République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté de Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Laboratoire de Mathématiques Appliquées et de Modélisation
Département de Mathématiques

Thèse :

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat 3ème cycle en Mathématiques

Option : Mathématiques Appliquées
Par : BENSSAAD Meryem

Intitulée

Modélisation Mathématique de l'interaction atmosphère-radiation

Devant le jury

Président : AISSAOUI Mohamed Zine	**Pr. Université de Guelma**
Rapporteur : ELLAGOUNE Fateh	**Pr. Université de Guelma**
Co-Rapporteur : FUJITA YASHIMA Hisao	**Pr. Université de Guelma**
Examinateur : BENCHETTAH Azzedine	**Pr. Université de Annaba**
Examinateur : GUESMIA Amar	**MCA. Université de Skikda**
Examinateur : CHAOUI Abdrezzak	**MCA. Université de Guelma**

Résumé

Nous nous intéressons dans cette thèse aux différents modèles de l'interaction atmosphère et radiation. En effet, nous étudions le système couplant les équations de la radiation et celles de mouvement de l'air, les conservations de la densité, du quantité de mouvement et du bilan de l'énergie. Si une radiation significative est présente, on doit inclure l'énergie radiative dans l'équation de bilan de l'énergie. Cela étant on substitue à la source de la chaleur l'effet du rayonnement. Dans la première partie, nous considérons le système d'équations décrivant le mouvement d'un gaz visqueux et calorifère avec l'effet thermique de la radiation dans un domaine borné de $\mathbb{R}^3$. En supposant que les coefficients d'absorption et la force extérieure sont petits et que les radiations qui entrent sont suffisamment homogènes, nous démontrons l'existence d'une solution stationnaire de ce système. Dans la deuxième partie, nous considérons le système d'équation décrivant l'intensité de la radiation et du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau dans un domaine borné de $\mathbb{R}^3$. Sous des hypothèses convenables nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution locale de ce système.

Mots clés : Transfert radiatif, mouvement de l'air, transition de phase, solution stationnaire, existence locale.

Mathematics Subject Classification (2010). 93A30, 34K21, 35A01.

الملخص

في هذه الأطروحة نهتم بنماذج مختلفة من التفاعلات بين الغلاف الجوي والإشعاع،وبالتالي نقوم بدراسة الاقتران بين معادلة الإشعاع مع معادلات حركة الهواء (معادلة ناتج الكتلة، معادلة ناتج كمية الحركة، معادلة ناتج الطاقة). في حالة وجود الإشعاع يجب إضافة الطاقة الإشعاعية في معادلة ناتج الطاقة،ومن هذا نقوم بتعويض قيمة مصدر الحرارة بتأثيرات الطاقة.

في الجزء الأول نقوم بدراسة جملة معادلة حركة الغاز اللزج مع تأثيرات الإشعاع في نطاق محدود من فضاء ثلاثي الإبعاد، مع افتراض أن عامل الامتصاص والقوة الخارجية صغيرتين وافتراض أن الإشعاع الداخل متجانس، نبرهن وجود حل ثابت لهذه الجملة

في الجزء الثاني نقوم بدراسة جملة معادلة شدة الإشعاع وحركة الهواء مع تحول أطوار المادة، في نطاق محدود من فظاء ثلاثي الإبعاد، نبرهن وجود وأحادية الحل المحلي لهذه الجملة في ظل افتراضات مناسبة.

الكلمات الاستدلالية: التحويل الإشعاعي, حركة الهواء, تحولات المادة, الحل ثابت, الحل المحلي.

التصنيف الرياضي(2010).93A30, 34K21, 35A01

Abstract

We are interested in this thesis to different models of interaction the atmosphere-radiation. Indeed, we study the system coupling equations of radiation and those of air movement, conservations density, momentum and energy balance. If a serious radiation is present, it must include the radiative energy in the energy balance equation. However we replace the source of the heat the effect of radiation. In the first part, we consider the system of equations describing the motion of a viscous gas with the heating effect of the radiation in a bounded domain $\mathbb{R}^3$. Assuming that the absorption coefficients and the external force are small and the radiation entering are sufficiently homogeneous, we demonstrate the existence a stationary solution of this system. In the second part, we consider the system of equations describing the intensity of the radiation and air movement with the phase transition of water in a bounded domain $\mathbb{R}^3$. We prove the existence and uniqueness of the local solution of this system under suitable assumptions.

Key words : Radiative transfer, motion of the air, phase transition, stationary solution, local existence.

Mathematics Subject Classification (2010). 93A30, 34K21, 35A01.

Remerciements

Je tiens, avant tout, à remercier très sincèrement mon directeur de thèse : Monsieur Fateh ELLAGGOUNE. Je le remercie de m'avoir fait confiance tout au long de ces années, pour le temps qu'il m'a consacré et pour le soutien qu'il m'a apporté, je le remercie infiniment.

Je remercie très sincèrement aussi Monsieur Hisao FUJITA YASHIMA, mon co-encadreur de thèse pour la quantité des discussions et ses vaste connaissances de modélisations mathématique où j'ai découvert des sujets intéressants. Il a guidé avec compétence et disponibilité mes recherches mathématiques.

J'ai eu la chance d'effectuer une partie de ma thèse grâce aux conseils de Monsieur Mohamed Zine AISSAOUI. Je le remercie pour sa collaboration, son esprit d'analyse, et sa gentillesse qui m'a beaucoup touché. C'est donc un grand plaisir de l'avoir à mon jury.

Je remercier vivement Monsieurs Azzedine BENCHETTaH, Amar GUESMIA et Abd-Elrezak CHAOUI, d'avoir accepté de rapporter ma thèse et de faire partie de mon jury de soutenance.

J'ai effectué ma thèse au laboratoire LMAM. C'est un endroit propice à la recherche et je remercie tous les membres du laboratoire d'y contribuer. Merci surtout à Sarra et Wahida de m'avoir donné plein d'aide.

Enfin, pour les aides et encouragements que j'ai reçus de ma grande "famille", je leur exprime tout ma gratitude. Merci de m'avoir soutenu tout au long de ces années d'études. Et surtout merci à mes parents d'avoir supporté mon caractére et d'avoir été à mes cotés.

A titre plus personnel, Je remercie chaleureusement mon fiancé, Ahmed Samer Touati, pour la grande patience, l'encouragement et la confiance qu'il m'a témoigné. Je tiens à le remercier surtout pour son soutien moral ininterrompu et ses nombreux conseils tout le long de ma thèse.

Table des matières

Introduction **1**

1 Solution stationnaire du système d'équations de la radiation et du mouvement d'un gaz visqueux et calorifère **9**

1.1 Introduction. 9

1.2 Préliminaires et résultat principal. 12

1.3 Préliminaires à la démonstration. 15

1.4 Equations linéarisées. 17

1.5 Estimations de la solution des équations linéarisées 21

1.6 Application du théorème du point fixe de Schauder. 30

2 Le système d'équations décrivant l'intensité de la radiation et de mouvement de l'air avec les transitions de phase de l'eau **36**

2.1 Introduction. 37

2.2 Hypothèses et résultat principal 41

2.3 Equation de l'intensité de la radiation 44

2.4 Equations linéaires pour les densités. 52

2.5 Equation pour les densités de l'eau avec la température et la vitesse données. 59

2.6 Equations linéaire pour la vitesse et la température. 64

2.7 Existence et unicité de la solution locale. 66

Conclusion et perspective **73**

Bibliographie **74**

INTRODUCTION

Même si les phénomènes qui ont lieu dans l'atmosphère comme le vent, la pluie, le réchauffement par la radition et son effet thermique dans l'atmosphère sont bien observés et bien documentés, la complexité de ces phénomènes dans leur ensemble ne nous permet pas facilement de les décrire par un système d'équations mathématiquement cohérent. Nous désirons alors apporter notre contribution à l'étude mathématique des équations qui décrivent ces phénomènes.

Tous les échanges d'énergie entre la Terre et le reste de l'univers se produisent par transfert radiatif. L'énergie radiative du Soleil est pratiquement la seule source d'énergie qui influence les mouvements atmosphériques et les divers processus qui ont lieu dans les couches atmosphériques et à la surface de la Terre. Le procédé le plus important qui est responsable pour le transfert d'énergie dans l'atmosphère est le rayonnement éléctromagnétique et ce rayonnement se déplace à la vitesse de la lumière sous forme d'onde éléctromagnétique. Le rayonnement électromagnétique subit des interactions avec les molécules gazeuses et les particules (aérosols, gouttelettes d'eau, poussières, $\cdots$) présentes dans l'atmosphère ; ces particules et molécules vont provoquer un blocage et/ou une déviation du rayonnement, diminuant ainsi l'énergie transportée par le rayonnement électromagnétique. Ces effets sont causés par les mécanismes de diffusion et d'absorption ; en particulier l'absorption du rayonnement par l'air provoque l'augmentation de la température. Cependant l'air réchauffé, à son tour, émet le rayonnement, ce qui entraîne la diminution de la température.

Le mécanisme de diffusion se produit lors de l'interaction entre le rayonnement incident et les particules ou les grosses molécules de gaz présentes dans l'atmosphère, ces derniers dévient le rayonnement de sa trajectoire initiale. Le niveau de diffusion dépend de plusieurs facteurs comme la longueur d'onde, la densité des particules et des molécules et l'épaisseur de l'atmosphère que le rayonnement doit franchir. Il existe trois types de diffusion : *diffusion de Rayleigh, la diffusion de Mie et la diffusion non-sélective*.

La diffusion de Rayleigh, se produit lorsque la taille des particules est inférieure à la longueur d'onde du rayonnement. Celles-ci peuvent être soit des particules de poussière ou des molécules d'azote ou d'oxygène. La diffusion de Rayleigh disperse et dévie de façon plus importante les courtes longueurs d'onde que les grandes longueurs d'onde. Cette forme de diffusion est prédominante dans les couches supérieures de l'atmosphère, ce qui explique pourquoi nous percevons un ciel bleu durant la journée. Comme la lumière du Soleil traverse l'atmosphère, les courtes longueurs d'onde (correspondant au bleu) du spectre visible sont dispersées et déviées de façon plus importante que les grandes longueurs d'onde. Au coucher et au lever du Soleil, lorsque le rayonnement parcourt une plus grande distance à travers l'atmosphère, il y aura apparition de couleur rouge. La diffusion des courtes longueurs d'onde est plus importante, ce qui permet à une plus grande proportion de grandes longueurs d'onde de pénétrer l'atmosphère.

On parle de diffusion de Mie lorsque les particules sont presque aussi grandes que la longueur d'onde du rayonnement. Ce type de diffusion est souvent produite par la poussière, le pollen, la fumée et l'eau. Ce genre de diffusion affecte les plus grandes longueurs d'onde et se produit surtout dans les couches inférieures de l'atmosphère où les grosses particules sont plus abondantes, par conséquent ce processus domine quand le ciel est ennuagé.

Le troisième type de diffusion est celui de la diffusion non-sélective. Ce genre de diffusion se produit lorsque les particules (les gouttelettes d'eau et les grosses particules de poussière) sont beaucoup plus grosses que la longueur d'onde du rayonnement. Nous appelons ce genre de diffusion "non-sélective", car toutes les longueurs d'onde sont dispersées. Les gouttelettes d'eau de l'atmosphère dispersent le bleu, le vert et le rouge de façon presque égale, ce qui produit un rayonnement blanc, qui apparait au niveau du brouillard et les nuages nous paraissent blancs.

Un autre phénomène entre en jeu lorsque le rayonnement électromagnétique interagit avec l'atmosphère, c'est *Le mécanisme d'absorption*, qui survient lorsque certains molécules de l'atmosphère (ozone, bioxyde de carbone et vapeur d'eau) absorbent l'énergie de diverses longueurs d'onde.

L'ozone absorbe les rayons ultraviolets qui sont néfastes aux êtres vivants, tandis que le bioxyde de carbone absorbe beaucoup de rayonnement dans la portion infrarouge thermique du spectre et emprisonne la chaleur dans l'atmosphère ; enfin la vapeur d'eau dans l'atmosphère absorbe une bonne partie du rayonnement infrarouge de grandes longueurs d'onde et des hyperfréquences de petites longueurs d'onde qui entrent dans l'atmosphère (entre 1μm et 22μm). La présence d'eau dans la partie inférieure de l'atmosphère varie grandement d'un endroit à l'autre et d'un moment à l'autre même dans la journé.

Nous rappelons que l'émission est le processus opposé de l'absorption ; il s'agit du processus par lequel un objet émet des radiations. Les objets ayant une certaine température tendent à émettre certaines quantités de radiation de longueurs d'ondes suivant les courbes d'émission du "corps noir" (capable d'absorber complètement toutes les radiations électromagnétiques).

L'équation qui décrit ces phénomènes s'appelle équation de transfert radiatif (ou l'équation de la radiation), c'est une équation du bilan de type équation de Boltzmann, elle est cependant beaucoup plus simple que cette dernière (les particules n'interagissent pas entre elles, mais avec des diffuseurs-absorbeurs fixes). En outre le champ radiatif est décrit par son intensité spécifique $I_\lambda(t,x,q)$ (voir [22]), qui est une fonction dépendant du temps $t \in \mathbb{R}_+$, de la position $x \in \mathbb{R}^3$, de la direction de la propagation du rayonnement $q \in S^2$ et de leur longueur d'onde $\lambda \in \mathbb{R}_+$; elle est définie par l'équation

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} I_\lambda(t,x,q) + (q\cdot\nabla) I_\lambda(t,x,q) = S_{a,e} + S_r, \tag{.1}$$

où c est la vitesse de la lumière.

Le terme à gauche dans (.1) caractérise le transport du rayonnement et le terme source du second membre de (.1) représente les interactions avec le milieu, où $S_{a,e}$ décrit les phénomèmes d'absorption et d'émission de la radiation et S_r décrit les phénomèmes de diffusion, qui se traduisent par des changements de la direction des trajectoires des rayonnements. Or, si nous voulons décrire d'une manière plus réelle les effets de la radiation dans l'atmosphère, nous avons besoin de coupler les équations de la radiation avec celles du mouvement de l'air.

Le mouvement de l'air de l'atmosphère terrestre (l'air sans vapeur d'eau) peut être décrit par un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires d'un gaz visqueux et calorifère (voir par exemple [21]). En effet, si on désigne par ϱ la densité de l'air sec, par $u = (u_1, u_2, u_3)$ sa vitesse, par p sa pression et par T sa température, la loi de conservation de la masse et celle de la quantité de mouvement recpectivement s'expriment par les équations

$$\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho u) = 0, \tag{.2}$$

$$\varrho \partial_t u + \varrho(u \cdot \nabla)u + R\nabla(\varrho T) = \eta \Delta u + (\frac{1}{3}\eta + \zeta)\nabla(\nabla \cdot u) + \varrho f, \tag{.3}$$

tandis que le bilan de l'énergie, exprimé en fonction de la température, sera décrit par l'équation

$$\begin{aligned} c_v \varrho(\partial_t T + u \cdot \nabla T) + R\varrho T \nabla \cdot u = \\ = \kappa \Delta T + \eta \sum_{j,k=1}^{3} (\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j})\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + (\zeta - \frac{2}{3}\eta)(\nabla \cdot u)^2 + g, \end{aligned} \tag{.4}$$

où η et ζ sont les coefficients de viscosité d'écoulement et volumique de l'air, f est la force extérieure, g est la source de la chaleur (principalement due à la radiation), κ est la conductibilité thermique, c_v est la chaleur spécifique à volume constant et R est la constante universelle des gaz.

D'autre part pour formuler les équations du mouvement de l'air de manière suffisamment complète, il faut distinguer les densités de l'air sec et de la vapeur d'eau, ainsi que H_2O liquide et solidifiée, plus précisément on ajoute les éléments qui résultent des processus de transition de phase de l'eau dans l'atmosphère.

La transition de phase de l'eau réalisée dans l'atmosphère, donnant naissance á des nuages et provoquant la pluie et la neige, concerne donc les trois états et les six types de transition de phase de l'eau, à savoir condensation-évaporation, solidification-fusion et sublimation et son inverse (pour plus de détails voir par example [18, 24, 29, 30, 33, 34]).

La transition de phase de l'eau est basée essentiellement sur deux quantités appelées *pression de la vapeur saturée* $\overline{p}_{vs}(T)$ et la *chaleur latente* L_{gs}. La condensation de la vapeur d'eau se réalise lorsque, à une température supérieure à celle de la fusion de H_2O la pression de la vapeur dépasse une valeur critique au-de-la de laquelle les molécules de H_2O en état gazeux tendent à s'établir en état liquide et elle est notée $\overline{p}_{vs(l)}(T)$; dans le cas contraire on aura le phénomène d'évaporation. Aux températures inférieures à celle de la fusion, au lieu de la condensation (resp. de l'évaporation) il y aura la sublimation inverse (resp. la sublimation), où la pression de la vapeur saturée doit être considérée sur la surface de la glace et elle est notée $\overline{p}_{vs(s)}(T)$.

D'autre part, les processus de transition de phase contribue de manière appréciable à la variation de la température. Grâce á une absorption ou emission d'énergie ce phénomène est connu sous le nom de *chaleur latente*. Ainsi on désigne par L_{gl}, L_{ls} et L_{gs} respectivement la chaleur latente relative à la transition gaz-liquide, liquide-solide et gaz-solide ; ces valeurs vérifient la relation

$$L_{gs} = L_{gl} + L_{ls}.$$

Pour les valeurs experémentales de $\overline{p}_{vs(l)}(T)$, $\overline{p}_{vs(s)}(T)$ L_{gl}, L_{ls} et L_{gs} voir par exemple [23].

Pour l'étude mathématique d'un système d'équations décrivant le mouvement de l'air avec les transitions de phase, nous rappelons d'abord le travail de Fujita Yashima, Campana, Aissaoui [18], qui propose un modèle mathématique assez général modélisant le mouvement de l'air y compris la condensation et l'évaporation et le mouvement des gouttelettes d'eau. D'autre part, Selvaduray, Fujita Yashima [33], ont fourni une description mathématique assez complète, qui prend en charge toutes les transitions de phases et qui représente une généralisation du modèle proposé dans [18] ; les auteurs ont tenté de montrer qu'un système d'équations décrivant le mouvement de l'air contenant les transitions de phase de l'eau et la variation de la quantité des gouttelettes d'eau et des morceaux de cristaux est bien posé, en démontrant l'existence et l'unicité de la solution locale de ce système d'équations. Mais dans [33], devant la difficulté technique, les auteurs ont modifié le système d'équations, en remplaçant la fonction représentant la densité de la vapeur $\pi(t,x)$ par son approximation $\pi_\vartheta(t,x)$ définie par la convolution avec une fonction régularisante. D'autre part, l'étude d'un système d'équations décrivant le mouvement de l'air sans transition de phase de l'eau et l'effet de la radiation a été proposé par Amosov [1], qui a démontré l'existence et l'unicité de la solution globale du système d'équations en une dimension, ainsi Ducomet et ses co-auteurs dans ces travaux (voir [11–15]) ont étudié la solution faible de l'équation d'évolution dans un domaine de dimension 1 ou 3.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à étudier les équations qui décrivent le couplage entre les équations de mouvement de l'air (sans transition de phase et avec les transitions de phase) et l'équation de la radiation dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. L'intensité de la radiation a une structure assez différente des équations du mouvement de l'air, mais le comportement de l'effet thermique de la radiation par rapport à la température, a une bonne propriété de telle sorte que l'effet de la radiation, puisse être inséré dans l'équation du bilan de l'énergie du mouvement de l'air, sans altérer la structure essentielle de cette dernière équation. Dans le cas d'absence des transitions de phases, nous démontrons l'existence d'une solution stationnaire du système d'équations de la radiation et du mouvement de l'air. Au cas de la présence des transitions de phase, nous considérons un système d'équations analogue à celui qui a été considéré dans [33] (resp. dans [18]), mais nous y insérons une équation décrivant l'effet thermique de la radiation et nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution locale sans modifier le système d'équations, c'est-à-dire sans utiliser l'approximation par une régularisation de la densité de la vapeur $\pi(t,x)$. Toutefois, pour ne pas alourdir la présentation du travail, nous nous limitons au cas où seulement les deux états – gazeux et liquide – sont présents. En effet, il nous semble que le comportement mathématique de la fonction de la densité de l'eau solidifiée dans l'air est plutôt similaire à celui de la fonction de la densité de l'eau liquide dans l'air.

Contenu de la thèse. Notre thèse est constituée par une introduction, deux chapiter et une conclusion.

Dans l'introduction, on va décrire le cadre physique et mathématiques nécessaires à cette thèse.

Dans le premier chapitre nous allons étudier l'existence d'une solution stationnaire du système d'équations de la radiation et du mouvement d'un gaz visqueux et calorifère dans un domaine borné de $\mathbb{R}^3$. Nous rappelons que les équations décrivant le mouvement stationnaire d'un gaz visqueux et calorifère ont été étudiées par plusieurs auteurs (voir [5, 16, 32], etc...), qui ont démontré l'existence d'une solution stationnaire pour ces équations, en utilisant différentes approximations de la pression et différentes données de la température sur la frontière. D'autre part, les équations décrivant l'intensité de la radiation et de la température de l'air sans mouvement ont été étudiée dans [27].

Dans notre travail, le mouvement de l'air est supposé stationnaire, de sorte que le système d'équations devient un système d'équations du type elliptique, accouplé avec l'équation de continuité et l'équation intégrale qui résulte de la description de l'intensité de la radiation. Le fait que nous avons démontré seulement l'existence et pas l'unicité de la solution est bien acceptable dans ce chapiter car pour les équations de ce type et dans le cadre fonctionnel qui nous allons choisir, la démonstration de l'unicité de la solution est difficilement réalisable. Nous allons démontrer l'existence de la solution sous des hypothèses convenables, en particulier, nous supposons que les coefficients d'absorption et de diffusion du rayonnement sont petits et indépendants de la variable spatiale x. Du point de vue technique, il s'agit d'un système d'équations pour les inconnues $(u, T, \varrho, \{I_\lambda\}_{\lambda>0})$ qui représentent respectivement la vitesse, la température, la densité de l'air et l'intensité de la radiation de langueur d'onde λ. L'existence de la solution sera obtenue à l'aide du théorème de Schauder, comme point fixe d'un opérateur non-linéaire qui sera défini par la résolution de notre système d'équations convenablement linéarisé. Dans nos raisonnements nous allons utiliser des idées des articles [5, 16, 27, 32].

Dans le deuxième chapitre nous considérons le système d'équation décrivant le mouvement de l'air et la variation de l'intensité du rayonnement et la quantité de gouttelettes d'eau dans l'air, y compris le processus de transition de phase de l'eau. Sous des hypothèses convenable, nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution locale. En éliminant l'approximation par la régularisation de la densité de la vapeur d'eau et en incluant l'équation de la radiation ; ce résultat améliore ceux obtenus dans le chapitre précédent Du point de vue technique, il s'agit d'un système d'équations pour les inconnues $(v, u, T, \varrho, \pi, \sigma, \{I_\lambda\}_{\lambda>0})$ qui représentent respectivement la vitesse de l'air, la vitesse des gouttelettes de masse m, la température, la densité de l'air, la densité de la vapeur d'eau, la densité de l'eau liquide et l'intensité de la radiation de longueur d'onde λ.

pour les équations de la vitesse et de la température, nous suivons le schéma de [33], qui se base sur les techniques classiques de Solonnikov ([35] et d'autres). Pour les équations concernant les densités de l'air, de vapeur d'eau et de gouttelettes d'eau, nous utilisons les techniques développées dans [33] et [2], sans utiliser l'approximation par une régularisation de la densité de la vapeur. Cette amélioration est due essentiellement au coauteur du travail, Selvaduray [8]. Pour l'équation de l'intensité de la radiation, nous utilisons les techniques développsées dans [7], tout en introduisant également des nouvelles techniques pour l'estimation de la solution dans les normes L^∞ et L^2.

CHAPITRE 1

Solution stationnaire du système d'équations de la radiation et du mouvement d'un gaz visqueux et calorifère

Sommaire

1.1 Introduction. 9

1.2 Préliminaires et résultat principal. 12

1.3 Préliminaires à la démonstration. 15

1.4 Equations linéarisées. 17

1.5 Estimations de la solution des équations linéarisées 21

1.6 Application du théorème du point fixe de Schauder. 30

1.1 Introduction.

Pour analyser mathématiquement le couplage atmosphère-radiation, nous avons considéré le cas du mouvement sationnaire d'un gaz visqueux et calorifère, avec l'effet thermique de la radiation dans un domaine borné de $\mathbb{R}^3$. Nous désignons par ϱ la densité de l'air, par T la température de l'air, par $u = (u_1, u_2, u_3)$ la vitesse de l'air et par I_λ l'intensité de la radiation de longueur d'onde λ. Nous admettons que la pression p est donnée par

$$p = R\varrho T,$$

où R est la constante universelle des gaz (divisée par la masse molaire moyenne de l'air). Si le mouvement de l'air est stationnaire, on aura le système d'équations (voir [21,22])

$$\nabla \cdot (\varrho u) = 0, \tag{1.1.1}$$

$$\varrho(u \cdot \nabla)u + R\nabla(\varrho T) = \eta\Delta u + (\frac{1}{3}\eta + \zeta)\nabla(\nabla \cdot u) + \varrho f, \tag{1.1.2}$$

$$c_v \varrho u \cdot \nabla T + R\varrho T \nabla \cdot u = \tag{1.1.3}$$

$$= \kappa \Delta T + \eta \sum_{j,k=1}^{3} (\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j})\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + (\zeta - \frac{2}{3}\eta)(\nabla \cdot u)^2 - \nabla \cdot E(I_\lambda),$$

$$-\frac{1}{a_\lambda + r_\lambda}(q \cdot \nabla)I_\lambda(x,q) = I_\lambda(x,q) - J_\lambda(x,q,I_\lambda,T) \qquad (q \in S^2), \tag{1.1.4}$$

où $J_\lambda(x,q,I_\lambda,T)$ et $E(I_\lambda) = (E_1, E_2, E_3)$ sont donnés par

$$J_\lambda(x,q,I_\lambda,T) = \frac{1}{4\pi}\frac{r_\lambda}{a_\lambda + r_\lambda}\int_{S^2} I_\lambda(x,q')P_\lambda(q',q)dq' + \tag{1.1.5}$$

$$+\frac{a_\lambda}{a_\lambda + r_\lambda}B[\lambda, T(x)],$$

$$E_j(x) = \int_0^\infty \int_{S^2} I_\lambda(x,q)q_j dq d\lambda, \qquad j = 1,2,3, \tag{1.1.6}$$

tandis que η et ζ sont les coefficients de viscosité, κ la conductibilité thermique et c_v la chaleur spécifique à volume constant ; en outre a_λ est le coefficient d'absorption de la radiation, r_λ le coefficient de diffusion de la radiation, $P_\lambda(q',q)$ la diffusion de la radiation de la direction q' dans la direction q et $a_\lambda B[\lambda,T]$ désigne l'émission de la radiation, où la fonction $B[\lambda,T]$, dite *fonction de Planck*, est donnée par

$$B[\lambda,T] = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5}(e^{\frac{ch}{k\lambda T}} - 1)^{-1} \tag{1.1.7}$$

(ici c est la vitesse de la lumière, h la constante de Planck et k la constante de Boltzmann). Dans (1.1.2)-(1.1.3) nous avons supposé que η, ζ, κ, c_v sont constants.

Donc nous considérons le système d'équations (1.1.1)-(1.1.4) dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avec la condition de la masse totale prédéterminée

$$\int_\Omega \varrho(x)dx = K_\varrho > 0 \qquad (K_\varrho : \text{constante}) \tag{1.1.8}$$

et avec les conditions aux limites

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.1.9}$$

$$\nabla T \cdot n\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.1.10}$$

où n est le vecteur normal extérieur à $\partial\Omega$.

Le problème (1.1.1)-(1.1.10) doit être complété par les conditions aux limites (conditions d'entrée) pour $\{I_\lambda\}_{\lambda>0}$, pour cela il est commode de transformer l'équation (1.1.4) en une équation intégrale. En effet, en posant

$$b_\lambda = a_\lambda + r_\lambda, \tag{1.1.11}$$

on peut réécrire l'équation (1.1.4) dans la forme

$$\frac{d}{d\alpha} I_\lambda(x + \alpha q, q) = -b_\lambda I_\lambda(x + \alpha q, q) + b_\lambda J_\lambda(x + \alpha q, q, I_\lambda, T). \tag{1.1.12}$$

Pour $(x, q) \in \Omega \times S^2$ on pose

$$\alpha^0_{(x,q)} = \inf\{\, \alpha \in \mathbb{R} \,|\, x + \alpha' q \in \Omega \;\forall \alpha' \in]\alpha, 0[\,\}. \tag{1.1.13}$$

L'équation (1.1.12) avec la condition

$$I_\lambda(x + \alpha^0_{(x,q)} q, q) = I^0_\lambda(x + \alpha^0_{(x,q)} q, q) \tag{1.1.14}$$

peut être résolue formellement par la fonction

$$I_\lambda(x, q) = I^0_\lambda(x + \alpha^0_{(x,q)} q, q) \exp(\alpha^0_{(x,q)} b_\lambda) + \tag{1.1.15}$$

$$+\frac{r_\lambda}{4\pi}\int\limits_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0}\int\limits_{S^2} P_\lambda(q',q)I_\lambda(x+\alpha' q,q')\exp{(\alpha' b_\lambda)}dq'd\alpha'+$$

$$+a_\lambda\int\limits_{\alpha^0_{(x,q)}}^{0} B[\lambda,T(x+\alpha' q)]\exp{(\alpha' b_\lambda)}d\alpha'.$$

Pour $x^0\in\partial\Omega$ on pose

$$S^2_-(x^0)=\{q\in S^2\,|\,\exists\,\varepsilon>0\,,\;x^0+\alpha q\in\Omega,\;\forall\alpha\in]0,\varepsilon[\,\},\tag{1.1.16}$$

on définit l'ensemble

$$\Xi=\bigcup_{x^0\in\partial\Omega}\Big(\{x^0\}\times S^2_-(x^0)\Big),\tag{1.1.17}$$

et on admet que $I^0_\lambda(x^0,q)$ est donnée pour tout $(x^0,q)\in\Xi$.

Dans toute la suite de ce chapitre, nous précisons nos hypothèses sur les coefficients, nous supposons que

$$a_\lambda>0,\quad r_\lambda\geq 0,\quad a_\lambda,r_\lambda\ \text{sont constants,}\tag{1.1.18}$$

$$P_\lambda(q',q)\geq 0\quad\forall q',q\in S^2,\qquad \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S^2}P_\lambda(q',q)dq=1\quad\forall q'\in S^2.\tag{1.1.19}$$

$$\sup_{(x^0,q)\in\Xi} I^0_\lambda(x^0,q)<\infty.\tag{1.1.20}$$

La partie principale de ce chapitre est d'étudier un théorème d'existence d'une solution $(\varrho,u,T,\{I_\lambda\}_{\lambda>0})$ pour le système d'équations (1.1.1)-(1.1.4) avec les conditions (1.1.8)-(1.1.10), (1.1.14).

1.2 Préliminaires et résultat principal.

Nous considérons d'abord la famille d'équations (1.1.15), en supposant que la fonction $T(x)$ est donnée. Or, comme on le constate immédiatement, si $T(x)$ est donnée, on peut envisager la famille d'équations (1.1.15) séparément pour chaque λ. Donc ici nous raisonnons en fixant un $\lambda>0$, on a alors

Lemme 1.2.1. *Soient a_λ, r_λ des constantes et $P_\lambda(q', q)$ une fonction mesurable définie sur $S^2 \times S^2$, satisfaisant aux conditions (1.1.18) et (1.1.19). Soit en outre $I^0_\lambda(x^0, q)$ une fonction mesurable, non-négative, définie sur Ξ et satisfaisant à la condition (1.1.20). Si une fonction $T(x) \in L^\infty(\Omega)$, est donnée avec $T(x) > 0$, et si on a*

$$r_\lambda \mathrm{diam}(\Omega)\|P\|_{L^\infty(S^2\times S^2)} < 1, \tag{1.2.21}$$

alors l'équation (1.1.15) admet une solution I_λ et une seule dans la classe $L^\infty(\Omega \times S^2)$.

Démonstration. On désigne par $G(I_\lambda)$ le second membre de (1.1.15), on a alors

$$|G(I^{(1)}_\lambda)(x,q) - G(I^{(2)}_\lambda)(x,q)| \leq \tag{1.2.22}$$

$$\leq \frac{r_\lambda}{4\pi} \int\limits_{\alpha^0_{(x,q)}} \int\limits_{S^2} P_\lambda(q', q)|I^{(1)}_\lambda(x+\alpha' q, q') - I^{(2)}_\lambda(x+\alpha' q, q')|dq' d\alpha' \leq$$

$$\leq r_\lambda \mathrm{diam}(\Omega)\|P\|_{L^\infty(S^2\times S^2)}\|I^{(1)}_\lambda - I^{(2)}_\lambda\|_{L^\infty(\Omega\times S^2)}$$

presque partout dans $\Omega \times S^2$.

Par conséquent de l'hypothèse (1.2.21), on déduit que l'opérateur $G(\cdot)$ est une contraction dans l'espace $L^\infty(\Omega\times S^2)$, ce qui nous permet de trouver une solution I_λ et une seule dans la classe $L^\infty(\Omega \times S^2)$. □

Le lemme 1.2.1 nous permet de considérer E définie dans (1.1.6) comme fonction déterminée par $T(x)$. Plus précisément on définit $E(T)$ par

$$E_j(T)(x) = \int\limits_0^\infty \int\limits_{S^2} I_\lambda(x,q) q_j dq d\lambda, \qquad j = 1, 2, 3, \tag{1.2.23}$$

où $I_\lambda(x, q)$ est la solution de (1.1.15) avec une fonction donnée $T(\cdot)$.

Pour trouver une solution $(\varrho, u, T, \{I_\lambda\}_{\lambda>0})$ du système d'équations (1.1.1)-(1.1.4) avec les conditions (1.1.8)-(1.1.10), (1.1.14), on commence par définir deux constantes strictement positives $\overline{\varrho}$ et $\overline{T}$. On pose d'abord

$$\overline{\varrho} = \frac{K_\varrho}{|\Omega|}, \tag{1.2.24}$$

où $|\Omega|$ est la mesure de l'ensemble Ω (K_ϱ est la constante introduite dans (1.1.8)).

D'autre part, pour définir la constante $\overline{T} > 0$, on rappelle la propriété suivante de $E(T)$.

Lemme 1.2.2. *Sous les mêmes conditions du lemme 1.2.1 il existe une constante strictement positive $\overline{T}$ et une seule telle que l'égalité*

$$\int_\Omega \nabla \cdot E(\overline{T})dx = 0 \tag{1.2.25}$$

soit vérifiée.

Pour la démonstration, voir [27], Lemme 4.3.

D'après le lemme 1.2.2 nous définissons la constante $\overline{T}$ par la relation (1.2.25).

Pour étudier le système d'équations (1.1.1)-(1.1.4), nous introduisons les espaces

$$H_a^3(\Omega) = \{u \in H^3(\Omega) | \, u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \},$$

$$H_b^2(\Omega) = \{\vartheta \in H^2(\Omega) | \, \nabla\vartheta \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \},$$

$$H_c^2(\Omega) = \{\sigma \in H^2(\Omega) \, | \int_\Omega \sigma(x)dx = 0 \}.$$

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant.

Théorème 1.2.1. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ muni de la frontière $\partial\Omega$ de classe C^4. On suppose que les fonctions mesurables non-négatives $P_\lambda(q', q)$, $I_\lambda^0(x^0, q)$ et les constantes a_λ, r_λ satisfont aux conditions (1.1.18)-(1.2.21). Si $\|f\|_{H^1(\Omega)}$ est assez petite et $I_\lambda^0(x^0, q)$ est telle que $\|\nabla \cdot E(\overline{T})\|_{L^2(\Omega)}$ (où $\overline{T}$ défini par le lemme 1.2.2, avec les autres données) soit suffisamment petite, alors il existe une solution $(u, T, \rho, \{I_\lambda\}_{\lambda>0}) \in H_a^3(\Omega) \times H_b^2(\Omega) \times H_c^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$ du système d'équations (1.1.1)-(1.1.4) avec les conditions (1.1.8)-(1.1.10), (1.1.14).*

1.3 Préliminaires à la démonstration.

On cherchera une solution (ϱ, T, u) du problème (1.1.1)-(1.1.3) avec les conditions (1.1.8)-(1.1.10) dans un voisinage de $(\overline{\varrho}, \overline{T}, 0)$ où $\overline{\varrho}$ est défini par la relation (1.2.24) et $\overline{T}$ défini par le lemme 1.2.2.

Etant définies les constantes $\overline{\varrho}$ et $\overline{T}$, nous posons

$$\sigma = \varrho - \overline{\varrho}, \qquad \vartheta = T - \overline{T}. \tag{1.3.26}$$

Nous rappelons alors une autre propriété de $E(T)$.

Lemme 1.3.1. *On a*

$$\nabla \cdot E(\vartheta + \overline{T}) - \nabla \cdot E(\overline{T}) = 4\pi \int_0^\infty a_\lambda [B(\lambda, \vartheta + \overline{T}) - B(\lambda, \overline{T})] d\lambda. \tag{1.3.27}$$

Démonstration. L'égalité (1.3.27) est obtenu à partir de la définition de $E(\cdot)$ (voir aussi (1.1.4), (1.1.6)) par des calculs élémentaires. $\square$

On pose

$$\overline{\beta}_0' = \frac{d}{d\vartheta} \Big[4\pi \int_0^\infty a_\lambda [B(\lambda, \vartheta + \overline{T}) - B(\lambda, \overline{T})] d\lambda \Big] \Big|_{\vartheta = 0}, \tag{1.3.28}$$

$$\beta_1(\vartheta) = 4\pi \int_0^\infty a_\lambda [B(\lambda, \vartheta + \overline{T}) - B(\lambda, \overline{T})] d\lambda - \overline{\beta}_0' \vartheta. \tag{1.3.29}$$

De l'expression (1.1.7) de la fonction $B(\lambda, T)$, on voit que $\beta_1(\vartheta)$ est au moins deux fois continûment dérivable. Comme

$$\frac{\partial}{\partial T} B(\lambda, T) = \frac{2\pi c^3 h^2}{\lambda^6 k T^2} e^{\frac{ch}{k\lambda T}} (e^{\frac{ch}{k\lambda T}} - 1)^{-2} > 0,$$

on a

$$\overline{\beta}_0' > 0. \tag{1.3.30}$$

Pour le comportemet de $\overline{\beta}_0'$ et $\beta_1(\vartheta)$, il est utile de rappeler que, si a_λ est constante alors on a

$$\int_0^\infty a_\lambda B(\lambda, T) d\lambda = a_\lambda \sigma_0 T^4$$

où $\sigma_0 > 0$ est une constante, ce qui correspond à la loi de Stefan-Boltzmann.

Ainsi, on peut transformer le système d'équations (1.1.1)-(1.1.3) dont les inconnues sont (ϱ, T, u) en un système d'équations d'inconnues (σ, ϑ, u)

$$\nabla \cdot (\sigma u) = -\overline{\varrho} \nabla \cdot u, \tag{1.3.31}$$

$$-\eta \Delta u - (\frac{1}{3}\eta + \zeta)\nabla(\nabla \cdot u) + R\overline{\varrho}\nabla\vartheta + R\overline{T}\nabla\sigma = F(\sigma, \vartheta, u), \tag{1.3.32}$$

$$-\kappa \Delta \vartheta + \overline{\beta}_0' \vartheta = G(u, \vartheta, \sigma) - R\overline{\varrho}\overline{T}\nabla \cdot u, \tag{1.3.33}$$

où

$$F(\sigma, \vartheta, u) = (\sigma + \overline{\varrho})f - (\sigma + \overline{\varrho})(u \cdot \nabla)u - R\sigma\nabla\vartheta - R\vartheta\nabla\sigma, \tag{1.3.34}$$

$$\begin{aligned} G(\sigma, \vartheta, u) = & -(\sigma + \overline{\varrho})c_v u \cdot \nabla\vartheta - R(\overline{\varrho}\vartheta + \sigma\overline{T} + \sigma\vartheta)\nabla \cdot u + \\ & +\eta \sum_{j,k=1}^{3} (\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j})\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + (\zeta - \frac{2}{3}\eta)(\nabla \cdot u)^2 - \nabla \cdot E(\overline{T}) - \beta_1(\vartheta). \end{aligned} \tag{1.3.35}$$

Avec la formulation des équations (1.3.31)-(1.3.33), le problème (1.1.1)-(1.1.4), (1.1.8)-(1.1.10) et (1.1.14) se réduit à celui des équations (1.3.31)-(1.3.33) avec les conditions (1.1.9) et (1.3.36), (1.3.37) suivantes

$$\int_\Omega \sigma(x)dx = 0, \tag{1.3.36}$$

$$\nabla\vartheta \cdot n\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.3.37}$$

Dans cette nouvelle formulation, l'équation (1.1.4) n'est pas inscrite explicitement ; en effet, comme elle fait partie de la définition de $E(T)$ dans (1.2.23), elle est alors vérifiée.

Pour démontrer l'existence d'une solution du problème (1.3.31)-(1.3.33) avec les conditions (1.1.9), (1.3.36), (1.3.37), en suivant la méthode généralement utilisée pour les équations stationnaires d'un gaz visqueux (voir [5, 16, 32], etc...), on résoud d'abord le système linéarisé des équations (1.3.31)-(1.3.33), et ensuite, on définira un opérateur non-linéaire Φ qui, à $(\sigma', \vartheta', u')$, associe la solution (σ, ϑ, u) du système linéarisé et on cherchera un point fixe de cet opérateur.

1.4 Equations linéarisées.

Pour formuler le système d'équations linéarisées, on prolonge formellement la fonction $\beta_1(\vartheta)$ pour $\vartheta \leq -\overline{T}$ par

$$\beta_1(\vartheta) = -4\pi \int_0^\infty a_\lambda B(\lambda, \overline{T}) d\lambda - \overline{\beta}_0' \vartheta \qquad \text{pour } \vartheta \leq -\overline{T}. \tag{1.4.38}$$

Il est clair que le prolongement (1.4.38), qui correspond au prolongement de $B(\lambda, T)$ par $B(\lambda, T) = 0$ pour $T \leq 0$, ne modifie pas la régularité nécessaire de $\beta_1(\vartheta)$ (voir (1.1.7)) ni le résultat la solution vérifira la relation $T > 0$ et donc $\vartheta > -\overline{T}$.

Nous considérons le système d'équations linéarisées

$$\frac{\sigma - \sigma'}{h} + \nabla \cdot (\sigma u) = -\overline{\varrho} \nabla \cdot u, \tag{1.4.39}$$

$$-\eta \Delta u - (\frac{\eta}{3} + \zeta) \nabla (\nabla \cdot u) + R \overline{\varrho} \nabla \vartheta = F(\sigma', \vartheta', u') - R \overline{T} \nabla \sigma', \tag{1.4.40}$$

$$-\kappa \Delta \vartheta + \overline{\beta}_0' \vartheta = G(\sigma', \vartheta', u') - R \overline{\varrho} \overline{T} \nabla \cdot u, \tag{1.4.41}$$

où σ', ϑ', u' sont des fonctions données, tandis que h est une constante strictement positive ; dans (1.4.41) la fonction $G(\cdot, \cdot, \cdot)$ est considérée avec le prolongement (1.4.38). Le système d'équations (1.4.39)-(1.4.41) est considéré avec les conditions (1.1.9), (1.3.36) et (1.3.37) ; où dans (1.4.39) la constante $h > 0$ est suffisamment petite.

Dans cette section nous allons montrer des résultats que nous pouvons obtenir comme variantes de résultas classiques, tandis que dans la section suivante nous allons présenter les estimations spécifiques qui nous conduiront à l'existence d'un point fixe de l'opérateur qui, à $(\sigma', \vartheta', u')$ associe (σ, ϑ, u). Pour simplifier la notation, on notera dans toute la suite $\| \cdot \|_{L^2}$ et $\| \cdot \|_{H^m}$ $(m = 1, 2, 3)$ au lieu de $\| \cdot \|_{L^2(\Omega)}$ et $\| \cdot \|_{H^m(\Omega)}$.

Considérons d'abord les équations (1.4.40), (1.4.41), alors on a le lemme d'existence et l'unicité de la solution suivant.

Lemme 1.4.1. *Soit* $(u', \vartheta', \sigma') \in H_a^3(\Omega) \times H_b^2(\Omega) \times H_c^2(\Omega)$. *On pose*

$$F' = F(\sigma', \vartheta', u'), \qquad G' = G(\sigma', \vartheta', u'). \tag{1.4.42}$$

Alors les affirmations suivantes sont valables :

$i)$ *les équations* (1.4.40), (1.4.41) *avec les conditions* (1.1.9), (1.3.37) *admettent une solution* (u, ϑ) *et une seule dans* $H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, *de plus il existe une constante* $c > 0$ *telle que la solution* (u, ϑ) *vérifie l'inégalité*

$$\|u\|_{H^1} + \|\vartheta\|_{H^1} \leq c(\|F'\|_{H^{-1}} + \|G'\|_{(H^1)'} + \|\sigma'\|_{L^2}); \tag{1.4.43}$$

$ii)$ *il existe une constante* $c > 0$ *telle que la solution* ϑ *vérifie l'inégalité*

$$\|\vartheta\|_{H^2} \leq c(\|G'\|_{L^2} + \|\nabla \cdot u\|_{L^2}); \tag{1.4.44}$$

$iii)$ *la solution* (u, ϑ) *appartient à* $H_a^3(\Omega) \times H_b^2(\Omega)$ *et il existe une constante* $c > 0$ *telle que la solution* (u, ϑ) *vérifie l'inégalité*

$$\|u\|_{H^3} + \|\vartheta\|_{H^2} \leq c(\|F'\|_{H^1} + \|G'\|_{L^2} + \|\nabla\sigma'\|_{H^1}). \tag{1.4.45}$$

Démonstration. Si $\vartheta' \in H_b^2(\Omega)$, il existe une constante C (dépendante de ϑ') telle que

$$|\vartheta'(x)| \leq C \qquad \forall x \in \Omega,$$

ce qui implique, d'après la définition de $\beta_1(\cdot)$, que

$$\beta_1(\vartheta') \in L^\infty(\Omega) \subset (H^1)'.$$

Cela étant, en examinant les autres termes de $G(\sigma', \vartheta', u')$ et l'expression de $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ (voir (1.3.34), (1.3.35)), on constate d'après la relation $(u', \vartheta', \sigma') \in H_a^3(\Omega) \times H_b^2(\Omega) \times H_c^2(\Omega)$ que $F(\sigma', \vartheta', u') \in H^{-1}$, $G(\sigma', \vartheta', u') \in (H^1)'$.

Or, en multipliant (1.4.40) par u et (1.4.41) par $\frac{1}{\overline{\overline{T}}}\vartheta$, et en intégrant sur Ω on obtient

$$\eta \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + (\frac{\eta}{3} + \zeta) \int_\Omega |\nabla \cdot u|^2 dx + \frac{\kappa}{\overline{\overline{T}}} \int_\Omega |\nabla \vartheta|^2 dx + \frac{\overline{\beta}_0'}{\overline{\overline{T}}} \int_\Omega |\vartheta|^2 dx =$$

$$= \int_\Omega F' \cdot u dx + \frac{1}{\overline{\overline{T}}} \int_\Omega G' \vartheta dx + R\overline{T} \int_\Omega \sigma' \nabla \cdot u dx.$$

Compte tenu de la condition (1.3.30), on en déduit la coersivité de la forme bilinéaire associée, ce qui nous permet de démontrer l'affirmation $i)$ par la méthode usuelle pour les équations de type elliptique.

L'affirmation $ii)$ résulte de la théorie classique des équations de type elliptique.

Quant à l'affirmation $iii)$, en utilisant les inégalités (1.4.43)-(1.4.44), on peut démontrer (1.4.45) ; en effet en appliquant à l'équation (1.4.40) la méthode usuelle pour la régularité de la solution faible d'une équation de type elliptique, avec la condition de Dirichlet homogène, ainsi que la décomposition du domaine Ω en une partie intérieure et une famille finie de sous-domaines couvrant le voisinage de la frontière $\partial\Omega$. (voir par exemple la démonstration des Théorèmes 3 et 4 de la § 2 du Chap. IV de [28] ; la forme spécifique de cette technique à l'équation (1.4.40) est analogue aux lemmes 5.1 - 5.8 de la section suivante). □

Pour démontrer l'existence et l'unicité de l'équation (1.4.39) on a le lemme suivant.

Lemme 1.4.2. *Soient $\sigma' \in H_c^2(\Omega)$ et $u \in H_a^3(\Omega)$. On suppose que $\|u\|_{H^3} \leq 1$, alors il existe $\overline{h}_0 > 0$ tel que pour tout $h \in]0, \overline{h}_0]$, l'équation (1.4.39) admet une unique solution σ dans $H_c^2(\Omega)$ et il existe une constante $c > 0$ telle que la solution σ vérifie l'inégalité*

$$\|\sigma\|_{H^2} \leq c(\|\sigma'\|_{H^2} + \|u\|_{H^3}). \tag{1.4.46}$$

Pour la démonstration du lemme 1.4.2, voir [6, 16].

Les fonctions $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ et $G(\cdot,\cdot,\cdot)$ jouissent de la propriété suivante (nous utilisons la notation introduite dans (1.4.42)).

Lemme 1.4.3. *Soit $(u', \vartheta', \sigma') \in H_a^3(\Omega) \times H_b^2(\Omega) \times H_c^2(\Omega)$, alors on a*

$$F' \in H^1(\Omega), \qquad G' \in L^2(\Omega)$$

et il existe une constante c telle que

$$\|F'\|_{H^1} \leq c\Big((1 + \|\sigma'\|_{H^2})\|f\|_{H^1} + \|\vartheta'\|_{H^2}\|\sigma'\|_{H^2} + \tag{1.4.47}$$

$$+(1+\|\sigma'\|_{H^2})\|u'\|_{H^1}\|u'\|_{H^3}\Big).$$

En outre, si on suppose que $\|\vartheta'\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{\overline{T}}{2}$*, alors on peut déterminer une constante* c *telle que*

$$\|G'\|_{L^2} \leq c\Big((1+\|\sigma'\|_{H^2})\|u\|_{H^2}\|\vartheta'\|_{H^1} + \|\sigma'\|_{H^2} + \tag{1.4.48}$$

$$+(\|\vartheta'\|_{H^2} + \|\sigma'\|_{H^2}\|\vartheta'\|_{H^2})\|u'\|_{H^1} + \|u'\|_{H^3}\|u'\|_{H^1} +$$

$$+\|\nabla \cdot E(\overline{T})\|_{L^2} + \|\vartheta'\|^2_{L^2}\Big).$$

Démonstration. Il n'est pas difficile de déduire la première partie de l'énoncé du lemme à partir de l'expression de $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ et de celle de $G(\cdot,\cdot,\cdot)$ données dans (1.3.34) et (1.3.35) (voir aussi la définition (1.3.29) de $\beta_1(\vartheta)$).

En outre, de l'expression de la fonction $B(\lambda, T)$ donnée dans (1.1.7) et de la définition de $\beta_1(\vartheta)$, il résulte que, si $\|\vartheta'\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{\overline{T}}{2}$, alors il existe une constante $c_1 > 0$ qui vérifie l'inégalité

$$|\beta_1(\vartheta')| \leq c_1|\vartheta'|^2 \quad \text{pour } |\vartheta'| \leq \frac{\overline{T}}{2},$$

donc, en rappelant encore l'expression de $G(\cdot,\cdot,\cdot)$ donnée dans (1.3.35), on obtient l'inégalité (1.4.48). □

Grâce aux lemmes 4.1-4.3, si on note par

$$D_\Phi = \{\, (u,\vartheta,\sigma) \in H^3_a(\Omega) \times H^2_b(\Omega) \times H^2_c(\Omega) \,|\, \|u\|_{H^3} \leq 1 \,\},$$

tel que

$$\Phi : D_\Phi \to H^3_a(\Omega) \times H^2_b(\Omega) \times H^2_c(\Omega),$$

défini par la relation

$$\Phi(u',\vartheta',\sigma') = (u,\vartheta,\sigma), \tag{1.4.49}$$

où (u,ϑ,σ) est la solution du système d'équations (1.4.39)-(1.4.41).

1.5 Estimations de la solution des équations linéarisées

Dans cette section nous allons établir des estimations spécifiques des solutions u, ϑ, σ des équations (1.4.39)-(1.4.41), qui nous permettront de démontrer l'existence d'un point fixe de l'opérateur Φ. Ces estimations se démontrent d'une manière analogue aux lemmes établis dans [16,32], même s'il y a des différences non négligeables dues à la présence du terme $\overline{\beta}_0'\vartheta$ dans (1.4.41).

Les lemmes suivants nous permetent d'établir les estimations exiges pour démontrer l'existence.

Lemme 1.5.1. *Soient* $(u',\vartheta',\sigma') \in H_a^3(\Omega)\times H_b^2(\Omega)\times H_c^2(\Omega)$ *et* (σ,u,ϑ) *la solution du système d'équations* (1.4.39)-(1.4.41). *Alors il existe une constante* c *telle que, quel que soit* $\delta>0$, *on a*

$$\alpha(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\vartheta\|_{H^1}^2)+\frac{\alpha}{h}(\|\sigma\|_{L^2}^2-\|\sigma'\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\|\sigma-\sigma'\|_{L^2}^2)\leq \tag{1.5.50}$$

$$\leq c(\|F'\|_{H^{-1}}^2+\|G'\|_{(H^1)'}^2)+c(\delta^8\|u\|_{H^3}^2+\frac{1}{\delta^8}\|\sigma\|_{L^2}^4).$$

où α *est une constante strictement positive déterminée par* η, ζ, κ, $\overline{\varrho}$, $\overline{T}$ *et* $\overline{\beta}_0'$.

Démonstration. Si on multiplie les équations (1.4.39)-(1.4.41) respectivement par $\frac{R\overline{T}}{\overline{\varrho}}\sigma$, u et $\frac{1}{\overline{T}}\vartheta$, et on les intègre sur Ω, on obtient

$$\eta\|\nabla u\|_{L^2}^2+(\frac{\eta}{3}+\zeta)\|\nabla\cdot u\|_{L^2}^2+\frac{\kappa}{\overline{T}}\|\nabla\vartheta\|_{L^2}^2+\frac{\overline{\beta}_0'}{\overline{T}}\|\vartheta\|_{L^2}^2+\frac{R\overline{T}}{h\overline{\varrho}}\int_\Omega(\sigma-\sigma')\sigma dx= \tag{1.5.51}$$

$$=\int_\Omega F'\cdot u dx+\frac{1}{\overline{T}}\int_\Omega G'\vartheta dx-R\overline{T}\int_\Omega(u\cdot\nabla\sigma'+\sigma\nabla\cdot u)dx-\frac{R\overline{T}}{\overline{\varrho}}\int_\Omega(\nabla\cdot(\sigma u))\sigma dx.$$

En tenant compte des relations

$$(\sigma-\sigma')\sigma=\frac{1}{2}(\sigma^2-\sigma'^2)+\frac{1}{2}(\sigma'-\sigma)^2,$$

$$-\frac{R\overline{T}}{\overline{\varrho}}\int_\Omega\nabla\cdot(\sigma u)\sigma dx\leq c\|u\|_{H^3}\|\sigma\|_{L^2}^2,$$

$$-R\overline{T}\int_\Omega(\sigma\nabla\cdot u+u\cdot\nabla\sigma')dx\le c\|\nabla u\|_{L^2}\|\sigma-\sigma'\|_{L^2}$$

(en rappelant que h est suffisamment petit), on déduit de (1.5.51) l'inégalité (1.5.50). □

Pour obtenir les estimations des dérivées d'ordre supérieur de u, ϑ et σ, on considère deux familles $\{\omega_k^{(0)}\}_{k=0}^N$, $\{\omega_k^{(1)}\}_{k=0}^N$ de sous-ensebles ouverts de Ω et une famille $\{\chi_k\}_{k=0}^N$ de fonctions de classe $C^4(\Omega)$; on choisit ces familles de sous-ensembles et de fonctions de telle sorte que

$$\bigcup_{k=0}^N\omega_k^{(0)}=\Omega,\qquad\overline{\omega_0^{(1)}}\subset\Omega,$$

$$(\overline{\omega_k^{(0)}}\cap\Omega)\subset\omega_k^{(1)},\quad\chi_k(x)\ge0\quad\forall x\in\Omega,\quad\chi_k(x)=1\quad\forall x\in\omega_k^{(0)},$$

$$\mathrm{supp}\chi_k\subset\omega_k^{(1)}\cup\partial\Omega,\qquad\text{pour}\quad k=0,1,\cdots,N,$$

et que $\omega_k^{(1)}, k=1,\cdots,N$, soient convenablement petits.

Pour simplifier la notation, nous utilisons α pour désigner une constante strictement positive déterminée par η, ζ, κ, $\overline{\varrho}$, $\overline{T}$ et $\overline{\beta}_0'$ (comme le lemme 1.5.1) et nous écrivons respectivement D_x, D_x^2 et D_x^3 au lieu de ∂_{x_j}, $\partial_{x_j}\partial_{x_k}$ et $\partial_{x_j}\partial_{x_k}\partial_{x_l}$ $(j,k,l=1,2,3)$; et nous notons par $|D_x\cdot|^2$, $|D_x^2\cdot|^2$, $|D_x^3\cdot|^2$ la somme obtenue quand j,k,l parcourent l'ensemble $\{1,2,3\}$.

Nous commençons par l'estimation sur la partie intérieure de Ω.

Lemme 1.5.2. *Soient u', ϑ', σ', u, ϑ et σ comme dans le lemme 1.5.1. Alors il existe une constante c telle que, quel que soit $\delta\in]0,1[$, on a*

$$\alpha\int_\Omega\chi_0^2(|D_x^2u|^2+|D_x^2\vartheta|^2+|D_x\vartheta|^2)dx+ \tag{1.5.52}$$

$$+\frac{\alpha}{h}\int_\Omega\chi_0^2(|D_x\sigma|^2-|D_x\sigma'|^2+\frac{1}{2}|D_x(\sigma-\sigma')|^2)dx\le$$

$$\le c(\|F'\|_{L^2}^2+\|G'\|_{L^2}^2+\|\vartheta\|_{H^1}^2)+\frac{c}{\delta^6}(\|u\|_{H^1}^2+\|\sigma\|_{H^1}^4)+$$

$$+\delta^2(\|\nabla(\overline{\varrho}\vartheta+\overline{T}\sigma')\|_{L^2}^2+\|u\|_{H^3}^2),$$

$$\alpha \int_\Omega \chi_0^2 |D_x^3 u|^2 dx + \frac{\alpha}{h} \int_\Omega \chi_0^2 (|D_x^2 \sigma|^2 - |D_x^2 \sigma'|^2 + \frac{1}{2}|D_x^2(\sigma - \sigma')|^2) dx \leq \tag{1.5.53}$$

$$\leq c(\|F'\|_{H^1}^2 + \|\vartheta\|_{H^2}^2) + \frac{c}{\delta}(\|u\|_{H^2}^2 + \|\sigma\|_{H^2}^4) + \delta(\|\nabla(\overline{\varrho}\vartheta + \overline{T}\sigma')\|_{H^1}^2 + \|u\|_{H^3}^2).$$

Démonstration. On applique l'opérateur différentiel D_x aux équations (1.4.39)-(1.4.41) et on les multiplie respectivement par $\frac{R\overline{T}}{\overline{\varrho}}\chi_0^2 D_x\sigma$, $\chi_0^2 D_x u$ et $\frac{1}{\overline{T}}\chi_0^2 D_x\vartheta$. Si on les intègre sur Ω, en utilisant les relations

$$D_x(\sigma - \sigma')D_x\sigma = \frac{1}{2}(|D_x\sigma|^2 - |D_x\sigma'|^2) + \frac{1}{2}|D_x(\sigma' - \sigma)|^2,$$

$$-\frac{R\bar{T}}{\overline{\varrho}} \int_\Omega D_x \nabla \cdot (\sigma u)\chi_0^2 D_x\sigma dx \leq c\|u\|_{H^3}\|\sigma\|_{H^1}^2,$$

alors on déduit l'inégalité

$$\int_\Omega \chi_0^2(|D_x^2 u|^2 + |D_x^2\vartheta|^2 + |D_x\vartheta|^2)dx + \frac{1}{h}\int_\Omega \chi_0^2(|D_x\sigma|^2 - |D_x\sigma'|^2 + \frac{1}{2}|D_x(\sigma - \sigma')|^2)dx \leq$$

$$\leq c\Big(\int_\Omega (|\nabla D_x u||D_x u| + |\nabla \cdot D_x u||D_x u| + |\nabla D_x\vartheta||D_x\vartheta|)|\nabla\chi_0^2|dx +$$

$$+ \int_\Omega |F'||D_x(\chi_0^2 D_x u)|dx + \int_\Omega |G'||D_x(\chi_0^2 D_x\vartheta)|dx + \int_\Omega \chi_0^2|D_x\nabla \cdot u||\overline{\rho} D_x\vartheta|dx$$

$$+ \int_\Omega |\nabla(\overline{\varrho}\vartheta + \overline{T}\sigma')||D_x(\chi_0^2 D_x u)|dx\Big) + c\|u\|_{H^3}\|\sigma\|_{H^1}^2,$$

d'où, par des calcules usuels, y compris l'application du théorème d'interpolation, on obtiendra l'inégalité (1.5.52).

Pour obtenir (1.5.53), on la procède d'une manière analogue au cas précédent ; plus précisément, on applique l'opérateur différentiel D_x^2 aux équations (1.4.39) et (1.4.40), en les multipliant respectivement par $\frac{R\overline{T}}{\overline{\varrho}}\chi_0^2 D_x^2\sigma$ et $\chi_0^2 D_x^2 u$, et après intègration sur Ω, on obtiendra l'inégalité (1.5.53). $\square$

Maintenant, pour obtenir les estimations sur la frontière de Ω, il nous suffit d'examiner le cas d'un des sous-domaines $\omega_k^{(1)}$, (pour ne pas alourdir l'écriture, on écrit simplement χ, $\omega^{(0)}$, $\omega^{(1)}$ au lieu de χ_k, $\omega_k^{(0)}$, $\omega_k^{(1)}$).

Donc, nous introduisons un changement de variables comme dans [31, 32]. Choisissons un point $\overline{x} \in \overline{\omega^{(0)}} \cap \partial\Omega$ et considérons un système orthogonal de coordonnées (ψ, φ, x_3) tel que son origine coïncide avec $\overline{x}$ et le plan (ψ, φ) avec le plan tangent à $\partial\Omega$ au point $\overline{x}$.

Alors on peut choisir d'une manière convenable une fonction $\mu \in C^4(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^3)$ de telle sorte que pour chaque point $x \in \overline{\omega^{(1)}} \cap \overline{\Omega}$ puisse être écrit d'une manière univoque dans la forme

$$x = \Lambda(\psi, \varphi, r) \equiv \mu(\psi, \varphi) + rn(\mu(\psi, \varphi))$$

($n(\mu(\psi, \varphi))$ est le vecteur normal unitaire extérieur au point $\mu(\psi, \varphi)$ et $r \leq 0$).

On pose $y = (y_1, y_2, y_3) \equiv (\psi, \varphi, r)$, $W = \Lambda^{-1}(\overline{\omega^{(1)}})$. et on introduit en outre

$$U(y) = u(\Lambda(y)), \quad \Theta(y) = \vartheta(\Lambda(y)), \quad \Sigma(y) = \sigma(\Lambda(y))$$

en transformant les équations (1.4.39)-(1.4.41), en utilisant le changement de variable, on obtient

$$\frac{\Sigma - \Sigma'}{h} + \sum_{k,i=1}^{3} a_{ki}\partial_{y_k}(\Sigma U_i) = -\overline{\varrho} \sum_{k,i=1}^{3} a_{ki}\partial_{y_k} U_i, \tag{1.5.54}$$

$$-\eta \sum_{k,i,s=1}^{3} a_{ki}\partial_{y_k}(a_{si}\partial_{y_s} U_j) - (\frac{\eta}{3} + \zeta) \sum_{k,i,s=1}^{3} a_{kj}\partial_{y_k}(a_{si}\partial_{y_s} U_i) + R\overline{\varrho} \sum_{k=1}^{3} a_{kj}\partial_{y_k}\Theta = \tag{1.5.55}$$

$$= F'_j - R\overline{T} \sum_{k=1}^{3} a_{kj}\partial_{y_k}\Sigma', \qquad j = 1, 2, 3,$$

$$-\kappa \sum_{k,i,s=1}^{3} a_{ki}\partial_{y_k}(a_{si}\partial_{y_s}\Theta) + \overline{\beta}'_0\Theta = G' - R\overline{\varrho}\overline{T} \sum_{k,i=1}^{3} a_{ki}\partial_{y_k} U_i, \tag{1.5.56}$$

où

$$a_{kj} = \frac{\partial y_k}{\partial x_j} = \frac{\partial(\Lambda^{-1})_k}{\partial x_j}, \quad F'_j = F'_j(\Lambda(y)), \quad G' = G'(\Lambda(y)).$$

Pour la commodité de la présentation nous utiliserons les notations D_y, D_y^2, D_τ, D_n données par

$$D_y = (\partial_{y_i})_{i=1,2,3}, \quad D_y^2 = (\partial_{y_i}\partial_{y_j})_{i,j=1,2,3}, \quad D_\tau = (\partial_{y_1}, \partial_{y_2}), \quad D_n = \partial_{y_3},$$

et désignerons par J le déterminant jacobien de Λ, alors on a

Lemme 1.5.3. *Soient u', ϑ', σ', u, ϑ et σ comme dans le lemme 1.5.1. Alors il existe une constante c telle que, quel que soit $\delta \in]0,1[$, on ait*

$$\alpha \int_W J\chi^2(|D_\tau D_y U|^2 + |D_\tau D_y \vartheta|^2 + |D_\tau \vartheta|^2)dy+ \tag{1.5.57}$$

$$+\frac{\alpha}{h}\int_W J\chi^2(|D_\tau \Sigma|^2 - |D_\tau \Sigma'|^2 + \frac{1}{2}|D_\tau(\Sigma - \Sigma')|^2)dy \leq$$

$$\leq c(\|F'\|^2_{L^2} + \|G'\|^2_{L^2}) + \frac{c}{\delta^6}(\|u\|^2_{H^1} + \|\sigma\|^4_{H^1})+$$

$$+c\delta^2(\|\nabla(\overline{\varrho}\vartheta + \overline{T}\sigma')\|^2_{L^2} + \|u\|^2_{H^3}),$$

$$\alpha \int_W J\chi^2|D^2_\tau D_y U|^2 dy+ \tag{1.5.58}$$

$$+\frac{\alpha}{h}\int_W J\chi^2(|D^2_\tau \Sigma|^2 - |D^2_\tau \Sigma'|^2 + \frac{1}{2}|D^2_\tau(\Sigma - \Sigma')|^2)dy \leq$$

$$\leq c(\|F'\|^2_{H^1} + \|\vartheta\|^2_{H^2}) + \frac{c}{\delta}(\|u\|^2_{H^2} + \|\sigma\|^4_{H^2})+$$

$$+c\delta(\|\nabla(\overline{\varrho}\vartheta + \overline{T}\sigma')\|^2_{H^1} + \|u\|^2_{H^3}).$$

Démonstration. Pour démontrer le lemme, on procède de manière analogue à la démonstration du lemme 2.8 dans [16] et du lemme 2.4 dans [32]. En effet, si on applique l'opérateur D_τ aux équations (1.5.54)-(1.5.56) et en les multipliant respectivement par $J\chi^2 D_\tau \Sigma$, $J\chi^2 D_\tau U$ et $J\chi^2 D_\tau \Theta$, après intégration sur W, et à l'aide de calcul usuel, on obtient (1.5.57).

En outre, si on applique D^2_τ aux équations (1.5.54) et (1.5.55), alors en les multipliant respectivement par $J\chi^2 D^2_\tau \Sigma$ et $J\chi^2 D^2_\tau U$, et après intègration sur W, on obtient (1.5.58). □

Maintenant, nous allons estimer les dérivées par rapport à y_3.

Lemme 1.5.4. *Soient u', ϑ', σ', u, ϑ et σ comme dans le lemme 1.5.1. Alors il existe une constante c telle que, pour tout $\delta \in]0,1[$, on a*

$$\alpha \int\limits_W J\chi^2 |D_n(\sum_{k,j=1}^3 a_{kj}\partial_{y_k}U_j)|^2 dy + \tag{1.5.59}$$

$$+\frac{\alpha}{h}\int\limits_W J\chi^2(|D_n\Sigma|^2 - |D_n\Sigma'|^2 + \frac{1}{2}|D_n(\Sigma-\Sigma')|^2)dy \leq$$

$$\leq c(\int\limits_W J\chi^2|D_yD_\tau U|^2 dy + \|u\|^2_{H^1} + \|\vartheta\|^2_{H^1} + \|F'\|^2_{L^2}) +$$

$$+\frac{c}{\delta^2}\|\sigma\|^4_{H^1} + c\delta^2\|u\|^2_{H^3}.$$

Démonstration. Soit $x \in \omega^{(1)}$, on pose

$$\psi(x) = (\Lambda^{-1})_1(x), \quad \varphi(x) = (\Lambda^{-1})_2(x),$$

$$n = n(x) = n(\eta(\psi(x), \phi(x))).$$

Le produit scalaire de (1.4.40) avec n nous donne

$$-(\frac{\eta}{3}+\zeta)\frac{\partial}{\partial n}(\nabla\cdot u) = \eta(\Delta u - \nabla(\nabla\cdot u))\cdot n - R\frac{\partial}{\partial n}(\overline{\varrho}\vartheta + \overline{T}\sigma') + F'\cdot n. \tag{1.5.60}$$

On remarque que le terme $(\Delta u - \nabla(\nabla\cdot u))\cdot n$ ne contient pas la dérivée seconde $\frac{\partial^2}{\partial n^2}u_j$, $j = 1, 2, 3$, en plus on a

$$\nabla_x \cdot u = \sum_{k,j=1}^3 a_{kj}\partial_{y_k}U_j.$$

Pour déduire (1.5.59), nous avons besoin d'éliminer $\partial_n\sigma'$ du second membre. Pour cela on considère la dérivée directionnelle $\frac{\partial}{\partial n}$ de l'équation (1.4.39) (voir [32]) ; en la multipliant par $\frac{1}{\overline{\varrho}}(\zeta + \frac{4\eta}{3})$ et en faisant la produit scalaire de l'équation (1.4.40) avec n, on obtient

$$\frac{\frac{4\eta}{3}+\zeta}{h\overline{\varrho}}\frac{\partial}{\partial n}(\sigma-\sigma') + R\overline{T}\frac{\partial}{\partial n}\sigma' = \eta(\Delta u - \nabla(\nabla\cdot u))\cdot n - R\overline{\varrho}\frac{\partial}{\partial n}\vartheta + \tag{1.5.61}$$

$$+F'\cdot n - \frac{\frac{4\eta}{3}+\zeta}{\overline{\varrho}}\nabla(\nabla\cdot(\sigma u))\cdot n.$$

En plus, en faisant un changement de variables pour les équations (1.5.60) et (1.5.61), et en multipliant le résultat obtenus respectivement par $J\chi^2 D_n\sum_{k,j=1}^3 a_{kj}\partial_{y_k}U_j$ et $J\chi^2 D_n\Sigma$, on obtient (1.5.59) après intégration et à l'aide de la relation

$$(\frac{a}{h}(z-z')+bz')z=\frac{a}{2h}(z^2-z'^2)+(\frac{a}{2h}-\frac{b}{2})(z-z')^2+\frac{b}{2}(z^2+z'^2)$$

avec $z, z' \in \mathbb{R}$, $a > 0$ et $b > 0$. $\square$

Lemme 1.5.5. *Soient u', ϑ', σ', u, ϑ et σ comme dans le lemme 1.5.1. Alors il existe une constante c telle que, quel que soit $\delta \in]0,1[$, on a*

$$\alpha\int\limits_W J\chi^2|D_\tau D_n(\sum_{j,k=1}^{3}a_{kj}\partial_{y_k}U_j)|^2dy+ \tag{1.5.62}$$
$$+\frac{\alpha}{h}\int\limits_W J\chi^2(|D_\tau D_n\Sigma|^2-|D_\tau D_n\Sigma'|^2+\frac{1}{2}|D_\tau D_n(\Sigma-\Sigma')|^2)dy\leq$$
$$\leq c(\int\limits_W J\chi^2|D_\tau D_y D_\tau U|^2dy+\|u\|^2_{H^2}+\|\vartheta\|^2_{H^2}+\|F'\|^2_{H^1})+$$
$$+\frac{c}{\delta}\|\sigma\|^4_{H^2}+c\delta\|u\|^2_{H^3}.$$

$$\alpha\int\limits_W J\chi^2|D_n D_n(\sum_{j,k=1}^{3}a_{kj}\partial_{y_k}U_j)|^2dy+ \tag{1.5.63}$$
$$+\frac{\alpha}{h}\int\limits_W J\chi^2(|D_n D_n\Sigma|^2-|D_n D_n\Sigma'|^2+\frac{1}{2}|D_n D_n(\Sigma-\Sigma')|^2)dy\leq$$
$$\leq c(\int\limits_W J\chi^2|D_n D_y D_\tau U|^2dy+\|u\|^2_{H^2}+\|\vartheta\|^2_{H^2}+\|F'\|^2_{H^1})+$$
$$+\frac{c}{\delta}\|\sigma\|^4_{H^2}+c\delta\|u\|^2_{H^3}.$$

Démonstration. Le lemme se démontre de manière analogue à la démonstration du lemme 1.5.4. En effet si on applique l'opérateur D_τ aux équations (1.5.60) et (1.5.61), (après un changement de variables) ; en les multipliant par $J\chi^2 D_\tau D_n\sum_{k,j=1}^3 a_{kj}\partial_{y_k}U_j$ et $J\chi^2 D_\tau D_n\Sigma$ respectivement, après intègration sur W, on obtient par des calculs simple (1.5.62). En outre, si on applique l'opérateur D_n aux équations (1.5.60) et (1.5.61), (après un changement de variables), en les multipliant par $J\chi^2 D_n D_n\sum_{k,j=1}^3 a_{kj}\partial_{y_k}U_j$

et $J\chi^2 D_n D_n \Sigma$ respectivement, après intègration sur W, on obtient par des calculs simple (1.5.63). □

Maintenant nous avons besoin d'une estimation de $\int \chi^2 |D_\tau D_y D_n U|^2 dy$.

Lemme 1.5.6. *Soient u', ϑ', σ', u, ϑ et σ comme dans le lemme 1.5.1. Alors il existe une constante c telle que, pour tout $\delta \in]0,1[$, on ait*

$$\int\limits_W J\chi^2 |D_y^2 D_\tau U|^2 dy + \int\limits_W J\chi^2 |D_y D_\tau (\overline{\varrho}\vartheta + \overline{T}\sigma')|^2 dy \leq \tag{1.5.64}$$

$$\leq c\Big(\int\limits_W J\chi^2 |D_\tau D_y (\sum_{j,k=1}^{3} a_{kj}\partial_{y_k} U_j)|^2 dy + \|u\|_{H^2}^2 + \|\sigma'\|_{H^1}^2 + \|\vartheta\|_{H^1}^2 + \|F'\|_{H^1}^2\Big).$$

Démonstration. On applique à (1.5.55) l'opérateur différentiel $J\chi D_\tau$ et on écrit le système obtenu sous la forme

$$-\eta \sum_{k,i,s=1}^{3} a_{ki}\partial_{y_k}(a_{si}\partial_{y_s} J\chi D_\tau U_j) + R\sum_{k=1}^{3} a_{kj}\partial_{y_k} J\chi D_\tau (\overline{\varrho}\Theta + \overline{T}\Sigma') =$$

$$= J\chi D_\tau F_j' + (\frac{\eta}{3} + \zeta) \sum_{k,i,s=1}^{3} a_{kj}\partial_{y_k}(a_{si}\partial_{y_s} J\chi D_\tau U_i)$$

$$\sum_{k,j=1}^{3} a_{kj}\partial_{y_k} J\chi D_\tau U_j = \sum_{k,j=1}^{3} a_{kj}\partial_{y_k} J\chi D_\tau U_j$$

$$J\chi D_\tau U_j = 0 \quad \text{dans} \quad \partial W \qquad j = 1,2,3,, \tau = 1,2.$$

Alors on considère ce système comme problème de Stokes de telle sort qu'on obtient l'inégalité (1.5.64). □

En joinant les inégalités obtenues ci-dessus, on a les lemmes suivants.

Lemme 1.5.7. *Soient u', ϑ', σ', u, ϑ et σ comme dans le lemme 1.5.1. Alors il existe une constante c telle que, quel que soit $\delta \in]0,1[$, on a*

$$\alpha \int\limits_W J\chi^2 \Big(|D_\tau D_y U|^2 + |D_\tau D_y \vartheta|^2 + |D_\tau \vartheta|^2\Big) dy + \tag{1.5.65}$$

$$+\alpha\int\limits_W J\chi^2|D_n(\sum_{k,j=1}^{3}a_{kj}\partial_{y_k}U_j)|^2dy+$$

$$+\frac{\alpha}{h}\int\limits_W J\chi^2(|D_\tau\Sigma|^2-|D_\tau\Sigma'|^2+\frac{1}{2}|D_\tau(\Sigma-\Sigma')|^2)dy+$$

$$+\frac{\alpha}{h}\int\limits_W J\chi^2(|D_n\Sigma|^2-|D_n\Sigma'|^2+\frac{1}{2}|D_n(\Sigma-\Sigma')|^2)dy\le$$

$$\le c(\|F'\|_{L^2}^2+\|G'\|_{L^2}^2+\|\vartheta\|_{H^1}^2)+\frac{c}{\delta^6}(\|u\|_{H^1}^2+\|\sigma\|_{H^1}^4)+$$

$$+c\delta^2(\|\nabla(\overline{\varrho}\vartheta+\overline{T}\sigma')\|_{L^2}^2+\|u\|_{H^3}^2).$$

Démonstration. En multipliant l'inégalité (1.5.59) par un nombre convenable et en la djoignant à (1.5.57), on obtient (1.5.65). $\square$

Lemme 1.5.8. *Soient u', ϑ', σ', u, ϑ et σ comme dans le lemme 1.5.1. Alors il existe une constante c telle que, quel que soit $\delta\in]0,1[$, on a*

$$\alpha\int\limits_W J\chi^2\Big(|D_\tau^2D_yU|^2+|D_y^2D_\tau U|^2+|D_\tau D_n(\sum_{j,k=1}^{3}a_{kj}\partial_{y_k}U_j)|^2\Big)dy+ \tag{1.5.66}$$

$$+\alpha\int\limits_W J\chi^2|D_nD_n(\sum_{j,k=1}^{3}a_{kj}\partial_{y_k}U_j)|^2dy+$$

$$+\frac{\alpha}{h}\int\limits_W J\chi^2\Big(|D_\tau^2\Sigma|^2-|D_\tau^2\Sigma'|^2+\frac{1}{2}|D_\tau^2(\Sigma-\Sigma')|^2\Big)dy+$$

$$+\frac{\alpha}{h}\int\limits_W J\chi^2\Big(|D_\tau D_n\Sigma|^2-|D_\tau D_n\Sigma'|^2+\frac{1}{2}|D_\tau D_n(\Sigma-\Sigma')|^2\Big)dy+$$

$$+\frac{\alpha}{h}\int\limits_W J\chi^2\Big(|D_nD_n\Sigma|^2-|D_nD_n\Sigma'|^2+\frac{1}{2}|D_nD_n(\Sigma-\Sigma')|^2\Big)dy\le$$

$$\le c(\|F'\|_{H^1}^2+\|\vartheta\|_{H^2}^2+\|\sigma'\|_{H^1}^2)+\frac{c}{\delta}(\|u\|_{H^2}^2+\|\sigma\|_{H^2}^4)+c\delta(\|u\|_{H^3}^2+\|\nabla(\overline{\varrho}\vartheta+\overline{T}\sigma')\|_{H^1}^2).$$

Démonstration. En multipliant chacune des inégalités (1.5.58), (1.5.62), (1.5.63) et (1.5.64) par un nombre convenable et en faisant leur somme, on obtient (1.5.66). $\square$

1.6 Application du théorème du point fixe de Schauder.

L'existence d'une solution dans $H_a^3 \times H_b^2 \times H_c^2$ du système (1.3.31)-(1.3.33) avec les conditions (1.3.36), (1.1.9) et (1.3.37) sera obtenue à l'aide du théorème de Schauder comme point fixe de l'opérateur Φ défini dans le paragraph 4 (voir (1.4.49)). On va d'abord démontrer le lemme suivant.

Lemme 1.6.1. *On suppose que* $\|f\|_{H^1}$ *et* $\|\nabla \cdot E(\overline{T})\|_{L^2}$ *sont assez petits. Alors il existe une constante* d*,* $0 < d \leq 1$*, et une norme* $\|\cdot\|_{\widehat{H}^2_\sigma}$ *équivalente à la norme* $\|\cdot\|_{H^2}$ *telles que*

$$\Phi(B) \subset B, \tag{1.6.67}$$

où $\Phi(\cdot)$ *est l'opérateur défini par* (1.4.49) *et*

$$B = \{(u, \vartheta, \sigma) \in H_a^3(\Omega) \times H_b^2(\Omega) \times H_c^2(\Omega) | \|u\|^2_{H^3} + \|\vartheta\|^2_{H^2} + \|\sigma\|^2_{\widehat{H}^2_\sigma} \leq d^2\}. \tag{1.6.68}$$

Démonstration. Il est clair qu'il existe une constante $\widetilde{d} > 0$ telle que, si $\|\vartheta\|_{H^2} \leq \widetilde{d}$ alors on a $\|\vartheta\|_{L^\infty} \leq \frac{\overline{T}}{2}$; donc en vertu des lemmes 1.4.1-1.4.3 on peut définir $(u, \vartheta, \sigma) = \Phi(u', \vartheta', \sigma')$ pour $(u', \vartheta', \sigma') \in B$, pour un d tel que $0 < d \leq \widetilde{d}$. Cela étant, pour démontrer le lemme, nous allons suivre l'idée de Farwig [16]. En effet, le choix des familles $\{\omega_k^{(0)}\}_{k=0}^N$ et $\{\omega_k^{(1)}\}_{k=0}^N$ de sous-ensembles de Ω (on rappelle entre autres que $\bigcup_{k=0}^N \omega_k^{(0)} = \Omega$) et en plus des propriétés du changement de variables $x \to y = (\psi, \varphi, r) = \Lambda^{-1}(x)$ et des fonctions inconnues $(u, \vartheta, \sigma) \to (U, \Theta, \Sigma)$, associes à (1.5.65), (1.5.66) nous permettent de déduire les inégalités qui nous conduisent à la démonstration du lemme 1.6.1. En effet, en rappelant que $\sum_{j,k=1}^3 a_{kj} \partial_{y_k} U_j = \nabla \cdot u$ ainsi que les propriétés des fonctions χ_k et en faisant la somme des inégalités (1.5.65) pour $\omega^{(1)} = \omega_k^{(1)}$, $k = 1, \cdots, N$, de l'inégalité (1.5.52) et de l'inégalité (1.5.50) multipliée par un nombre convenable d'ordre $c\delta^{-6}$, on voit qu'il existe une autre constante noté encore c telle que

$$\alpha\|D_x \nabla \cdot u\|^2_{L^2} + \frac{\alpha}{\delta^6}(\|\nabla u\|^2_{L^2} + \|\vartheta\|^2_{H^1}) + \tag{1.6.69}$$
$$+\frac{\alpha}{h}(\|D_x\sigma\|^2_{L^2} - \|D_x\sigma'\|^2_{L^2}) + \frac{\alpha}{h\delta^6}(\|\sigma\|^2_{L^2} - \|\sigma'\|^2_{L^2}) \leq$$

$$\leq \frac{c}{\delta^6}(\|F'\|_{L^2}^2 + \|G'\|_{L^2}^2) + \frac{c}{\delta^{14}}\|\sigma\|_{H^1}^4 + c\delta^2(\|u\|_{H^3}^2 + \|\nabla(\overline{\varrho}\vartheta + \overline{T}\sigma')\|_{L^2}^2).$$

De manière analogue, en faisant la somme des inégalités (1.5.66) pour $\omega^{(1)} = \omega_k^{(1)}$, $k = 1, \cdots, N$ et de l'inégalité (1.5.53), on voit qu'il existe une constante toujours noté c telle que

$$\alpha\|D_x^2\nabla\cdot u\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha}{h}(\|D_x^2\sigma\|_{L^2}^2 - \|D_x^2\sigma'\|_{L^2}^2) \leq \tag{1.6.70}$$
$$\leq c(\|F'\|_{H^1}^2 + \|\sigma'\|_{H^1}^2 + \|\vartheta\|_{H^2}^2) + \frac{c}{\delta}(\|\sigma\|_{H^2}^4 + \|u\|_{H^2}^2) +$$
$$+ c\delta(\|u\|_{H^3}^2 + \|\nabla(\overline{\varrho}\vartheta + \overline{T}\sigma')\|_{H^1}^2).$$

Rappelons les inégalités établies dans [16]

$$\|u\|_{H^{k+2}} + \|\nabla(\overline{\varrho}\vartheta + \overline{T}\sigma')\|_{H^k} \leq c(\|F'\|_{H^k} + \|\nabla\cdot u\|_{H^{k+1}}), \tag{1.6.71}$$

$$\|\nabla\sigma'\|_{H^k}^2 \leq c\|\nabla(\overline{\varrho}\vartheta + \overline{T}\sigma')\|_{H^k}^2 + c\|\nabla\vartheta\|_{H^k}^2, \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, \tag{1.6.72}$$

qui nous permettent d'écrire les inégalités dans une forme plus convenable. En effet, en faisant la somme de l'inégalité (1.6.69) et de l'inégalité (1.6.71) multipliée par $c\delta^2$, on aura

$$\alpha\|D_x\nabla\cdot u\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha}{\delta^6}(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\vartheta\|_{H^1}^2) + \frac{\alpha}{h}(\|D_x\sigma\|_{L^2}^2 - \|D_x\sigma'\|_{L^2}^2) + \tag{1.6.73}$$
$$+ \frac{\alpha}{h\delta^6}(\|\sigma\|_{L^2}^2 - \|\sigma'\|_{L^2}^2) \leq$$
$$\leq \frac{c}{\delta^6}(\|F'\|_{H^1}^2 + \|G'\|_{L^2}^2) + \frac{c}{\delta^{14}}\|\sigma\|_{H^1}^4 + c\delta^2\|\nabla\cdot u\|_{H^2}^2.$$

En outre, à l'aide des inégalités (1.4.44), (1.6.71), (1.6.72) (ainsi que l'inégalité de Poincaré), on peut déduire de (1.6.70) l'inégalité

$$\alpha\|D_x^2\nabla\cdot u\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha}{h}(\|D_x^2\sigma\|_{L^2}^2 - \|D_x^2\sigma'\|_{L^2}^2) \leq \tag{1.6.74}$$
$$\leq \frac{c}{\delta}(\|F'\|_{H^1}^2 + \|\sigma\|_{H^2}^4 + \|\nabla\cdot u\|_{H^1}^2) + c(\|G'\|_{L^2}^2 + \|\nabla\cdot u\|_{L^2}^2) + c\delta\|\nabla\cdot u\|_{H^2}^2.$$

D'autre part, en multipliant chacune des inégalités (1.6.73), (1.5.50) et (1.4.44) par un nombre convenable et en faisant leur somme avec (1.6.74) de telle sorte que le terme $\|\nabla\cdot u\|_{H^1}^2$ soit éliminé du second membre, on obtient

$$\alpha\|D_x^2\nabla\cdot u\|_{L^2}^2+\alpha\|\vartheta\|_{H^2}^2+\frac{\alpha}{h}(\|D_x^2\sigma\|_{L^2}^2-\|D_x^2\sigma'\|_{L^2}^2)+ \tag{1.6.75}$$
$$+\frac{\alpha}{h\delta}(\|D_x\sigma\|_{L^2}^2-\|D_x\sigma'\|_{L^2}^2)+\frac{\alpha}{h\delta^7}(\|\sigma\|_{L^2}^2-\|\sigma'\|_{L^2}^2)\le$$

$$\le\frac{c}{\delta^7}(\|F'\|_{H^1}^2+\|G'\|_{L^2}^2)+\frac{c}{\delta^{15}}\|\sigma\|_{H^2}^4+c\delta\|\nabla\cdot u\|_{H^2}^2+c\delta\|u\|_{H^3}^2.$$

En multipliant chacune des inégalité (1.6.75), (1.6.73) et (1.5.50) par un nombre convenable, en faisant leur somme et en utilisant l'inégalité (1.4.46) (ainsi que l'inégalité de Poincaré). En choisissant $\delta>0$ suffisamment petit, on voit qu'il existe une norme $\|\cdot\|_{\widetilde{H}^2_\sigma}$ équivalente à la norme de H^2 et une constante c telles que

$$\alpha\|u\|_{H^3}^2+\alpha\|\vartheta\|_{H^2}^2+\frac{\alpha}{h}(\|\sigma\|_{\widetilde{H}^2_\sigma}^2-\|\sigma'\|_{\widetilde{H}^2_\sigma}^2)\le$$
$$\le\frac{c}{\delta^7}(\|F'\|_{H^1}^2+\|G'\|_{L^2}^2)+\frac{c}{\delta^{15}}\Big(\|\sigma'\|_{H^2}^4+\|u\|_{H^3}^4\Big).$$

En outre, des inégalités (1.6.71) et (1.6.72) on déduit que

$$\|\sigma'\|_{\widetilde{H}^2_\sigma}^2\le c(\|F'\|_{H^1}^2+\|\nabla\vartheta\|_{H^1}^2+\|\nabla\cdot u\|_{H^2}^2).$$

En joignant ces deux inégalités (multipliées chacune par un nombre convenable), on déduit qu'il existe deux nombres strictement positifs d_0 et ε_1 tels que l'on a

$$\alpha\|u\|_{H^3}^2+\alpha\|\vartheta\|_{H^2}^2+\frac{\alpha}{h}(\|\sigma\|_{\widetilde{H}^2_\sigma}^2-\|\sigma'\|_{\widetilde{H}^2_\sigma}^2)+\varepsilon_1\|\sigma'\|_{\widetilde{H}^2_\sigma}^2\le \tag{1.6.76}$$
$$\le\frac{c}{\delta^7}(\|F'\|_{H^1}^2+\|G'\|_{L^2}^2)+\frac{c}{\delta^{15}}\|\sigma'\|_{H^2}^4,$$

pourvu que $\|u\|_{H^3}\le d_0$. Donc, en vertu de (1.4.47) et (1.4.48) il existe une constante c telle que

$$\alpha\|u\|_{H^3}^2+\alpha\|\vartheta\|_{H^2}^2+\frac{\alpha}{h}\|\sigma\|_{\widetilde{H}^2_\sigma}^2\le(\frac{\alpha}{h}-\varepsilon_1)\|\sigma'\|_{\widetilde{H}^2_\sigma}^2+ \tag{1.6.77}$$
$$+c(\|f\|_{H^1}^2+\|\nabla\cdot E(\overline{T})\|_{L^2}^2+(\|u'\|_{H^3}^2+\|\vartheta'\|_{H^2}^2+\|\sigma'\|_{\widetilde{H}^2_\sigma}^2)^2)$$

pourvu que $\|u\|_{H^3}\le d_0$.

De (1.6.77), il résulte que, si $\|f\|_{H^1}$ et $\|\nabla\cdot E(\overline{T})\|_{L^2}$ sont suffisamment petites, il existe un nombre d, $(0 < d \le d_0)$, tel que, si $\|u'\|^2_{H^3} + \|\vartheta'\|^2_{H^2} + \frac{1}{h}\|\sigma'\|^2_{\widetilde{H}^2_\sigma} \le d^2$, alors on a $\|u\|^2_{H^3} + \|\vartheta\|^2_{H^2} + \frac{1}{h}\|\sigma\|^2_{\widetilde{H}^2_\sigma} \le d^2$. Ainsi, si on pose $\|\sigma\|_{\widehat{H}^2_\sigma} = \frac{1}{\sqrt{h}}\|\sigma\|_{\widetilde{H}^2_\sigma}$, et en rappelant (1.6.68), on a $\Phi(B) \subset B$, ce qui achève la démonstration du lemme 1.6.1. □

Maintenant, on va démontrer la continuité de l'opérateur Φ dans l'ensemble B par rapport à la topologie de $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Lemme 1.6.2. *Il existe une constante c telle que, pour tout $(u'_1, \vartheta'_1, \sigma'_1)$, $(u'_2, \vartheta'_2, \sigma'_2) \in B$, on a*

$$\|u_1 - u_2\|_{H^1} + \|\vartheta_1 - \vartheta_2\|_{H^1} + \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^2} \le \tag{1.6.78}$$

$$\le c(\|u'_1 - u'_2\|_{H^1} + \|\vartheta'_1 - \vartheta'_2\|_{H^1} + \|\sigma'_1 - \sigma'_2\|_{L^2} + \|\sigma'_1 - \sigma'_2\|^{\frac{1}{2}}_{L^2}),$$

où $(u_i, \vartheta_i, \sigma_i) = \Phi(u'_i, \vartheta'_i, \sigma'_i)$, $i = 1, 2$.

Démonstration. Posons

$$U' = u'_1 - u'_2, \quad \Theta' = \vartheta'_1 - \vartheta'_2, \quad S' = \sigma'_1 - \sigma'_2,$$

$$U = u_1 - u_2, \quad \Theta = \vartheta_1 - \vartheta_2, \quad S = \sigma_1 - \sigma_2.$$

Comme u_i, ϑ_i et σ_i $(i = 1, 2)$ doivent vérifier les équations (1.4.39)-(1.4.41), alors pour Θ, U, S on a

$$S = S' - h\overline{\varrho}\nabla\cdot U - h(\nabla\cdot(Su_1) + \nabla\cdot(\sigma_2 U)), \tag{1.6.79}$$

$$-\eta\Delta U - (\frac{1}{3}\eta + \xi)\nabla(\nabla\cdot U) + R\overline{\varrho}\nabla\Theta = \tag{1.6.80}$$

$$= F(u'_1, \vartheta'_1, \sigma'_1) - F(u'_2, \vartheta'_2, \sigma'_2) - R\overline{T}\nabla S',$$

$$-\kappa\Delta\Theta + \overline{\beta}'_0\Theta = G(u'_1, \vartheta'_1, \sigma'_1) - G(u'_2, \vartheta'_2, \sigma'_2) - R\overline{\varrho}\overline{T}\nabla\cdot U, \tag{1.6.81}$$

où $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ et $G(\cdot,\cdot,\cdot)$ sont les fonctions difinies dans (1.3.34) et (1.3.35).

Pour obtenir une estimation de $\|S\|_{L^2}$, on va multiplier les deux membres de (1.6.79) par S et les intégrer sur Ω. Comme d'une part

$$\int_\Omega S\nabla\cdot(Su_1)dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega S^2\nabla\cdot u_1 dx$$

et

$$\|\nabla \cdot u_1\|_{L^\infty} \leq c'\|u_1\|_{H^3} \leq c'd$$

avec une constante c' (d est la constante introduite dans (1.6.68)), et d'autre part, on a

$$\|\nabla \cdot (\sigma_2 U)\|_{L^2} \leq c''\|\sigma_2\|_{\widehat{H}^2_\sigma}\|U\|_{H^1} \leq c''d\|U\|_{H^1}$$

avec une constante c'' ; en tenant compte de ces relations et du produit scalaire des deux memebres de (1.6.79) on obtient

$$\|S\|_{L^2}^2 \leq \|S'\|_{L^2}\|S\|_{L^2} + h\overline{\varrho}\|S\|_{L^2}\|U\|_{H^1} + h\frac{c'd}{2}\|S\|_{L^2}^2 + hc''d\|S\|_{L^2}\|U\|_{H^1}.$$

Le choix d'un h suffisament petit nous permet de supposer que $hc'd \leq \frac{1}{2}$. On déduit alors de l'inégalité précédente, qu'il existe une constante c_1, telle que

$$\|S\|_{L^2} \leq 2\|S'\|_{L^2} + c_1\|U\|_{H^1}. \tag{1.6.82}$$

D'autre part, d'après le lemme 1.4.1, appliqué aux équations (1.6.80) et (1.6.81), on a

$$\|U\|_{H^1} + \|\Theta\|_{H^1} \leq c(\|F_1' - F_2'\|_{H^{-1}} + \|G_1' - G_2'\|_{(H^1)'} + \|S'\|_{L^2}). \tag{1.6.83}$$

Or, de la définition de $\beta_1(\cdot)$ (voir (1.3.29), ainsi que (1.1.7) et (1.3.28)), on déduit qu'il existe une constante c' telle que

$$\|\beta_1(\vartheta_1') - \beta_1(\vartheta_2')\|_{(H^1)'} \leq c'\|\Theta'\|_{L^2}$$

pour ϑ_1', ϑ_2' vérifiant $\|\vartheta_i'\|_{H^2} \leq d$, $i = 1, 2$. L'examen des expressions de $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ et de $G(\cdot,\cdot,\cdot)$ données dans (1.3.34) et (1.3.35) nous donne

$$\|F_1' - F_2'\|_{H^{-1}} \leq c(\|U'\|_{H^1} + \|\Theta'\|_{H^1} + \|S'\|_{L^2} + \|S'\|_{L^2}^{\frac{1}{2}})\times \tag{1.6.84}$$

$$\times(\|f\|_{H^1} + \|u_2'\|_{H^3}\|u_2'\|_{H^1} + \|\sigma_1'\|_{H^2}\|u_2'\|_{H^2} + \|u_1'\|_{H^1}\|\sigma_1'\|_{H^2} +$$

$$+ \|u_2'\|_{H^2} + \|u_1'\|_{H^1} + \|\vartheta_2'\|_{H^1} + \|\sigma_1'\|_{H^1} + \|\sigma_2'\|_{H^1} +$$

$$+ \|\sigma_1'\|_{H^2}^{\frac{1}{2}}\|\vartheta_1'\|_{H^1} + \|\sigma_2'\|_{H^2}^{\frac{1}{2}}\|\vartheta_1'\|_{H^1}).$$

$$\|G_1' - G_2'\|_{(H^1)'} \leq c(\|U'\|_{H^1} + \|\Theta'\|_{H^1} + \|S'\|_{L^2})\times \tag{1.6.85}$$

$$\times(1 + \|u_1'\|_{H^2}\|\vartheta_1'\|_{H^1} + \|\vartheta_2'\|_{H^1}\|\sigma_2'\|_{H^2} + \|u_1'\|_{H^3}\|\sigma_2'\|_{H^2} + \|\vartheta_2'\|_{H^1}+$$

$$+\|u_1'\|_{H^1} + \|u_2'\|_{H^1} + \|\vartheta_1'\|_{H^1} + \|\sigma_1'\|_{H^1} + \|\vartheta_2'\|_{H^1}\|u_2'\|_{H^3}+$$

$$+\|u_2'\|_{H^2}\|\sigma_1'\|_{H^2} + \|\vartheta_1'\|_{H^1}\|\sigma_1'\|_{H^2} + \|u_1'\|_{H^3} + \|u_2'\|_{H^3} + \|u_1'\|_{H^2}).$$

En subtituant (1.6.84) et (1.6.85) dans (1.6.83) et en y utilisant (1.6.82) on obtient

$$\|U\|_{H^1} + \|\Theta\|_{H^1} + \|S\|_{L^2} \leq c(\|U'\|_{H^1} + \|\Theta'\|_{H^1} + \|S'\|_{L^2} + \|S'\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}),$$

d'où (1.6.78). Ce qui achève la démonstration du lemme 1.6.2 □

Les lemmes 1.6.1 et 1.6.2 étant établis, on peut démontrer le théorème 1.2.1, représentant résultat principal de ce chapitre.

Démonstration. On rappelle que l'ensemble B défini dans (1.6.68) est convexe et compact dans l'espace $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

En outre en vertu du lemme 1.6.2, l'opérateur Φ est continu dans B par la topologie de $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Donc, on déduit de (1.6.67) et du théorème de point fixe de Schauder qu'il existe un élément (u, ϑ, σ) de B tel que $\Phi(u, \vartheta, \sigma) = (u, \vartheta, \sigma)$. Si on pose $\varrho = \overline{\varrho} + \sigma$ et $T = \overline{T} + \vartheta$ et si pour I_λ définit dans le lemme 1.2.1, on voit que $(u, T, \varrho, \{I_\lambda\}_{\lambda>0})$ est une solution du système d'équations (1.1.1)-(1.1.4) avec les conditions (1.1.8)-(1.1.10), (1.1.14), ce qui achève la démonstration du théorème 1.2.1. □

Remarque. Si on examine l'équation (1.1.15) et la démonstration des lemmes 1.2.1 et 1.2.2, on peut constater que l'hypothèse "$I_\lambda^0(x^0, q)$ est telle que $\|\nabla \cdot E(\overline{T})\|_{L^2(\Omega)}$ soit suffisamment petite" peut être vérifiée par exemple dans le cas où a_λ, r_λ et le diamètre de Ω sont petits et $I_\lambda^0(x^0, q)$ ne dépend pas de $x^0 \in \partial\Omega$.

CHAPITRE 2

Le système d'équations décrivant l'intensité de la radiation et de mouvement de l'air avec les transitions de phase de l'eau

Sommaire

2.1 Introduction. **37**

2.2 Hypothèses et résultat principal **41**

2.3 Equation de l'intensité de la radiation **44**

2.4 Equations linéaires pour les densités. **52**

2.5 Equation pour les densités de l'eau avec la température et la vitesse données. **59**

2.6 Equations linéaire pour la vitesse et la température. **64**

2.7 Existence et unicité de la solution locale. **66**

2.1 Introduction.

Le but de notre recherche est de donner une description mathématique suffisamment détaillée des phénomènes qui se produisent dans l'atmosphère et de démontrer sa cohérence du point de vue mathématique. Dans ce chapitre, nous considérons le système d'équations décrivant le mouvement de l'air, la variation de l'intensité de la radiation et le processus de la transition de phase de l'eau. Sous des hypothèses convenables, nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution locale, où en éliminant l'approximation par une régularisation de la densité de la vapeur $\pi(t, x)$. Ce résultat améliore bien le résultat du travail [7].

Nous étudions notre système d'équations dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ muni de la frontière suffisamment régulière. Nous désignons la densité de l'air sec par $\varrho(t, x)$ ($t \geq 0$, $x \in \Omega$), la densité de la vapeur d'eau par $\pi(t, x)$, la densité de l'eau liquide par $\sigma(t, m, x)$ ($m > 0$ est la masse d'une gouttelette), la température de l'air par $T(t, x)$, la vitesse de l'air par $v(t, x) = (v_1, v_2, v_3)$, la vitesse des gouttelettes d'eau par $u(t, m, x) = (u_1, u_2, u_3)$ et l'intensité de la radiation de longueur d'onde λ par $I_\lambda(x, q_1)$. De plus nous désignons par η et ζ les coefficients de la viscosité, par κ la conductibilité thermique, par c_v la chaleur spécifique à volume constant, par L_{gl} la chaleur latente relative à la transition gaz-liquide.

Nous admettons que la pression p est donnée par

$$p = R_0(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h})T,$$

où R_0, μ_a et μ_h sont respectivement la constante universelle des gaz, la masse molaire moyenne de l'air sec et la masse molaire de H_2O. On suppose que la force externe est donnée par le gradient du potentiel Φ.

Si le mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau est couplé avec la radiation, on aura le système d'équations (voir [7, 21, 22, 33])

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho v) = 0, \tag{2.1.1}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \nabla \cdot (\pi v) = -H_{gl}(T, \pi, \sigma(m)), \tag{2.1.2}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla_{(m,x)} \cdot (\sigma \widetilde{U}_{4l}(u, T, \pi)) = \tag{2.1.3}$$

$$= [h_{gl}(T, \pi; m) + B_1(\sigma; m) - g_1(m)[\pi - \overline{\pi}_{vs(l)}(T)]^-]\sigma +$$

$$+ g_0(m)[N^* - \widetilde{N}(\sigma)]^+[\pi - \overline{\pi}_{vs(l)}(T)]^+ + B_2(\sigma; m),$$

$$(\varrho + \pi)\Big(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v\Big) = \eta \Delta v + \Big(\zeta + \frac{\eta}{3}\Big)\nabla(\nabla \cdot v) + \tag{2.1.4}$$

$$-R_0 \nabla\Big(\Big(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h}\Big)T\Big) - \Big[\int_0^\infty \sigma(m)\, dm + \varrho + \pi\Big]\nabla\Phi,$$

$$(\varrho + \pi)c_v\Big(\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial T}{\partial x_j}\Big) = \kappa \Delta T - R_0\Big(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h}\Big)T\nabla \cdot v + \tag{2.1.5}$$

$$+\eta \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla \cdot v\Big)\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \zeta(\nabla \cdot v)^2 - \nabla \cdot \mathcal{E} + L_{gl}H_{gl},$$

$$-(q_1 \cdot \nabla)I_\lambda(x, q_1) = b_\lambda(x, t)I_\lambda(x, q_1) - J_\lambda(t, x, q_1, I_\lambda, T), \tag{2.1.6}$$

où

$$\nabla_{(m,x)} = (\partial_m, \partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}), \qquad \widetilde{U}_{4l}(u, T, \pi) = (mh_{gl}, u_1, u_2, u_3), \tag{2.1.7}$$

$$\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3), \qquad \mathcal{E}_j(t, x) = \int_0^\infty \int_{S^2} I_\lambda(t, x, q_1)q_{1j}\,dq_1 d\lambda, \qquad j = 1, 2, 3, \tag{2.1.8}$$

et H_{gl}, h_{gl}, $B_1(\sigma; m)$, $B_2(\sigma; m)$, $J_\lambda(t, x, q_1, I_\lambda, T)$, $b_\lambda(t, x)$, $g_0(m)$, $g_1(m)$, N^*, $\widetilde{N}(\sigma)$ sont des fonctions (ou constantes) que nous allons définir dans la suite ; nous envisageons ce système d'équations pour $t \geq 0$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, $m > 0$ et $q_1 \in S^2 = \{q \in \mathbb{R}^3 : |q| = 1\}$. La fonction $I_\lambda(t, x, q_1)$ apparaissant dans (2.1.6) et (2.1.8) dépend de t, mais le rôle de t est seulement celle du paramètre. Donc, dans la suite nous écrivons simplement $I_\lambda(x, q_1)$.

En ce qui concerne H_{gl} et h_{gl}, ce qui représentent respectivement la quantité de condensation (ou évaporation) sur toutes les gouttelettes et celle sur les gouttelettes de masse m, nous considérons H_{gl} et h_{gl} ayant la forme proposée dans la modélisation [33], plus précisément

$$H_{gl}(T,\pi,\sigma(\cdot)) = K_1 \int_0^\infty \frac{S_l(m)}{m}\sigma(m)dm\Big(\pi - \overline{\pi}_{vs(l)}(T)\Big), \tag{2.1.9}$$

$$h_{gl} = h_{gl}(T,\pi,m) = K_1 \frac{S_l(m)}{m}(\pi - \overline{\pi}_{vs(l)}(T)), \tag{2.1.10}$$

où K_1 est une constante positive, $\overline{\pi}_{vs(l)}(T)$ est la densité de la vapeur saturée par rapport à l'état liquide et $S_l(m)$ représente la surface des gouttelettes de masse m ; on suppose que

$$S_l(\cdot) \in C^2(\mathbf{R}_+), \qquad S_l'(\cdot) \geq 0, \tag{2.1.11}$$

$$S_l(m) = 0 \quad \text{pour } \ 0 \leq m \leq \frac{\overline{m}_a}{2} \quad (0 < \overline{m}_a), \tag{2.1.12}$$

$$S_l(m) = c_l m^{2/3}, \qquad \text{pour } \ m \geq \overline{m}_A \quad (\overline{m}_a < \overline{m}_A < \infty); \tag{2.1.13}$$

avec $\overline{m}_a$ et $\overline{m}_A$ representant les bornes inférieure et supérieure de la masse d'aérosols.

Les termes $B_1(\sigma;m)$ et $B_2(\sigma;m)$ sont donnés par

$$B_1(\sigma;m) = -m\sigma(m)\int_0^\infty \beta_l(m,m')\sigma(m')dm',$$

$$B_2(\sigma;m) = \frac{m}{2}\int_0^m \beta_l(m-m',m')\sigma(m')\sigma(m-m')dm',$$
$$\beta_l(m_1,m_2) = \beta_l(m_2,m_1) \geq 0 \quad \forall m_1,m_2 \in \mathbb{R}_+,$$

où $\beta_l(m,m')$ désigne le taux de rencontre entre une gouttelette de masse m et une de masse m'.

On suppose que pour certains $M > \overline{m}_a$,

$$\beta_l(m',m'') = 0 \quad \text{lorsque } \ m' + m'' \geq M. \tag{2.1.14}$$

L'apparition de gouttelettes de masse m est représentée par $g_0(m)[N^* - \widetilde{N}(\sigma)]^+ [\pi - \overline{\pi}_{vs(l)}(T)]^+$, où N^* et $\tilde{N}(\sigma)$ représentent respectivement le nombre total de gouttelettes qui peuvent être formés dans l'unité de volume et le nombre dans l'unité de volume des aérosols qui se trouvent déjà dans les gouttelettes. La disparition des gouttelettes de masse m est représentée par $g_1(m)[\pi - \overline{\pi}_{vs(l)}(T)]^-\sigma$. Pour les fonctions de coefficients $g_0(m)$ et $g_1(m)$, nous supposons que sont suffisamment régulière et

$$\operatorname{supp} g_0(\cdot) \subset [\overline{m}_a, \overline{m}_A], \qquad \operatorname{supp} g_1(\cdot) \subset [0, \overline{m}_A]. \tag{2.1.15}$$

D'autre part $b_\lambda(t,x)$ et $J_\lambda(t,x,q_1,I_\lambda,T)$ sont définies par les relations

$$b_\lambda(t,x) = (a_\lambda^{(1)} + r_\lambda^{(1)})\varrho(t,x) + (a_\lambda^{(2)} + r_\lambda^{(2)})\pi(t,x) + \tag{2.1.16}$$

$$+ \int_0^\infty (a_\lambda^{(3)}(m) + r_\lambda^{(3)}(m))\sigma(t,m,x)dm,$$

$$J_\lambda(t,x,q_1,I_\lambda,T) = \frac{1}{4\pi} r_\lambda^{(1)} \varrho(t,x) \int_{S^2} I_\lambda(x,q_1')P_\lambda^{(1)}(q_1' \cdot q_1)dq_1' + \tag{2.1.17}$$

$$+ \frac{1}{4\pi} r_\lambda^{(2)} \pi(t,x) \int_{S^2} I_\lambda(x,q_1')P_\lambda^{(2)}(q_1' \cdot q_1)dq_1' +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty r_\lambda^{(3)}(m)\sigma(t,m,x)dm \int_{S^2} I_\lambda(x,q_1')P_\lambda^{(3)}(q_1' \cdot q_1)dq_1' +$$

$$+ \Big(a_\lambda^{(1)}\varrho(t,x) + a_\lambda^{(2)}\pi(t,x) + \int_0^\infty a_\lambda^{(3)}(m)\sigma(t,m,x)dm\Big)B[\lambda, T(x)],$$

où $a_\lambda^{(1)}$, $r_\lambda^{(1)}$ et $P_\lambda^{(1)}(q_1' \cdot q_1)$ sont respectivement le coefficient d'absorption et celui de diffusion du rayonnement et la diffusion de la radiation de la direction q_1' dans la direction q_1 par l'air sec, tandis que $a_\lambda^{(2)}$, $r_\lambda^{(2)}$ et $p_\lambda^{(2)}(q_1' \cdot q_1)$ sont respectivement le coefficient d'absorption et celui de diffusion du rayonnement et la diffusion de la radiation de la direction q_1' dans la direction q_1 par la vapeur d'eau, et $a_\lambda^{(3)}(m)$, $r_\lambda^{(3)}(m)$ et $p_\lambda^{(3)}(q_1' \cdot q_1)$ sont respectivement le coefficient d'absorption et celui de diffusion du rayonnement et la diffusion de la radiation de la direction q_1' dans la direction q_1 par l'eau liquide (ou solide) ; $\Big(a_\lambda^{(1)}\varrho(t,x) + a_\lambda^{(2)}\pi(t,x) + \int_0^\infty a_\lambda^{(3)}(m)\sigma(t,m,x)dm\Big)B[\lambda, T(x)]$ désigne l'émission de la radiation, où la fonction $B[\lambda, T]$, dite *fonction de Planck*, est donnée par

$$B[\lambda, T] = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5}(e^{\frac{ch}{k\lambda T}} - 1)^{-1} \tag{2.1.18}$$

(ici c est la vitesse de la lumière, h la constante de Planck et k la constante de Boltzmann).

Pour la vitesse $u(t, m, x)$ des gouttelettes d'eau, nous admettons l'approximation

$$u(t, m, x) = v(t, x) - \frac{1}{\alpha_l(m)} \nabla \Phi, \tag{2.1.19}$$

où $\alpha_l(m)$ est le coefficient de friction d'une gouttelette de masse m avec l'air.

2.2 Hypothèses et résultat principal

Dans le présent travail nous considérons le système d'équations (2.1.1)-(2.1.6) dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avec les conditions suivantes

$$\varrho(0, \cdot) = \varrho_0(\cdot) \in W_p^1(\Omega), \quad \inf_{x \in \Omega} \varrho_0(x) > 0, \tag{2.2.20}$$

$$\pi(0, \cdot) = \pi_0(\cdot) \in W_p^1(\Omega), \quad \inf_{x \in \Omega} \pi_0(x) > 0, \tag{2.2.21}$$

$$\sigma(0, \cdot, \cdot) = \sigma_0(\cdot, \cdot), \tag{2.2.22}$$

$$\sigma_0(\cdot, \cdot) \in W_p^1(\mathbb{R}_+ \times \Omega) \quad \sigma_0(\cdot, \cdot) \geq 0, \quad \partial_m \sigma_0 \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \Omega) \tag{2.2.23}$$

$$\exists \overline{M}' \geq \overline{m}_A \ \text{ tel que } \ \sigma_0(m, \cdot) = 0 \quad \text{si} \ \ m \in]0, \overline{m}_a] \cup [\overline{M}', \infty[. \tag{2.2.24}$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \qquad v(0, \cdot) = v_0(\cdot) \in W_p^{2-\frac{2}{p}}, \quad v_0|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.2.25}$$

$$\nabla T \cdot n\Big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad T(0, \cdot) = T_0(\cdot) \in W_q^{2-\frac{2}{q}}. \tag{2.2.26}$$

Pour préciser les conditions aux limites (conditions d'entrée) pour $\{I_\lambda\}_{\lambda>0}$, il est commode de transformer l'équation (2.1.6) en une équation intégrale. Alors on peut réécrire l'équation (2.1.6) dans la forme

$$\frac{d}{d\alpha} I_\lambda(x+\alpha q_1, q_1) = -b_\lambda(t, x) I_\lambda(x+\alpha q_1, q_1) + J_\lambda(t, x+\alpha q_1, q_1, \varrho, \pi, \sigma, I_\lambda, T). \tag{2.2.27}$$

Pour $(x, q_1) \in \Omega \times S^2$ on pose

$$\alpha^0_{(x,q_1)} = \inf\{\, \alpha \in \mathbb{R} \,|\, x + \alpha' q_1 \in \Omega \ \forall \alpha' \in]\alpha, 0[\, \}. \tag{2.2.28}$$

L'équation (2.2.27) avec la condition

$$I_\lambda(x + \alpha^0_{(x,q_1)} q_1, q_1) = I^0_\lambda(x + \alpha^0_{(x,q_1)} q_1, q_1) \tag{2.2.29}$$

peut être résolue formellement par la fonction

$$\begin{aligned} I_\lambda(x, q_1) = {} & I^0_\lambda(x + \alpha^0_{(x,q_1)} q_1, q_1) e^{-I_b(x, \alpha^0_{(x,q_1)}, q_1)} + \\ & + \frac{r^{(1)}_\lambda}{4\pi} \int_{\alpha^0_{(x,q_1)}}^{0} \varrho(t, x + \alpha' q_1) \int_{S^2} P^{(1)}_\lambda(q_1' \cdot q_1) I_\lambda(x + \alpha' q_1, q_1') e^{-I_b(x,\alpha',q_1)} dq_1' d\alpha' + \\ & + \frac{r^{(2)}_\lambda}{4\pi} \int_{\alpha^0_{(x,q_1)}}^{0} \pi(t, x + \alpha' q_1) \int_{S^2} P^{(2)}_\lambda(q_1' \cdot q_1) I_\lambda(x + \alpha' q_1, q_1') e^{-I_b(x,\alpha',q_1)} dq_1' d\alpha' + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty r^{(3)}_\lambda(m) \int_{\alpha^0_{(x,q_1)}} \sigma(t, m, x + \alpha' q_1) \int_{S^2} I_\lambda(x + \alpha' q_1, q_1') P^{(3)}_\lambda(q_1' \cdot q_1) \times \\ & \times e^{-I_b(x,\alpha',q_1)} dq_1' d\alpha' dm + \\ & + \int_{\alpha^0_{(x,q_1)}}^{0} \Big(a^{(1)}_\lambda \varrho(t, x + \alpha' q_1) + a^{(2)}_\lambda \pi(t, x + \alpha' q_1) + \int_0^\infty a^{(3)}_\lambda(m) \sigma(t, m, x + \alpha' q_1) dm \Big) \times \\ & \times B[\lambda, T(t, x + \alpha' q_1)] e^{-I_b(x,\alpha',q_1)} d\alpha', \end{aligned} \tag{2.2.30}$$

où

$$I_b(x, \alpha, q_1) = \int_\alpha^0 b_\lambda(t, x + \alpha' q_1) d\alpha'. \tag{2.2.31}$$

On remarque que, dans (2.2.30) $(x + \alpha^0_{(x,q_1)} q_1, q_1)$ doit appartenir à l'ensemble

$$\Xi = \bigcup_{x^0 \in \partial\Omega} \Big(\{x^0\} \times S^2_-(x^0) \Big), \tag{2.2.32}$$

où

$$S^2_-(x^0) = \{ q_1 \in S^2 \,|\, \exists\, \varepsilon > 0\,,\; x^0 + \alpha q_1 \in \Omega,\; \forall \alpha \in]0, \varepsilon[\,\} \tag{2.2.33}$$

$(x^0 \in \partial\Omega)$.

Pour les taux de diffusion $P_\lambda^{(i)}(q_1' \cdot q_1)$ et les coeffcients de diffusion $r_\lambda^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ nous supposons

$$P_\lambda^{(i)}(q_1' \cdot q_1) \geq 0 \ \forall q_1', q_1 \in S^2, \quad \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} P_\lambda^{(i)}(q_1' \cdot q_1)dq_1 = 1 \quad \forall q_1' \in S^2. \tag{2.2.34}$$

$$\sup_{x\in\Omega}\int_0^\infty r_\lambda^{(3)}(m)\sigma_0(x,m)dm \leq 4, \qquad \int_0^\infty (a_\lambda^{(3)}(m) + r_\lambda^{(3)}(m))dm \leq \infty, \tag{2.2.35}$$

en outre, nous supposons qu'il existe une constante strictement positive ε_1 telle que

$$\sup_{x\in\Omega, -1\leq c\leq 1}\left(r_\lambda^{(1)}P_\lambda^{(1)}(c)\varrho_0(x) + r_\lambda^{(2)}P_\lambda^{(2)}(c)\pi_0(x)\right) \leq \frac{\varepsilon_1}{2}, \tag{2.2.36}$$

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}_+}(K_b \sup_{-1\leq c\leq 1} P_\lambda^{(3)}(c))^{1/2} + \frac{\varepsilon_1}{2} < 1, \tag{2.2.37}$$

où K_b est défini par la relation

$$K_b = \sup_{x\in\Omega, q_1\in S^2}(1 - e^{-2I_{b^0}(x,\alpha^0_{(x,q_1)},q_1)}), \tag{2.2.38}$$

avec $I_{b^0}(x, \alpha^0_{(x,q_1)}, q_1)$ définie d'une manière analogue à (2.2.31), mais avec

$$b_\lambda^0(x) = 2(a_\lambda^{(1)} + r_\lambda^{(1)})\varrho_0(x) + 2(a_\lambda^{(2)} + r_\lambda^{(2)})\pi_0(x) + 2\int_0^\infty (a_\lambda^{(3)} + r_\lambda^{(3)})\sigma_0(m,x)dm + \varepsilon_2$$

au lieu de b_λ,

où ε_2 est une constante strictement positive et suffisamment petit.

Sur le domaine Ω, pour la commodité du calcul, nous supposons que le diamètre de Ω est égal à 1. Cette hypothèse ne restreint pas en principe la généralité de la condition du domaine car on peut transformer un domaine par un changement de variables en un domaine de diamètre 1.

Pour la fonction Φ nous supposons

$$\Phi \in C^3(\Omega), \qquad \nabla\Phi \cdot n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \tag{2.2.39}$$

(n est le vecteur normal extérieur à $\partial\Omega$).

Alors le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant.

Théorème 2.2.1. *Soient $p > 4$, $2q > p > q > 3$. Nous supposons les conditions* (2.2.20)-(2.2.26)*,* (2.2.29) *et* (2.2.34)-(2.2.37)*. Alors il existe un certain nombre $\overline{t} > 0$, tel que le problème* (2.1.1)-(2.1.6) *admet, dans $[0,\overline{t}] \times \mathbf{R}_+ \times \Omega$, une solution $(\varrho, \pi, \sigma, v, T, I_\lambda)$ et une seule avec les propriétés*

$$\varrho \in C^0([0,\overline{t}]; W_p^1(\Omega)), \qquad \inf_{(t,x)\in Q_{\overline{t}}} \varrho(t,x) > 0, \tag{2.2.40}$$

$$\pi \in C^0([0,\overline{t}]; W_p^1(\Omega)), \quad \pi \geq 0, \tag{2.2.41}$$

$$\sigma \in C^0([0,\overline{t}]; W_p^1(\mathbf{R}_+ \times \Omega)), \quad \sigma \geq 0, \quad \partial_m \sigma \in C^0([0,\overline{t}]; L^\infty(\mathbf{R}_+ \times \Omega)), \tag{2.2.42}$$

$$v \in W_p^{2,1}([0,\overline{t}] \times \Omega), \qquad T \in W_q^{2,1}([0,\overline{t}] \times \Omega), \quad T > 0, \tag{2.2.43}$$

$$I_\lambda \in L^\infty(\Omega \times S^2). \tag{2.2.44}$$

avec

$$\|\varphi\|_{W_r^{2,1}([0,t]\times\Omega)} = \|\varphi\|_{L^r(0,t;W_r^2(\Omega))} + \|\partial_t \varphi\|_{L^r([0,t]\times\Omega)}.$$

L'idée générale pour démontrer le théorème (2.2.1) est celle d'examiner d'abord les équations linéairisées c'est-à-dire rendre les équations non-linéaires aux équations linéaires en fixant des données et puis de chercher un point fixe d'un opérateur défini par la solution des équations linéairisées.

2.3 Equation de l'intensité de la radiation

Dans cette section, nous allons démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (2.2.30) avec λ et t fixe et avec ϱ, π, σ et T sont données. De plus, nous allons établir certaines estimations pour la différence entre deux solutions de l'équation (2.2.30) avec le même λ et t fixe et mais différent ϱ, π, σ et T.

Lemme 2.3.1. *Soit $I_\lambda^0(x^0, q_1)$ une fonction mesurable, non-négative, définie sur Ξ. On suppose que*

$$\sup_{(x^0,q_1)\in\Xi} I_\lambda^0(x^0, q_1) < \infty. \tag{2.3.45}$$

Si les fonctions $\varrho(t,\cdot)$, $\pi(t,\cdot)$ et $T(t,\cdot)$ sont données dans $L^\infty(\Omega)$ et $\sigma(t,\cdot,\cdot)$ est donnée dans $L^\infty(\mathbb{R}_+\times\Omega)$, alors l'équation (2.2.30) admet une solution I_λ et une seule dans la classe $L^\infty(\Omega\times S^2)$, et on a

$$\sup_{(x,q_1)\in\Omega\times S^2} I_\lambda(x,q_1) \le \frac{1}{\varepsilon_b}\Big[\sup_{(x^0,q_1)\in\Xi} I_\lambda^{(0)}(x^0,q_1) + \sup_{\frac{\overline{T}_0^{(-)}}{2}\le T\le\frac{3\overline{T}_0^{(+)}}{2}} B[\lambda,T]\Big] \tag{2.3.46}$$

où

$$\varepsilon_b=\varepsilon_b(t)=\inf_{(x,q_1)\in\Omega\times S^2} e^{-I_b(x,\alpha^0_{x,q_1},q_1)},$$

$$\overline{T}_0^{(-)}=\inf_{x\in\Omega} T_0(x), \qquad \overline{T}_0^{(+)}=\sup_{x\in\Omega} T_0(x).$$

Démonstration. Etablissons d'abord l'estimation a priori (2.3.46). Pour ce faire, supposons qu'il existe une solution $I_\lambda(x,q_1)$ bornée sur $\Omega\times S^2$ et posons

$$\overline{A}=\sup_{(x,q_1)\in\Omega\times S^2} I_\lambda(x,q_1), \qquad \overline{B}=\sup_{\frac{\overline{T}_0^{(-)}}{2}\le T\le\frac{3\overline{T}_0^{(+)}}{2}} B[\lambda,T],$$

$$\overline{I}=\sup_{(x^0,q_1)\in\Xi} I_\lambda^{(0)}(x^0,q_1).$$

En rappelant la définition (2.1.16) de $b_\lambda(t,x)$, de (2.2.30) on déduit que

$$I_\lambda(x,q_1)\le \overline{I}+\overline{A}\int_{\alpha^0_{(x,q_1)}}^{0} b_\lambda(t,x+\alpha' q_1)e^{-I_b(x,\alpha',q_1)}d\alpha' +$$

$$+\overline{B}\int_{\alpha^0_{(x,q_1)}}^{0} b_\lambda(t,x+\alpha' q_1)e^{-I_b(x,\alpha',q_1)}d\alpha',$$

d'où

$$\overline{A}\le\overline{I}+(1-\varepsilon_b)\overline{A}+\overline{B},$$

ou

$$\overline{A}\le\frac{1}{\varepsilon_b}(\overline{I}+\overline{B}),$$

c'est-à-dire (2.3.46) est établie. Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution I_λ, on désigne par $G(I_\lambda)$ le second membre de (2.2.30), alors on a

$$|G(I_\lambda^{[1]})(x,q_1)-G(I_\lambda^{[2]})(x,q_1)|\le \tag{2.3.47}$$

$$\leq \sup_{(x,q_1)\in\Omega\times S^2} |I_\lambda^{[1]} - I_\lambda^{[2]}| \frac{1}{4\pi} \int_{\alpha^0_{(x,q_1)}} \int_{S^2} \Big(r_\lambda^{(1)} \varrho(t, x+\alpha' q_1) P_\lambda^{(1)}(q_1', q_1) +$$

$$+ r_\lambda^{(2)} \pi(t, x+\alpha' q_1) P_\lambda^{(2)}(q_1', q_1) + \int_0^\infty r_\lambda^{(3)}(m) \sigma(t, m, x+\alpha' q_1) P_\lambda^{(3)}(m, q_1', q_1) dm \Big) \times$$

$$\times e^{-I_b(x,\alpha',q_1)} dq_1' d\alpha'.$$

Par conséquent, en utilisant les propriétés de $P_\lambda^{(i)}$ (voir (2.2.34)), on obtient

$$|G(I_\lambda^{[1]})(x,q_1) - G(I_\lambda^{[2]})(x,q_1)| \leq \tag{2.3.48}$$

$$\leq \int_{\alpha^0_{(x,q_1)}}^0 b_\lambda(t, x+\alpha' q_1) e^{-I_b(x,\alpha',q_1)} d\alpha' \sup_{(x,q_1)\in\Omega\times S^2} |I_\lambda^{[1]} - I_\lambda^{[2]}| \leq$$

$$\leq \Big(1 - e^{-I_b(x,\alpha^0_{x,q_1},q_1)}\Big) \sup_{(x,q_1)\in\Omega\times S^2} |I_\lambda^{[1]} - I_\lambda^{[2]}|,$$

où $I_b(x,\alpha',q_1)$ est défini par la relation (2.2.31).

Donc on déduit que l'opérateur $G(\cdot)$ est un opérateur de contraction dans l'espace $L^\infty(\Omega\times S^2)$, ce qui nous permet de trouver une solution $I_\lambda(x,q_1)$ et une seule appartenant à $L^\infty(\Omega\times S^2)$. $\square$

Maintenant, nous allons donnée une estimation de la divergence de $\mathcal{E}$.

Lemme 2.3.2. *Soient $\varrho(t,\cdot), \pi(t,\cdot) \in L^p(\Omega)$, $\sigma(t,\cdot,\cdot) \in L^p(L^\infty(\mathbb{R}_+);\Omega)$, $I_\lambda \in L^\infty(\Omega\times S^2)$, $B[\lambda, T(\cdot)] \in L^\infty(\Omega)$ alors il existe une constante c strictement positif telle que on a*

$$\|\nabla\cdot\mathcal{E}\|_{L^q} \leq c\Big(\Big\|\int_0^\infty I_\lambda(x,q)d\lambda\Big\|_{L^\infty(\Omega\times S^2)} + \Big\|\int_0^\infty B[\lambda,T(x)]d\lambda\Big\|_{L^\infty(\Omega)}\Big)\times \tag{2.3.49}$$

$$\times\Big(\|\varrho\|_{L^p(\Omega)} + \|\pi\|_{L^p(\Omega)} + \|\sigma\|_{L^p(\Omega;L^\infty(\mathbb{R}_+))}\Big).$$

Démonstration. L'inégalité (2.3.49) résulte de la définition de $\mathcal{E}(\cdot)$ (voir (2.1.6),(2.1.8)) par des calculs élémentaires (voir aussi les conditions (2.2.34), (2.2.35)). $\square$

Nous montrons aussi quelques estimations pour la différence entre deux possibles fonctions représentant l'intensité de la radiation I_λ.

Soient $I_\lambda^{[i]}(x,q_1)$, $i=1,2$, deux fonctions de classe $L^\infty(\Omega\times S^2)$ vérifiant l'équation (2.2.30) avec $\varrho=\varrho_i$, $\pi=\pi_i$, $\sigma=\sigma_i$ et $T=T_i$ pour $i=1,2$. On a donc

$$I_\lambda^{[1]}(x,q_1)-I_\lambda^{[2]}(x,q_1)=\Delta_0 I_\lambda+\Delta_1 I_\lambda+\Delta_2 I_\lambda, \tag{2.3.50}$$

où

$$\begin{aligned}
\Delta_0 I_\lambda = {} & I_\lambda^{(0)}(x+\alpha^0_{(x,q_1)}q_1,q_1)(e^{-I_{b_1}(x,\alpha^0,q_1)}-e^{-I_{b_2}(x,\alpha^0,q_1)})+ \\
&+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\alpha^0_{(x,q_1)}}^{0}\int\limits_{S^2}\Big(r_\lambda^{(1)}P_\lambda^{(1)}(q_1'\cdot q_1)(\varrho_1-\varrho_2)(x+\alpha' q_1)+r_\lambda^{(2)}P_\lambda^{(2)}(q_1'\cdot q_1)(\pi_1-\pi_2)(x+\alpha' q_1)+ \\
&+\int\limits_0^\infty r_\lambda^{(3)}(m)P_\lambda^{(3)}(q_1'\cdot q_1)(\sigma_1-\sigma_2)(m,x+\alpha' q_1)dm\Big)\times \\
&\times e^{-I_{b_2}(x,\alpha',q_1)}I_\lambda^{[2]}(x+\alpha' q_1,q_1')dq_1'd\alpha'+ \\
&+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\alpha^0_{(x,q_1)}}^{0}\int\limits_{S^2}\Big(r_\lambda^{(1)}P_\lambda^{(1)}(q_1'\cdot q_1)\varrho_1(x+\alpha' q_1)+r_\lambda^{(2)}P_\lambda^{(2)}(q_1'\cdot q_1)\pi_1(x+\alpha' q_1)+ \\
&+\int\limits_0^\infty r_\lambda^{(3)}(m)P_\lambda^{(3)}(q_1'\cdot q_1)\sigma_1(m,x+\alpha' q_1)dm\Big)\times \\
&\times(e^{-I_{b_1}(x,\alpha',q_1)}-e^{-I_{b_2}(x,\alpha',q_1)})I_\lambda^{[2]}(x+\alpha' q_1,q_1')dq_1'd\alpha'+ \\
&+\int\limits_{\alpha^0_{(x,q_1)}}^{0}\Big(a_\lambda^{(1)}\varrho_1(x+\alpha' q_1)+a_\lambda^{(2)}\pi_1(x+\alpha' q_1)+\int\limits_0^\infty a_\lambda^{(3)}(m)\sigma_1(m,x+\alpha' q_1)\Big)\times \\
&\times\Big[(B[\lambda,T_1]-B[\lambda,T_2])+(e^{-I_{b_1}(x,\alpha',q_1)}-e^{-I_{b_2}(x,\alpha',q_1)})B[\lambda,T_2]\Big]d\alpha'+ \\
&+\int\limits_{\alpha^0_{(x,q_1)}}^{0}\Big(a_\lambda^{(1)}(\varrho_1-\varrho_2)(x+\alpha' q_1)+a_\lambda^{(2)}(\pi_1-\pi_2)(x+\alpha' q_1)+ \\
&+\int\limits_0^\infty a_\lambda^{(3)}(m)(\sigma_1-\sigma_2)(m,x+\alpha' q_1)dm\Big)e^{-I_{b_2}(x,\alpha',q_1)}B[\lambda,T_2]d\alpha',
\end{aligned} \tag{2.3.51}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_1 I_\lambda = {} & \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\alpha^0_{(x,q_1)}}^{0}\int\limits_{S^2}\Big(r_\lambda^{(1)}P_\lambda^{(1)}(q_1'\cdot q_1)\varrho_1(x+\alpha' q_1)+ \\
&+r_\lambda^{(2)}P_\lambda^{(2)}(q_1'\cdot q_1)\pi_1(x+\alpha' q_1)\Big)\times
\end{aligned} \tag{2.3.52}$$

$$\times e^{-I_{b_1}(x,\alpha',q_1)}(I_\lambda^{[1]}-I_\lambda^{[2]})(x+\alpha'q_1,q_1')dq_1'd\alpha',$$

$$\Delta_2 I_\lambda = \frac{1}{4\pi}\int_{\alpha^0_{(x,q_1)}}^{0}\int_{S^2}\int_0^\infty r_\lambda^{(3)}(m)P_\lambda^{(3)}(q_1'\cdot q_1)\sigma_1(m,x+\alpha'q_1)dm\times \tag{2.3.53}$$

$$\times e^{-I_{b_1}(x,\alpha',q_1)}(I_\lambda^{[1]}-I_\lambda^{[2]})(x+\alpha'q_1,q_1')dq_1'd\alpha';$$

dans ces expressions $I_{b_i}(x,\alpha',q_1)$, $i=1,2$, est la fonction $I_b(x,\alpha,q_1)=\int_\alpha^0 b_\lambda(t,x+\alpha'q_1)d\alpha'$ avec $\varrho=\varrho_i$, $\pi=\pi_i$, $\sigma=\sigma_i$, $i=1,2$, dans l'expression de $b_\lambda(t,x+\alpha'q_1)$.

Lemme 2.3.3. *Si on suppose les conditions* (2.2.35) *et* (2.2.36)*, alors on a*

$$|\Delta_1 I_\lambda| \le \frac{\varepsilon_1}{4\pi}\int_{\alpha^0_{(x,q_1)}}^{0}\int_{S^2}|I_\lambda^{[1]}-I_\lambda^{[2]}|(x+\alpha'q_1,q_1')dq_1'd\alpha', \tag{2.3.54}$$

$$|\Delta_2 I_\lambda| \le K_b^{1/2}\Big(\frac{1}{4\pi}\int_{S^2}P_\lambda^{(3)}(q_1'\cdot q_1)\int_{\alpha^0_{(x,q_1)}}^{0}(I_\lambda^{[1]}-I_\lambda^{[2]})^2(x+\alpha'q_1,q_1')d\alpha'dq_1'\Big)^{1/2}, \tag{2.3.55}$$

où

$$K_b=\sup_{x\in\Omega,q_1\in S^2}(1-e^{-2I_{b_1}(x,\alpha^0_{(x,q_1)},q_1)}). \tag{2.3.56}$$

Démonstration. L'inégalité (2.3.54) résulte immédiatement de (2.2.36).

D'autre part, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|\Delta_2 I_\lambda|\le$$

$$\le \frac{1}{4\pi}\int_{S^2}P_\lambda^{(3)}(q_1'\cdot q_1)\Big(\int_{\alpha^0_{(x,q_1)}}^{0}\Big(\int_0^\infty r_\lambda^{(3)}(m)\sigma_1(m,x+\alpha'q_1)dm\Big)^2 e^{-2I_{b_1}(x,\alpha',q_1)}d\alpha'\Big)^{1/2}\times$$

$$\times\Big(\int_{\alpha^0_{(x,q_1)}}^{0}(I_\lambda^{[1]}-I_\lambda^{[2]})^2(x+\alpha'q_1,q_1')d\alpha'\Big)^{1/2}dq_1'.$$

Or, en vertu de la condition (2.2.35) et de la définition de $I_{b_1}(x,\alpha',q_1)$ (et de $b_\lambda(t,x)$), on a

$$\int_{\alpha^0_{(x,q_1)}}^{0}\Big(\int_0^\infty r_\lambda^{(3)}(m)\sigma_1(m,x+\alpha'q_1)dm\Big)^2 e^{-2I_{b_1}(x,\alpha',q_1)}d\alpha'\le$$

$$\leq \int_{\alpha^0_{(x,q_1)}}^{0} (2\int_0^\infty r_\lambda^{(3)}(m)\sigma_1(m,x+\alpha' q_1)dm)e^{-2I_{b_1}(x,\alpha',q_1)}d\alpha' \leq$$

$$\leq 1 - e^{-2I_{b_1}(x,\alpha^0_{(x,q_1)},q_1)}.$$

On a donc

$$|\Delta_2 I_\lambda| \leq \frac{K_b^{1/2}}{4\pi}\int_{S^2} P_\lambda^{(3)}(q_1'\cdot q_1)\Big(\int_{\alpha^0_{(x,q_1)}}^{0} (I_\lambda^{[1]} - I_\lambda^{[2]})^2(x+\alpha' q_1, q_1')d\alpha'\Big)^{1/2} dq_1'.$$

Comme $\frac{1}{4\pi}\int_{S^2} P_\lambda^{(3)}(q_1'\cdot q_1)dq_1' = 1$, en appliquant de nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz au second membre de la dernière inégalité, on obtient (2.3.55). Le lemme 2.3.3 est démontré. $\square$

Lemme 2.3.4. *Soit $\varphi(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$. On a alors*

$$\frac{1}{4\pi}\int_\Omega\int_{S^2}\int_{\alpha^0_{(x,q_1)}}^{0} \varphi(x+\alpha' q_1)d\alpha' dq_1 dx \leq \int_\Omega \varphi(x)dx. \tag{2.3.57}$$

Démonstration. En effet, comme

$$\int_{S^2}\int_{\alpha^0_{(x,q_1)}}^{0} \varphi(x+\alpha' q_1)d\alpha' dq_1 \leq \int_\Omega \varphi(x')\frac{1}{|x-x'|^2}dx'$$

(cette inégalité devient une égalité si $\{\, x' \in \mathbb{R}^3 \,|\, \exists q_1 \in S^2,\ x' = x + \alpha^0_{(x,q_1)}q_1 \,\} = \partial\Omega$), on a

$$\frac{1}{4\pi}\int_\Omega\int_{S^2}\int_{\alpha^0_{(x,q_1)}}^{0} \varphi(x+\alpha' q_1)d\alpha' dq_1 dx \leq \frac{1}{4\pi}\int_\Omega\Big(\int_\Omega \varphi(x')\frac{1}{|x-x'|^2}dx'\Big)dx =$$

$$= \int_\Omega \varphi(x')dx'\Big(\frac{1}{4\pi}\int_\Omega \frac{1}{|x-x'|^2}dx\Big) = \int_\Omega \varphi(x')dx'\Big(\frac{1}{4\pi}\int_0^{\mathrm{dist}(x',\partial\Omega)} \frac{1}{r^2}\mu_2(\Sigma_r^{x'})dr\Big),$$

où $\mu_2(\cdot)$ est la mesure de Hausdorf de dimension 2 et

$$\Sigma_r^{x'} = \{\, x \in \Omega \,|\, |x-x'| = r \,\}.$$

Comme

$$\mu_2(\Sigma_r^{x'}) \leq 4\pi r^2, \qquad \mathrm{dist}(x', \partial\Omega) \leq 1,$$

on en déduit (2.3.57). □

Lemme 2.3.5. *Si on suppose la condition* (2.2.37)*, alors il existe une constante C strictement positive telle que on a*

$$\int_0^\infty \|I_\lambda^{[1]} - I_\lambda^{[2]}\|^2_{L^2(\Omega\times S^2)} d\lambda \leq C\Big[\|\varrho_2 - \varrho_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\pi_2 - \pi_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \tag{2.3.58}$$

$$+\|\sigma_2 - \sigma_1\|^2_{L^2(\Omega_{\overline{M}_1})} + \|T_2 - T_1\|^2_{L^2(\Omega)}\Big].$$

Démonstration. A l'aide de (2.3.54) et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\int_\Omega \int_{S^2} \Delta_1 I_\lambda (I_\lambda^{[1]} - I_\lambda^{[2]}) dq_1 dx \leq \frac{\varepsilon_1}{4\pi}\Big(\int_\Omega \int_{S^2} |I_\lambda^{[1]} - I_\lambda^{[2]}|^2 dq_1 dx\Big)^{1/2} \times$$

$$\times \Big(\int_\Omega dx \int_{S^2} dq_1 \Big(\int_{\alpha^0_{(x,q_1)}}^0 \int_{S^2} |I_\lambda^{[1]} - I_\lambda^{[2]}|(x + \alpha' q_1, q_1') dq_1' d\alpha'\Big)^2\Big)^{1/2}.$$

Or, compte tenu de la condition $|\alpha^0_{(x,q_1)}| \leq 1$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\alpha^0_{(x,q_1)}}^0 \int_{S^2} |I_\lambda^{[1]} - I_\lambda^{[2]}|(x + \alpha' q_1, q_1') dq_1' d\alpha' \leq$$

$$\leq \Big(\int_{\alpha^0_{(x,q_1)}}^0 \int_{S^2} |I_\lambda^{[1]} - I_\lambda^{[2]}|^2 (x + \alpha' q_1, q_1') dq_1' d\alpha'\Big)^{1/2}.$$

Donc, en échangeant l'ordre de l'intégration par rapport à q_1 et par rapport à q_1' et en appliquant le lemme 2.3.4 à $\varphi(x + \alpha' q_1) = |I_\lambda^{[1]} - I_\lambda^{[2]}|(x + \alpha' q_1, q_1')$ pour chaque q_1' fixé, on trouve

$$\frac{1}{(4\pi)^2} \int_\Omega dx \int_{S^2} dq_1 \Big(\int_{\alpha^0_{(x,q_1)}}^0 \int_{S^2} |I_\lambda^{[1]} - I_\lambda^{[2]}|(x + \alpha' q_1, q_1') dq_1' d\alpha'\Big)^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S^2} dq_1' \int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{S^2} \int\limits_{\alpha^0_{(x,q_1)}}^{0} |I_\lambda^{[1]} - I_\lambda^{[2]}|^2(x+\alpha' q_1, q_1')d\alpha' dq_1 \leq$$

$$\leq \int\limits_{S^2} dq_1' \int\limits_{\Omega} dx |I_\lambda^{[1]} - I_\lambda^{[2]}|^2(x, q_1') = \|I_\lambda^{[1]} - I_\lambda^{[2]}\|^2_{L^2(\Omega\times S^2)}.$$

Ainsi on parvient à

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{S^2} \Delta_1 I_\lambda (I_\lambda^{[1]} - I_\lambda^{[2]}) dq_1 dx \leq \varepsilon_1 \|I_\lambda^{[1]} - I_\lambda^{[2]}\|^2_{L^2(\Omega\times S^2)}. \tag{2.3.59}$$

D'autre part, d'après (2.3.55), on a, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{S^2} \Delta_2 I_\lambda (I_\lambda^{[1]} - I_\lambda^{[2]}) dq_1 dx \leq K_b^{1/2} \|I_\lambda^{[1]} - I_\lambda^{[2]}\|_{L^2(\Omega\times S^2)} \times$$

$$\times \Big(\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{S^2} dq_1 \int\limits_{S^2} P_\lambda^{(3)}(q_1'\cdot q_1) \int\limits_{\alpha^0_{(x,q_1)}}^{0} (I_\lambda^{[1]} - I_\lambda^{[2]})^2 (x+\alpha' q_1, q_1') d\alpha' dq_1'\Big)^{1/2}.$$

Or, d'après le lemme 2.3.4 on obtient

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{S^2} dq_1 \int\limits_{S^2} P_\lambda^{(3)}(q_1'\cdot q_1) \int\limits_{\alpha^0_{(x,q_1)}}^{0} (I_\lambda^{[1]} - I_\lambda^{[2]})^2 (x+\alpha' q_1, q_1') d\alpha' dq_1' \leq$$

$$\leq \sup_{-1\leq c\leq 1} P_\lambda^{(3)}(c) \int\limits_{\Omega}\int\limits_{S^2} (I_\lambda^{[1]} - I_\lambda^{[2]})^2 (x, q_1') dq_1' dx = \sup_{-1\leq c\leq 1} P_\lambda^{(3)}(c) \|I_\lambda^{[1]} - I_\lambda^{[2]}\|^2_{L^2(\Omega\times S^2)}.$$

Par conséquent, on a

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{S^2} \Delta_2 I_\lambda (I_\lambda^{[1]} - I_\lambda^{[2]}) dq_1 dx \leq (K_b \sup_{-1\leq c\leq 1} P_\lambda^{(3)}(c))^{1/2} \|I_\lambda^{[1]} - I_\lambda^{[2]}\|^2_{L^2(\Omega\times S^2)}. \tag{2.3.60}$$

Pour le terme $\Delta_0 I_\lambda$, à l'aide du théorème de la valeur intermédiaire et du lemme 2.3.4, on peut obtenir sans grande difficulté l'inégalité suivante

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{S^2} \Delta_0 I_\lambda (I_\lambda^{[1]} - I_\lambda^{[2]}) dq_1 dx \leq C_\lambda \Big(\|\varrho_2 - \varrho_1\|_{L^2(\Omega)} + \|\pi_2 - \pi_1\|_{L^2(\Omega)} +$$

$$+ \|\sigma_2 - \sigma_1\|_{L^2(\Omega_{\overline{M}_1})} + \|T_2 - T_1\|_{L^2(\Omega)}\Big) \|I_\lambda^{[1]} - I_\lambda^{[2]}\|_{L^2(\Omega\times S^2)},$$

où C_λ est une constante qui dépend de $I_\lambda^{(0)}$, $B[\lambda, T_2]$ et $\frac{\partial}{\partial T} B[\lambda, T]$. Ce qui achève la démonstration du lemme 2.3.5. $\Box$

2.4 Equations linéaires pour les densités.

Dans cette section, nous étudions les équations (2.1.1)-(2.1.3) de ϱ, π, σ avec $(v, T) = (\overline{v}, \overline{T})$, où $\overline{v}$, $\overline{T}$ sont données.

Pour commencer, introduisons les classes.

$$Q_{t_1} =]0, t_1[\times\Omega$$

$$\Theta_{t_1}^{(v)} = \{v \in W_p^{2,1}(Q_{t_1})| \quad v \quad \text{vérifie} \quad (2.2.25)\}, \tag{2.4.61}$$

$$\Theta_{t_1}^{(T)} = \{T \in W_q^{2,1}(Q_{t_1})| \quad T \quad \text{vérifie} \quad (2.2.26)\}. \tag{2.4.62}$$

Si $(v, T) = (\overline{v}, \overline{T}) \in \Theta_{t_1}^{(v)} \times \Theta_{t_1}^{(T)}$ sont données, alors on considère les équations

$$\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho \overline{v}) = 0, \tag{2.4.63}$$

$$\partial_t \pi + \nabla \cdot (\pi \overline{v}) = -H_{gl}(\overline{T}, \pi, \sigma), \tag{2.4.64}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla_{(m,x)} \cdot (\sigma \widetilde{U}_{4l}(\overline{u}, \overline{T}, \pi)) = \tag{2.4.65}$$

$$= \left[h_{gl}(\overline{T}, \pi; m) + B_1(\sigma; m) - g_1(m)[\pi - \overline{\pi}_{vs(l)}(\overline{T})]^-\right]\sigma +$$

$$+ g_0(m)[N^* - \widetilde{N}(\sigma)]^+[\pi - \overline{\pi}_{vs(l)}(\overline{T})]^+ + B_2(\sigma; m),$$

avec

$$\overline{u} = \overline{v} - \frac{1}{\alpha_l\,(m)} \nabla\Phi. \tag{2.4.66}$$

Les équations sont obtenues, en substituant $v = \overline{v}$, $T = \overline{T}$ dans (2.1.1)-(2.1.3). On remarque que si $\overline{v}$ est données, l'équation (2.4.63) est linéaire, tandis que, même si $\overline{v}$, $\overline{T}$ sont données, les équations (2.4.64), (2.4.65) ne sont pas linéaire, dans le présent paragraphe nous étudions l'équation (2.4.63) et les équations linéairisées (2.4.64), (2.4.65). En ce qui concerne l'équation (2.4.63) on a le lemme suivant

Lemme 2.4.1. *Soit $\overline{v} \in \Theta_{t_1}^{(v)}$. Alors l'équation (2.4.63) avec la condition (2.2.20) admet une solution ϱ et une seule dans la classe :*

$$\varrho \in \mathcal{C}^0([0, t_1]; W_p^1(\Omega)).$$

En outre on a :

$$0 < \alpha_{\varrho(t)} \le \varrho(t,x) \le \beta_{\varrho(t)} < \infty \quad dans \quad Q_{(t_1)}, \tag{2.4.67}$$

$$\|\varrho(t,\cdot)\|^p_{W^1_p(\Omega)} \le q_\varrho(t), \tag{2.4.68}$$

où :

$$\alpha_\varrho(t) = \inf_{x\in\Omega} \varrho_0(x)\exp(-cR_{(\overline{v},t)}t^{\frac{p-1}{p}}). \tag{2.4.69}$$

$$\beta_\varrho(t) = \sup_{x\in\Omega} \varrho_0(x)\exp(cR_{(\overline{v},t)}t^{\frac{p-1}{p}}).$$

$$q_{\varrho(t)} = \|\varrho_0\|^p_{W^1_p(\Omega)}\exp(cR_{(\overline{v},t)}t^{\frac{p-1}{p}}), \quad R_{(\overline{v},t)} = \|\overline{v}\|_{W^{2,1}_p(Q_t)}.$$

Démonstration. La démonstration se faite de même manière analogue à [9, 18]. Plus précisément, on considère le problème de Cauchy suivant

$$\frac{dy(t)}{dt} = \overline{v}(y(t),t),$$

$$y(0) = x_0, \qquad avec \quad x_0 \in \Omega,$$

avec la solution de cette famille est défini les trajectoires, que nous notons $y(t)$. Sur ces trajectoires l'équation se réduit à

$$\frac{d}{dt}\varrho(y(t),t) = -\varrho(y(t),t)\nabla\cdot\overline{v}(y(t),t). \tag{2.4.70}$$

Alors la solution de (2.4.70) est donnée par

$$\varrho(x,t) = \varrho_0(x_0)\exp(-\int_0^t \nabla\cdot\overline{v}(y(t'),t')dt'),$$

où

$$y(t') = x_0 + \int_0^{t'} \overline{v}(y(t''),t'')dt'', \qquad x = y(t), \qquad 0 \le t \le t_1,$$

donc l'équation (2.4.70) admet une solution et une seule.

Maintenant, en multipliant l'équation (2.4.63) par ϱ^{p-1}, en l'intégrant sur Ω, et à l'aide des inégalités de Sobolev, on obtient

$$\frac{d}{dt}\|\varrho\|^p_{L^p(\Omega)} \le c\|\overline{v}\|_{W^2_p(\Omega)}\|\varrho\|^p_{W^1_p(\Omega)}. \tag{2.4.71}$$

D'autre part, on applique l'opérateur ∇ à l'équation (2.4.63), on la multiplie par $|\nabla\varrho|^{p-2}\nabla\varrho$, on l'intègre sur Ω, et d'après les inégalités de Hölder et de Sobolev on aura

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\varrho\|^p_{L^p(\Omega)} \le c\|\overline{v}\|_{W^2_p(\Omega)}\|\varrho\|^p_{W^1_p(\Omega)}. \tag{2.4.72}$$

En joignant les inégalités (2.4.71)-(2.4.72), on trouve

$$\frac{d}{dt}\|\varrho\|^p_{W^1_p(\Omega)} \le C\|\overline{v}\|_{W^2_p(\Omega)}\|\varrho\|^p_{W^1_p(\Omega)}.$$

Par conséquent, avec la condition $\varrho_0 \in W^1_p(\Omega)$, on obtient

$$\|\varrho(t,\cdot)\|^p_{W^1_p(\Omega)} \le \|\varrho_0\|^p_{W^1_p(\Omega)} \exp(C\int\limits_0^t \|\overline{v}\|_{W^2_p(Q_t)}dt'). \tag{2.4.73}$$

D'après l'inégalité de Hölder et par des calculs usuels, on trouve (2.4.68). $\square$

Pour l'équation de continuité de la vapeur d'eau (2.4.64), on a le lemme suivant.

Lemme 2.4.2. *Soient* $\overline{v} \in \Theta^{(v)}_{t_1}$, $\overline{T} \in \Theta^{(T)}_{t_1}$, $\overline{\pi} \in C^0([0,t_1];W^1_p(\Omega))$, $\overline{\sigma} \in C^0([0,t_1];W^1_p(\mathbf{R}_+\times\Omega))$. *Supposons qu'il existe une constante* $\overline{M}_1 > 0$ *telle que :* $supp(\overline{\sigma}(t,\cdot,\cdot)) \subset D_2$, *pour tout* $t \in [0,t_1]$ *avec*

$$D_2 = \big]0,\overline{M}_1\big[\times\Omega.$$

Alors l'équation

$$\partial_t\pi + \nabla\cdot(\pi.\overline{v}) = -H_{gl}(\overline{T},\overline{\pi},\overline{\sigma}), \tag{2.4.74}$$

avec la condition initiale (2.2.21) *admet une solution* π *et une seule dans la classe :*

$$\pi \in \mathcal{C}^0([0,t_1];W^1_p(\Omega)).$$

En outre on a :

$$\|\pi(t,\cdot)\|^p_{W^1_p(\Omega)} \le q_\pi(t), \tag{2.4.75}$$

où

$$q_{\pi(t)} = [\|\pi_0\|^p_{W^1_p(\Omega)} + cR_{(\overline{\sigma},t)}(R_{(\overline{T},t)}t^{\frac{q-1}{q}} + R_{(\overline{\pi},t)}t)]\times \tag{2.4.76}$$
$$\times\exp\Big(c(R_{(\overline{v},t)}t^{\frac{p-1}{p}} + R_{(\overline{\sigma},t)}(R_{(\overline{T},t)}t^{\frac{q-1}{q}} + R_{(\overline{\pi},t)}t))\Big),$$

$$R_{(\overline{T},t)} = \|\overline{T}\|_{W_q^{2,1}(Q_t)}, \qquad R_{(\overline{v},t)} = \|\overline{v}\|_{W_p^{2,1}(Q_t)},$$

$$R_{(\overline{\pi},t)} = \|\overline{\pi}\|_{C^0([0,t];W_p^1(\Omega))}, \qquad R_{(\overline{\sigma},t)} = \|\overline{\sigma}\|_{C^0([0,t],W_p^1(D_2))}.$$

Démonstration. En procédant de manière analogue à la démonstration du lemme précédent, on démontre l'existence et l'unicité de la solution π.

En outre, si on multiplie l'équation (2.4.74) par π^{p-1} et par $|\nabla\pi|^{p-2}\nabla\pi\cdot\nabla$, et si on les intègre sur Ω, en utilisant les relations

$$\int_\Omega (\nabla\pi\cdot\overline{v})\pi^{p-1}dx = -\frac{1}{p}\int_\Omega (\nabla\cdot\overline{v})\pi^p dx,$$

$$\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}(\partial_{x_j}\pi)(\partial_{x_j}\partial_{x_i}\pi)\overline{v}_i dx = -\frac{1}{p}\int_\Omega (\nabla\cdot\overline{v})|\nabla\pi|^p dx,$$

alors on aura

$$\frac{d}{dt}\|\pi\|^p_{W_p^1(\Omega)} \leq c(\|\overline{v}\|_{W_p^2(\Omega)} + \|H_{gl}(\overline{T},\overline{\pi},\overline{\sigma})\|_{W_p^1(\Omega)})\|\pi\|^p_{W_p^1(\Omega)} + \|H_{gl}(\overline{T},\overline{\pi},\overline{\sigma})\|_{W_p^1(\Omega)}.$$

D'autre part, d'après (2.1.9), (2.1.11)-(2.1.13), on obtient

$$\|H_{gl}(\overline{T},\overline{\pi},\overline{\sigma})\|_{W_p^1(\Omega)} \leq c(\|\overline{T}\|_{W_q^2(\Omega)} + \|\overline{\pi}\|_{W_p^1(\Omega)})\|\overline{\sigma}\|_{W_p^1(\mathbb{R}_+\times\Omega)}.$$

D'où l'inégalité (2.4.75). $\square$

Passons maintenant à la résolution de l'équation (2.4.65). On a le lemme suivant.

Lemme 2.4.3. *Soient* $\overline{v}\in\Theta_{t_1}^{(v)}$, $\overline{T}\in\Theta_{t_1}^{(T)}$, $\overline{\pi}\in C^0([0,t_1];W_p^1(\Omega))$, $\overline{\sigma}\in C^0([0,t_1];W_p^1(\mathbf{R}_+\times\Omega))$. *Soit en outre* $\partial_m\overline{\sigma}\in C^0([0,t_1];L^\infty(\mathbf{R}_+\times\Omega))$. *Alors il existe une constante* $\overline{M}_1<\infty$ *telle que, pourvu que* $\overline{\sigma}(t,m,x)=0$ *pour* $m\notin\left]\frac{\overline{m}_a}{2},\overline{M}_1\right[$, *l'équation*

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \nabla_{(m,x)}\cdot(\sigma\widetilde{U}_{4l}(\overline{u},\overline{T},\overline{\pi})) = \tag{2.4.77}$$
$$= \Big[h_{gl}(\overline{T},\overline{\pi};m) + B_1(\overline{\sigma};m) - g_1(m)[\overline{\pi}-\overline{\pi}_{vs(l)}(\overline{T})]^-\Big]\sigma +$$
$$+ g_0(m)[N^* - \widetilde{N}(\overline{\sigma})]^+[\overline{\pi}-\overline{\pi}_{vs(l)}(\overline{T})]^+ + B_2(\overline{\sigma};m),$$

avec la condition initiale (2.2.22)–(2.2.24) *admet une solution et une seule* $\sigma \in \mathcal{C}^0([0,t_1], W_p^1(\mathbb{R}_+ \times \Omega))$, *et avec les propositions*

$$\partial_m \sigma \in C^0([0,t_1]; L^\infty(\mathbf{R}_+ \times \Omega)), \tag{2.4.78}$$

$$\sigma(t,m,x) = 0 \quad \textit{pour } m \notin \Big]\frac{\overline{m}_a}{2}, \overline{M}_1\Big[, \tag{2.4.79}$$

$$\|\sigma(t,\cdot,\cdot)\|^p_{W_p^1(\mathbf{R}_+\times\Omega)} = \|\sigma(t,\cdot,\cdot)\|^p_{W_p^1(D_2)} \le q_\sigma(t), \tag{2.4.80}$$

$$\|\partial_m \sigma(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}_+\times\Omega)} \le \tag{2.4.81}$$

$$\le \Big[\, \|\partial_m \sigma_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}_+\times\Omega)} + C\int_0^t \Big(1 + \|\overline{\pi}(s,\cdot)\|^2_{L^\infty(\Omega)} + \|\overline{\sigma}(s,\cdot)\|^2_{L^\infty(\mathbf{R}_+\times\Omega)} +$$

$$+ \|\sigma(s,\cdot)\|^2_{L^\infty(\mathbf{R}_+\times\Omega)} + \|\partial_m \overline{\sigma}(s,\cdot)\|^2_{L^\infty(\mathbf{R}_+\times\Omega)}\Big) ds\Big] \times$$

$$\times \exp\Big[C\int_0^t \Big(1 + \|\nabla_x \cdot \overline{v}(s,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\overline{\pi}(s,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\overline{\sigma}(s,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}_+\times\Omega)}\Big) ds\Big],$$

où

$$q_\sigma(t) = \Big\{\|\sigma_0\|^p_{W_p^1(D_2)} + c\Big[(1 + R^2_{(\overline{\pi},t)} + R^2_{(\overline{\sigma},t)} + R_{(\overline{v},t)} t^{\frac{p-1}{p}} + R^2_{(\overline{T},t)} t^{\frac{q-2}{q}}\Big]\Big\} \times \tag{2.4.82}$$

$$\times \exp\Big\{c\Big[(1 + R^2_{(\overline{\pi},t)} + R^2_{(\overline{\sigma},t)} + R_{(\overline{v},t)} t^{\frac{p-1}{p}} + R^2_{(\overline{T},t)} t^{\frac{q-2}{q}}\Big]\Big\}.$$

Démonstration. Pour démontrer le lemme, on procède de manière analogue à la démonstration du lemme (2.4.2). En effet, l'èquation (2.4.77) peut être écrite sous la forme

$$(1, m h_{gl}(\overline{T}, \overline{\pi}; m), \overline{u}) \cdot \Big(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla_{(m,x)}\Big)\sigma = a_1(t,m,x)\sigma + b_1(t,m,x), \tag{2.4.83}$$

où

$$a_1(t,m,x) = h_{gl}(\overline{T}, \overline{\pi}; m) + B_1(\overline{\sigma}; m) - g_1(m)[\overline{\pi} - \overline{\pi}_{vs(l)}(\overline{T})]^- + \tag{2.4.84}$$

$$-\nabla \cdot \overline{u} - \frac{\partial}{\partial m}[m h_{gl}(\overline{T}, \overline{\pi}; m)],$$

$$b_1(t,m,x) = g_0(m)[N^* - \widetilde{N}(\overline{\sigma})]^+ [\overline{\pi} - \overline{\pi}_{vs(l)}(\overline{T})]^+ + B_2(\overline{\sigma}; m), \tag{2.4.85}$$

Maintenant, nous pouvons accoupler à l'équation (2.4.83) le système caractéristique suivant

$$\begin{cases} dm/dt = mh_{gl}(\overline{T}, \overline{\pi}; m) \\ dx/dt = \overline{u} \\ d\sigma/dt = a_1(t,m,x)\sigma + b_1(t,m,x) \\ m\,(0) = m_0,\ x\,(0) = x_0,\ \sigma(0,m_0,x_0) = \sigma_0(m_0,x_0) \end{cases} . \tag{2.4.86}$$

Etant donnée, la trajectoire $(m(t), x(t))$ est déterminée seulement par les deux premières équations du système (2.4.86) et sous l'hypothèse de la régularité des données, la solution obtenue a la forme suivante

$$\sigma(t,m(t),x(t)) = \sigma_0(m_0,x_0)\exp\Big(\int_0^t a_1(t')dt'\Big) + \int_0^t b_1(t')\exp\Big(\int_{t'}^t a_1(t'')dt''\Big)dt', \tag{2.4.87}$$

où

$$a_1(t') = a_1(t', m(t'), x(t')), \quad a_1(t'') = a_1(t'', m(t''), x(t''))$$

$$b_1(t') = b_1(t', m(t'), x(t')).$$

À l'aide de la définition de $mh_{gl}(\overline{T}, \overline{\pi}; m)$ et $b_1(t,m,x)$ (voir (2.4.85)) et les hypothèses sur les fonctions qui apparaissent dedans (voir en particulier (2.1.12), (2.1.10), (2.1.15), (2.1.14)), résultent qu'il existe $\overline{M}_1$ de telle sorte que, sous l'hypothèse $\overline{\sigma}(t,m,x) = 0$ pour $m \notin \left]\frac{\overline{m}_a}{2}, \overline{M}_1\right[$, (2.4.79) soit vérifiée.

Maintenant, pour montrer le lemme, il suffit de prouver les inégalités (2.4.80) et (2.4.81).

En multipliant l'équation (2.4.77) par σ^{p-1} et en l'intégrant sur D_2, en outre, à l'aide des définitions (2.2.39), (2.4.66) et (2.4.79), en utilisant la relation

$$\int_{D_2} \sigma^{p-1}\nabla_{(m,x)}\sigma \cdot \widetilde{U}_{4l}(\overline{u}, \overline{T}, \overline{\pi})dmdx = \frac{1}{p}\int_{D_2} \sigma^p \nabla_{(m,x)} \cdot \widetilde{U}_{4l}(\overline{u}, \overline{T}, \overline{\pi})dmdx, \tag{2.4.88}$$

on trouve l'égalité

$$\frac{d}{dt}\|\sigma\|^p_{L^p(D_2)} = (1-p)\int_{D_2} \sigma^p \nabla_{(m,x)} \cdot \widetilde{U}_{4l}(\overline{u}, \overline{T}, \overline{\pi})dmdx + \tag{2.4.89}$$

$$+p\int\limits_{D_2}\sigma^p a_1^*(t,m,x)dmdx+p\int\limits_{D_2}\sigma^{p-1}b_1(t,m,x)dmdx$$

où

$$a_1^*(t,m,x)=h_{gl}(\overline{T},\overline{\pi};m)+B_1(\overline{\sigma};m)-g_1(m)[\overline{\pi}-\overline{\pi}_{vs(l)}(\overline{T})]^-.$$

D'autre part, On applique l'opérateur différentiel $|\nabla_{(m,x)}\sigma|^{p-2}\nabla_{(m,x)}\sigma\cdot\nabla_{(m,x)}$ à l'équation (2.4.77) et on l'intègre sur D_2. Si on utilise la relation

$$\int\limits_{D_2}\left|\nabla_{(m,x)}\sigma\right|^{p-2}\nabla_{(m,x)}\sigma\cdot\left(\widetilde{U}_{4l}(\overline{u},\overline{T},\overline{\pi})\cdot\nabla_{(m,x)}\right)\nabla_{(m,x)}\sigma dmdx= \tag{2.4.90}$$

$$=-\frac{1}{p}\int\limits_{D_2}\left|\nabla_{(m,x)}\sigma\right|^{p}\nabla_{(m,x)}\cdot\widetilde{U}_{4l}(\overline{u},\overline{T},\overline{\pi})dmdx,$$

on obtient

$$\frac{d}{dt}\|\nabla_{(m,x)}\sigma\|^p_{L^p(D_2)}= \tag{2.4.91}$$

$$=-p\int\limits_{D_2}|\nabla_{(m,x)}\sigma|^{p-2}\nabla_{(m,x)}\sigma\cdot\nabla_{(m,x)}\Big[\nabla_{(m,x)}\cdot(\sigma\widetilde{U}_{4l}(\overline{u},\overline{T},\overline{\pi}))\Big]dmdx+$$

$$+p\int\limits_{D_2}|\nabla_{(m,x)}\sigma|^{p-2}\nabla_{(m,x)}\sigma\cdot\nabla_{(m,x)}[a_1^*(t,m,x)\sigma+b_1(t,m,x)]dmdx.$$

Maintenant, on estime les seconds membres des (2.4.89) et (2.4.91). D'après les définitions de $a_1^*(t,m,x)$ et $b_1(t,m,x)$, (en utilisant plusieurs fois les inégalités de Sobolev et de Hölder), on obtient les inégalités suivantes

$$\left|\int\limits_{D_2}\sigma^p\nabla_{(m,x)}\cdot\widetilde{U}_{4l}(\overline{u},\overline{T},\overline{\pi})dmdx\right|+\left|\int\limits_{D_2}\sigma^p a_1^*(t,m,x)dmdx\right|\le \tag{2.4.92}$$

$$\le c\Big(1+\|\overline{\pi}\|_{W_p^1(\Omega)}+\|\overline{T}\|_{W_q^2(\Omega)}+\|\overline{u}\|_{W_p^2(D_2)}+\|\overline{\sigma}\|_{W_p^1(D_2)}\Big)\|\sigma\|^p_{L^p(D_2)},$$

$$\left|\int\limits_{D_2}\sigma^{p-1}b_1(t,m,x)dmdx\right|\le\|\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|b_1\|_{L^p(D_2)}\le \tag{2.4.93}$$

$$\le c\Big(1+\|\overline{\pi}\|^2_{L^p(\Omega)}+\|\overline{T}\|^2_{W_q^1(\Omega)}+\|\overline{\sigma}\|^2_{W_p^1(D_2)}\Big)(\|\sigma\|^p_{L^p(D_2)}+1),$$

$$\left|\int\limits_{D_2}|\nabla_{(m,x)}\sigma|^{p-2}\nabla_{(m,x)}\sigma\cdot\nabla_{(m,x)}\Big[\nabla_{(m,x)}\cdot(\sigma\widetilde{U}_{4l}(\overline{u},\overline{T},\overline{\pi}))\Big]dmdx\right|\le \tag{2.4.94}$$

$$\le c\Big(1+\|\overline{\pi}\|_{W_p^1(\Omega)}+\|\overline{T}\|_{W_q^2(\Omega)}+\|\overline{u}\|_{W_p^2(D_2)}\Big)\|\sigma\|^p_{W_p^1(D_2)},$$

$$\Big|\int\limits_{D_2} |\nabla_{(m,x)}\sigma|^{p-2}\nabla_{(m,x)}\sigma\cdot\nabla_{(m,x)}(a_1^*(t,m,x)\sigma)dmdx\Big| \leq \tag{2.4.95}$$
$$\leq c(1+\|\overline{\pi}\|_{W_p^1(\Omega)}+\|\overline{T}\|_{W_q^2(\Omega)}+\|\overline{\sigma}\|_{W_p^1(D_2)})\|\sigma\|^p_{W_p^1(D_2)},$$
$$\Big|\int\limits_{D_2} |\nabla_{(m,x)}\sigma|^{p-2}\nabla_{(m,x)}\sigma\cdot\nabla_{(m,x)}b_1(t,m,x)dmdx\Big| \leq \tag{2.4.96}$$
$$\leq c(1+\|\overline{\pi}\|^2_{W_p^1(\Omega)}+\|\overline{T}\|^2_{W_q^2(\Omega)}+\|\overline{\sigma}\|^2_{W_p^1(D_2)})(\|\sigma\|^p_{W_p^1(D_2)}+1).$$

En tenant compte (2.4.66), et d'après (2.4.89)–(2.4.96) on aura

$$\frac{d}{dt}\|\sigma\|^p_{W_p^1(D_2)} \leq c(1+\|\overline{v}\|_{W_p^2(\Omega)}+\|\overline{\pi}\|^2_{W_p^1(\Omega)}+\|\overline{T}\|^2_{W_q^2(\Omega)}+\|\overline{\sigma}\|^2_{W_p^1(D_2)})(\|\sigma\|^p_{W_p^1(D_2)}+1),$$

d'où il résulte (2.4.80) avec $q_\sigma(t)$ définie comme dans (2.4.82).

Pour conclure la démonstration, on démontre l'estimation (2.4.81). Premièrement, on suppose que $r \geq p$, si on applique l'opérateur différentiel $|\partial_m\sigma|^{r-2}\,\partial_m\sigma\partial_m$ à l'équation (2.4.77) et si on l'intègre sur D_2, on obtient

$$\frac{d}{dt}\,\|\partial_m\sigma\|_{L^r(D_2)} \leq \tag{2.4.97}$$
$$\leq C\Big[\Big(1+\|\nabla_x\cdot\overline{u}(s,\cdot)\|_{L^\infty(D_2)}+\|\overline{\pi}\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(D_2)})\,\|\partial_m\sigma\|_{L^r(D_2)}+$$
$$+\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(D_2)}\Big(\|\overline{\sigma}\|_{L^r(D_2)}+\|\partial_m\overline{\sigma}\|_{L^r(D_2)}\Big)+\Big(1+\|\overline{\pi}\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(D_2)}\Big)\,\|\sigma\|_{L^r(D_2)}\Big].$$

Finalement, en appliquant le lemme de Gronwall et en prenant la limite pour $r\to\infty$ on trouvra (2.4.81). □

2.5 Equation pour les densités de l'eau avec la température et la vitesse données.

Retournons maintenant au système d'équations non-linéaires (2.4.64) et (2.4.65). Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution et établir son estimation, avec la température $T=\overline{T}$ et la vitesse $v=\overline{v}$ données on a les lemmes suivants.

Lemme 2.5.1. *Soient* $\overline{v} \in \Theta_{t_1}^{(v)}$, $\overline{T} \in \Theta_{t_1}^{(T)}$ *et* $R_0 > 0$. *On suppose que*

$$\|\overline{v}\|_{W_p^{2,1}(Q_{t_1})} \leq R_0, \qquad \|\overline{T}\|_{W_q^{2,1}(Q_{t_1})} \leq R_0. \tag{2.5.98}$$

Alors il existe un $t_2 = t_2(R_0)$, $0 < t_2 \leq t_1$, *tel que, quelques soient* $\overline{\pi} \in \mathcal{C}^0([0,t_2]; W_p^1(\Omega))$, $\overline{\sigma} \in \mathcal{C}^0([0,t_2]; W_p^1(\mathbb{R}_+ \times \Omega))$ *et* $\partial_m \overline{\sigma} \in C^0([0,t_1]; L^\infty(\mathbf{R}_+ \times \Omega))$ *avec les conditions*

$$\|\overline{\pi}\|_{C^0([0,t_2];W_p^1(\Omega))} \leq \|\pi_0\|_{W_p^1(\Omega)} + 1, \qquad \|\overline{\sigma}\|_{C^0([0,t_2];W_p^1(\mathbf{R}_+\times\Omega))} \leq \|\sigma_0\|_{W_p^1(\mathbf{R}_+\times\Omega)} + 1, \tag{2.5.99}$$

$$\|\partial_m \overline{\sigma}\|_{C^0([0,t_2];L^\infty(\mathbf{R}_+\times\Omega))} \leq \|\partial_m \sigma_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}_+\times\Omega)} + 1,$$

$$\overline{\sigma}(t,m,x) = 0 \quad \textit{pour } m \notin \left]\frac{\overline{m}_a}{2}, \overline{M}_1\right[,$$

alors la solution (π, σ) *des équations* (2.4.74), (2.4.77) *avec les conditions initiales* (2.2.21) *et* (2.2.22) *vérifie les conditions suivantes*

$$\|\pi\|_{C^0([0,t_2];W_p^1(\Omega))} \leq \|\pi_0\|_{W_p^1(\Omega)} + 1, \qquad \|\sigma\|_{C^0([0,t_2];W_p^1(\mathbf{R}_+\times\Omega))} \leq \|\sigma_0\|_{W_p^1(\mathbf{R}_+\times\Omega)} + 1, \tag{2.5.100}$$

$$\|\partial_m \sigma\|_{C^0([0,t_2];L^\infty(\mathbf{R}_+\times\Omega))} \leq \|\partial_m \sigma_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}_+\times\Omega)} + 1,$$

$$\sigma(t,m,x) = 0 \quad \textit{pour } m \notin \left]\frac{\overline{m}_a}{2}, \overline{M}_1\right[.$$

Démonstration. D'après les estimations (2.4.75), (2.4.80), (2.4.81) et les relations (2.4.76), (2.4.82), (2.4.79) on déduit le lemme. □

Lemme 2.5.2. *Soient* $\overline{v}$, $\overline{T}$, $\overline{M}_1$, R_0 *et* $t_2 = t_2(R_0)$ *comme dans le lemme* 2.5.1. *Alors il existe un* $t_3 \in]0, t_2]$ *tel que les équations* (2.4.64)-(2.4.65) *avec la condition initiale* (2.2.21), (2.2.22) *admet une solution* (π, σ) *et une seule dans la classe :*

$$\pi \in C^0([0,t_3]; W_p^1(\Omega)), \quad \sigma \in C^0([0,t_3]; W_p^1(\mathbf{R}_+ \times \Omega))$$

et on a :

$$\|\pi\|_{C^0([0,t_3];W_p^1(\Omega))} \leq \|\pi_0\|_{W_p^1(\Omega)} + 1, \qquad \|\sigma\|_{C^0([0,t_3];W_p^1(\mathbf{R}_+\times\Omega))} \leq \|\sigma_0\|_{W_p^1(\mathbf{R}_+\times\Omega)} + 1, \tag{2.5.101}$$

$$\|\partial_m \sigma\|_{C^0([0,t_2];L^\infty(\mathbf{R}_+\times\Omega))} \leq \|\partial_m \sigma_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}_+\times\Omega)} + 1,$$

$$\sigma(t,m,x) = 0 \quad \textit{pour} \ m \notin \ \Big]\frac{\overline{m}_a}{2}, \overline{M}_1\Big[.$$

Démonstration. Pour $0 < t \leq t_2$, nous définissons l'ensemble

$$A_{[t]} = \{(\pi,\sigma) \text{ satisfait aux conditions } (C.1)\text{–}(C.4)\}\,, \tag{2.5.102}$$

avec

$$(C.1) \qquad \pi \in C^0([0,t];W_p^1(\Omega)), \quad \sigma \in C^0([0,t];W_p^1(\mathbf{R}_+\times\Omega)),$$

$$(C.2) \qquad \pi(0,\cdot) = \pi_0(\cdot), \quad \sigma(0,\cdot,\cdot) = \sigma_0(\cdot,\cdot),$$

$$\|\pi\|_{C^0([0,t];W_p^1(\Omega))} \leq \|\pi_0\|_{W_p^1(\Omega)} + 1,$$

$$(C.3) \qquad \|\sigma\|_{C^0([0,t];W_p^1(\mathbf{R}_+\times\Omega))} \leq \|\sigma_0\|_{W_p^1(\mathbf{R}_+\times\Omega)} + 1,$$

$$\|\partial_m \sigma\|_{C^0([0,t_2];L^\infty(\mathbf{R}_+\times\Omega))} \leq \|\partial_m \sigma_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}_+\times\Omega)} + 1,$$

$$(C.4) \qquad \sigma(t',m,x) = 0 \quad \text{pour} \ m \notin \ \Big]\frac{\overline{m}_a}{2}, \overline{M}_1\Big[, \ x\in\Omega, \ 0 \leq t' \leq t.$$

Soit $G_{1,t}$ l'application qui à $(\overline{\pi},\overline{\sigma}) \in \mathcal{C}^0([0,t];L^p(\Omega)) \times \mathcal{C}^0([0,t];L^p(D_2))$ associe la solution (π,σ) des équations (2.4.74), (2.4.77), avec $\overline{\pi}$ et $\overline{\sigma}$ indiquées ci-dessus.

En vertu du lemme 2.5.1 on a

$$G_{1,t}(A_{[t]}) \subset A_{[t]} \quad \forall t \in]0,t_2].$$

Donc, pour démontrer le lemme 2.5.2, il suffit de démontrer qu'il existe un t_3, $0 < t_3 \leq t_2$, tel que l'opérateur G_{1,t_3} restreint à $A_{[t_3]}$ soit une contraction dans la topologie $\mathcal{C}^0([0,t_3];L^p(\Omega)) \times \mathcal{C}^0([0,t_3];L^p(D_2))$.

Soient $(\overline{\pi}_i,\overline{\sigma}_i) \in A_{[t]}$ et $(\pi_i,\sigma_i) = G_{1,t}(\overline{\pi}_i,\overline{\sigma}_i)$, pour $i = 1,2$. Nous mettons

$$\overline{\Pi} = \overline{\pi}_2 - \overline{\pi}_1, \quad \overline{\Sigma} = \overline{\sigma}_2 - \overline{\sigma}_1, \tag{2.5.103}$$

$$\Pi = \pi_2 - \pi_1, \quad \Sigma = \sigma_2 - \sigma_1.$$

La différence entre les équations (2.4.74), (2.4.77) avec $(\overline{\pi}_2, \overline{\sigma}_2)$ et $(\overline{\pi}_1, \overline{\sigma}_1)$, nous donne

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \nabla \cdot (\Pi \overline{v}) = H_{gl}\left(\overline{T}, \overline{\pi}_1, \overline{\sigma}_1\right) - H_{gl}\left(\overline{T}, \overline{\pi}_2, \overline{\sigma}_2\right), \tag{2.5.104}$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial m}\Big[m h_{gl}(\overline{T}, \overline{\pi}_2; m)\Sigma\Big] + \nabla \cdot (\Sigma \overline{u}) = \tag{2.5.105}$$

$$= \Big[h_{gl}(\overline{T}, \overline{\pi}_2; m) + B_1(\overline{\sigma}_2; m) - g_1(m)[\overline{\pi}_2 - \overline{\pi}_{vs(l)}(\overline{T})]^-\Big]\Sigma +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial m}\Big\{m[h_{gl}(\overline{T}, \overline{\pi}_1; m) - h_{gl}(\overline{T}, \overline{\pi}_2; m)]\sigma_1\Big\} + [h_{gl}(\overline{T}, \overline{\pi}_2; m) - h_{gl}(\overline{T}, \overline{\pi}_1; m)]\sigma_1 +$$

$$+ [B_1(\overline{\sigma}_2; m) - B_1(\overline{\sigma}_1; m)]\sigma_1 +$$

$$+ g_1(m)\Big([\overline{\pi}_1 - \overline{\pi}_{vs(l)}(\overline{T})]^- - [\overline{\pi}_2 - \overline{\pi}_{vs(l)}(\overline{T})]^-\Big)\sigma_1 +$$

$$+ g_0(m)\Big([N^* - \widetilde{N}(\overline{\sigma}_2)]^+[\overline{\pi}_2 - \overline{\pi}_{vs(l)}(\overline{T})]^+ - [N^* - \widetilde{N}(\overline{\sigma}_1)]^+[\overline{\pi}_1 - \overline{\pi}_{vs(l)}(\overline{T})]^+\Big) +$$

$$+ B_2(\overline{\sigma}_2; m) - B_2(\overline{\sigma}_1; m).$$

En multipliant les équations (2.5.104)–(2.5.105) par $|\Pi|^{p-1}$ et $|\Sigma|^{p-1}$ et en intégrant la première équation sur Ω et la deuxième par D_2 respectivement, en prenant compte des conditions (2.5.99) et les estimations déjà obtenu on aura

$$\frac{d}{dt}\|\Pi\|^p_{L^p(\Omega)} \leq c\|\overline{v}\|_{W^2_p(\Omega)}\|\Pi\|^p_{L^p(\Omega)} + \tag{2.5.106}$$

$$+ c(1 + \|\overline{T}\|_{W^1_q(\Omega)})\Big(\|\overline{\Pi}\|_{L^p(\Omega)} + \|\overline{\Sigma}\|_{L^p(D_2)}\Big)\|\Pi\|^{p-1}_{L^p(\Omega)},$$

$$\frac{d}{dt}\|\Sigma\|^p_{L^p(D_2)} \leq c(1 + \|\overline{T}\|_{W^1_q(\Omega)} + \|\overline{v}\|_{W^2_p(\Omega)})\|\Sigma\|^p_{L^p(D_2)} + \tag{2.5.107}$$

$$+ c(1 + \|\overline{T}\|_{W^1_q(\Omega)})\Big(\|\overline{\Pi}\|_{L^p(\Omega)} + \|\overline{\Sigma}\|_{L^p(D_2)}\Big)\|\Sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}.$$

D'après la condition $\|\partial_m \sigma_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}_+ \times \Omega)} < \infty$, on peut obtenir une estimation de (2.5.107) sans introduire une régularisation de π. En effet, on peut la traiter comme suit

$$\Big|\int_{D_2} |\Sigma|^{p-1}\, \partial_m \Big\{m\Big[h_{gl}(T, \overline{\pi}_1; m) - h_{gl}(T, \overline{\pi}_2; m)\Big]\sigma_1\Big\} dm dx\Big| \leq$$

$$\leq c \int_{D_2} |\Sigma|^{p-1} \left|\overline{\Pi}\right| (|\sigma_1| + |\partial_m \sigma_1|) dm dx \leq$$

$$\leq c\Big(\|\sigma_1(t,\cdot)\|_{L^\infty(D_2)} + \|\partial_m \sigma_1(t,\cdot)\|_{L^\infty(D_2)} \Big) \|\Sigma(t,\cdot)\|^{p-1}_{L^p(D_2)} \left\|\overline{\Pi}(t,\cdot)\right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Multipliant les deux membres de (2.5.106)–(2.5.107) par $\|\Pi\|^{-(p-1)}_{L^p(\Omega)}$ et $\|\Sigma\|^{-(p-1)}_{L^p(\Omega)}$ respectivement, en prenant compte la condition (2.5.98), on obtient l'inégalité

$$\|\Pi(t,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} + \|\Sigma(t,\cdot)\|_{L^p(D_2)} \leq \tag{2.5.108}$$

$$\leq ce^{c(t+t^{\frac{q-1}{q}}+t^{\frac{p-1}{p}})}(t+t^{\frac{q-1}{q}})\Big(\|\overline{\Pi}\|_{C^0([0,t];L^p(\Omega))} + \|\overline{\Sigma}\|_{C^0([0,t];L^p(D_2))}\Big).$$

Il est claire que, si on choisit $t_3 \in]0,t_2]$ de telle sorte que

$$ce^{c(t_3+t_3^{\frac{q-1}{q}}+t_3^{\frac{p-1}{p}})}(t_3+t_3^{\frac{q-1}{q}}) < \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, rappelant la définition de $G_{1,t}$, et (2.5.103), on en déduit que l'opérateur G_{1,t_3} restreint à $A_{[t_3]}$ sera une contraction dans $\mathcal{C}^0([0,t_3];L^p(\Omega))\times\mathcal{C}^0([0,t_3];L^p(D_2))$, ce qui achève la démonstration du lemme 2.5.2. □

Lemme 2.5.3. *Soient ϱ, π et σ les solutions des équations* (2.4.63)-(2.4.65) *avec les conditions initiales* (2.2.20)-(2.2.22)*. Dans les mêmes conditions du lemme 2.4.1 et du lemme 2.5.2, il existe un $t_4 \in]0,t_3]$ tel que, pour tout $t \in [0,t_4]$ et $x \in \Omega$ on a*

$$\|\varrho(\cdot,t)\|^p_{W^1_p} \leq 2\|\varrho_0(\cdot)\|^p_{W^1_p}, \qquad \frac{1}{2}\inf_{x'\in\Omega} \varrho_0(x') \leq \varrho(x,t) \leq 2\sup_{x'\in\Omega} \varrho_0(x'), \tag{2.5.109}$$

$$0 \leq \pi(t,x) \leq \sup_{x'\in\Omega} \pi_0(x') + 1. \tag{2.5.110}$$

Démonstration.

La relation (2.5.109) résulte immédiatement de (2.4.68)–(2.4.69). D'autre part, si on intègre (2.4.64) le long des caractéristiques $x(t)$ on obtient

$$\pi(t,x(t)) = \pi_0(x_0)e^{-\int_0^t \nabla\cdot\overline{v}dt'} - \int_0^t H_{gl}(\overline{T},\pi,\sigma)e^{-\int_{t'}^t \nabla\cdot\overline{v}dt''}dt'. \tag{2.5.111}$$

D'après la définition de H_{gl} (voir (2.1.9)) et du lemme 2.5.2, on trouve

$$\int_0^t |\nabla\cdot\overline{v}|dt' \leq cR_0 t^{\frac{p-1}{p}}, \qquad |H_{gl}(\overline{T},\pi,\sigma)| \leq c.$$

Par conséquent, à partir de (2.5.111) il s'ensuit qu'il existe un $t_4 \in]0,t_3]$ qui s'applique également à (2.5.110) □

2.6 Equations linéaire pour la vitesse et la température.

Dans cette section nous allons étudier les équations linéarisées de (2.1.4) et (2.1.5). Plus précisement, nous supposons que $\overline{v} \in \Theta_{t_1}^{(v)}$, $\overline{T} \in \Theta_{t_1}^{(T)}$ et nous considérons les équations linéaires de v et T suivantes

$$(\varrho + \pi)\frac{\partial v}{\partial t} - \eta \Delta v - \Big(\zeta + \frac{\eta}{3}\Big)\nabla(\nabla \cdot v) = \tag{2.6.112}$$

$$= -(\varrho + \pi)(\overline{v} \cdot \nabla)\overline{v} - R_0 \nabla((\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h})\overline{T}) - \Big[\int_0^\infty (\sigma + \nu) dm + \varrho + \pi\Big]\nabla \Phi,$$

$$(\varrho + \pi)c_v \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \Delta T = -(\varrho + \pi)c_v \sum_{j=1}^{3} \overline{v}_j \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} - R_0(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h})\overline{T} \nabla \cdot \overline{v} + \tag{2.6.113}$$

$$+ \eta \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij} \nabla \cdot \overline{v}\Big)\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} + \zeta(\nabla \cdot \overline{v})^2 - \nabla \cdot \mathcal{E} + L_{gl} H_{gl}(\overline{T}, \pi, \sigma),$$

où ϱ, π et σ sont les solutions des équations (2.4.63)-(2.4.65) avec les conditions initiales (2.2.20)-(2.2.22) ; nous nous rappelons que l'existence et l'unicité de ces solutions ont été présentés dans les lemmes 2.4.1 et 2.5.2.

Comme dans [37], nous introduisons les fonctions auxiliaires suivantes

$$V_{(p,v)}(t) = \|v\|^p_{W_p^{2,1}(Q_t)} + \sup_{0 \le t' \le t} \|v(t', \cdot)\|^p_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)}, \tag{2.6.114}$$

$$V_{(q,T)}(t) = \|T\|^q_{W_q^{2,1}(Q_t)} + \sup_{0 \le t' \le t} \|T(t', \cdot)\|^q_{W_q^{2-\frac{2}{q}}(\Omega)}, \tag{2.6.115}$$

(pour la théorie générale concernant les espaces fonctionnels, voir [19, 35, 36]).

Lemme 2.6.1. *Soient $\overline{v} \in \Theta_{t_1}^{(v)}$ et $\overline{T} \in \Theta_{t_1}^{(T)}$. En outre, (ϱ, π, σ) les solutions des équations* (2.4.63)-(2.4.65) *avec les conditions initiale* (2.2.20)-(2.2.22) *données dans le lemme 2.4.1 et le lemme 2.5.2. Alors les équations* (2.6.112) *et* (2.6.113)*, avec les conditions aux limites et les conditions initiales* (2.2.25)-(2.2.26) *admettent une solution et une seul dans la classe*

$$v \in W_p^{2,1}(Q_{t_4}), \qquad T \in W_q^{2,1}(Q_{t_4}), \tag{2.6.116}$$

et vérifiées les inégalités suivantes

$$V_{(p,v)}(t) \leq c\Big(\|v_0\|^p_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)} + \int_0^t (1 + V_{(p,\overline{v})}(t')^2)dt' + t^{\frac{2q-p}{q}} V_{(q,\overline{T})}(t)\Big), \tag{2.6.117}$$

$$V_{(q,T)}(t) \leq c\Big[\|T_0\|^q_{W_q^{2-\frac{2}{q}}(\Omega)} + t^{\frac{2(p-q)}{p}} V_{(p,\overline{v})}(t)^{\frac{2q}{p}} + \tag{2.6.118}$$

$$+ \int_0^t (1 + V_{(q,\overline{T})}(t') V_{(p,\overline{v})}(t')^{q/p} + \|\nabla \cdot \mathcal{E}\|^q_{L^q(\Omega)})dt'\Big]$$

pour $0 < t \leq t_4$.

Démonstration.

D'après le théorème 9.1 du chapitre IV dans [20], les équations (2.6.112)-(2.6.113) admettent une unique solution

$$v \in W_p^{2,1}(Q_{t_5}), \qquad T \in W_q^{2,1}(Q_{t_5}).$$

D'autre part, en tenant compte de lemme 2.5.3, (voir [37] et aussi le lemme 3.4 du chapitre II dans [20]), pour $0 < t \leq t_6$, nous obtenons

$$V_{(p,v)}(t) \leq c(\|v_0\|^p_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)} + \|F_v\|^p_{L^p(Q_t)}), \tag{2.6.119}$$

$$V_{(q,T)}(t) \leq c(\|T_0\|^q_{W_q^{2-\frac{2}{q}}(\Omega)} + \|F_T\|^q_{L^q(Q_t)}), \tag{2.6.120}$$

où F_v et F_T sont le second membre de (2.6.112) et de (2.6.113) respectivement.

Il n'est pas difficile de prouver les estimations suivantes

$$\Big\|R_0 \nabla((\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h})\overline{T}) + \Big[\int_0^\infty \sigma dm + \varrho + \pi\Big]\nabla\Phi\Big\|^p_{L^p(\Omega)} \leq c(1 + V_{(q,\overline{T})}(t)\|\overline{T}\|^{p-q}_{W_q^2(\Omega)}),$$

$$\int_0^t \Big\|\eta \sum_{i,j=1}^3 \Big(\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla\cdot\overline{v}\Big)\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} + \zeta(\nabla\cdot\overline{v})^2\Big\|^q_{L^q(\Omega)} dt' \leq c\int_0^t \|\overline{v}\|^{2q-p}_{W_p^2(\Omega)} dt' V_{(p,\overline{v})}(t).$$

Rappelant les autres termes de F_v et F_T, qu'ils peuvent estimer de façon habituelle (rappelant aussi (2.1.9)), alors de (2.6.119)–(2.6.120) nous déduisons (2.6.117)–(2.6.118). □

2.7 Existence et unicité de la solution locale.

Pour démontrer le théorème 2.2.1, nous allons commencer par le lemme suivant.

Lemme 2.7.1. *Il existe deux constantes positives* $\overline{R}_v$, $\overline{R}_T$ *et* $t_5 \in]0, t_4]$ *tels que, si* $0 < t \leq t_5$, $\overline{v} \in \Theta_t^{(v)}$, $\overline{T} \in \Theta_t^{(T)}$ *et si*

$$V_{(p,\overline{v})}(t) \leq \overline{R}_v, \quad V_{(q,\overline{T})}(t) \leq \overline{R}_T,$$

alors la solution (v, T) *des équations* (2.6.112) *et* (2.6.113) *avec les conditions* (2.2.25)-(2.2.26) *satisfait aux inégalités*

$$V_{(p,v)}(t) \leq \overline{R}_v, \quad V_{(q,T)}(t) \leq \overline{R}_T.$$

Démonstration. Le lemme résulte immédiatement des termes du seconds membres de (2.6.117)–(2.6.118). □

Maintenant, nous allons démontrer le théorème fondamental de ce chapitre.

Démonstration du théoème 2.2.1.

Nous définissons

$$B_t = \{ (v, T) \in \Theta_t^{(v)} \times \Theta_t^{(T)} \,|\, V_{(p,v)}(t) \leq \overline{R}_v,\ V_{(q,T)}(t) \leq \overline{R}_T \}. \tag{2.7.121}$$

Pour $0 < t \leq t_5$, on désigne par G_t l'opérateur non-linéaire qui, à $(\overline{v}, \overline{T}) \in B_t$, associe la solution (v, T) du système linéarisé (2.6.112)-(2.6.113).

Grâce au lemme 2.7.1 on déduit

$$G_t(B_t) \subseteq B_t, \quad \text{pour tout} \quad 0 < t \leq t_5. \tag{2.7.122}$$

Nous définissons, pour $0 < t \leq t_5$,

$$Y_t = \Big[L^2(0,t; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,t; L^2(\Omega))\Big] \times \Big[L^2(0,t; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,t; L^2(\Omega))\Big]. \tag{2.7.123}$$

Il n'est pas difficile de voir que l'ensemble B_t défini dans (2.7.121) est convexe fermé dans l'espace Y_t. Par conséquent, pour démontrer le théorème, il suffit de vérifier qu'il existe $\bar{t} \in]0, t_5]$ de sorte que l'opérateur $G_{\bar{t}}$ est une contraction dans la topologie de $Y_{\bar{t}}$.

Soit $(\overline{v}_1, \overline{T}_1)$, $(\overline{v}_2, \overline{T}_2) \in B_t$, $0 < t \leq t_5$. Premièrement nous considérons les solutions $(\varrho_1, \pi_1, \sigma_1)$ et $(\varrho_2, \pi_2, \sigma_2)$ du système d'équations (2.4.63)–(2.4.65) avec les conditions (2.2.20)–(2.2.22) et avec les substitutions suivantes $\overline{v} = \overline{v}_1$, $\overline{T} = \overline{T}_1$ et $\overline{v} = \overline{v}_2$, $\overline{T} = \overline{T}_2$. Nous mettons

$$E^{[\varrho]} = \varrho_1 - \varrho_2, \qquad E^{[\pi]} = \pi_1 - \pi_2, \qquad E^{[\sigma]} = \sigma_1 - \sigma_2,$$

$$\overline{D}^{[v]} = \overline{v}_1 - \overline{v}_2, \qquad \overline{D}^{[T]} = \overline{T}_1 - \overline{T}_2.$$

En outre, pour plus de commodité, nous définissons

$$\overline{u}_i(t, m, x) = \overline{v}_i(t, x) - \frac{1}{\alpha_l(m)} \nabla\Phi(x),$$

$$\overline{U}_{4l,i} = (m h_{gl}(\overline{T}_i, \pi_{i,\vartheta}; m), \overline{u}_{i,1}, \overline{u}_{i,2}, \overline{u}_{i,3})^T,$$

$$\mathcal{E}^{[i]} = (\mathcal{E}_1^{[i]}, \mathcal{E}_2^{[i]}, \mathcal{E}_3^{[i]}) : \quad \text{définie par (2.1.8) avec } \varrho_i, \pi_i, \sigma_i, T_i$$

$(i = 1, 2)$.

D'autre part, en faisant la différence des deux équations (2.4.63)-(2.4.65) pour $\varrho_1, \pi_1, \sigma_1$ et pour $\varrho_2, \pi_2, \sigma_2$, nous avons

$$\partial_t E^{[\varrho]} + \overline{v}_1 \cdot \nabla E^{[\varrho]} + \overline{D}^{[v]} \cdot \nabla \varrho_2 + E^{[\varrho]} \nabla \cdot \overline{v}_1 + \varrho_2 \nabla \cdot \overline{D}^{[v]} = 0, \tag{2.7.124}$$

$$\partial_t E^{[\pi]} + \overline{v}_1 \cdot \nabla E^{[\pi]} + \overline{D}^{[v]} \cdot \nabla \pi_2 + E^{[\pi]} \nabla \cdot \overline{v}_1 + \pi_2 \nabla \cdot \overline{D}^{[v]} = \tag{2.7.125}$$

$$= H_{gl}(\overline{T}_2, \pi_2, \sigma_2) - H_{gl}(\overline{T}_1, \pi_1, \sigma_1),$$

$$\partial_t E^{[\sigma]} + (\overline{U}_{4l,1} - \overline{U}_{4l,2}) \cdot \nabla_{(m,x)} E^{[\sigma]} + \overline{D}^{[U_{4l}]} \cdot \nabla_{(m,x)} \sigma_2 + \tag{2.7.126}$$

$$+ E^{[\sigma]} \nabla_{(m,x)} \cdot \overline{U}_{4l,1} + \sigma_2 \nabla_{(m,x)} \cdot \overline{D}^{[U_{4l}]} =$$

$$= \Big[h_{gl}(\overline{T}_1, \pi_1; m) + B_1(\sigma_1; m) - g_1(m)[\pi_1 - \overline{\pi}_{vs(l)}(\overline{T}_1)]^- \Big] E^{[\sigma]} +$$

$$+\Big\{h_{gl}(\overline{T}_1,\pi_1;m)-h_{gl}(\overline{T}_2,\pi_2;m)+B_1(\sigma_1;m)-B_1(\sigma_2;m)+$$
$$-g_1(m)\Big([\pi_1-\overline{\pi}_{vs(l)}(\overline{T}_1)]^- - [\pi_2-\overline{\pi}_{vs(l)}(\overline{T}_2)]^-\Big)\Big\}\sigma_2+$$
$$+g_0(m)\Big([\pi_1-\overline{\pi}_{vs(l)}(\overline{T}_1)]^+[N^*-N(\sigma_1)]^+ - [\pi_2-\overline{\pi}_{vs(l)}(\overline{T}_2)]^+[N^*-N(\sigma_2)]^+\Big)+$$
$$+B_2(\sigma_1;m)-B_2(\sigma_2;m),$$

Maintenant, nous nous rappelons les relations suivantes

$$\int\limits_{\Omega}(\overline{v}_1\cdot\nabla E^{[\varrho]})E^{[\varrho]}dx=-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(\nabla\cdot\overline{v}_1)(E^{[\varrho]})^2dx,$$
$$\int\limits_{\Omega}(\overline{v}_1\cdot\nabla E^{[\pi]})E^{[\pi]}dx=-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(\nabla\cdot\overline{v}_1)(E^{[\pi]})^2dx,$$
$$\int\limits_{D_2}(\overline{U}_{4l,1}\cdot\nabla E^{[\sigma]})E^{[\sigma]}dx=-\frac{1}{2}\int\limits_{D_2}(\nabla\cdot\overline{U}_{4l,1})(E^{[\sigma]})^2dx.$$

Par conséquent, en multipliant (2.7.124)–(2.7.126) par $E^{[\varrho]}$, $E^{[\pi]}$ et $E^{[\sigma]}$ respectivement, on intègre les deux premières équations sur Ω et la dernière sur D_2, en tenant compte des estimations déjà connus, et avec des calculs usuels pour les estimations, nous obtenons

$$\frac{d}{dt}\|E^{[\varrho]}\|^2_{L^2(\Omega)}\le c(1+\|\overline{v}_1\|_{W^2_p(\Omega)})\|E^{[\varrho]}\|^2_{L^2(\Omega)}+c\|\overline{D}^{[v]}\|^2_{H^1(\Omega)}, \tag{2.7.127}$$

$$\frac{d}{dt}\|E^{[\pi]}\|^2_{L^2(\Omega)}\le c(1+\|\overline{v}_1\|_{W^2_p(\Omega)}+\|\overline{T}_1\|^2_{W^2_q(\Omega)})\times \tag{2.7.128}$$
$$\times(\|E^{[\pi]}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|E^{[\sigma]}\|^2_{L^2(D_2)})+c(\|\overline{D}^{[v]}\|^2_{H^1(\Omega)}+\|\overline{D}^{[T]}\|^2_{L^2(\Omega)}),$$

$$\frac{d}{dt}\|E^{[\sigma]}\|^2_{L^2(D_2)}\le c(1+\|\overline{v}_1\|_{W^2_p(\Omega)}+\|\overline{T}_1\|^2_{W^2_q(\Omega)}+\|\overline{T}_2\|^2_{W^2_q(\Omega)})\times \tag{2.7.129}$$
$$\times(\|E^{[\pi]}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|E^{[\sigma]}\|^2_{L^2(D_2)})+c(\|\overline{D}^{[v]}\|^2_{H^1(\Omega)}+\|\overline{D}^{[T]}\|^2_{L^2(\Omega)}),$$

de (2.7.127)–(2.7.129) et avec les conditions initiales

$$E^{[\varrho]}(0,\cdot)=0,\qquad E^{[\pi]}(0,\cdot)=0,\qquad E^{[\sigma]}(0,\cdot,\cdot)=0,$$

on déduit que

$$\|E^{[\varrho]}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|E^{[\pi]}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|E^{[\sigma]}(t)\|^2_{L^2(D_2)} \leq \tag{2.7.130}$$

$$\leq ce^{c[t+t^{\frac{p-1}{p}}+t^{\frac{q-2}{q}}]} \int_0^t (\|\overline{D}^{[v]}(t')\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\overline{D}^{[T]}(t')\|^2_{L^2(\Omega)})dt'.$$

Maintenant, on considère la différence entre les équations (2.6.112)–(2.6.113) pour $(v_i, T_i) = G_t(\overline{v}_i, \overline{T}_i)$, nous obtenons les équations suivantes

$$(\varrho_1 + \pi_1)\partial_t D^{[v]} - \eta\Delta D^{[v]} - (\zeta + \frac{\eta}{3})\nabla(\nabla \cdot D^{[v]}) = -(E^{[\varrho]} + E^{[\pi]})\partial_t v_2 + \tag{2.7.131}$$

$$-(\varrho_1 + \pi_1)(\overline{v}_1 \cdot \nabla)\overline{D}^{[v]} - (E^{[\varrho]} + E^{[\pi]})(\overline{v}_1 \cdot \nabla)\overline{v}_2 - (\varrho_2 + \pi_2)(\overline{D}^{[v]} \cdot \nabla)\overline{v}_2 +$$

$$-R_0\nabla\Big(\big(\frac{E^{[\varrho]}}{\mu_a} + \frac{E^{[\pi]}}{\mu_h}\big)\overline{T}_1\Big) - R_0\nabla\Big(\big(\frac{\varrho_2}{\mu_a} + \frac{\pi_2}{\mu_h}\big)\overline{D}^{[T]}\Big) - \Big[\int_0^\infty E^{[\sigma]}dm + E^{[\varrho]} + E^{[\pi]}\Big]\nabla\Phi,$$

$$(\varrho_1 + \pi_1)c_v\partial_t D^{[T]} - \kappa\Delta D^{[T]} = -(E^{[\varrho]} + E^{[\pi]})c_v\partial_t T_2 + \tag{2.7.132}$$

$$-(\varrho_1 + \pi_1)c_v\sum_{i=1}^3 \overline{v}_{1,i}\frac{\partial\overline{D}^{[T]}}{\partial x_i} - (\varrho_1 + \pi_1)c_v\sum_{i=1}^3 \overline{D}_i^{[v]}\frac{\partial\overline{T}_2}{\partial x_i} - (E^{[\varrho]} + E^{[\pi]})c_v\sum_{i=1}^3 \overline{v}_{2,i}\frac{\partial\overline{T}_2}{\partial x_i} +$$

$$-R_0(\frac{\varrho_1}{\mu_a} + \frac{\pi_1}{\mu_h})\overline{T}_1\nabla\cdot\overline{D}^{[v]} - R_0(\frac{\varrho_1}{\mu_a} + \frac{\pi_1}{\mu_h})\overline{D}^{[T]}\nabla\cdot\overline{v}_2 - R_0(\frac{E^{[\varrho]}}{\mu_a} + \frac{E^{[\pi]}}{\mu_h})\overline{T}_2\nabla\cdot\overline{v}_2 +$$

$$+\eta\sum_{i,j=1}^3\Big(\frac{\partial\overline{D}_i^{[v]}}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{D}_j^{[v]}}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla\cdot\overline{D}^{[v]}\Big)\frac{\partial\overline{v}_{1,i}}{\partial x_j} + \eta\sum_{i,j=1}^3\Big(\frac{\partial\overline{v}_{2,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{v}_{2,j}}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla\cdot\overline{v}_2\Big)\frac{\partial\overline{D}_i^{[v]}}{\partial x_j} +$$

$$+\zeta[(\nabla\cdot\overline{v}_1)^2 - (\nabla\cdot\overline{v}_2)^2] - \nabla\cdot(\mathcal{E}^{[1]} - \mathcal{E}^{[2]}) + L_{gl}[H_{gl}(\overline{T}_1, \pi_1, \sigma_1) - H_{gl}(\overline{T}_2, \pi_2, \sigma_2)],$$

de (2.1.6), (2.1.8) et avec les conditions (2.2.34) le terme de la radiation $\nabla\cdot(\mathcal{E}^{[1]} - \mathcal{E}^{[2]})$ est donné par

$$\nabla\cdot(\mathcal{E}^{[1]} - \mathcal{E}^{[2]}) = -\int_0^\infty \Big((a_\lambda^{(1)} + r_\lambda^{(1)})\varrho_1 + (a_\lambda^{(2)} + r_\lambda^{(2)})\pi_1 + \tag{2.7.133}$$

$$+\int_0^\infty (a_\lambda^{(3)}(m) + r_\lambda^{(3)}(m))\sigma_1(m)dm\Big)\int_{S^2}(I_\lambda^{(1)}(x, q_1) - I_\lambda^{(2)}(x, q_1))dq_1 d\lambda +$$

$$-\int_0^\infty \Big((a_\lambda^{(1)}+r_\lambda^{(1)})E^{[\varrho]}+(a_\lambda^{(2)}+r_\lambda^{(2)})E^{[\pi]}+$$

$$+\int_0^\infty (a_\lambda^{(3)}(m)+r_\lambda^{(3)}(m))E^{[\sigma]}dm\Big)\int_{S^2} I_\lambda^{(2)}(x,q_1)dq_1 d\lambda+$$

$$+\int_0^\infty \Big(r_\lambda^{(1)}\varrho_1+r_\lambda^{(2)}\pi_1+\int_0^\infty r_\lambda^{(3)}\sigma_1(m)dm\Big)\int_{S^2}(I_\lambda^{(1)}(x,q_1')-I_\lambda^{(2)}(x,q_1'))dq_1' d\lambda$$

$$+\int_0^\infty \Big(r_\lambda^{(1)}E^{[\varrho]}+r_\lambda^{(2)}E^{[\pi]}+\int_0^\infty r_\lambda^{(3)}(m)E^{[\sigma]}dm\Big)\int_{S^2} I_\lambda^{(2)}(x,q_1')dq_1' d\lambda+$$

$$+4\pi\int_0^\infty \Big(a_\lambda^{(1)}\varrho_1+a_\lambda^{(2)}\pi_1+\int_0^\infty a_\lambda^{(3)}(m)\sigma_1(m)dm\Big)(B(\lambda,\overline{T}_1)-B(\lambda,\overline{T}_2))d\lambda+$$

$$+4\pi\int_0^\infty \Big(a_\lambda^{(1)}E^{[\varrho]}+a_\lambda^{(2)}E^{[\pi]}+\int_0^\infty a_\lambda^{(3)}(m)E^{[\sigma]}dm\Big)B(\lambda,\overline{T}_2)d\lambda$$

En multipliant les équations (2.7.131) et (2.7.132) par $\frac{D^{[v]}}{\varrho_1+\pi_1}$ et $\frac{D^{[T]}}{\varrho_1+\pi_1}$ respectivement et en les intégrant sur Ω. En outre, nous nous rappelons l'estimation suivante

$$\eta\Big|\int_\Omega \frac{\sum_{i,j}^3 \frac{\partial(\varrho_1+\pi_1)}{\partial x_j}\frac{\partial D_i^{[v]}}{\partial x_j}D_i^{[v]}}{(\varrho_1+\pi_1)^2}dx\Big|+(\zeta+\frac{\eta}{3})\Big|\int_\Omega \frac{\sum_{i,j}^3 \frac{\partial(\varrho_1+\pi_1)}{\partial x_i}\frac{\partial D_j^{[v]}}{\partial x_j}D_i^{[v]}}{(\varrho_1+\pi_1)^2}dx\Big|\le$$

$$\le \overline{c}(\|\varrho_1\|_{W_p^1(\Omega)}+\|\pi_1\|_{W_p^1(\Omega)})\|D^{[v]}\|_{H^1(\Omega)}^{1+\frac{3}{p}}\|D^{[v]}\|_{L^2(\Omega)}^{1-\frac{3}{p}}\le$$
$$\le \varepsilon\|D^{[v]}\|_{H^1(\Omega)}^2+C_\varepsilon(\|\varrho_1\|_{W_p^1(\Omega)}^{\frac{2p}{p-3}}+\|\pi_1\|_{W_p^1(\Omega)}^{\frac{2p}{p-3}})\|D^{[v]}\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

(C_ε est une constante déterminé par la constante arbitraire $\varepsilon>0$).

Pour le terme de la radiation on a l'estimation suivante

$$\Big|\int_\Omega \frac{D^{[T]}}{\rho_1+\pi_1}\nabla\cdot(\mathcal{E}^{[1]}-\mathcal{E}^{[2]})dx\Big|\le\frac{2}{\inf\rho_0}\left\|\nabla\cdot(\mathcal{E}^{[1]}-\mathcal{E}^{[2]})\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|D^{[T]}\right\|_{L^2(\Omega)},$$

d'après le lemme 2.3.5, on obtient

$$\|\nabla\cdot(\mathcal{E}^{[1]}-\mathcal{E}^{[2]})\|_{L^2(\Omega)}\le c(1+\|\varrho_1\|_{W_p^1(\Omega)}+\|\pi_1\|_{W_p^1(\Omega)}+\|\sigma_1\|_{W_p^1(D_2)})\times \quad (2.7.134)$$

$$\times(\|E^{[\varrho]}\|_{L^2(\Omega)}+\|E^{[\pi]}\|_{L^2(\Omega)}+\|E^{[\sigma]}\|_{L^2(D_2)}+\|\overline{D}^{[T]}\|_{L^2(\Omega)}).$$

Maintenant, par des calcules usuels, y compris l'application des l'inégalités de Sobolev, Hölder et Cauchy-Schwarz et à l'aide des inégalités

$$\|\partial_t v_2\|_{L^p(\Omega)} \le \overline{c}(1+\|v_2\|_{W^2_p(\Omega)}), \qquad \|\partial_t T_2\|_{L^q(\Omega)} \le \overline{c}(1+\|T_2\|_{W^2_q(\Omega)}+\|\overline{v}_2\|_{W^2_p(\Omega)})$$

($\overline{c}$ est une constante positive), on obtient

$$\frac{d}{dt}\|D^{[v]}\|^2_{L^2(\Omega)} + \overline{c}_0\|D^{[v]}\|^2_{H^1(\Omega)} \le \tag{2.7.135}$$
$$\le c(1+\|\overline{v}_2\|_{W^2_p(\Omega)^2})(\left\|D^{[v]}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|E^{[\varrho]}\right\|^2_{L^2(\Omega)} +$$
$$+\left\|E^{[\pi]}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|E^{[\sigma]}\right\|^2_{L^2(D_2)} + \left\|\overline{D}^{[v]}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\overline{D}^{[T]}\right\|^2_{L^2(\Omega)}),$$

$$\frac{d}{dt}\|D^{[T]}\|^2_{L^2(\Omega)} + \overline{c}_0\|D^{[T]}\|^2_{H^1(\Omega)} \le \tag{2.7.136}$$
$$\le c(1+\|T_2\|^2_{W^2_q(\Omega)} + \|\overline{v}_2\|^2_{W^2_p(\Omega)})(\left\|D^{[T]}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|E^{[\varrho]}\right\|^2_{L^2(\Omega)} +$$
$$+\left\|E^{[\pi]}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|E^{[\sigma]}\right\|^2_{L^2(D_2)} + \left\|\overline{D}^{[v]}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\overline{D}^{[T]}\right\|^2_{L^2(\Omega)}).$$

Alors, d'après (2.7.135)–(2.7.136) on trouve

$$\|D^{[v]}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|D^{[T]}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\overline{c}_0\int_0^t(\|D^{[v]}(t')\|^2_{H^1(\Omega)}+\|D^{[T]}(t')\|^2_{H^1(\Omega)})dt' \le \tag{2.7.137}$$
$$\le ce^{c(t+t^{\frac{q-2}{q}}+t^{\frac{p-2}{p}})}(t+t^{\frac{q-2}{q}}+t^{\frac{p-2}{p}})\Big[\|\overline{D}^{[T]}\|^2_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))}+\|\overline{D}^{[v]}\|^2_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))}+\|E^{[\varrho]}\|^2_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))}+$$
$$+\|E^{[\pi]}\|^2_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))} + \|E^{[\sigma]}\|^2_{L^\infty(0,t;L^2(D_2))}\Big].$$

En outre, à l'aide (2.7.130) on aura

$$\|D^{[v]}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|D^{[T]}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\overline{c}_0\int_0^t(\|D^{[v]}(t')\|^2_{H^1(\Omega)}+\|D^{[T]}(t')\|^2_{H^1(\Omega)}dt') \le \tag{2.7.138}$$
$$\le ce^{c(t+t^{\frac{q-2}{q}}+t^{\frac{p-2}{p}})}(t+t^{\frac{q-2}{q}}+t^{\frac{p-2}{p}})\Big[\|\overline{D}^{[T]}\|^2_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))} + \|\overline{D}^{[v]}\|^2_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))}+$$
$$+ce^{c[t+t^{\frac{p-1}{p}}+t^{\frac{q-2}{q}}]}\int_0^t(\|\overline{D}^{[v]}(t')\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\overline{D}^{[T]}(t')\|^2_{L^2(\Omega)})dt'\Big].$$

D'après (2.7.138) on déduit qu'il existe $\bar{t} \in]0, t_5]$ telle que

$$\|D^{[v]}\|^2_{L^\infty(0,\bar{t};L^2(\Omega))} + \|D^{[T]}\|^2_{L^\infty(0,\bar{t};L^2(\Omega))} + \|D^{[v]}\|^2_{L^2(0,\bar{t};H^1(\Omega))} + \|D^{[T]}\|^2_{L^2(0,\bar{t};H^1(\Omega))} \leq$$

$$\leq \kappa\Big(\|\overline{D}^{[v]}\|^2_{L^\infty(0,\bar{t};L^2(\Omega))} + \|\overline{D}^{[T]}\|^2_{L^\infty(0,\bar{t};L^2(\Omega))} + \|\overline{D}^{[v]}\|^2_{L^2(0,\bar{t};H^1(\Omega))} + \|\overline{D}^{[T]}\|^2_{L^2(0,\bar{t};H^1(\Omega))}\Big)$$

avec $0 < \kappa < 1$, ce qui signifie que l'opérateur $G_{\bar{t}} : B_{\bar{t}} \to B_{\bar{t}}$ est une contraction. Ce qui nous permet de trouver l'existence et l'unicité de la solution sur l'intervalle $[0, \bar{t}]$, le théorème 2.2.1 est démontré. $\square$

CONCLUSION

Dans cette thèse, nous avons considéré les équations qui décrivent le couplage entre les équations de mouvement de l'air et l'équation de la radiation. Le travail [7] qui constitue l'essentiel du premier chapitre de cette thèse est une tentative à la contribution de la modélisation mathématique où nous avons montré l'existence de la solution stationnaire du système d'équations de la radiation et du mouvement d'un gaz visqueux et calorifère dans un domaine petit et avec la petitesse des coefficients d'absorption et de réflexion de la radiation. D'autre part, dans le deuxième chapitre (voir [8]), nous avons amélioré le résultat [7]. En montrant l'existence et l'unicité de la solution du système d'équations décrivant l'intensité de la radiation et du mouvement de l'air dans le cas où il y a les transitions de phase de l'eau, en utilisant des conditions physiquement réalisable. Nous espérons de démontrer la solution globale qui converge vers la solution stationnaire avec des conditions plus naturelle et sur un domaine plus vaste, en utilisant les idées qui ont guidé les travaux présentés dans cette thèse.

Bibliographie

[1] Amosov, A. A. : Correction globale du problème aux conditions initiales et aux limites pour le système d'équations de la dynamique d'un gaz visqueux avec la radiation (en russe). *Doklady Akad. Nauk SSSR*. vol. **280** (1985), pp. 1326–1329.

[2] Ascoli D., Selvaduray S. C. : *Wellposedness in the Lipschitz class for a hyperbolic system arising from a model of the atmosphere including water phase transitions*. Nonlinear Differ. Equ. Appl., vol. **21** (2014), pp. 263–287.

[3] Belhireche, H., Aissaoui, M. Z., Fujita Yashima, H. : Equations monodimensionnelles du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau. *Sci. Techn. Univ. Constantine* - A, vol. **31** (2011), pp. 9–17.

[4] Belhireche, H., Aissaoui, M.Z., Fujita Yashima, H. :*Comportement asymtotique de l'équation de la coagulation des gouttelettes en chute.* Thèse de doctorat 3ème cycle en Mathématiques université 8 Mai 1945 Guelma. 2014.

[5] Benabidallah, R., Taleb, L., Fujita Yashima, H. : Existence d'une solution stationnaire d'un système d'équations d'un fluide visqueux compressible et calorifère modélisant la convection. *Bollettino U.M.I.*, vol. **10** (2007), pp. 1101-1124.

[6] Beirao Da Viega, H. : Existence results in Sobolev spaces for a stationary transport equation. *Ricerche di Matematica.* Suppl. vol. **36** (1987), pp. 173-184.

[7] Benssaad, M., Ellaggoune, F. : Solution stationnaire du système d'équations de la radiation et du mouvement d'un gaz visqueux et calorifère. *Rend. Sem. Mat. Univ. Poli. Torino*. Vol. **72** (2014), pp. 173–194.

[8] Benssaad, M., Belhirche, H., Selvaduray, S. : Equation system describing the radiation intensity and the air motion with the water phase transition Manuscrit 2016.

[9] Buccellato, S., Fujita Yashima, H. : Système d'équations d'un gaz visqueux modélisant l'atmosphère avec la force de Coriolis et la stabilité de l'état d'équilibre. *Ann. Univ. Ferrara - Sez. VII - Sc. Mat.* vol. **49** (2003), pp. 127–159.

[10] Cattabriga. L. : Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di stokes. *Rend. Se. Mat. Univ. Padova.*, vol. **31** (1961), pp. 308–340.

[11] Ducomet, B., Nečasová, Š. : Global weak solution to the 1D compressible Navier-Stokes equations with radiation. *Comm. Math. Anal.*, vol. **8** (2010), pp. 23–65.

[12] Ducomet, B., Nečasová, Š. : Global existence of solutions for the one-dimensional motions of a compressible viscous gas with radiation : An "infrarelativistic model". *Nonlinear Analysis*, vol. **72** (2010), pp. 3258–3274.

[13] Ducomet, B., Feireisl, E., Nečzsová, Š. : On a model in radiation hydrodynamics. *Ann. I. H. Poincaré - A. N.*, vol. **28** (2011), pp. 797–812.

[14] Ducomet, B., Nečzsová, Š. : Large-time behavior of the motion of a viscous heat-conducting one-dimensional gas coupled to radiation. *Annali di Matematica*, vol. **191** (2012), pp. 219-260.

[15] Ducomet, B., Nečzsová, Š. : Asymptotic behavior of the mof a viscous heat-conducting one-dimensional gas with radiation : the pure scattering case. *Analysis and Applications.*, vol. **11** (2013), (29 pages).

[16] Farwig, R. : Stationary solutions of compressible Navier-Stokes equations with slip boundary conditions. *Comm. Part. Diff. Eq.*, vol. **14** (1989), pp. 1579–1606.

[17] Fujita Yashima, H. : Modélisation de la physique des fluides, *cours de l'université de Guelma, 2010.*

[18] Fujita Yashima, H., Campana, V., Aissaoui, M. Z. : Système d'équations d'un modèle du mouvement de l'air impliquant la transition de phase de l'eau dans l'atmosphère. *Ann. Math. Afr.*, vol. **2** (2011), pp. 66–92.

[19] Il'in, V. P., Solonnikov, V. A. : Some properties of differentiable functions of several variables. (in Russian). *Trudy MIAN SSSR* vol. **66** (1962), pp. 205–226.

[20] Ladyzhenskaya, O. A., Solonnikov, V. A., Ural'tseva, N. N. : *Linear and quasi-linear equations of parabolic type* (translated from Russian). Amer. Math. Soc., 1968.

[21] Landau, L. L., Lifchitz, E. M. : *Mécanique des fluides (Physique théorique, tome 6)* (traduit du russe). Mir, 1989.

[22] Liou, K. N. : *An introduction to atmospheric radiation.* Acad. Press, 2002.

[23] Matveev, L. T. : *Physique de l'atmosphère* (en russe). Gidrometeoizdat, Leningrad-S. Peterburg, 1965, 1984, 2000.

[24] Matveev, L. T. : *Dinamica delle nubi (in russo)*. Gidrometeoizdat, Leningrad, 1981.

[25] Maz'ya, V. G., Plameneveskii, B. A., Stupyalis, L. I. : The three-dimensional probleme of steady-state motion of a fluid with a free surface. *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. **123** (1984), pp. 171–268.

[26] Merad, M.,Aissaoui, M., Fujita Yashima, H. :*Etude de l'équation de goagulation des gouttlettes en mouvement avec le vent.* Thèse de doctorat 3ème cycle en Mathématiques université 8 Mai 1945 Guelma. 2014

[27] Messaadia, N., Fujita Yashima, H. : Solution stationnaire du systéme d'équations de la radiation et de la température dans l'air. *Serdica Math. J.*, vol. **39** (2013), pp. 1001–1020.

[28] Mikhailov, V. P. : *Equations aux dérivées partielles* (traduit du russe). Mir, 1980.

[29] Prodi, F., Battaglia, A. : *Meteorologia - Parte II, Microfisica*. Grafica Pucci, Roma, 2004.

[30] Pruppacher, H.-R., Klett, J.-D. : *Microphysics of clouds and precipitation*. D.Reidel Publishing Company, London, 1978.

[31] Valli, A. : Periodic and stationary solution for compressible Navier-Stokes equations via a stability method. *Ann. Scuola Norm. Super. Pisa Cl. Sci. Ser. IV*, vol. **10** (1983), pp. 607–647.

[32] Valli, A. : On the existence of stationary solution to compressible Navier-Stokes equation. *Ann. I. H. Poincaré*, C, vol. **4** (1987), pp. 99–113.

[33] Selvaduray, S., Fujita Yashima, H. : Equazioni del moto dell'aria con la transizione di fase dell'acqua nei tre stati : gassoso, liquido e solido. *Accad. Sci. Torino, Memorie Cl. Sci. Fis., Serie V*, vol. **35** (2011), pp.37–69.

[34] Sheng, P.-X., Mao, J.-T., Li, J.-G., Zhang, A.-C., Sang, J.-G., Pan, N.-X. :*Fisica dell'atmosfera (in cinese)*. Publ. Univ. Beijing, Beijing, 2003.

[35] Solonnikov, V. A. : *Stime a priori per le equazioni del tipo parabolico di secondo ordine.* (In russo). *Trudy MIAN SSSR*, vol. **70** (1964), pp. 133–212.

[36] Solonnikov, V. A. : *Sul problema di condizioni al contorno per i sistemi di equazioni paraboliche di forma generale.* (In russo). *Trudy MIAN SSSR*, vol. **83** (1965), pp. 3–162.

[37] Solonnikov, V. A. : Sul problema di condizioni iniziali e condizioni al contorno per le equazioni del moto di un fluido viscoso comprimibile (in russo). *Zapiski Nauch. Sem. LOMI*, vol. **56** (1976), pp. 128–142.

Bibliographie