UNIVERSITE DE 8 MAI 45 GUELMA

FACULTE DE MISM

DEPARTEMENT DE SM

OPTION PHYSIQUE

1ère ANNEE L.M.D

COURS ET TRAVAUX DIRIGES DE PHYSIQUE I

Année Universitaire 2017-2018

Réalisé par : Dr. Rafik MAIZI

République Algérienne Démocratique et populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE 8MAI 1945 DE GUELMA

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جـامعة 8ماي 1945 قالمـة

Faculté des Mathématique et l'informatique et des Sciences de la Matière

COURS DE PHYSIQUE 1
OU
MECANIQUE DU POINT

1ère Année Tronc commun
Département des Sciences de la matière
Option : physique
Système « L.M.D »

Elaboré par : Dr. MAIZI - Rafik

Objectif :

Ce cours de Mécanique du point « physique 1 » s'adresse aux étudiants de 1ère année de licence S.T et S.M. Le cours de physique 1 que vous allez aborder est naturellement d'un niveau plus élevé que votre cours de lycée. Vous devez vous attendre à être aux prises avec un grand nombre de problèmes difficiles. Ainsi vous développez vos capacités à manipuler ces idées et à les appliquer à des situations concrètes. En progressant dan ce cours, l'étudiant se rend compte de la manière dont ce programme à partir de principes généraux de base et comment il est appliqué à la compréhension d'une grande variété de phénomènes physiques. Les chapitres exposés de façon détaillés présentent les résultats fondamentaux ainsi que des compléments sur des notions plus délicates.

A la fin, j'espère que cette matière constituera pour les étudiants un outil précieux pour la préparation des concours et d'examens. Je vous souhaite bon courage et bonne chance.

Responsable de la matière : R. MAIZI
E-mail : rmaizi24@gmail.com,
maizi.rafik@univer-guelma.dz

Table de matières

Chapitre III: Dynamique du point matériel

Chapitre IV: Travail - Puissance - Energie

Exercices de Travaux dirigés

Sujets d'examen de physique 1

Liste des figures

Pages

Chapitre I: Eléments mathématiques

Chapitre II: Cinématique du point matériel

Chapitre III: Dynamique du point matériel

Liste des tableaux

Pages

1. Introduction

Cette introduction est destinée à donner à l'étudiant une vue préliminaire de la science qu'il va étudier.

Qu'est que c'est la physique?

Le mot physique vient d'un mot grec qui signifie la nature ou philosophie naturelle.

L'homme avec son esprit est curieux, a toujours voulu savoir comment agit la nature. Il y a une action et réaction entre l'homme et la nature.

On peut dire que la physique est une science fondamentale et expérimentale dont le but d'étudier.

a) Les propriétés fondamentales de la matière.

b) Les formes différentes de la matière.

c) Les formes différentes du mouvement de la matière et leurs transformations (interactions) mutuelles.

La matière existe dans la nature en deux grandes classes :

- ❖ Les substances.
- ❖ Les champs différents**.**

D'une part, on distingue quatre états de la substance :

- Etat solide "métaux"
- Etat liquide "l'eau, miel".
- Etat gazeux "gaz O_2"
- Plasma.

Leur différence vient des différentes interactions qui existent entre les atomes (molécules) formant le corps considéré. Les interactions (liaisons) entre les molécules d'un gaz sont faibles que d'un solide.

Et d'autre part, on distingue quelques formes des champs physiques.

☒ Champs électriques "chaque charge dans un espace crée un champ électrique et un potentiel".

☒ Champs magnétiques.

☒ Champs électromagnétiques (électrique et magnétique).

On observe dans la nature des mouvements différents de la matière

Exemples :

Exp1 : si un corps se déplace, il change sa position dans l'espace. Chute libre de morceau de la craie "substance"

Exp2:

Si on chauffe la glace (état solide). Elle se transforme en eau (état liquide). On observe le changement de l'état de la substance "transformation de phase". Donc; tous les changements de la matière dans la nature sont appelés phénomènes physiques.

Selon le caractère des phénomènes physiques, on peut diviser la physique en parties suivantes:

- Mécanique du point
- Electricité
- Optique (ondes et vibrations)
- Physique moléculaire et thermodynamique
- Physique atomique et nucléaire

2. Définition de la mécanique:

La mécanique se développa avant les autres parties de la physique. Elle a pour l'objet de l'étude du mouvement et de l'équilibre des corps. Dans le sens large, le mouvement de la matière correspond aux différents changements qu'elle peut subir. En mécanique, on entend par mouvement sa forme la plus simple, celle qui concerne le déplacement d'un corps par rapport à d'autres corps. On divise la mécanique en trois parties.

- Cinématique
- Dynamique
- Statique

2.1. Cinématique:

Elle étudie le mouvement des corps sans considérer les causes qui les produisent (étude de la géométrie du mouvement).

2.2. Dynamique:

Elle étudie les causes qui provoquent le mouvement (étude des causes physiques du mouvement).

2.3. Statique:

Elle étudie les conditions d'équilibre ou l'absence du mouvement (étude des conditions par lesquelles aucun mouvement n'existe"système matériel devient isolé".

Chapitre I:

Eléments mathématiques

Ce chapitre est composé de quatre parties.

I.1.1. Analyse dimensionnelle

A chaque grandeur physique correspond une unité et l'ensemble des unités est regroupé dans un système universel ou système international (S.I).

L'étude des phénomènes physiques nécessite la définition des grandeurs physiques.

I.1.2. Grandeur physique

Toute propriété physique mesurable est dite une grandeur physique. La mesure de la grandeur physique s'obtient par comparaison entre deux grandeurs physiques de même nature dont l'une est choisie comme unité.

- **Système international d'unités:**

Il y a des grandeurs fondamentales et des grandeurs dérivées "secondaires".
On distingue 07 grandeurs fondamentales en S.I qui sont présentées dans le tableau I.1.

Grandeurs fondamentales	**Unités**	**Symboles**
Masse	Kilogramme	Kg
Longueur	Mètre	m
Temps	Seconde	S
Intensité du courant électrique	Ampère	A
Température	kelvin	K
Quantité de la matière	mole	mol
Intensité lumineuse	Candéla	cd
Unités supplémentaires		
Angle plan	radian	Rad ou (rd)
Angle solide	stéradian	Sr

Tableau I.1: Sept grandeurs fondamentales en S.I

I.1.3. Equations aux dimensions:

Le principe des équations aux dimensions consiste à ramener les différents paramètres qui interviennent dans une formule "loi physique" aux grandeurs physiques fondamentales du système international d'unité voir le tableau I.2.

Grandeurs physiques	**dimension**	**unité**	**Appareil de mesure**
Masse	M	kg	Balance
Longueur	L	m	Pied à coulis, palmer
Temps	T	s	Chronomètre
Intensité du courant électrique	I	A	Ampèremètre

Tableau I.2: Grandeurs physiques fondamentales en S.I

a) Notions sur les dimensions

Pour une quantité physique X, sa dimension sera notée [x]; se lit dimension de x.

Si x est mesuré en kg.m.s, nous dirons que sa dimension est [x] = MLT (M: masse; L: longueur et T: temps).

b) Condition d'égalité entre deux quantités X et Y

Si deux quantités X et Y ont pour dimensions respectives

$[x]=\mathrm{K}M^{\alpha}L^{\beta}T^{\gamma}$ et $[y]=\mathrm{K}M^{\alpha'}L^{\beta'}T^{\gamma'}$

On vérifie l'homogénéité d'une formule.

On met l'égalité X= Y si $\begin{cases}\alpha=\alpha' \\ \beta=\beta' \\ \gamma=\gamma'\end{cases}$

La constante K est un facteur numérique sans dimension.

c) <u>Exemples:</u>

Exp1: unité d'une accélération

$a=\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}}=\frac{\mathrm{d}^2x}{dt^2}$ (Cas d'un mouvement rectiligne). On peut écrire aussi $a=\dot{v}=\ddot{\mathrm{x}}$

avec $x=\frac{1}{2}at^2+\mathrm{v}_0t+\mathrm{x}_0$; Sachant que $\begin{cases}v_0=0 \\ x_0=0\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{x}=\frac{1}{2}\mathrm{at}^2$; d'où $a=\frac{2\mathrm{x}}{\mathrm{t}^2}$

- ✓ Trouver les dimensions de **a** et son unité?

Solution:

A l'aide de l'équation aux dimensions, on écrit la formule comme suit:

$[a]=\frac{[\mathrm{x}]}{[\mathrm{t}^2]}$; nous savons que $\begin{cases}[x]=\mathrm{L} \\ [\mathrm{t}]=\mathrm{T}\end{cases}$ $\Rightarrow$ $[\mathrm{a}]=\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2}=\mathrm{LT}^{-2}$

Les dimensions de **a** sont $\mathbf{LT^{-2}}$. Dans le système SI, une accélération s'exprime donc en $\mathbf{ms^{-2}}$. Son unité est $\mathbf{ms^{-2}}$.

Exp2:Unité d'une force

F = ma ; alors que [F] = [m][a] avec $\begin{cases}[m]=\mathrm{M} \\ [\mathrm{a}]=\mathrm{LT}^{-2}\end{cases}$ $\Rightarrow$ $[\mathrm{F}]=\mathrm{MLT}^{-2}$

La dimension de F est MLT^{-2}. Dans le SI, une force F s'exprime en $\mathrm{kg.m.s}^{-2}$ (Newton).

d) **Grandeurs dérivées**: Elles sont nombreuses. Le tableau I.3 montre quelques grandeurs dérivées.

Grandeurs	**Equations aux dimensions**	**Unité de base**	**Noms**
Force : F =ma	MLT^{-2}	$Kgms^{-2}$	Newton (N)
Pression P= F/S	$ML^{-1}T^{-2}$	$Kgm^{-1}s^{-2}$	Pascal (P)
Travail w = Fd	$ML^{2}T^{-3}$	$Kgm^{2}s^{-2}$	Joule (J)
Puissance P = W/t	$ML^{2}T^{-3}$	$Kgm^{2}s^{-2}$	Watt (W)

Tableau I.3: Quelques grandeurs dérivées

Conclusion :
L'analyse dimensionnelle permet de vérifier l'homogénéité d'une formule et de rechercher les relations entre les différentes grandeurs physiques liées entre elles.

e) Application:

La période du mouvement d'un pendule simple T_p dépend à priori de la masse (m), de la longueur du fil (l) et de la valeur d'accélération de la pesanteur (g). La période T_p s'exprime par une relation suivante: $T_p = \mathrm{Cste}\, m^{\alpha} l^{\beta} g^{\gamma}$

- Vérifier l'homogénéité de cette formule

Solution:
La relation doit être homogène.

$[T_p] = [m]^{\alpha} [l]^{\beta} [g]^{\gamma}$

Avec $[m] = M$; $[l] = L$; $[g] = [a] = LT^{-2}$

Alors que $[T_p] = T \Rightarrow T = M^{\alpha} L^{\beta} (LT^{-2})^{\gamma} \Rightarrow T = M^{\alpha} L^{(\beta+\gamma)} T^{-2\gamma}$

L'identification des exposants des différentes dimensions conduit à

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ -2\gamma = 1 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = \dfrac{-1}{2} \\ \beta = \gamma = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

La période du pendule simple s'écrit donc comme suit :

$$T_p = \mathrm{Cste}\, l^{1/2} g^{-1/2} = \mathrm{Cste}\sqrt{\frac{l}{g}} \text{ ; Avec , Cste} = 2\pi \quad , \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

I.2.1. Notion sur l'équation différentielle:

On appelle différentielle des variables indépendantes **x**, **y** et l'on désigne respectivement par **dx** et **dy** les accroissements (variations) **Δx** et **Δy** des valeurs **x** et **y**.

On peut écrire la différentielle totale de façon suivante:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Avec **dx** (ou **dy**) est une très petite variation donnée à la variable **x** (ou **y**) en plus ou en moins " infiniment petit" c à d : $|dx| = \Delta x \Leftrightarrow \Delta x = \pm dx$ et **dx** a un caractère algébrique.

N.B :
Infiniment petit est une quantité variable qui tend vers zéro (0).

Exp1:

$(x + dx)^2 = x^2 + 2xdx + (dx)^2 \approx x^2 + 2xdx$

Si $dx = \frac{x}{1000} \Rightarrow (\mathrm{dx})^2 = \frac{x^2}{(10^3)^2} = \frac{x^2}{10^6} << 1$

Ou $dx = 10^{-3} \Rightarrow (dx)^2 = 10^{-6}$; $10^{-6} << 10^{-3}$, on néglige 10^{-6} devant 10^{-3}

Remarque:
$(dx)^2$ sera notée **dx^2**
$(dx)^3$ sera notée **dx^3**
df : différentielle de la fonction f.
d(df) sera notée **d2f** "**d deux f**"
$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_y$ est la dérivée partielle de f par rapport à x, la variable y étant considéré comme constante dans la dérivation.
$\frac{\partial f}{\partial x}$ on lit : **d** rond **f** sur **d** rond **x**
d est l'opérateur mathématique différentiel et δ est une quantité élémentaire (**delta**).

I.2.2. Dérivée d'une fonction : Soit une fonction y = f(x). On appelle la fonction dérivée de y la quantité égale à **y'**, c à d **y' = f'(x)** d'où la dérivée première est :

$$f^{-}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Y'' = f''(x) la dérivée seconde est : $f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{-}(x+\Delta x) - f^{-}(x)}{\Delta x}$

Application:
On applique le développement de Taylor.

$$f(x+dx) = f(x) + f'(x)dx + f^{=}(x)\frac{dx^2}{2!} + ... \Leftrightarrow f(x+dx) - f(x) = f'(x)dx + f^{=}(x)\frac{dx^2}{2!} + ...$$

Puis on prend le premier degré de cette formule.

D'où, d'une part $f(x+dx) - f(x) = df = f^{'}(x)dx$

Et d'autre part $f(x+dx) - f(x) = dy = y^{'}dx = \Delta y$

Remarque:
On appelle différentielle de **dy** la quantité **dy =y'dx**
On appelle différentielle de **f(x)** la quantité **df(x) = f'(x)dx**

Exemple :

✎ y=sinx $\Rightarrow$ dy =cosxdx ; y = cosx $\Rightarrow$ dy = -sinx dx et $y = \sqrt{x} \Rightarrow \mathrm{dy} = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

I.2.3. Différentielles d'une somme, d'un produit et d'un quotient
Soient **u** et **v** des fonctions de **x : (u(x), v(x))**.

$i)$ $\mathrm{y} = \mathrm{u} + \mathrm{v} \Rightarrow \mathrm{dy} = \mathrm{du} + \mathrm{dv}$

ii) $\mathrm{y} = \mathrm{uv} \Rightarrow \mathrm{dy} = \mathrm{vdu} + \mathrm{udv}$

iii) $\mathrm{y} = \frac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}} \Rightarrow dy = \frac{vdu - udv}{v^2}$

a) Quelques applications simples des différentielles : On chauffe un disque en métal et son rayon croît à la vitesse de **1 mm** par seconde. Calculer la vitesse à laquelle croît la surface **S** du disque si le rayon **R = 10 cm** ?

$$S = \pi R^2 \Rightarrow \mathrm{dS} = 2\pi \mathrm{RdR} \Rightarrow \frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{dt}} = 2\pi \mathrm{R} \frac{\mathrm{dR}}{\mathrm{dt}} = 2 \times 3{,}14 \times 10 \times 0{,}1 = 6{,}28\ \mathrm{cm}^2\ \mathrm{s}^{-1}$$

b) Différentielle logarithmique :

$$d(\ln y) = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{y}}$$

Exemple:

y =$e^{\sin x}$. Trouvez dy

On multiple les deux côtés par logarithmique; $\ln y = \ln e^{\sin x} = \sin x$

On fait la dérivée ou différentielle les deux côtés.

$$[\ln y]' = [\sin x]' \quad \text{ou} \quad \mathrm{d}(\ln y) = \mathrm{d}(\sin x) \Rightarrow \frac{dy}{y} = \cos x\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}y = y\cos x\mathrm{d}x$$

Finalement, $dy = e^{\sin x} \cos x dx$

I.2.4. Equations différentielles:

Une équation différentielle est une relation entre une fonction inconnue f(x) et ses dérivées $f'(x),\ f''(x),\ \ldots\ldots,\ f^{n}(x)$

Elle est de type $f\left[y^{n}(x), \ldots, y''(x), y'(x), y(x), g(x)\right] = 0$

Exemples:

$f'(x) + xf(x) = 2x \Rightarrow$ est de l'ordre1

$f''(x) + f'(x) f(x) = 0 \Rightarrow$ est de l'ordre 2

$f^{3}(x) + 2xf''(x) - f'(x) = 0 \Rightarrow$ est de l'ordre 3

$f^{n}(x) + \ldots + f(x) + \ldots\ldots = 0 \Rightarrow$ est de l'ordre n

N.B:
L'ordre (degré) d'une équation différentielle est l'ordre de la dérivée la plus élevée de f(x) apparaissant dans l'équation.

I.2.4.1. Equation différentielle du premier ordre à variables séparées f(x, y, z).

a) Equation homogène : Elle est de la forme suivante: **F(x)dx + G(y)dy = 0**

On dit que les variables sont séparables et la solution générale est obtenue par intégration directe:

$$\int F(x)dx + \int G(y)dy = Cte$$

Exemple : Soit $(x^2 + 1)dx + (y^3 - 2y)dy = 0$

- Trouver la solution de l'équation homogène à variables séparées?

Solution:

On voit devant **dx**, il y a une fonction qui dépend de x et que devant **dy**, il y a une fonction qui dépend de **y**.

D'où les variables **x** et **y** sont séparables. Puis, on fait une simple intégration pour trouver une solution à cette équation différentielle. On intègre,

$$\int (x^2+1)dx + \int (y^3-2y)dy = Cte = c \Rightarrow \int x^2dx + \int dx + \int y^3dy - 2\int ydy = c$$

D'après la définition $\int f^n(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1}$ ou $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

On obtient:

$\frac{x^3}{3} + x + \frac{y^4}{4} - 2\frac{y^2}{2} = c$; c est une constante arbitraire.

La constante d'intégration calculée à partir des conditions initiales.

c) Equations linéaires

L'équation linéaire est de type $\frac{dy}{dx} + P(x) = Q(x)$

Où **P(x)** et **Q(x)** sont des fonctions de **x**

I.2.4.2. Résolution d'équation différentielle du premier ordre à coefficient constant.

Forme générale s'écrit $ay^{-}(x) + by(x) = h(x)$

a) Equation homogène:

On appelle équation homogène sans second membre (**h(x) = 0**), on cherche la solution homogène $\mathbf{y_h}$.

a-1) Solution homogène:

$ay^{-}(x) + by(x) = 0$ Elle est à variables séparables.

$ay^{-}(x) = -by(x) \Rightarrow \frac{y^{-}(x)}{y(x)} = \frac{-b}{a} = -\alpha$, Avec $y^{-}(x) = \frac{dy}{dx}$

D'où $\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = -\alpha \Rightarrow \frac{dy}{ydx} = -\alpha \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\alpha dx$

On intègre

$\int \frac{dy}{y} = -\alpha \int dx \Rightarrow \ln y = -\alpha x + Cte \Rightarrow y = e^{-\alpha x + cte} = e^{-\alpha x}e^{cte} = Ae^{-\alpha x}$

Donc $y_h = Ae^{-\alpha x}$ est appelé **solution homogène**.

a-2) Solution particulière:

L'équation différentielle complète c –à- d avec second membre **h(x).**

On cherche la solution particulière $\mathbf{y_p}$ qui dépend de l'expression de **h(x).**

Donc, la solution globale $\mathbf{y_g}$ de l'équation différentielle est la somme de la solution homogène $\mathbf{y_h}$ et d'une solution particulière $\mathbf{y_p}$.

D'où $\mathbf{y_g = y_h + y_p}$

Par convention, on écrit :

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}\text{, ou }y'(x)=\frac{dy}{dx}$$

$$f^{=}(x)=\frac{d^2f(x)}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{df(x)}{dx})\quad ou\ y^{=}(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})$$

En mécanique, les équations différentielles les plus fréquentes sont de degré 2, puisque l'accélération est la dérivée seconde de la position.

Par exemple, la chute d'un objet d'ordonnée **y(t)** est décrite par l'équation différentielle de degré 2.

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-g\quad\Rightarrow\quad y^{=}(t)+g=0\ \text{ ou }\ \ddot{y}(t)+g=0$$

I.2.4.3. Equation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants

Elle est de la forme suivante:

$$\mathbf{Ay''(x)+by'(x)+cy(x)=h(x)}$$

Exp

Résoudre l'équation suivante:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+A\frac{dy}{dx}+By=R(x)$$

Résolution de l'équation homogène si R(x) = 0 "second membre est nul".

a) Equation homogène

$$\frac{dy^2}{dx^2}+A\frac{dy}{dx}+By=0$$

D'après l'équation différentielle du premier ordre, en générale, on cherche des solution du type $\mathbf{y=e^{\alpha x}}$, où α est une constante. On trouve que α doit satisfaire l'équation précédente. D'où,

$$y=e^{\alpha x},\ y'=\alpha e^{\alpha x}=\frac{dy}{dx}\quad\text{et}\quad y''=\alpha^2e^{\alpha x}=\frac{d^2y}{dx^2}\Rightarrow\alpha^2e^{\alpha x}+\alpha Ae^{\alpha x}+Be^{\alpha x}=0\Rightarrow e^{\alpha x}(\alpha^2+A\alpha+B)=0$$

$$Alors\ que\quad \alpha^2+A\alpha+B=0$$

Cette équation est appelée **équation caractéristique**.

Rappel :

On calcule le déterminant de l'équation du deuxième degré $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$; " $\mathbf{\Delta=b^2-4ac}$ " :

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ avec a=1, b=A et c=B D'où $\Delta=A^2-4B$ et les deux racines sont

$$\alpha_{1,2}=\frac{-A\pm\sqrt{\Delta}}{2}$$

On distingue plusieurs cas selon la valeur$\mathbf{\Delta}$.

1) Les racines réelles et distinctes ($\alpha_1\neq\alpha_2$).

Les solutions sont : e^{α_1x} et e^{α_2x} ou $c_1e^{\alpha_1x}$ et $c_2e^{\alpha_2x}$

On obtient la solution homogène de la forme:

$$y_h=c_1e^{\alpha_1x}+c_2e^{\alpha_2x}$$

2) Les racines réelles et égales ($\alpha_1 = \alpha_2$).

Les solutions sont : $e^{\alpha_1 x}$ et $x\,e^{\alpha_1 x}$

On obtient la solution homogène de la forme:

$$y_h = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 x e^{\alpha_2 x}$$

3) Les racines complexes:

A et B sont réels, les racines complexes sont conjuguées et de la forme : **α_1=a + ib et α_2= a – ib.**

Les solutions sont :

$$e^{\alpha_1 x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax} e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)$$

$$avec \qquad e^{ixb} = (\cos xb + i\sin xb)$$

et

$$e^{\alpha_2 x} = e^{(a-ib)x} = e^{ax} e^{-ibx} = e^{ax}(\cos bx - i\sin bx)$$

$$\text{avec} \qquad e^{-ixb} = (\cos bx - i\sin bx)$$

La solution homogène est

$$y_{\text{h}} = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$$

Solution particulière :

On applique deux méthodes

- Méthode des coefficients indéterminés
- Méthode de la variation des constantes

I.2.4.4. Méthode de la variation des constantes

Elle utilise les fonctions particulières R(x), telles que des polynômes, des fonctions exponentielles ou trigonométriques de la forme **e^{px}**, **cos (px)**, **sin (px)** où **p** est une constante.

Exemples:

Si R(x) = 6x:

La solution particulière sera de la forme **Y_p = ax + b** où **a** et **b** sont des constantes à déterminer.

Si R(x) =$3x^2$ +2 e^{4x} :

La solution particulière sera de la forme **$y_p = (ax^2+bx+c)+de^{4x}$**; **a**, **b**, **c** et **d** sont des constantes.

Si R(x) = 2cos3x :

La solution particulière sera de la forme **y_p= acos3x +bsin3x**

Donc la solution globale est **$y_{globale} = y_h + y_p$**

I.3.1. Calcul d'incertitudes et analyse vectoriel

Il n'existe pas une valeur exacte d'une grandeur physique ou un objet parfait dans la nature. Dans ce cas, il est nécessaire de connaître les erreurs (incertitudes) de la mesure. On distingue divers types d'erreurs qu'ils dues à l'appareil ou l'opérateur.

- Erreurs dues à la classe " **ΔI = calibre*classe/100**, avec **classe = 1,5**"
- Erreurs systématiques "affectent le résultat constamment et dans le même sens".

- Erreurs accidentelles "répéter les mesures après l'accident de l'instrument "(rupture du courant, instrument tombe sur la terre).
- Erreurs de la lecture: position devient perpendiculaire à l'instrument.

I.3.2. Mesure directe

Lorsqu'on mesure une grandeur **a**, on détermine la valeur approchée $\mathbf{a_a}$ "valeur mesurée ". L'écart avec la valeur exacte $\mathbf{a_e}$ (vraie) est l'erreur absolue $\boldsymbol{\delta a = a_a - a_e}$ avec $|\boldsymbol{\delta a}| << \boldsymbol{\Delta a}$ l'erreur maximum possible.

I.3.2.1. Incertitude absolue Δa

Elle est une estimation plus ou moins optimiste de la valeur absolue de la différence ($\mathbf{a_e - a_a}$) entre la valeur mesurée "approchée" et la vraie valeur " exacte".

$$\Delta a = |a_e - a_a| \Rightarrow \mathrm{a_a} - \Delta a < a_{ef} < a_a + \Delta a$$

La valeur exacte est comprise entre deux limites connues
$(a_a - \Delta a)$ et $(a_a + \Delta a) \Rightarrow a_{\mathrm{e}} = a_a \pm \Delta a$

Une mesure s'exprime par un nombre limite des chiffres significatifs. Le dernier chiffre significatif exprime une certaine confiance qui représente par l'incertitude absolue **Δa**.

I.3.2.2. Incertitude relative Δa/a : Elle est une grandeur sans unité qui exprime en **%** et donne la précision de la mesure.

I.3.3. Mesure indirecte

I.3.3. 1. Incertitude d'une fonction à plusieurs variables

Soit y une mesure indirecte s'exprime par la formule **y = f(x, z, t)** en fonction des mesures directes **x, z** et **t** connues à **Δx**, **Δz** et **Δt** prés.

L'erreur maximum possible sur **y** (incertitude absolue de **y**) est

$$\Delta y = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\Delta z + \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|\Delta t \quad , \left(|dy| = \Delta y,\ |dx| = \Delta x,\ |dz| = \Delta z \text{ et } |dt| = \Delta t\right)$$

Les dérivées partielles sont les dérivées de la fonction f par rapport à une variable, les autres variables étant considérées comme constantes. $\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{z,t},\ \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{x,t},\ \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{x,z}\right)$

Exemple:

$$y = xz \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{z=cte} = z,\ \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{x=cte} = x$$

Donc $\Delta y = z\Delta x + x\Delta z$

Application:

1/ Pour
$$\left.\begin{array}{ll} addition & y = x + z \\ soustraction & y = x - z \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta \mathrm{y} = \Delta \mathrm{x} + \Delta \mathrm{z}$$

2/ Pour
$$\left.\begin{array}{ll} multiplication & y = xz \Rightarrow \Delta\mathrm{y} = z\Delta\mathrm{x} + x\Delta\mathrm{z} \\ division & y = \frac{x}{\mathrm{z}} \Rightarrow \Delta\mathrm{y} = \frac{\mathrm{z}\Delta\mathrm{x} + x\Delta\mathrm{z}}{\mathrm{z}^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\Delta\mathrm{y}}{\mathrm{y}} = \frac{\Delta x}{\mathrm{x}} + \frac{\Delta\mathrm{z}}{\mathrm{z}}$$

N.B:
Les incertitudes absolues s'ajoutent pour l'addition et la soustraction. Les incertitudes relatives s'ajoutent pour la multiplication et la division.

Cas particulier:

1) Expression polynôme: **g = f(a, b, c)**

g = Ka + K'b + K''c , (**K, K'** et **K''** sont des constantes)

L'incertitude **Δg** de **g** se calcule par la formule. $\Delta g = |K|\Delta a + |K'|\Delta b + |K''|\Delta c$

2) Expression monôme:

$g = ka^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}$, **α, β** et **γ** sont des constantes.

$$\frac{\Delta g}{g} = |\alpha|\frac{\Delta a}{a} + |\beta|\frac{\Delta b}{b} + |\gamma|\frac{\Delta c}{c}$$

Exemple:
Y=xz : Calculer incertitude absolue **Δy** par deux méthodes.

1) Méthode différentielle:

$$dy = xdz + zdx \Rightarrow \Delta y = x\Delta z + z\Delta x$$

2) Méthode logarithmique:

$$Y = xz \Rightarrow \ln y = \ln xz = \ln x + \ln z \Rightarrow dy/y = dx/x + dz/z$$

D'où $dy = zdx + xdz \Rightarrow \Delta y = z\Delta x + x\Delta z$

I.3.4. Chiffres significatifs:
Le résultat d'un calcul ne doit pas avoir plus de chiffres significatifs que la moins précise des quantités utilisées dans le calcul (l_f = **9,356** ± **0,001**) **m**.

N.B :
Tous les chiffres non nuls sont significatifs.

- **Exemples :**

(**154,23**) m a **5** chiffres significatifs.
(**15,423**) m a **5** chiffres significatifs.

D'où la virgule n'intervient pas. Les zéros placés à l'intérieur du nombre ou à la fin du nombre après la virgule sont toujours significatifs.

- **Exemples:**

(**2005**) m a **4** chiffres significatifs.
(**187,50**) m a **5** chiffres significatifs
(**187,5**) m a **4** chiffres significatifs

On dit que **187,50** et **187,5** ne sont pas identiques mais le premier est précis.
Les zéros placés au début du nombre ne sont jamais significatifs.

- **Exemples:**

(**0,52**) m a **2** chiffres significatifs
(**0,0052**) m a **2** chiffres significatifs

Il faut arrondir certains résultats pour obtenir un nombre correct de chiffres significatifs.

- **Exemples :**

(**527,398**) m a **6** chiffres significatifs
(**527,40**) m a **5** chiffres significatifs
(**527,4**) m a **4** chiffres significatifs
(**527**) m a **3** chiffres significatifs
(**530**) m a **2** chiffres significatifs
(**500**) m a **1**, **2**, **3** chiffres significatifs (**0,5**, **0,50**, **0,500**).

Commentaire:
Pour le physicien ou pour licencie, les mathématiques sont un outil et ne reviennent qu'en second la compréhension des idées de la physique. Il ne faut pas décourager par une difficulté mathématique.

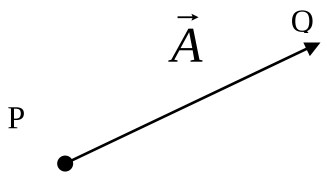
I.4. 1. Analyse vectorielle

L'algèbre vectorielle est importante. Il existe deux quantités des grandeurs scalaires et vectorielles.

a) **Scalaire:** est un nombre réel appelé grandeur de cette quantité telle que la longueur (**l**), la masse (**m**) et le temps (**t**).

b) **Vecteur:** est caractérisé par une direction (verticale, horizontale), un sens (bas, haut) et module (intensité, valeur). Il est représenté géométriquement par une flèche **PQ**, où **P** est l'origine et **Q** l'extrémité. Le module ou longueur de ce vecteur est représenté par

$\left\|\vec{PQ}\right\|$ ou $\left\|\vec{A}\right\| = A$



c) **Calcul la grandeur** $(\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2})$

D'après la figure I.1. On a $(AC)^2 = (AD)^2 + (DC)^2$ (*)

Avec $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} \Rightarrow AD = V_1 + V_2\cos\theta$ (1) $\vec{V_1}$

Et $\vec{DC} = V_2 \sin\theta$ (2)

On met (1) et (2) dans (*), on aura

$V^2 = (V_1 + V_2\cos\theta)^2 + (V_2\sin\theta)^2 = V_1^2 + V_2^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + 2V_1V_2\cos\theta$

Sachant que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$; alors que $V^2 = V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos\theta$

Donc, son module est $V = \left\|\vec{V}\right\| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos\theta}$

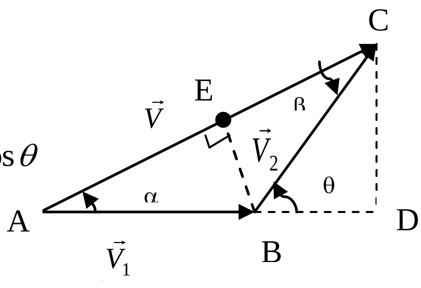


Figure I.1 : Sommation deux vecteurs

Théorème de Pythagore:
Le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

d) **Détermination de la direction du** $\vec{V}$

On va déduire l'angle α en utilisant la figure précédente.

Dans le triangle ACD, on tire **CD = AC sinα (3)**

et dans le triangle BDC, on tire **CD = BC sinθ (4)**

De (3)= (4) $\Rightarrow$ **AC sinα = BC sinθ**

V sinα = V₂ sinθ d'une part $\frac{V}{\sin\theta} = \frac{V_2}{\sin\alpha}$ (I)

De même, pour **BE=V_1 sinα ,** d'une part et d'autre part

BE=V_2sinβ $\Rightarrow$ **V_1 sinα = V_2sinβ** , alors que $\frac{V_1}{\sin\beta} = \frac{V_2}{\sin\alpha}$ (II)

En combinant les deux résultats (I) et (II), on obtient la relation symétrique.

$$\frac{V}{\sin\theta} = \frac{V_1}{\sin\beta} = \frac{V_2}{\sin\alpha}$$

Cas particulier:

Si $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont perpendiculaire (θ = π/2)

Donc, $V = \|\vec{V}\| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$ et $tg\alpha = \frac{V_2}{V_1}$

e) Lois de l'algèbre vectorielle: si $\vec{A}$, B et $\vec{C}$ sont des vecteurs; et si **p** et **q** sont des scalaires, on a alors:

$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$	Loi de commutativité pour l'addition
$\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$	Loi d'associativité pour l'addition
$p(q\vec{A})=(pq)\vec{A}=q(p\vec{A})$	Loi d'associativité pour la multiplication
$(p+q)\vec{A}=p\vec{A}+q\vec{A}$	Loi de distributivité.
$p(\vec{A}+\vec{B})=p\vec{A}+q\vec{B}$	Loi de distributivité

f) Vecteurs unitaires: les vecteurs dont le module correspond à l'unité de longueur sont appelés **vecteurs unitaires**.

Si $\vec{A}$ est un vecteur de module A ou $\|\vec{A}\|$, alors $\frac{\vec{A}}{A} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \vec{u}$ est un vecteur unitaire de même direction que $\vec{A}$. Avec $\vec{A} = A\vec{u}$ ($\vec{u}$ unité de l'axe).

g) Vecteurs unitaires orthogonaux: les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ou ($\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$) sont des vecteurs unitaires perpendiculaires deux à deux qui sont dirigés positivement le long des axes X, Y et Z d'un système d'axes orthogonaux; d'où $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ forment une base cartésienne voir la figure I.2.

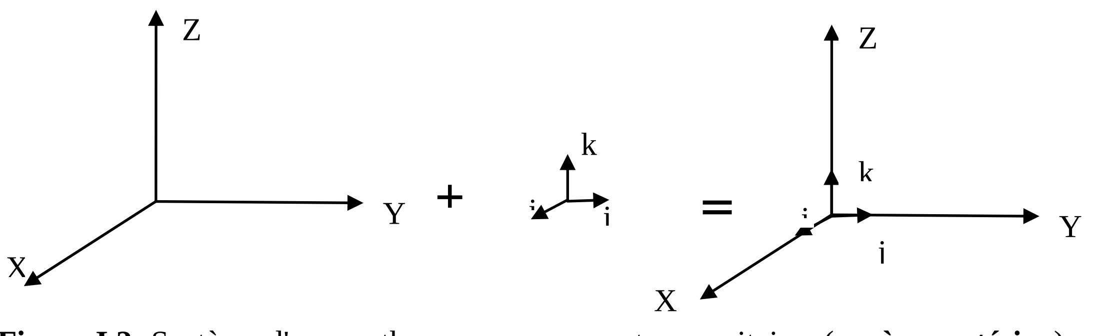


Figure I.2: Système d'axes orthogonaux avec vecteurs unitaires (**repère cartésien**)

h) Composantes d'un vecteur:

Tout vecteur $\vec{V}$ peut être considéré comme la somme de deux vecteurs ou plus. Soit (A_1, A_2, A_3) les coordonnées de l'extrémité du vecteur **A** d'origine **O**. Les vecteurs $A_1\vec{i}$, $A_2\vec{j}$ et $A_3\vec{k}$ sont les composantes du vecteur $\vec{A}$ respectivement dans la direction X, Y et Z. Alors que A_1, A_2 et A_3 sont appelés composante de **A** suivant les axes X, Y et respectivement voir figure I.3. Donc la somme ou résultante de $A_1\vec{i}$, $A_2\vec{j}$ et $A_3\vec{k}$ est le vecteur A ($\vec{A} = o\vec{M}$) .

$\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$ ou $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$

Le module de $\vec{A}$ est $\|\vec{A}\| = A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$

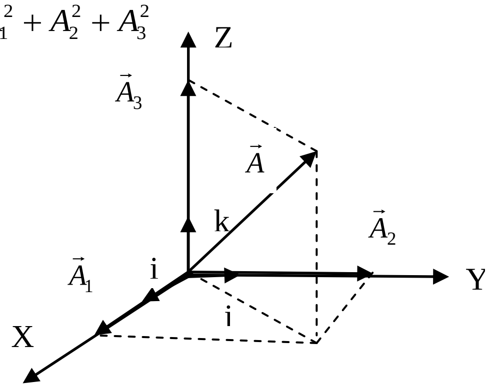
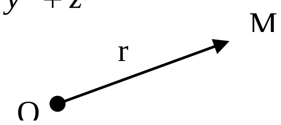


Figure I.3: Composantes d'un vecteur **A**

Cas particulier:

$\vec{r} = o\vec{M}$ est le vecteur position ou rayon - vecteur d'origine **O** et d'extrémité le point **M(x,y,z).**

On écrit : $o\vec{M} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et son module est $\|\vec{r}\| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$



i) Les différents repères

La figure I.4 présente les différents repères.

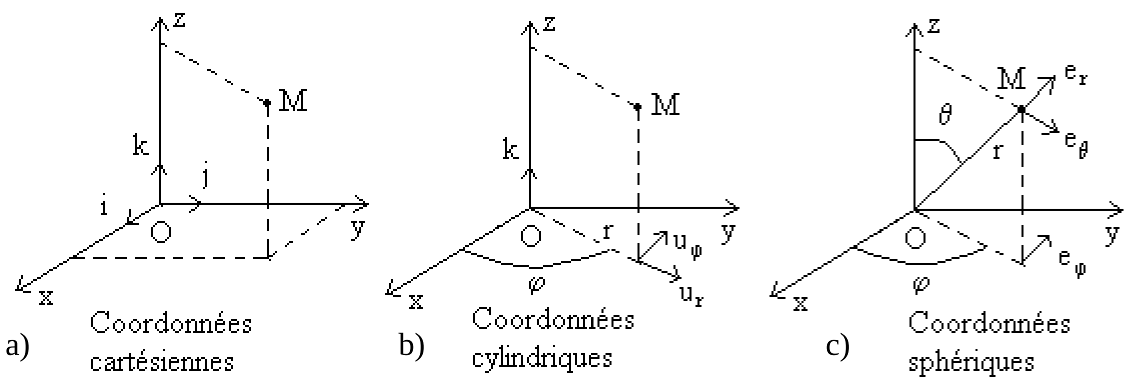


Figure I.4 : Différents repères

a) Repère cartésien

$O\vec{M} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; $\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$, et $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$

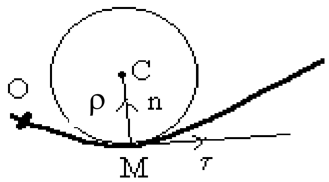
b) Repère cylindrique

$$\vec{OM} = \mathrm{r}\,\vec{\mathrm{u}}_{\mathrm{r}} + \mathrm{z}\,\vec{\mathrm{k}} \quad , \quad \vec{v} = \dot{\mathrm{r}}\,\vec{\mathrm{u}}_{\mathrm{r}} + r\,\dot{\varphi}\,\vec{u}_{\varphi} + \dot{\mathrm{z}}\vec{\mathrm{k}}, \text{ et } \quad \vec{a} = (\ddot{\mathrm{r}} - \dot{\mathrm{r}}\theta^2)\,\vec{\mathrm{u}}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\mathrm{r}^2\,\dot{\varphi})\vec{\mathrm{u}}_{\rho} + \ddot{z}\vec{k}$$

c) Repère sphérique

$$\vec{OM} = \mathrm{r}\vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{r}} \;,\; \vec{v} = \dot{\mathrm{r}}\vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{r}} + \mathrm{r}\dot{\theta}\,\vec{\mathrm{e}}_{\theta} + \mathrm{r}\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{\mathrm{e}}_{\varphi}$$

d) Repère curviligne ou de Frénet : La figure I.5 montre la trajectoire du point M.



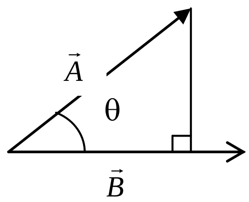
C : centre du cercle tangent en *M* à la trajectoire
$\rho = \mathrm{CM}$: rayon de courbure
s : abscisse curviligne
$\vec{v} = \mathrm{v}\vec{\tau}$ avec $v = \frac{\mathrm{ds}}{dt}$; alors que $\vec{a} = \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}}\vec{\tau} + \frac{\mathrm{v}^2}{\rho}\vec{n}$

Figure I.5 : Abscisse curviligne

I.4.2. Produit scalaire:

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ noté par $\vec{A} \bullet \vec{B}$ est défini comme le produit des modules de $\vec{A}$ et $\vec{B}$ par le cosinus de l'angle des deux vecteurs.

$\vec{A} \bullet \vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos\theta \qquad 0 \le \theta \le \pi$ On lit **A** scalaire **B**



Remarque:

$\vec{A} \bullet \vec{B}$ est un scalaire et non vecteur.
Produit scalaire satisfait les lois suivantes:
$\vec{A} \bullet \vec{B} = \vec{B} \bullet \vec{A}$ Loi de commutativité pour le produit scalaire.
$\vec{A} \bullet (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \bullet \vec{B} + \vec{A} \bullet \vec{C}$ Loi de distributivité
$p(\vec{A} \bullet \vec{B}) = (p\vec{A}) \bullet \vec{B} = \vec{A} \bullet (p\vec{B}) = (\vec{A} \bullet \vec{B})p$, où p est un scalaire
$\vec{i} \bullet \vec{i} = \vec{j} \bullet \vec{j} = \vec{k} \bullet \vec{k} = 1, \quad \vec{\mathrm{i}} \bullet \vec{\mathrm{j}} = \vec{\mathrm{j}} \bullet \vec{\mathrm{k}} = \vec{\mathrm{k}} \bullet \vec{\mathrm{i}} = 0$

Exemple:

Si $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$ et $\vec{B} = B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k}$

D'où
$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{A} \bullet \vec{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \\ \vec{A} \bullet \vec{A} = A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 \\ \vec{B} \bullet \vec{B} = B^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 \end{array}}$$

Remarque:
Si $\vec{A}\bullet\vec{B}=0$ et si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ ne sont pas des vecteurs nuls alors $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires.

I.4.3. Produit vectoriel:

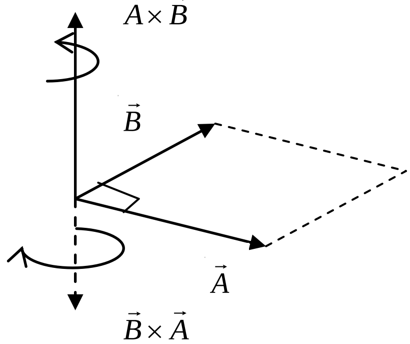
Le produit vectoriel $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est un vecteur $\vec{C}$. $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{C}$ On lit **A** vectoriel **B**

$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}=\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\sin\theta\,\vec{u}$, $0\leq\theta\leq\pi$

Le module de $\vec{A}\times\vec{B}$ est le produit des modules de $\vec{A}$ et $\vec{B}$ par le sinus de l'angle des deux vecteurs, où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire indiquant la direction de $\vec{A}\times\vec{B}$.

$|\vec{A}\times\vec{B}|=AB\sin\theta$ est équivalent à l'aire du parallélogramme.

La direction du vecteur $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{C}$ est perpendiculaire au plan formé par $\vec{A}$ et $\vec{B}$, et dont le sens tel que A, B et C ou $\vec{u}$ forment un trièdre direct (un tire-bouchon qui tourne de $\vec{A}$ vers $\vec{B}$ avance dans le sens de $\vec{C}$ ou ($\vec{u}$) « Figure I.6).



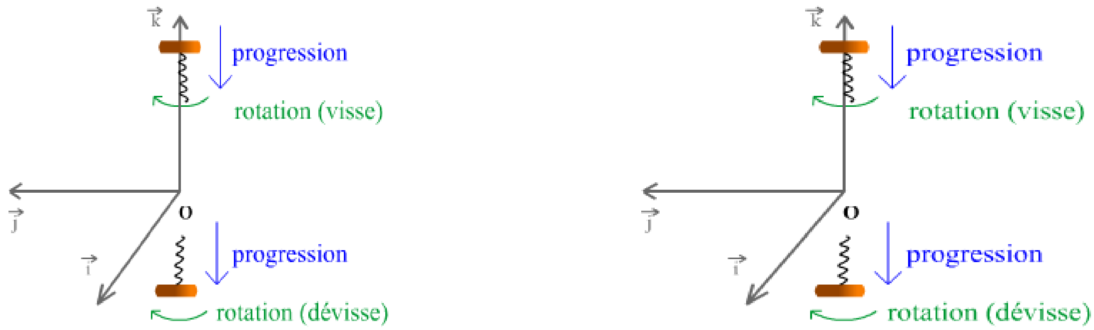


Figure I.6 : Direction du vecteur $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{C}$

Remarques:
Si $\vec{A}=\vec{B}$ ou $\vec{A}$ parallèle à $\vec{B}$ c à d ($\theta=0\Rightarrow\sin\theta=0$, on obtient $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{0}$)
Le produit vectoriel satisfait les lois suivantes:

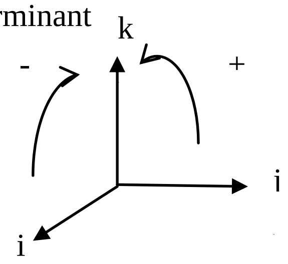
- $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$ Loi de commutativité n'est pas vérifiée (anticommutatif)
- $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+A\times\vec{C}$ Loi de distributivité
- $p(\vec{A}\times\vec{B})=(p\vec{A})\times\vec{B}=\vec{A}\times(p\vec{B})=(\vec{A}\times\vec{B})p$ Où p est un scalaire

Les vecteurs unitaires de bases cartésiennes satisfont
$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$, $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$, $\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$, $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$, $\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$

- **Calcul de $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{C}$**

Si $\vec{A}=A_1\vec{i}+A_2\vec{j}+A_3\vec{k}$ et $\vec{B}=B_1\vec{i}+B_2\vec{j}+B_3\vec{k}$

$\vec{A}\times\vec{B}=(A_1\vec{i}+A_2\vec{j}+A_3\vec{k})\times(B_1\vec{i}+B_2\vec{j}+B_3\vec{k})$ Ou en utilisant le déterminant

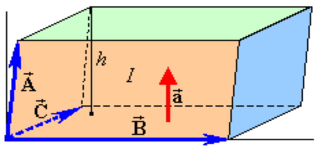


$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_2B_3-A_3B_2)\vec{i}-(A_1B_3-A_3B_1)\vec{j}+(A_1B_2-A_2B_1)\vec{k}$$

$\lvert\vec{A}\times\vec{B}\rvert$ est la surface d'un parallélogramme de côtés $\vec{A}$ et $\vec{B}$.
Si $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{0}$ et si $\vec{A}\neq\vec{0},\ \vec{B}\neq\vec{0}$, alors $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont parallèles

I.4. Produit mixte: Le produit mixte entre 03 vecteurs est défini par



$$\vec{A}\bullet(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}=A_1\begin{vmatrix} B_2 & B_3 \\ C_2 & C_3 \end{vmatrix}-A_2\begin{vmatrix} B_1 & B_3 \\ C_1 & C_3 \end{vmatrix}+A_3\begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}$$

avec $\vec{A}=A_1\vec{i}+A_2\vec{j}+A_3\vec{k}$, $\vec{B}=B_1\vec{i}+B_2\vec{j}+B_3\vec{k}$ et $\vec{C}=C_1\vec{i}+C_2\vec{j}+C_3\vec{k}$

$\vec{A}\bullet(\vec{B}\times\vec{C})$ représente le volume d'un parallélépipède de cotés A, B et C

En général, $\vec{A}\bullet(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\bullet(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}\bullet(\vec{A}\times\vec{B})$

a) Double produit vectoriel: Il est défini par

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\bullet\vec{C})-(\vec{B}\bullet\vec{A})\vec{C}$$

$$comme\quad(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=\vec{B}(\vec{A}\bullet\vec{C})-(\vec{B}\bullet\vec{C})\vec{A}$$

$$d'où\quad\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\neq(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$$

I.4.5. Notions sur les dérivées des vecteurs

Chaque valeur d'une variable scalaire **u** correspond un vecteur $\vec{A}(u)$, ce vecteur est appelé **fonction vectorielle** de **u** ou **champ vectoriel**.

Soit $\vec{A}(u)=A_1(u)\vec{i}+A_2(u)\vec{j}+A_3(u)\vec{k}$, alors la dérivée de $\vec{A}(u)$ est défini par

$$\frac{d\vec{A}}{du}=\frac{dA_1}{du}\vec{i}+\frac{dA_2}{du}\vec{j}+\frac{dA_3}{du}\vec{k}\quad;\ \vec{i},\vec{j}\text{ et }\vec{k}\text{ sont des constantes}\quad(u\equiv x,y,z)$$

Et la dérivée seconde est donnée par $\dfrac{d^2\vec{A}}{du^2}=\dfrac{d^2A_1}{du^2}\vec{i}+\dfrac{d^2A_2}{du^2}\vec{j}+\dfrac{d^2A_3}{du^2}\vec{k}$

Ainsi, si $\phi(u)$ est une fonction scalaire. $\vec{A}(u)$ et $\vec{B}(u)$ sont des fonctions vectorielles, on a alors:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{d}{du}(\phi\vec{A}) = \phi\dfrac{d\vec{A}}{du} + \dfrac{d\phi}{du}\vec{A} \\ \dfrac{d}{du}(\vec{A}\bullet\vec{B}) = \dfrac{d\vec{A}}{du}\bullet\vec{B} + \vec{A}\bullet\dfrac{d\vec{B}}{du} \\ \dfrac{d}{du}(\vec{A}\times\vec{B}) = \dfrac{d\vec{A}}{du}\times\vec{B} + \vec{A}\times\dfrac{d\vec{B}}{du} \end{array}}$$

I.4.5.1. Intégrales de vecteurs:

Soit le vecteur $\vec{A}(u) = A_1(u)\vec{i} + A_2(u)\vec{j} + A_3(u)\vec{k}$ qui est une fonction vectorielle de u.

L'intégrale de $\vec{A}(u)$ est défini par :

$$\int \vec{A}(u)du = \vec{i}\int A_1(u)du + \vec{j}\int A_2(u)du + \vec{k}\int A_3(u)du$$

I.4.5.2. Gradient, divergence et rationnel:

On considère un point M(x, y, z) d'un système d'axes d'orthonormés et $\vec{A}(x,y,z)$ est une fonction vectorielle de (x, y,z) ou champ vectoriel. De même, ϕ(x,y,z) est une fonction scalaire de (x,y,z) ou champ scalaire.

Soit l'opérateur vectoriel **différentiel nabla** $\vec{\nabla}$ défini par : $\vec{\nabla} = \vec{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$

Où $\dfrac{\partial}{\partial x}$ signifie que l'on dérive par rapport à la variable x en considérant les variables y et z comme constants. On peut définir les grandeurs suivantes:

- **Gradient:**

$$\vec{\nabla}\phi = (\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z})\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$$

$\vec{\nabla}\phi$ est un vecteur appelé gradient de ϕ et qui s'écrit aussi $\vec{grad}\phi$

- **Divergence :**

$\vec{\nabla}\bullet\vec{A}$ ou $div\vec{A}$ est un scalaire appelé divergence de $\vec{A}$.

$$\vec{\nabla}\bullet\vec{A} = (\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z})\bullet(A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}) = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

- **Rotationnel:**

$\vec{\nabla}\times\vec{A}$ ou $rot\vec{A}$ est un vecteur appelé rotationnel.

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = (\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z})\times(A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = (\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z})\vec{i} + (\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x})\vec{j} + (\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y})\vec{k}$$

N.B: Il existe aussi deux formules importantes:

$$div\,rot\vec{A} \equiv \vec{\nabla} \bullet (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

$$rot\,grad\,\vec{\phi} \equiv \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) = \vec{0}$$

I.4.6.3. Intégrales curvilignes:

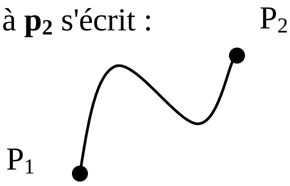
Soit $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$. Où r(t) est le vecteur de position de **p(x,y,z).**

La courbe **C** qui joint les points $\mathbf{p_1}$ et $\mathbf{p_2}$ aux instants $\mathbf{(t=t_1)}$ et $\mathbf{(t=t_2)}$ respectivement.

Ainsi soit $\vec{A}(x,y,z) = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$ est une fonction vectorielle de la position. Sachant que $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

D'où l'intégrale de la composante tangentielle de $\vec{A}$ le long de **C** de $\mathbf{p_1}$ à $\mathbf{p_2}$ s'écrit :

$$\int_{p_1}^{p_2} \vec{A} \bullet d\vec{r} = \int_c A dr = \int_c A_1 dx + \int_c A_2 dy + \int A_3 dz)$$



N.B:

$\oint$: Pour une courbe fermée

Chapitre II:

Cinématique du point matériel

La cinématique étudie des corps sans considérer les causes qui les produisent ou étude de la géométrie du mouvement. Autrement dit, c'un déplacement de la masse dans l'espace.

II.1. Description cinématique du mouvement

L'objet de la mécanique est de décrire et d'expliquer le mouvement. Elle est une notion essentiellement relative. Par exemple; la voiture avec le conducteur se déplaçant sur une route, changent de position par rapport aux maisons, aux arbres, les bâtiments…etc. On remarque cette voiture avec le conducteur est en mouvement par rapport à ces objets. Mais en même temps le conducteur se trouve au repos par rapport à la voiture.

Ainsi, pour dire qu'un objet (solide) est un mouvement, il est nécessaire de repérer sa position par rapport aux objets qui l'en tournent. En revanche, pour décrire le mouvement des corps, il faut préalablement choisir un système de référence "référentiel" ou repère.

II.1.1. Référentiel ($\mathfrak{R}$)

Un référentiel est un système d'axes lié à un objet matériel (un solide de référence) et muni d'horloges. Par exemple, le référentiel terre est un système d'axes liés à la terre comme le référentiel voiture est un système d'axes liés à la voiture.

Autrement dit, un référentiel est un ensemble de deux repères; l'une repère d'espace et l'autre repère du temps.

1. **Repère d'espace**: il est un ensemble des points matériels "solide".
2. **Repère du temps**: à chaque point d'espace lié par une horloge.

Nous allons envisager d'abord, le mouvement des corps ponctuels c.-à-d. des corps de dimensions très petites que l'on convient d'appeler des points matériels.

Par exemple, la terre peut être considérée comme un point matériel si l'on étudie son mouvement par rapport au soleil.

Remarque: On peut présenter le mouvement d'un solide en le considérant comme des **points matériels**.

a) Soit un point matériel se déplace dans l'espace. A chaque instant t sa position peut être déterminé par trois coordonnées d'un trièdre sa référence (x, y, z) ou par un vecteur $\vec{r}$ tracé de l'origine du trièdre vers le point considéré P. Ce vecteur s'appelle rayon vecteur du point matériel voir figure II.1.

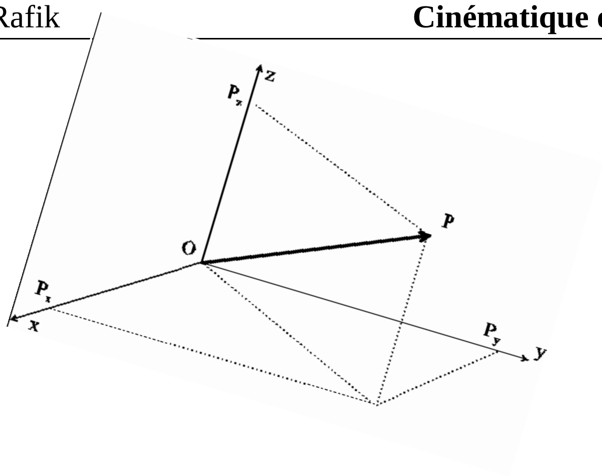


Figure II.1: Vecteur position et coordonnées d'un point matériel

b) Soit $\vec{i}$, $\vec{\mathrm{j}}$ et $\vec{\mathrm{k}}$ sont des vecteurs unitaires orientés le long des axes x, y et z.
Alors que : $\vec{r} = O\vec{M} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (2-1)

Les vecteurs $\begin{cases} \vec{r}_x = x\vec{i} \\ \vec{r}_y = y\vec{j} \\ \vec{r}_z = z\vec{i} \end{cases}$ sont des composantes du vecteur $\vec{r}$ sur les axes de cordonnées. Leur projection sur ces axes sont x, y, z. Il faut déterminer les variations des coordonnées x, y et z en fonction du temps t, x (t), y (t) et z (t). Ces équations s'appellent les équations paramétriques du mouvement du point matériel.

c) Si le point M se déplace dans l'espace de la position 1 (M_1) à la position 2 (M_2), en décrivant une courbe qui est appelée sa trajectoire voir figure II.2.

d) La longueur de la trajectoire entre deux positions du point matériel et ce que l'on appelle **chemin parcouru**.

e) Le vecteur tracé de la position initiale du point matériel vers sa position finale est dit **déplacement** $\Delta\vec{r}$.

On a: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{\mathrm{r}}_1 \Rightarrow \vec{\mathrm{r}}_1 + \Delta\vec{r} = \vec{r}_2$ avec $\vec{r}_1$: rayon vecteur du M_1; $\vec{r}_2$: rayon vecteur du M_2.

f) Pendant un intervalle du temps Δt le point M_1 passe à M_2, le déplacement est M_1M_2 et sa valeur numérique s'écrit: $\Delta r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \mathrm{M}_1 M$ (2-2)

Pour établir les lois fondamentales de la cinématique. On doit introduire deux nouvelles notions: la vitesse et l'accélération.

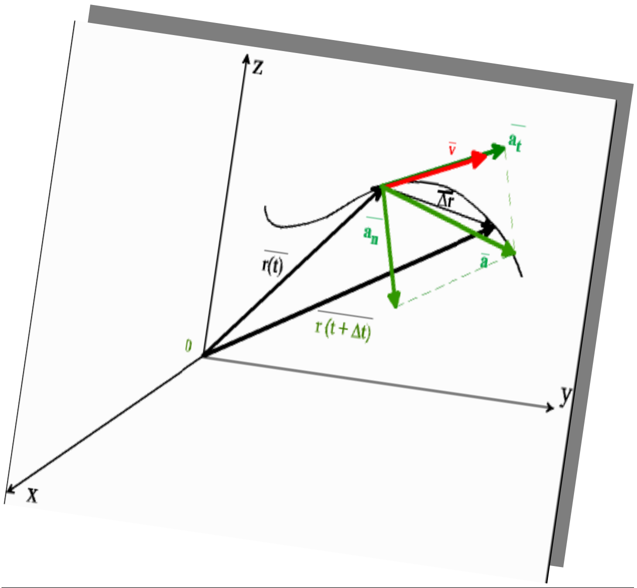


Figure II.2: Trajectoire M_1M_2 et le déplacement Δr

II.1.2. Vitesse:

La vitesse caractérise la rapidité du mouvement et sa direction à l'instant considéré. Elle est tangente à la trajectoire dans un mouvement curviligne voir figure II.3.

Le chemin parcouru étant Δs et le vecteur de déplacement $\Delta\vec{r}$

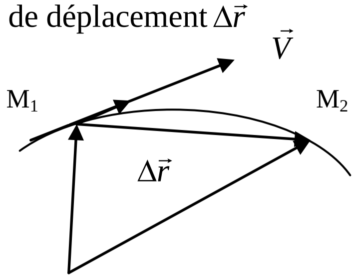


Figure II.3: Vecteur de la vitesse

II.1.2.1. Vitesse moyenne: elle est le rapport entre le vecteur du déplacement $\Delta\vec{r}$ et le temps Δt.

$$\vec{V}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\overline{M_1\vec{M}_2}}{t' - t} \tag{2-3}$$

La direction du vecteur $\vec{V}_m$ coïncide avec celle du vecteur $\Delta\vec{r}$. Sa valeur est

$$\left|\vec{V}_m\right| = V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{chemin\ \ parcouru}{intervalle\ \ du\ \ temps} \tag{2-4}$$

Les dimensions de V_m sont $[V_m] = LT^{-1}$ et l'unité de la vitesse dans le système S.I est exprimée en ms^{-1}.

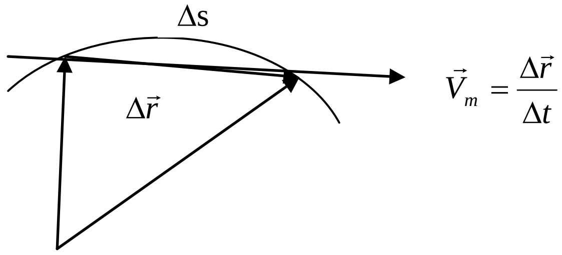


Figure II.4: Direction de la vitesse moyenne « Δs abscisse curviligne »

II.1.2.2. Vitesse instantanée:

C'est $\vec{V}$ la vitesse de la particule à l'instant **t**. La vitesse instantanée du mobile à l'instant **t** est un vecteur au point **M** dirigé suivant le sens du mouvement. On appelle le vecteur de la vitesse moyenne de la particule à l'instant **t** la limite du vecteur de la vitesse moyenne quand **Δt** tend vers zéro " **Δt → 0**". $\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ (2-5)

En mathématique, la limite de la vitesse moyenne pour **Δt → 0** est la dérivée du rayon vecteur $\vec{r}$ par rapport au temps. $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ (2-6)

Et aussi $\vec{V}$ porte le nom de la vitesse vraie qu'est un vecteur dirigé le long de la tangente à la trajectoire du point mobile. On écrit : $|\Delta\vec{r}| \approx \Delta s$, quand $\Delta t \to 0$ d'où

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \approx \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} = \frac{ds}{\Delta t} \quad (2\text{-}7)$$

N.B: Le vecteur $\vec{V}$ peut être décomposé en trois composantes dirigées le long des axes du référentiel.

On a : $\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$ (2-8)

$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$ sont les projections du vecteur vitesse sur les axes des coordonnées.

Application:

Si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sont des coordonnées du point M, alors $\vec{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

Par conséquent; $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$ (2-9)

En comparant (2-8) et 2-9), on établit que

$$\begin{cases} \dot{x} = V_x = \dfrac{dx}{dt} \\ \dot{y} = V_y = \dfrac{dy}{dt} \\ \dot{z} = V_z = \dfrac{dz}{dt} \end{cases}$$ La valeur numérique de la vitesse « module » est

$$V(t) = \|\vec{V}\| = \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \frac{ds}{dt} \qquad (2\text{-}10)$$

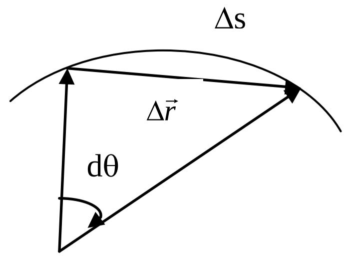


Figure II.5: Abscisse curviligne (Quand $\Delta t \to 0 \Rightarrow \Delta\vec{r} \to d\vec{r}$ et $\Delta s \to ds$).

N.B: **s(t**) est le morceau de trajectoire parcouru pour le mobile **M** depuis **t = 0** jusqu'à **t**; **s(t)** est appelée abscisse curviligne.

Exemple: Pour un mouvement rectiligne: M(x, 0,0), $\vec{r} = x\vec{i} \Rightarrow d\vec{r} = dx\vec{i}$ et (dy=0, dz=0) avec $V = \dfrac{dx}{dt}$ trouver la formule de x?

Solution :

dx = vdt, en intégrant $\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} Vdt$ où x_0 désigne la valeur de x au temps t_0, puisque

$\int_{x_0}^{x} dx = x\Big|_{x_0}^{x} = x - x_0$ d'où $x = x_0 + \int_{t_0}^{t} Vdt$

En générale le déplacement : $x - x_0 = V_1 dt_1 + V_2 dt_2 + \dots\dots\dots + V_n dt_n = \sum_{i=1}^{n} V_i dt_i = \int_{t_0}^{t} Vdt$

Cas particulier : Si $\vec{V} = 2t\vec{i}$ et $x_0 = 0$ et $V_0 = 0$ déduire x? On a : $x = 2\int_{t_0}^{t} tdt = t^2\Big|_{t_0=0}^{t} = t^2$

II.1.3. Accélération:

Soit un mouvement d'un point matériel sur une trajectoire curviligne. Soit le référentiel plan (Descartes), $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont des vecteurs de la vitesse instantanée aux points M_1 et M_2 voir figure II.6.

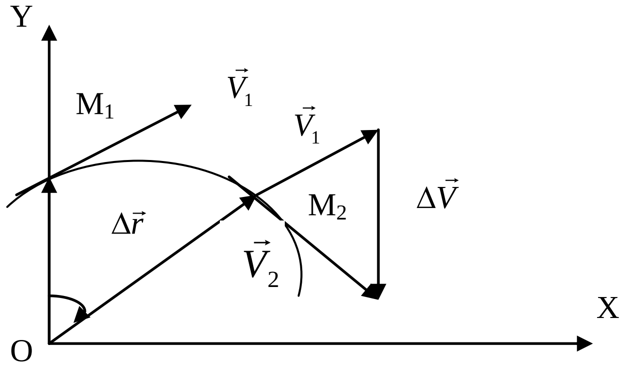


Figure II.6: Vecteurs de la vitesse instantanée aux points $\mathbf{M_1}$ et $\mathbf{M_2}$

II.1.3.1. Calcul $\Delta\vec{V}$: Nous transportons l'origine du vecteur $\vec{V}_1$ de point $\mathbf{M_1}$ à point $\mathbf{M_2}$ parallèlement à lui-même. Puis, joignons les extrémités des vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.

Alors, le vecteur $\Delta\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 \Rightarrow \vec{V}_1 + \Delta\vec{V} = \vec{V}_2$ (2-11)

$\Delta\vec{V}$ donne la variation de la vitesse pendant le temps $\mathbf{\Delta t}$.

II.1.3.2. Accélération moyenne $\mathbf{a_m}$: le rapport $\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$ qui donne en valeur et en direction la variation de la vitesse en fonction du temps Δt est appelé l'accélération moyenne

$$a_m = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} \quad (2\text{-}12)$$

Le sens de l'accélération moyenne coïncide avec celui du vecteur $\Delta\vec{V}$ voir figure II.**7**. Les dimensions de $\mathbf{a_m}$ sont $[a] = LT^{-1}$ et l'unité de l'accélération dans le système S.I est ms^{-2}.

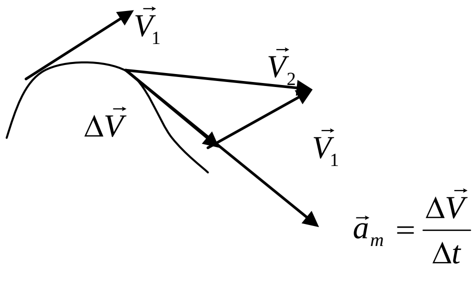


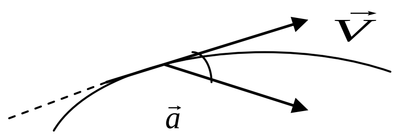
Figure II.7: Sens de l’accélération moyenne

II.1.3.3. Accélération instantanée:

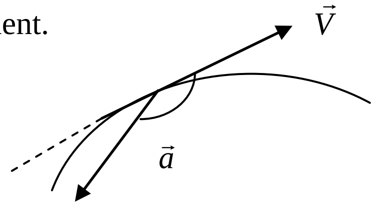
La limite de l'accélération moyenne du point matériel est appelée l’accélération instantanée ou accélération du point matériel quand $\Delta t \to 0$. $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} a_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ (2-13)

Autrement dit, le point $\mathbf{M_2}$ s'approche du point $\mathbf{M_1}$ et $\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$ caractérise la variation de la vitesse plus exactement. Donc l'accélération instantanée est égale à la dérivée du vecteur de la vitesse par rapport au temps. Selon $\vec{V} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ alors $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{d\vec{r}}{dt}) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ (2-14)

Ainsi, l'accélération est la seconde dérivée du rayon vecteur du point matériel par rapport au temps. On distingue deux types de nature du mouvement.



Mouvement accéléré $\vec{a} \bullet \vec{V} > 0$



Mouvement Décéléré $\vec{a} \bullet \vec{V} < 0$

On peut décomposer le vecteur de l'accélération en trois composantes dirigées le long des axes du référentiel. Tel que : $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$. (a_x, a_y, a_z)sont les projections du vecteur $\vec{a}$ sur les axes x,y et z. Puisque

$$\left.\begin{array}{l} \vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \\ \vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \\ \vec{a} = \dot{V}_x\vec{i} + \dot{V}_y\vec{j} + \dot{V}_z\vec{k} \\ \vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \end{cases} \quad (2\text{-}15)$$

En comparant les formules précédentes. On obtient:

$$\left\{\begin{array}{l} a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt} = \dot{V}_x = \ddot{x} \\ a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt} = \dot{V}_y = \ddot{y} \\ a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt} = \dot{V}_z = \ddot{z} \end{array}\right\} \text{ et son module est}$$

$$a(t) = \|\vec{a}\| = \left\|\frac{d\vec{V}}{dt}\right\| = \sqrt{(\frac{dV_x}{dt})^2 + (\frac{dV_y}{dt})^2 + (\frac{dV_z}{dt})^2} \quad (2\text{-}16)$$

II.1.4. Accélération normale et tangentielle

II.1.4. 1. Mouvement curviligne dans l'espace:

L'accélération $\vec{a}$ peut être représentée sous forme de la somme géométrique de l'accélération normale et de l'accélération tangentielle voir figure **II.8**.

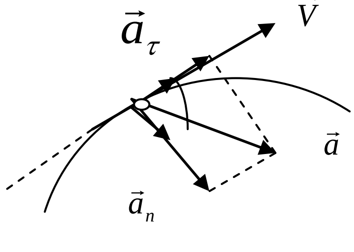


Figure II.8: Décomposition de l’accélération totale dans le plan « base de Frénet »

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \qquad (2\text{-}17)$$

$\vec{a}_\tau$ est un vecteur parallèle à la vitesse $\vec{V}$ et est tangent à la trajectoire.

$$\vec{V} = V\vec{\tau} \quad \text{et} \quad \vec{a}_\tau = a_\tau \vec{\tau} \qquad (2\text{-}18)$$

Avec $\vec{\tau}$ est un vecteur unitaire qui varie dans le temps. $\vec{a}_n$ est un vecteur perpendiculaire à la vitesse, est situé du côté concave de la trajectoire. $\vec{a}_\tau$ et $\vec{a}_n$ sont perpendiculaire.

Expressions de $\vec{a}_n$ et $\vec{a}_\tau$:

On peut considérer un cercle de rayon **ρ** pour chaque portion **ds**. $\vec{n}$ est un vecteur de la normale principale qu'il pointe vers le centre de **ds** voir figure II.9.

D'où $\vec{a}_n = a_n \vec{n}$ (2-19)

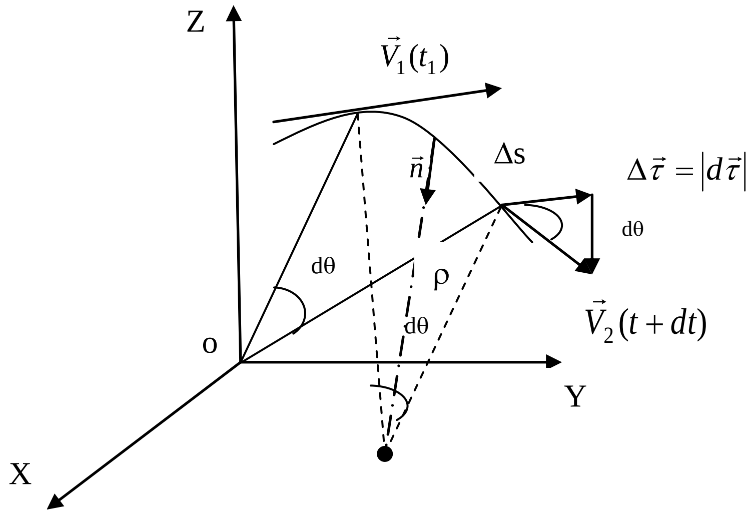


Figure II.9 : Trajectoire ds entre **M$_1$(t)** et **M$_2$(t+dt),** $\vec{n}$ est perpendiculaire à **ds** , $\vec{\tau}$ est tangent à **ds** à tout instant **t** et **ρ** est le rayon de courbure de **ds**.

$\vec{\tau}(t)$ et $\vec{\tau}(t+dt)$ sont des vecteurs unitaires des tangents à trajectoire en **M$_1$(t)** et **M$_2$(t+dt)** tel que $\Delta\vec{\tau} = d\vec{\tau}$. On définit $\vec{\tau}(t) + d\vec{\tau} = \vec{\tau}(t+dt)$. Aussi, on voit que le vecteur $d\vec{\tau}$ a la même direction et même sens que $\vec{n}$. Alors que $d\vec{\tau} = \|d\vec{\tau}\|\vec{n}$ (2-20)

D'une part dθ est l'angle qui délimite l'arc de cercle ds. Avec **ds = ρdθ** $\Rightarrow d\theta = \dfrac{ds}{\rho}$ (2-21)

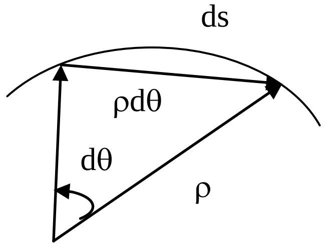
N.B: l'arc infiniment petit de la trajectoire **ds** peut être remplacé par un segment de droite infiniment court $\Delta\vec{r}$.

Et d'autre part, dθ est l'angle entre $\vec{\tau}(t)$ et $\vec{\tau}(t+dt)$.

$$d\theta = \frac{\|d\vec{\tau}\|}{\|\vec{\tau}(t)\|} \quad \text{Comme} \|\vec{\tau}(t)\| = 1, \text{ alors } \left\{ \begin{array}{l} d\theta = \|d\vec{\tau}\| \\ d\theta = \dfrac{ds}{\rho} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{ds}{\rho} = \|d\vec{\tau}\| \qquad (2\text{-}22)$$

$$\text{Avec } d\vec{\tau} = \|d\vec{\tau}\|\vec{n} = \frac{ds}{\rho}\vec{n} \Rightarrow d\vec{\tau} = \frac{ds}{\rho}\vec{n}\,. \qquad (2\text{-}23)$$

Cette expression permet de calculer le rayon de courbure ρ.



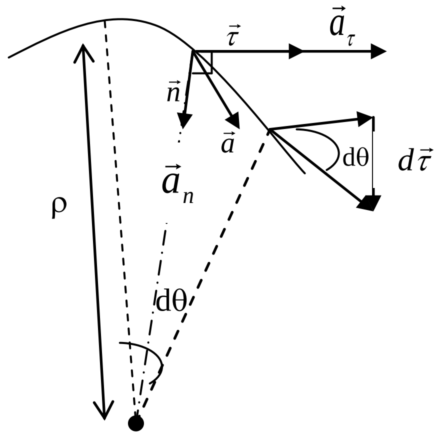
$$\frac{ds}{\rho}=\left\|d\vec{\tau}\right\| \Rightarrow \frac{1}{\rho}=\frac{\left\|d\vec{\tau}\right\|}{ds} \Rightarrow \rho=\frac{ds}{\left\|d\vec{\tau}\right\|}\frac{dt}{dt}=\frac{V}{\left\|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right\|} \Leftrightarrow \rho=\frac{V}{\left\|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right\|} \qquad (2\text{-}24)$$

On peut écrire l'expression de l'accélération comme suite

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d(v\vec{\tau})}{dt}=\frac{dv}{dt}\vec{\tau}+v\frac{d\vec{\tau}}{dt} \qquad (2\text{-}25)$$

En tenant compte de l'expression de $d\vec{\tau}$ de l'équation (2-23)

On a: $$\vec{a}=\frac{dv}{dt}\vec{\tau}+v\frac{ds}{\rho dt}\vec{n} \qquad (2\text{-}26)$$



$$\begin{cases}\vec{a}=\dfrac{dv}{dt}\vec{\tau}+\dfrac{v^2}{\rho}\vec{n}\\ \vec{a}=a_\tau\vec{\tau}+a_n\vec{n}\end{cases} \qquad (2\text{-}27)$$

On obtient $\begin{cases}a_\tau=\dfrac{dv}{dt}\\ a_n=\dfrac{v^2}{\rho}\end{cases}$ et $\vec{n}=\rho\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}=\rho\dfrac{d\vec{\tau}}{\frac{ds}{dt}dt}=\dfrac{\rho}{v}\dfrac{d\vec{\tau}}{dt}$ (2-28)

Le repère orthonormé des vecteurs unitaires $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$ est appelé repère de Frénet de base ($\vec{\tau}$, $\vec{n}$).

N.B:
a_τ ne fait varie que **le module de la vitesse** et se dirige le **long de la vitesse** $\vec{v}$ (exprime la modification de l'intensité de la vitesse sur la trajectoire).
a_n ne fait varie que **sa direction** et se dirige le long du **rayon de courbure** de la trajectoire qui exprime le changement de direction du point. On constate que si $\vec{a}_n=\vec{0}$, le mouvement est rectiligne accéléré ou non.

II.2.Etude des mouvements particuliers

II.2.1. Mouvement rectiligne:

Le mouvement rectiligne se décrit en coordonnées cartésiennes (x,y,z) dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

En choisissant un repère dont l'axe x correspond à la trajectoire du mouvement. Les vecteurs position, vitesse et accélération s'écrivent:

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i}\,; \qquad \vec{\mathrm{V}}(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{x}}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}\vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{\mathrm{a}}(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}^2}\vec{i}$$

On va étudier deux cas:

II.2.1.1. Mouvement rectiligne uniforme:

Un mouvement rectiligne est uniforme lorsque la vitesse est constante $\vec{a}_\tau = \vec{0}$ et $\vec{a}_n = \vec{0}$, par conséquent $\vec{V} = cont$. En effet, si $\vec{V}$ est constante en sens et en module $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$

- **Détermination la coordonnée x de la particule à l'instant t**

On utilise la formule de la vitesse

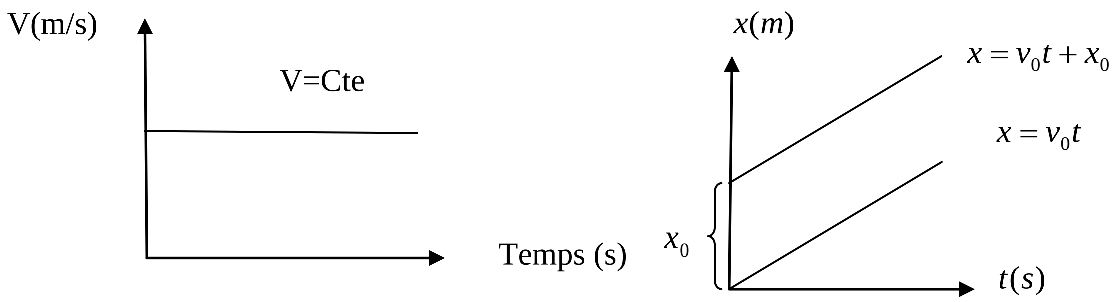
$v = \dfrac{dx}{dt} = v_0 = Cte$, d'où $dx = v_0 dt$, en intégrant $\displaystyle\int_{x_0}^{x} dx = v_0 \int_{t_0}^{t} dt \Rightarrow \mathrm{x - x_0} = v_0(t - t_0)$

Où x_0 désigne la valeur de x au temps t_0. A l'instant $t_0 = 0$ s, $x = x_0$, alors que $x = v_0 t + x_0$

- **Résumé : les lois du mouvement uniforme sont**

$$\left.\begin{aligned} a &= 0 \\ V &= Cte \\ x &= V_0 t + x_0 \end{aligned}\right\} \tag{2-29}$$

- **Traçage des graphes pour un mouvement uniforme:**



a) Graphe de la vitesse **b) Graphe du déplacement**

Figure II.1: Graphes pour un mouvement uniforme

II.2.1.2. Mouvement rectiligne uniformément varie (accéléré ou retardé):

Dans ce cas, on a : $\vec{a}_n = \vec{0}$ et $\vec{a}_\tau = cte$

Détermination la vitesse et le déplacement de la particule à l'instant t : lorsque l'accélération est constante. D'où $a = \dfrac{dv}{dt} \Rightarrow \mathrm{dv} = \mathrm{adt} \Rightarrow \int_{v_0}^{v} \mathrm{dv} = a\int_{t_0}^{t} dt \Rightarrow \mathrm{v - v_0} = a(t - t_0)$

A $t_0 = 0$ on $v = v_0$ et $x = x_0$, on obtient : $v(t) = at + v_0$

Déplacement x(t):

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \mathrm{dx} = \mathrm{vdt} \Rightarrow \int_{x_0}^{x} \mathrm{dx} = \int_{t_0}^{t} v dt \Rightarrow \mathrm{x - x_0} = \int_{t_0}^{t} (at + v_0)dt = \int_{t_0}^{t} atdt + v_0\int_{t_0}^{t} dt = \frac{at^2}{2} + v_0 t \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{x(t)} = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

Où v_0 et x_0 sont des constantes déterminées par les conditions initiales.

Relation entre la vitesse et le déplacement:

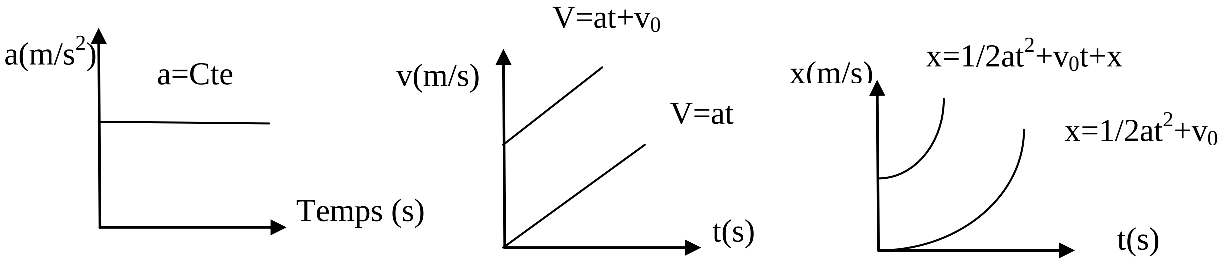
$$dv = adt \Rightarrow \mathrm{vdv} = \mathrm{avdt} = \mathrm{a}\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} dt = adx$$

$$vdv = adx \Rightarrow \int_{v_0}^{v} \mathrm{vdv} = a\int_{x_0}^{x} dx \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\mathrm{v}^2}{2}\right|_{v_0}^{v} = a(x - x_0) \Leftrightarrow \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = a(x - x_0) \Rightarrow \mathrm{v}^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

Résumé: les lois du mouvement uniformément varie sont

$$\left\| \begin{array}{l} a = Cte \\ v = at + v_0 \\ x = \dfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \\ v^2 - v_0^2 = 2a(x - x \end{array} \right| \qquad (2\text{-}30)$$

Traçage des graphes du mouvement uniformément varie:

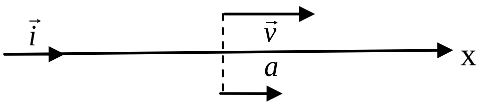


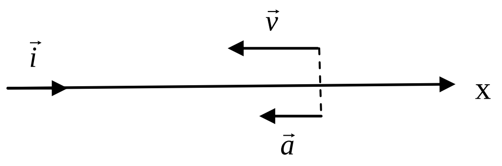
a) Graphe de l'accélération b) Graphe de la vitesse c) Graphe du déplacement

Figure II.2 : Graphes du mouvement uniformément varie

Représentation vectorielle de la vitesse et l'accélération dans un mouvement rectiligne:

a. Mouvement accéléré **(V.a > 0)**





b. Mouvement décéléré ou retardé **(V.a < 0)**

Figure II.3 : Représentation vectorielle des vecteurs du mouvement rectiligne

Règle:
Si $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont de même signe, le mouvement est accéléré.
S'ils sont de signe contraire, le mouvement est retardé.

- **Application:**

La trajectoire d'un mobile est donnée par $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$, cherchez la vitesse à l'instant **t** par la définition de la dérivée d'une fonction polynôme $f^{-}(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$

Solution : on a : $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt^2)}{\Delta t}$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\frac{1}{2}gt^2 + gt\Delta t + \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt^2)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}(gt + \frac{1}{2}g\Delta t) \Rightarrow v(t) = gt$$

Donc $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}gt^2) = gt$

II.2.2. Mouvement circulaire

Mouvement circulaire est un mouvement particulier du mouvement de rotation. *"Pourquoi sommes-nous intéressé par les mouvements de rotations?* Parce que notre l'entourage (univers) est contient beaucoup des mouvements de rotations.

- **Premier exemple: L'objet infiniment grand (planètes)**

La terre est en rotation autour du soleil. Elle tourne autour d'elle-même. La lune tourne autour de la terre et autour d'elle-même. En quittant l'infiniment grand pour passer à l'infiniment petit.

- **Deuxième exemple: L'objet infiniment petit (atomes)**

Les électrons effectuent des rotations autour des noyaux atomiques, ils ont aussi une rotation propre appelée ***spin***. Nous allons en étudier un cas simple de rotation qui est le mouvement circulaire.

II.2.2.1.Description du mouvement circulaire

Un mobile M décrit un mouvement circulaire de rayon **R** autour d'un point fixe **o** dans le plan **xoy**. Les axes **ox** et **oy** sont munis des vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$. θ est l'angle entre $o\vec{x}$ et $o\vec{M}$ c à d $\theta \equiv (o\vec{x}, o\vec{M})$ est une fonction du temps voir figure II.4.

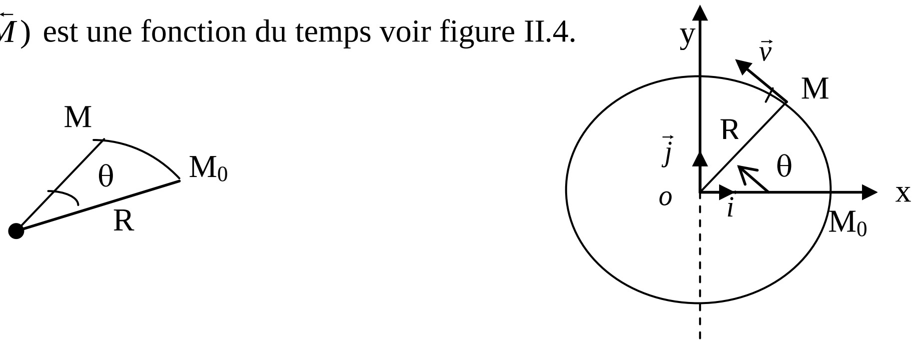


Figure II.4: Mouvement circulaire dans le plan **xoy** autour d'un point fixe (**o**).

Remarque:

La vitesse $\vec{v}$ tangente au cercle est perpendiculaire au rayon **R**.

La distance sur la circonférence entre $\mathbf{M_0}$ et **M** est $S = M_0\widehat{M} = R\theta \Rightarrow v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(R\theta)}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$

et la quantité $w = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ est appelée vitesse angulaire (w est en rad/s).

D'où $v = Rw$ (2-31)

II.2.2.2. Relation vectorielle entre w, v et R dans le mouvement circulaire

La vitesse angulaire **w** est perpendiculaire au plan du mouvement dans le sens d'avance d'une vis à droite tournant dans la même sens que celui dans lequel **M** se déplace (Figure II.5).

Nous voyons que $R = r\sin\gamma$ et que $\vec{w} = \frac{d\theta}{dt}\vec{k}$ et $v = Rw = rw\sin\gamma$, on obtient la relation vectorielle suivante : $\vec{v} = \vec{w} \wedge \vec{r}$ (2-32) (r et γ sont constants).

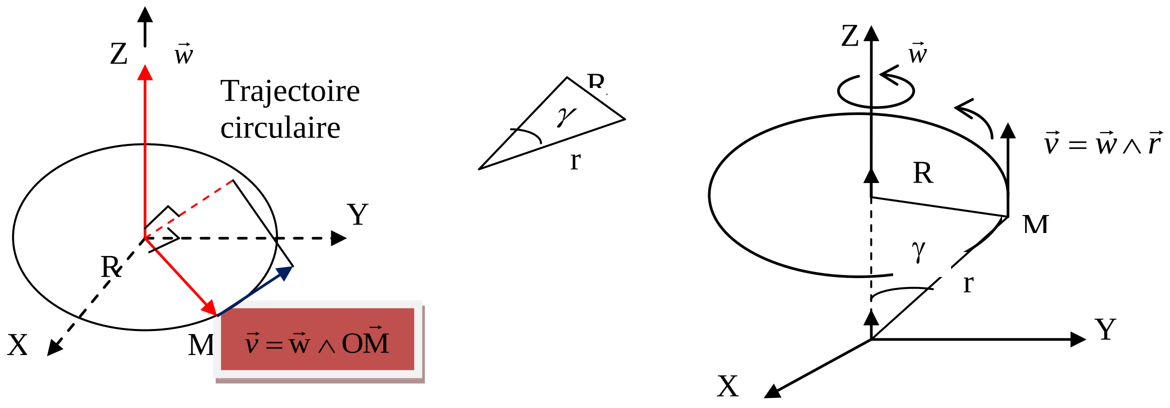


Figure II.5: Relation vectorielle entre w, v et R

Cas particulier

Si **w = Cte**, le mouvement circulaire est uniforme ou il est périodique. En revanche, le mouvement de la terre autour du soleil n'est ni circulaire, ni uniforme mais périodique. C'est le mouvement qui se répète à chaque fois que la terre achève une orbite. Alors, la période **T** est le temps nécessaire pour achever un cycle et aussi la fréquence **ν** est le nombre de cycle par seconde. D'où $T = \dfrac{1}{\nu}$

- **Détermination la vitesse angulaire w**

Mouvement uniforme: si w = cte et $w = \dfrac{d\theta}{dt} = \theta^{\bullet}$, on intègre

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0=0}^{t} wdt = w\int_0^t dt = wt \Rightarrow \theta - \theta_0 = wt \Rightarrow \theta = \mathrm{wt} + \theta_0$$

A $t_0 = 0$, $\theta_0 = 0$ on obtient θ = wt ⇒ w = θ/t pour un tour complet **t =T** et **θ = 2π**, d'où il résulte $w = \dfrac{\theta}{T} = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$

Résumé: les lois du mouvement circulaire uniforme sont $\begin{cases} w = Cte = 2\pi\nu \\ \theta = wt + \theta_0 \end{cases}$

- **Détermination l'accélération angulaire** α ou $\ddot{\theta}$ **:**
  - ☆ **Mouvement uniformément varie :**

Quand la vitesse angulaire d'un point **M** varie avec le temps **w (t)**, $\alpha = \ddot{\theta} = \dfrac{dw}{dt}$, puisque le mouvement circulaire est dans le plan « mouvement planaire », la direction de **w** reste la même. Par conséquent,

$$\ddot{\theta} = \frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d^2\theta}{dt^2} = Cte \qquad (2\text{-}33)$$

On intègre $\int_{w_0}^{w} dw = \ddot{\theta}\int_0^t dt \Rightarrow w - w_0 = \ddot{\theta}t \Rightarrow \mathrm{w} = \ddot{\theta}t + w_0$ (2-34) , où w_0 est la valeur de **w** à l'instant t_0.

- **Détermination le la position angulaire à chaque instant t**

$\dfrac{d\theta}{dt} = \theta^{\bullet\bullet}t + w_0$; en intégrant de nouveau

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t (\theta^{\bullet\bullet}t + w_0)\mathrm{d}t = \theta^{\bullet\bullet}\int_0^t tdt + w_0\int_0^t dt = \ddot{\theta}\frac{t^2}{2} + w_0 t$$

$$\theta - \theta_0 = \ddot{\theta}\frac{t^2}{2} + w_0 t \Leftrightarrow \theta = \frac{1}{2}\theta^{\bullet\bullet}t^2 + w_0 t + \theta_0 \qquad (2\text{-}35)$$

Cas particuliers des mouvements circulaires dans le plan de Frénnet

a) Mouvement uniformément varie

En combinant les équations suivantes: $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$, v = wR et $\theta^{\bullet\bullet} = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

Nous trouvons que l'accélération tangentielle (**transversale**) a pour valeur

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(wR) = R\frac{dw}{dt} = R\frac{d^2\theta}{dt^2} = R\theta^{\bullet\bullet} \qquad (2\text{-}36)$$

et que l'accélération normale (**centripète**) vaut $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(wR)^2}{R} = w^2R$ (2-37)

b) Mouvement uniforme: w = Cte ⇒ v = wR = Cte et $\frac{dw}{dt} = \ddot{\theta} = 0$ d'où $a_\tau = R\ddot{\theta} = 0$

On dit que l'accélération angulaire est nulle, il n'y a pas d'accélération tangentielle mais il subsiste une accélération normale ou centripète dû au changement de direction de la vitesse.

Si $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ Alors que

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{w} \wedge \vec{r}) = \vec{w} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{w} \wedge \vec{v} \qquad (2\text{-}38)$$
$$et \quad \vec{v} = \vec{w} \wedge \vec{r}$$

On obtient l'accélération centripète est $\vec{a} = \vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{r})$ (2-39)

Commentaire : Nous voyons que le vecteur $\vec{a} = \vec{w} \wedge \vec{v}$ est dirigé vers le centre du cercle et que sa grandeur est $\|\vec{a}\| = \|\vec{w} \wedge \vec{v}\| = wv = w^2R$ puisque $\vec{w} \perp$ à $\vec{v}$ voir figure II.6.

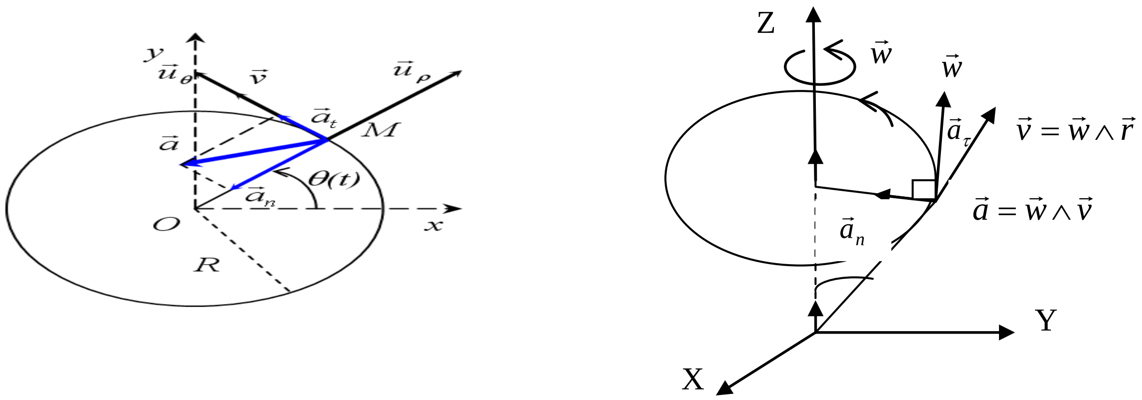


Figure II.6 : Direction de l'accélération centripète

II.2.3. Mouvement circulaire dans le repère polaire [r(t), θ(t)]

Pour décrire un mouvement circulaire dans le repère polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$. $\vec{u}_r$ *et* $\vec{u}_\theta$ sont des vecteurs unitaires qui se sont pas fixe comme $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Ainsi ils suivent le mobile **M** dans son mouvement voir figure II.7.

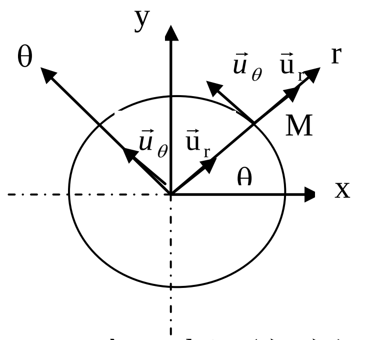


Figure II.7 : Repère polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$

II.2.4. Propriétés du mouvement

a) Position du point M : pour un mouvement circulaire de rayon constate **R** « **r = R** » **M** est donnée par $\vec{r} = r\vec{u}_r$

b) Expressions des vecteurs unitaires $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$

$$\vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \qquad (2\text{-}40)$$

$\vec{u}_r \perp$ à $\vec{u}_\theta$, autrement dit, on fait une rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour des y voir figure II.8. En mathématique on change θ par $(\theta + \frac{\pi}{2})$, $\vec{u}_r$ devient $\vec{u}_\theta$ qui s'écrit :

$$\vec{u}_\theta = \cos(\theta + \frac{\pi}{2})\,\vec{i} + \sin(\theta + \frac{\pi}{2})\,\vec{j}$$

Avec $\left\{\begin{array}{l} \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin\theta \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos\theta \end{array}\right\}$

$$\vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \qquad (2\text{-}41)$$

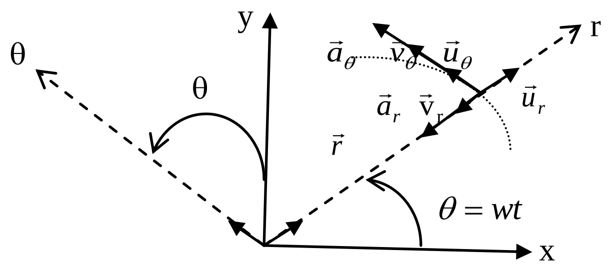


Figure II.8 : Composantes de $\vec{v}$ et $\vec{a}$

c. Expressions des vitesses unitaires $\frac{d\vec{u}_r}{dt}$ et $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\,\vec{i} + \frac{d\theta}{dt}\cos\theta\,\vec{j} \quad , \quad \text{tel que} \quad w = \frac{d\theta}{dt} \quad \text{, on aura}$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = w(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}) = w\vec{u}_\theta \;\Leftrightarrow\; \frac{d\vec{u}_r}{dt} = w\vec{u}_\theta \qquad (2\text{-}42)$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\cos\theta\,\vec{i} - \frac{d\theta}{dt}\sin\theta\,\vec{j} = -w(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) = -w\vec{u}_r \;\Leftrightarrow\; \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -w\vec{u}_r \qquad (2\text{-}43)$$

Donc les expressions sont $\left|\begin{array}{l} \frac{d\vec{u}_r}{dt} = w\vec{u}_\theta \\ \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -w\vec{u}_r \end{array}\right\rangle \qquad (2\text{-}44)$

d) Vitesse $\vec{V}$ du M à l'instant t : on a **r = R** = constante

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{u}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} = r\frac{d\vec{u}_r}{dt} \qquad (2\text{-}45)$$

D'après l'équation (2-42), on obtient $\vec{V}$ qui coïncide avec $\vec{u}_\theta$: $\vec{V} = rw\vec{u}_\theta$ (2-46)

e) Accélération $\vec{a}$ du mobile à l'instant t :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(rw\vec{u}_\theta) = \frac{dr}{dt}w\vec{u}_\theta + r\frac{dw}{dt}\vec{u}_\theta + rw\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \Rightarrow \vec{a} = r\frac{dw}{dt}\vec{u}_\theta - rw^2\vec{u}_r \qquad (2\text{-}47)$$

Ce qui concerne l'expression de l'accélération $\vec{a} = a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n}$ On peut trouver :

L'accélération tangentielle : $a_\tau = r\dfrac{dw}{dt}$ et $\vec{\tau} = \vec{u}_\theta$

L'accélération normale : $a_n = rw^2$ et $\vec{n} = -\vec{u}_r$

II.2.5. Mouvement rectiligne sinusoïdal

On peut présenter le mouvement sinusoïdal de manière la plus simple par un système mécanique composé d'une masse **m** attachée à un ressort de raideur **k**.

Soit une masse **m** sur une table horizontale sans frottement dirigée suivant l'axe des **x**. La masse **m** est accrochée à une des extrémités d'un ressort de longueur **l** au repos et l'autre l'extrémité est fixée en un point **o** voir figure II.9**.**

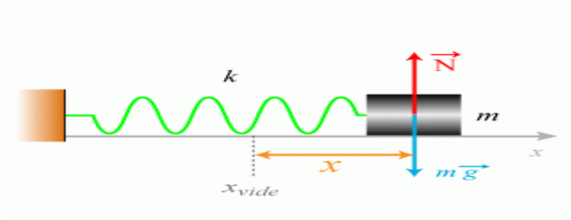


Figure II.9 : Système mécanique d'une masse et un ressort

b) Mode opératoire:

On déplace **m** le long de l'axe **ox**, puis on la lâche. On remarque que **m** va osciller (vibrer) autour de sa position d'équilibre. On voit que le ressort à une longueur **(l+x)**, une force de rappel $\vec{F}_R$ tend à ramener **m** à sa position d'équilibre. $\vec{F}_R$ est proportionnelle à l'allongement **x** ou **Δl** . $\vec{F}_R$ est donnée par $\vec{F}_R = -Kx\vec{i}$ (2-48)

K est une constante de rappel ou constante élastique et $\vec{i}$ est le vecteur unitaire dans la direction des **x** positifs.

On applique la loi fondamentale de la dynamique $\vec{F} = \vec{F}_R = m\vec{a}$

$$-Kx\vec{i} = m\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kxi \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0 \qquad (2\text{-}49)$$

C'est une équation différentielle du second ordre homogène.

N.B: Le système mécanique oscillant est un oscillateur harmonique qui correspond un mouvement sinusoïdal rectiligne

c) Résolution de l'équation différentielle :

Cherchons la solution de l'équation du second ordre, à coefficients constants voir chapitre 01, avec **A = 0**, **B = K/m** et **R(x) = 0**. La solution globale est égale la solution homogène.

Sachant que à **t = 0**, $x = x_0$ et $\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = v_0 = 0$. Les solutions de la forme $e^{\alpha x} \Rightarrow$ l'équation caractéristique est $e^{\alpha x}\left[\alpha^2 + \frac{K}{m}\right] = 0$, d'où $\alpha^2 = -\frac{K}{m} = i^2\frac{K}{m} \Rightarrow \alpha = \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}}}$

Donc la solution est $x(t) = c_1 e^{i\sqrt{\frac{K}{m}}t} + c_2 e^{-i\sqrt{\frac{K}{m}}t}$ où c_1 et c_2 sont des constantes qu'on déterminera à l'aide aux conditions initiales précédentes. On not que

$$\left\{\begin{array}{l} e^{-i\sqrt{\frac{K}{m}}t} = \cos(\sqrt{\frac{K}{m}})\ \mathrm{t} + \mathrm{i}\sin(\sqrt{\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}}})\ \mathrm{t} \\ e^{i\sqrt{\frac{K}{m}}t} = \cos(\sqrt{\frac{K}{m}})\ \mathrm{t} - \mathrm{i}\sin(\sqrt{\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}}})\ \mathrm{t} \end{array}\right\} \Rightarrow \cos(\sqrt{\frac{K}{m}})\ \mathrm{t} = \frac{e^{i\sqrt{\frac{K}{m}}t} + e^{-i\sqrt{\frac{K}{m}}t}}{2}$$

A $\mathbf{t_0 = 0}$, $\mathbf{x = x_0 = c_1 + c_2}$, d'une part $\frac{dx}{dt} = i\sqrt{\frac{K}{m}}\,\mathrm{c}_1 e^{i\sqrt{\frac{K}{m}}t} - i\sqrt{\frac{K}{m}}\,\mathrm{c}_2 e^{-i\sqrt{\frac{K}{m}}t}$ et d'autre part

$\frac{dx}{dt} = 0 = i\sqrt{\frac{K}{m}}\,\mathrm{c}_1 - i\sqrt{\frac{K}{m}}\,\mathrm{c}_2 = 0 \Rightarrow \mathrm{c}_1 = c_2 \Rightarrow$ $\mathbf{x_0 = c_1 + c_1 = 2\,c_1} \Rightarrow c_1 = \frac{x_0}{2} = c_2$ Alors que

$$x(t) = \frac{x_0}{2}(e^{i\sqrt{\frac{K}{m}}t} + e^{-i\sqrt{\frac{K}{m}}t}) = \mathrm{c}_1\cos(\sqrt{\frac{K}{m}}t) - \mathrm{ic}_1\sin(\sqrt{\frac{K}{m}}t) + \mathrm{c}_1\cos(\sqrt{\frac{K}{m}}t) + i\mathrm{c}_1\sin(\sqrt{\frac{K}{m}}t) = 2\mathrm{c}_1\cos(\sqrt{\frac{K}{m}}t)$$

II.2.5.1.Propriétés du mouvement :

a) Position x (t) : $x(t) = \mathrm{x}_0\cos(\sqrt{\frac{K}{m}}t)$ (2-50)

x_0 est l'amplitude de ce mouvement ou la plus grande distance du point d'équilibre atteinte par la masse **m**. Le mouvement sinusoïdal est périodique, autrement dit, il se répète identique dans le temps qui est désigné par **T**.

b) Période T:

A **t = 0**, $\mathbf{x(0) = x_0}$ et à **t = T**, $\mathbf{x(T) = x_0}$

$$x(T) = \mathrm{x}_0\cos(\sqrt{\frac{K}{m}}T) = x_0 \Rightarrow \cos(\sqrt{\frac{K}{m}})T = 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{K}{m}}T = 2\pi \Leftrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \qquad (2\text{-}51)$$

c) Pulsation propre w : $w = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 2\pi\upsilon$

d) Fréquence d'oscillation f : $f = \frac{1}{T} = \upsilon = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$

En résumé : les lois du mouvement sinusoïdal sont

$x(t) = x_0 \cos(wt)$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ avec $w = \sqrt{\frac{K}{m}}$ et $f = \frac{1}{T} = \upsilon = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$

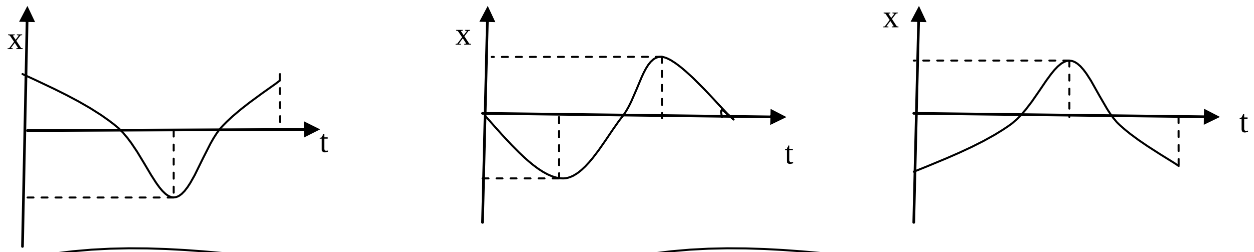
On peut écrire de façon générale :

$$\left.\begin{aligned} x &= x_m \cos(wt+\phi) \\ V_x &= \frac{dx}{dt} = x^{\bullet} = -x_m w \sin(wt+\phi) \\ a_x &= \frac{dV_x}{dt} = x^{\bullet\bullet} = -x_m w^2 \cos(wt+\phi) = -w^2 x \end{aligned}\right\}$$

ϕ : phase initiale « déphasage », w : pulsation

x_m : abscisse maximale du point matériel (amplitude des oscillations).

e) Les graphes du mouvement rectiligne sinusoïdal simple :



N.B : L'utilisation de l'oscillateur harmonique « pendule » pour mesurer du temps. Comme le principe d'une montre à quartz actuellement est l'exploitation des oscillations harmoniques d'un cristal de quartz sous l'effet d'un champ électrique oscillant.

II.2.6. Mouvement d'un projectile

On choisit un plan **xoy** défini par $\mathbf{v_0}$ et **g**.
Avec **g** l'accélération terrestre de la pesanteur
L'axe des **y** étant orienté vers le haut de sorte que :

$$\vec{g} = -g\vec{j} \qquad (2\text{-}52)$$

Ainsi que l'origine **o** coïncide avec $\mathbf{r_0}$ **($\mathbf{r_0 = 0}$)**
« Voir figure II.10 ».

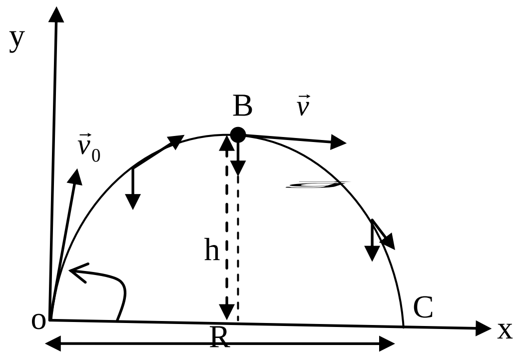


Figure II.10 : Trajectoire d'un projectile dans l'espace

II.2.6.1. Propriétés du mouvement

a) Vitesse initiale $\mathbf{v_O}$ au point O : on a $\vec{v}_0 = \vec{v}_{ox} + \vec{v}_{oy} = v_{ox}\vec{i} + v_{oy}\vec{j}$, $\mathbf{r_0 = 0}$ avec

$$\boxed{\left.\begin{aligned} v_{ox} &= v_0 \cos\theta \\ v_{oy} &= v_0 \sin\theta \end{aligned}\right) \Leftrightarrow \vec{v}_0 = v_0\cos\theta\,\vec{i} + v_0\sin\theta\,\vec{j}} \qquad (2\text{-}53)$$

b) Vitesse v au point A :

$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$ avec $\mathbf{v_y = gt + v_0}$ (mouvement uniformément varie)

$$\vec{v} = v_{ox}\vec{i} - gt\vec{j} + v_{oy}\vec{j} = v_{ox}\vec{i} + (v_{oy} - gt)\,\vec{j} \qquad (2\text{-}54)$$

On tire deux composantes de la vitesse $\begin{cases} v_x = v_{ox} = constate \\ v_y = v_{oy} - gt \end{cases}$ (2-55)

c) Coordonnées cartésiennes (x, y) de la particule en fonction du temps au point A :

On a d'une part $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et d'autre part $r = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + r_0$, sachant que : à **t = 0, r₀ = 0**

On aura $r = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \Leftrightarrow \vec{r} = -\frac{1}{2}gt^2\vec{j} + (v_{0x}\vec{i} + v_{oy}\vec{j})t \Leftrightarrow \vec{r} = v_{0x}t\,\vec{i} + (v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2)\,\vec{j}$ (2-56)

On obtient les coordonnées suivantes : $\boxed{\begin{aligned} x &= v_{ox}t \\ y &= v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}}$ (2-57)

d) Temps t_m au point B (sommet du projectile) :

Pour cette position on a : $v_y = 0$, $v = v_x$ d'où $v_y = 0$, $v = v_x$

$$v_y = v_{oy} - gt = 0 \Rightarrow v_{oy} = gt \Rightarrow t_m = \frac{v_{oy}}{g} = \frac{v_0 \sin\theta}{g} \qquad (2\text{-}58)$$

Tel que : $\mathbf{t_m}$ est le temps nécessaire au projectile pour atteindre le point le plus haut.

e) Hauteur maximum h = y_m :

$$h = y_m = v_0 \sin\theta\,(\frac{v_0 \sin\theta}{g}) - \frac{1}{2}g(\frac{v_0 \sin\theta}{g})^2 = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g} - \frac{1}{2}g(\frac{v_0 \sin\theta}{g})^2 \Rightarrow h = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} = y_m$$

f) Portée R (OC) au point C :

Elle est la distance horizontale franchie.

$$x = R = v_{ox}t \quad \text{avec } t_{vol} = 2t_m \Rightarrow t_{vol} = \frac{2\,v_0 \sin\theta}{g} \qquad (2\text{-}59)$$

$$x = R = 2v_{ox}\frac{v_0 \sin\theta}{g} = 2v_0\cos\theta\frac{v_0 \sin\theta}{g} = \frac{2v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g} \qquad (2\text{-}60)$$

Donc le temps vol $\mathbf{t_{vol}}$ est double de celui donné pour l'hauteur maximum.

On a: sin(2θ) = 2sinθ cosθ , donc $x = R = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$ (2-61)

g) Equation de la trajectoire y = f(x) :

En éliminant le temps $t = \frac{x}{v_{ox}} = \frac{x}{v_0\cos\theta}$, on aura

$$y = v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0\sin\theta(\frac{x}{v_0\cos\theta}) - \frac{1}{2}g(\frac{x}{v_0\cos\theta})^2 = x\,tg\theta - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\theta} \Rightarrow$$

$$y = -\frac{g}{2v_à^2\cos^2\theta}x^2 + x\,tg\theta$$

II.2.7. Mouvement helicoidal

Ce mouvement est composé d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation. Sa trajectoire est une hélice enroulée sur un cylindre de base circulaire de rayon **R** et d'axe de rotation **oz** voir figure II.11. Chaque point M de l'hélice est repéré en coordonnées cylindriques (ρ,θ, z) par

$$\left| \begin{array}{l} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = h\theta \end{array} \right\rangle \qquad (2\text{-}62)$$

θ : angle entre deux vecteurs $(\vec{ox}, \vec{om})$

R : rayon de cylindre (ρ=R), Le pas réduit de l'hélice est **h**

Le pas de l'hélice **P** est la distance entre deux intersections successives de l'hélice avec le même génératrice du cylindre.

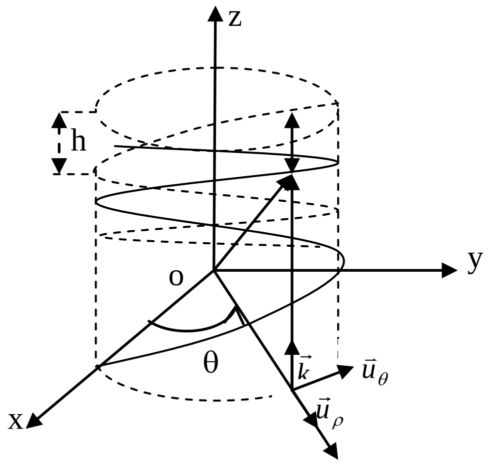


Figure II.11 : Géométrie du mouvement hélicoïdal

II.2.7.1. Propriétés du mouvement

a) Calcul le pas réduit de l'hélice h :

M fait un tour autour de **oz** vers **M`**. La cote $z = z_{M'} - z_M = h\theta_{M'} - h\theta_M = h(\theta_{M'} - \theta_M) = 2\pi h = P$

Alors que $h = \dfrac{P}{2\pi} = Cte$ (2-63)

b) Vecteur de position oM :

On a : $\vec{oM} = \vec{om} + \vec{mM} = R\vec{u}_\rho + z\vec{k}$ d'où $\vec{oM} = R\vec{u}_\rho + h\theta\vec{k}$ (2-64)

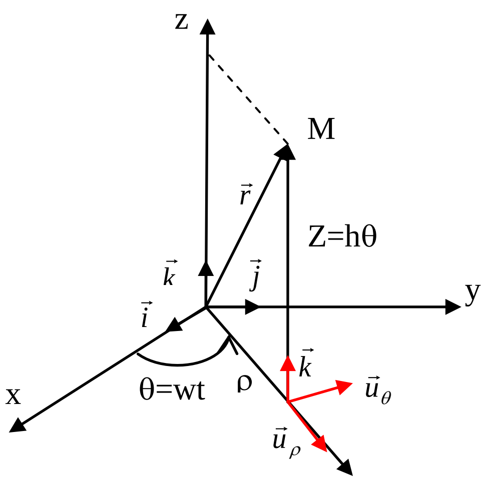
c) Module de oM :

$$\left\|\vec{oM}\right\| = r = \sqrt{R^2 + (h\theta)^2} \qquad (2\text{-}65)$$

d) Vecteur de la vitesse:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{oM}}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + h\frac{d\theta}{dt}\vec{k} \qquad (2\text{-}66)$$

Sachant que $\left[\begin{array}{l} \dfrac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta = w\vec{u}_\theta \\ \dfrac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dfrac{d\theta}{dt}\vec{u}_\rho = -w\vec{u}_\rho \\ \dfrac{dR}{dt} = 0 \end{array} \right)$



e) Module de V :

$$\left\|\vec{V}\right\| = V = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)\sqrt{R^2 + h^2} \qquad (2\text{-}67)$$

f) Vecteur de l'accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = R\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta - R(\frac{d\theta}{dt})^2\vec{u}_\rho + h\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{k} \Leftrightarrow \vec{a} = -R(\frac{d\theta}{dt})^2\vec{u}_\rho + \frac{d^2\theta}{dt^2}(R\vec{u}_\theta + h\vec{k}) \quad (2\text{-}68)$$

f) Module de a :

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{R^2(\frac{d\theta}{dt})^4 + (R^2 + h^2)(\frac{d^2\theta}{dt^2})^2} \quad (2\text{-}69)$$

II.3. Etude de mouvement dans différents systèmes de repères

En mécanique, on distingue trois systèmes de repères « cartésien, cylindrique et sphérique ». On utilisera les coordonnées cartésiennes pour étudier le mouvement quelconque d'un mobile dans l'espace. Ainsi, on utilisera les coordonnées cylindriques pour étudier le mouvement de M s'effectue **autour d'un axe** « axe de symétrie ». En fin, on utilisera les coordonnées sphériques pour étudier le mouvement de M s'effectue **autour d'un point O.**

II.3.1. Repère cartésien et coordonnées cartésiennes :

L'espace est rapporté à trois axes orthogonaux Ox, Oy et Oz. Ce système d'axes muni des trois vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ou $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ forment ce qu'on appelle un repère cartésien d'origine O (figure II.12).

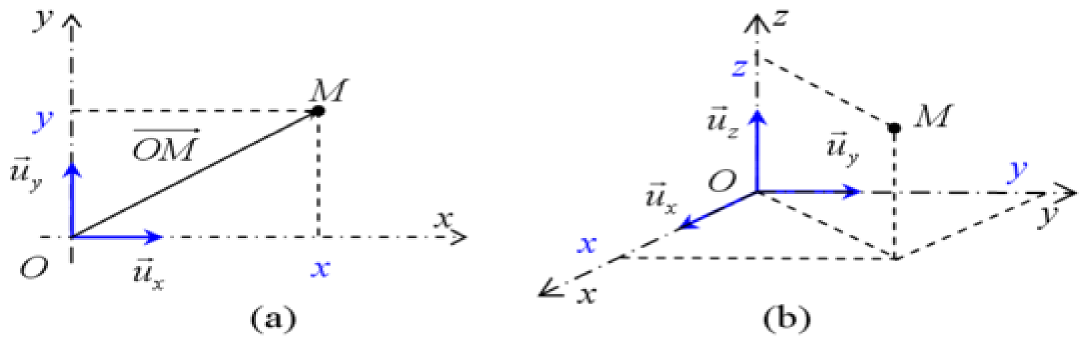


Figure II.12 : Repère cartésien de base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ avec les coordonnées cartésiennes

II.3.1.1.Propriétés de repère cartésien :

a) Vecteur de déplacement du point M est

$\vec{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ Tels que $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont fixe.

b) Vecteur de déplacement élémentaire : $d\vec{r}$ s'écrira alors

$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

Les trois axes de repère cartésien jouent des rôles symétriques, aucun d'eux n'est pas privilégié par rapport aux autres.
Les coordonnées cartésiennes sont les plus usuelles en mécanique classique.

Pour couvrir tout l'espace : $\begin{Vmatrix} x \in]-\infty,+\infty[\\ y \in]-\infty,+\infty[\\ z \in]-\infty,+\infty[\end{Vmatrix}$

II.3.1.2. Repère cylindrique :

La problématique en physique fait intervenir un axe privilégié, comme par exemple la rotation autour d'axe. Pour éviter ce problème, l'axe privilégie sera toujours Oz en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ ou $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ voir figure II.13.

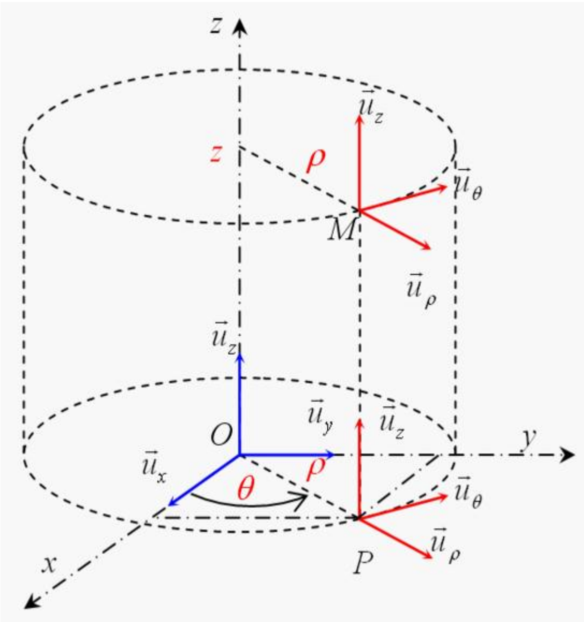


Figure II.13: Repère de coordonnées cylindriques (ρ,θ,z) et la base associée $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$

Sachant que :

ρ est la distance à l'axe Oz, **ρ = Om** avec **m** est la projection du point **M** sur le plan **xoy.**
Autrement dit, **ρ** est la projection de $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ dans le plan xoy.

θ ≡ (ox, om) est l'angle polaire.
Et **z** est appelée la cote « c'est la même qu'en cordonnées cartésiennes ».
$(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z = \vec{k})$ sont des vecteurs unitaires du repère cylindrique.
$(\vec{u}_\rho)$ est le vecteur unitaire de $\vec{om}$.
$(\vec{u}_\theta)$ se déduit de $(\vec{u}_\rho)$ par une rotation d'angle π/2 autour de $\vec{k}$ $((\vec{u}_\rho \perp \vec{u}_\theta)$.

Commentaire : Le repère $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est fixe. Par contre, le repère $(o,\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta,\vec{k})$ suit le point **M** dans son mouvement.

II.3.1.3. Propriétés de repère cylindrique :

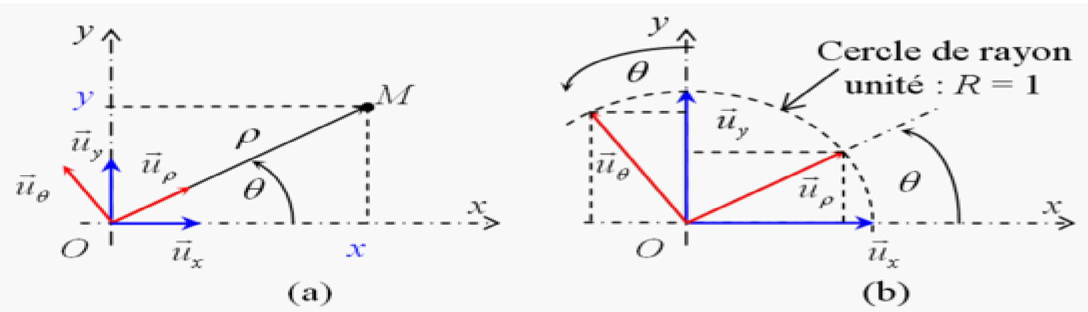
a) Vecteurs position du mobile M: il s'exprime en fonction des coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) et les vecteurs unitaires cylindriques comme suit : $\vec{r} = o\vec{M} = o\vec{m} + m\vec{M} = \rho\vec{u}_\upsilon + z\vec{k}$

b) Relation entre les coordonnées cartésiennes (x, y, z) et cylindriques (ρ, θ, z) :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \tag{2-70}$$

c) Relation entre les vecteurs unitaires cylindriques $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta,\vec{k})$ **et cartésiens** $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases} \tag{2-71}$$



a) Repère dans un plan b) Repère dans l'espace

d) Vecteur du déplacement élémentaire : $d\vec{r}$ s'écrira alors

$$d\vec{r} = \rho d\vec{u}_\rho + d\rho\vec{u}_\rho + dz\vec{k} \tag{2-72}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} = \vec{u}_\theta \\ \dfrac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j} = -(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) = -\vec{u}_\rho \end{cases} \Leftrightarrow \begin{rcases} d\vec{u}_\rho = d\theta\,\vec{u}_\theta \\ d\vec{u}_\theta = -d\theta\,\vec{u}_\rho \end{rcases} \tag{2-73}$$

En remplaçant (2-73) dans (2-72), on aura : $d\vec{r} = d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\,\vec{u}_\theta + dz\vec{k}$ (2-74)

N.B : Pour couvrir tout l'espace on a : $\left\| \begin{array}{l} \rho \in [0 \;,\; +\infty[\\ \theta \in [0 \;,\; 2\pi] \\ z \in]-\infty, +\infty[\end{array} \right.$

II.3.1.4.Repère sphérique:

Une grandeur physique ne dépende que la distance à un point donné qui peut être considérer comme l'origine d'un nouveau système de coordonnées sphériques **(r,θ, φ)** voir figure II.14.

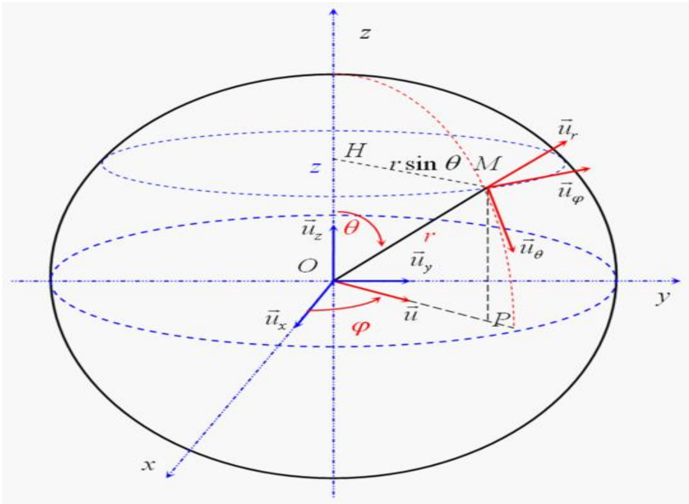


Figure II.14 : Repère de coordonnées sphériques**(r,θ, φ)** et la base associée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$

Sachant que :

(r) est la distance du point **M** à l'origine **O** du repère.
L'angle **θ ≈ (oz, oM)** est appelé colatitude [la latitude étant **(π/2 - θ)**].
L'angle **φ ≈ (ox, om)** est appelé azimut (longitude), m étant la projection de **M** sur le plan **xoy**.
On peut définir les vecteurs unitaires de repère sphérique de manière suivante :
$(\vec{u}_r)$ est un vecteur porté par $o\vec{M}$: $[o\vec{M} = \|o\vec{M}\|\vec{u}_r]$

$(\vec{u}_\theta)$ est un vecteur dans le plan $(oz, o\vec{M})$ perpendiculaire à $(\vec{u}_r)$.
$(\vec{u}_\varphi)$ est un vecteur forme le trièdre direct $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$. Avec $\vec{u}_\varphi = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta$ (2-75)
D'où $(\vec{u}_\varphi)$ est perpendiculaire au plan formé par $(\vec{u}_r)$ et $(\vec{u}_\theta)$. $(\vec{u}_\varphi)$ est dirigé dans le sens des φ croissants.

II.3.1.4.1. Propriétés de repère sphérique:

a) vecteur position de point M : $\vec{r}$ s'écrit : $\vec{r} = r\vec{u}_r$

b) Relation entre les coordonnées cartésiennes (x, y, z) et sphériques (r,θ, φ):

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad (2\text{-}76)$$

c) Relation entre les vecteurs unitaires sphériques $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ **et cartésiens** $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\vec{r} = r\vec{u}_r = r\sin\theta\cos\varphi\vec{i} + r\sin\theta\sin\varphi\vec{j} + r\cos\theta\vec{k}$$

$$\left|\begin{array}{l} \vec{u}_r = \sin\theta\cos\varphi\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\vec{j} + \cos\theta\vec{k} \\ \vec{u}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\vec{j} - \sin\theta\vec{k} \\ \vec{u}_\varphi = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j} \\ \vec{u}_\varphi = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta \end{array}\right\rangle \qquad (2\text{-}77)$$

d) Vecteur du déplacement élémentaire : $d\vec{r}$ s'écrira alors

$$d\vec{r} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + r\sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi \qquad (2\text{-}78)$$

N.B : Pour couvrir tout l'espace , on a : $\begin{Vmatrix} r \in [0 \ , +\infty[\\ \theta \in [0 \ , \ \pi] \\ \varphi \in [0 \ , 2\pi] \end{Vmatrix}$

II.4. Mouvement relatif « changement de référentiels

Comment faisait un avion de combat "référentiel mobil $\mathfrak{R}$'pour bombarder des endroits stratégique au sol "référentiel fixe$\mathfrak{R}$. La méthode pour réaliser cela s'appelle *"lois de composition des vitesse et des accélérations". Que nous allons développer dans cette partie.*

II.4.1. Loi de composition des vitesses:

On étudie le mouvement dans deux référentiels différents $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}'$. L'un d'eux, le référentiel $\mathfrak{R}$ d'origine **O** sera appelé référentiel fixe ou absolu; l'autre le référentiel $\mathfrak{R}'$ d'origine **O'** sera appelé le référentiel mobile ou relatif «voir figure II.15 ».

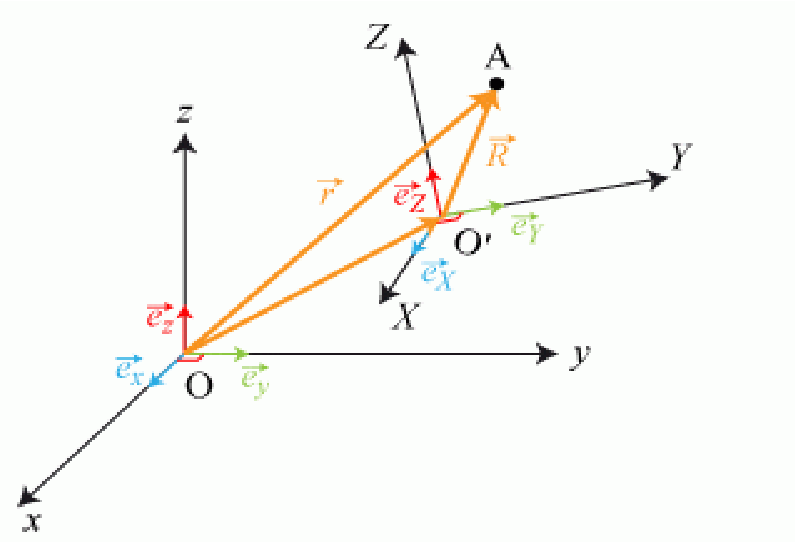


Figure II.15 : Représentation des deux référentiels :«$\mathfrak{R}$ fixe » [oxyz] et $\mathfrak{R}'$ mobile [O'XYZ]

II.4.2.Propriétés de mouvement relatif:

- Soient $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ou $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ la base orthonormée de $\mathfrak{R}$ et $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ ou $(\vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z)$ la base orthonormée de $\mathfrak{R}'$.
- Soient **{x(t), y(t), z(t)}** les coordonnées du point **M** dans $\mathfrak{R}$ et **{x'(t), y'(t), z'(t)}** les coordonnées du point M dans $\mathfrak{R}'$.

a) Vecteur position : $\vec{OM}$ s'écrit d'une part dans un référentiel fixe$\mathfrak{R}$. $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et d'autre part dans un référentiel mobil $\mathfrak{R}'$. $\vec{OM}\Big|_R = \vec{OO'} + \vec{O'M}\Big|_{R'} = \vec{OO'} + x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$ (2-79)

En dérivant cette relation par rapport au temps **t**, nous obtenons par définition la vitesse absolue.

b) Vitesse absolue:

$\vec{V}_a = \dfrac{do\vec{M}}{dt}\Big|_R = \dfrac{d\vec{oo'}}{dt} + \dfrac{do'\vec{M}}{dt}\Big|_{R'}$ " $\vec{i}', \vec{j}'$ *et* $\vec{k}'$" **ne sont pas fixe**

$$\vec{V}_a = \frac{d\vec{oo'}}{dt} + \frac{dx'}{dt}\vec{i}\,' + x'\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\vec{j}\,' + y'\frac{d\vec{j}\,'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\vec{k}\,' + z'\frac{d\vec{k}\,'}{dt}$$

$$\vec{V}_a\Big|_R = \underbrace{\frac{d\vec{oo'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}\,'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}\,'}{dt}}_{\vec{V}_e} + \underbrace{\frac{dx'}{dt}\vec{i}\,' + +\frac{dy'}{dt}\vec{j}\,' + +\frac{dz'}{dt}\vec{k}\,'}_{\vec{V}_r} \qquad (2\text{-}80)$$

Ainsi, la vitesse de **M** par rapport au référentiel $\mathfrak{R}$ est : $\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$ (2-81)

$\vec{V}_r$: la vitesse relative qui traduit le mouvement du point **M** par rapport au référentiel $\mathfrak{R}'$ " mobile".

$\vec{V}_e$: la vitesse d'entraînement qui traduit le mouvement du référentiel $\mathfrak{R}'$ par rapport au référentiel $\mathfrak{R}$.

Remarque:

$\frac{doo'}{dt}$ ce terme traduit le mouvement de translation de $\mathfrak{R}'$ par rapport à $\mathfrak{R}$.

$\frac{d\vec{i}\,'}{dt}, \frac{d\vec{j}\,'}{dt}$ et $\frac{d\vec{k}\,'}{dt}$ ces termes expliquent la rotation de $\mathfrak{R}'$ par rapport à $\mathfrak{R}$.

On considère $\mathbf{w_e}$ la vitesse angulaire de rotation dû de référentiel $\mathfrak{R}'$ par rapport à $\mathfrak{R}$.

Alors que les formules

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vec{i}\,'}{dt} &= \vec{w}_e \wedge \vec{i}\,' \\ \frac{d\vec{j}\,'}{dt} &= \vec{w}_e \wedge \vec{j}\,' \\ \frac{d\vec{k}\,'}{dt} &= \vec{w}_e \wedge \vec{k}\,' \end{aligned}\right) \qquad (2\text{-}82)$$

c) Vitesse relative : elle s'écrira alors

$$\vec{V}_r = \frac{d\vec{o'M}}{dt}\bigg|_{R'} = \frac{d}{dt}(x'\vec{i}\,' + y'\vec{j}\,' + z'\vec{k}\,') = \frac{dx'}{dt}\vec{i}\,' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}\,' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}\,' \qquad (2\text{-}83)$$

d) Vitesse d'entraînement : elle s'écrira alors

$$\vec{V}_e = \frac{d\vec{oo'}}{dt} + x'(\vec{w}_e \wedge \vec{i}\,') + y'(\vec{w}_e \wedge \vec{j}\,') + z'(\vec{w}_e \wedge \vec{k}\,')$$

$$\vec{V}_e = \frac{d\vec{oo'}}{dt} + \vec{w}_e \wedge (x'\vec{i}\,' + y'\vec{j}\,' + z'\vec{k}\,') \qquad (2\text{-}84)$$

$$\vec{V}_e = \frac{d\vec{oo'}}{dt} + \vec{w}_e \wedge \vec{o'M}$$

En fin, la vitesse absolue s'écrira :

$$\vec{V}_a = \frac{d\vec{oo'}}{dt} + \vec{w}_e \wedge \vec{O'M} + \vec{V}_r \qquad (2\text{-}85)$$

II.4.3. Loi de composition des accélérations

Trouvons maintenant la relation qui lie l'accélération absolue d'un point **M** par rapport au référentiel $\mathfrak{R}$ et l'accélération relative de ce même point par rapport au référentiel $\mathfrak{R}'$.

$$\vec{a}_a=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2o\vec{M}}{dt^2}=\frac{d^2oo'}{dt^2}+x'\frac{d^2i'}{dt^2}+y'\frac{d^2j'}{dt^2}+z'\frac{d^2k'}{dt^2}+\underline{\underline{\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i}\,'}{dt}+\frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j}\,'}{dt}+\frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}\,'}{dt}}}+$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}\,'+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}\,'+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}\,'+\underline{\underline{\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i}\,'}{dt}+\frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j}\,'}{dt}+\frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}\,'}{dt}}}\quad\Leftrightarrow$$

$$\vec{a}_a=\underbrace{\frac{d^2oo'}{dt^2}+x'\frac{d^2i'}{dt^2}+y'\frac{d^2j'}{dt^2}+z'\frac{d^2k'}{dt^2}}_{\vec{a}_e}+\underbrace{2\left[\frac{dx'}{dt}(\frac{d\vec{i}\,'}{dt})+\frac{dy'}{dt}(\frac{d\vec{j}\,'}{dt})+\frac{dz'}{dt}(\frac{d\vec{k}\,'}{dt})\right]}_{\vec{a}_c}+\underbrace{\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}\,'+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}\,'+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}\,'}_{\vec{a}_r}$$

a) L'accélération absolue : elle s'écrit

$$\vec{a}_a=\vec{a}_e+\vec{a}_c+\vec{a}_r \qquad (2\text{-}86)$$

Tels que :

$\vec{a}_e$ est l'accélération d'entraînement

$\vec{a}_r$ est l'accélération relative «l'accélération de **M** par rapport au référentiel $\mathfrak{R}'$ »

$\vec{a}_c$ est l'accélération de **Coriolis**.

b) Accélération de Coriolis $\vec{a}_c$: En utilisant les relations précédentes

$$\begin{pmatrix}\dfrac{d\vec{i}\,'}{dt}=\vec{w}_e\wedge\vec{i}\,'\\[2mm]\dfrac{d\vec{j}\,'}{dt}=\vec{w}_e\wedge\vec{j}\,'\\[2mm]\dfrac{d\vec{k}\,'}{dt}=\vec{w}_e\wedge\vec{k}\,'\end{pmatrix}\text{ On aura : }\left[\begin{array}{l}\vec{a}_c=2\left[\dfrac{dx'}{dt}(\vec{w}_e\wedge\vec{i}\,')+\dfrac{dy'}{dt}(\vec{w}_e\wedge\vec{j}\,')+\dfrac{dz'}{dt}(\vec{w}_e\wedge\vec{k}\,')\right]\\[2mm]\vec{a}_c=2\left[\vec{w}_e\wedge(\dfrac{dx'}{dt}\vec{i}\,'+\dfrac{dy'}{dt}\vec{j}\,'+\dfrac{dz'}{dt}\vec{k}\,')\right]\\[2mm]\vec{a}_c=2\vec{w}_e\wedge\vec{v}_r\end{array}\right] \qquad (2\text{-}87)$$

c) Accélération d'entraînement $\vec{a}_e$:

$$\vec{a}_e=\frac{d^2oo'}{dt^2}+x'\frac{d^2i'}{dt^2}+y'\frac{d^2j'}{dt^2}+z'\frac{d^2k'}{dt^2}\quad;\qquad\frac{d^2i'}{dt^2}=\frac{d}{dt}(\frac{d\vec{i}\,'}{dt})=\frac{d}{dt}(\vec{w}_e\wedge\vec{i}\,')$$

$$\vec{a}_e=\frac{d^2oo'}{dt^2}+x'\frac{d}{dt}(\vec{w}_e\wedge\vec{i}\,')+y'\frac{d}{dt}(\vec{w}_e\wedge\vec{j}\,')+z'\frac{d}{dt}(\vec{w}_e\wedge\vec{k}\,')$$

$$\vec{a}_e=\frac{d^2oo'}{dt^2}+x'\frac{d\vec{w}_e}{dt}\wedge\vec{i}\,'+x'\vec{w}_e\wedge\frac{d\vec{i}\,'}{dt}+y'\frac{d\vec{w}_e}{dt}\wedge\vec{j}\,'+y'\vec{w}_e\wedge\frac{d\vec{j}\,'}{dt}+z'\frac{d\vec{w}_e}{dt}\wedge\vec{k}\,'+z'\vec{w}_e\wedge\frac{d\vec{k}\,'}{dt}$$

$$\vec{a}_e=\frac{d^2oo'}{dt^2}+\frac{d\vec{w}_e}{dt}\wedge x'\vec{i}\,'+\frac{d\vec{w}_e}{dt}\wedge y'\vec{j}\,'+\frac{d\vec{w}_e}{dt}\wedge z'\vec{k}\,'+x'\vec{w}_e\wedge(\vec{w}_e\wedge\vec{i}\,')+y'\vec{w}_e\wedge(\vec{w}_e\wedge\vec{j}\,')+z'\vec{w}_e\wedge(\vec{w}_e\wedge\vec{z}\,')$$

$$\vec{a}_e=\frac{d^2oo'}{dt^2}+\frac{d\vec{w}_e}{dt}\wedge(x'\vec{i}\,'+y'\vec{i}\,'+z'\vec{k}\,')+\vec{w}_e\wedge\left[x'\vec{i}\,'+y'\vec{i}\,'+z'\vec{k}\,'\right]$$

$$\vec{a}_e=\frac{d^2oo'}{dt^2}+\frac{d\vec{w}_e}{dt}\wedge o'\vec{M}+\vec{w}_e\wedge\left[\vec{w}_e\wedge o'\vec{M}\right] \qquad (2-88)$$

Cas particulier:

Si $\mathbf{w_e}$ **= cte** et **O** est confondu à **O'** implique que $\frac{d^2oo'}{dt^2}=0$ et $\frac{d\vec{w}_e}{dt}=0$

On obtient : $\vec{a}_e=\vec{w}_e\wedge\left[\vec{w}_e\wedge o'\vec{M}\right]$ (2-89)

Remarque :

On peut calculer l'accélération absolue comme suit :

$$\vec{a}_a=\frac{d\vec{v}_a}{dt}=\frac{d^2oo'}{dt^2}+\frac{d}{dt}(\vec{w}_e\wedge O'\vec{M})+\frac{d\vec{v}_r}{dt}\ ;$$

$$\vec{a}_a=\frac{d^2oo'}{dt^2}+\frac{d\vec{w}_e}{dt}\wedge O'\vec{M}+\vec{w}_e\wedge\frac{dO'\vec{M}}{dt}+\frac{d\vec{v}_r}{dt}\quad,\ \frac{dO'\vec{M}}{dt}=\vec{w}_e\wedge O'\vec{M}$$

$$\vec{a}_a=\frac{d^2oo'}{dt^2}+\frac{d\vec{w}_e}{dt}\wedge O'\vec{M}+\vec{w}_e\wedge(\vec{w}_e\wedge O'\vec{M})+\vec{a}_r \qquad (2-90)$$

Chapitre III:

Dynamique du point matériel

La dynamique est l'étude des mouvements des corps tenant compte des causes appelées forces qui les produisent. Nous allons étudier quatre lois de Newton.
Première loi « principe de l'inertie » a été publié par Galilée en 1632. Ainsi, la seconde loi « loi fondamentale de la dynamique. Puis, la troisième loi est « loi d'opposition des actions réciproques entre deux points matériels ». En fin, la quatrième loi de Newton concerne loi de la gravitation. Nous terminons par une présentation du moment cinétique.

III.1. Principe d'inertie « Première loi de Newton »

Tout corps ou point matériel non soumis à des actions extérieurs se trouve soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme [sa vitesse v est constante en norme et en direction par rapport à tout référentiel **Galiléen**]. Autrement dit, un tel corps est dit libre et son mouvement est dit mouvement libre (**mouvement d'inertie**).

III.1.1. Référentiel d'inertie (référentiel Galiléen)

Par définition, un référentiel d'inertie Galiléen est tel qu'un objet isolé « qui n'est soumis à aucune influence de la part d'autre objet » possède un mouvement rectiligne uniforme dans ce référentiel. Pour ce genre de référentiel toutes les directions sont équivalentes « **isotropie de l'espace** », aussi tous les points de l'espace et tous les instants sont équivalents (**homogénéité de l'espace et du temps**). Dans référentiel d'inertie tous les corps libres ont un mouvement rectiligne et uniforme. Pour des observateurs placés dans tous les repères galiléens, la force subite par le point matériel est la même.

Exemples :

a) **Référentiel d'inertie Galiléen « R »**

C'est un référentiel forme par le soleil comme origine et les trois étoiles fixées comme les trois directions.

b) **Référentiel d'inertie non Galiléen :**

C'est un référentiel comme un avion accéléré ou décéléré.

c) **Référentiel de Copernic R_c**

Il est constitué d'un repère d'origine le centre d'inertie C du système solaire dont les axes pointent vers trois étoiles fixées et d'un repère du temps.

d) **Référentiel de Kepler (héliocentrique) R_s**

Il est constitué d'un repère d'origine le centre d'inertie du soleil et d'un repère du temps.

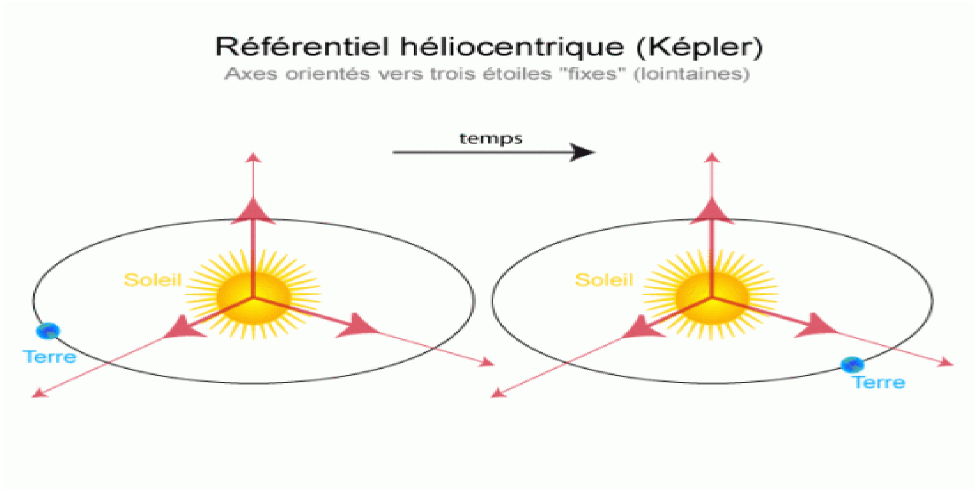


Figure III.1 : Référentiel héliocentrique lié au centre du Soleil

e) Référentiel Géocentrique R_G

Il est constitué d'un repère en mouvement de translation par rapport au référentiel de **Kepler** et d'origine le centre d'inertie **T** de la terre (**R_G** est en mouvement circulaire par rapport au référentiel **héliocentrique R_s**.

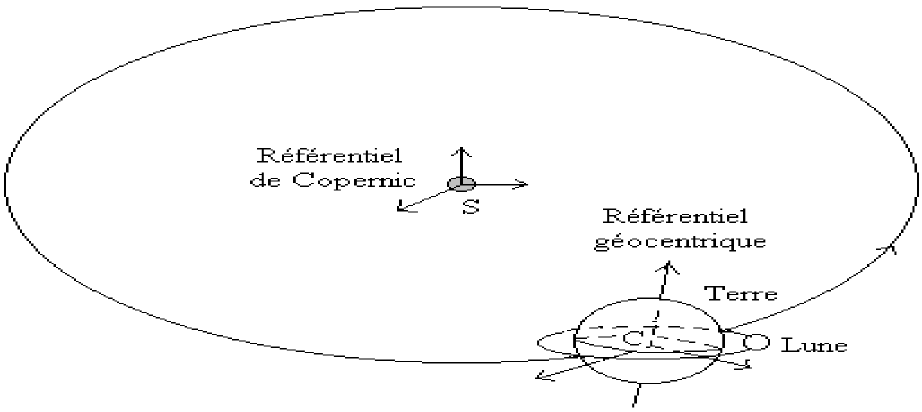


Figure III.2 : Référentiels géocentrique et héliocentrique

f) Référentiel terrestre R_T :

Il est constitué d'un repère dont l'origine est située en un point à la surface de la terre, et les axes sont liés à la terre. **R_T** n'est pas le référentiel car la terre tourne autour de son propre axe et autour du soleil. **R_T** se trouve en mouvement accéléré par rapport au référentiel lié avec le soleil. On remarque le repère terrestre est animé par rapport au référentiel géocentrique d'un mouvement de rotation autour de l'axe des pôles.

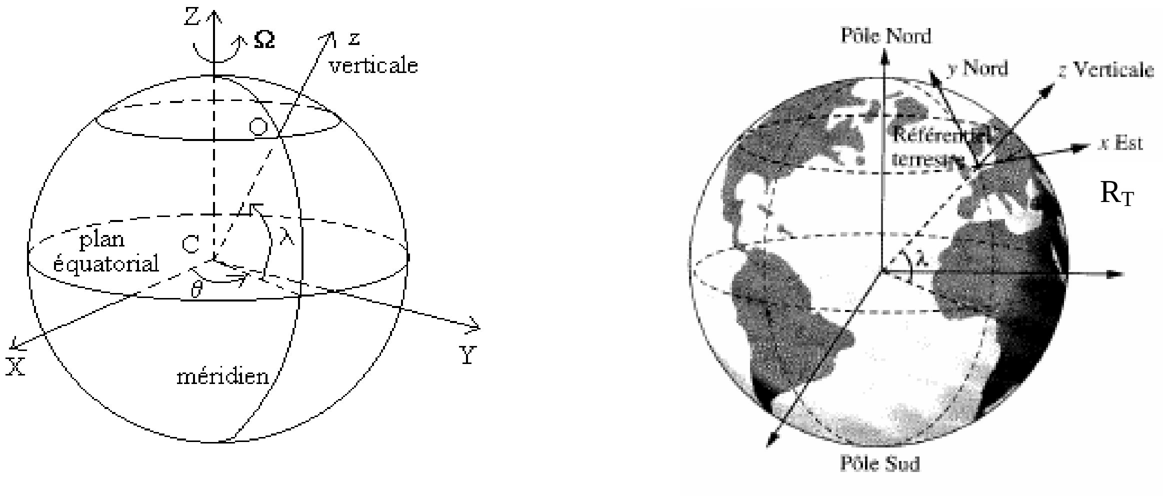


Figure III.3 : Référentiel terrestre (lié au sol)

III.2. Loi fondamentale de la dynamique «Deuxième loi de Newton » et Conservation de la quantité du mouvement

On peut résumer la loi fondamentale de la dynamique en trois points :

- La grandeur physique caractérise l'inertie d'un corps s'appelle la masse du corps (**m**).
- Si le corps possède une accélération par rapport à un système de référence d'inertie alors que le corps subit à l'action d'une force $\vec{F}$.

- En référentiel galiléen **Rg**, la résultante des forces qui s'exercent sur une particule est égale au produit de la masse par le vecteur accélération $\vec{a}$.

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F} = \mathrm{m}\,\vec{\mathrm{a}}\Big|_{R_g} = \mathrm{m}\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (3\text{-}1) \quad \text{« loi fondamentale de la dynamique »}$$

Les composantes de la force suivant les trois axes sont :

$$\left|\begin{array}{l} \mathrm{F_x} = \mathrm{m}\dfrac{\mathrm{d}^2x}{dt^2} = \mathrm{m}\ddot{\mathrm{x}} = \mathrm{ma_x} \\ \mathrm{F_y} = \mathrm{m}\dfrac{\mathrm{d}^2y}{dt^2} = \mathrm{m}\ddot{\mathrm{y}} = \mathrm{ma_y} \\ \mathrm{F_z} = \mathrm{m}\dfrac{\mathrm{d}^2z}{dt^2} = \mathrm{m}\ddot{\mathrm{z}} = \mathrm{ma_z} \end{array}\right. \qquad (3\text{-}2)$$

La résolution de ces équations différentielles du second degré de mouvement du point matériel donne $\vec{\mathrm{r}}(\mathrm{t})\,\mathrm{et}\,\vec{\mathrm{F}}(\mathrm{t})$.

- **Unité de la force** $[F]=[m][a]$ dans S.I ; $[m]=1Kg$, $[a]=1ms^{-2}$ d'où l'unité de la force s'appelle Newton. Donc $1N = \dfrac{1Kg.m}{s^2}$ c à d un newton est la force qui communique à un corps de masse **1Kg** et l'accélération **1ms^{-2}**

III.2.1. Quantité du mouvement :

Le produit de la masse m d'un point matériel par la vitesse $\vec{V}$ par rapport à un référentiel galiléen **Rg** est appelé impulsion ou quantité de mouvement d'un corps. On désigne l'impulsion par le symbole $\vec{P}$: $\vec{P} = m\vec{V}$ (3-3)

En dérivant $\vec{P}$ par rapport au temps. On a $\dfrac{d\vec{P}}{dt} = m\dfrac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$ et comme $m\vec{a} = \sum \vec{F}$

Alors que $\sum \vec{F} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$ (3-4) « théorème de la quantité de mouvement »

La loi de conservation de la quantité de mouvement est valable pour les mouvements lents ($\vec{V}$ très inférieur à la vitesse de la lumière $\vec{C}$ ⇔ **v << c**). Par contre, en mécanique relativiste « mouvement rapide » la quantité du mouvement s'écrira : $\vec{P} = m\vec{V}$, et $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{C^2}}}$

$$\vec{P} = m_0 \frac{\vec{V}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{C}}} \qquad (3\text{-}5)$$

Avec **m_0 :** la masse d'inertie du point matériel.
$\vec{V}$: sa vitesse , $\vec{C}$: la vitesse de lumière. **m** : la masse en mouvement (masse relativiste)

III.2.2. Relation entre la masse et l'énergie

La masse est une forme d'énergie. Il y a possibilité de transformation de masse **m** en énergie **E** et réciproquement. L'énergie relativiste associée à une masse **m** est donnée par la relation d'**Einstein**. $E = mC^2$ (3-6)

Cet énergie est la somme de deux termes: l'énergie au repos m_0C^2 et l'énergie cinétique E_{cin}.
Donc $E = m_0C^2 + E_{cin} = mC^2$ (3-7)

III.2.3. Principe des actions réciproques « Troisième loi de Newton »

Lorsque deux corps **A** et **B** interagissent, le corps **A** exerce sur le corps **B** une force $\vec{F}(A/B)$ alors **B** exerce sur **A** une force $\vec{F}(B/A)$: $\vec{F}(A/B) = -\vec{F}(B/A)$ (3-8)

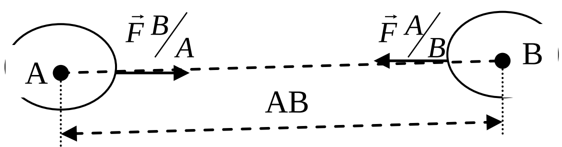


Figure III.4 : Principe d'action et réaction pour deux charges portent de signe opposé

Ce principe est vrai que **A** et **B** soient au repos ou en mouvement lent. Ces forces sont portées par la droite qui les joints. Elles sont égales en modules, colinéaires et de sens opposés. On a

$$\vec{F}(A/B) + \vec{F}(B/A) = \vec{0} \qquad \text{et} \qquad \vec{AB} \wedge \vec{F}(A/B) = \vec{0} \tag{3-9}$$

L'une de ces forces est appelée action et l'autre réaction. Ce principe n'est pas vérifié pour tout type d'interaction.

III.2.4. Types d'interactions :

a) Interaction à distance : comme interactions électriques, magnétiques et gravitationnelles

b) Interaction de contact : comme forces de frottement, tension du fil, tension d'un ressort.

Application :

Un système composé de trois points matériels **A**, **B** et **C** aux sommets d'un triangle.

✎ Calculer la somme géométrique des forces intérieures ?

Réponse :

$\vec{F}(C/A) + \vec{F}(A/C) + \vec{F}(B/C) + \vec{F}(C/B) + \vec{F}(A/B) + \vec{F}(B/A) = \vec{0}$, on obtient que

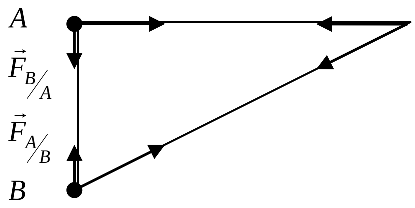


Figure III.5 : Somme des forces intérieures est nulle

$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = \text{Cste}$, on dit que la quantité de mouvement se conserve.

III.2.5. Loi d'interaction gravitationnelle « Quatrième loi de Newton »

Tout système matériel de la masse gravitationne $\vec{F}_{1/2}$ ttire tout système matériel de la masse gravitationnelle $\mathbf{m_2}$ avec une force dirigée le long de la droite qui les joints. Cette force est proportionnelle au produit des masses $\mathbf{m_1 m_2}$ et inversement proportionnelle au carré de leur distance de séparation.

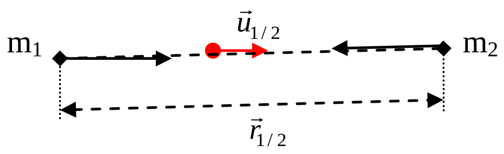


Figure III.6 : Interaction gravitationnelle entre $\mathbf{m_1}$ et $\mathbf{m_2}$

$\vec{u}_{1/2}$: le vecteur unitaire dirigé du point $\mathbf{m_1}$ vers le point $\mathbf{m_2}$, $\vec{r}_{1/2}$: la distance séparée entre les deux points.

$\vec{F}_{1/2}$: la force produit par le point $\mathbf{m_1}$ et exercé sur le point $\mathbf{m_2}$ est

$$\vec{F}_{1/2} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{1/2} \tag{3-10}$$

G : constante gravitationnelle et sa valeur en S.I est

$$G \cong 6{,}67210^{-11}\ \mathrm{Nm}^2 Kg^{-2} \cong 1Kg\,\frac{m}{s^2}\,m^2 Kg^{-2} \cong \frac{m^3}{KgS^{-2}}$$

III.3. Champ de gravitation :

On considère N points matériels **m_1, m_2,………m_N,** le vecteur du champ gravitationnel $\vec{G}$ en un point M et à l'instant t est : $\vec{G} = -G\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i^2}\vec{u}_i$ (3-12)

$\vec{G}$: Champ crée par **N** masses (**m_i**) situés à la distance $\vec{r}_i$ aux points **M**. $\vec{u}_i$: Vecteur unitaire de $\vec{r}_i$.

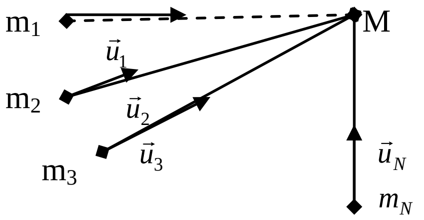


Figure III.7 : Champ gravitationnel crée par N points matériels

Alors que le point **M** de masse m dans le champ $\vec{G}$ subit à une force. $\vec{F} = m\vec{G}$ (3-13)

III.4.Champ électrique $\vec{E}$:

Le physicien **Faraday** a étudié l'interaction électrique et magnétique entre deux corps. Une charge électrique **q** dans l'espace située en un point **P** crée un champ électrique en point **M** donné par : $\vec{E}(M) = K\frac{q}{r^2}\vec{u}_r$ (3-14)

Avec K : constante électrique tel que $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 910^9$, ε_0 : permittivité de vide

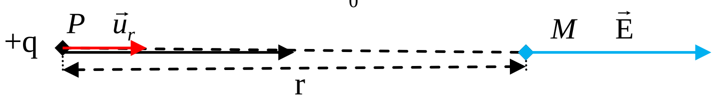


Figure III.8 : Champ électrique

Exemples de forces d'interactions :

Force d'interaction à distance :

Il existe quatre types d'interactions entre particules élémentaires dans l'univers (tableau III.1).

Types d'interactions	Portée	Agissant sur les particules	Domaine d'action	Responsable
Interaction nucléaire forte	Courte protée (10^{-5}m)	Quarks	Nucléon dans noyau	Gluon
Interaction électromagnétique	Protée infinie et d'intensité relative10^{-2} par rapport à l'interaction forte	Charges électriques	Atomes et des molécules	Photon
Interaction nucléaire faible	Courte protée (10^{-18} à 10^{-17}) et d'intensité	Charges faibles (électrons,	Désintégration radioactive β	Boson

	relative 10^{-5}	neutrinos)		
Interaction gravitationnelle	Protée infinie et d'intensité relative10^{-39}	Masses gravitationnelles grandes	Astres, planètes	Graviton

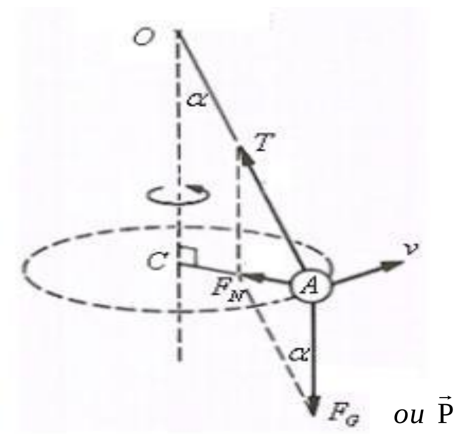
Tableau III.1 : Quatre types d'interactions.

- **Force d'interaction de contact :**

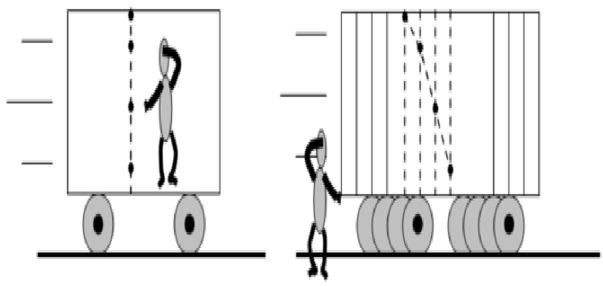
Ce sont des interactions macroscopiques qui résultent d'interactions microscopiques.

- **Force d'interaction exercée par un fil tendu :**

Elle exercé par un fil (câble) inextensible tendu sur un objet attaché au point **O** est équivalent à une force (tension du fil) dirigé sur le long du fil voir figure III.9**.**



a) Pendule simple (vertical)



b) Mouvement rectiligne horizontal

Figure III.9: Interaction exercée par un fil ou par un câble

- **Force d'interaction exercée par un support solide (contact entre deux corps):**

Soient les actions de contact d'un support solide (**S_2**) sur un solide (**S_1**) sont représentées par une force $\vec{R}$ « réaction du support » appliquée au point de contact voir figure III.10.

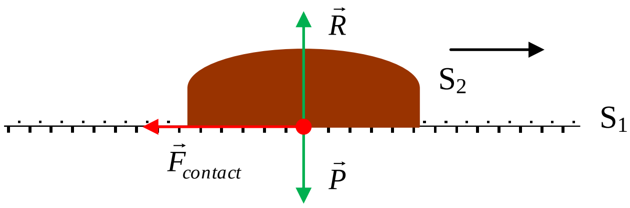


Figure III.10 : Interaction exercée par un solide horizontal

- **Force d'interaction exercée par un ressort :**

Un objet de masse **m** attachée à l'extrémité d'un ressort élastique qui est subit à une force de rappel au point d'attache $\vec{F} = -K\Delta\vec{l}$; le signe (-) signifie que $\vec{F}$ est dirigé de sens opposé à son allongement $\Delta\vec{l}$ voir figure III.11.

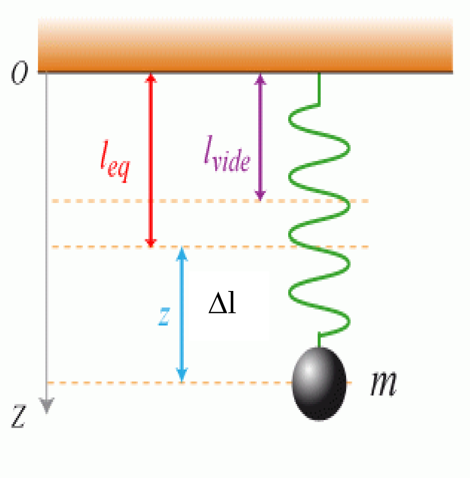


Figure III.11 : Interaction de rappel exercée par un ressort élastique

D'autres forces d'interactions exercées par un fluide sur un solide :

Comme forces de pressions, forces de fortement d'un fluide (frottement visqueux).

Moment cinétique et force centrale:

Tous les phénomènes de la nature présentent des rotations par exemple : spin des particules « électrons » traduit par un moment cinétique intrinsèque.

Moment cinétique :

Soit un point matériel de masse **m** se déplace à la vitesse $\vec{V}$ dans un référentiel galiléen$\mathfrak{R}$.

Le moment cinétique en un point **O** noté $\vec{L}_0$ est défini par :

$$\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge \vec{P} = \vec{OM} \wedge m\vec{V} = m(\vec{OM} \wedge \vec{V}) \tag{3-15}$$

C'est un moment du vecteur de la quantité de mouvement $\vec{P} = m\vec{V}$ par rapport à un axe **(Δ)** passant par **O** voir figure III.12**.**

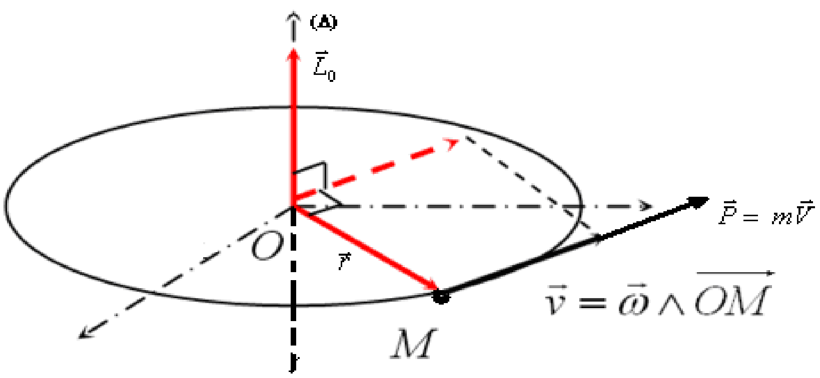


Figure III.12 : Moment cinétique par rapport à un axe **(Δ)**

N.B : la grandeur $\vec{L}_0$ comme la vitesse $\vec{V}$ dépend du référentiel.

Moment d'une force en un point :

$\vec{L}_0$ en un point **O** fixe dans un référentiel $\mathfrak{R}_0$ **(galiléen)**. Le sens de moment d'une force $\vec{M}_0(\vec{F})$ en un point **M** voir figure II.13**.** On va déterminer la dérivée de $\vec{L}_0$ par rapport au temps.

$$\left.\frac{d\vec{L}_0}{dt}\right|_{R_0} = \frac{d}{dt}(\vec{OM}\wedge\vec{P}) = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_{R_0}\wedge\vec{P} + \vec{OM}\wedge\left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right|_{R_0}$$ Comme $\left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_{R_0} = \vec{V} = \frac{1}{m}\vec{P}$ alors

que $\left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_{R_0}\wedge\vec{P} = \vec{0}$ De plus $\left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right|_{R_0} = \vec{F} \Rightarrow$ $$\left.\frac{d\vec{L}_0}{dt}\right|_{R_0} = \vec{OM}\wedge\vec{F} \qquad (3\text{-}16)$$

Cette expression exprime le théorème du moment cinétique.

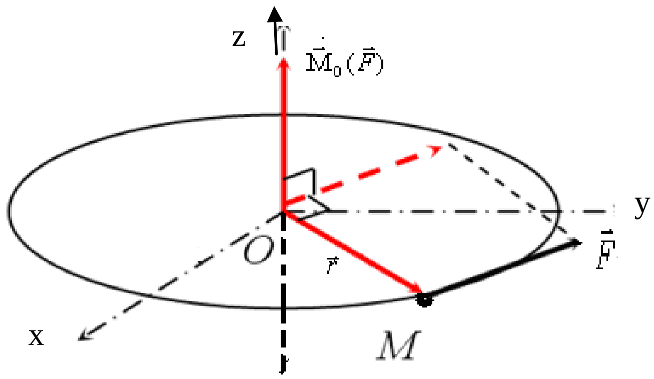


Figure III.13 : Moment d'une force en un point **M**

Application :

Mouvement à force centrale :

$\vec{F}$ est la force centrale, si un support passe par un point **O** fixe d'un référentiel$\mathfrak{R}$**.** $\vec{F}$ est colinéaire à $\vec{OM}$: d'où $\vec{OM}\wedge\vec{F} = \vec{0}$ (3-17)

Dans un mouvement à force centrale, le moment cinétique $\vec{L}_0$ d'un point **M** par rapport au point **O** centre des forces est constant au cours du mouvement. $\left.\frac{d\vec{L}_0}{dt}\right|_{R_0} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_0 = \mathrm{Cte}$

Mouvement dans un plan (xoy) :

Le vecteur de la position en coordonnées polaires : $\vec{OM} = r\vec{u}_r \Rightarrow r^{\bullet}\vec{u}_r + r\theta^{\bullet}\vec{u}_r = \vec{v}$

$$\left.\frac{d\vec{L}_0}{dt}\right|_{R_0} = \vec{OM}\wedge\vec{F} = (r\vec{u}_r)\wedge\frac{d}{dt}m\vec{v} \Leftrightarrow (r\vec{u}_r)\wedge\frac{d}{dt}m(r^{\bullet}\vec{u}_r + r\theta^{\bullet}\vec{u}_\theta) = \frac{d}{dt}mrr^{\bullet}(\vec{u}_r\wedge\vec{u}_r) + \frac{d}{dt}mr^2\theta^{\bullet}(\vec{u}_r\wedge\vec{u}_\theta)$$

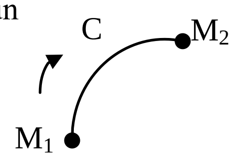
Avec $\vec{u}_r\wedge\vec{u}_r = \vec{0}$ et $\vec{u}_r\wedge\vec{u}_\theta = \vec{k} \Rightarrow \left.\frac{d\vec{L}_0}{dt}\right|_{R_0} = \frac{d}{dt}(mr^2\theta^{\bullet}\vec{k})$ de sorte que $\vec{L}_0 = mr^2\theta^{\bullet}\vec{k} = contante$

N.B : la conservation du moment cinétique pour un mouvement à force centrale entraîne une constante des aires $C = r^2\theta^{\bullet}$ pour cela, on peut écrire $\vec{L}_0$ comme suit : $\vec{L}_0 = \mathrm{m\,C}\,\vec{k}$

Chapitre IV:

Travail - Puissance - Energie

IV.1. Travail d'un point matériel



Pour un champ de force uniforme $\vec{F}(M)$ dont le point d'application subit un déplacement $d\vec{M}$ ou $d\vec{l}$.

Le travail élémentaire de la force $\vec{F}(M)$ est donné par : $dw = \vec{F} \bullet d\vec{M}$

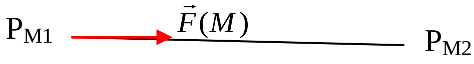
Le travail le long d'une courbe C ou $\tilde{M}_1\tilde{M}_2$ allant de M_1 à M_2.

$$w = \int_C dw = \int_{M_1}^{M_2} dw = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \bullet d\vec{M} \qquad (4\text{-}1)$$

a) Cas particulier :

Si la courbe $\tilde{M}_1\tilde{M}_2$ est une droite, alors que le travail $w = \vec{F} \bullet \tilde{M}_1\tilde{M}_2 = \|\vec{F}\|\|\tilde{M}_1\tilde{M}_2\|\cos\theta$

Avec $\theta \equiv (\vec{F}, \tilde{M}_1\tilde{M}_2) \Rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1 \\ \theta = \pi \Rightarrow \cos\theta = -1 \end{cases}$



En résumé

- Le travail est une quantité scalaire.
- Si $\cos\theta > 0$, le travail positif ou le travail moteur.
- Si $\cos\theta < 0$, le travail négatif ou le travail résistant.
- $dw = \vec{F} \bullet d\vec{M}$ et $\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{V} \Rightarrow d\vec{M} = \vec{V}dt$, d'où

$$dw = \vec{F} \bullet d\vec{M} = \vec{F} \bullet \vec{V}dt \qquad (4\text{-}2)$$

b) Unités de travail :

$[w] = [F][L] = MLT^{-2}L = ML^2T^{-2}$. Son unité en système (S.I) est le Joule.

c) Notion de puissance :

Elle fait intervenir le facteur du temps **t**. La puissance moyenne $\mathbf{P_{moy}}$ fournie pour effectuer un travail **Δw** pendant un intervalle de temps **Δt**. $P_{moy} = \frac{\Delta w}{\Delta t}$ (4-3)

Son équation aux dimensions est $[P] = [w][t^{-1}] = ML^2T^{-2}T^{-1} = ML^2T^{-3}$

Son unité en système (S.I) est Watt.

d) Notion de l'énergie cinétique :

L'énergie cinétique d'un point matériel de masse **m** et de vitesse $\vec{V}$ est donnée par :

$E_c = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}\frac{P^2}{m}$, (4-4) « $\vec{P} = m\vec{V}$: quantité de mouvement »

IV.2.Théorème de l'énergie cinétique :

La variation de l'énergie cinétique par unité de temps $E_{c2} - E_{c1} = \Delta E_c$ ou puissance cinétique est égale à la puissance cinétique des forces exercées sur le point matériel.

$$w = \int_C dw = \int_{M_1}^{M_2} dw = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \bullet d\vec{M} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \bullet \vec{V}dt = \int_{M_1}^{M_2} m\frac{d\vec{V}}{dt} \bullet \vec{V}dt = \int_{M_1}^{M_2} m\vec{V} \bullet d\vec{V} = \int_{M_1}^{M_2} d(\frac{1}{2}mV^2)dt$$

$$W = \frac{1}{2}mV^2 \Big|_{V_1}^{V_2} = \frac{1}{2}mV_2^2 - \frac{1}{2}mV_1^2 = E_{c2} - E_{c1} = \Delta E_c \Leftrightarrow \mathrm{w} = \Delta E_c$$

D'où $dw = d(\frac{1}{2}mv^2) = dE_c$ alors que $P = \frac{dw}{dt} = \frac{dE_c}{dt} = P_C$ (4-5)

- Si w > 0 $\Leftrightarrow (E_{c2} - E_{c1}) > 0 \Rightarrow E_{c2} > E_{c1}$. C'est un travail moteur correspond un accroissement de la vitesse de la particule ($V_2 > V_1$).
- Si w < 0 $\Leftrightarrow (E_{c2} - E_{c1}) < 0 \Rightarrow E_{c2} < E_{c1}$. C'est un travail résistant correspond une diminution de la vitesse de la particule ($V_2 < V_1$).

IV.3. Application :

IV.3.1. Glissement sans frottement :

Un point matériel **M** lâché sans vitesse initiale à **t = 0** en un point **A** d'une altitude « hauteur » $\mathbf{Z_A = h}$. Trouver l'hauteur de chute à partir du travail (**w**).

Solution :

M est soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g} = \vec{F}$; $\vec{g} = -g\vec{j}$, $d\vec{M} = dz\vec{k}$ et $V = \frac{dz}{dt}$

Pour passer de A à B, le travail de la pesanteur est

$$w = \int_A^B \vec{F}(M) \bullet d\vec{M} = \int_A^B \vec{P} \bullet d\vec{M} = -\int_A^B mg\vec{k} \bullet dz\vec{k} = -mg\int_A^B dz = mg(Z_A - Z_M) = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m(\frac{dz}{dt})^2$$

On obtient :

$$\left\{ mg(Z_A - Z_M) = \frac{1}{2}m(\frac{dz}{dt})^2 \Rightarrow (\frac{dz}{dt})^2 = 2g(Z_A - Z_M) \Rightarrow \frac{|dz|}{dt} = \sqrt{2g}(\sqrt{Z_A - Z_M}) \right\}$$

A t = 0, Z = Z_A =h $\Rightarrow$ Cte = 0. On intègre

$$\int \frac{dz}{\sqrt{Z_A - Z_M}} = \int (\sqrt{2g})dt \Rightarrow 2(\sqrt{Z_A - Z_M}) = (\sqrt{2g})t + Cte$$

$$Z_A - Z = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow Z = Z_A - \frac{1}{2}gt^2 = h - \frac{1}{2}gt^2$$

IV.4. Energie potentielle :

a) Champ de forces :

Un champ de force du point de l'espace correspond à la force agissant sur ce point et qui ne dépend pas de son point d'application. On appelle ligne de force la courbe qui en chacun de ses points est tangente au champ de forces. On a deux types de forces conservatives et non conservatives.

b) Forces conservatives :

Le travail $\mathbf{w_{AB}}$ effectué par la force lors d'un déplacement du point matériel **M** allant de **A** à **B** entre deux instants $\mathbf{t_1}$ et $\mathbf{t_2}$ est indépendant du chemin suivi pour aller de **A** en **B** et ne dépend que de l'état final et de l'état initial. Il existe une fonction scalaire $\mathbf{E_p}$ qui dépend des coordonnées du point matériel appelée énergie potentielle, telle que :

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}(M) \bullet d\vec{r} = -\left[E_P(B) - E_P(A)\right] \qquad (4\text{-}6)$$

Le signe (-) signifie que l'énergie est dépensé. Pour amener le point matériel **(A)** au point **(B)** où son énergie potentielle est plus grande.

IV.4.1. Forces dérivant d'une énergie potentielle :

On dit la force conservative F dérive d'une énergie potentielle, s'il existe une fonction scalaire $E_p(x,y,z)$ telle que : $dE_P = -\vec{F} \bullet d\vec{r}$ (4-7)

Exemples :

a) En coordonnées cartésiennes : $\begin{cases} \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} \end{cases}$ et $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

d'où $\vec{F} \bullet d\vec{r} = (F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}) \bullet (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = F_x dx + F_y dy + F_z dz$

On écrit la différentielle de **Ep**. $dE_P = \frac{\partial E_P}{\partial x}dx + \frac{\partial E_P}{\partial y}dy + \frac{\partial E_P}{\partial z}dz$

On définie le vecteur gradient de **Ep** ou $grad\vec{E}_P \equiv \vec{\nabla}E_P$ où $\vec{\nabla}$: est un opérateur gradient de la fonction scalaire **Ep (x,y,z)** au point **M(x,y,z).** Avec $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ tel que

$\vec{\nabla}E_P = \frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_P}{\partial z}\vec{k}$. Alors que

$$\vec{\nabla}E_P \bullet d\vec{r} = \left(\frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_P}{\partial z}\vec{k}\right) \bullet (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = \frac{\partial E_P}{\partial x}dx + \frac{\partial E_P}{\partial y}dy + \frac{\partial E_P}{\partial z}dz = dE_P$$

On aura : $\left|\begin{array}{l} dE_P = \vec{\nabla}E_P \bullet d\vec{r} \\ dE_P = -\vec{F} \bullet d\vec{r} \end{array}\right. \Rightarrow \vec{\nabla}E_P \bullet d\vec{r} = -\vec{F} \bullet d\vec{r} \Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla}E_P$

Commentaire : $\vec{F}$ est dite conservative, elle est un champ de forces d'un déplacement de **A** vers **B**. $E_P(B) - E_P(A) = -\int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r}$ (4-8)

IV.4.2. Propriétés de force $\vec{F}$:

- Le travail ne dépend pas du chemin suivi. Il est nul sur un circuit fermé.
- $rot\vec{F} = \vec{0}$ ou $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ (4-9)
- L'opérateur rotationnel d'une fonction $\vec{F}$ est

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = (\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}) \wedge (F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k})$$

De sorte que : $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z})\vec{i} - (\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z})\vec{j} + (\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y})\vec{k}$ (4-10)

IV.4.3. Expression analytique de $\vec{F}$ en fonction de l'énergie potentielle dans différents repères.

a) Repère cartésien (x,y,z) de base associée (i, j,k):

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}E_P = -(\frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_P}{\partial z}\vec{k}) = (F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}) \quad (4\text{-}11)$$

Les composantes de la force sont

$$\vec{F} \equiv \begin{pmatrix} F_x = -\dfrac{\partial E_P}{\partial x} \\ F_y = -\dfrac{\partial E_P}{\partial y} \\ F_z = -\dfrac{\partial E_P}{\partial z} \end{pmatrix}$$

b) Repère cylindrique (ρ, θ, z) de base associée (uρ,uθ,k):

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}E_P = -(\frac{\partial E_P}{\partial \rho}\vec{u}_\rho + \frac{\partial E_P}{\rho\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial E_P}{\partial z}\vec{k}) = (F_\rho\vec{u}_\rho + F_\theta\vec{u}_\theta + F_z\vec{k}) \quad (4\text{-}12)$$

Les composantes de la force sont :

$$\vec{F} \equiv \begin{pmatrix} F_\rho = -\dfrac{\partial E_P}{\partial \rho} \\ F_\theta = -\dfrac{\partial E_P}{\rho\partial \theta} \\ F_z = -\dfrac{\partial E_P}{\partial z} \end{pmatrix}$$

c) Repère sphérique(r, θ, φ) de base associée (uρ,uθ,uφ):

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_P = -(\frac{\partial E_P}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{\partial E_P}{r\partial\theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial E_P}{r\sin\theta\,\partial z}\vec{u}_\varphi) = (F_r\vec{u}_r + F_\theta\vec{u}_\theta + F_\varphi\vec{u}_\varphi) \qquad (4\text{-}13)$$

Les composantes de la force sont :

$$\vec{F} \equiv \begin{pmatrix} F_r = -\dfrac{\partial E_P}{\partial r} \\ F_\theta = -\dfrac{\partial E_P}{r\partial\theta} \\ F_\varphi = -\dfrac{\partial E_P}{r\sin\theta\,\partial z} \end{pmatrix}$$

On conclue que l'énergie potentielle $\mathbf{E_p}$ dépend de la configuration des points matériels et de leurs positions

Exemples de forces conservatives

❖ **Energie potentielle $\mathbf{E_p}$ d'un corps dans un champ de pesanteur uniforme**

$$E_P = \int dE_P = -\int_{Z_1}^{Z_2} \vec{F} \bullet d\vec{r} = -\int_{Z_1}^{Z_2} F_z dz = -F_z\int_{Z_1}^{Z_2} dz = F_z(z_1 - z_2) = mg(z_1 - z_2) + Cte$$, dy = dz =0

On obtient : $E_p = mgz + cte$; à z = 0 ⇒ $E_p(O) = 0$ ⇒ cte = 0 donc $\frac{\partial E_P}{\partial z} = mg = P$. On dit que **P =mg** dérive de l'énergie potentielle $\mathbf{E_p}$

❖ **Energie potentielle $\mathbf{E_p}$ d'un ressort de raideur k**

$d\vec{r} = dx\vec{i}$ et dy = dz = 0. On donne la force de rappel d'un ressort de raideur k, $\vec{F} = -kx\vec{i}$ et le travail élémentaire est $\Delta w = dw = \vec{F} \bullet d\vec{r}$

Energie potentielle est $E_P = -\int dw = -\int \vec{F} \bullet d\vec{r} = k\int xdx = \frac{1}{2}kx^2 + cte$

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2 + cte$$

❖ **Energie potentielle $\mathbf{E_p}$ de l'interaction gravitationnelle entre deux masses m et M**

La force d'interaction gravitationnelle entre deux corps est $\vec{F}_{12} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r$ avec $\vec{F}$ dérive de l'énergie potentielle $\mathbf{E_p}$ c à d $F_r = \frac{dE_P}{dr} \Rightarrow dE_P = -F_r dr = G\frac{mM}{r^2}dr$ d'où Cte =0 quand r→ ∞ et $E_p(\infty)=0$ donc $E_P = \int dE_P = GmM\int\frac{dr}{r^2} = -G\frac{mM}{r} + Cte = -G\frac{mM}{r}$ (4-14)

❖ **Forces non conservatives :**

Certaines forces ne dérivent pas d'une énergie potentielle qui sont des forces non conservatives. Parmi ces forces sont :

Forces magnétiques $\vec{F}_m = q\vec{V} \wedge \vec{B}$ (4-15)

Forces de Coriolis $\vec{F}_C = -2m\vec{w} \wedge \vec{V}_r$ (4-16)

Forces de frottements $\vec{F}_f = -\mu m\vec{g}$ (4-17), μ: coefficient de frottement

Remarque : Un point matériel est en équilibre dans un référentiel R si la résultante des forces appliquées est nulle

IV.5. Energie mécanique ou totale :

Soit un point matériel **M** en mouvement sous l'action d'une force conservative $\vec{F}$ dans un référentiel galiléen. $\mathbf{E_{Mécanique} = E_{Totale} = E_{Cinétique} + E_{Potentielle}}$ (4-18)

Références Bibliographies

- Introduction à la mécanique, q, Le Bellac, Belin L530131
- Mécanique Newtonienne du point, C. Grossetête et P. Olive, Ellipses, L5301436
- Mécanique générale, M. Spiegel, Schaum, L531009.
- Mécanique1, J.P. Fannx, Dunod, L531485
- Mécanique, J.P. Pérez, Masson, L531248

Exercices de Travaux Dirigés

Université 8 Mai 45 de Guelma
Faculté des Sciences et de la technologie
Département ST

جـــامعة قالمـــة
كليـة العلـوم و التكنولوجيا
قسم ST

Série n°1

Eléments mathématiques

Exercice 1 :

Déterminer l'équation différentielle de la famille de courbes d'équation : $y = a\cos wx + b\sin wx$

Exercice 2 :

Déterminer la vitesse v à partir de l'équation différentielle suivante : $m\dfrac{dv}{dt} = -G\dfrac{Mm}{r^2}$

Exercice 3 : équation différentielle du 1er degré homogène à coefficients constants

- Déterminer la solution homogène de l'équation suivante : $y^{-} + 2y = 0$
- Déterminer la solution unique vérifiant la condition initiale y(0) = 2

1) On considère l'équation différentielle non homogène : $y^{-}(x) - 3y(x) = \sin x$

- Résoudre l'équation sans second membre associé : $y^{-}(x) - 3y(x) = 0$
- Déterminer des réels a et b de sorte que la fonction p(x) est la solution particulière de l'équation différentielle qui définie par : $p(x) = a\cos x + \mathrm{bsinx}$

2) Soient a et b deux membres réels. On considère l'équation différentielle :

$y^{=}(x) = ay^{-}(x) + b$ en posant $z(x) = y^{-}(x)$

- Résoudre l'équation précédente.

Exercice 4 : équation différentielle du 1er degré avec second membre variable

- Déterminer la solution globale de l'équation suivante : $y^{-} + 2y = 4t$
- Déterminer la solution unique vérifiant la condition initiale y(0) = 3
- Résoudre l'équation de second degré suivante **:** $y^{=} - 2y + y = t$

Exercice 5 :

La charge d'un condensateur est régie par l'équation $R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{C} = E_0 \sin wt$

- Résoudre cette équation différentielle de premier ordre**.**

Exercice 6 : **équation différentielle du 1er degré homogène à coefficients variables**

- Déterminer la solution homogène de l'équation suivante : $y^{-} - 2ty = O$
- Déterminer la solution unique vérifiant la condition initiale y(0) = 2

Exercice 7 : **équation différentielle du 1er degré avec second membre à coefficients variables**

- Déterminer la solution globale de l'équation suivante : $y^{-} - 2ty = -2t$
- Déterminer la solution unique vérifiant la condition initiale y(0) = -2

Exercice 8 : **équation différentielle du 2ème degré avec second membre**

- Déterminer la solution globale de l'équation suivante : $y^{=} - 2y^{-} + y = x$
- Déterminer la solution unique vérifiant la condition initiale y(0) = y'(0)=0

Exercice 9 :

- Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial y}{\partial x}; \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{z}}\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}\partial \mathrm{z}}; \frac{\partial^2 \mathrm{y}}{\partial \mathrm{z}\partial \mathrm{x}}; \frac{\partial^2 y}{\partial \mathrm{z}^2}$

pour les fonctions suivantes : a) $y = x^2 \sin 5z$ et b) $y = x^3 \sin 2z$

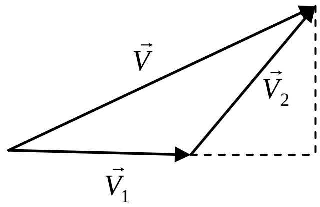
Université de 8 Mai 45 Guelma		**جـــامعة 8 ماي 45 قالمـــة**
Faculté des Sciences et de la technologie	***Série n°2***	**كليـة العلـوم و اتكنولوجيا**
Département de Génie Mécanique		**قسم الهندسة الميكانيكية**
Tronc-commun Sciences et Techniques		**الجدع المشترك علوم و تكنولوجيا**

Analyse vectorielle

Exercice 01 :

- Démontrer que le module V du vecteur $\vec{V} = V_1\vec{i} + V_2\vec{j} + V_3\vec{k}$ est de la forme

$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2}$



Exercice 02 :

- Déterminer le vecteur position d'origine **P₁**(x_1,y_1,z_1) et d'extrémité **P₂**(x_2,y_2,z_2) et trouver la distance entre les deux points $\mathbf{P_1}$ et $\mathbf{P_2}$.
- Calculer la grandeur (module) de $\vec{V}$. Sachant que $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$
- Déterminer la direction de $\vec{V}$ c.à.d. "Trouver l'angle α en fonction de θ"

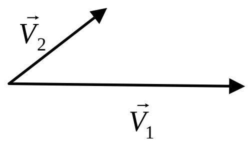
Exercice 03 :

- Exprimer l'équation d'une droite parallèle à un vecteur.

$\vec{V} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ et passant par un point P

Exercice 04:

- Représenter géométriquement la différence $\vec{D}$ de deux vecteurs $\vec{D} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$
- Calculer la grandeur de $\vec{D}$



Exercice 05 :

- Trouver l'angle que font les vecteurs.

$\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ et $\vec{B} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

Exercice 06 :

Si $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$ et $\vec{B} = B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k}$

Démontrer que : $\vec{A} \bullet \vec{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$ et $\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$

Exercice 07 :

Soit $\vec{A} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ et $\vec{B} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$

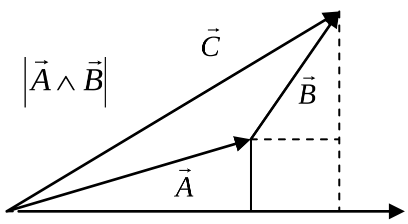
Calculer $\vec{A} \wedge \vec{B}$

Exercice 08 :

Montrer que la surface d'un parallélogramme de cotés A et B est $\left|\vec{A} \wedge \vec{B}\right|$

Exercice 09:

- Déterminer que le produit scalaire est distributif
- pour l'addition $\vec{C} \bullet (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{C} \bullet \vec{A} + \vec{C} \bullet \vec{B}$

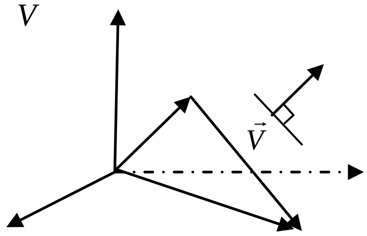


Exercice 10:

Calculer le volume d'un parallélépipède de côtés $\vec{A} = 3\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{B} = \vec{j} + 2\vec{k}$ et $\vec{C} = \vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}$

Exercice 11:

Exprimer l'équation d'un plan perpendiculaire à un vecteur $\vec{V}$ avec $\vec{V} = \mathrm{A}\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{B}\vec{\mathrm{j}} + \mathrm{C}\vec{\mathrm{k}}$ et passant par un point P_0.



Exercice 12:

Montrer que : $\frac{d}{du}(\vec{A} \bullet \vec{B}) = \vec{A} \bullet \frac{d\vec{B}}{du} + \frac{d\vec{A}}{du} \bullet \vec{B}$

Où $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont des fonctions de u dérivables.

Exercice 13:

Soit ϕ fonction scalaire. $\phi = x^2 yz^3$ et $\vec{A} = xy\vec{i} + y^2\vec{j} + 2x^2 y\vec{k}$

- Calculer : $\vec{\nabla}\phi$, $\vec{\nabla} \bullet \vec{A}$ et $\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$, $div(\phi\vec{A})$ et trouver que $rot(\phi\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge (\phi\vec{A})$

Université de 8 Mai 45 Guelma جــامعة 8 ماي 45 قالمـــة
Faculté des Sciences et de la technologie كليـة العلـوم و التكنولوجيا
Département de Génie Mécanique قسم الهندسة الميكانيكية
Tronc-commun Sciences et Techniques الجدع المشترك علوم و تكنولوجيا

Série n°3

Chapitre 02 Cinématique du point matériel

Exercice 01 :

Une particule se déplace le long de l'axe des **X** de telle sorte que sa position à chaque instant est donnée par $x = 5t^2 + 4$

- Calculer sa vitesse moyenne dans l'intervalle de temps compris entre **2s** et **5s**.
- Calculer aussi la vitesse instantanée à **2s**.

Exercice 02 :

Un corps se déplace selon les axes **x ,y et z** suivant la loi $\begin{cases} x = 2t^3 + 4t^2 + 2 \\ y = t^2 - 2t + 1 \\ z = 2t \end{cases}$

- Calculer les vecteurs vitesse et accélération à tout instant **t**.
- A quel instant $\mathbf{t_0}$ et en quel point $\mathbf{M_0}$ le mobile se trouve t-il dans le plan **xoz** ?
- Quelle est la vitesse $\mathbf{V_0}$ à cet instant ?

Pour un mouvement rectiligne uniformément accéléré, on donne $V = \int_{t_0}^{t} a\,dt + V_0$ et $X = \int_{t_0}^{t} V\,dt + X_0$, dans le cas l'accélération **a** est constante.

- Déterminer la formule de X en fonction de a, V_0 et X_0.

Exercice 03 :

Un point mobile se déplace sur une parabole d'équation : $y = 0{,}2\,x^2$. La loi horaire de l'abscisse s'écrit : $x = 5\,t$.

- Déterminer les composantes des vecteurs de la vitesse et de l'accélération en fonction du temps.
- Déterminer la distance parcourue entre **t = 0** et **t = 5s.**

Exercice 04:

Un mobile, sur une trajectoire **C** a pour vecteur position : $\vec{r}(t) = 3\cos 2t\vec{i} + 3\sin 2t\vec{j} + (8t-4)\vec{k}$

a) Calculez le vecteur de la vitesse et son module.
b) Calculez le vecteur de l'accélération et son module.
c) Calculez l'accélération tangentielle, l'accélération normale et le rayon de courbure ρ.
d) Trouvez les expressions des vecteurs unitaires $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$, vérifiez que leur module est égal à **1**.

Exercice 05:

Un disque **D** tourne librement autour d'un axe horizontal voir **figure 1**. Un fil est enroulé autour du bord extérieur du disque, et un corps **M** attaché au fil, tombe sous l'action de la pesanteur. Le mouvement de **M** est uniformément accéléré mais, son accélération est plus petite que celle due à la pesanteur. A l'instant **t = 0**, la vitesse du corps est **0,04 ms^{-1}**, et **2s** plus tard **M** est tombé de **0,2m**.

✐ Trouver l'accélération normale et tangentielle, à chaque instant, pour un point quelconque du bord du disque.

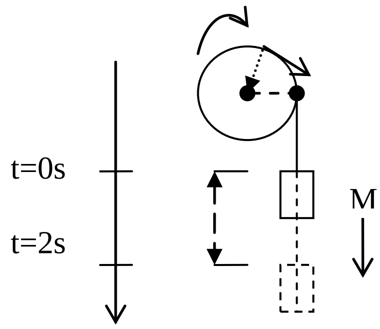


Figure 1

Exercice 06:

Un mobile **M** est repéré par ses coordonnées polaires **(r,θ).**

❒ Montrer qu'en coordonnées polaires $\vec{v}$ est donnée par : $\vec{v} = r^{\bullet}\vec{u}_r + r\theta^{\bullet}\vec{u}_\theta$

Exercice 07 :

Un mobile est animé sur l'axe **x`Ox** d'un mouvement rectiligne sinusoïdal de fréquence ν= 10 Hz et d'amplitude $\mathbf{x_0 = 2mm}$. A l'instant **t = 0**, le mobile se trouve en $\mathbf{x= x_0}$.

- Ecrire la loi horaire du mouvement.
- Calculer la vitesse initiale.

Exercice 08 :

Un mobile se déplace sur l'axe **x`Ox** d'un mouvement rectiligne sinusoïdal. Les positions extrêmes ont pour abscisses **-5cm** et **+ 15cm** c à d $x \in [-5 \;\; , \;\; +15]$. La période de mouvement est T **= 2s**. A **t = 0**, le mobile est en **O** et se déplace dans le sens des **x** croissants.

- Ecrire la loi horaire du mouvement.
- Donner les expressions de la vitesse et de l'accélération.

Exercice 09:

Un point **M** décrit une hélice circulaire d'axe **OZ**. Les équations paramétriques sont :

$$\begin{cases} x = \mathrm{R}\cos(\theta) \\ \mathrm{y} = \mathrm{R}\sin(\theta) \\ z = \mathrm{h}\theta \end{cases}$$

h et **R** sont des constantes, **θ** est l'angle polaire

- Donner en coordonnées cartésiennes et cylindriques les expressions des vecteurs de la vitesse et accélération.
- Montrer que le vecteur de la vitesse fait avec le plan **Oxy** un angle constant.
- Montrer que si **θ = wt** « **w** est constant », le vecteur de l'accélération passe par l'axe du cylindre et est parallèle au plan **Oxy**.

Exercice 10:

On donne les équations horaires d'un mouvement hélicoïdal : $\begin{cases} x = \mathrm{R}\cos(\mathrm{wt}) \\ \mathrm{y} = \mathrm{R}\sin(\mathrm{wt}) \\ z = at \end{cases}$

Où **R, w et a** sont des constantes caractéristiques du mouvement.

- Calculer le vecteur $\vec{V}$ et son module à tout instant.
- Calculer le vecteur accélération $\vec{\gamma}$ et le produit scalaire $\vec{V} \bullet \vec{\gamma}$ à tout instant.

- En déduire que l'accélération tangentielle est nulle.
- Confronter ce résultat avec le calcul du module de $\vec{V}$.

Exercice 11 :

On considère deux référentiels **$\mathfrak{R}$(o, x, y, z)** et **$\mathfrak{R}$`(o,x`,y`,z`)** dont les axes **oz** et **oz`** sont confondus, **$\mathfrak{R}$`** tourne autour de **oz** avec une vitesse angulaire **w** constante. Soit une particule **M** animée d'un mouvement uniforme de vitesse $\vec{v} = v_O \vec{u}_r$ le long de **o x`**. A l'instant **t = O**, **OM = r = 0**

A l'instant **t**, déterminer et représenter dans l'espace sur une figure :

a) les vecteurs de la vitesse et accélération de **M** dans le repère absolu à partir de l'expression du rayon vecteur.

b) Le vecteurs de la vitesse de la particule dans **$\mathfrak{R}$`** ainsi que sa vitesse d'entraînement.

c) Les vecteurs accélérations relatives $\vec{\gamma}_r$, d'entraînement $\vec{\gamma}_e$ et de Coriolis $\vec{\gamma}_c$.

d) vérifier qu'en appliquant la règle de composition des accélérations, on retrouve le résultat de la question 1-a).

Exercice 12:

On tire une balle verticalement vers le haut avec une vitesse de V_0=98ms^{-1} depuis le toit d'un bâtiment de x_0=100 m de haut voir **figure 02**.

- Trouver la hauteur maximum atteinte par rapport au sol.
- Calculer le temps nécessaire pour y parvenir.
- Calculer sa vitesse quand elle touche le sol.

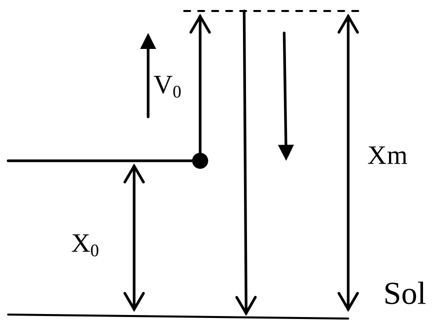


Figure 02

Exercice 13:

- Trouver la vitesse angulaire de la terre autour de son axe pour la période de révolution P= 8,616 10^4 S, correspond à un jour sidéral moyen.

Exercice 14 :

Un avion **A** vole vers le nord à **30 mih^{-1}** par rapport au sol. Au même moment, un autre avion **B** vole dans la direction Nord **60°** West, à **200 mih-1** par rapport au sol.

- Trouver la vitesse de **A** par rapport à **B** et celle de **B** par rapport à A voir **figure 3.**

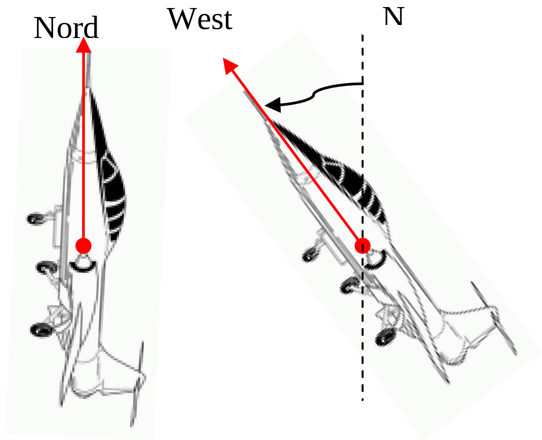


Figure 03

<u>Exercice 15:</u> Mouvements relatifs et absolus

Un point matériel M de masse **m** glisse sans frottement sur une tige rigide (D). La tige **(D)** tourne dans un plan horizontal (xoy) autour de l'axe vertical **oz** avec la vitesse angulaire $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$, où θ représente l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{u}_r)$ et $\vec{u}_r$ est un vecteur unitaire de (D) voir figure 4. Le mouvement du point matériel **M** sur la droite (D) est décrit par l'équation horaire : $r = r_0(1 + \sin \omega t)$ où r_0 est une constante positive et $\vec{r} = o\vec{M} = r\vec{u}_r$. On appelle mouvement relatif de M son mouvement sur la droite (D) et mouvement absolu son mouvement par rapport au repère $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, pour M dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

- Déterminer la vitesse et l'accélération relatives.
- Déterminer la vitesse et l'accélération d'entraînements.
- Déterminer l'accélération de Coriolis et l'accélération totale.

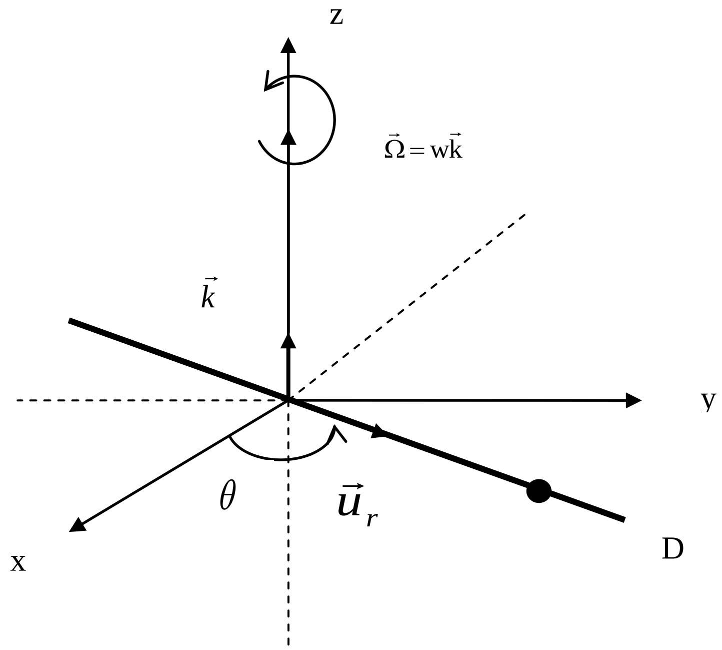


Figure 04

Exercice 16 :

Le diagramme des vitesses d'un mobile animé d'un mouvement rectiligne est donné par la figure 5, sachant qu'à t = 0 s, v (0) = 0 (ms^{-1}) et x (0) = 0 m.

i. Tracer le diagramme des accélérations du mobile dans l'intervalle de temps $[0,10]$s

ii. Tracer le diagramme des espaces du mobile à $[0,7]$s.

iii. Trouver la distance parcourue par le mobile entre les instants t =0 s et t =10s

iv. Décrire le mouvement du mobile dans l'intervalle de temps $[0,10]$s.

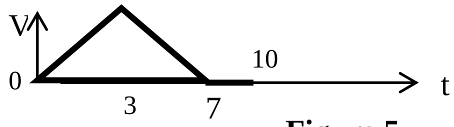


Figure 5

Exercice 17: Repères cylindrique et sphérique

Le vecteur position en coordonnées cylindriques s'écrit : $\vec{r} = \rho\,\vec{u}_\rho + z\,\vec{k}$, et que les vecteurs unitaires cylindriques s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases}$$

- Montrez que : $d\vec{r} = d\rho\,\vec{u}_\rho + \rho d\theta\,\vec{u}_\theta + dz\,\vec{k}$

En système de coordonnées sphériques, le vecteur unitaire $\vec{u}_r$ s'écrit :

$\vec{u}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}$

- En suivant les indications du cours, trouver les expressions de $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\varphi$.
- Montrez que : $d\vec{r} = dr\,\vec{u}_r + r d\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{u}_\varphi$

Université de 8 Mai 45 Guelma
Faculté des Sciences et de la technologie
Département de Génie Mécanique
Tronc commun Sciences et Techniques

جـــامعة 8 ماي 45 قالمـــة
كليـة العلـوم و التكنولوجيا
قسم الهندسة الميكانيكية
الجدع المشترك علوم و تكنولوجيا

Série n°4

Chapitres 03 et 04

Dynamique du point matériel, Travail et Energie

Exercice 01 :

Un point matériel de masse m = 5kg se déplace sous l'action d'un champ de force le long d'une courbe dont le vecteur de la position est :

$$\vec{r} = (2t^3 + t)\vec{i} + (3t^4 - t^2 + 8)\vec{j} - 12t^2\vec{k}.$$

- Trouvez la vitesse, la quantité du mouvement, l'accélération et le champ de force à l'instant t.

Exercice 02:

Démontrer que le couple de la force (ou moment de la force) par rapport à l'origine O s'exerçant sur un point matériel est égal la variation de son moment cinétique.

$$\vec{M}(f) = \vec{r} \wedge \vec{F} = \frac{d\vec{L}_o}{dt}$$

Exercice 03 : Pendule conique

On fait tourner autour de la verticale avec une vitesse angulaire **w** une masse **m** suspendue à un point fixe par un fil de longueur **L**.

Trouver l'angle du fil avec la verticale.

Exercice 04 :

Un corps de masse **0,80 kg** se trouve sur un plan incliné de α= 30°. Sachant que le coefficient de frottement de glissement sur le plan est 0,30

Calculer la force appliquée au corps pour qu'il se déplace vers le haut ?
Pour un mouvement uniforme puis avec une accélération de 0,1 ms^{-2}.

Exercice 05 :

Calculer le travail fourni par la force $\vec{F} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ à un objet se déplaçant le long d'un segment représenté par le vecteur $\vec{r} = 3\vec{i} + 2j - 5\vec{k}$.

Exercice 06 :

Montrer que le travail fourni est égal à la variation d'énergie cinétique.

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \bullet d\vec{r} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Exercice 07 :

Montrer que le champ de la force suivant dérive d'un potentiel.

$$\vec{F} = (y^2z^3 - 6xz^2)\vec{i} + 2xyz^3\vec{j} + (3xy^2z^2 - 6x^2z)\vec{k}$$

Sujets d'examen de physique I

Université 8 mai 1945 Guelma
Département ST – SM
1ère année licence « ST-SM »
Durée 02 heures

Guelma, le 21/02/2009

EXAMEN FINAL DE PHYSIQUE 1

Questions de cours (6pts) :

✍ Démontrer que la force conservative $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle « utilisez les coordonnées cartésiennes ».

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p = -\,\mathrm{gr\vec{a}d}\,\vec{E}p$$

✍ En déduire les composantes de la force $\vec{F}$ en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z)

✍ Démontrer que le travail fourni entre t_1 et t_2 est égal la variation de l'énergie cinétique.

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \bullet d\vec{r} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Exercice 01(6pts) :

Un point matériel M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z), sachant que :

$$\begin{cases} x(t) = R(t - \sin t) \\ y(t) = R(1 - \cos t) \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

- Déterminer les composantes du vecteur de la vitesse et les composantes du vecteur de l'accélération.
- Calculer les modules du vecteur de la vitesse $\vec{v}$ et de vecteur de l'accélération $\vec{a}$.
- En déduire l'accélération tangentielle a_τ et l'accélération normale a_n.

Exercice 02 (4pts) :

Un mobile suit un mouvement rectiligne tel que, à chaque instant, le vecteur accélération $\vec{a}$ est opposé au vecteur vitesse $\vec{v}$ et son module $\|\vec{a}\|$ est double de celui de la vitesse. A l'instant t = 0, la vitesse est v_0 =4 m/s

☑ Calculer la loi de variation de la vitesse en fonction du temps.

Exercice 03 (4pts)

Deux points mobiles M_1 et M_2 se déplacent à vitesse constante selon deux directions orthogonales et se dirigent vers un point fixe A.

Déterminer la vitesse du mobile M_1 par rapport au mobile M_2.

Bonne Chance *MAIZI Rafik*

Université 8 mai 1945 Guelma
Département ST
1ère année licence « ST »
Durée 02 heures

Guelma, le 13/02/2011

EXAMEN DU 1ER SEMESTRE FINAL DE PHYSIQUE 1

Questions de cours (06 pts) :

Démontrer que l'accélération $\vec{a}$ pour un mouvement curviligne dans un repère de Frénet sera de la forme suivante :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

Exercice 01 (04 pts) :

Un mobile **M** de vecteur position est repéré par ses coordonnées cylindriques **(ρ,θ,z)** et de base associée $(\vec{u}_\rho,\ \vec{u}_\theta, \vec{k})$ comme suit : $\vec{r} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k}$

Donner en coordonnées cylindriques les expressions des vecteurs vitesse et accélération.

Exercice 02 (06pts) :

Un point matériel M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z), sachant que :

$$\begin{cases} x(t) = 3 + a\sin wt \\ y(t) = 3 + a\cos wt \\ z(t) = 3t \end{cases}$$

Où a et w sont des constantes

- Déterminer les composantes du vecteur de la vitesse et vecteur de l'accélération.
- Calculer les modules du vecteur de la vitesse $\vec{V}$ et de vecteur de l'accélération $\vec{a}$.
- En déduire l'accélération tangentielle a_τ et l'accélération normale a_n.
- Calculer le rayon de courbure **ρ.**
- Trouvez les expressions des vecteurs unitaires $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$.
- Déduire l'équation de la trajectoire dans le plan xoy.

Exercice 03 (04 pts) :

Un corps de masse **m=10 kg**, soumis à une force **F=120t +40**, se déplace en ligne droite le long de l'axe des X. A l'instant t = 0, le corps se trouve à x_0 =5m, avec une vitesse v_0 =6m/s.

☑ Trouver sa vitesse et sa position à l'instant t.

Bonne Chance et bon courage **MAIZI - RAFIK**

Université 8 mai 1945 Guelma
Département ST
1ère année licence « ST »
Durée 02 heures

Guelma, le jeudi 07 avril 2011

EPREUVE DE RATTRAPAGE DE PHYSIQUE 1 DU 1ER SEMESTRE

Questions de cours (06 pts) :

✍ Démontrer que le travail fourni entre t_1 et t_2 est égal la variation de l'énergie cinétique.

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \bullet d\vec{r} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

✍ Calculer l'énergie potentielle associée avec les forces centrales suivantes : $\begin{cases} 1)\ F = kr\,, \\ 2)\ F = \dfrac{k}{r^2} \end{cases}$

avec k est constante.

Exercice 01 (04 pts) :

➢ Trouver l'angle que font les vecteurs : $\vec{A} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ et $\vec{B} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

Exercice 02 (06pts) :

Un point matériel M est repéré par son vecteur position $\vec{r}(t)$ suivant :

$$\vec{r}(t) = (2t+1)\vec{i} + (4t^2 + 4t + 1)\vec{j} + 5\vec{k}$$

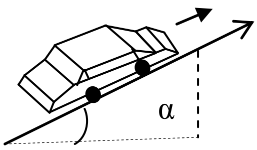
- Déterminer les composantes du vecteur de la vitesse et vecteur de l'accélération.
- Calculer les modules du vecteur de la vitesse $\vec{V}$ et de vecteur de l'accélération $\vec{a}$.
- En déduire l'accélération tangentielle a_τ et l'accélération normale a_n.
- Déduire l'équation de la trajectoire dans le plan xoy.

Exercice03 (04 pts

Une automobile de masse **m**=10^3Kg remonte une rue (route) inclinée de 20° voir figure ci - contre.

🕮 Déterminer la force produite par le moteur, lorsque la voiture se déplace dans les deux cas suivants:

a) D'un mouvement uniforme, b) Avec une accélération de 0.2 ms^{-2}



🕮 Trouver aussi dans chaque cas la force exercée sur l'automobile par la route.

Bonne Chance et bon courage *MAIZI Rafik*

Université 8 mai 1945 Guelma
Département ST
1ère année licence « ST »
Durée 02 heures

Guelma, le mercredi 20 juin 2012

EPREUVE DE RATTRAPAGE DE PHYSIQUE 1 « MÉCANIQUE DU POINT »

Questions de cours (06 points) :

Soit un point matériel **M** de masse **m**. Le point **M** décrit un mouvement plan, dans le plan (Ox, Oy).
On désigne par **r** et **θ** les coordonnées polaires du point **M** et par $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ la base locale liée au point **M**.

✍ Exprimer en fonction de $r, \theta, \dot{\theta}$ *et* $\ddot{\theta}$ les cordonnées des vecteurs $\vec{r}, \vec{v}$ et $\vec{a}$ (vecteurs position, vitesse et accélération du point mobile **M**).

✍ Conclure les expressions des vecteurs $\vec{r}, \vec{v}$ et $\vec{a}$ pour un mouvement circulaire.

Exercice 01 (04 points) :

Une voiture de masse **m=1000 kg** roule sur une route rectiligne et horizontal à la vitesse constante **v=72kmh^{-1}**. Le conducteur freine brusquement et s'arrête après une distance **d= 50 m**.

- Déterminer la valeur de l'accélération (supposée constante).
- Déterminer la valeur de la force de freinage.

Exercice 02 (06points) :

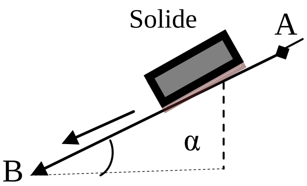
Un point matériel M est repéré par son vecteur position $\vec{r}(t)$ suivant :

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + \frac{4}{3}t^{3/2}\vec{k}$$

- Déterminer les composantes du vecteur de la vitesse et vecteur de l'accélération.
- Calculer les modules du vecteur de la vitesse $\vec{v}$ et de vecteur de l'accélération $\vec{a}$.

Exercice 03 (04 points) :

Un solide ponctuel de masse **m** peut glisser le long d'un plan incliné d'un angle **α** par rapport à l'horizontal. Il part d'un point **A** sans vitesse initiale « voir figure ci – contre ».



🕮 Déterminer l'accélération à l'instant **t** acquise par le solide dans les deux cas suivants :

b) Les frottements sont négligeables, b) les frottements sont équivalents à une force $\vec{f}$ parallèle à x'x et d'intensité constante **f**.

- En déduire l'accélération tangentielle a_τ et l'accélération normale a_n

Bonne Chance et bon courage *MAIZI Rafik*