entre Householder symplectique et réflecteur symplectique dans le cas réel. En fait, nous étudions et traitons, dans le cas réel, la condition de la proposition 3.7.1. ( $G^J G = U^J U$ ,  $G^J M_1 = M_1^J G$ ).

Soit  $U = \sum_{i=1}^n E_i M_i \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$  une matrice non-isotropique et  $U^J U = \alpha I_2 = [\sum_{i=1}^n \det(M_i)] I_2$ .

Supposons que  $M_1$  est non singulière, alors nous distinguons deux cas :

- Si  $\alpha \det(M_1) > 0$ ; alors  $G = \sqrt{\frac{\alpha}{\det(M_1)}} M_1$ .
- Si  $\alpha \det(M_1) < 0$ ; alors il existe au moins un indice  $i_0$  tel que  $\alpha \det(M_{i_0}) > 0$ .

En permutant par la matrice orthogonale symplectique suivante  $P = E_{i_0} E_1^T + E_1 E_{i_0}^T + \sum_{j \neq i_0, 1}^n E_j E_j^T$  nous obtenons  $V = PU = E_1 M_{i_0} + E_{i_0} M_1 + \sum_{i \neq i_0, 1}^n E_i M_i$ . Ceci nous permet de revenir au premier cas.

**Remarque 3.7.1** Soit  $i_0$  l'indice telle que  $\det(M_{i_0}) \neq 0$  ( $U = \sum_{i=1}^n E_i M_i$  est non-isotropique i.e.,  $\sum_{i=1}^n \det(M_i) \neq 0$ ). Si  $M_1 = E_1^T U$  est singulière; alors en permutant par la matrice orthogonale et symplectique  $P = E_{i_0} E_1^T + E_1 E_{i_0}^T + \sum_{j \neq i_0, 1}^n E_j E_j^T$  nous obtenons  $PU = E_1 M_{i_0} + E_{i_0} M_1 + \sum_{i \neq i_0, 1}^n E_i M_i$ .

### 3.8 Exemples numériques

Nous donnons, dans cette section, des exemples numériques des algorithmes donnés ci-dessus ; en comparant avec ce qui est donné par Paige et Van Loan [25] que nous avons noté par PVLA. Nous calculons les normes de Frobenius suivantes,  $\|A - SR\|_F$  et  $\|J^T S^T JS - I_{2n}\|_F$ .

#### Exemple 1

Soit  $A$  la matrice dépendante du paramètre  $\mu$ , donnée par,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Nous obtenons les résultats suivants,

$$\mu = 2.2204e - 008$$

	Alg 3.4.1	Alg 3.5.1	PVLA
$\ I_{2n} - S^J S\ _F$	$1.0850e - 015$	$1.0474e - 015$	$1.5503e - 015$
$\ A - SR\ _F$	$1.1749e - 015$	$1.1749e - 015$	$1.1749e - 015$

$$\mu = 0.00022204$$

	Alg 3.4.1	Alg 3.5.1	PVLA
$\ I_{2n} - S^J S\ _F$	$5.8059e - 016$	$1.3759e - 015$	$1.2983e - 015$
$\ A - SR\ _F$	$9.9491e - 016$	$3.4513e - 015$	$1.6984e - 015$

### Exemple 2

On considère la matrice Hamiltonienne  $M$  donnée en employant des transformations similaires symplectiques, aléatoirement produites par cinq rotations symplectiques de Givens et cinq matrices de Householder orthogonales et symplectiques [25], à une matrice

quasi-diagonale  $\begin{pmatrix} D & 0_5 \\ 0_5 & -D^T \end{pmatrix}$ .

Si  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-8} \end{pmatrix}$ ; alors nous obtenons les résultats suivantes,

	Alg 3.4.1	Alg 3.5.1	PVLA
$\ I_{2n} - S^J S\ _F$	$1.3864e - 015$	$1.5349e - 015$	$2.2914e - 015$
$\ A - SR\ _F$	$3.3194e - 016$	$3.6351e - 016$	$4.2366e - 016$

### 3.9 Conclusion

Nous avons défini dans ce chapitre la décomposition  $SR$  par les transformations de Householder symplectique. Ces dernières sont définies dans la structure du  $K$ -module libre  $\mathbb{R}^{2n \times 2}$  avec  $K = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Comme dans le cas classique, la factorisation  $SR$  par Householder symplectique pour une matrice  $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  se fait par la construction de matrices de Householder symplectiques  $H_1, H_2, \dots, H_n$  telles que la matrice  $H_n H_{n-1} \dots H_1 A$  soit  $J$ -triangulaire ou semi- $J$ -triangulaire. De points de vue numériques, les résultats obtenus par nos algorithmes sont comparables à ceux obtenus par les transformations de Paige Van Loan.

# Chapitre 4

## Forme de Schur pour une matrice symplectique

### 4.1 Introduction

Le calcul des valeurs propres et vecteurs propres de matrices jouent des rôles importants dans de nombreuses applications dans les sciences physiques. Par exemple, ils jouent un rôle important dans les applications de traitement d'images. La mesure de la netteté de l'image peut être fait en utilisant le concept de valeurs propres [19]. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à un problème de valeurs propres structuré. Nous proposons une méthode pratique pour calculer les valeurs propres et sous-espaces invariants pour les matrices symplectiques qui sont d'une importance particulière dans les applications telles que le contrôle optimal [20, 22]. Les Matrices symplectiques sont largement utilisés dans la factorisation  $SR$  qui est une étape principale dans le mode d'organisation de préservation.

Il est un problème ouvert de longue date pour calculer les valeurs propres et la forme de Schur en particulier celle comment a conservé la structure [6, 7]. Dans le cas d'un problème de valeurs propres de matrices structurées, la préservation de cette structure peut aider à exploiter la symétrie du problème et d'améliorer la précision et l'efficacité

des calculs de sous-espaces invariants et les valeurs propres [16]. Notre méthode proposée ici, est basée sur une factorisation  $SR$  orthogonale et symplectique, qui est basée sur des réflecteurs orthogonaux et symplectiques.

L'orthogonalité est utilisé pour préserver la stabilité, et la symplecticité pour préserver la structure. Nous donnons et prouvons un théorème sur la forme orthogonale et symplectique de Schur pour une matrice symplectique réelle. Un algorithme qui calcule la forme de Schur structurée est donnée et les résultats expérimentaux numériques sont présentés pour illustrer l'efficacité de notre approche.

## 4.2 Notations et quelques définitions

Dans ce chapitre, nous recueillons plusieurs propriétés bien connues de matrices structurées.

Une matrice omniprésente dans ce travail est la matrice anti-symétrique  $J_{2n} = \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ -I_n & O_n \end{pmatrix}$ , où  $I_n$  et  $O_n$  sont le  $n \times n$  identité et la matrice zéro, respectivement. Notez que  $J_{2n}^{-1} = J_{2n}^T = -J_{2n}$ . Dans ce qui suit, nous allons tomber l'indice  $n$  et  $2n$  chaque fois la dimension de la matrice correspondant est clair de son contexte. Le J-transposition de toute matrice  $M$ ,  $2n \times 2p$  est définie par  $M^J = J_{2p}^T M^T J_{2n} \in \mathbb{R}^{2p \times 2n}$ . Toute matrice  $S \in \mathbb{R}^{2n \times 2p}$  satisfaisant la propriété  $S^T J_{2n} S = J_{2p}$  ( $S^J S = I_{2p}$ ) est appelée matrice symplectique. Cette propriété est également appelé J-orthogonalité. Les transformations de similarité symplectiques préserver une matrice structurée.

### **Théorème 4.2.1** (Gershgorine)

Soit  $A$  une matrice dans  $\mathcal{M}_{n \times n}(K)$ ,  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ , alors il existe un indice  $i$  tel que :

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$



c-à-d, que toutes les valeurs propres de  $A$  se trouvent dans l'union des disques

$$D_i = \left\{ \lambda, |\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \right\}.$$

**Théorème 4.2.2** (Forme de Schur complexe)

Dans  $\mathbb{C}$ , toute matrice  $A$  est unitairement semblable à une matrice triangulaire supérieure; il existe une matrice  $U \in \mathbb{N}^{n \times n}$  telle que  $U^H U = I_n$  (donc  $U^H = U^{-1}$ ) et la matrice  $T = U^H A U$  est triangulaire supérieure.

**Lemme 4.2.1** Soit  $P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$  une matrice symplectique où  $(P_{i,j})_{i,j=1,2} \in \mathbb{C}^{n-k \times n-k}$  avec  $1 \leq k \leq n$ . Alors

$$S = \begin{pmatrix} I_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{11} & 0 & P_{12} \\ 0 & 0 & I_k & 0 \\ 0 & P_{21} & 0 & P_{22} \end{pmatrix}$$

est une matrice symplectique d'ordre  $2n \times 2n$ .

Démonstration. Nous avons,

$$\begin{aligned} P^J P &= \begin{pmatrix} P_{22}^H & -P_{12}^H \\ -P_{21}^H & P_{11}^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \\ &= I_{2(n-k)} \end{aligned}$$

Donc

$$S^J S = \begin{pmatrix} I_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{22}^H & 0 & -P_{12}^H \\ 0 & 0 & I_k & 0 \\ 0 & -P_{21}^H & 0 & P_{11}^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{11} & 0 & P_{12} \\ 0 & 0 & I_k & 0 \\ 0 & P_{21} & 0 & P_{22} \end{pmatrix}$$

Par un simple calcul par bloc, nous obtenons  $S^J S = I_{2n}$ .  $\square$

### 4.3 Réflecteurs Symplectiques dans $\mathbb{R}^{2n \times 2}$

Nous avons besoin du réflecteur symplectique. On définit le réflecteur symplectique dans le module libre  $\mathbb{R}^{2n \times 2}$ . Il permet de décomposer une matrice  $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  sous la forme  $A = SR$  où  $S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  est symplectique et  $R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$  est telle que  $R_{11}$ ,  $R_{12}$ ,  $R_{21}$ ,  $R_{22}$  sont triangulaires supérieures. Dans le cas réel,  $R$  est  $J$ -triangulaire si  $R_{12}$  est strictement triangulaire supérieure.

Soit la famille  $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$  définie par  $E_i = [e_i \ e_{n+i}] \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$  pour  $i = 1, \dots, n$  où  $e_i$  est l'élément de rang  $i$  de la base canonique de  $\mathbb{R}^{2n}$ . On obtient alors

$$E_i^J = E_i^T \quad \text{et} \quad E_i^J E_j = \delta_{ij} I_2 \quad \text{où} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

**Remarque 4.3.1** On dit que  $E_i = [e_i \ e_{n+i}] \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$  forme une base du  $\mathbb{k}$ -module libre  $\mathbb{R}^{2n \times 2}$  avec  $\mathbb{k} = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . voir Kanber [21].

Nous rappelons le réflecteur symplectique sur  $\mathbb{R}^{2n \times 2}$  voir [1, 2], qui est défini en parallèle avec réflecteurs élémentaires.

**Proposition 4.3.1.** Soient  $U, V$  deux matrices dans  $\mathbb{R}^{2n \times 2}$  vérifiant  $U^J U = V^J V = I_2$ . Si la matrice  $C = I_2 + V^J U \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  est non singulière (invertible), alors, la transformation  $S = (U + V)C^{-1}(U + V)^J - I_{2n}$  est symplectique et transforme  $U$  en  $V$ . La transformation  $S$  est appelée le réflecteur symplectique dans  $\mathbb{R}^{2n \times 2}$ . En outre, si  $U^J = U^T$  et  $V^J = V^T$ , alors,  $S$  est orthogonale et symplectique.

Démonstration. Supposons que la matrice  $C = I_2 + V^J U$  est non singulière; alors

nous obtenons

$$\begin{aligned}
S^J S &= [(U + V)(C^J)^{-1}(U + V)^J - I_{2n}][(U + V)C^{-1}(U + V)^J - I_{2n}] \\
&= (U + V)(C^J)^{-1}[(U + V)^J(U + V)]C^{-1}(U + V)^J \\
&\quad - (U + V)(C^J)^{-1}(U + V)^J - (U + V)C^{-1}(U + V)^J + I_{2n} \\
&= (U + V)((C^J)^{-1}(C + C^J)C^{-1})(U + V)^J \\
&\quad - [(U + V)((C^J)^{-1} + C^{-1})(U + V)^J] + I_{2n} \\
&= I_{2n}.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
SU &= (U + V)C^{-1}(U^J U + V^J U) - U \\
&= (U + V)C^{-1}(I_2 + V^J U) - U \\
&= V.
\end{aligned}$$

**Proposition 4.3.2** Soit  $u \in R^{2n}$  un vecteur  $2n$ -composant réel non nul . Le réflecteur

$$S = (U + \sqrt{\alpha}E_1)(\alpha I_2 + \sqrt{\alpha}E_1^J U)^{-1}(U + \sqrt{\alpha}E_1)^J - I_{2n}$$

où  $U = [u \ -Ju]$  est orthogonale et symplectique et vérifier  $Su = \sqrt{\alpha}e_1$  où  $\alpha = u^T u = \|u\|_2^2$ .

Démonstration.

Depuis  $U^J U = \alpha I_2$  avec  $\alpha = u^T u = \|u\|_2^2 > 0$ , par un simple calcul donne le résultat.

□

### 4.3.1 Matrices symplectiques

**Notation :** L'ensemble des matrices réelles et symplectiques est noté :  $\mathcal{SP}_n$ .

**Propriétés 4.3.1**

1°. Toute matrice symplectique  $S$  est inversible et son inverse est donné par :  $S^{-1} = -JM^T J$ .

2°. Le déterminant de toute matrice symplectique est  $\pm 1$ . **En effet,**

Soit  $S \in \mathcal{SP}_n$  donc  $S^H JS = J$  par suite  $\det S^T \times \det S \times \det J = \det J$ . Sachant que  $\det J = 1$  et  $\det S^T = \det S$ , on obtient  $(\det S)^2 = 1$ , donc  $\det S = \pm 1$ .

3°. Le produit de deux matrices symplectiques est, à nouveau, une matrice symplectique.

4°.  $(\mathcal{SP}_n, \times)$  est un groupe. **En effet,**

L'ensemble  $\mathcal{SP}_n$  est un sous-ensemble non vide, car  $I_n \in \mathcal{SP}_n$ . Il est stable par  $\times$  d'après ce qui suit

$$\forall M, N \in \mathcal{SP}_n, (MN)^T J (MN) = N^T (M^T JM) N = M^T JM = J.$$

$M$  étant inversible, on a les implications

$$M^T JM = J \implies (M^{-1})^T (M^T JM) M^{-1} = (M^{-1})^T JM^{-1} \implies J = (M^{-1})^T JM^{-1}$$

L'inverse d'une matrice symplectique est donc symplectique, Il en résulte que  $(\mathcal{SP}_n, \times)$  est un groupe.

**Théorème 4.3.1** Une matrice  $S$  est dite symplectique si et seulement si

$$S^J S = I$$

Démonstration.

Supposons que  $S$  est symplectique. Alors, on a  $S^J S = J^T S^H JS$  et puisque  $S$  est symplectique on a  $S^H JS = J$  et donc,  $S^J S = J^T J = I$  car  $J$  est orthogonale. Réciproquement, si  $S^J S = I$  alors on a  $J^T S^H JS = I$  et puisque  $J^T$  est inversible d'inverse  $J$  on en déduit que  $S^H JS = J$  et donc  $S$  est symplectique.

**Proposition 4.3.3** Si  $M \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  est symplectique, alors,  $M^T$  est symplectique.

Démonstration.  $M$  étant inversible, les égalités  $J^{-1} = -J$  et  $M^T J M = J$  permettent d'écrire

$$\begin{aligned} M J M^T &= M J (M^T J M) M^{-1} J^{-1} \\ &= M J J M^{-1} J^{-1} \\ &= -I_n J^{-1} \\ &= J \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} M^T J M &= J \Rightarrow M J M^T = M J (M^T J M) M^{-1} J^{-1} = \\ &= M J J M^{-1} J^{-1} = -I_n J^{-1} = J. \end{aligned}$$

On en déduit que la transposée d'une matrice symplectique est symplectique.  $\square$

**Proposition 4.3.4** Si  $U$  est une matrice ortho-symplectique, alors  $U$  commute avec  $J$ . **En effet,**

$$U J = J J^T U J = J (U^T)^J = J (U^J)^T = J (U^J)^{-1} = J U.$$

**Proposition 4.3.5** Si  $M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  où  $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , alors,  $M$  est symplectique si et seulement si les matrices  $A, B, C, D$  vérifiant les conditions suivantes

$$\begin{cases} A^T B \text{ et } C^T D \text{ sont symétriques,} \\ A^T D - B^T C = I_n. \end{cases}$$

Démonstration. Un calcul par blocs donne

$$\begin{aligned} M^T J M &= \begin{pmatrix} A^T & B^T \\ C^T & D^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B^T A - A^T B & B^T C - A^T D \\ D^T A - C^T B & D^T C - C^T D \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice  $M$  est symplectique si et seulement si,

$$M^T J M = J$$

Il en résulte que

$$\begin{cases} B^T A = A^T B \text{ et } D^T C = C^T D \\ A^T D - B^T C = D^T A - C^T B = I_n \end{cases} \\ \iff \begin{cases} A^T B \text{ et } C^T D \text{ sont symétriques,} \\ A^T D - B^T C = I_n. \end{cases}$$

□

**Lemme 4.3.1** Si  $M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \in \mathcal{SP}_n$  avec  $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Si  $D$  est inversible alors  $\det M = 1$ .

Démonstration. Un calcul par blocs donne

$$M = \begin{pmatrix} I_n & Q \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - QB & 0 \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & QD \\ B & D \end{pmatrix}$$

La matrice  $M$  peut donc s'écrire sous la forme voulue si l'on peut trouver  $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $QD = C$ . Lorsque  $D$  est inversible, il suffit de poser  $Q = CD^{-1}$  pour avoir :

$$M = \begin{pmatrix} I_n & CD^{-1} \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - CD^{-1}B & 0 \\ B & D \end{pmatrix}$$

Comme,  $\begin{vmatrix} I_n & CD^{-1} \\ 0 & I_n \end{vmatrix} = 1$ , et  $\det(D) = \det(D^T)$ , alors

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det(A - CD^{-1}B) \det(D) \\ &= \det(A^T D - B^T QD) \\ &= \det(A^T D - B^T C) \end{aligned}$$

Il résulte que, si  $M$  est symplectique avec  $D$  inversible alors  $\det(M) = 1$ .  $\square$

**Théorème 4.3.2** Si  $M \in \mathcal{SP}_n$  alors  $\det(M) = 1$ .

Démonstration.

Soit  $s \neq 0$  tel que  $D - sB$  soit inversible. Un calcul par blocs donne

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -sI_m & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ B - sA & D - sC \end{pmatrix}$$

On vérifie aisément que  $\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -sI_m & I_m \end{pmatrix}$  est une matrice symplectique.

Ainsi  $\begin{pmatrix} A & C \\ B - sA & D - sC \end{pmatrix}$  est symplectique avec  $D - sC$  inversible. D'après le lemme 4.3.1., son déterminant vaut 1.

**Théorème 4.3.3** une matrice  $M \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  est ortho-symplectique, si et seulement si,  $M$  elle s'écrit par blocs sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

avec  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  vérifient les conditions suivantes

$$\begin{cases} A^T B \text{ est symétrique,} \\ A^T A + B^T B = I_n \end{cases}$$

Démonstration. Si  $M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$  est ortho-symplectique, où  $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , alors

$$J = MJM^T = MJM^{-1}.$$

Cela prouve  $JM = MJ$ . Alors,  $C = -B$  et  $D = A$ . D'après la proposition 4.3.5.,  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  vérifient

$$\begin{cases} A^T B \text{ est symétrique,} \\ A^T A + B^T B = I_n \end{cases}$$

## 4.4 Décomposition $SR$ orthogonale

En utilisant les réflecteurs ortho-symplectiques définies ci-dessus, nous décomposons une matrice réelle symplectique  $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  sous la forme  $A = SR$  où  $S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  est ortho-symplectique et  $R$  est symplectique, et est sous la forme suivante

$$R = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c} \begin{matrix} \xrightarrow{n} \\ \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & \star & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \star \end{matrix} & \begin{matrix} \xrightarrow{n} \\ \star & \star & \cdots & \star \\ \star & \star & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ \star & \cdots & \star & \star \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \xrightarrow{n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \xrightarrow{n} \\ \star & 0 & \cdots & 0 \\ \star & \star & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \star & \cdots & \star & \star \end{matrix} \end{array} \end{pmatrix} \quad (1)$$

- **Algorithme 4.4.1 : Décomposition  $SR$  ortho-symplectique**

Hereafter, Matlab notations are used

**Input :**  $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  une matrice symplectique

**Output :**  $S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  une matrice ortho-symplectique et  $R$  une matrice symplectique sous la forme (1) de telle sorte que  $A = SR$



```

For  $k = 1$  to  $n$  do
 $u := A(:, k); E_k = [e_k, -Je_k]; I = eye(2n);$ 
 $I_k = blkdiag(-eye(k), eye(n - k), -eye(k), eye(n - k))$ 
For  $j = 1$  to  $k - 1$  do
 $u(j) = 0; u(n + j) = 0$ 
end For
If ( $\|u\| \neq 0$ ) then
 $u = \frac{u}{\|u\|}, U = (u, -Ju), C = I - 2E_k^J U$ 
If ( $\det C \neq 0$ ) then
 $T = (U + E)C^{-1}(U + E_k)^J - I_k$ 
else
 $C = I + 2E^J U, T = (U + E)C^{-1}(U + E_k)^J + I$ 
end If
 $S := ST; A := TA$ 
end If
end For

```

## 4.5 Forme de Schur ortho-symplectique

le théorème ci-dessous traite des matrices symplectiques. On y montre, en utilisant la structure de groupe de leur ensemble, que leur déterminant est toujours égal à 1. On s'intéresse ensuite aux valeurs propres de ces matrices et à leur multiplicité  $d$ .

**Théorème 4.5.1** Soit  $M$  une matrice symplectique et  $P$  son polynôme caractéristique alors :

- 1)  $P(\frac{1}{\lambda}) = \frac{1}{\lambda^{2m}} P(\lambda)$
- 2) Si  $\lambda_0$  est une racine de  $P$  de multiplicité  $d$  alors,  $\frac{1}{\lambda_0}, \bar{\lambda}_0, \frac{1}{\bar{\lambda}_0}$  sont aussi valeurs propres de  $M$  avec la même multiplicité  $d$ .

Démonstration.

1) De l'égalité  $M^T J M = J$ , on tire  $(J^{-1} M^T J) M = I_{2m}$ . Ainsi  $M^{-1} = J^{-1} M^T J$  est semblable à  $M^T$ . Il en résulte que  $M$  et  $M^{-1}$  ont le même polynôme caractéristique.

$$P(X) = \det(M - X I_{2m}) = \det(M^{-1} - X I_{2m}).$$

Pour  $\lambda \in \mathbb{C}$ , non nul, on a

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{\lambda}\right) &= \det\left(M^{-1} - \frac{1}{\lambda} I_{2m}\right) \\ &= \det(M) \det\left(M^{-1} - \frac{1}{\lambda} I_{2m}\right), \quad \text{car } \det(M) = 1 \\ &= \det\left(I_{2m} - \frac{1}{\lambda} M\right) \\ &= \frac{1}{\lambda^{2m}} \det(\lambda I_{2m} - M) \\ &= \frac{1}{\lambda^{2m}} P(\lambda), \quad \text{car } P \text{ est de degré pair.} \end{aligned}$$

2)  $P$  étant un polynôme à coefficients réels, il en résulte que si  $\lambda_0$  est une valeur propre de  $M$  de multiplicité  $d$ , alors  $\bar{\lambda}_0$  est aussi valeur propre de  $M$  avec la même multiplicité.

On note  $P(X) = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{d_i}$  où les  $\lambda_i$  sont toutes distinctes.

On a  $P(\lambda) = \prod_{i=1}^k (\lambda - \lambda_i)^{d_i}$  et  $\lambda^{2m} P\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \lambda^{2m} \prod_{i=1}^k \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda_i\right)^{d_i} = \prod_{i=1}^k (1 - \lambda \lambda_i)^{d_i}$

En mettant en facteur les  $\lambda_i$ , en utilisant (1) du théorème, et le fait que  $\prod_{i=1}^k \lambda_i^{d_i} = \det(M) = 1$ , on obtient

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \prod_{i=1}^k (\lambda - \lambda_i)^{d_i} = \prod_{i=1}^k \left(\frac{1}{\lambda_i} - \lambda\right)^{d_i},$$

Il en résulte que si  $\lambda_0$  est une valeur propre de  $M$  de multiplicité  $d$ , alors  $\frac{1}{\lambda_0}$  est aussi valeur propre de  $M$  de multiplicité  $d$ . Il en est donc de même pour  $\frac{1}{\lambda_0}$ .  $\square$

Nous rappelons brièvement, sous forme d'un théorème, des propriétés sur le spectre d'une matrice J-symplectique.

**Théorème 4.5.2** (matrice J-symplectique)

Soit  $W \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  une matrice J-symplectique. Alors, le spectre de  $W$  peuvent être divisés en trois groupes :

- $k$  valeurs propres en dehors du cercle d'unité :  $|\lambda_1| > 1, |\lambda_2| > 1, \dots, |\lambda_k| > 1$ ;
- $k$  valeurs propres à l'intérieur du cercle d'unité :  $|\lambda_{k+1}| < 1, |\lambda_{k+2}| < 1, \dots, |\lambda_{2k}| < 1$ , et
- $2n - 2k$  valeurs propres sur le cercle d'unité :  $|\lambda_{2k+1}| = 1, |\lambda_{2k+2}| = 1, \dots, |\lambda_{2n}| = 1$ .

**Lemme 4.5.1** Si  $A$  une matrice symplectique et  $u \in \mathbb{C}^{2n}$  un vecteur propre correspondant à une valeur propre  $\lambda$  de  $A$ . Supposons que  $\lambda$  est à l'extérieur du cercle unité, alors il existe un réflecteur unitaire et symplectique  $S$  tels que  $Su = \alpha e_1$ .

Démonstration. Soit  $u \in \mathbb{C}^{2n}$  un vecteur propre correspondant à une valeur propre  $\lambda$  de  $A$ , tel que  $|\lambda| \neq 1$  et  $\|u\| = 1$ .  $U = [u, -J\bar{u}] \in \mathbb{C}^{2n \times 2}$  est unitaire et symplectique ( $U^H U = U^J U = I_2$ ). **En effet**,

$$U^J U = J^T U^H J U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^H J u & u^H u \\ -u^H u & u^H J u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|u\|^2 & u^H J u \\ -u^H J u & \|u\|^2 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $A$  est symplectique, alors  $A^H J A = J$  et,

$$\begin{aligned} u^H J u &= (Au)^H J (Au) \\ &= u^H (A^H J A) u \\ &= \lambda \bar{\lambda} u^H J u \\ &= |\lambda|^2 u^H J u \end{aligned}$$

Pour  $|\lambda| \neq 1$ , alors  $u^H J u = 0$ . En prend  $N = E_1^J U$ . Si  $-1$  n'est pas une valeur propre pour la matrice  $N \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ , alors le réflecteur  $S = (U + E_1)(I_2 + E_1^J U)^{-1}(U + E_1)^J - I_{2n}$  est unitaire et symplectique et vérifier  $SU = \alpha E_1$ . Alors  $Su = \alpha e_1$  ( Ici  $\alpha = 1$ ). Si  $-1$  est

une valeur propre de  $N$ , alors 1 n'est pas une valeur propre de  $E_1^J U$ . **En effet**, on a

$$E_1^J U = \begin{pmatrix} e_1^T u & -e_1^T J \bar{u} \\ e_{n+1}^T u & -e_{n+1}^T J \bar{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & -\overline{u_{n+1}} \\ u_{n+1} & \bar{u}_1 \end{pmatrix}$$

alors  $\det(E_1^J U) = |u_1|^2 + |u_{n+1}|^2 \geq 0$ . le réflecteur  $S = (U - E_1)(I_{2n} - E_1^J U)^{-1}(U - E_1)^J - I_{2n}$  est unitaire et symplectique et vérifier  $SU = \alpha E_1$  alors  $Su = \alpha e_1$  (Ici  $\alpha = -1$ ).  $\square$

**Remarque 4.5.1** Si le vecteur propre  $u$  est réel ( $u \in \mathbb{R}^{2n}$ ), alors, il est toujours vrai que  $u^H J u = 0$ .

**Exemple :** Soit  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  de valeurs propres  $i, -i$ ,  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $J$  associée à  $i$ , donc

$$v^H J v = \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = 2i \neq 0$$

alors, si  $\lambda$  dans le cercle,  $v^H J v \neq 0$ .

**Théorème 4.5.3** Soit  $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  une matrice symplectique telles que tous les valeurs propres de  $A$  sont à l'extérieur du cercle unité, alors il existe une matrice unitaire et symplectique  $Q$  telle que  $A = QRQ^T$  où  $R$  est symplectique et prendre la forme

$$R = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c} \begin{matrix} \xrightarrow{n} \\ * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{matrix} & \begin{matrix} \xrightarrow{n} \\ * & * & \cdots & * \\ * & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ * & \cdots & * & * \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \xrightarrow{n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \xrightarrow{n} \\ * & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & * \end{matrix} \end{array} \end{pmatrix}$$

Démonstration. La preuve peut être vu en utilisant le principe de l'induction sur  $n$ .

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  et  $u$  un vecteur propre normalisée correspondant.  $U = [u, -Ju] \in \mathbb{R}^{2n \times 2}$  est unitaire symplectique ( $U^H U = U^J U = I$ ). De Lemme 4.5.1., il existe un réflecteur unitaire et symplectique  $S_1$  de telle sorte que  $S_1 u = \alpha e_1$  et alors

$$S_1 A S_1^T e_1 = \lambda e_1$$

La matrice  $R_1 = S_1 A S_1^H$  est symplectique et il est sous la forme ci-dessous

$$S_1 A S_1^H = R_1 = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & * & \cdots & * \end{matrix}}^n & \overbrace{\begin{matrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ * & \cdots & * & * \end{matrix}}^n \\ \hline \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & * & \cdots & * \end{matrix}}_n & \begin{matrix} \frac{1}{\lambda} & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ * & \cdots & * & * \end{matrix} \end{array} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{\lambda}^n & \overbrace{v^T}^n & \overbrace{x}^n & \overbrace{w^T}^n \\ 0 & A & X & B \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & C & Y & D \end{pmatrix}$$

La matrice  $R_2 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  est également symplectique. **En effet**,

$$R_1 = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}; A', B', C', D' \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

On a

$$R_1^T J R_1 = \begin{pmatrix} C'^T A' - A'^T C' & C'^T B' - A'^T D' \\ D'^T A' - B'^T C' & D'^T B' - B'^T D' \end{pmatrix}.$$

et

$$R_2^T J R_2 = \begin{pmatrix} C^T A - A^T C & C^T B - A^T D \\ D^T A - B^T C & D^T B - B^T D \end{pmatrix}.$$

Par la multiplication par bloc, nous avons

$$C'^T A' - A'^T C' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C^T A - A^T C \end{pmatrix}, \quad C'^T B' - A'^T D' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ X & C^T B - A^T D \end{pmatrix}$$

$$D'^T B' - B'^T D' = \begin{pmatrix} x & X \\ X & D^T B - A^T D \end{pmatrix}, \quad D'^T A' - B'^T C' = \begin{pmatrix} 1 & X \\ X & D^T A - B^T C \end{pmatrix}$$

$R_1$  est symplectique, alors  $R_1^T J R_1 = J$  et

$$\begin{aligned} C'^T A' - A'^T C' &= 0, & C'^T B' - A'^T D' &= -I \\ D'^T A' - B'^T C' &= I, & \text{et } D'^T B' - B'^T D' &= 0 \end{aligned}$$

En conséquence

$$\begin{aligned} C^T A - A^T C &= 0, & C^T B - A^T D &= -I \\ D^T A - B^T C &= I, & \text{et } D^T B - A^T D &= 0 \end{aligned}$$

Cela prouve que  $R_2$  est symplectique (Proposition 4.3.5).

Par hypothèse d'induction il existe un réflecteur unitaire et symplectique,  $\overline{S}_2$ , tel que :

$$\overline{S_2} R_2 \overline{S_2}^T = \overline{R_2},$$

$$\overline{R_2} = \begin{pmatrix} \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{2cm}}^{n-1} \\ \begin{array}{cccc} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \\ \underbrace{\hspace{2cm}} \\ \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{2cm}}^{n-1} \\ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \end{array} & \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{2cm}}^{n-1} \\ \begin{array}{cccc} * & * & \cdots & * \\ * & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ * & \cdots & * & * \end{array} \\ \underbrace{\hspace{2cm}} \\ \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{2cm}}^{n-1} \\ \begin{array}{cccc} * & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & * \end{array} \end{array} \end{pmatrix}$$

Soit

$$\overline{S_2} = \begin{pmatrix} \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{2cm}}^{n-1} \\ \begin{array}{ccc} s_{1,1}^{(1)} & \cdots & s_{1,n-1}^{(1)} \\ s_{2,1}^{(1)} & \cdots & s_{2,n-1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{n-1,1}^{(1)} & \cdots & s_{n-1,n-1}^{(1)} \end{array} \\ \underbrace{\hspace{2cm}} \\ \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{2cm}}^{n-1} \\ \begin{array}{ccc} s_{n,1}^{(1)} & \cdots & s_{n,n-1}^{(1)} \\ s_{n+1,1}^{(1)} & \cdots & s_{n+1,n-1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{2n-1,1}^{(1)} & \cdots & s_{2n-1,n-1}^{(1)} \end{array} \end{array} & \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{2cm}}^{n-1} \\ \begin{array}{ccc} s_{1,n}^{(1)} & \cdots & s_{1,2n-1}^{(1)} \\ s_{2,n}^{(1)} & \cdots & s_{2,2n-1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{n-1,n}^{(1)} & \cdots & s_{n-1,2n-1}^{(1)} \end{array} \\ \underbrace{\hspace{2cm}} \\ \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{2cm}}^{n-1} \\ \begin{array}{ccc} s_{n,n}^{(1)} & \cdots & s_{n,2n-1}^{(1)} \\ s_{n+1,n}^{(1)} & \cdots & s_{n+1,2n-1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{2n-1,n}^{(1)} & \cdots & s_{2n-1,2n-1}^{(1)} \end{array} \end{array} \end{pmatrix}$$

En prend

$$S_2 = \left( \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \xrightarrow{n} \\ 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \\ 0 \quad s_{1,1}^{(1)} \quad \dots \quad s_{1,n-1}^{(1)} \\ 0 \quad s_{2,1}^{(1)} \quad \dots \quad s_{2,n-1}^{(1)} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 \quad s_{n-1,1}^{(1)} \quad \dots \quad s_{n-1,n-1}^{(1)} \\ \xleftarrow{n-1} \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{n} \\ 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \\ 0 \quad s_{1,n}^{(1)} \quad \dots \quad s_{1,2n-1}^{(1)} \\ 0 \quad s_{2,n}^{(1)} \quad \dots \quad s_{2,2n-1}^{(1)} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 \quad s_{n-1,n}^{(1)} \quad \dots \quad s_{n-1,2n-1}^{(1)} \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \xrightarrow{n-1} \\ 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \\ 0 \quad s_{n,1}^{(1)} \quad \dots \quad s_{n,n-1}^{(1)} \\ 0 \quad s_{n+1,1}^{(1)} \quad \dots \quad s_{n+1,n-1}^{(1)} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 \quad s_{2n-1,1}^{(1)} \quad \dots \quad s_{2n-1,n-1}^{(1)} \\ \xleftarrow{n} \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{n} \\ 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \\ 0 \quad s_{n,n}^{(1)} \quad \dots \quad s_{n,2n-1}^{(1)} \\ 0 \quad s_{n+1,n}^{(1)} \quad \dots \quad s_{n+1,2n-1}^{(1)} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 \quad s_{2n-1,n}^{(1)} \quad \dots \quad s_{2n-1,2n-1}^{(1)} \end{array} \end{array} \right)$$

Alors  $S_2$  est unitaire et symplectique et vérifie  $S_2 S_1 A S_2^H S_1^H = R$  où  $R$  est symplectique sous la forme

$$R = \left( \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \xrightarrow{n} \\ * \quad * \quad \dots \quad * \\ 0 \quad * \quad \ddots \quad \vdots \\ \vdots \quad \ddots \quad \ddots \quad * \\ 0 \quad \dots \quad 0 \quad * \\ \xleftarrow{n-1} \\ 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \\ 0 \quad \ddots \quad \ddots \quad \vdots \\ \vdots \quad \ddots \quad \ddots \quad 0 \\ 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{n} \\ * \quad * \quad \dots \quad * \\ * \quad * \quad \ddots \quad \vdots \\ \vdots \quad \ddots \quad \ddots \quad * \\ * \quad \dots \quad * \quad * \\ * \quad 0 \quad \dots \quad 0 \\ * \quad * \quad \ddots \quad \vdots \\ \vdots \quad \ddots \quad \ddots \quad 0 \\ * \quad \dots \quad * \quad * \end{array} \end{array} \right)$$

□

• **Algorithme 4.5.1 : Iterative method to compute Schur form of symplectic matrix**

**Input :**  $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  Symplectic,  $X_0 \in \mathbb{R}^{2n \times n}$

**Output :** Ortho-symplectic Schur form of  $A$

$V = X_0$



**Repeat**

$$W = AV$$

$W = SR$  ortho-symplectic  $SR$  decomposition

$$V = S[:, 1 : n]$$

$$RR = R[1 : n, 1 : n]$$

**until** (Convergence)

## 4.6 Exemples Numériques

Nous avons comparé et testé les résultats numériques obtenus par l'algorithme 4.5.1. avec Matlab. Nos expériences numériques ont été effectuées avec Matlab 9 et l'exécuter sur un processeur Pentium Core Duo. La matrice symplectique  $A$  est obtenue de la matrice

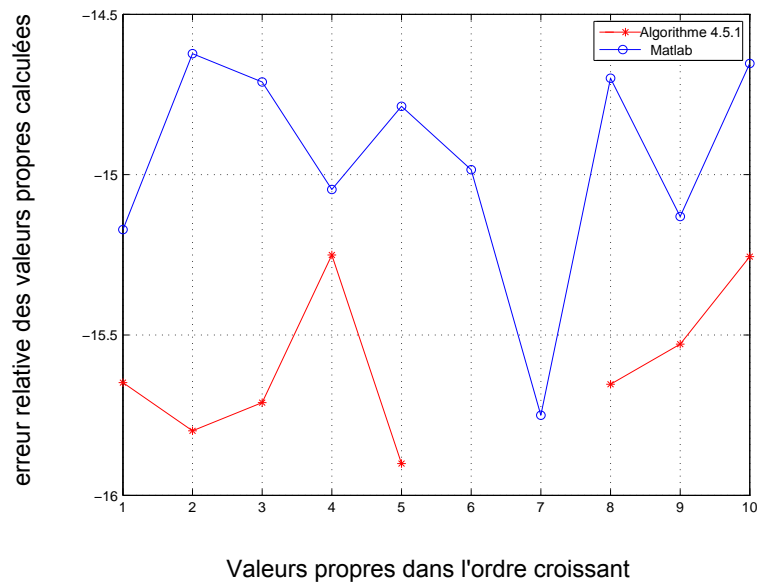
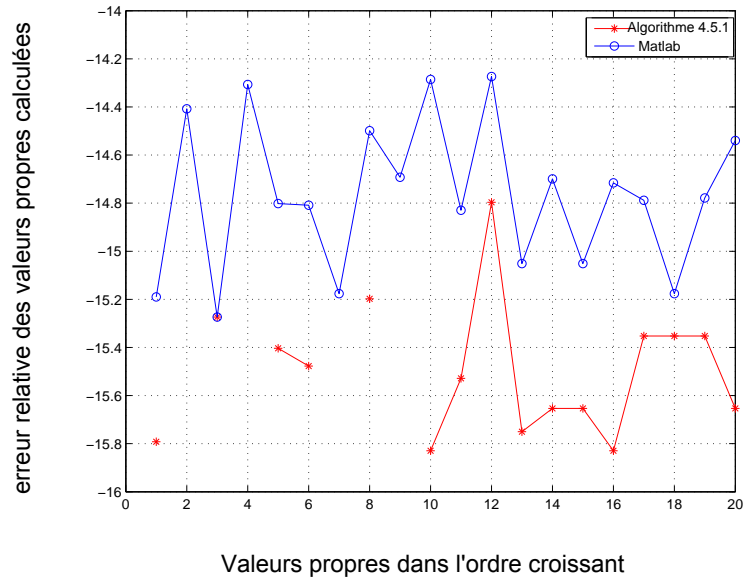
$$\begin{pmatrix} M & M \\ 0 & M^{-T} \end{pmatrix} \text{ où } M = \text{diag}(v)$$

et, à l'aide de transformations symplectiques générés de manière aléatoire par des réflecteurs symplectiques que

$$A = S \begin{pmatrix} M & M \\ 0 & M^{-T} \end{pmatrix} S^J$$

**Exemple 1.** Dans cet exemple,  $n = 20$  et  $v$  est construit comme suit. Pour  $k = 1$  pour fixer  $(n/2)$  (Voici la notation Matlab est utilisé),  $v(k) = k + 1$  et  $v(\frac{n}{2} + k) = k^{-1}$ . (voir la page 122)

**Exemple 2.** Dans cet exemple,  $n = 10$  et  $v$  est construit comme suit. Pour  $k = 1$  pour fixer  $(n/2)$  (Voici la notation Matlab est utilisé),  $v(k) = \frac{1}{k+1}$  and  $v(\frac{n}{2} + k) = (\sqrt{\frac{k}{1000}})^{-1}$ . (voir la page 122)



## 4.7 Conclusion Générale

Le calcul des valeurs propres et vecteurs propres de matrices jouent des rôles importants dans de nombreuses applications. Par exemple, ils jouent un rôle important dans les applications de traitement d'images. Dans cette thèse, l'étude concerne un problème de valeurs propres structuré, pour cela, nous avons proposer une méthode pratique pour calculer les valeurs propres et sous-espaces invariants pour les matrices symplectiques qui sont d'une importance particulière dans les applications telles que le contrôle optimal. Les Matrices symplectiques sont largement utilisés dans la factorisation  $SR$  qui est une étape principale dans le mode d'organisation de préservation.

Dans le cas d'un problème de valeurs propres de matrices structurées, la préservation de cette structure peut aider à exploiter la symétrie du problème et d'améliorer la précision et l'efficacité des calculs de sous-espaces invariants et les valeurs propres. Notre méthode proposée, est basée sur une factorisation  $SR$  orthogonale et symplectique, qui est basée sur des réflecteurs orthogonaux et symplectiques. L'orthogonalité est utilisé pour préserver la stabilité, et la symplecticité pour préserver la structure.

### **PERSPECTIVES**

La perspective immédiate de notre travail est de développer des applications de la décomposition SVD-Symplectique en traitement d'image et du signal.

# Bibliographie

- [1] S. Agoujil, A. H. Bentbib, *On the reduction of Hamiltonian matrices to a Hamiltonian Jordan canonical form*, Int. Jour. Math. Stat. (IJMS) 4 (2009), 12-37.
- [2] S. Agoujil, A. H. Bentbib, *New symplectic transformation on  $C^{2n \times 2}$  : Symplectic reflectors*, Int. Jour. of Tomography and Statistics (IJTS) 11 (2009), 99-117.
- [3] S. Agoujil, *Nouvelles méthodes de factorisation pour des matrices structurées*, Ph.D thesis, Faculté des Sciences et Techniques-Marrakech. Département de Mathématiques et Informatique, (2008).
- [4] S. Agoujil, A. H. Bentbib, *Symplectic Lanczos Algorithm for Hamiltonian Matrices*, Int. J. Tomogr. Stat. 10 (2008) 3-25.
- [5] G.S. Ammar, V. Mehrmann, *On Hamiltonian and symplectic Hessenberg forms*, Linear Algebra Appl. (149) 55-72, 1991.
- [6] P. Benner, V. Mehrmann, and H. Xu, *A new method for computing the stable invariant subspace of a real Hamiltonian matrix*, J. Comput. Appl. Math. 86 (1997), no. 1, 17-43.
- [7] P. Benner, V. Mehrmann, and H. Xu, *A numerically stable structure preserving method for computing the eigenvalues of real Hamiltonian or symplectic pencils*, Numer. Math. 78 (1998), 329-358.
- [8] P. Benner, R. Byers, H. Fassbender, V. Mehrmann and D. Watkins, *Cholesky-like factorizations of skew-symmetric matrices*. Electr. Trans. Num. Anal., 11 :85-93, 2000.

- [9] A. Bjorck, *Numerical of Gram-Schmidt Orthogonalization*, Lin. Alg. Appl.(1994), pp. 198-297.
- [10] A. Byers, *A Hamiltonian QR Algorithms*, SIAM J. SCI. STAT. COMPUT, Vol (7) 212-229, 1986.
- [11] A. Bunse-Gerstner, *Matrix Factorizations for Symplectic QR-Like Methods*, Lin. Alg. Appl.(1986), 83 : pp. 49-77.
- [12] A. Bunse-Gerstner, V. Mehrmann, *A Symplectic QR-Like for the Solution of the Real Algebraic Riccati Equation*, IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. AC-31, No 12, Dec.1986.
- [13] A. Bunse-Gerstner, R. Byers and V. Mehrmann, *A chart of numerical methods for structured eigenvalue problems*, SIAM J. Matr. Anal. Appl. Vol. 13, pp 419-453,1992.
- [14] A. Bunse-Gerstner, V. Mehrmann and D. Watkins, *An SR algorithm for Hamiltonian matrices based on Gaussian elimination*, Methods of Operations Research, (58) 339-358, 1989.
- [15] J. Della Dora, *Numerical Linear Algorithms and Group Theory*, Lin. Alg. Appl.(1975), 10 : pp. 267-283.
- [16] M. Dosso, M. Sadkane, *A spectral trichotomy method for symplectic matrices*, Numer. Algor. 52 (2009), 187-212.
- [17] R.J. Dufin, *The Rayleigh-Ritz method for dissipative or gyroscopic systems*, Quart. Appl. Math. 18 (1960), pp. 215-221.
- [18] J. G. F. Francis, *The QR transformations*, Parts I and II, Computer J., 4(1961), pp. 265-272, 332-345.
- [19] H. Gaidhane, V. Hote, and V.Singh, *A New Approach for Estimation of Eigenvalues of Images*, IJCA (0975 -8887)26 (2011), no. 9, 1-6.
- [20] I. Gohberg, P. Lancaster, and L. Rodman, *Indefinite Linear Algebra and Applications*, Birkhauser Verlag, Basel, 2005.

- [21] A. Kanber, *Méthodes numériques de réduction adaptées aux matrices structurées : Hamiltoniennes, skew-Hamiltoniennes et symplectiques*, Ph.D thesis, Faculté des Sciences et Techniques-Marrakech. Département de Mathématiques et Informatique, (2012).
- [22] P. Lancaster and L. Rodman, *Algebraic Riccati Equations*, Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [23] V. MEHRMANN, D. WATKINS, *Polynomial eigenvalue problems with Hamiltonian structure*, Electronic Transactions on Numerical Analysis, Vol. 13, pp. 106-118, 2002.
- [24] A. Mesbahi, A.H. Bentbib, A. Kanber, and F. Ellagoune, *Iterative method for computing a Schur form of symplectic matrix*, An Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series, Volume 42(1), 2015, Pages 1–9, ISSN : 1223-6934.
- [25] C. Paige, C. Van Loan, *A Schur Decomposition for Hamiltonian Matrices*, Linear Algebra and its applications, Vol 41. , pp 11-32, 1981.
- [26] B. N. Parlett, *The Symmetric Eigenvalue Problem*. Number 20 in Classics in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, 1998.
- [27] R. V. Patel, Z. Lin and P. Misra, *Computation of stable invariant subspaces of Hamiltonian Matrices*, SIAM J. Matr. Anal. Appl. 15, pp 284-298, 1994.
- [28] A. Salam, *On theoretical and numerical aspects of symplectic Gram-Schmidt-like algorithms*, Numerical Algorithms, 39(4) :437-462, August 2005.
- [29] A. Salam, A. El Farouk and E. Al-Aidarous, *Symplectic Householder transformations for a QR-like decomposition*, a geometric and algebraic approaches, Journal of Computational and Applied Mathematics, March 2007.
- [30] A. Salam, E. Al-Aidarous, A. El Farouk, *Optimal symplectic Householder transformations for SR decomposition*, Linear Algebra and its Applications 429 (2008) 1334–1353.

- [31] F. Tisseur, K. Meerbergen, *The quadratic eigenvalue problem*, SIAM Review. 43 (2001), pp. 235-286.
- [32] C. Van Loan, *A Symplectic method for approximating all the eigenvalues of Hamiltonian matrix*, Linear Alg. Appl.,61 (1984) 233-251.
- [33] D. S. Watkins, *QR-like algorithms for the nonsymmetric eigenvalue problem*, J. B. Haag, ACM Trans. Math. Software, 19 (1993), pp. 407-418.
- [34] D. S. Watkins, *QR-like algorithms an overview of convergence theory and practice*, Lectures in Applied Mathematics, V. 32, The Mathematics of Numerical Analysis, Ed. J. Renegar, M. Shub, and S. Smale, American Mathematical Society, (1996) pp. 879-893.
- [35] D. S. Watkins, *QR-like algorithms for eigenvalue problems*, J. Comp. Appl. Math., 123 (2000), pp. 67-83.
- [36] J. H. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Clarendon Press, Oxford, 1965.
- [37] H.-G. Xu, *Solving real algebraic Riccati equation via skew-Hamiltonian Matrices*, Ph.D. Thesis, Fudan Univ., Shanghai, China 1991.
- [38] H. Xu, *A Numeracal Method For Computing An SVD-like matrix decomposition*, SIAM journal on matrix analysis and applications. 26 (2005), pp. 1058-1082.