الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التـعليم العالي والبحث العلمي
République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE 8 MAI 1945 GUELMA
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département d'Architecture et d'Urbanisme

POLYCOPIE DE COURS DE

GEOMETRIE DE L'ESPACE 1

NIVEAU : 1ère année Licence Architecture

Préparé par : Dr. HAFSI Fatma Zohra

Maitre-de-Conférences classe B

2023-2024

Polycopié pédagogique

Géométrie de l'espace 1

Cours destiné aux étudiants de :

1ère année Licence Architecture

AVANT-PROPOS

En rédigeant ce travail, notre principal objectif est de produire un texte clair et simple qui décrit avec précision les principes, les méthodes et les applications de la Géométrie Descriptive dans le domaine de l'architecture. Cette discipline est essentielle dans le cursus de formation des architectes, car elle permet de maîtriser les projections orthogonales et leurs manipulations fondamentales.

La Géométrie Descriptive traite de l'espace physique et des objets qui le composent. Ces objets, qu'il s'agisse d'espaces ou d'objets physiques, possèdent des propriétés géométriques et se définissent par leurs positions relatives dans l'espace : à côté de, au-dessus de, au-dessous de, en intersection avec, cachés par, et ainsi de suite. En pratique, il s'agit de déterminer leurs formes réelles en termes de dimensions et d'angles, de résoudre leurs intersections et de procéder à leur développement.

La Géométrie Descriptive est la base théorique du dessin architectural, ce qui permet de construire des vues en plan, des coupes et des élévations. En d'autres termes, un dessin architectural est essentiellement un dessin géométrique descriptif appliqué, où le plan de couverture correspond à une projection horizontale et la façade à une projection frontale.

Ce manuel pédagogique est principalement destiné aux étudiants en première année de licence dans le domaine de l'architecture, de l'urbanisme et des métiers de la ville, incluant les spécialités d'architecture et de conduite opérationnelle de projets. Il peut également être utile aux étudiants en génie civil et en mécanique, ainsi qu'à toute personne intéressée par le sujet dans le cadre de formations universitaires où la reconnaissance des formes géométriques par leurs projections est nécessaire.

Bien que ce manuel n'ait pas la prétention d'être un traité exhaustif, il présente les concepts fondamentaux de la Géométrie Descriptive. Il est structuré en huit grands chapitres, chacun comprenant une partie théorique et une partie pratique avec des exercices visant à appliquer les connaissances acquises pour résoudre des problèmes géométriques. La séquence des chapitres suit une logique progressive, commençant par mettre en évidence les principales méthodes de projection, en mettant particulièrement l'accent sur la projection orthogonale. Ensuite, nous abordons l'étude du point, de la droite, du plan et des polyèdres. Enfin, le cours se termine par les méthodes de conception des toitures inclinées.

En tant qu'enseignante passionnée de Géométrie Descriptive, nous avons consacré dix années consécutives (2013-2023) à l'enseignement de cette matière au sein du département d'Architecture et d'Urbanisme de l'Université de Guelma. Pendant cette période, nous avons constamment cherché à élaborer un programme répondant aux exigences de la formation en architecture et à l'améliorer grâce aux interactions avec nos étudiants.

En conclusion, ce manuel est dédié à tous nos étudiants de première année qui ont montré un intérêt croissant pour la Géométrie Descriptive tout au long des années et qui nous ont permis de nous former et d'améliorer notre enseignement. Nous exprimons notre profonde gratitude envers eux.

Table des matières

Liste des figures

Liste des tableaux

Objectifs du cours :

L'objectif principal du présent cours est de transmettre les principales connaissances permettant la résolution de problèmes liés à la géométrie tridimensionnelle. Il vise à doter l'étudiant d'outils nécessaires aux exercices de la perception spatiale, et du raisonnement géométrique. De plus, ce cours permet, également de développer chez l'étudiant, à travers une certaine gymnastique mentale, les facultés d'imagination et de compréhension de l'agencement des objets dans l'espace.

En plus de l'objectif de développement la vue spatiale chez l'étudiant, le cours de la Géométrie descriptive vise, à apprendre à l'étudiant, la maitrise du langage du graphisme technique ainsi que les bases d'une représentation architecturale rigoureuse et pertinente. On étudiera, alors, les principales méthodes graphiques de représentation des corps tridimensionnels et leurs applications en architecture. Effectivement, un architecte maitrisant la géométrie descriptive sera capable de communiquer, sans difficulté, ses idées et d'expliquer avec clarté tous les détails de sa conception architecturale.

Informations sur la matière

Année Universitaire : 2022/2023

Matière : **Géométrie de l'espace 1**

Enseignant responsable de la matière : Dr. **HAFSI Fatma Zohra**, Grade : M C B

Unité d'Enseignement : Unité d'enseignement méthodologique

Semestre : 1 .

Crédits : 4 **Coefficient** : 2

Nombre d'heures d'enseignement : **Cours** : 1,5h **T D** : 1,5 h.

Mode d'évaluation :

Contrôle	**Pondération (%)**
Examen final	60
Travaux Dirigés (Présence & Participation)	20
Micro-Interrogation	20
Total	100

<u>Liste de matériel nécessaire pour le cours de la Géométrie de l'espace 1</u>

- 1 Té matériau: plastique transparent ou carbone ou alu, longueur: environ 80 cm.
- Attention au profil de la branche sur laquelle on dessine : le support doit être suffisamment épais, afin de permettre aux équerres de bien glisser sur le bord.
- exemple: Standardgraph (plastique transparent)
- 2 équerres en plastic (avec plots écarteurs)
- à 45°, de longueur de diagonale +/- 40 cm
- à 30°/60°, de longueur de grand côté +/- 40 cm (en général, ces équerres sont de couleur orange)
- exemple: Standardgraph
- 1 latte graduée de longueur 40 ou 50 cm, plastic, ou mieux: alu
- exemple: Standardgraph ou Linex ou Staedtler...
- 1 compas à réglage par pas de vis avec rallonge 15-20 cm, avec adaptateur pour feutre
- exemple: Staedtler
- 1 crayon 1H (pour le dessin aux instruments)
- 1 crayon HB
- 1 crayon 2B (pour le croquis à main levée)
- 1 gomme (matière synthétique)
- 1 taille crayon métal

Définition de la Géométrie descriptive :

La géométrie descriptive : est une méthode conventionnelle de représentation de volumes sur une surface plane (feuille de papier). Cette représentation montre avec précision les **propriétés géométriques** ainsi que les **positions relatives des objets dans l'espace**.

La géométrie descriptive appliquée à l'architecture, permet d'effectuer la lecture spatiale, de développer les facultés de percevoir l'espace en trois dimensions à partir de représentations planes. Elle permet donc, de stimuler l'appréhension spatiale ou « voir l'espace ».

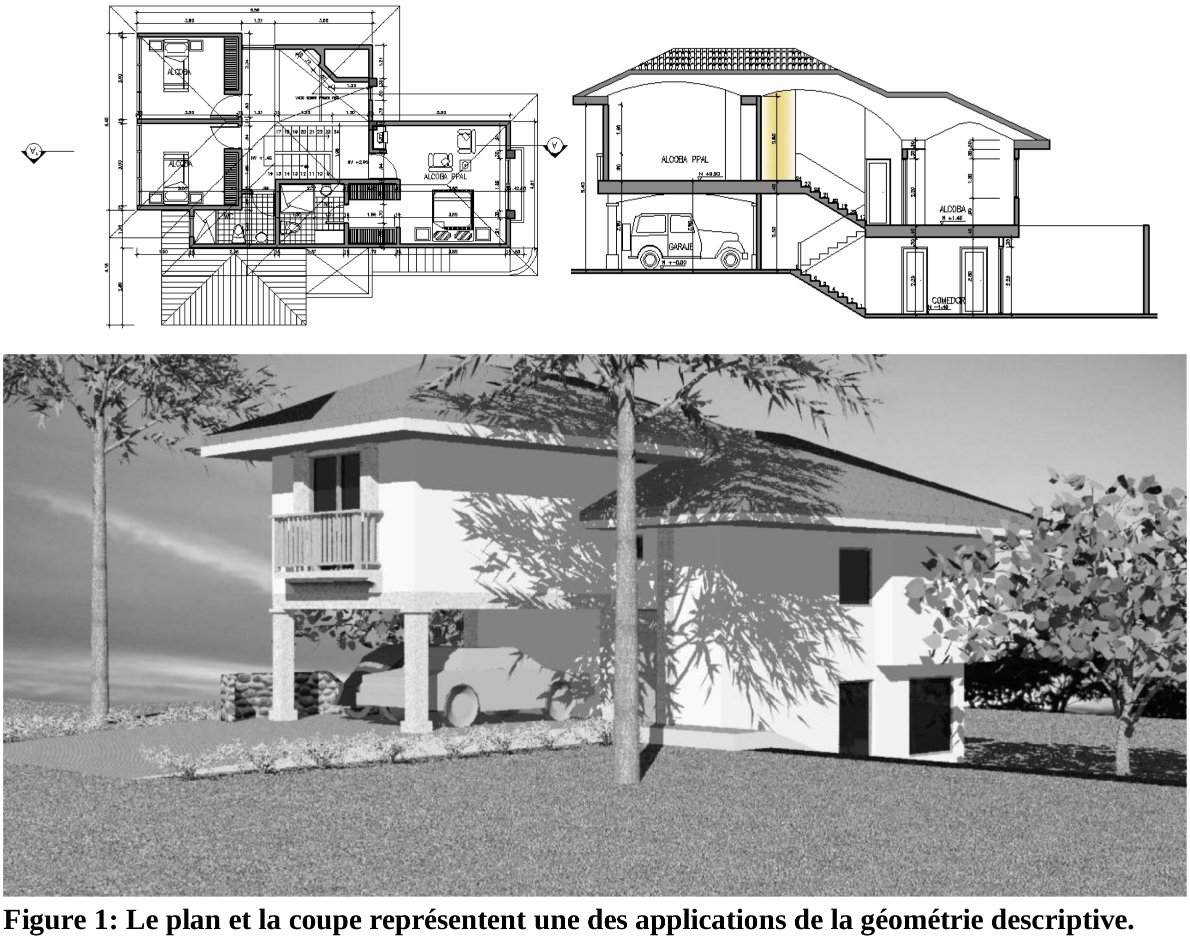


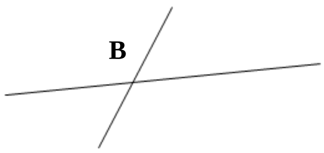
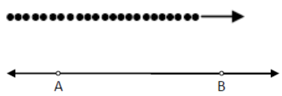
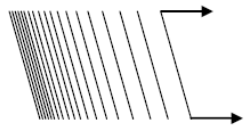
Figure 1: Le plan et la coupe représentent une des applications de la géométrie descriptive.

L'exemple ci-dessus donne les projections orthogonales (dessins en 2D) d'un objet volumétrique : une maison.

I. Notions élémentaires sur le point, la droite et le plan :

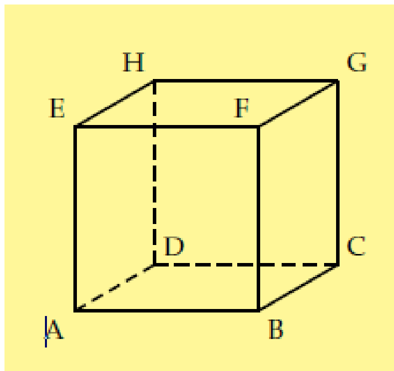
Nous avons tous, certainement, des connaissances préalables, sur la géométrie en général et sur ses principales entités, en particulier, telles que : le point, la droite et les plans.

I.1. Définition du point, de la droite et du plan

Le point	**La droite**	**Le plan**
Le point est le plus petit en géométrie. Un point un concept, une représentation théorique. Il n'a pas de poids, ni de longueur, ni de largeur. On le représente par un point (**.**) ou une croix (×). L'intersection de deux droites donne un point. 	Une droite est un ensemble infini de points elle est illimitée des deux côtés. Deux points distincts de l'espace définissent une droite et une seule. Une droite est désignée par une lettre en minuscule ou deux lettres majuscules entre parenthèses **(AB)** ou ***d***. 	Un plan est un ensemble infini de droites.   Le plan étant illimité, nous devons, pour pouvoir le dessiner, le limiter conventionnellement à un certain contour. Ce contour est en général un rectangle, qui, par un effet de perspective, est vu sous forme d'un parallélogramme.

I.2. Positions relatives de deux droites dans l'espace :

Dans l'espace, deux (2) droites peuvent être :



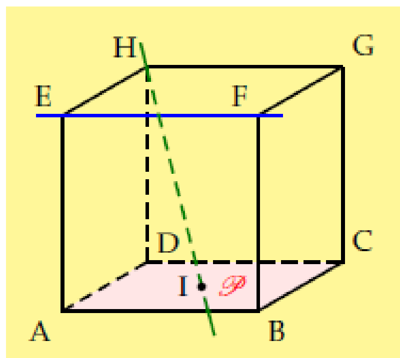
Coplanaires, si ces deux droites appartiennent à un même plan [(AF) et (BE)] ;

Sécantes, si ces deux droites se coupent en un point [(AB) et (AD)] ;

Parallèles, si ces deux droites sont coplanaires et n'ont aucun point commun ou si ces deux droites sont **confondues** [(AB) et (HG)] ;
Non coplanaires [(AB) et (DG)].

I.3. Positions relatives d'une droite et d'un plan dans l'espace :

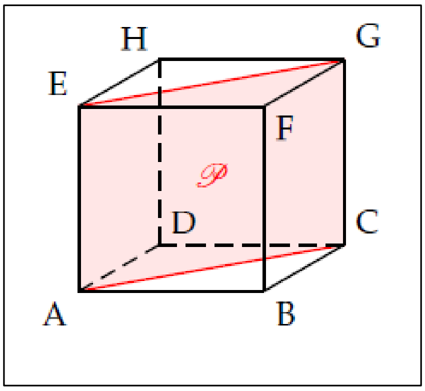
Dans l'espace, une droite et un plan peuvent être :



Parallèles : si la droite et le plan n'ont aucun point commun ou si la droite est contenue dans le plan [(EF) et *P*] ;

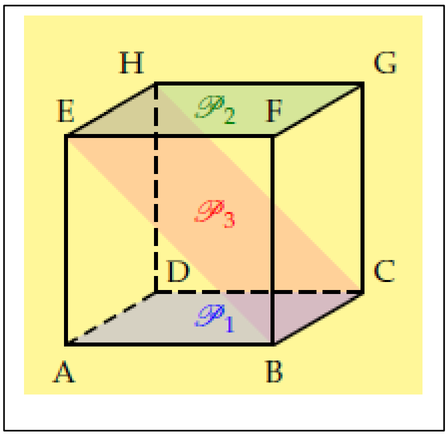
Sécants : si la droite et le plan ont un seul point commun [(HI) et *P*]

I.4. **Définition du plan :**



Un plan *P* peut être défini par **trois points A, B, C non alignés.** Il est alors noté (ABC).
Un plan peut être aussi défini par **deux droites sécantes** ou strictement **parallèles**.
Exemple : Dans le cube ABCDEFGH
Le plan ***P*** peut être défini par :
Les points A, E, C. Il peut être noté ***P* (A,E,C)**
Les droites (EC) et (AG). On note : ***P* (EC x AG)**
Les droites (AE) et (CG). On note : ***P* (AE // CG)**

I.5. **Positions relatives de deux plans dans l'espace :**



Dans l'espace, deux (2) plans peuvent être :

Parallèles : si les deux plans n'ont aucun points commun ou si les deux plans sont confondus

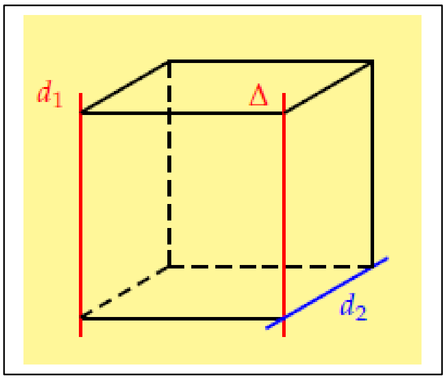
$$(P1 \cap P2 = \emptyset)$$

Sécants : si les deux plans ont une droite en commun.

$$(P1 \cap P3 = (BC))$$

I.6. **L'orthogonalité**

I.6.a. **Droites orthogonales**

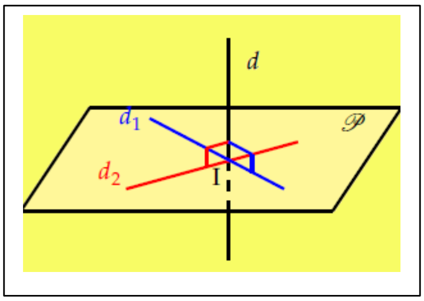


Deux droites d_1 et d_2 sont :
Perpendiculaires si, et seulement si,
$\boldsymbol{d_1}$ et $\boldsymbol{d_2}$ se coupent perpendiculairement.

Orthogonales si, et seulement si, il existe une droite D parallèle $\boldsymbol{d_1}$ qui est perpendiculaire à d_2.

On notera indistinctement pour deux droites perpendiculaires ou orthogonales : $\boldsymbol{d_1 \perp d_2}$

I.6.b. **Orthogonalité entre une droite et un plan**

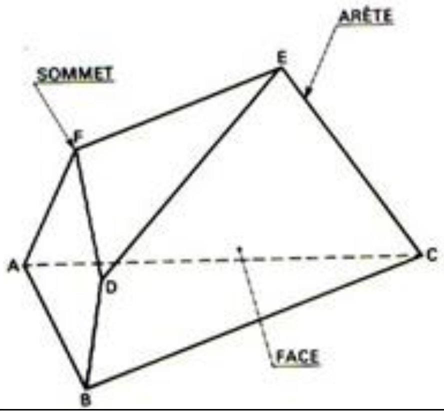
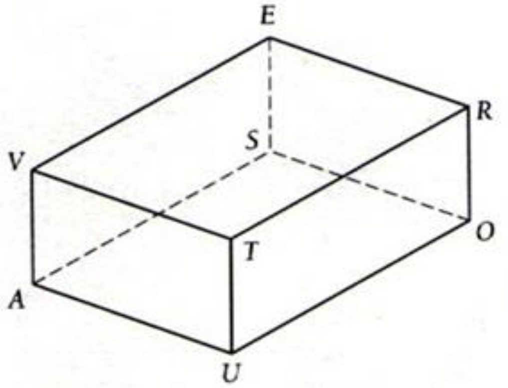


Une droite d est perpendiculaire ou orthogonale à un plan ***P*** si, et seulement si, il existe deux droites sécantes de ***P*** perpendiculaires à ***d***.
Si une droite ***d*** est perpendiculaire en **I** à un plan ***P*** alors toute droite de ***P*** passant par **I** est perpendiculaire à ***d***.

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{d \perp P} \\ \boldsymbol{d \cap P = \mathrm{I}} \\ \boldsymbol{\mathrm{I} \in d_1} \end{array}\right\} \quad \boldsymbol{d_1 \perp d}$$

I.6. **Exercice 1:**

Observer le polyèdre et le parallélépipède suivants puis relever :

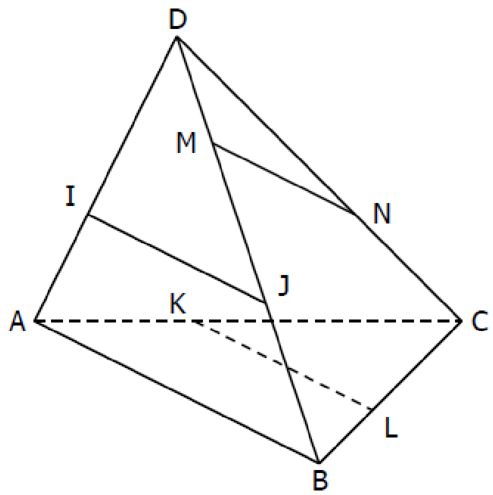
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Deux droites parallèles…………..….Deux droites sécantes………….. Deux droites non coplanaires……..……..Une droite et un plan parallèles……………Une droite et un plan sécants………………Une droite et un plan non coplanaires………………
Deux plans sécants………………..….Deux plans parallèles………………</td>
<td>Deux droites parallèles…………..…….Deux dr oites sécantes……………….….. Deux droites non coplanaires……..……..Une droite et un plan parallèles……………Une droite et un plan sécants………………Une droite et un plan non coplanaires………………
Deux plans sécants………………..….Deux plans parallèles………………</td>
</tr>
</table>

I.7. **Exercice 2 :**

ABCD est un tétraèdre. I, J, K, L, M et N appartiennent respectivement aux arêtes [AD], [BD], [AC], [BC], [BD]. et [CD]. (IJ) et (KL) sont parallèles à (AB).

Que peut-on dire...

- ... de la droite (IJ) et du plan (BCD) ? ....
- ... des droites (IJ) et (MN) ? ....
- ... des plans (DMN) et (DIJ) ? ....
- ... de la droite (KL) et du plan (ABC) ? ....
- ... des droites (KL) et (DB) ? ....
- ... des plans (DMI) et (AJB) ? ....
- ... de la droite (IJ) et du plan (ABC) ? ....
- ... des droites (IJ) et (KL) ? ....
- ... des plans (IJM) et (CKL) ? ....
- ... de la droite (KL) et du plan (ABD) ? ....



II. La projection

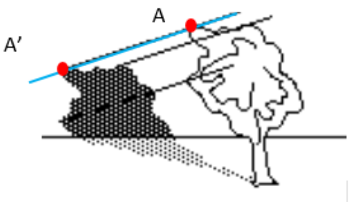
Ce chapitre donne une brève description des systèmes de projection les plus utilisés en architecture. Il décrit les fondements de la réalisation des projections et leur application directe dans la représentation du projet architectural.

II.1. Définitions :

La projection : En géométrie, la projection est la représentation d'objets volumétriques sur une surface plane (feuille de papier).

Une vue : C'est une image (figure) en 2D d'objets tridimensionnels. Les multiples vues permettent de renseigner et de décrire, le plus clair possible, un objet volumétrique.

L'ombre de l'arbre sur le mur est une « projection »



Les ombres sont le résultat de la projection

Figure 3 : La projection est une transformation ponctuelle.

Nous pouvons considérer la projection comme étant l'association des points (A) d'un volume quelconque (l'objet à projeter, l'arbre) avec des points (A') du plan de projection (le mur).La ligne AA' est la droite de projection.

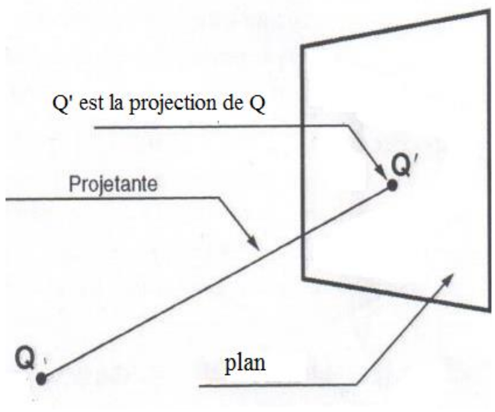


Figure 2 : Les éléments de la projection

Remarque 1 :

Tous les points appartenant à une même droite perpendiculaire au plan de projection se projettent en un même point. La projection orthogonale sur un seul plan n'est donc pas suffisante pour déterminer la position du point dans l'espace.

Remarque 2 :

Plus généralement, la projection orthogonale d'un solide se construit en recherchant la projection de ses points caractéristiques.

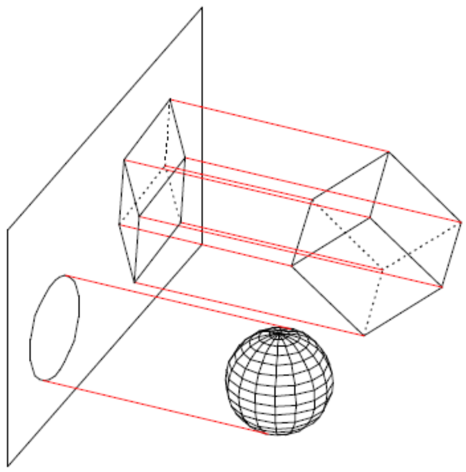


Figure 4 : La projection d'un objet tridimensionnel donne une représentation bidimensionnelle (plane).

II.2. Les types de projection :

Il existe trois principaux types de projection :

- La projection centrale.
- La projection parallèle.
- La projection orthogonale.

II.2.a. La projection centrale :

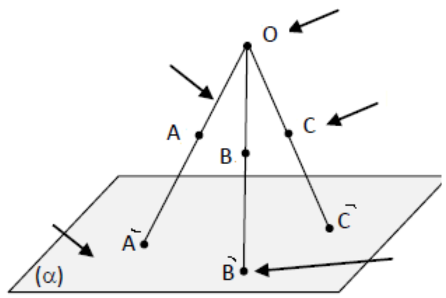


Figure 5 : la projection centrale
AA', BB', CC' : sont les droites de projection

Propriétés :
En projection centrale, le centre de projection **O** se trouve à une distance finie par rapport au plan de projection **(α).**
O : centre de projection (**O** $\notin$ **α**)
B : un point
B' : est la projection du point **B** sur **(α)**

Méthode de projection :
Pour trouver **A',** il faut tracer une droite **OA ;**
Puis déterminer **OA x α = A'**

II.2.b. Projection parallèle :

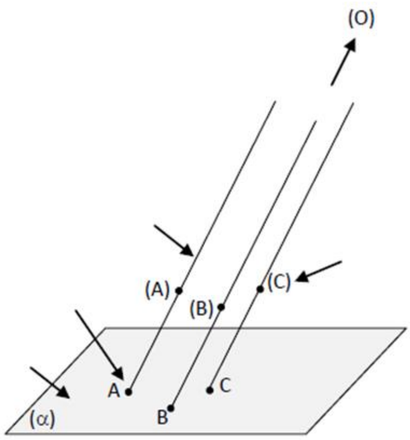


Figure 6 : La projection parallèle

Propriétés :

En projection parallèle, le centre de projection **O** se trouve à l'infini par rapport au plan de projection. O→∞

Les droites de projection **AA', BB', CC'** sont parallèles.

AA' // BB' // CC'

On appelle un ensemble de lignes parallèles : **une série de parallèles.**
Une série de parallèles décrivent une direction unique.

II.2.c. La projection orthogonale

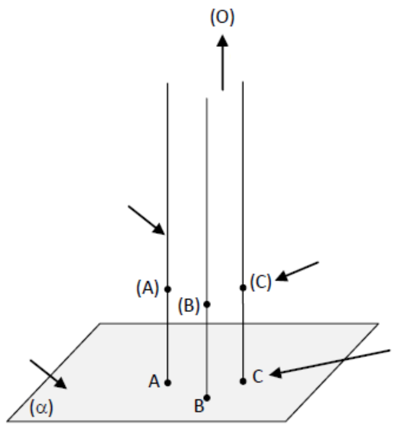


Figure 7 : La projection orthogonale

Propriétés :
On appelle la projection orthogonale d'un point **(A)** sur un plan **(α)** ***le pied*** **A**.
Le plan **(α)** est le plan de projection.
La droite **(A)A** la projetante ou la droite de projection du point **A.**

$$(A)A \perp (\alpha)$$
$$(\alpha) \times (A)A = A$$

(B)B est la droite de projection du point **(B).**

II.2.d. Exemple de projection orthogonale :

La figure 9 à gauche montre une table, et la figure 8 à droite en donne trois projections orthogonales. Sur cette figure (9 à droite), on voit respectivement **une vue du dessus** appelée aussi, **une vue en plan** (projection sur un plan horizontal), **une vue de face** ou **élévation** (projection sur un plan frontal) et une **vue de profil** (projection sur un plan de profil).

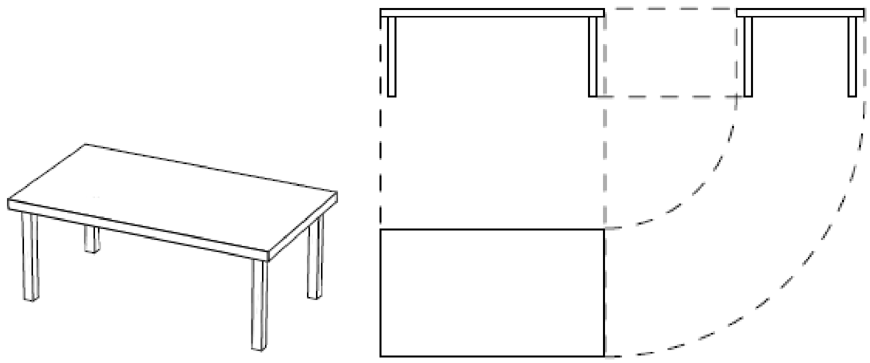


Figure 8 : La projection orthogonale d'une table

II.2.e. Avantage et inconvénient de la projection orthogonale :

Une projection orthogonale d'un objet en donne souvent une vue pauvre, voir méconnaissable. Comment par exemple reconnaitre une table dans la vue en plan de 8 à droite ? Parfois même les trois vues d'un objet ne permettent pas de le reconnaitre sans un grand effort d'imagination. A cet égard, une vue en perspective comme celle de 8 à gauche est beaucoup plus parlante.

En revanche, l'avantage d'une projection orthogonale est qu'elle reproduit en vraie grandeur tout ce qui se trouve dans des plans parallèles au plan de projection. Comme on réalise, en général trois projections, cela fait beaucoup de parties vues en vraie grandeur.

II.2.f. L'application des projections en architecture

En architecture, l'usage des différents types de projection et d'une grande utilité car il permet la représentation des bâtiments sous forme de plans, coupes et élévations ; cet ensemble de représentations graphiques est nécessaires à leur réalisation. Les systèmes de projection permettent également, de représenter et de visualiser les volumes architecturaux par le biais d'axonométries, de perspectives ou encore par le tracé des ombres.

Une des applications de la projection parallèle (cylindrique) oblique est le tracé de l'ombre des corps solides, les axonométries militaire et cavalière. D'un autre côté, le dessin de la perspective, est quant à lui, une projection centrale. Ce système de représentation est plus réaliste et très proche de la perception réelle de l'œil humain. Une perspective transcrit avec fidélité, l'image de l'objet architectural après sa concrétisation finale.
Les figures 9 donnent des exemples d'application de la projection dans la représentation architecturale.

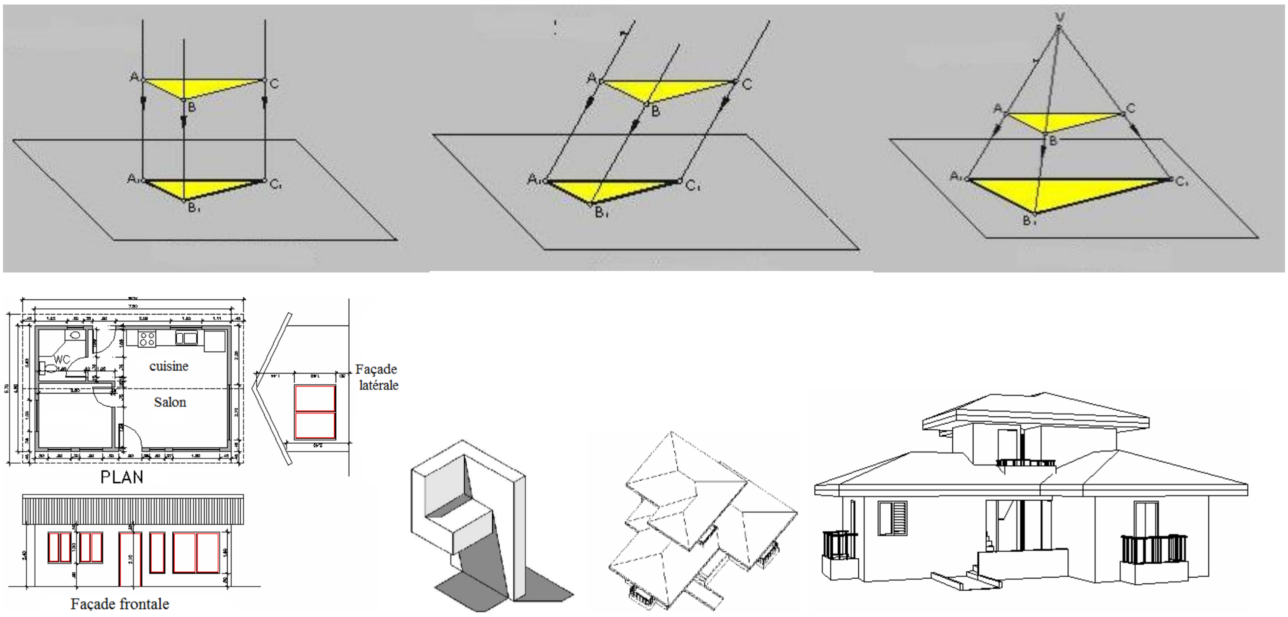


Figure 9 : Les applications directes des systèmes de projection en architecture

Par ailleurs, le système des trois projections orthogonales sert à représenter les objets à fabriquer à savoir des meubles, des pièces de machines, etc. Pour cette raison, le recours aux projections orthogonales par le biais du dessin technique en industrie, est incontournable.

II.3. <u>Les projections orthogonales dans l'histoire de l'architecture :</u>

Les bâtisseurs et architectes utilisent les projections orthogonales depuis des temps immémoriaux. Les figures si dessous représentent en coupe et en plan l'église Sainte Sophie à Constantinople (achevée en 537) (voir figure 10 à droite). La figure 10 à gauche représente en plan l'église San Vitale (achevée en 547) à Ravenne.

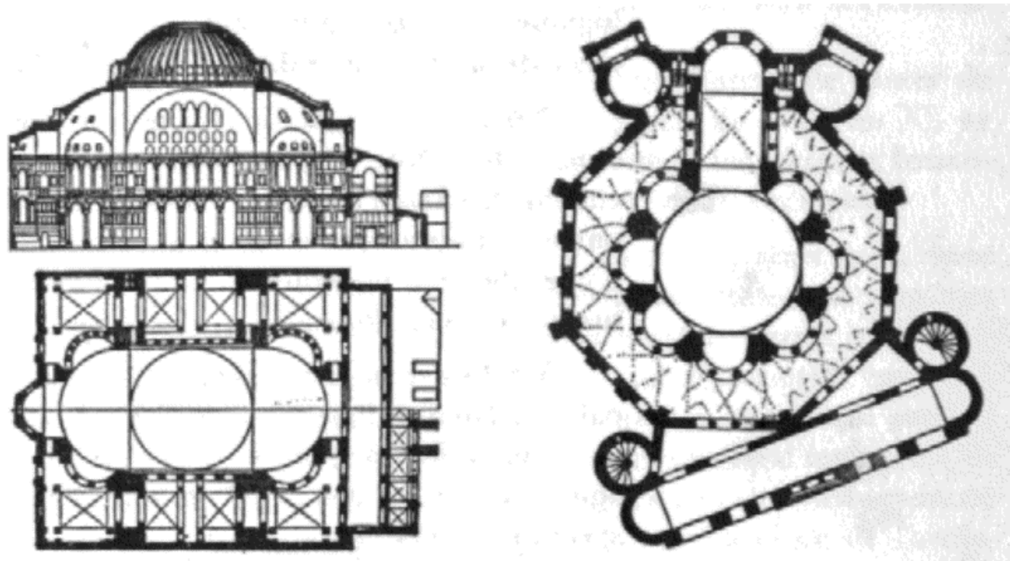
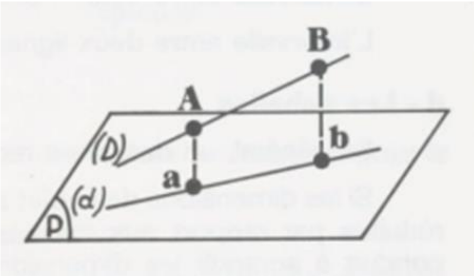


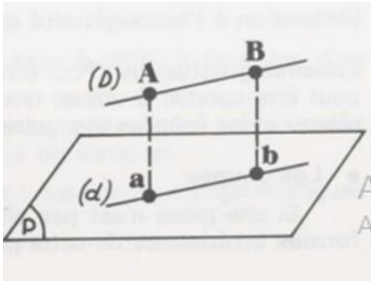
Figure 10 : Application de la projection orthogonale.

II.4. <u>**Théorèmes :**</u>

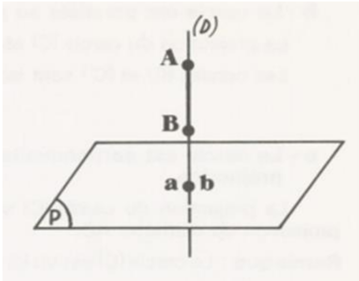


La projection orthogonale d'une droite oblique au plan de projection est une droite.

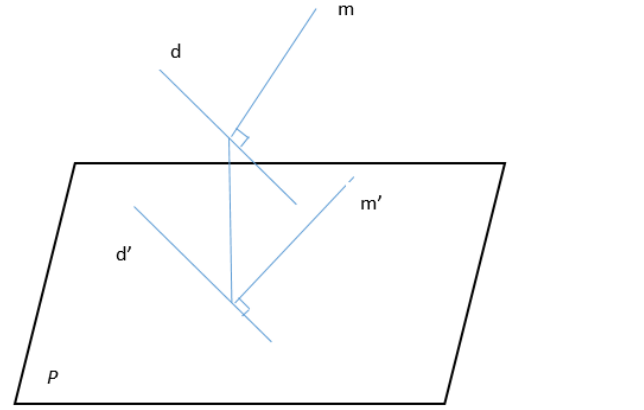
AB≠ ab



La projection orthogonale d'une droite parallèle au plan de projection est une droite / **AB = ab**



La projection orthogonale d'une droite perpendiculaire au plan de projection est un point.

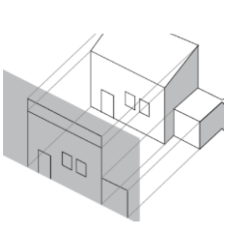
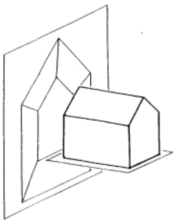


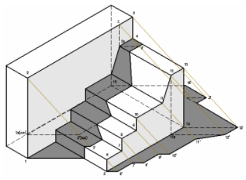
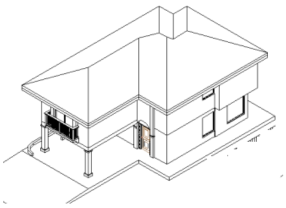
d' est la projection orthogonale de la droite **d** sur **P**.
m' est la projection orthogonale de la droite **m** sur **P**.

d ⊥ m, et **d // *P*** ⟶ **m'⊥ d'**

II.5. <u>**Exercice 1 :**</u>

Observer les dessins ci-dessous, puis remplir les vides par le type de projection approprié.

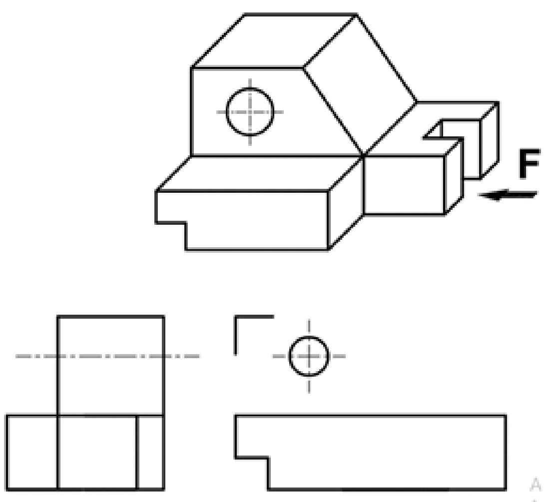



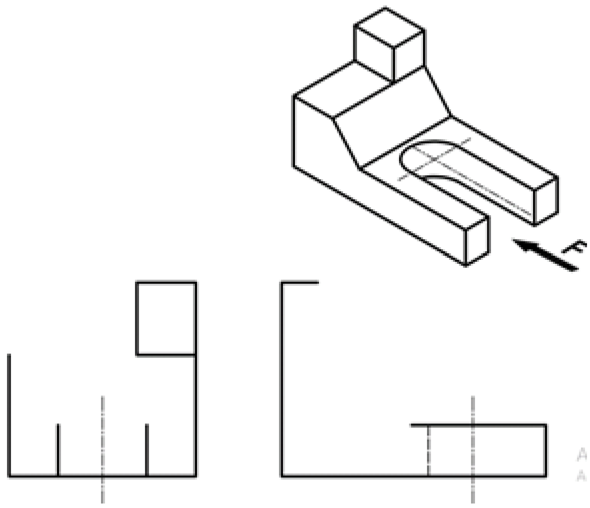



Projection …..…… Projection ………… Projection ………..… Projection ………..…Projection …………

II.6. **<u>Exercice 2 :</u>**

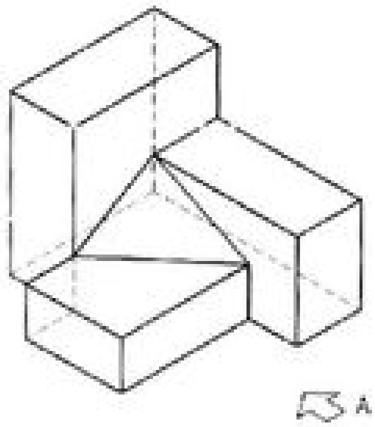
En se basant sur la volumétrie, compléter les projections orthogonales de l'objet ci-dessous. La flèche F donne la direction d'observation de la vue de face.





II.7.<u>Exercice 3 :</u>

En se basant sur la volumétrie, compléter les projections orthogonales de l'objet ci-dessous. La flèche A donne la direction d'observation de la vue de face.



III. Système de la double projection orthogonal (DPO) :

Introduction :

Dans les différents outils de représentation les plus utilisés par les architectes, nous trouvons tout d'abord les projections orthogonales ou géométrales qui regroupent les plans, les coupes et les élévations. Ce sont des projections sur deux plans – un plan horizontal et un plan vertical – de chaque point significatif selon une direction perpendiculaire à chaque plan de projection.

Ce type de représentation partielle ne permet une lecture complète de l'espace qu'en mettant en relation deux ou plusieurs projections ensemble. Ces projections permettent, lorsque les surfaces du volume sont orthogonales entre elles, et se trouvent dans un plan perpendiculaire ou parallèle ou plan de projection, de faire apparaître toutes les arêtes du volume en vraie grandeur et seront, donc directement mesurables sur le dessin.

III.1. Considérations générales :

Définition :

Le système de la double projection est composé de deux plans :
P_1 : le plan horizontal de projection
P_2 : le plan frontal de projection

$$\mathbf{P_1 \perp P_2}$$

$$\mathbf{P_1 \text{ X } P_2 = XX} \text{ (ligne de terre)}$$

L'épure : la représentation d'un objet ou une surface par ses projections.
Le plan **P_1** de projection sera rabattu sur le plan **P_2,** tandis que le plan **P_2** reste fixe.
Les vues géométrales :
Elles sont constituées par deux, trois ou quatre projections sur les plans de projections (tous perpendiculaires entre eux) :

$$\mathbf{P_1 \perp P_2 \perp P_3}$$

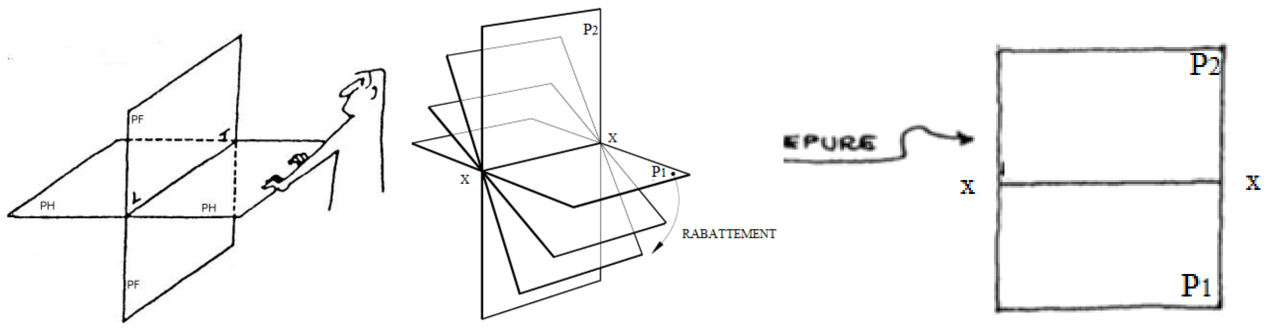


Figure 11 :Rabattement du plan horizontal sur le plan frontal

Pour obtenir les deux projections bidimensionnelles sur un même plan (la feuille de papier), et les faire ainsi coïncider, on fait tourner le plan horizontal (***P_1***) en choisissant comme axe de rotation la ligne de terre (*xx*) de façon à le rabattre sur le plan frontal (***P_2***).

Quelle que soit sa position dans l'espace, un objet tridimensionnel **(F)** à représenter se projette orthogonalement sur le plan horizontal (***P₁***) en une figure bidimensionnelle **(F₁)**, et sur le plan frontal (***P₂***) en une autre figure bidimensionnelle **(F₂)**.

(F₁) est appelée **projection horizontale** de **(F)**

(F₂) est appelée **projection frontale** de **(F)**

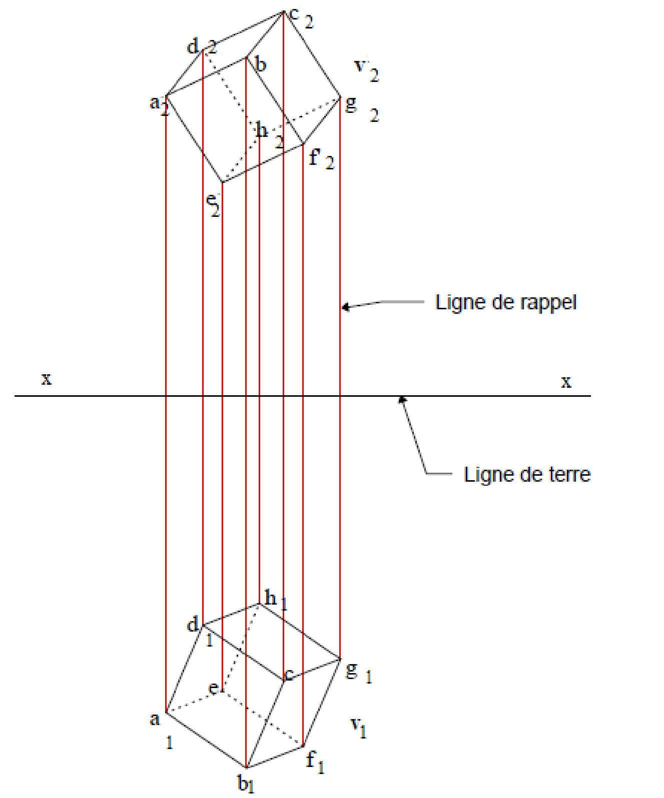


Figure 13 : Représentation graphique d'une épure

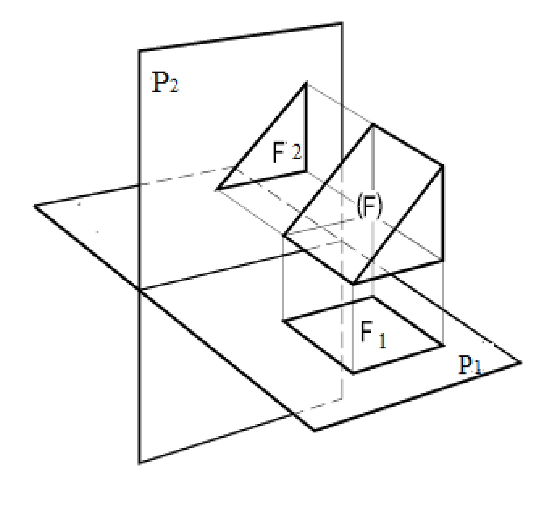


Figure 12 : L'épure d'un volume (F) dans le système de la DPO.

Pour faciliter la lecture d'une épure et reconstituer mentalement la forme de l'objet et sa position dans l'espace, on utilise des conventions de représentation :

- Les lignes vues sont dessinées en trait continu fort.
- Les lignes cachées en trait discontinu.
- Les lignes de rappel et les lignes de constructions en trait fin (figure 13).

ABCD ⊥ **P_1** et
ABCD // P_2

La projection de **ABCD** sur **P_1** donne un segment de droite // **xx**

La projection de **ABCD** sur **P_2** donne un rectangle de mêmes dimensions, c'est-à-dire que tous les segments de droites sont en vraie grandeur (VG) (voir figure 14).

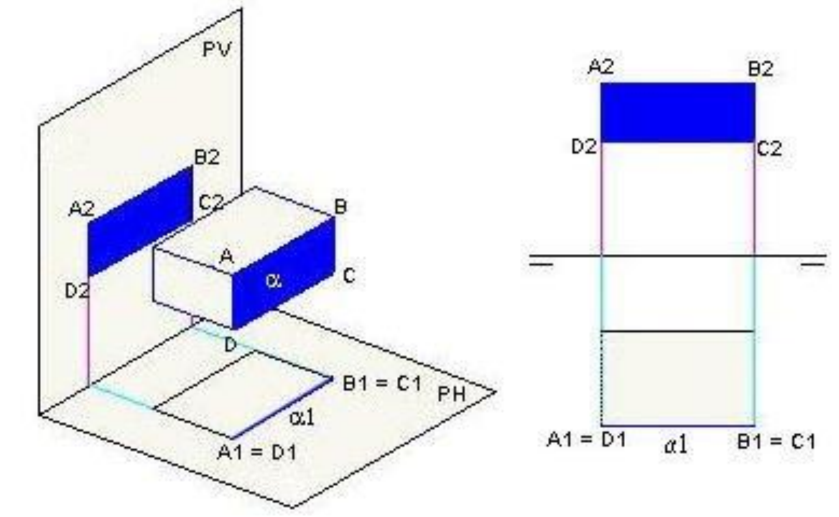


Figure 14 : Projection d'un plan parallèle à P_2

ABCD ⊥ **P_2** et
ABCD // P_1

La projection de **ABCD** sur **P_2** donne un segment de droite // **xx**

La projection de **ABCD** sur **P_1** donne un rectangle de mêmes dimensions, c'est-à-dire que tous les segments de droites sont en vraie grandeur (VG) (voir figure 15).

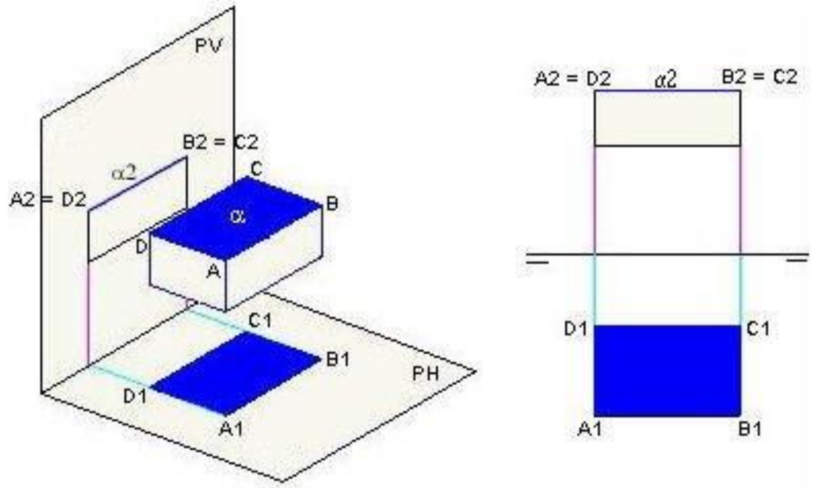


Figure 15 : Projection d'un plan parallèle à P_1

ABCD est un rectangle incliné.
AB // P_1 et **P_2**
CD // P_1 et **P_2**

La projection de **ABCD** sur **P_2** et sur **P_2** donne un rectangle qui n'a pas les mêmes dimensions que le rectangle **ABCD**.

Seuls les segments **AB** et **CD** seront en VG sur **P_1 et P_2**

les segments **AD** et **BC** ne seront pas en vraie grandeur (VG) ni sur **P_1** ni sur **P_2**. (voir figure 16).

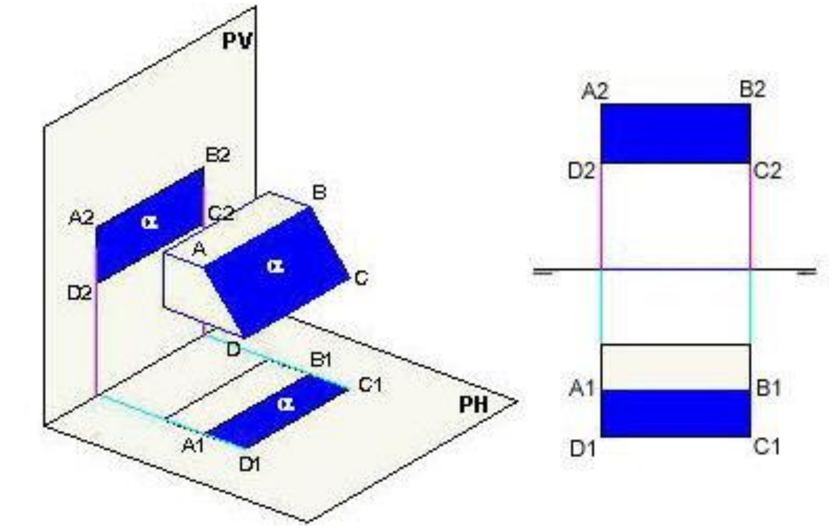


Figure 16 : Projection d'un plan oblique

ABCD est un rectangle incliné

. ABCD $\perp$ P_2

AB // P_2

CD // P_2

La projection de **ABCD** sur **P_1** donne un rectangle qui n'a pas les mêmes dimensions que le rectangle **ABCD**.

Seuls les segments **AD** et **BC** seront en VG sur **P_1 .**

La projection de **ABCD** sur **P_2** donne un segment de droite.

Les segments **AB** et **CD** seront en VG sur **P_2** (voir figure 17).

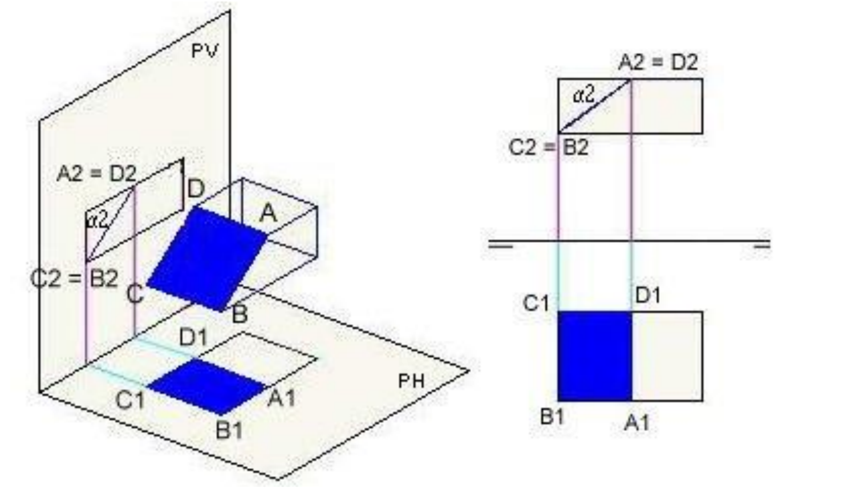


Figure 17 : Projection d'un plan oblique perpendiculaire à P_2

ABC est un triangle quelconque sans position particulière par rapport à **P_1** et **P_2**.

La projection de **ABC** sur **P_1** et sur **P_2** donne deux triangles n'ayant pas les mêmes dimensions que le triangle **ABC**, c'est-à-dire que tous les segments de droites ne seront pas en vraie grandeur (VG) ni sur **P_1** ni sur **P_2** (voir figure 18).

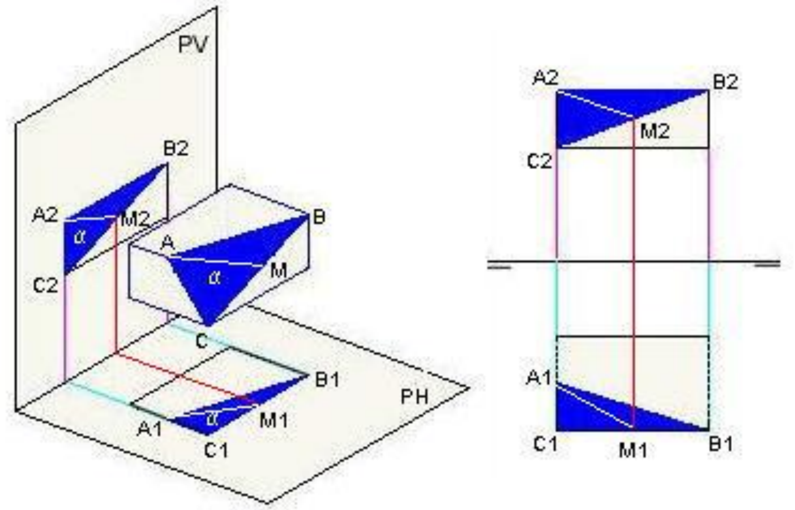


Figure 18 :Projection d'un plan quelconque

ABCD est un rectangle oblique

. ABCD $\perp$ P_1

AB // P_1

CD // P_1

La projection de **ABCD** sur **P_2** donne un rectangle qui n'a pas les mêmes dimensions que le rectangle **ABCD**.

les segments **AD** et **BC** seront en VG sur **P_2 .**

La projection de **ABCD** sur **P_1** donne un segment de droite.

les segments **AB** et **CD** seront en VG sur **P_1** (voir figure 19).

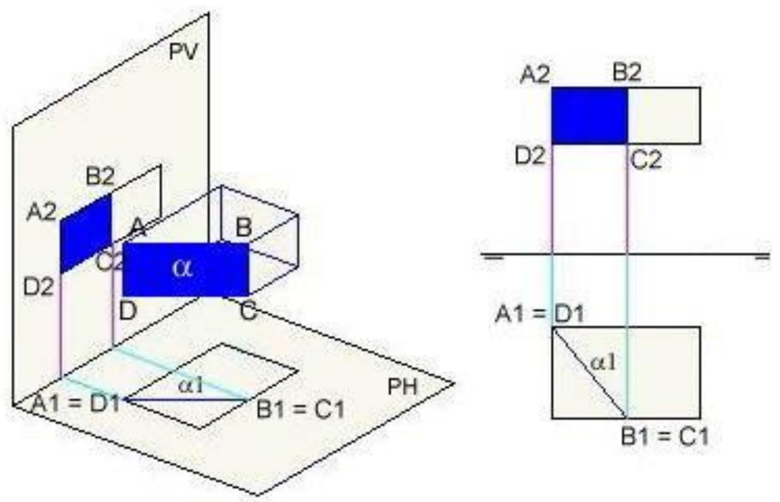


Figure 19 : Projection d'un plan oblique perpendiculaire à P_1

Dans le cas de géométries plus complexes, les projections sur le plan horizontal et frontal s'avèrent être insuffisantes (voir figure 20). Il faut, dans ce cas, recourir à la projection sur un troisième plan

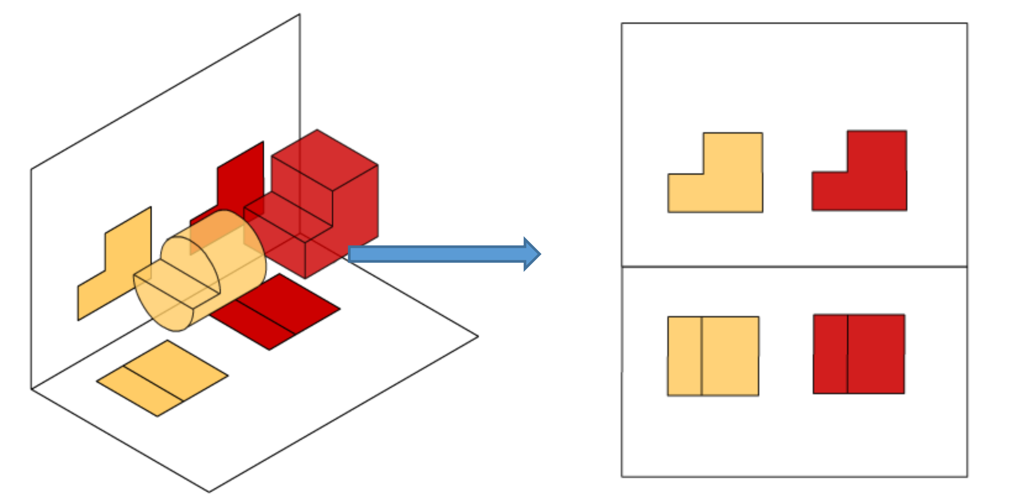


Figure 20 : Objets différents et vues identiques, d'où la nécessité d'un troisième plan de projection.

III.2. <u>La projection de profil :</u>

Afin d'avoir une idée la plus claire possible de l'objet à projeter, un troisième plan est indispensable. Nous faisons usage, ici, du plan de profil $\mathbf{P_3}$ dont la caractéristique principale est sa perpendicularité à $\mathbf{P_1}$ et à $\mathbf{P_2}$. Pour pouvoir travailler sur la feuille de papier, ce plan doit, lui aussi, être rabattu sur $\mathbf{P_2}$, (voir figure 21).

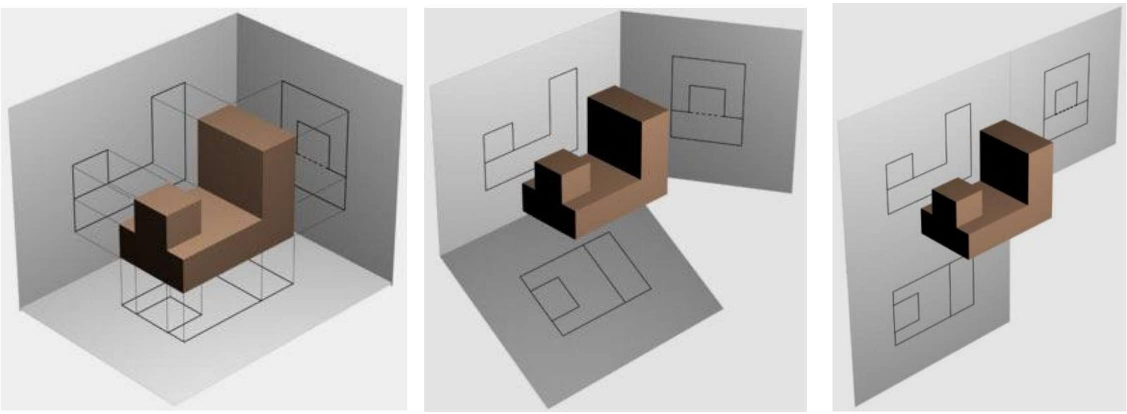


Figure 21 : Le recours à un troisième plan de projection .

Les vues géométrales sont : les élévations – la vue en plan – les vues de profil.
La vue supérieure du volume est dessinée en plan. (Vue supérieure de l'objet comme si vous étiez en avion = vue de dessus dessinée en projection sur le sol) (voir figure 22).

Il est très important de comprendre que pour chaque face projetée, c'est la face vue depuis l'observateur qui est projetée sur la surface de référence (voir figure 23).

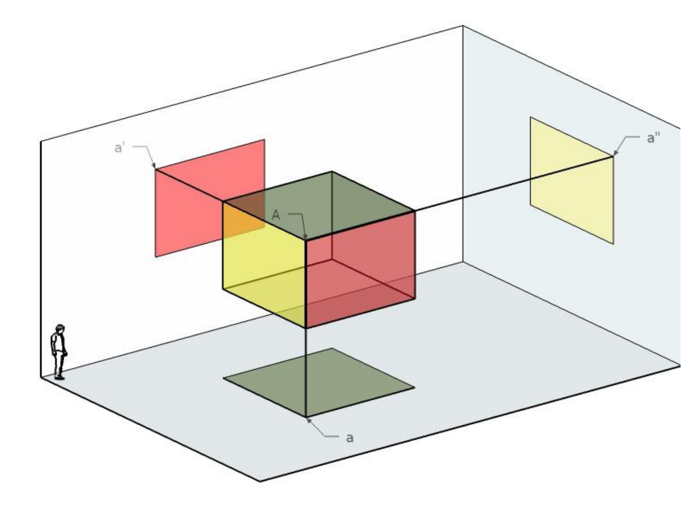


Figure 22 : Les vues géométrales

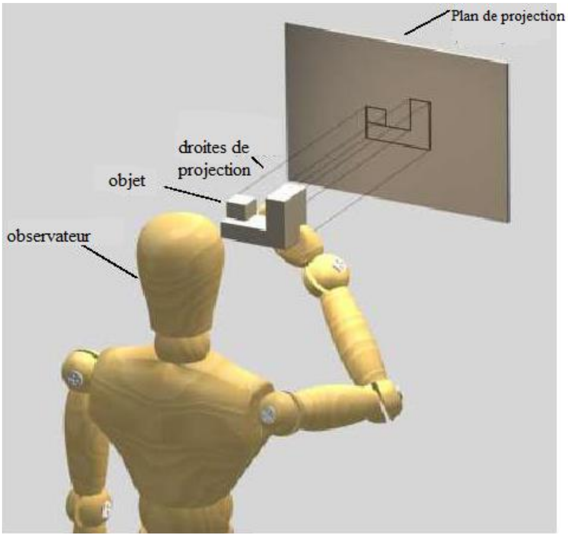


Figure 23 : Position de l'observateur

III.2.a. La projection de profil d'un point :

En plus de l'épure **(A_1, A_2)** que sont, les projections du point **A** respectivement sur les plans de projection **P_1** et **P_2,** la position du point A dans l'espace se définit, également par sa projection sur un troisième plan de projection **P_3** (voir figure 23)**.**

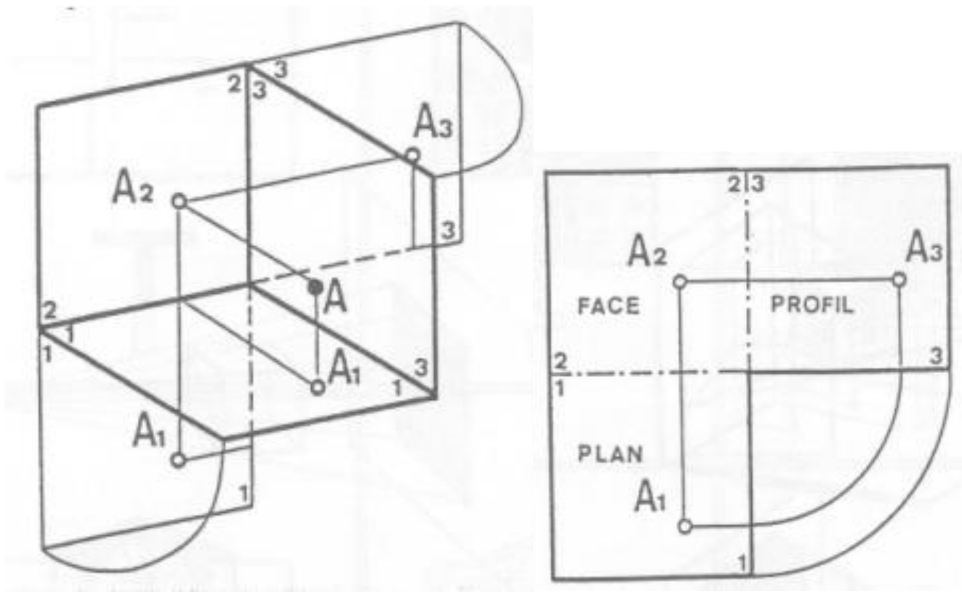


Figure 23 : L'ombre de profil d'un point

III.2.c. La projection de profil d'un volume :

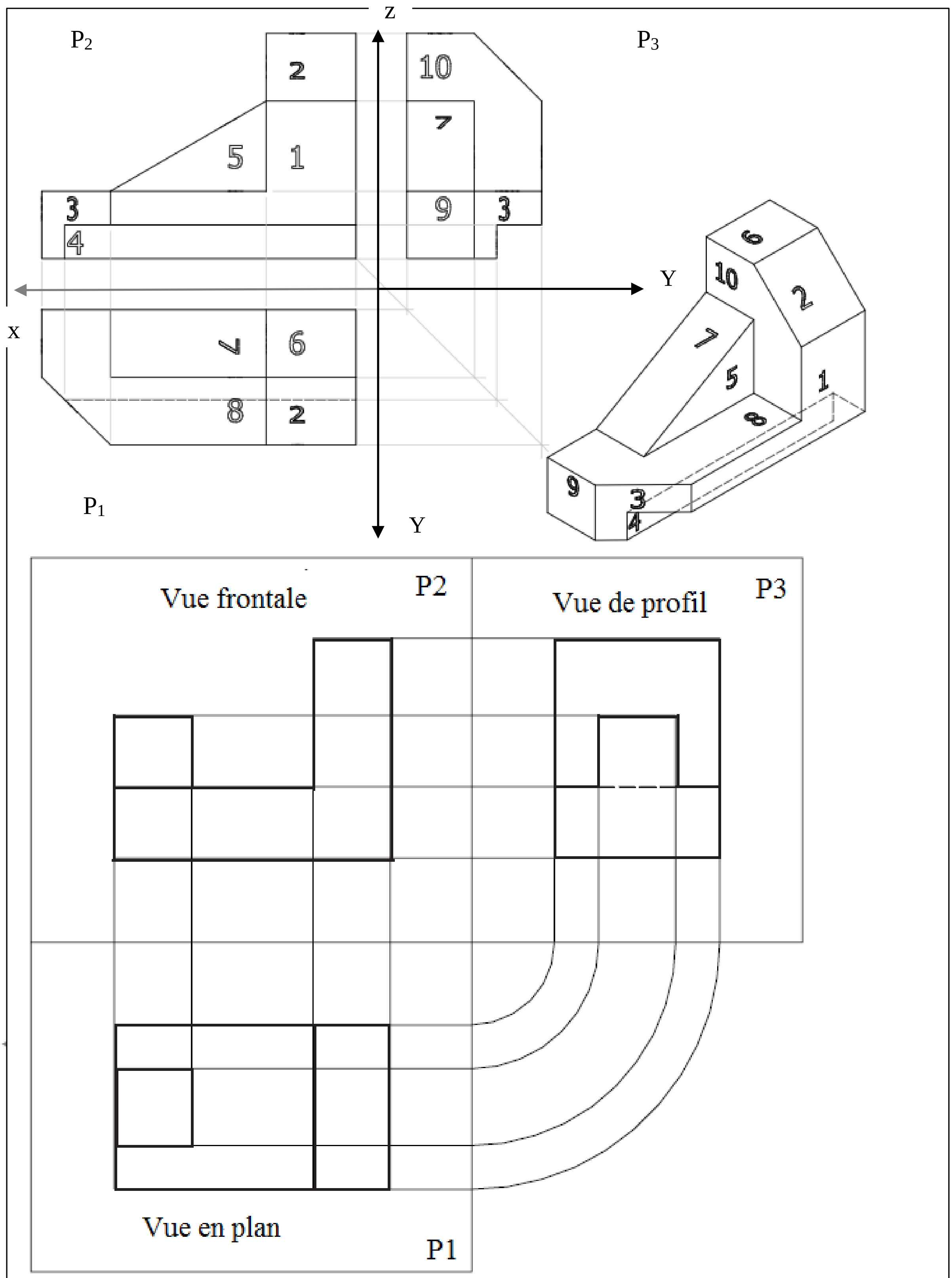


Figure 24 : Méthode de projection de profil d'un volume.

III.3. La lecture des vues :

La lecture d’une épure s’acquiert par l’expérience, le dessin par l’exercice.
Voir dans l’espace est <u>une conséquence</u> et non <u>un préalable</u> à l’apprentissage de la géométrie descriptive.
Chaque détail doit avoir sa projection sur chaque vue et toutes les vues sont nécessaires pour connaître l’objet (voir figure 25).

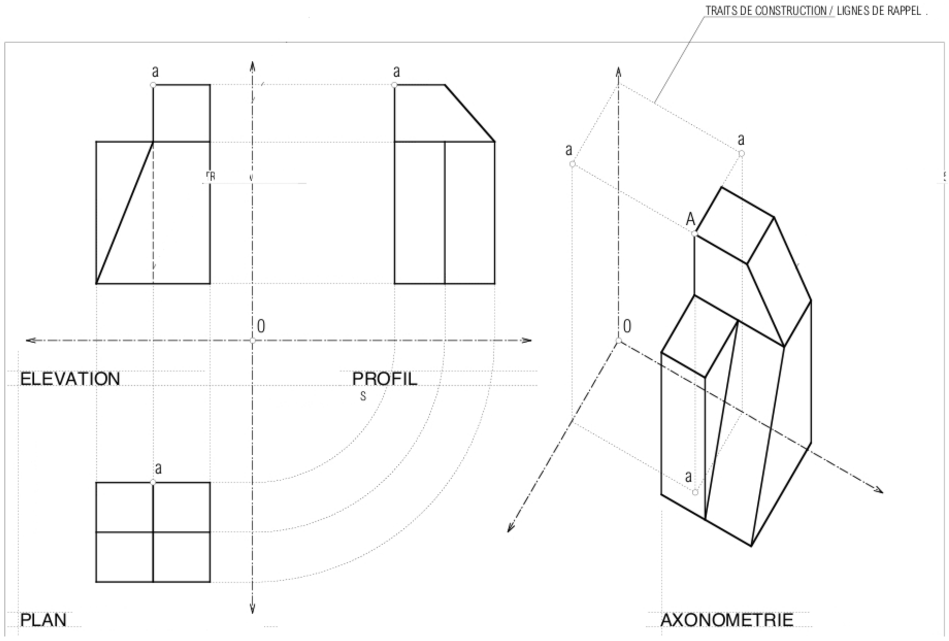
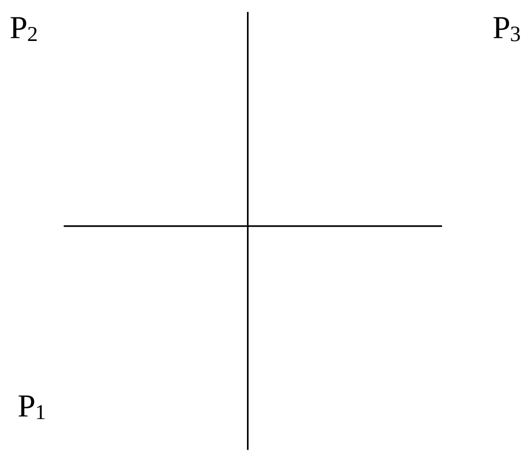
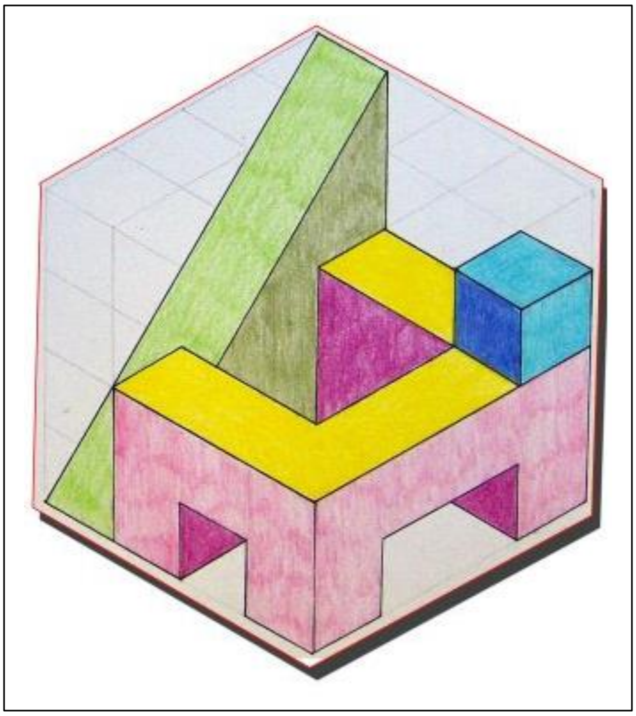


Figure 25 : Conventions de la représentation graphique des projections

III.4. Exercices :

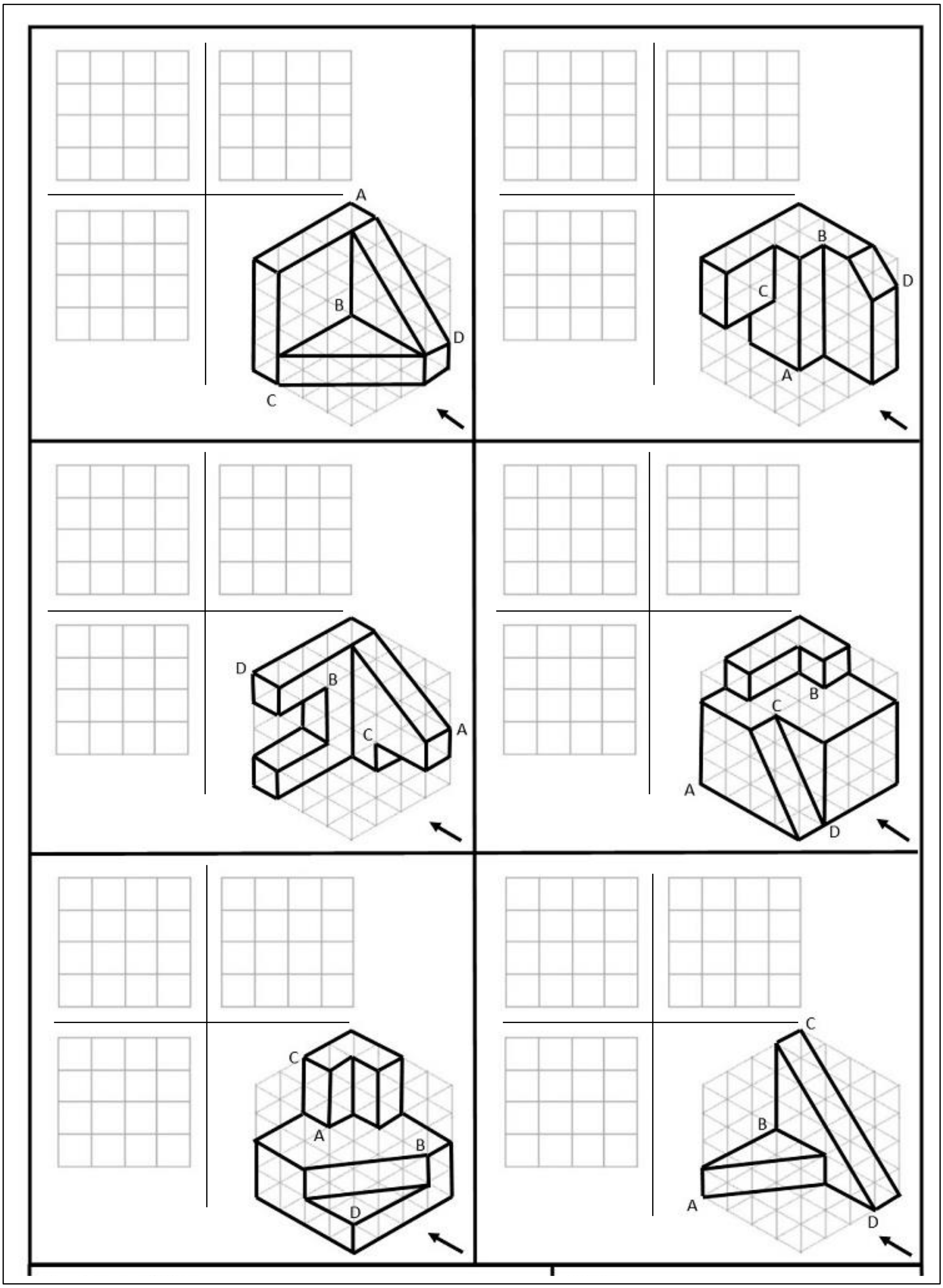
En utilisant les couleurs, réalisez les vues géométrales de l’objet ci-dessous.





III.5. <u>Exercice 2 :</u>

1) Projeter le volume ci-contre sur P_1, P_2, P_3.
2) Déterminer : A_1, A_2, A_3 ; B_1, B_2, B_3 ; C_1, C_2, C_3 ; D_1, D_2, D_3
3) Utiliser les couleurs pour montrer les surfaces projetées sur chaque plan de projection.



IV. La représentation du point

IV.1. Définition :

Un point de l'espace est figuré sur une épure par ses deux projections orthogonales sur les deux plans de projections P_1 et P_2. Ces deux projections sont situées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre appelée **ligne de rappel**.

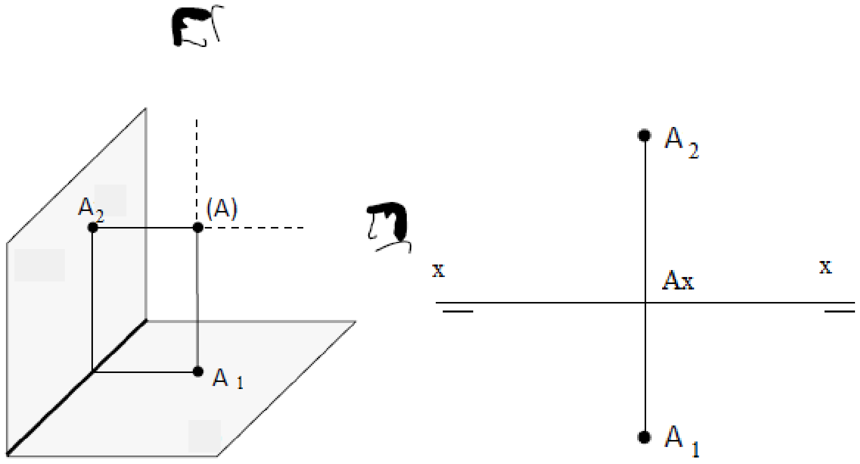


Figure 26 : Projection de point A et Epure du point A

A_1 est la projection horizontale de **A**
A_2 est la projection frontale de **A**
On appelle le couple **(A_1, A_2)** l'épure du point **A**. et on note : **A (A_1, A_2).**
La droite **(A_1A_2)** est la ligne de rappel de **A** (voir figure 26).

IV.2. Les quatre quadrants (dièdres) :

Les plans de projection P_1 et P_2 divisent l'espace en quatre quadrants (voir figure 27).

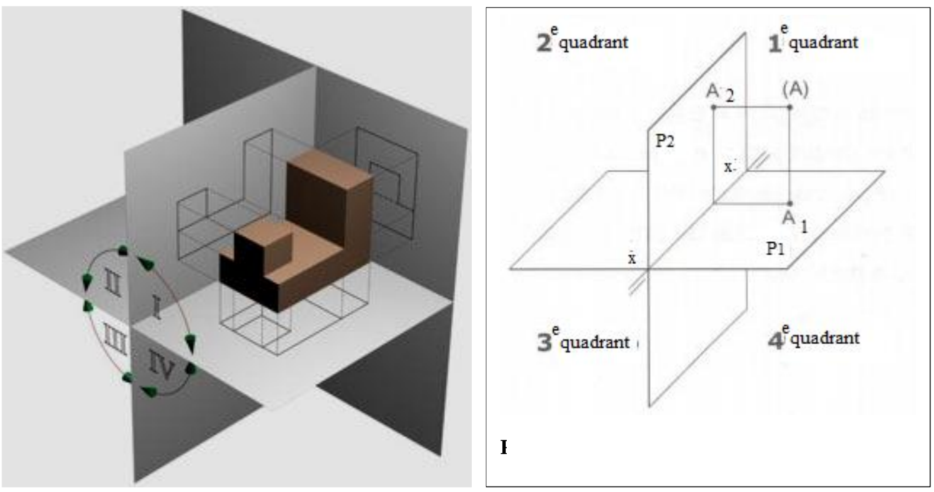


Figure 27 : L'espace est divisé en quatre quadrants.

IV.3.Épure du point (Côte, éloignement et abscisse) :

Définition :

On appelle **éloignement** d'un point la distance de ce point au plan frontal de projection.

Eloignement de (A) = (AP_2) = (A_1A_X).

On appelle **côte** d'un point la distance de ce point au plan horizontal de projection.

Côte (A) = (AP_1) = (A_2A_X) (voir figure 28).

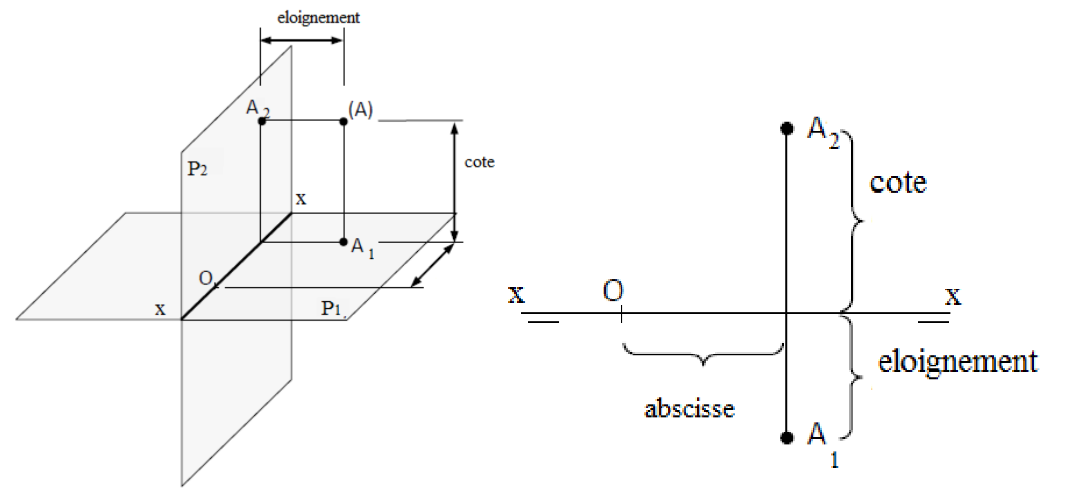


Figure 28 : Les coordonnées d'un point et L'épure correspondante dans le sustème de la DPO

Selon sa situation par rapport aux quatre quadrants, un point peut avoir, soient des valeurs de coordonnées positives ou négatives (voir figure 29).

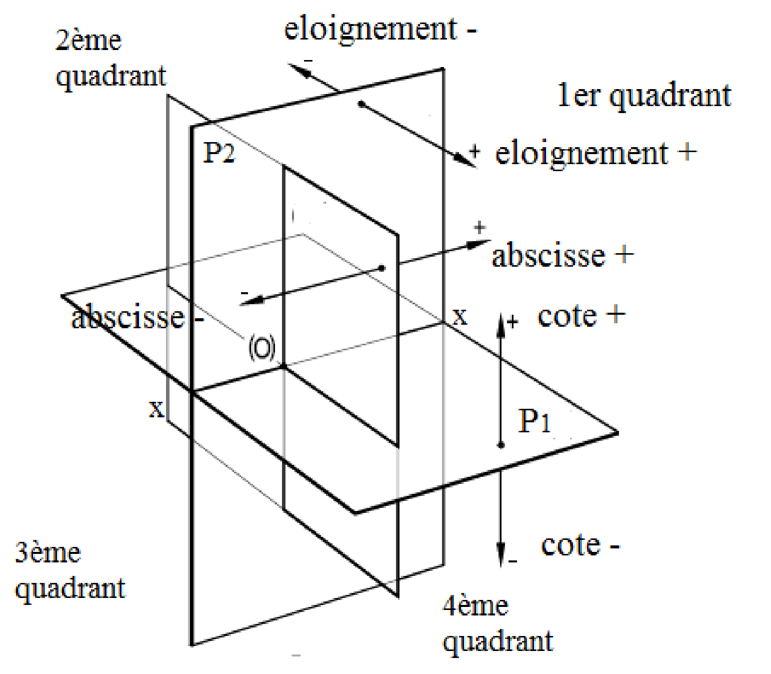


Figure 29 : Nature des coordonnées d'un point dans l'espace

L'éloignement d'un point est considéré comme positif si ce point est situé en avant du plan frontal (1er et 4ème dièdre), il est négatif si ce point est situé en arrière du plan frontal (2ème et 3ème quadrant).

La cote d'un point est considérée comme positive si ce point est situé au-dessus du plan horizontal (1er et 2ème dièdre), elle est négative si le point est situé au-dessous du plan horizontal (3ème et 4ème quadrant) (voir tableau 1).

Tableau 1 : Signes des coordonnées selon la situation du point par rapport aux quatre quadrants

Quadrant	**1er quadrant**	**2ème quadrant**	**3ème quadrant**	**4ème quadrant**
Eloignement	+	-	-	+
Côte	+	+	-	-

Les figures 30 présentent les points (A), (B), (C) et (D), situés respectivement dans les premier, deuxième, troisième et quatrième quadrants, vus dans l'espace et en épure.

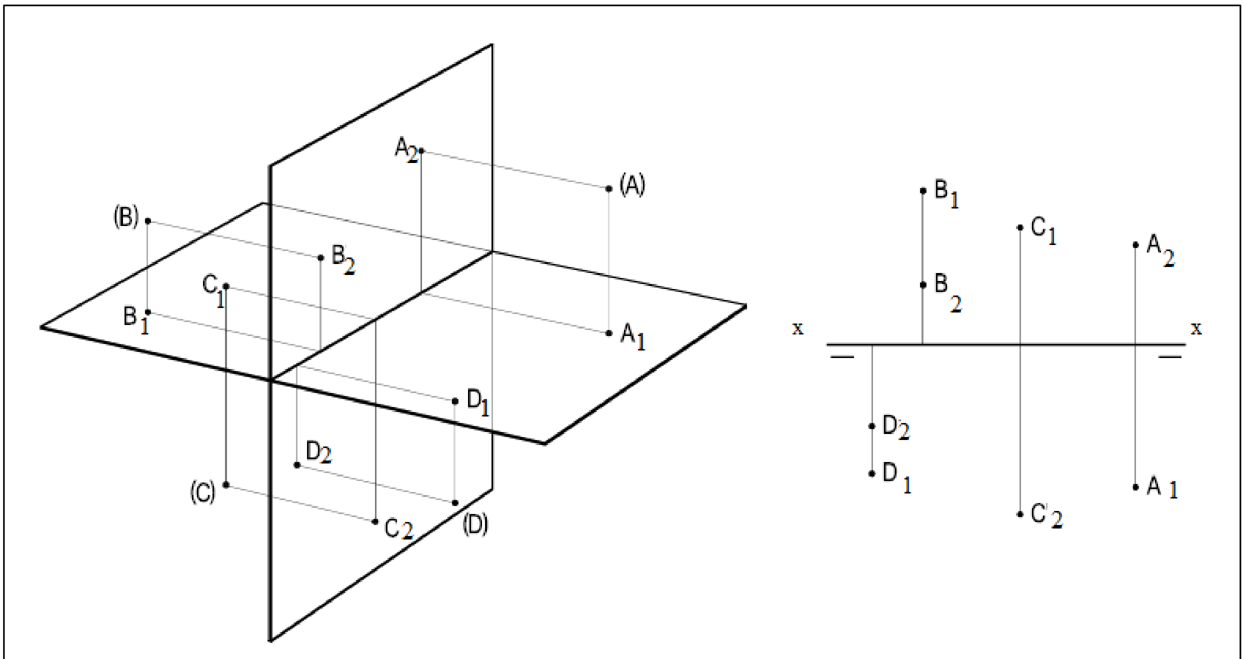


Figure 30 : Epures des points situés chacun dans un quadrant de l'espace

IV.4.<u>Les points remarquables :</u>

Les points remarquables se définissent comme étant des points qui présentent des positions particulières au sein du système de la double projection orthogonale. Les figures suivantes montrent les points **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)** et **(E)**, possèdent des positions spéciales : les deux premiers appartiennent au plan vertical de projection ***P₂***; les deux suivants sont situés sur le plan horizontal de projection ***P₁***, tandis que et le dernier apparient à la ligne de terre ***(xx)*** voir figure 31)**.**

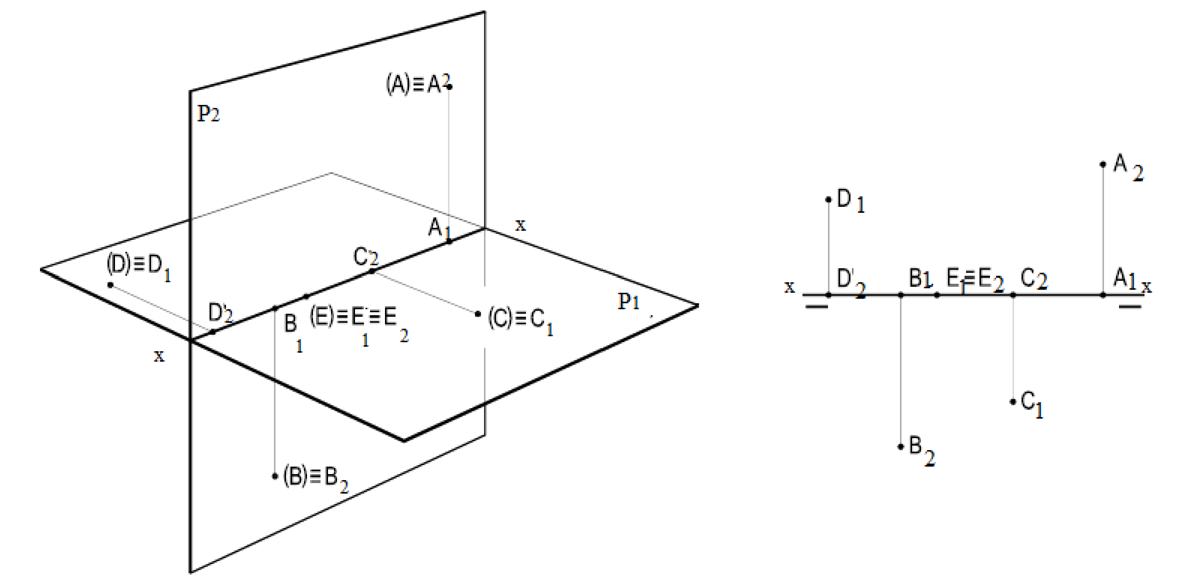


Figure 31 : Les points remarquables dans l'espace et sur l'épure

IV.5. <u>Les plans bissecteurs :</u>

Les quadrants formés par les plans de projection admettent deux plans bissecteurs.

- Le 1er plan bissecteur divise le 1er et le 3ème quadrant.
- Le 2ème plan bissecteur, traversant le 2ème et le 4ème quadrant.

Ces deux plans bissecteurs sont perpendiculaires entre eux (voir figure 32).

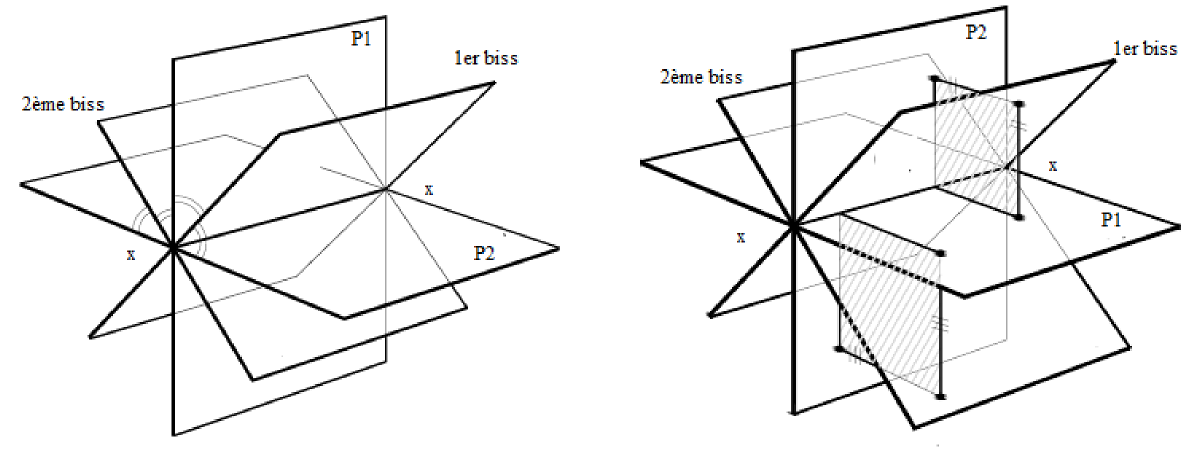


Figure 32 : Propriétés des plans bissecteurs

Les points appartenant aux plans bissecteurs seront équidistants par rapport aux plans de projection P_1 et P_2.

Chaque point appartenant au **1er bissecteur** a une côte et un éloignement égaux, et donc, présente, en épure, des projections symétriques par rapport à la ligne de terre (voir figure 33 à gauche).

En revanche, tout point appartenant au **2ème bissecteur,** a une côte et un éloignement de même valeur absolue, mais avec des signes contraires, de ce fait, en épure, leurs projections horizontale et frontale coïncident sur l'épure, tels que les points **(C)** et **(D)** (voir figure 33 à droite).

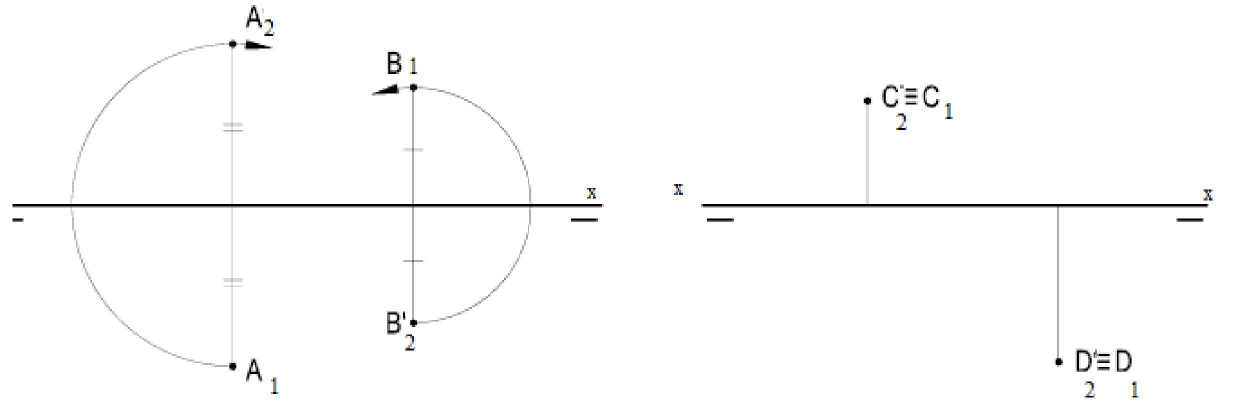


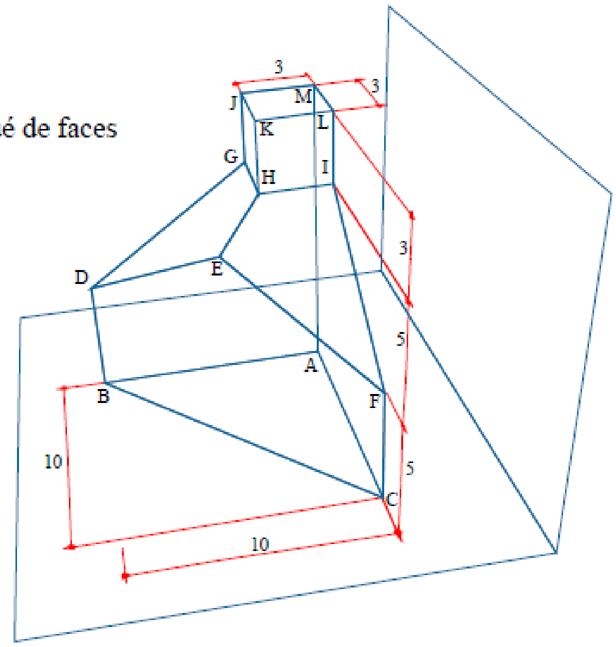
Figure 33 : Epure des point appartenant aux plans bissecteurs

IV.6.Exercice 1 :

L'origine est au centre de la feuille A4 verticale.
Les unités sont exprimées en centimètres.

Soit le volume ci-contre situé dans le premier dièdre et constitué de faces opaques. On donne A (4 ; -5 ; 0).

1. Représenter l'épure de ce volume.
2. Quelles sont les particularités des droites BC, BD, GH, HI, GD, IF ?



IV.7. <u>Exercice 2 :</u>

L'origine est au centre de la feuille A4 horizontale.
Les unités sont exprimées en centimètres.

1. Placer les points suivants sur l'épure :
A(3;-10;3), B(7;-10;3), C(7;-10;7), D(3;-10;7), E(5;-6;1), F(9;-6 ;5), G(5;-6 ;9), H(1;-6;5).

2. L'objet à représenter est délimité par deux quadrilatères ABCD et EFGH et huit triangles : ABE, BCF, CDG, DAH, EFB, FGC, GHD et HEA. Réaliser une vue de profil de l'objet.

3. Réaliser un croquis de l'objet.

IV.8. <u>Exercice 3 :</u>

L'origine du repère se trouve à 8 cm au-dessous du centre de la feuille A3 verticale.
<u>Toutes les coordonnés sont exprimées en millimètres.</u>

Soit un cube ABCDEFGH. ABCD est une face du cube et AE est une arête.

On donne : A (95 ; -2 ; 159), B (49 ; 87 ; 183), D (62 ; -43 ; 247), E (10 ; -33 ; 112)

1. Construire le cube ABCDEFGH.
2. Construire les traces du cube sur le plan frontal de projection.
3. Ponctuer le cube en tenant compte de ses traces. Le plan frontal est supposé opaque.

IV.9. <u>Exercice 4 :</u>

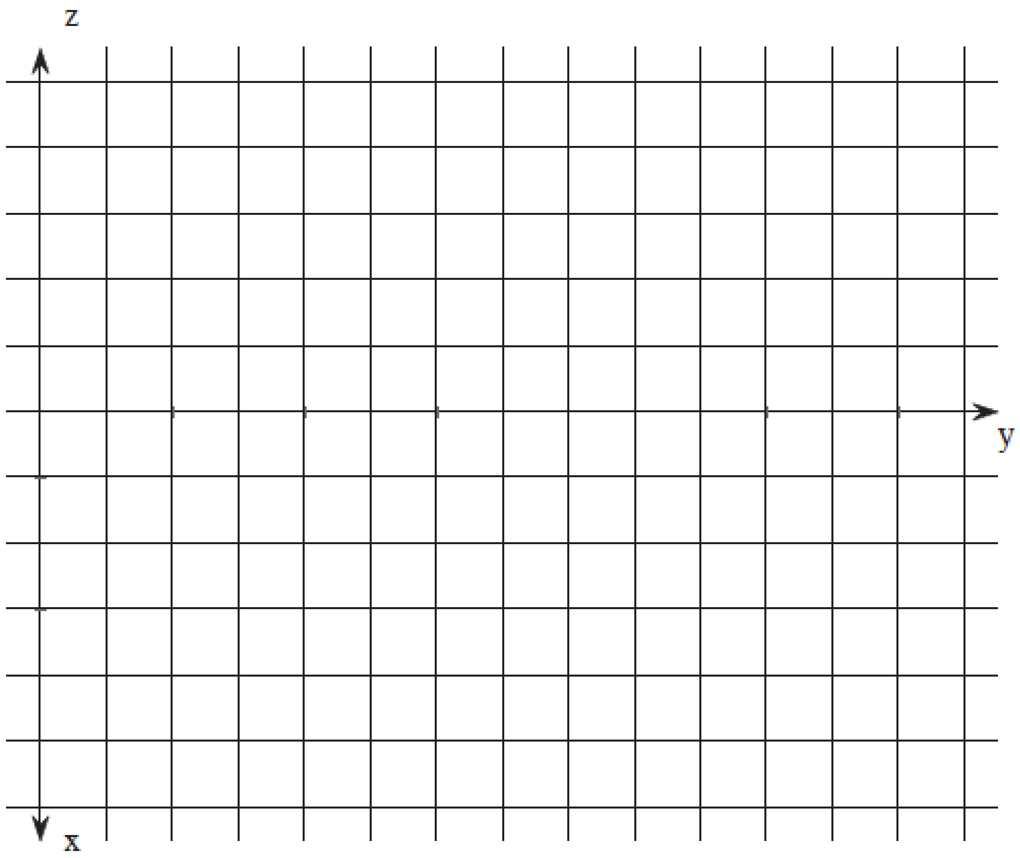
L'origine est au centre de la feuille A4 verticale.

Soit un tétraèdre ABCD opaque traversé par 3 segments de droites LM, NO et PQ.
On donne les points suivants : A(12 ; -1 ; 4), B(3 ; -6 ; 4), C(4 ; 6 ; 4), D(6 ; 0 ; 11)
L(6 ; 2 ; 2), M(6 ; 2 ; 13), N(14 ; -2 ; 5), O(1 ; -2 ; 5).

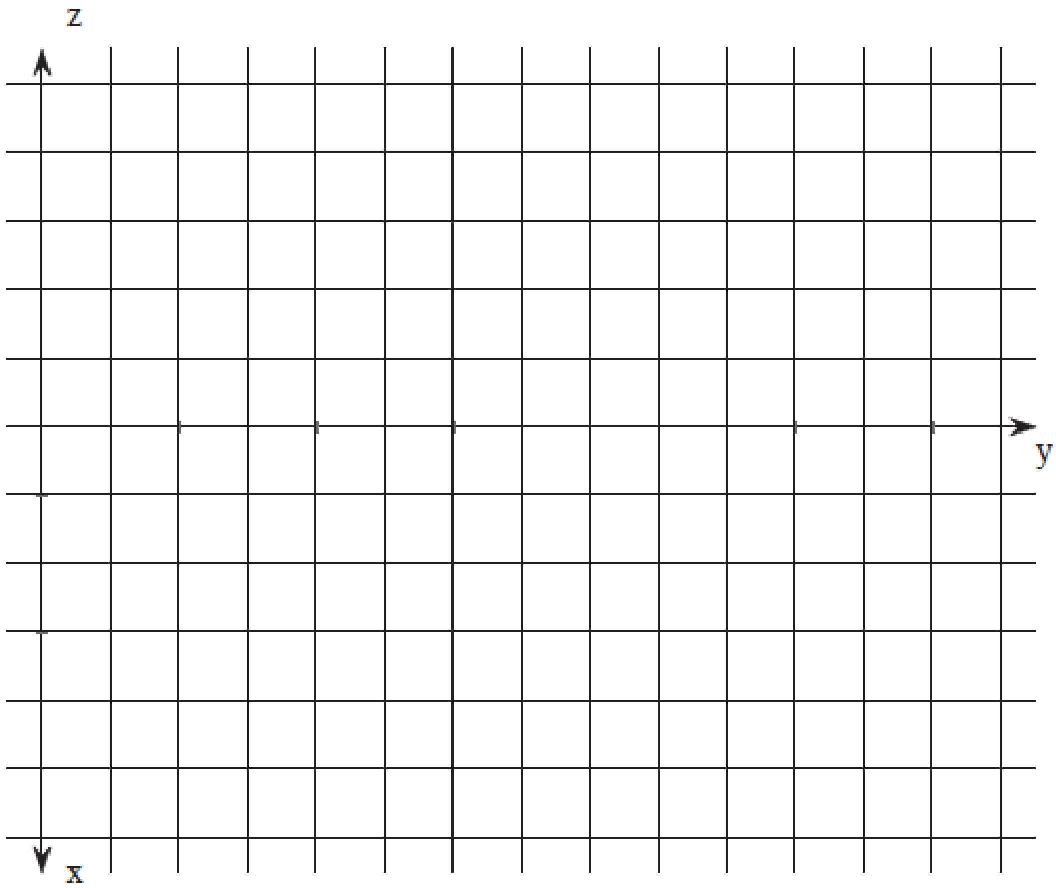
1. Trouver les intersections des segments LM et NO avec le tétraèdre.
2. Représenter l'ensemble du tétraèdre et des parties de segments extérieures au volume.

IV.10. <u>Exercice 5 :</u>

1)- Construire les 2 projections du triangle *ABC* dont le côté [*AB*] est horizontal, [*BC*] de profil et [*AC*] frontal.
On donne *A*(1,5 ; 10 ; 4) , *B*(5 ; 6,5 ; ?) et *C*(? ; ? ; 2).

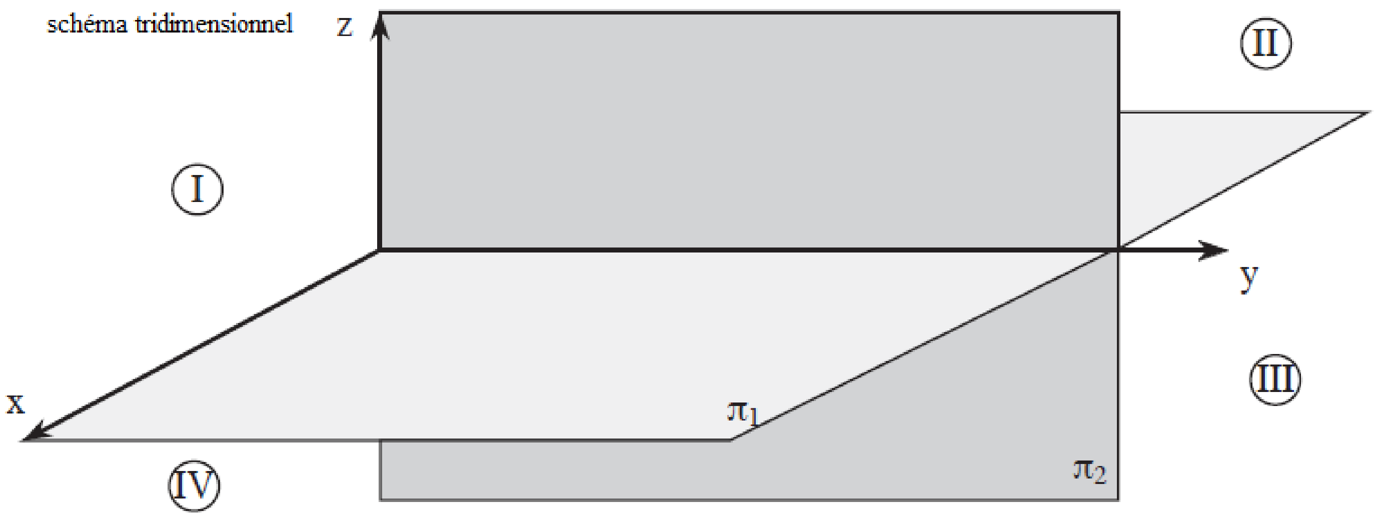


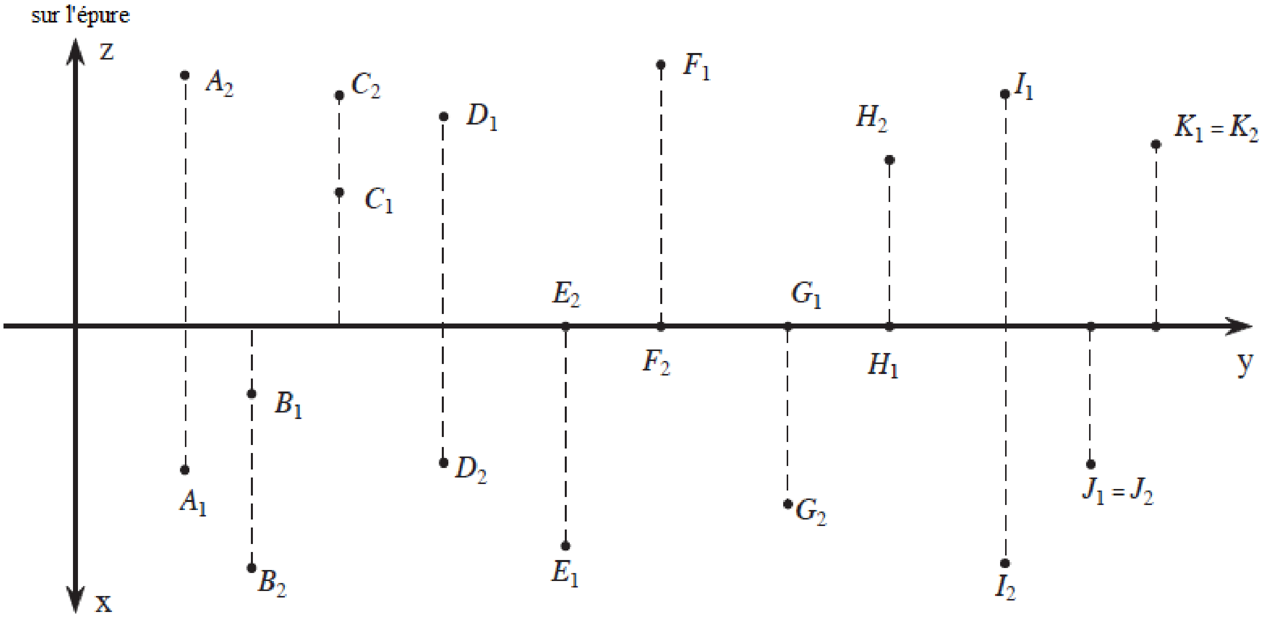
2)- Construire les 2 projections du triangle *ABC* dont le sommet *A* est situé sur l’axe des y, [*BC*] de bout. On donne *A*(? ; 10 ; ?) , *B*(2 ; 4 ; 5) et *C*(7 ; ? ; ?).



IV.11. Exercice 5 :

On considère les 2 plans P_1 et P_2. Ils partagent l'espace en 4 quadrants.
Placer approximativement les points : A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, dans le schéma tridimensionnel, puis déduire le quadrant dans lequel ils sont situés.





V. Représentation de la droite :

V.1. Définition :

Une droite est déterminée par deux points distincts.
Pour projeter une droite, il suffit de connaître les projections de deux points appartenant à cette droite.
La projection d'une droite sur un plan est une droite.
C'est la projection de tous les points de la droite sur le plan.
Lorsque la droite est perpendiculaire au plan de projection sa projection se réduit à un point (voir figure 34).

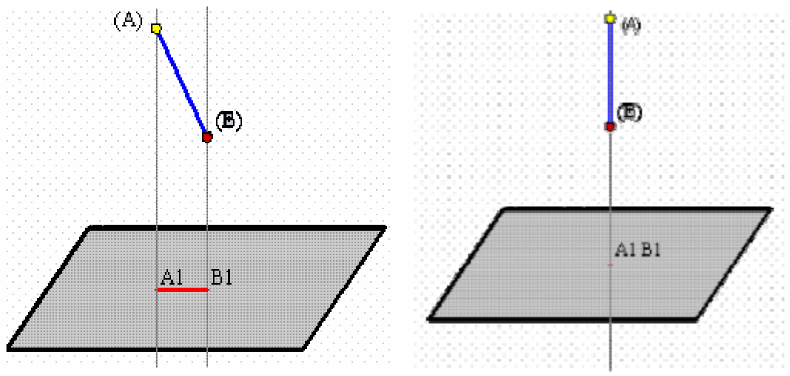


Figure 34 : La droite dans l'espace

V.2. L'épure de la droite

Considérons une droite quelconque **(r).**
La projection orthogonale de la droite **(r)** sur $\mathbf{P_1}$ et $\mathbf{P_2}$ donne respectivement $\mathbf{r_1}$ et $\mathbf{r_2}$ et on note :

$$\mathbf{r\ (r_1, r_2)}$$

L'épure de la droite **r** $\mathbf{(r_1, r_2)}$ est obtenue par les tracés des plans de projection **(γ)** et **(ϕ)**, contenant la droite **(r)** et sont respectivement perpendiculaires à $\mathbf{P_1}$ et $\mathbf{P_2}$ (voir figure 35).
D'où :

$$\mathbf{P_1 \ X\ (\gamma) = r_1}$$
$$\mathbf{P_2 \ X\ (\phi) = r_2}$$

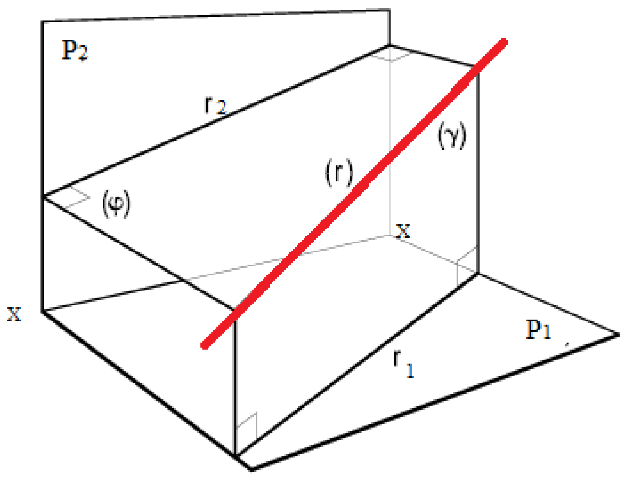


Figure 35 : Projection de la droite dans le système de la DPO

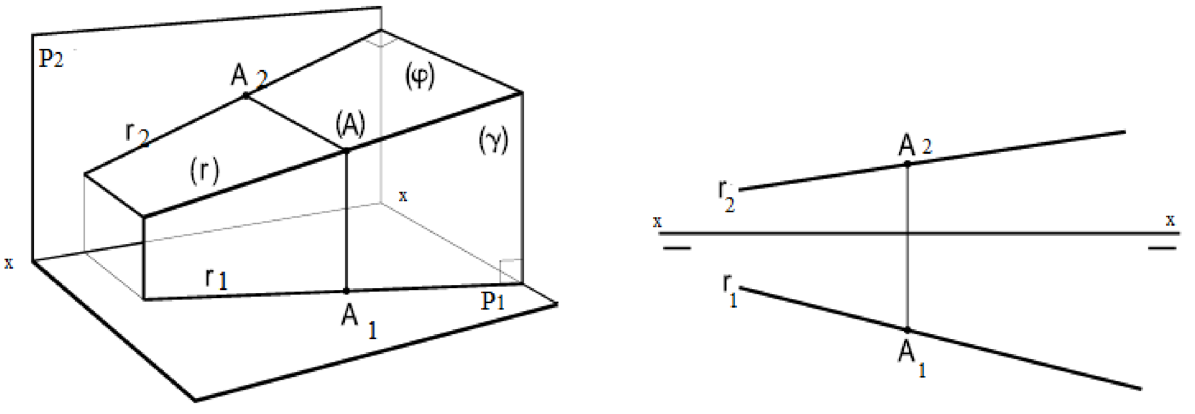
V.3. <u>Appartenance d'un point à une droite</u>

Quand un point appartient à une droite, ses projections orthogonales (horizontale et frontale), appartiennent respectivement aux projections orthogonales (horizontale et frontale) de cette droite.

<u>Exemple</u> : Soit **(r)** et **(A)** une droite et un point quelconques /

$$(A) \in (r)$$

$$(A) \in (r) \Rightarrow \begin{cases} A_1 \in r_1 \\ A_2 \in r_2 \end{cases}$$



Dans l'espace

Sur l'épure

Figure 36 : Condition d'appartenance d'un point à une droite

V.4. <u>Positions relatives de deux droites</u>

Dans l'espace, deux droites peuvent être : Parallèles concourantes ou non coplanaires.

V.4.a. <u>Droites parallèles :</u>

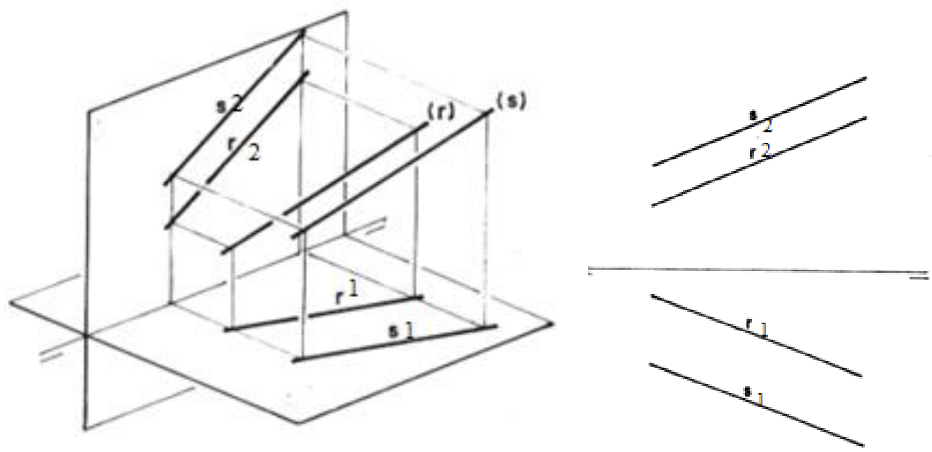


Figure 37 : Les droites parallèles

$$r \,//\, s \Rightarrow \begin{cases} r_1 \,//\, s_1 \\ r_2 \,//\, s_2 \end{cases}$$

V.4.b. Droites sécantes :

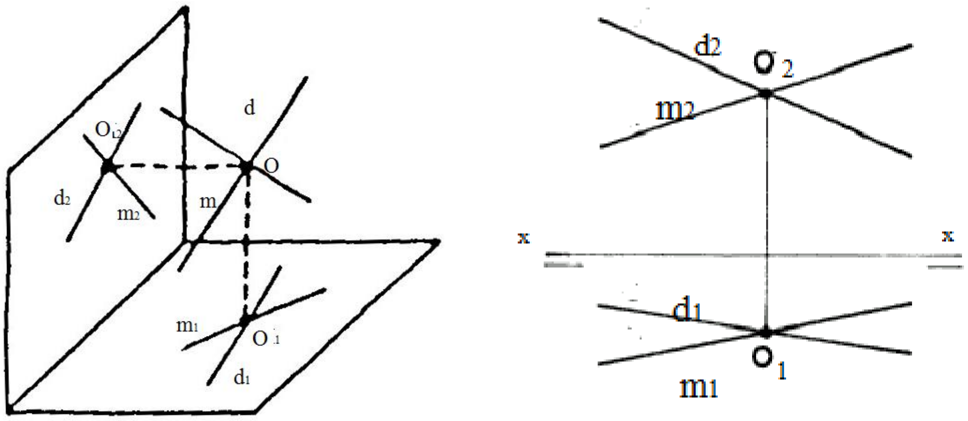


Figure 38 : Les droites concourantes (sécantes)

d x m = O $\Rightarrow$ **$O_1O_2 \perp$ XX**

V.4.c. Droites non coplanaires :

$O'_1O''_2$ n'est pas perpendiculaire à XX

O' et O'' sont deux points différents

d ∩ m = {Ø}

Les droites **t** et **s** sont **non-coplanaires**

Eloignement C = Eloignement D

Côte C ≠ côte D

Donc : Les points **C** et **D** sont différents (pas de point d'intersection entre les droites **t** et **s).**

Eloignement A ≠ Eloignement B

Côte A = côte B

Donc : Les points **A** et **B** sont différents. (Pas de point d'intersection entre les droites **t** et **s)** (voir figure 39).

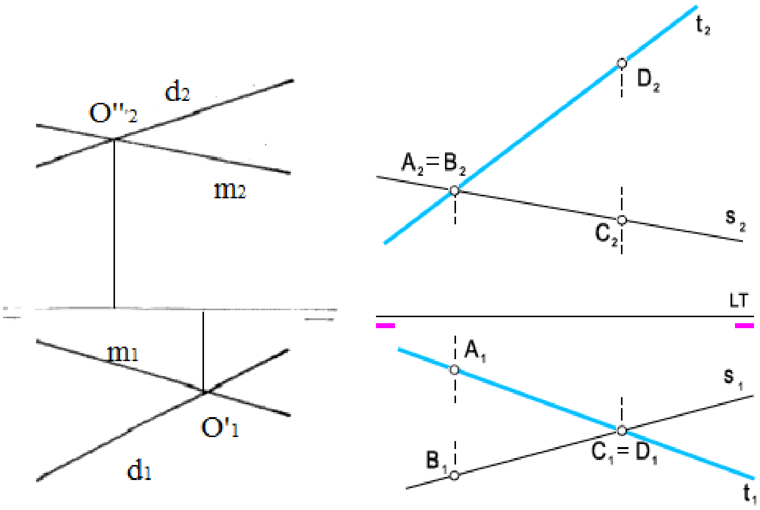


Figure 39 : Epures des Droites non coplanaires

V.5. Les traces de la droite :

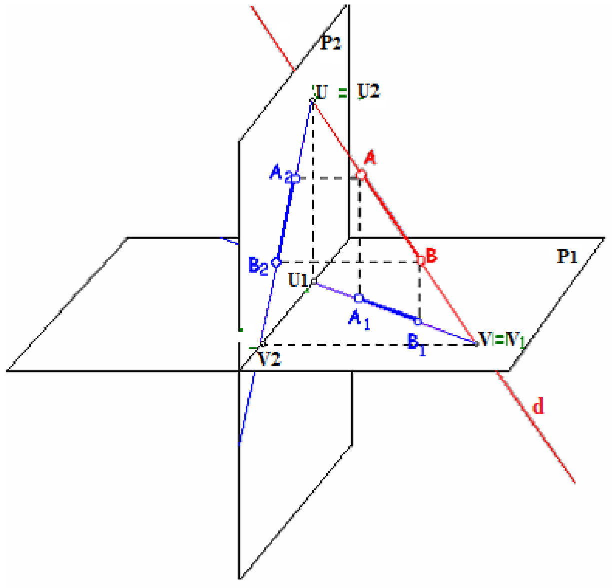
Une droite est toujours considérée comme illimitée, elle percera les plans de projections. On appelle traces d'une droite, les points de percée de la droite dans les plans de projection. **V (V_1, V_2)** est <u>la trace horizontale</u> dans le plan horizontal de projection.

$$\mathbf{d \times P_1 = V}$$

U (U_1, U_2) est <u>la trace frontale</u> dans le plan frontal de projection.

$$\mathbf{d \times P_2 = U}$$

Pour déterminer les traces d'une droite, il suffit de prolonger la droite pour qu'elle rencontre les plans de projection. On obtient ainsi le point de percée de la droite dans les plans de projection (voir figure 40).



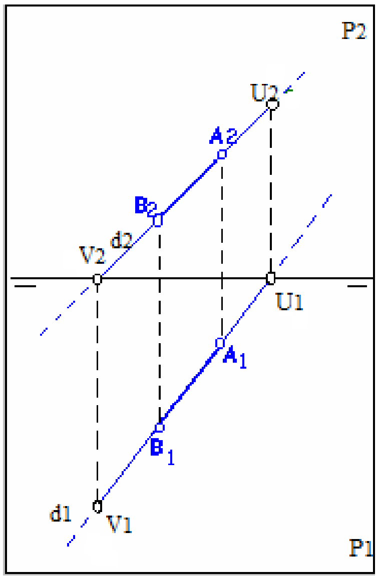


Figure 40 : Les traces d'une droite

En épure, les traces de la droite **(r)** : **(V)** et **(U)** sont immédiatement obtenus parce qu'ils doivent avoir respectivement une côte nulle ou un éloignement nul, comme indiqué sur la figure 41.

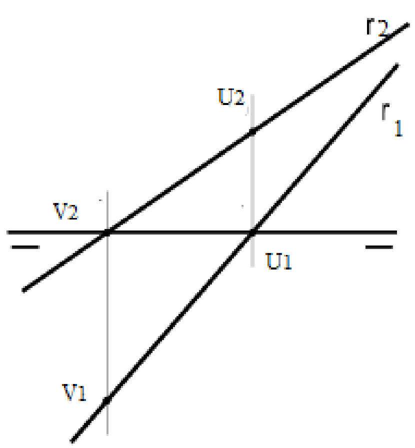


Figure 41 : Détermination des traces d'une droite

V.5.a. Cas particuliers :

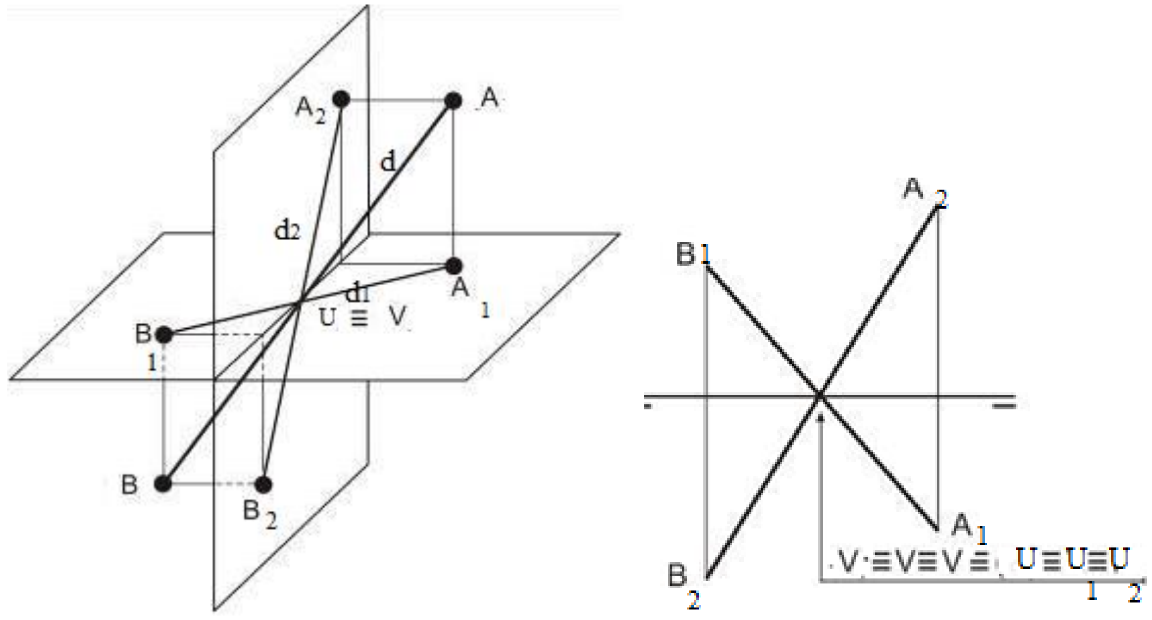


Figure 42 : Traces d'une droite passant par la ligne de terre.
La droite (AB) passe par la ligne de terre (xx) : la trace horizontale V et la trace frontale U appartiennent à (xx).

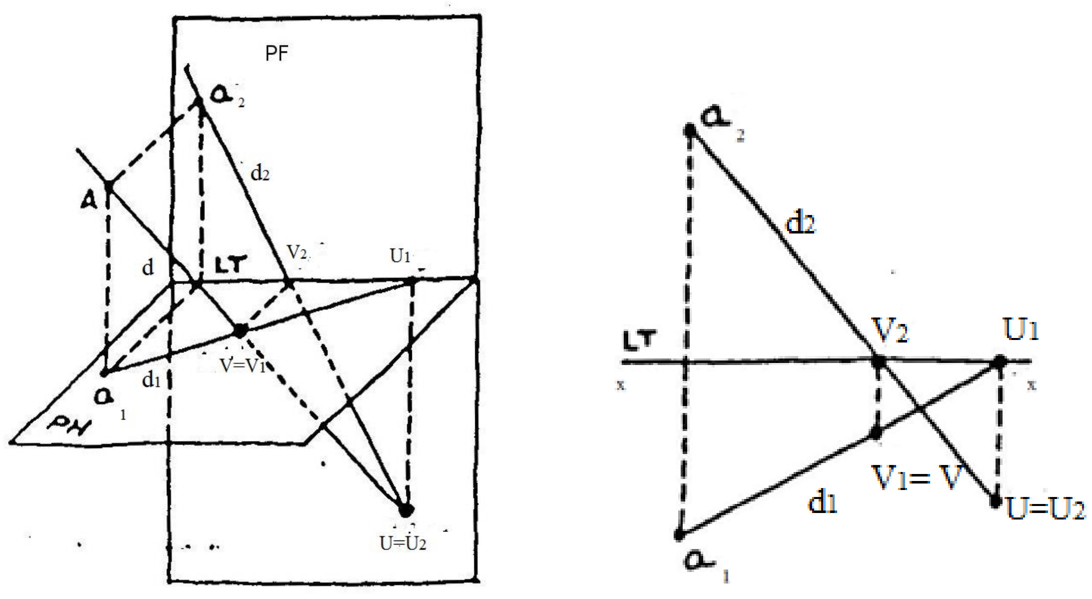


Figure 43 : T races d'une droite passant par P_1
Dans ce second exemple la droite perce le plan horizontal du premier quadrant et le plan frontal du quatrième quadrant

V.6. Les droites remarquables (particulières) :

Les droites remarquables sont des droites qui ont des situations particulières par rapport au système de la double projection orthogonale (***P₁***, ***P₂***, ***xx***, plans bissecteurs).
Une droite est dite remarquable ou particulière lorsqu'elle est parallèle à au moins un des plans de projection. A ce moment une de ses projections au moins est représentée en vraie grandeur (VG). Cette (VG) est très importante pour rechercher les dimensions exactes des éléments d'architecture.

Dans l'espace : une droite peut être :

- **Une droite horizontale** : est une droite parallèle à P_1
- **Une droite frontale** : est une droite parallèle à P_2
- **Une droite de bout** : est une droite perpendiculaire à P_2
- **Une droite verticale** : est une droite perpendiculaire à P_1
- **Une droite fronto-horizontale** : est une droite parallèle à P_1 et à P_2
- **Une droite de profil** : est une droite perpendiculaire à P_1 et à P_2
- Une droite appartenant à P_1 ***et*** une droite appartenant à P_2 sont, aussi, des droites remarquables.
- Une droite appartenant à un plan bissecteur.

V.6.a. La droite horizontale :

Définition :

Est dite *horizontale* toute droite parallèle au plan horizontal de projection P_1. Tous les points d'une droite horizontale ont donc la même côte et sa projection frontale r_2 est parallèle à la ligne de terre **(*xx*)** (voir figure 44).

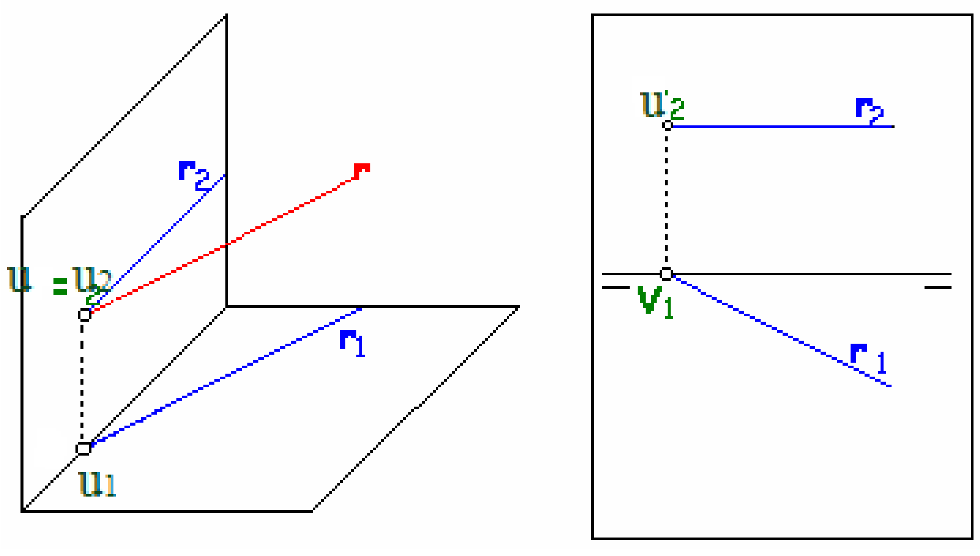


Figure 44 : Une droite horizontale

V.6.b. La droite frontale :

Définition :

Est dite *frontale* toute droite parallèle au plan frontal de projection $\boldsymbol{P_2}$. Tous les points d'une droite frontale ont donc la même éloignement et sa projection horizontale $\boldsymbol{r_1}$ est parallèle à la ligne de terre **(*xx*)**.

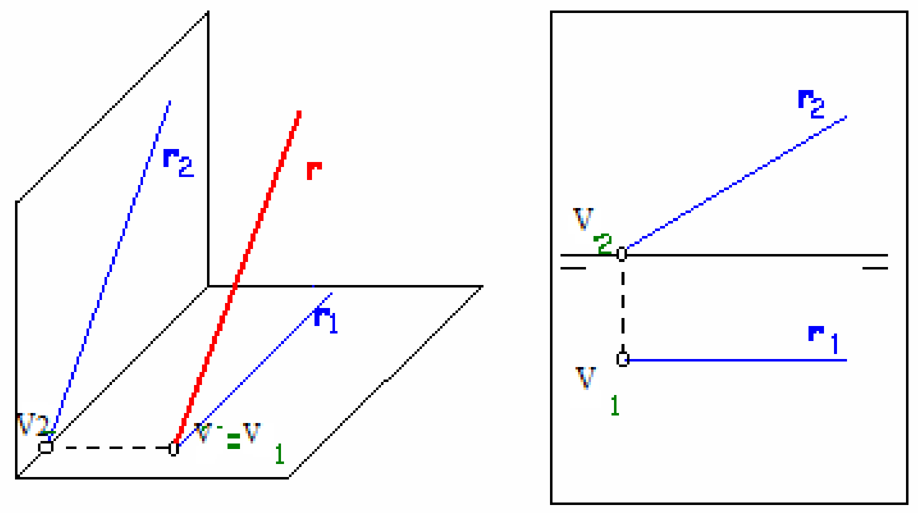


Figure 45 : Une droite frontale

V.6.c. La droite de bout :

Définition :

Est dite droite *de bout* toute droite perpendiculaire au plan frontal de projection $\boldsymbol{P_2}$. Sa projection horizontale est perpendiculaire à la ligne de terre ($\boldsymbol{r_1} \perp \boldsymbol{xx}$) et sa projection frontale $\boldsymbol{r_2}$ est réduite à un point.
Tous les points d'une droite de bout ont même côte (voir figure 46).

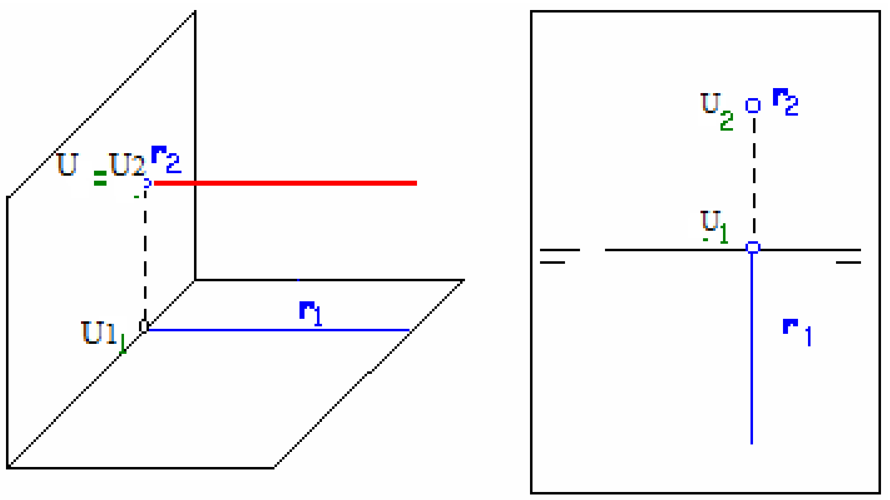


Figure 46 : Une droite de bout

V.6.d. La droite verticale :

Définition :

Est dite *verticale* toute droite perpendiculaire au plan horizontal de projection P_1. Sa projection frontale est donc perpendiculaire à la ligne de terre ($r_2 \perp xx$), et sa projection horizontale r_1 se réduit à un point.
Tous les points d'une droite verticale ont même éloignement (voir figure 47).

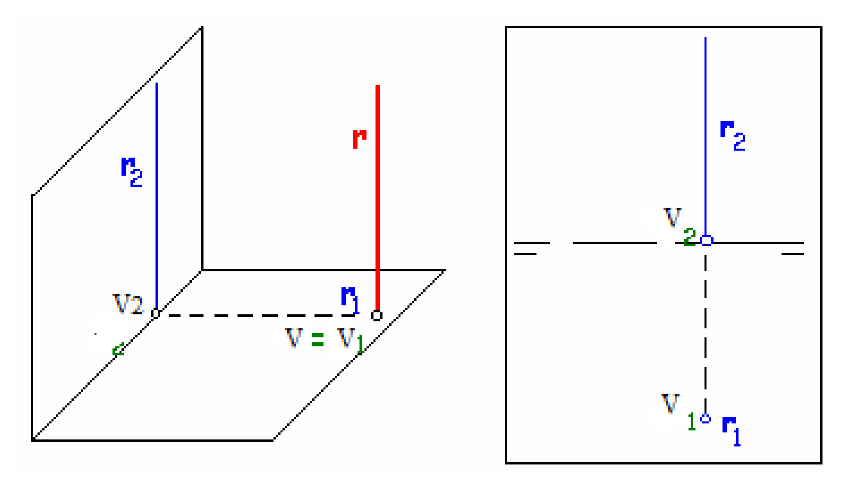


Figure 47 : Une droite verticale

V.6.e. La droite fronto-horizontale :

Définition :

Est dite *fronto-horizontale* toute droite parallèle aux deux plans de projection P_1 et P_2. Tous les points d'une telle droite ont donc même côte et même éloignement. Ses projections sont elles-mêmes parallèles à la ligne de terre (xx).

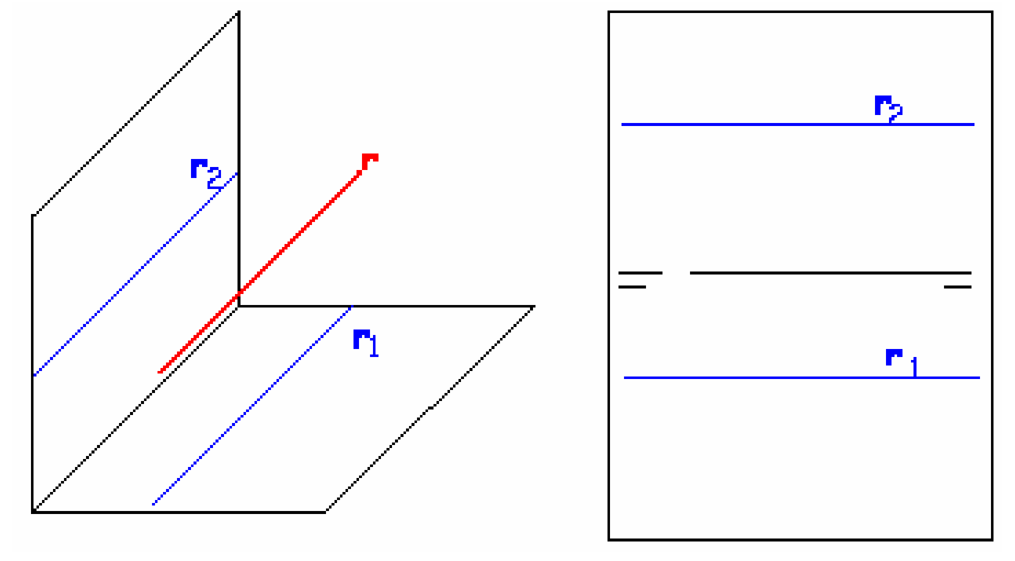


Figure 48 : Une droite fronto-horizontale

V.6.f. La droite de profil :

Définition :

Est dite *de profil* toute droite appartenant à un plan perpendiculaire à la ligne de terre ***(xx)***, et ainsi aux deux plans de projections $\boldsymbol{P_1}$ et $\boldsymbol{P_2}$. Les deux projections d'une telle droite sont donc elles-mêmes perpendiculaires à la ligne de terre ($r_1 \perp xx$) et ($r_2 \perp xx$) et alignées sur une même ligne de rappel. Le problème est que toutes les droites appartenant à un même plan perpendiculaire à la ligne de terre ont les mêmes projections. On ne peut alors déterminer une droite de ce plan qu'en en caractérisant deux points. Nous verrons plus loin comment traiter ce problème (voir figure 49).

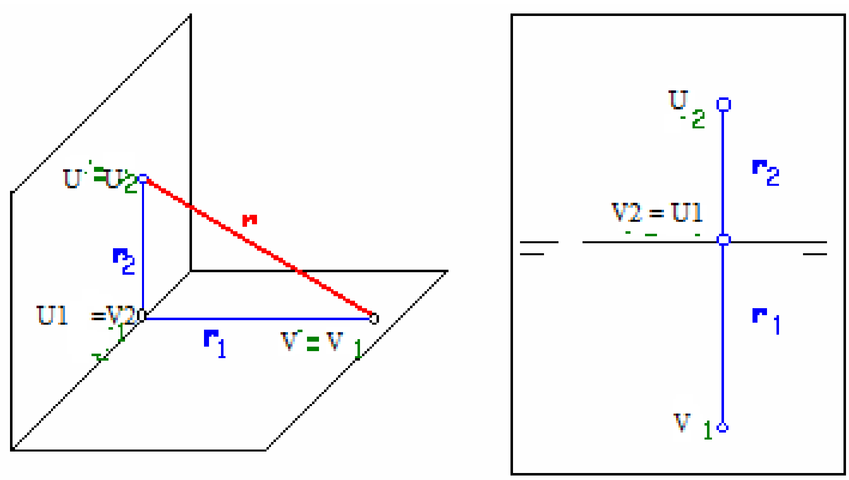


Figure 49 : Une droite de profil

V.6.g. La droite qui appartient à un plan bissecteur :

Définition :

Tous les points d'une telle droite sont à équidistance des plans de projection $\boldsymbol{P_1}$ et $\boldsymbol{P_2}$. Si la droite appartient au 1er bissecteur, ses projections horizontale et verticale sont symétriques par rapport à la ligne de terre ***(xx)*** (voir figure50).

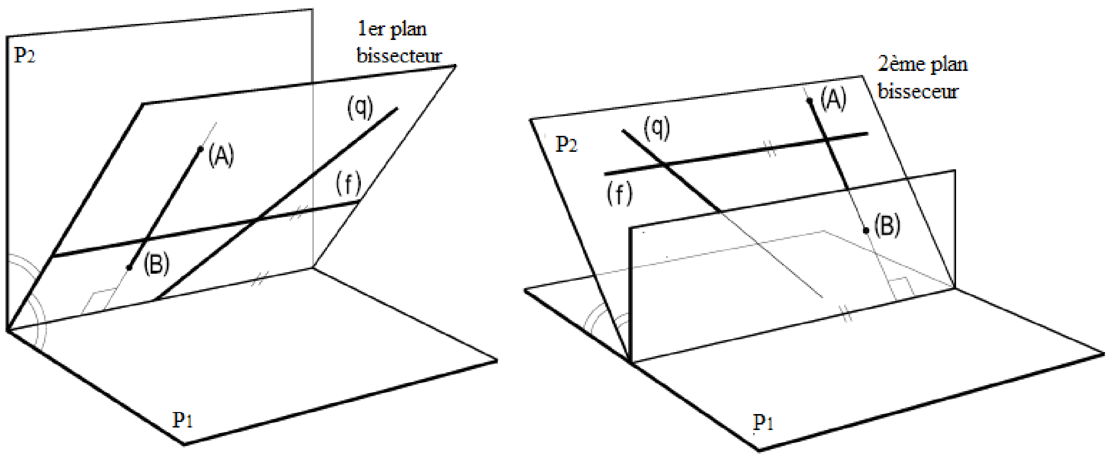


Figure 50 : Droites remarquables appartenant aux plans bissecteurs dans l'espace.

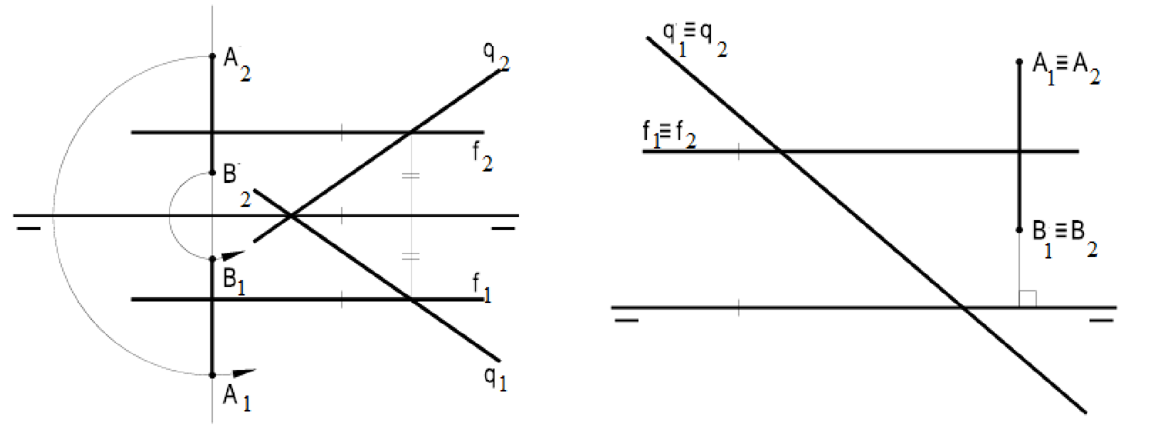


Figure 51 : Epure des droites remarquables appartenant aux plans bissecteurs.

V.7. Grandeur réelle d'un segment de droite :

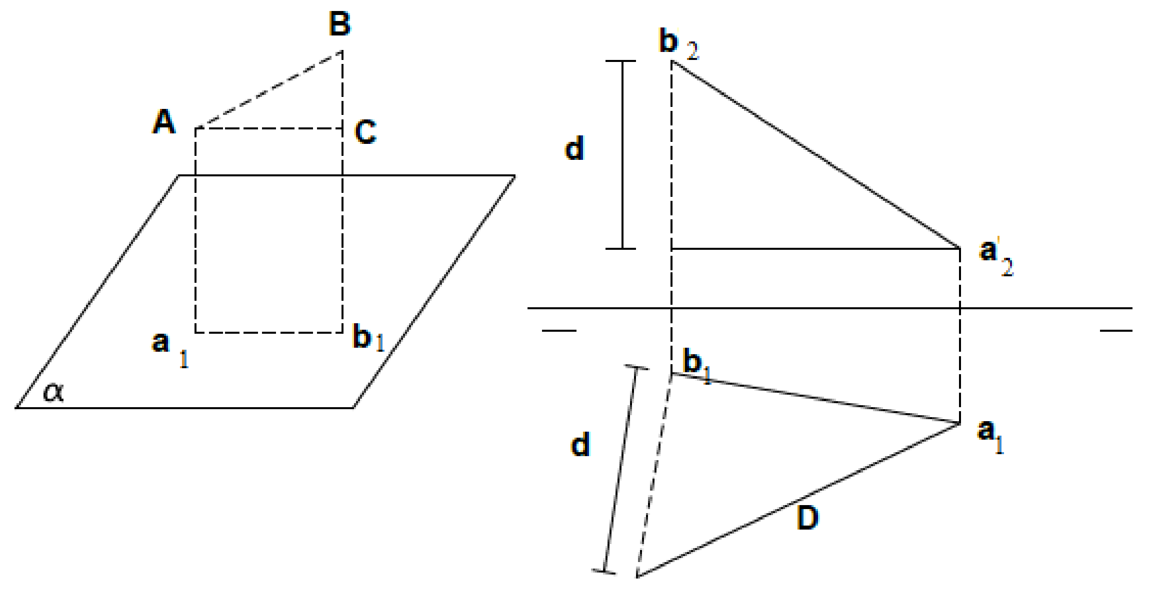


Figure 52 : Méthode de calcul de la grandeur réelle d'un segment de droite

$\mathbf{a_1b_1}$ est la projection horizontale du segment **[AB]**

d = côte b – côte a

V.8. Problèmes liés à la droite de profil :

Une droite de profil est droite perpendiculaire, à la ligne de terre et oblique par rapport à $\boldsymbol{P_1}$ et $\boldsymbol{P_2}$. Pour faire 90° avec la ligne de terre, toute droite de profil doit appartenir à un plan perpendiculaire à $\boldsymbol{P_1}$ et $\boldsymbol{P_2}$.

Ainsi sont les droites **(AB)** et **(CD)**, appartenant, respectivement aux plans (α) et (γ), perpendiculaires à la ligne de terre (voir figure 53).

Par conséquent, toute droite de profil a une abscisse constante et doit être identifiée par deux de ses points. Par conséquent, les droites de profil posent plusieurs problèmes géométriques que nous aborderons dans ce qui suit.

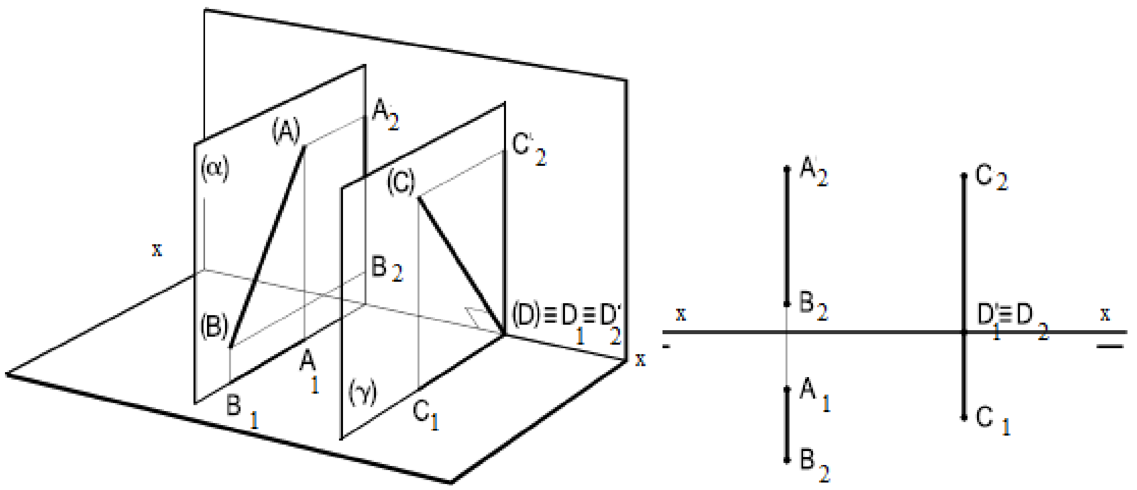


Figure 53 : Droites de profil : une meme épure pour des positions spatiales différentes

V.8.a. Problème 1 :

AB et CD sont deux droites de profil sécantes. Déterminer le point d'intersection **P**/ (AB) x (DC) = P ? (voir figure 54)

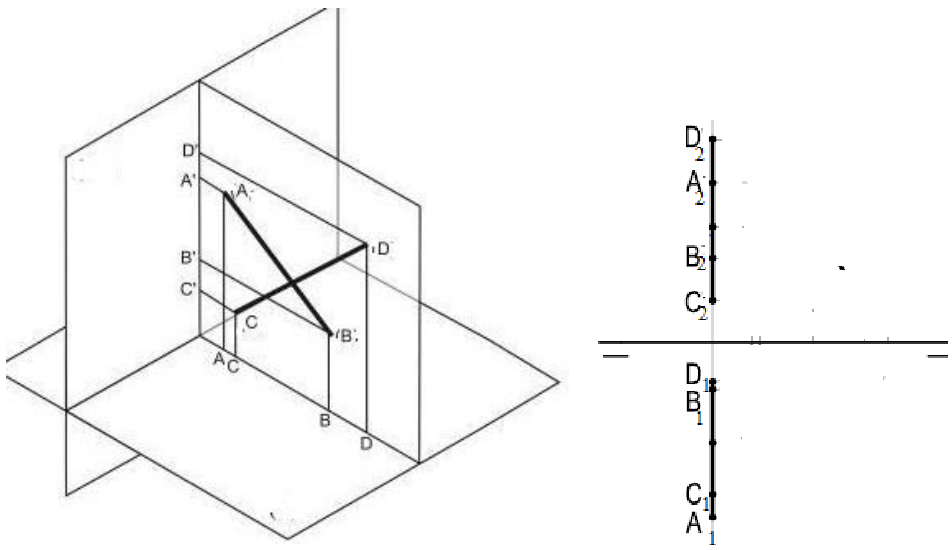


Figure 54 : 1er problème de la droite de profil

V.8.b. Solution du problème 1 :

Pour déterminer le point d'intersection P / (AB) x (DC) = P, il faut recourir à une troisième projection (la projection de profil) (voir figure 55).

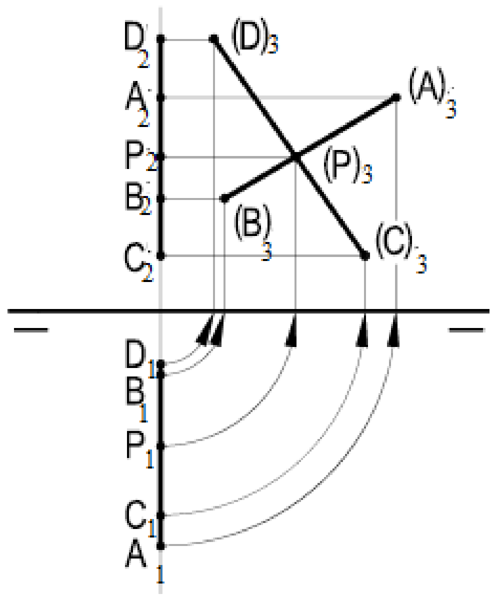


Figure 55 : détermination du point d'intersection de deux droites de profil

V.8.c. Problème 2 :

AB et CD sont deux droites de profil situées sur un même plan. Déterminer leurs positions relatives ? (voir figure 56)

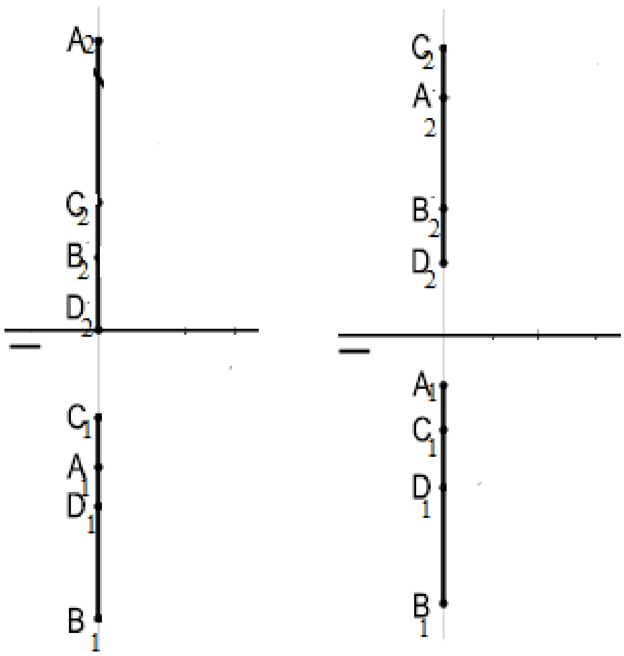


Figure 56 : 2ème problème de la droite de profil

V.8.d. <u>Solution du 2ème problème :</u>

Pour déterminer le point d'intersection P / (AB) x (DC) = P, il faut recourir à une troisième projection (la projection de profil) (voir figure 57).

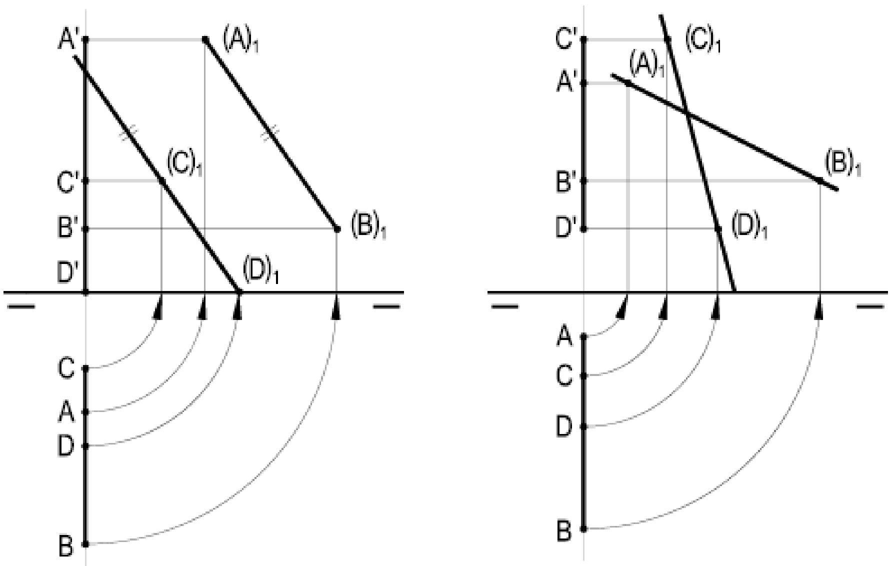


Figure 57 : Détérmination de la position relative de deux droites de profil

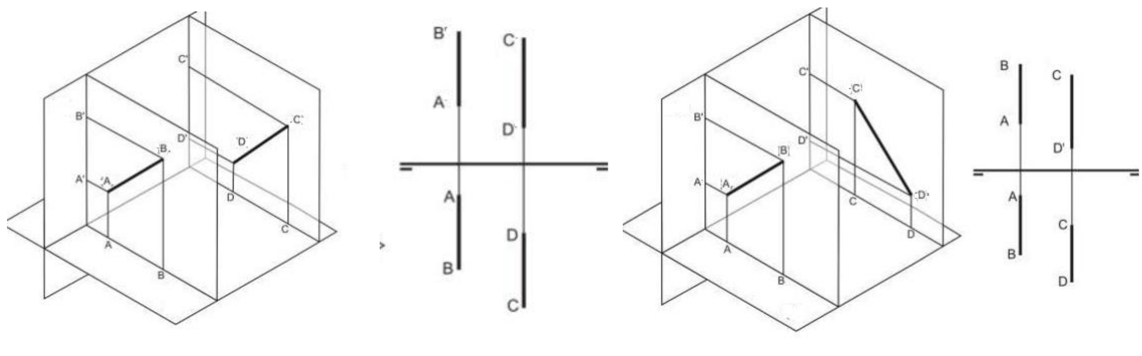
V.8.e. <u>Problème 3 :</u>

AB et CD sont deux <u>droites de profil</u>. L'épure des deux droites dans les deux figures montre, à priori, deux droites parallèles.

Dans l'espace : les deux droites sont : parallèles dans la figure 58 a, et non coplanaires dans la figure 58 b.

V.8.f. <u>Solution du problème 3 :</u>

Pour résoudre ce problème, il faut faire appel au plan de profil.

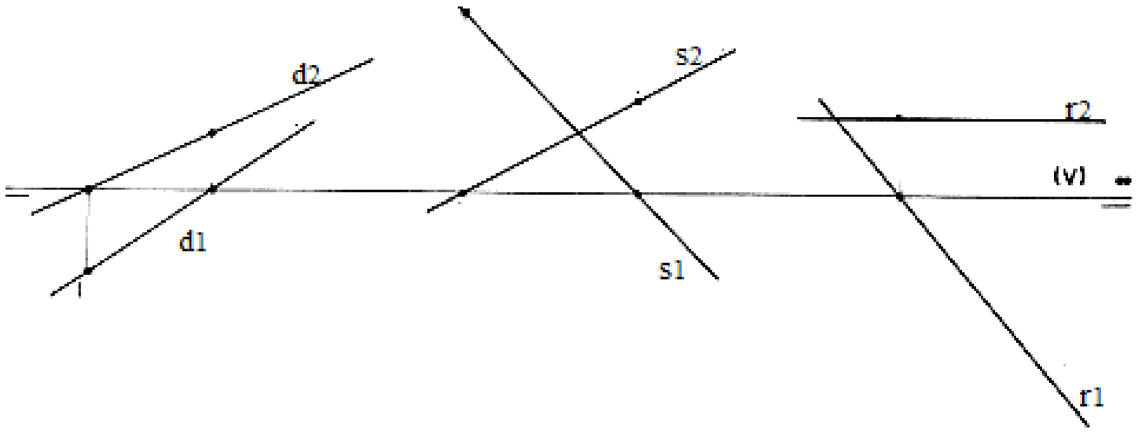


-a- -b-

Figure 58 : 3 ème problème lié aux droites de profil

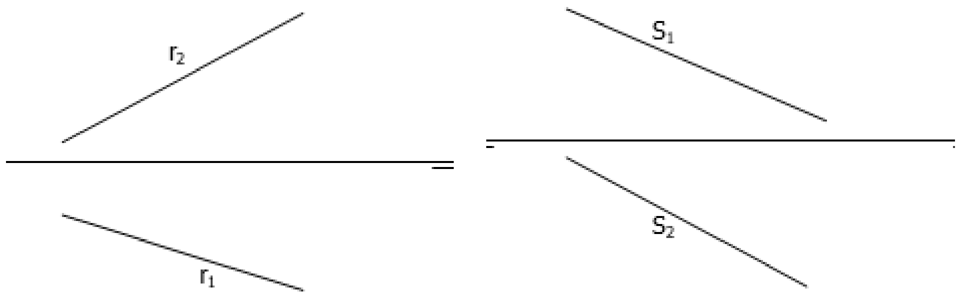
V.9. <u>**Exercice 1:**</u>

Déterminer dans chaque cas, la trace horizontale **V (V1, V2)** et la trace frontale **U (U1, U2)**

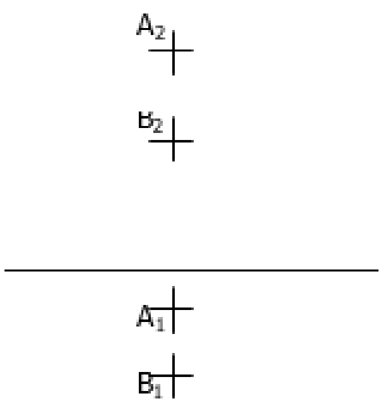


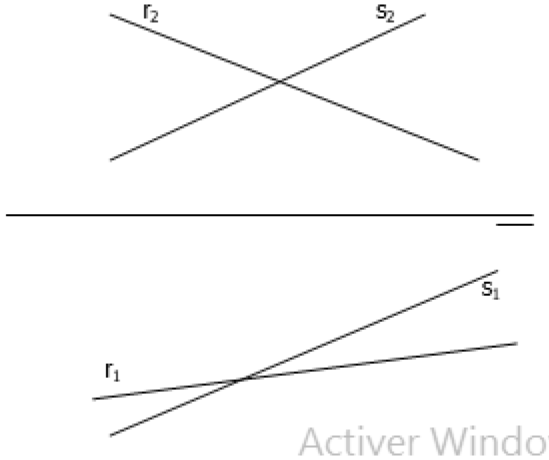
V.10. <u>**Exercice 2 :**</u>

1) Déterminer les traces **V(V1,V2) U(U1, U2)** relatives à la droite **r (r_1, r_2)** et de la droite **s (s_1, s_2)**?

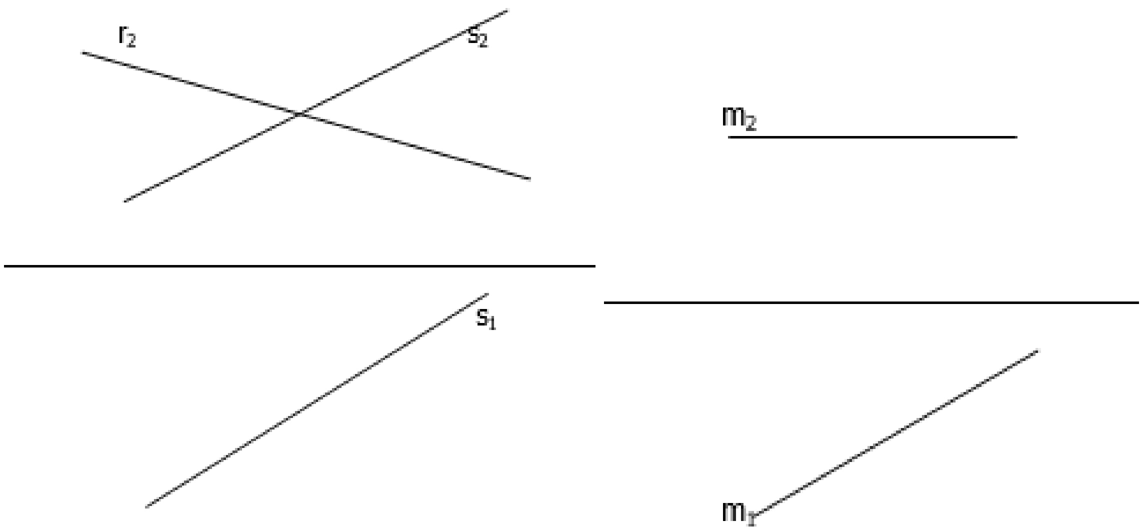


2) Trouver les traces de la droite de profil passant par **A** et **B** ?
3) Quelle est la position relative des droites **r (r_1, r_2)** et la droite **s(s_1, s_2) ?**justifiez

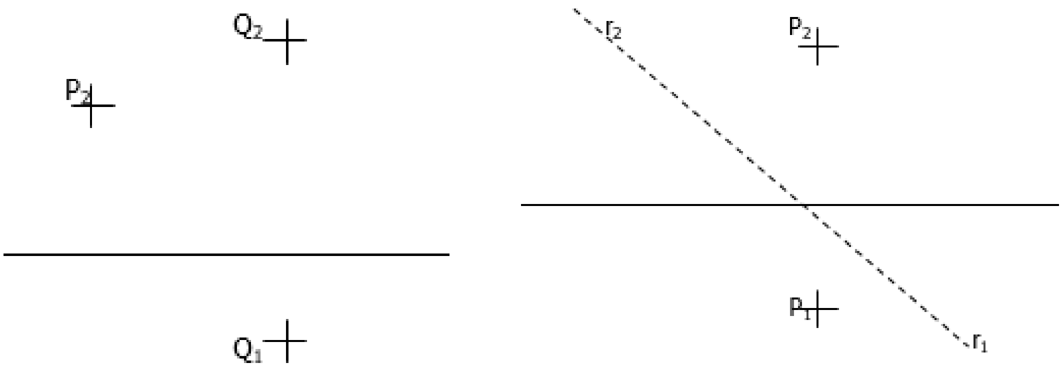




4) Trouver **r_1** pour que **r (r_1, r_2)** et **s (s_1, s_2)** soient sécantes/ r **(r_1, r_2)// *P_2***
5) Déterminer les traces **V(V1,V2) U(U1, U2)** relatives à la droite **m (m_1, m_2)**



6) Trouver ***P_1*** pour que la droite ***PQ*** (***P_1Q_1, P_2Q_2***) / ***PQ // P_2 ?***
7) Trouver un point **Q (Q1, Q2)** de la droite **r (r_1, r_2) /** tel que la droite ***PQ*** (***P_1Q_1, P_2Q_2***) // ***P_1***, Tracer la droite ***PQ*** (***P_1Q_1, P_2Q_2***), puis trouver ses traces **V(V1,V2) U(U1, U2)**.

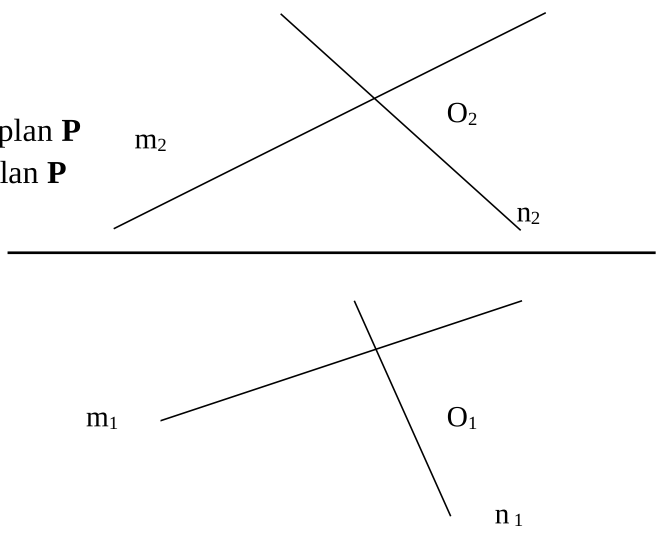


V.11. <u>Exercice 3 :</u>

P (m X n =o)

1.Tracer **h** / **h** est une droite horizontale du plan **P**

2.Tracer **f** / **f** est une droite horizontale du plan **P**



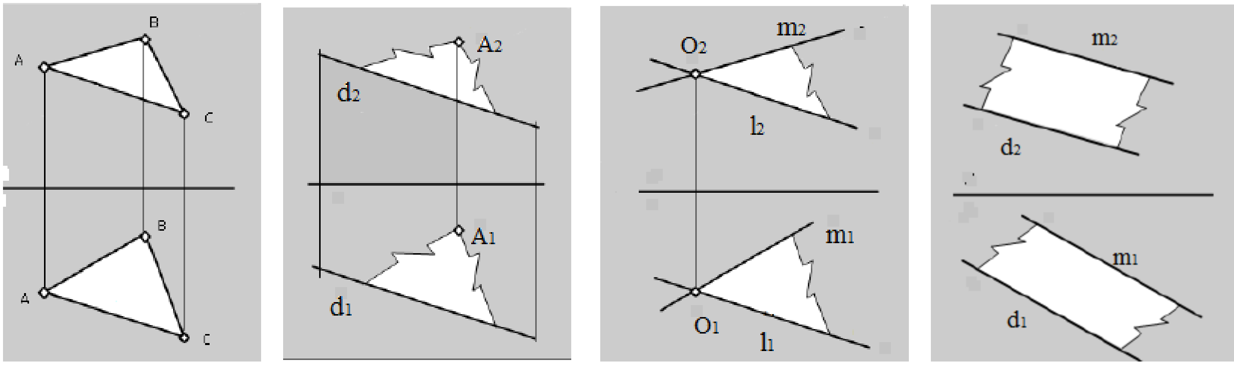
VI. La représentation du plan

Ce chapitre traite de l'étude du plan. Il donne sa définition, ses projections dans le système de la double projection orthogonale. Il présente ensuite, les propriétés des plans remarquables et leurs projections. Ce chapitre explique, ensuite, les positions relatives des droites et des plans dans l'espace, ainsi que leurs intersections

VI.1. Définition :

En géométrie descriptive, un plan peut se définir à travers :

1. Trois points non alignés A, B, C.
2. Un point et une droite tel que le point n'appartient à la droite.
3. Deux droites sécantes.
4. Deux droites parallèles (voir figure 59).



P (A, B, C)/ A≠B ≠C **P (A, d) / A∉ d** **P (m x n = O)** **P (m //n)**

Figure 59 : Représentation du plan

VI.2. Les traces du plan :

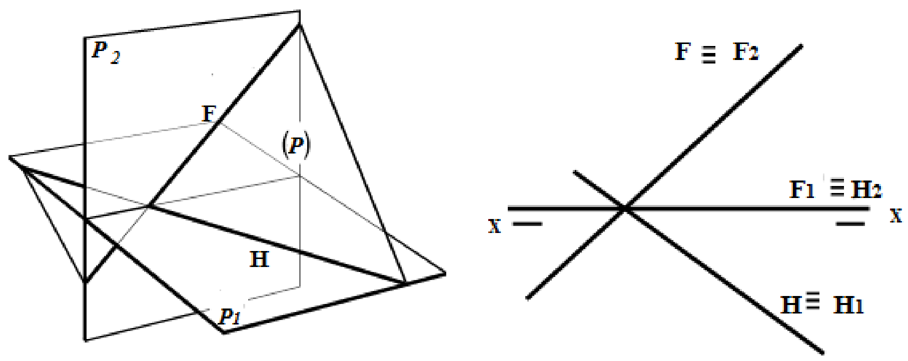
Un plan peut se définir, aussi, par ses traces **H** et **F.**

H (H_1, H_2) est la trace horizontale du plan **P**

$$P \text{ X } P_1 = H$$

F (F_1, F_2) est la trace frontale du plan **P**

$$P \text{ X } P_2 = F$$



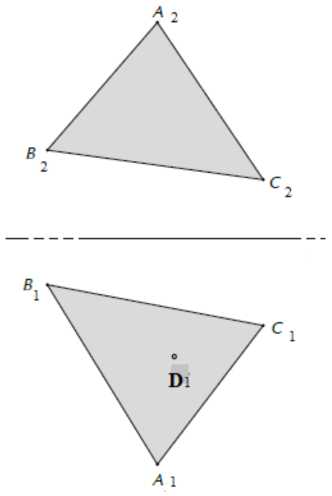
Dans l'espace **sur l'épure**

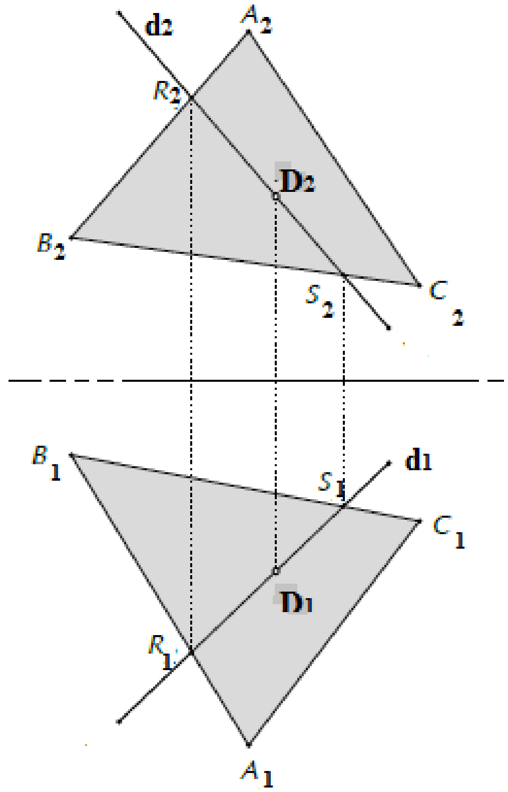
Figure 60 : Les traces du plan

VI.3. Appartenance d'un point à un plan :

Soit un plan **P (A,B,C) . D Є P. D_1** est donné.

Le problème : déterminer **D_2?**





Résolution du problème :

1. Proposer une droite **d (d_1, d_2) / d є P, D є d**
2. Déterminer : **d_1 x B_1C_1 = S_1**
3. Déterminer : **d_1 x A_1B_1 = R_1**
4. projeter **S_1** et **R_1** respectivement sur **B_2C_2** et **A_2B_2**.
5. Tracer **d_2 (S_2, R_2)**
6. Projeter **D_1** sur **d_2** pour trouver **D_2**.

VI.4. Les plans remarquables :

Suivant leur position au sein du système de la DPO,

VI.4.a. Le plan horizontal :

le plan horizontal est un plan // P_1 (voir figure 61)

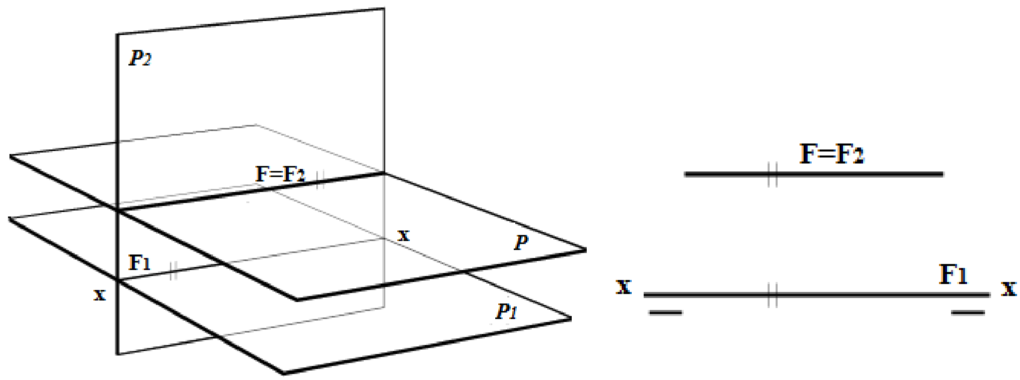


Figure 61 : Le plan horizontal

VI.4.b. Le plan frontal :

Le plan frontal est un plan // P_2 (voir figure 62)

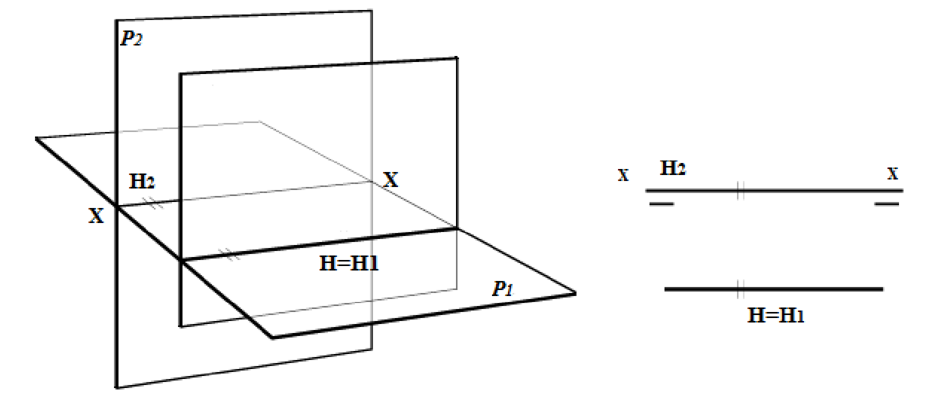


Figure 62 : Le plan frontal

VI.4.c. Le plan vertical

Le plan vertical est $\perp$ $\mathbf{P_1}$ (voir figure 63)

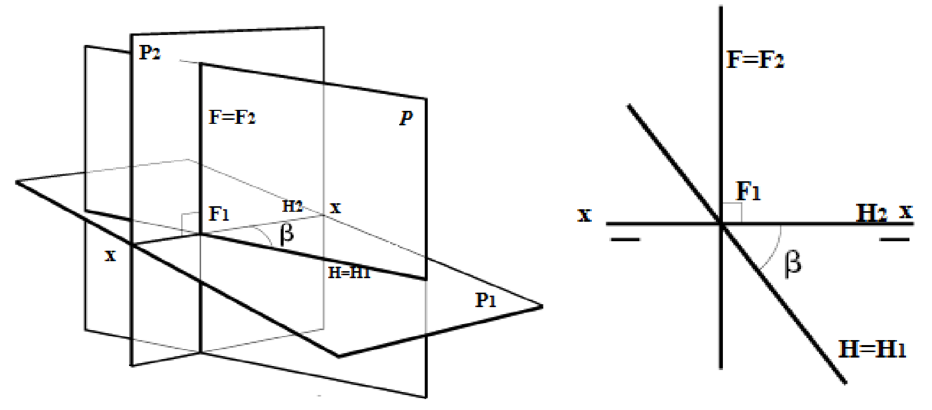


Figure 63 : Le plan vertical

VI.4.d. Le plan de bout

Le plan de bout est $\perp$ $\mathbf{P_2}$ (voir figure 64)

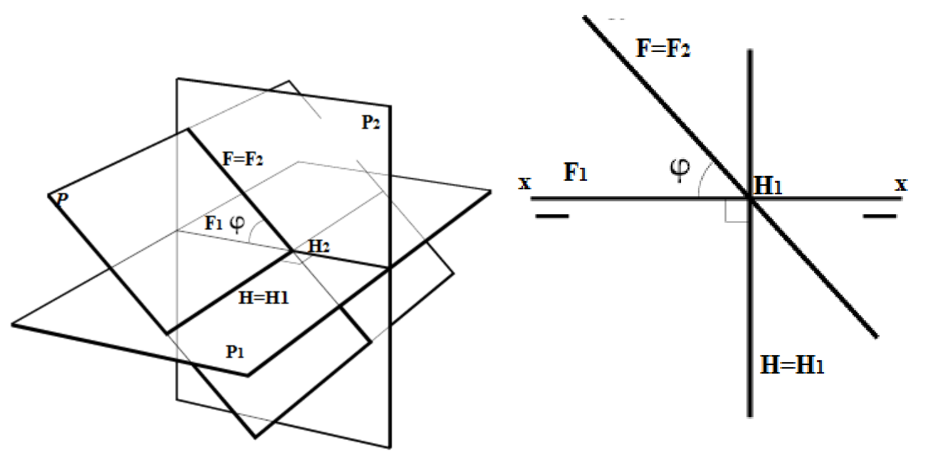


Figure 64 : Le plan de bout

VI.4.e. <u>Le plan de profil</u>

Le plan de profil est $\perp$ **P_1** et **P_2** (voir figure 65)

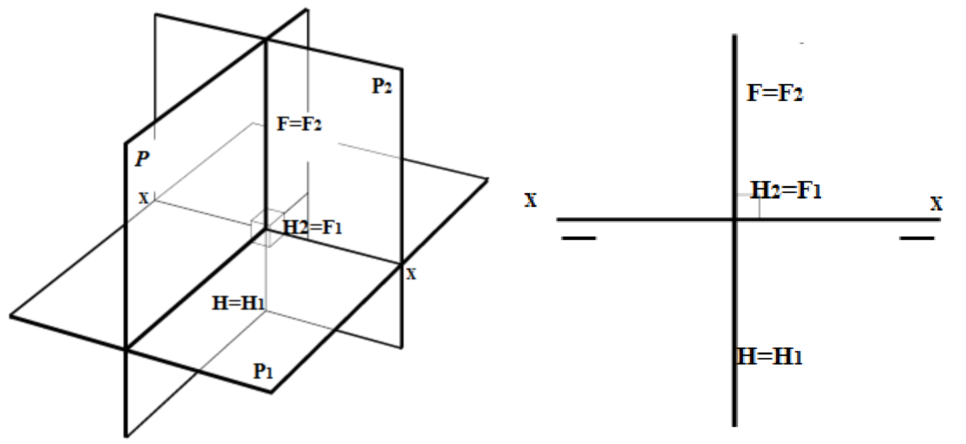


Figure 65 : Le plan de profil

VI.4.f. <u>Le plan parallèle à la ligne de terre :</u>

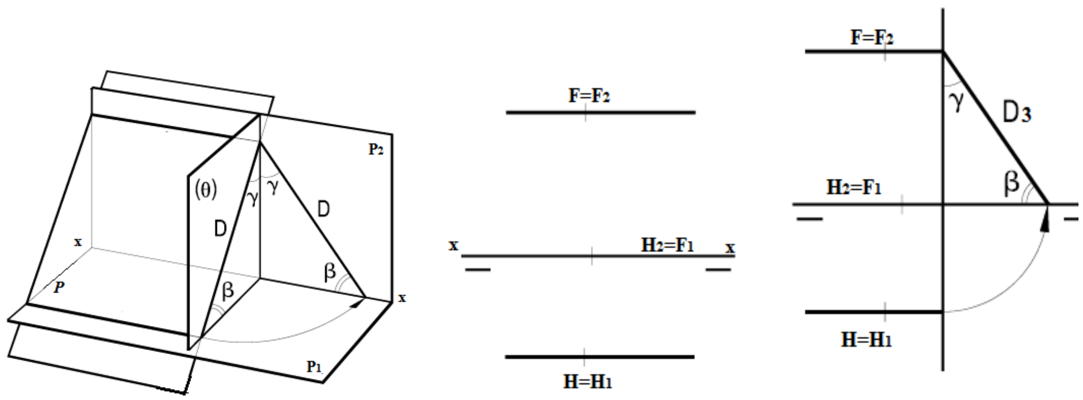
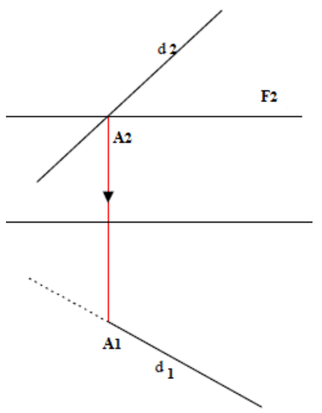
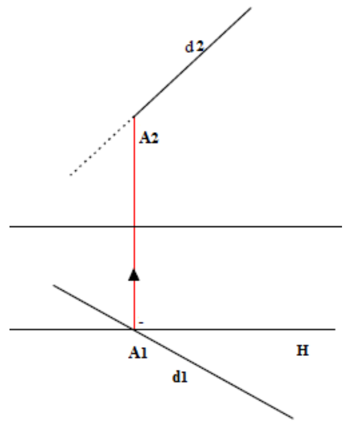


Figure 66 : Le plan parallèle à (xx)

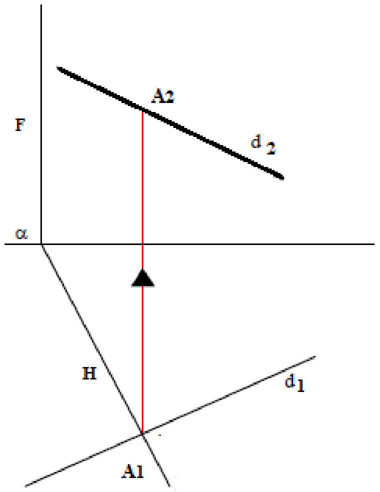
VI.5. <u>Intersection d'une droite et d'un plan remarquable :</u>



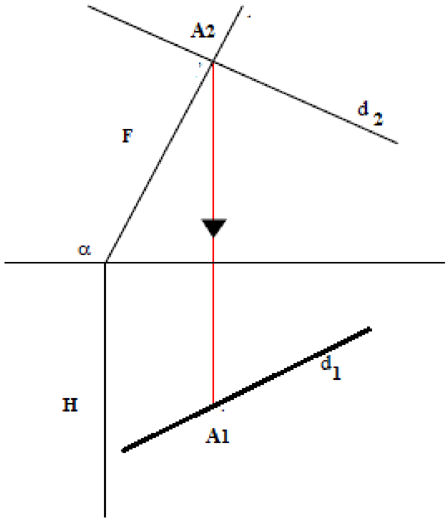
La construction de l'intersection d'une droite et d'un **<u>plan horizontal</u>** est immédiate en projection frontale



La construction de l'intersection d'une droite et d'un **<u>plan frontal</u>** est immédiate en projection horizontale



Tous les points du **plan vertical** se projettent sur sa projection horizontale. La construction de l’intersection A avec la droite d est immédiate en projection horizontale.



L’intersection entre **un plan de bout** et une droite **d** est immédiate en projection frontale.

VI.6. Intersection de deux plans quelconques :

α (H_α, F_α) x ß ($H_ß$, $F_ß$) =I (I, J) ? (voir figure 67)

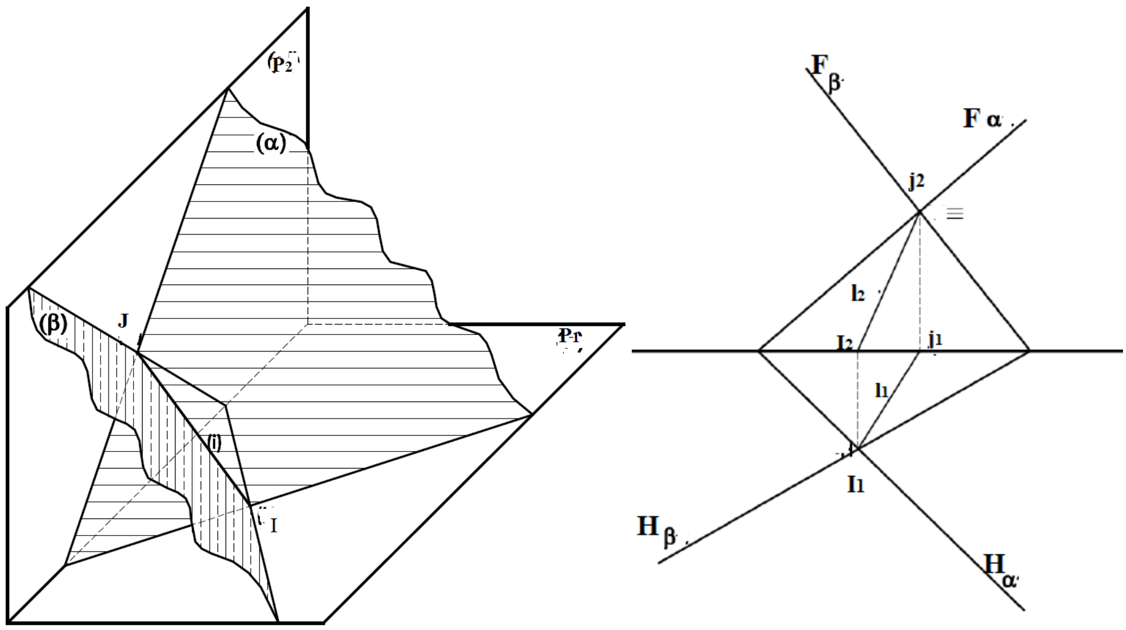
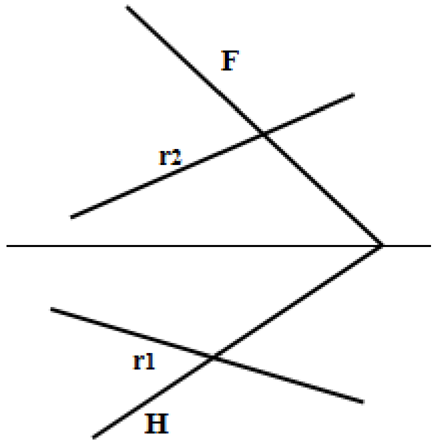


Figure 67 : Intersection de deux plans quelconques

VI.7. Intersection d'une droite et du plan quelconque :

Problème :

Déterminer l'intersection du plan ***P (H, F)*** et de la droite **r (r_1, r_2) / r** x ***P*** **= J ?**



Résolution du problème :

Afin de déterminer l'intersection d'une droite **r (r_1, r_2)** et d'un plan quelconque ***P (H, F)***, **r** x ***P*** **= J**
Il faut :

1. Proposer un plan auxiliaire ***R*** **(H_R , F_R)** qui passe par la droite **r (r_1, r_2)** et qui soit un plan remarquable (dans ce cas ***R*** est un plan de bout).
2. Déterminer l'intersection du plan ***P*** et ***R : P x R = s (I, k)***.
3. Determiner ***s*** **x** ***r = J (J_1 , J_2)***

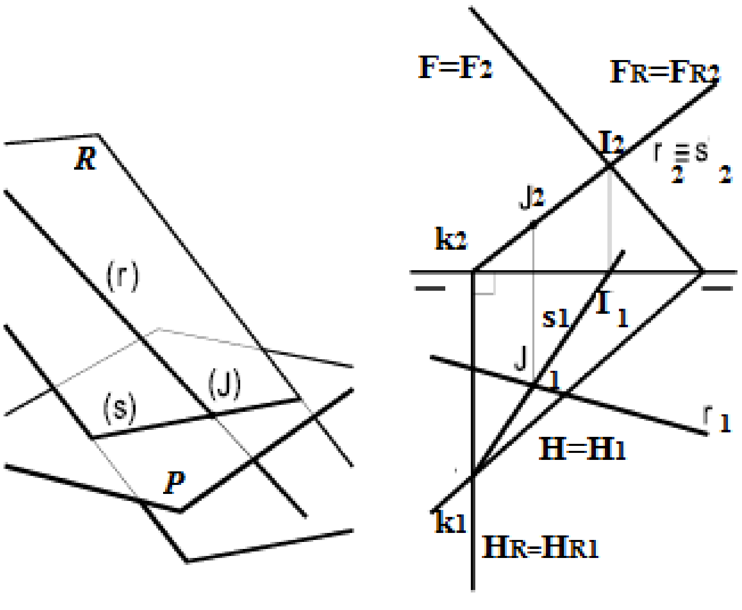
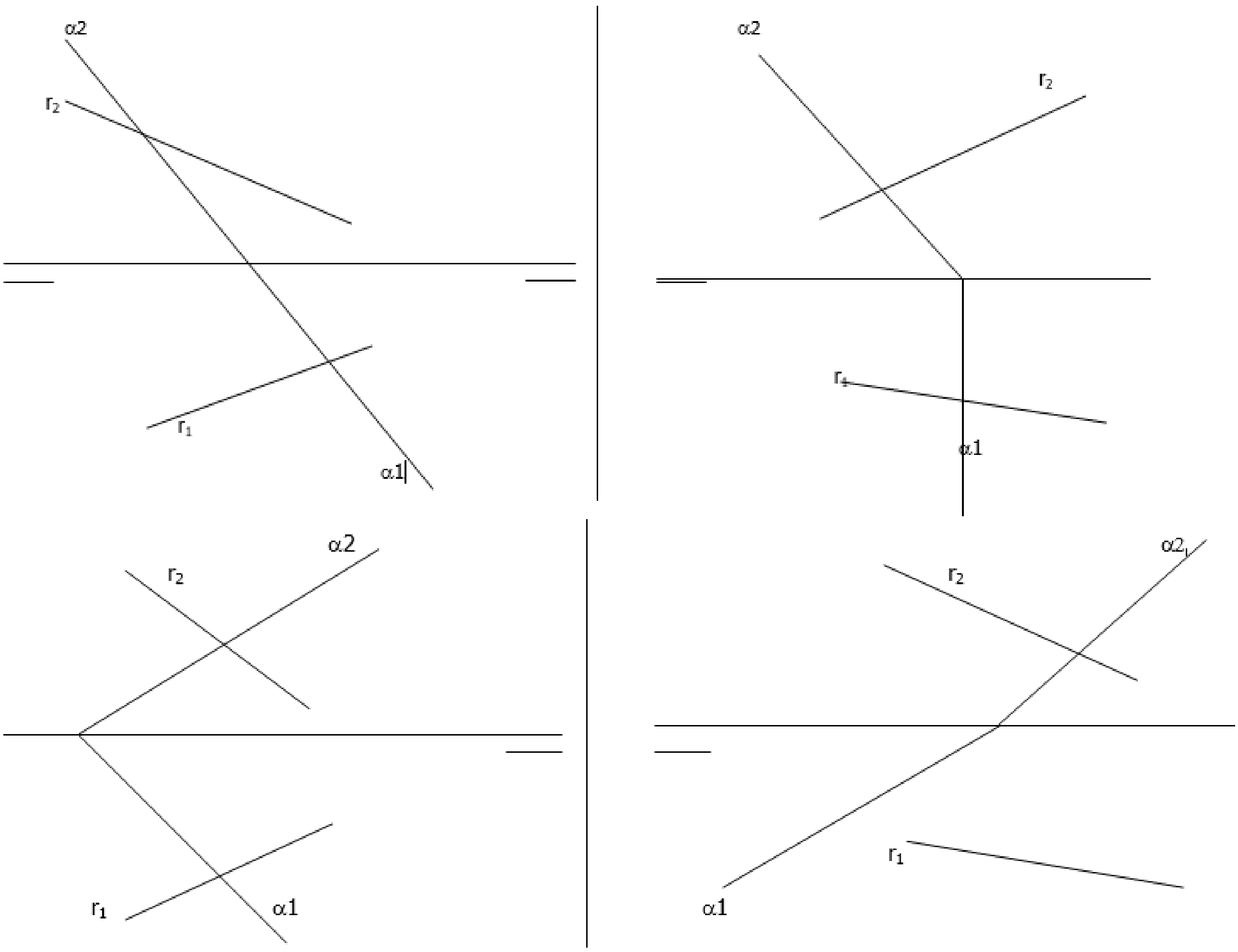


Figure 68 : Intersection d'une droite et d'un plan quelconque

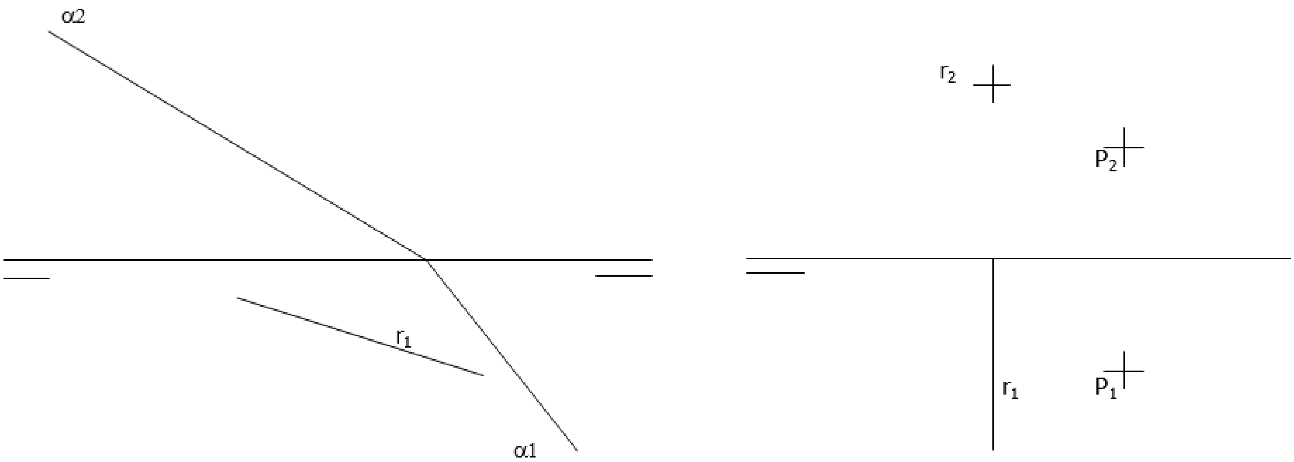
VI.8. Exercice 1:

Déterminer, dans chaque cas, les point d'intersection de la droite **r (r_1, r_2)** et du plan **α** (**α_1, α_2**).



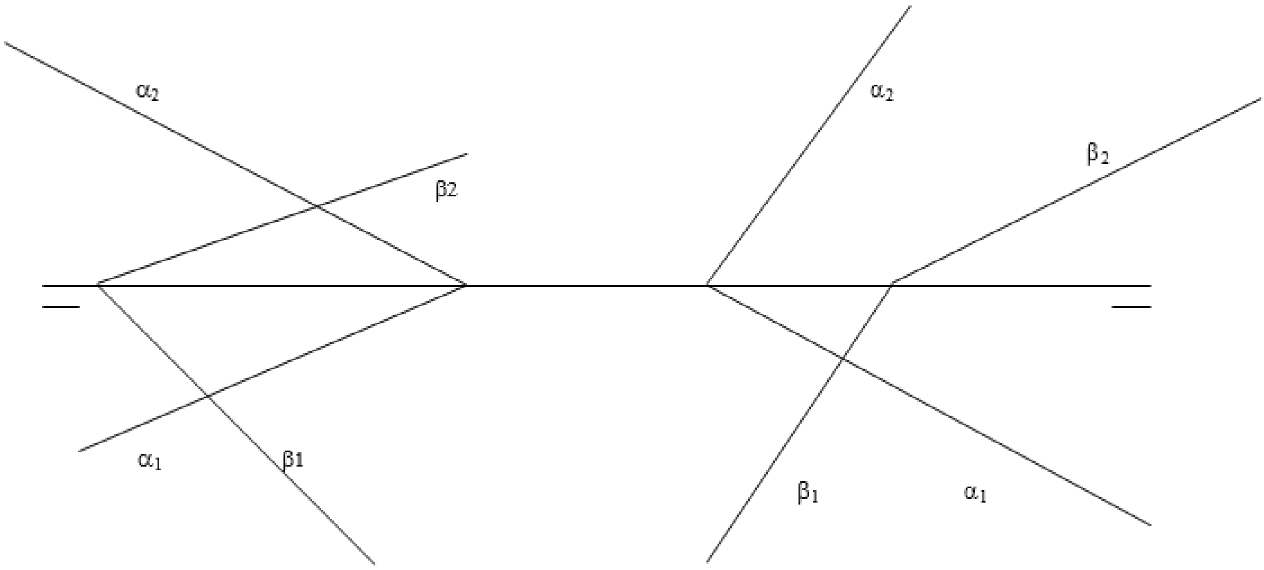
VI.9. Exercice 2:

Trouver la projection verticale de la droite r, appartenant au plan plan **α** (**α_1, α_2**) **puis au plan P(P_1,P_2)**.



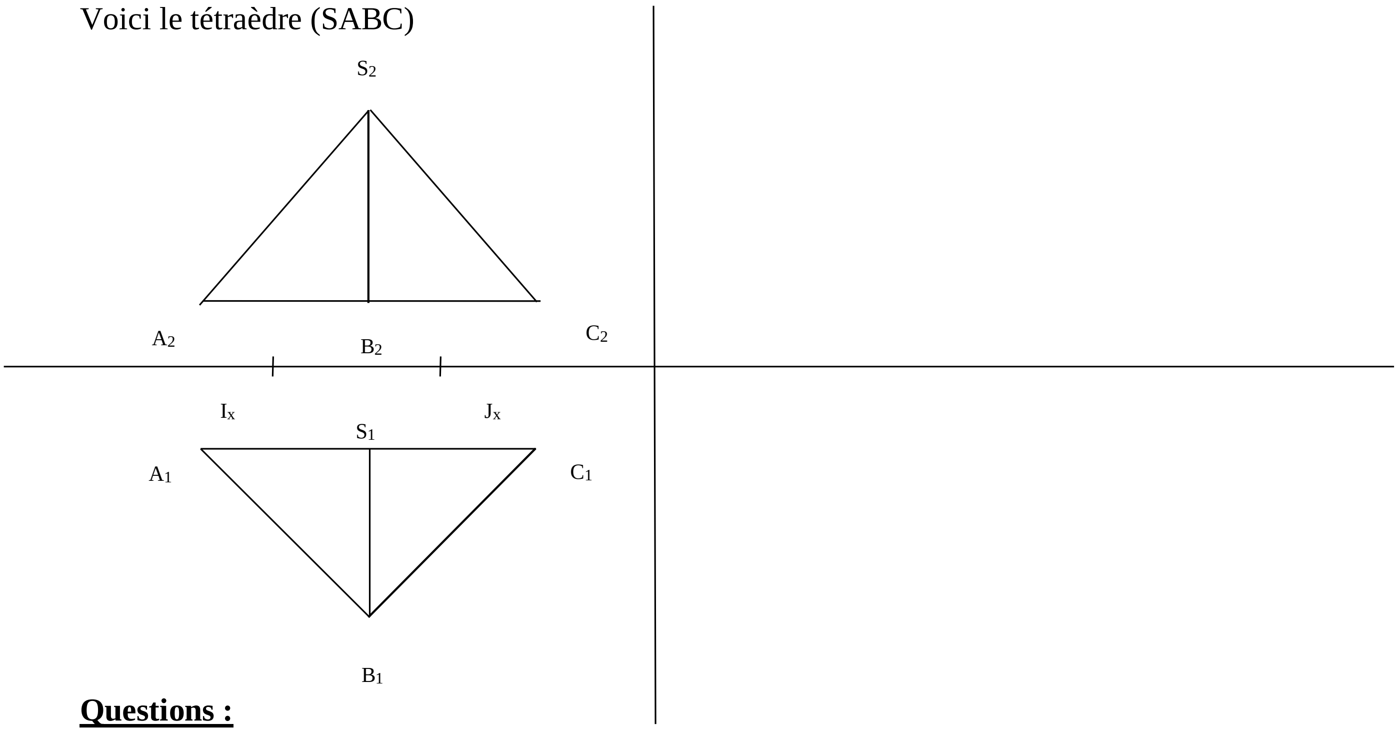
VI.10. **Exercice 3:**

Trouver l'intersection des plans plan **α (α₁, α₂) et ß (ß₁, ß₂).**



VI.11. **Exercice 4 :**

Voici le tétraèdre (SABC)



Questions :

1. Compléter la projection sur P3

2. De combien de plans, le volume SABC est-t-il composé ? lesquels ?

3. Déterminer l'éloignement et la côte des points : A(,) B(,) C(,) S(,)

4. Quelle est la nature des droites : (SA)………….(SB)…………….(BC)………....…. (AC)……….….……

5. Quelle est la nature des plans : SAB…………...…….ABC………………..……ACS……………………

6. Tracer la droite *d(I,J)/ I (2,1.5) , J(3.5, 3.5)*

7. Déterminer les traces de la droite d : *V(V_1,V_2) , U(U_1,U_2).*

VII. Les polyèdres :

L'objectif de ce chapitre est l'étude des polyèdres. Nous verrons, en premier, des généralités sur les polyèdres ainsi que leurs différents types. Nous présenterons, ensuite la méthode de représentation des polyèdres dans le système de la double projection orthogonale.

VII.1. Définition :

Un ***polygone*** (du grec *polus*, nombreux et *gônia*, angle) est une figure géométrique plane formée par une ligne brisée fermée. Un triangle, un carré sont des polygones. On peut distinguer : des polygones réguliers et irréguliers (voir figure 69).
Un ***polyèdre*** (du grec *polus,* nombreux et *hedra,* face ou base) est un solide limité par des polygones plans ayant, deux à deux un coté commun. Un cube, une pyramide, un prisme sont des polyèdres (voir figure 70 et 71).

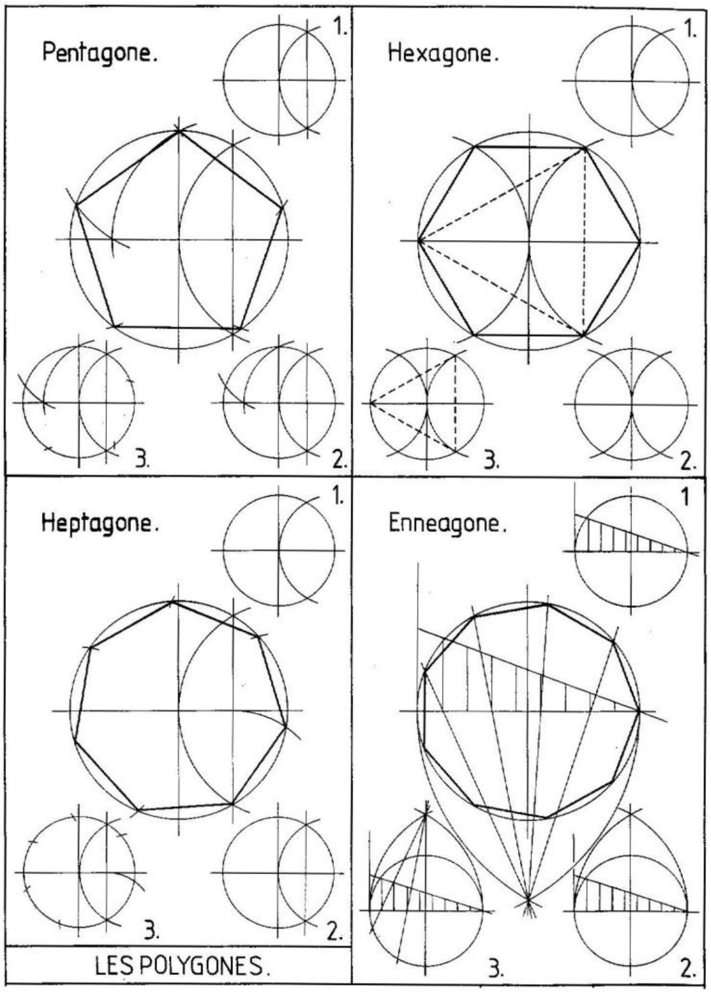


Figure 69 : Méthodes de construction de polygones.

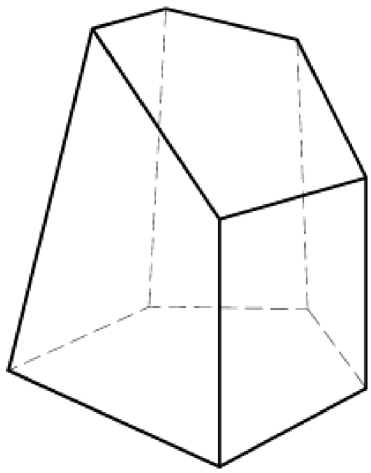


Figure 70 : Exemple d'un polyèdre.

Figure 71 : Exemple d'application des polyèdres en architecture.

VII.2. **Eléments d'un polyèdre :**

Un polyèdre se compose des éléments suivants (voir figure 72):

- **Un angle dièdre :** est formé par deux faces adjacentes. Il se mesure perpendiculairement à l'arrête.
- **L'angle polyèdre :** est l'angle formé par les arrêtes, considérées deux à deux, issues d'un sommet.
- **L'angle au centre :** est formé par deux segments issus du centre et joignent deux sommets reliés par une arrête.
- **Les diagonales du polyèdre** : sont les segments joignant deux sommets non consécutifs.

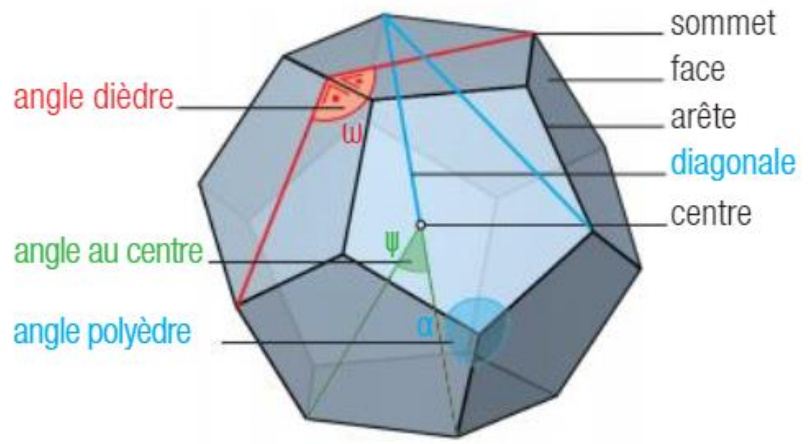


Figure 72 : Les éléments d'un polyèdre.

VII.3. **Section d'un polyèdre :**

Une section plane dans un polyèdre est toute section produite dans le solide par un plan qui lui est sécant. Il s'agit, dans l'exemple ci-dessous, du polygone **(ABCDE)**, résultant du polyèdre coupé par le plan **(γ)** (voir figure 73).

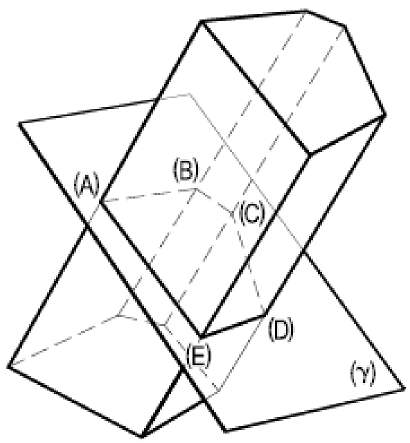


Figure 73 : La section d'un polyèdre

VII.4. **<u>Types de polyèdres :</u>**

Les polyèdres se distinguent par le nombre de faces qu'ils possèdent. Ainsi, on dit d'un polyèdre qu'il est un tétraèdre, un pentaèdre, un hexaèdre, un octaèdre... un dodécaèdre, un icosaèdre, etc., selon qu'il possède quatre, cinq, six, etc. huit, douze, vingt, etc., faces.

Par définition, un polyèdre convexe est **régulier** lorsque toutes ses faces sont régulières et égales. De plus, un polygone convexe régulier a tous ses angles polyèdres égaux, ce qui signifie que tous les tous ses sommets arrivent à un nombre égal de faces.
On peut distinguer donc, des polyèdres réguliers et semi-irréguliers.

VII.4.a. <u>Les polyèdres réguliers et semi-réguliers :</u>

Un polyèdre régulier est un solide qui possède les propriétés suivantes :
- Des faces polygonales régulières et égales.
- Des angles dièdres égaux.
- Des angles polyèdres égaux.
- Une sphère circonscrite (passant par des sommets).
- Une sphère inscrite (tangente en chacune de ses faces).

Les polyèdres réguliers sont au nombre de cinq (05), appelés aussi les ***solides de Platon*** (voir figure 74).

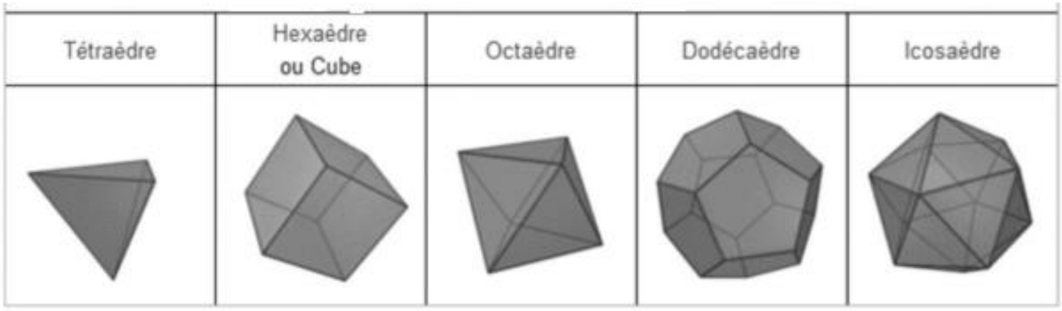


Figure 74 : Les polyèdres réguliers dits de de *Platon.*

Les polyèdres semi-réguliers répondent à quelques propriétés des polyèdres réguliers, auxquelles s'en ajoutent d'autres. On dénombre treize (13) polyèdres semi-réguliers, qui sont regroupés sous le nom de ***solides d'Archimède*** (voir figure 75).

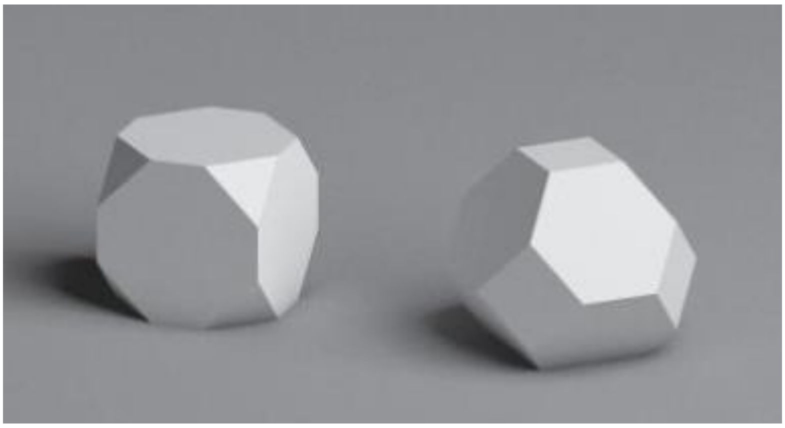


Figure 75 : Les polyèdres semi-réguliers dits d'Archimède, le cube tronqué et l'octaèdre tronqué

VII.4.b. Polyèdres concaves et polyèdres convexes :

Un polyèdre convexe est un polyèdre entièrement situé dans l'un des demi-espaces déterminés par le plan d'une face quelconque. En termes simples, un polyèdre convexe peut être posé sur chacune de ses faces. A contrario, un polyèdre concave est celui qui possède au moins une face sur laquelle il ne peut pas être posé.

Les cinq solides de *Platon* sont des solides convexes.

VII.4.c. Les polyèdres étoilés :

Aux cinq polyèdres réguliers convexes, on peut associer les quatre polyèdres réguliers étoilés qui en dérivent, appelés aussi polyèdres de *Kepler-Poinsot* (voir figure 76).

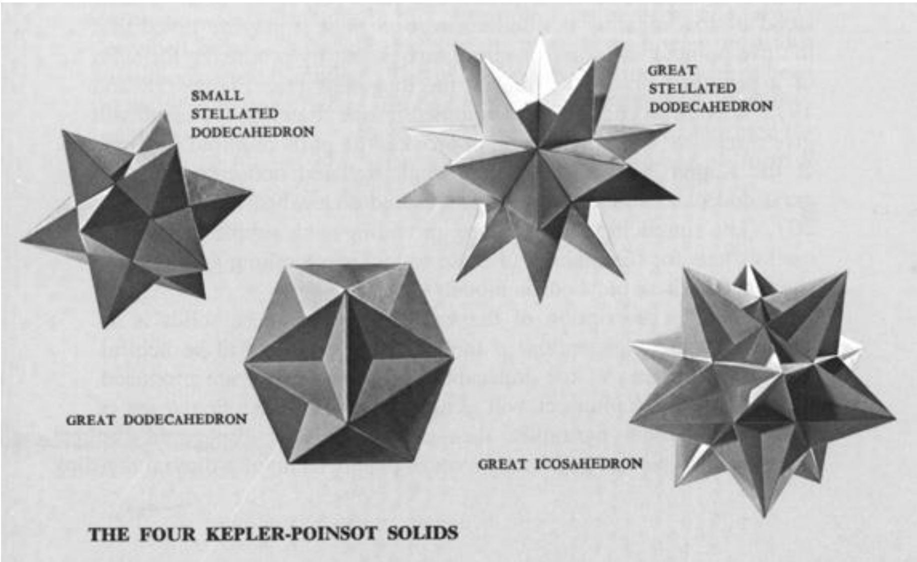


Figure 76 : Les polyèdres étoilés.

VII.4.d. Le tétraèdre régulier :

C'est le polyèdre régulier formé par quatre triangles équilatéraux égaux, joints trois par trois à chaque sommet. Il a six arêtes et quatre sommets. Il n'a pas de diagonales (voir figure 77).

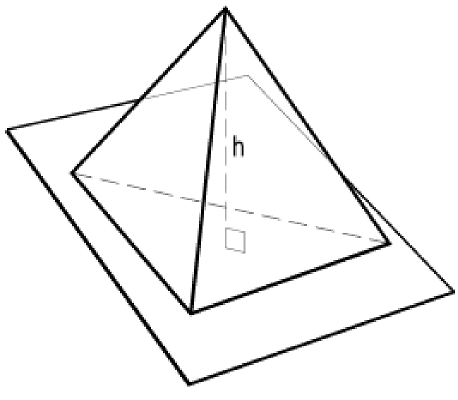


Figure 77 : Un tétraèdre régulier

VII.4.e. Hexaèdre régulier

C’est le polyèdre formé par six faces carrées ou rectangulaires.
Le hexaèdre régulier, communément appelé cube, possède douze arêtes, huit sommets et quatre diagonales qui sont égales et sécantes en un point (O), qui est le centre du solide.
Leurs faces sont soit parallèles, soit perpendiculaires (voir figure 78).

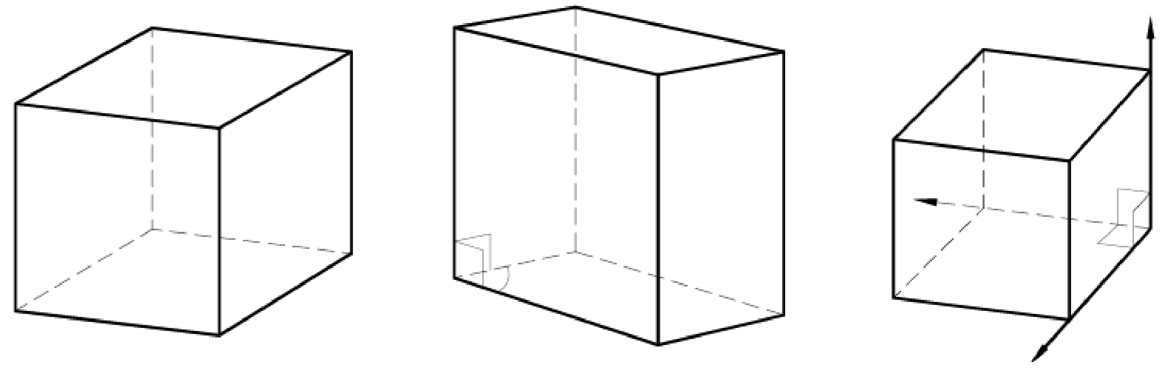


Figure 78 : Des Héxaèdres réguliers

VII.4.f. Octaèdre régulier :

C’est le polyèdre régulier formé par huit triangles équilatéraux égaux, reliés quatre à quatre à chaque sommet. Il a douze arêtes, six sommets et trois diagonales qui sont égales, perpendiculaires. Ces diagonales se coupant en leur milieu, en un point **(O)**, qui est le centre du solide (voir figure 79).

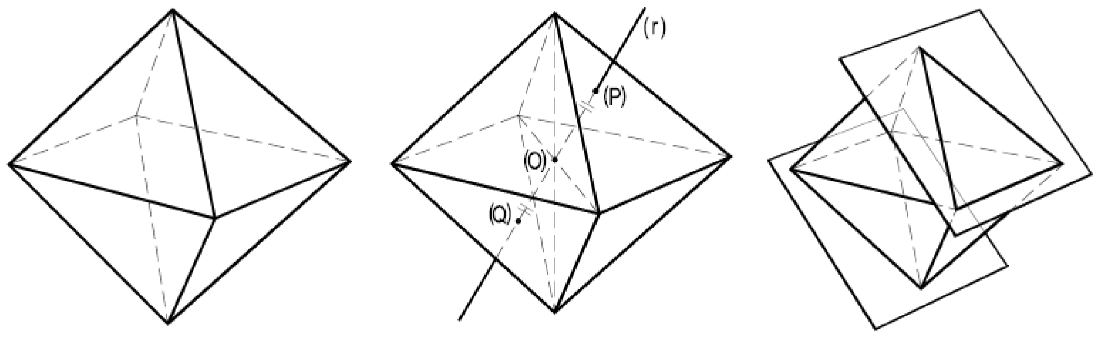


Figure 79 : Un octaèdre régulier

VII.4.g. Dodécaèdre régulier

C’est le polyèdre formé par vingt triangles équilatéraux égaux, joints cinq à cinq à chaque sommet. Il a trente arêtes, douze sommets et trente-six diagonales (voir figure 80 à gauche).

VII.4.h. Icosaèdre régulier :

C’est le polyèdre formé par douze pentagones convexes réguliers égaux, reliés trois à trois à chaque sommet. Il a trente arêtes, vingt sommets et cent diagonales (voir figure 80 à droite).

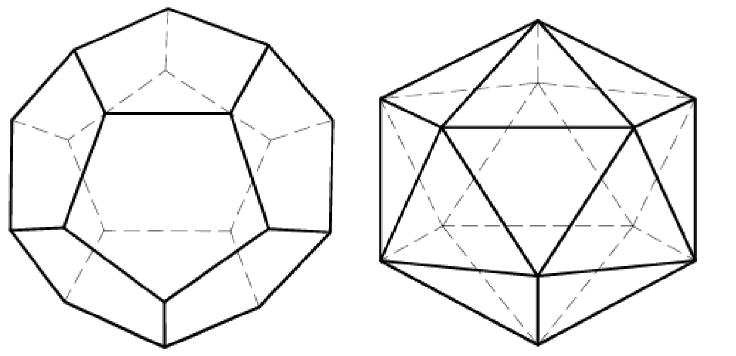


Figure 80 : Dodécaèdre et icosaèdre réguliers

VII.4.i. <u>Les prismes :</u>

Le prisme est le polyèdre délimité par une surface prismatique fermée et par deux plans parallèles qui coupent tous les bords de la surface, produisant les bases du solide. La distance **h** entre ces deux plans est appelée la hauteur du prisme.
Les prismes peuvent être droits ou obliques, selon, respectivement, si les arrêtes latérales sont perpendiculaires ou obliques aux plans de leurs bases. Les bases de chaque prisme sont égales entre elles et ses faces latérales sont des parallélogrammes ou, dans des cas particuliers, des rectangles, ou des carrés.
Les bords latéraux de chaque prisme sont non seulement parallèles les uns aux autres, mais aussi égaux les uns aux autres. Ces arêtes latérales mesurent la hauteur du solide si le prisme est droit.
Tout prisme dont la base est un parallélogramme est appelé un parallélépipède (voir figure 81).

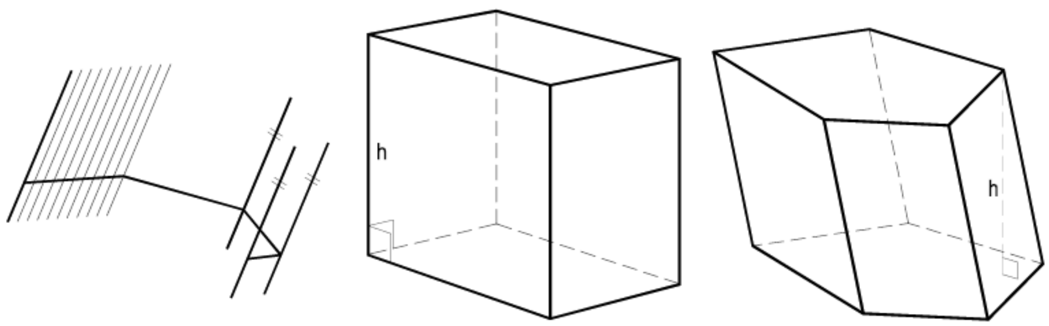


Figure 81 : Les prismes

VII.4.j. <u>Les pyramides :</u>

La surface pyramidale d'une feuille est la surface générée par le déplacement d'un rayon d'origine fixe reposant continuellement sur les arrêtes d'une ligne polygonale fixe, non coplanaire avec cette origine.
Les portions de plans délimitées par deux arêtes consécutives sont les faces latérales de la pyramide (voir figure 82).

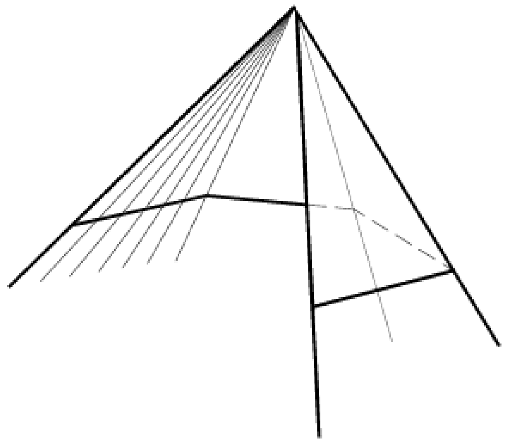
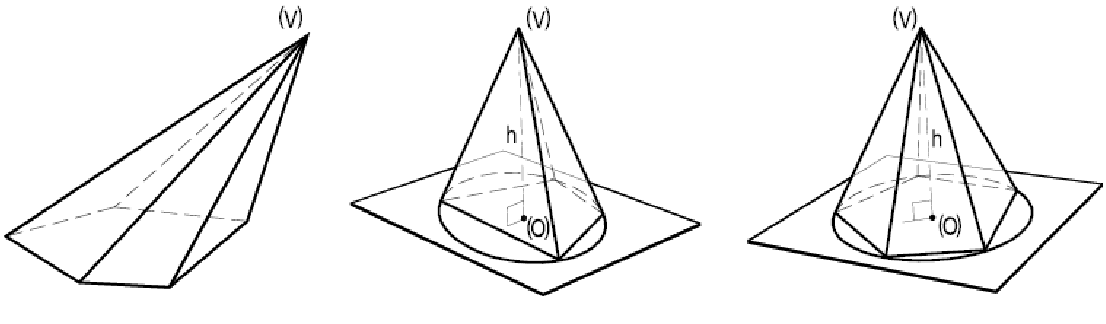


Figure 82 : La formation de la pyramide

Par définition, une pyramide est le polyèdre délimité par une surface pyramidale fermée et par un plan qui coupe tous les bords de la surface (voir figure 83-a).
Le sommet de la surface est appelé sommet de la pyramide et sa distance **h** au plan de la base est la hauteur du solide.
Une pyramide est dite droite lorsque sa base est un polygone inscrit dans un cercle et que la projection orthogonale du sommet du solide coïncide avec le centre du cercle (voir figure 83-b).Une pyramide est dite oblique dans tous les autres cas.
Dans le cas particulier où la base d'une pyramide droite est un polygone régulier, le solide s'appelle une pyramide régulière (voir figure 83-c).



-a- -b- -c-

Figure 83 : Les pyramides régulières et irrégulières

VII.5. **<u>Représentation des polyèdres :</u>**

La représentation d'un polyèdre se ramène à celle du point et de la droite ; il suffit, en effet, après avoir construit les projections de tous ses sommets, de les joindre deux à deux de manière à obtenir les projections de toutes ses arrêtes. Lorsque ce premier problème est résolu, il faut distinguer les arrêtes vues des arrêtes cachées, et représenter chacune d'elles par les traits conventionnels. Cette opération s'appelle **la ponctuation de l'épure**. Cette ponctuation doit être faite séparément pour les deux projections (horizontale et frontale) (voir figure 84).

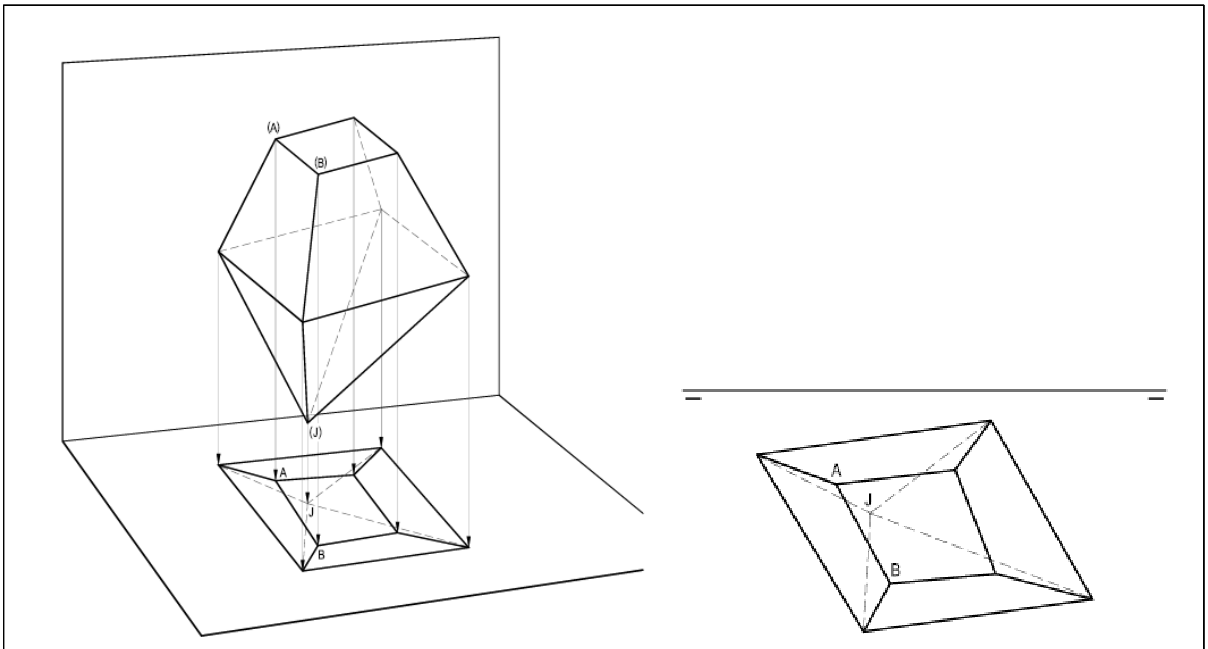


Figure 84 : Ponctuation (visualisation) de l'épure d'un polyèdre

Lorsque, dans une projection, deux arêtes inverses d'un polyèdre convexe se présentent sous formes de lignes sécantes, l'une doit être visible et l'autre doit être cachée.

<u>Exemple</u> : il suffit d'observer la figure 85, la droite **(MN)** est une droite verticale /

M є AC

et **N є BD**

La projection horizontale de la droite (MN) donne deux points confondus **M ≡ N**. Ceci signifie que

l'éloignement de M = l'éloignement de N

La question est de déterminer quelle arrête sera vues et quelle arrête sera cachée ?

Nous remarquons que :

La côte de M > la côte de N

Donc : en projection horizontale, le segment **AC** sera visible tandis que le segment **BD** sera caché.

Le même raisonnement s'applique sur la projection frontale du polyèdre afin de distinguer les arrêtes vues et les arrêts cachées. Sachant que :

R є AC

S є BD

On observant l'épure du polyèdre, il est possible de remarquer que :

La côte de R = la côte de S

Par contre :

L'éloignement de R > l'éloignement de S

Alors : c'est l'arrête **AC** qui sera visible sur la projection frontale du polyèdre.

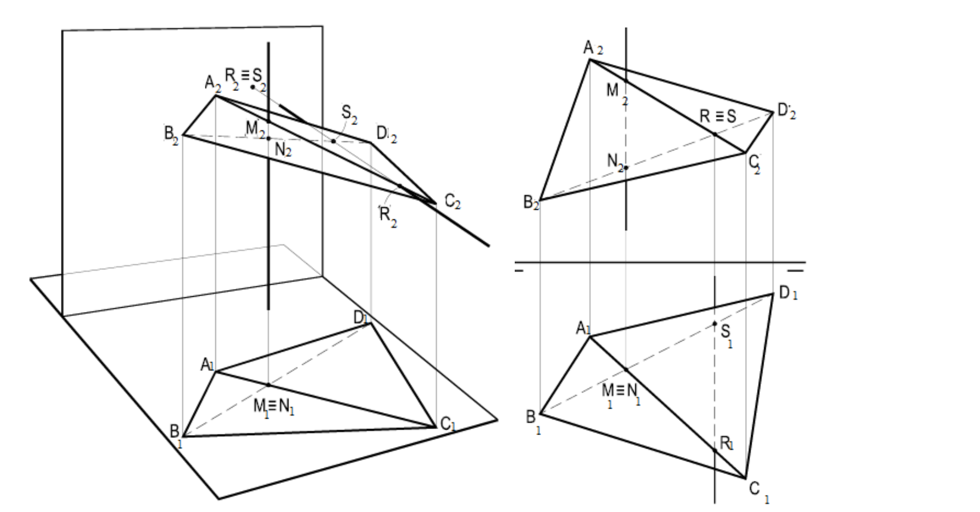


Figure 85 : Méthode de ponctuation (visualisation) de l'épure d'un polyèdre

VII.5.a. <u>Epure du tétraèdre régulier :</u>

Considérons un tétraèdre régulier **(JABC),** son sommet est le point **(J),** sa base est le plan **(ABC)** situé sur un plan horizontal **(γ)**, ce qui implique que le contour apparent de sa projection horizontale **ABC** est réalisée en **V.G.** et que cette projection est complétée par les trois segments JA, JB et JC qui relient le somment **J** aux sommets **A, B et C** (voir figure 86-a).

En faisant tourner le triangle équilatéral **ABC** d'une position quelconque (voir figure 86-a) à une position particulière où l'arête (**BC**) devient une droite frontale-horizontale (voir figure 86-b), ensuite l'arête (**BC**) devient une droite de bout (voir figure 86-c) ; nous pouvons observer comment leurs projections frontales du tétraèdre changent, notamment le triangle $\mathbf{J_2B_2C_2}$.

Sur la figure 86-a, le triangle $\mathbf{J_2B_2C_2}$ est un triangle quelconque, où la droite **JA** est une droite quelconque.

Sur la figure 86-b, le triangle $\mathbf{J_2B_2C_2}$ est un triangle isocèle, où la droite **JA** est une droite de profil. Sa hauteur est $\mathbf{J_2A_2}$, et $\mathbf{J_2B_2 \equiv J_2C_2}$

Sur la figure 86-c, le triangle $\mathbf{J_2B_2C_2}$ est un triangle isocèle où $\mathbf{J_2B_2 \equiv J_2C_2}$; et où les hauteurs de deux triangles de face **(JBC)** et **(ABC)** sont représentées en V.G. sur $\mathbf{P_2}$. Ce qui aboutit à une autre construction pour la détermination de V.G. de la hauteur du tétraèdre.

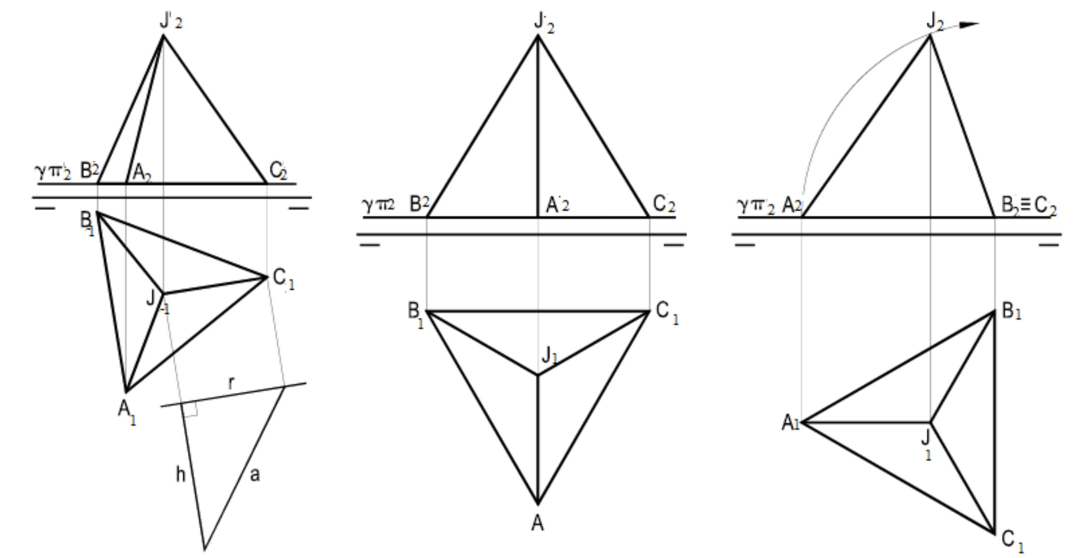


Figure 86 : Epure d'un tétraèdre régulier

VII.5.b. <u>Epure de l'Hexaèdre régulier :</u>

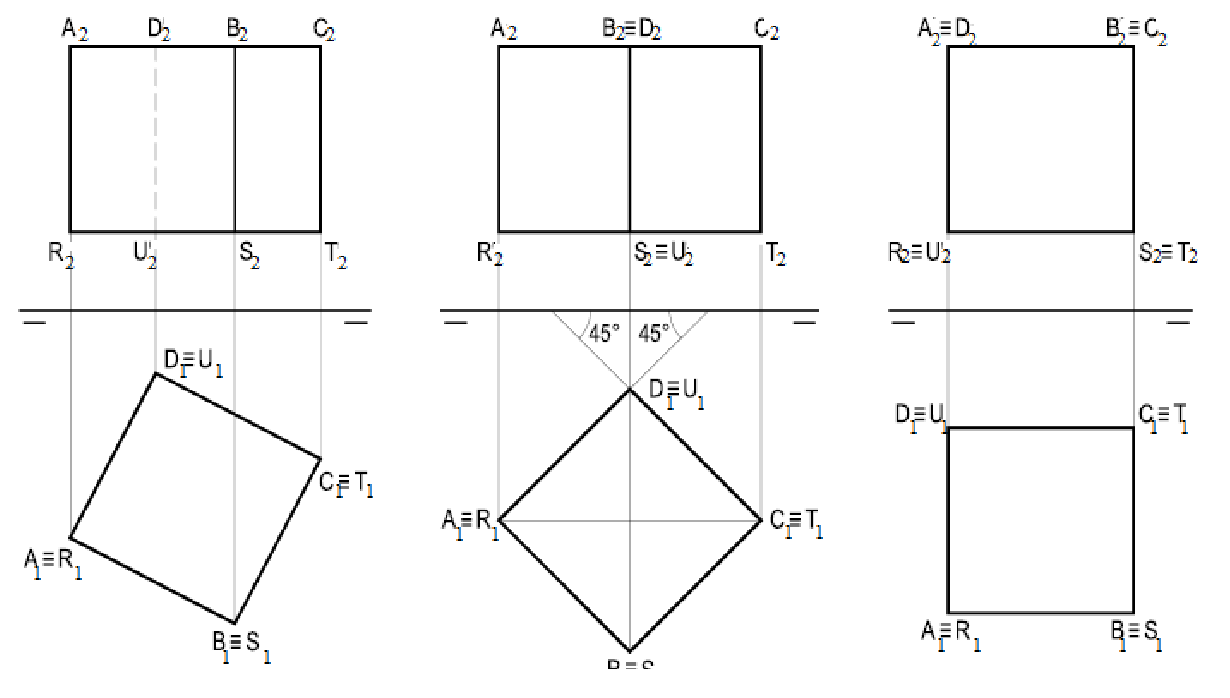
Étudions d'abord un hexaèdre régulier qui possède deux faces opposées **(ABCD)** et (**RSTU**) qui sont des plans horizontaux, donc se projettent en un G.V. sur **P_1** et, coïncident, car les arrêtes reliant leurs sommets respectifs sont verticales, ce qui réduit leurs projections horizontales à un carré égal à la face du cube.

En partant d'une position quelconque de ces deux faces par rapport à **P_2**, la projection frontale du cube donne un rectangle (voir figure 87-a).

Nous procédons, ensuite, à une rotation du solide autour d'une des arrêtes verticales, jusqu'à ce que les deux arrêtes intérieures coïncident à l'intérieur du contour sur **P_2,**

Cela se produit lorsque tous les côtés du cube sont inclinés à 45° par rapport à **P_2** (voir figure 87-b).

En poursuivant une telle rotation, après avoir traversé d'autres positions génériques similaires à celle d'origine (voir figure 87-a), on arrive à la situation la plus particulière (voir figure 87-c) dans laquelle les faces du solide sont, deux à deux, horizontales, frontales et de profil, ce qui signifie que leurs projections sont deux carrés égaux à leurs faces.



-a- -b- -c-

Figure 87 : Epure d'un hexaèdre régulier

VII.5.c. <u>Epure de l’octaèdre régulier :</u>

Il est donné un octaèdre régulier **(JABCDS)** ayant une diagonale verticale **(JS)**, ce qui implique que le contour apparent de sa projection horizontale est un carré **ABCD**, V.G. de la section diagonale **(ABCD)** qui, puisqu’elle appartient à un plan perpendiculaire à la diagonale **(JS)**, doit être horizontale.
Considérons ensuite comment leurs projections verticales varient, à partir d’une situation quelconque (voir figure 88-a) aux situations particulières dans lesquelles le plan diagonaux contenant **(JS)** est frontal (voir figure 88-b) et de profil (voir figure 88-c).

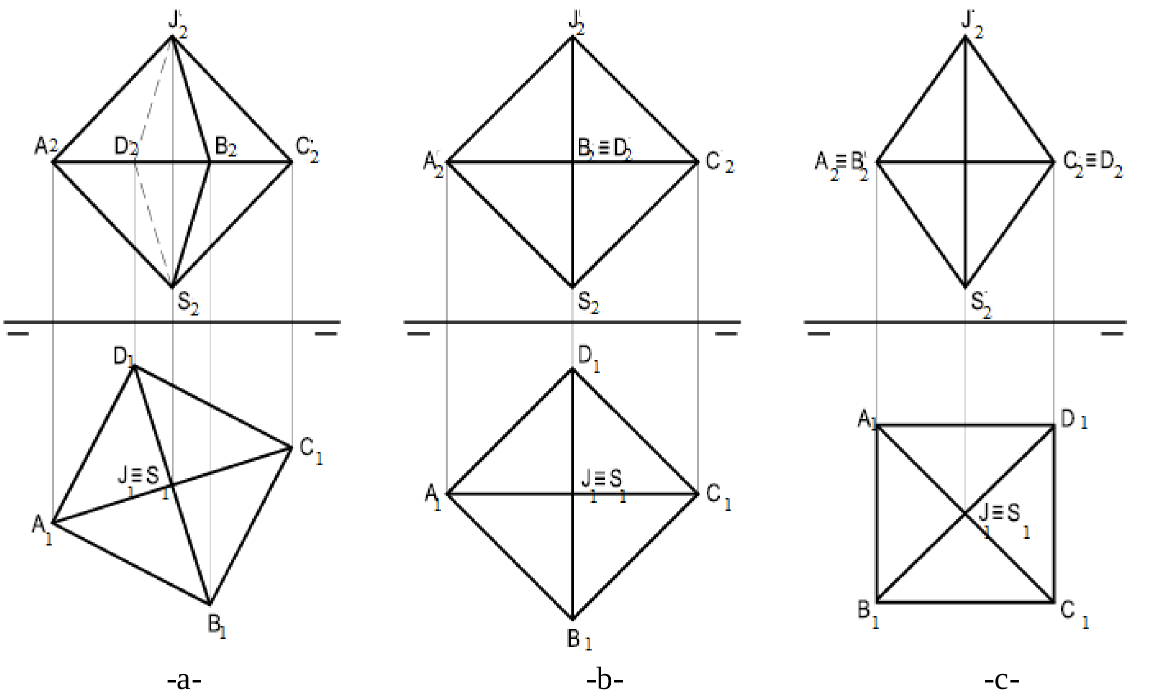


Figure 88 : Epure d’un octaèdre régulier

Les projections frontales ont, pour contours, des losanges, dont une diagonale $\mathbf{J_2S_2}$ est la V.G. de la diagonale du solide. Les autres diagonales **(AC)** et **(BD)** varient en longueur selon les positions des faces du solide par rapport à $\mathbf{P_2}$.
Ainsi, la diagonale $\mathbf{A_2C_2}$ atteint sa longueur maximale lorsque toutes les faces du solide sont également inclinées par rapport à $\mathbf{P_2}$, ce qui rend les deux projections (horizontale et frontale) de l’octaèdre identiques (voir figure 88-b).
La valeur minimale de la diagonale $\mathbf{A_2C_2}$, égale à la largueur du solide lui-même, se produit lorsque la section diagonale **(ABCD)** est posée de façon à avoir deux arrêtes fronto-horizontales et deux arrêtes de bout (voir figure 88-c).

VII.6. **Sections planes des polyèdres :**

VII.6.a. Positions relatives entre un plan et un polyèdre :

Un plan peut, par rapport à un polyèdre, occuper trois positions :

- être externe au polyèdre, lorsqu'il n'atteint aucune de ses arêtes ni aucune de ses faces (figure 89 a) ;
- être supporté par le polyèdre, lorsqu'il a en commun avec le polyèdre un ou plusieurs sommets, ou même une face, mais sans le traverser (89 b) ;
- être sécant au polyèdre, lorsqu'il coupe certaines de ses arêtes ou faces (figure 89 c, 89 d).

Dans ce dernier cas, le polygone produit par l'intersection du plan sécant avec les arrêtes et les faces atteintes est appelée une section plane du polyèdre (figure 89 c, 89 d).
Comme nous analysons uniquement des polyèdres convexes, toutes les sections planes obtenues seront des polygones convexes.

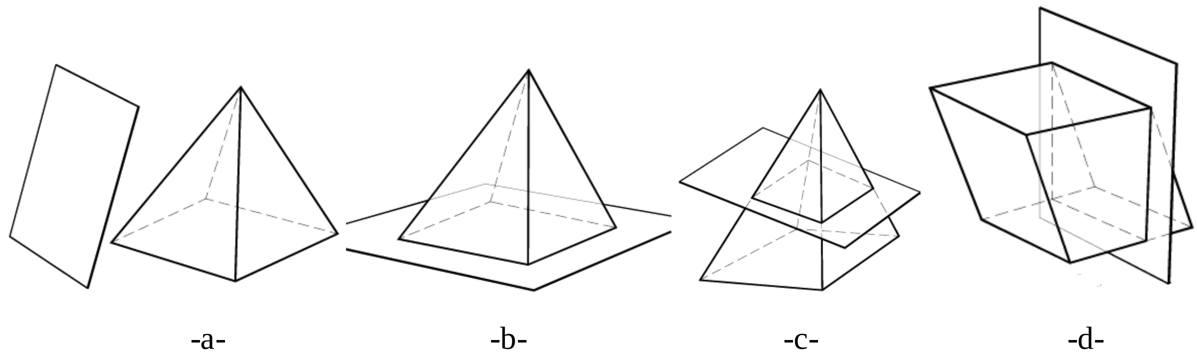


Figure 89 : Positions relatives entre un plan et un polyèdre

La situation est également particulière lorsque le polyèdre est un prisme (figure 90 a), ou un tronc de prisme (figure 90 b), et le plan sécant, coupant toutes les arrêtes latérales, est perpendiculaire à celles-ci. Le polygone produit est appelé une section droite du polyèdre.

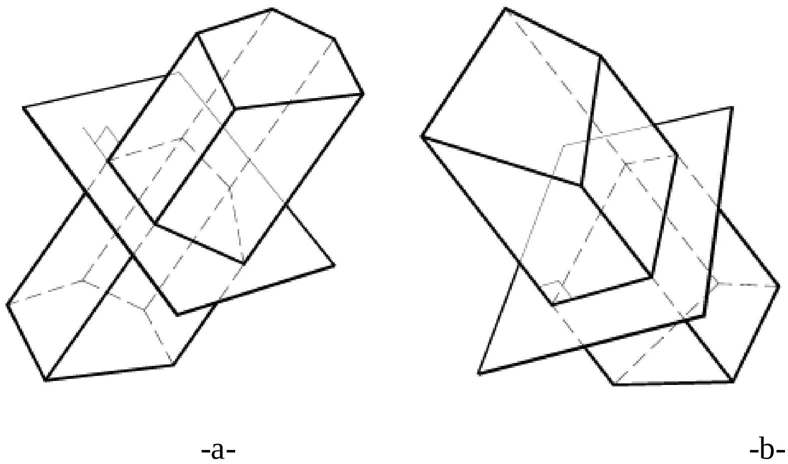


Figure 90 : Section droite d'un prisme et d'un tronc de prisme

Dans un prisme, ou dans un tronc de prisme, il y a une infinité de sections droites, toutes celles produites par les innombrables plans qui coupent, perpendiculairement, toutes les arrêtes latérales de ces polyèdres. En réalité, les sections droites dans un prisme, ou dans un tronc de prisme, sont des sections droites relatives aux surfaces prismatiques qui limitent latéralement ces deux polyèdres, il y a, alors une infinité de sections droites dans ces surfaces.

A propos des sections droites dans un prisme, ou un tronc de prisme, il est connu que :
- parce que ces sections droites appartiennent à des plans parallèles, elles sont, pour un polyèdre donné, toutes égales entre elles ;
- pour chaque prisme, ou tronc de prisme considéré, la section droite n'est rien d'autre que la projection orthogonale de ses bases sur le plan perpendiculaire aux arrêtes latérales du prisme qui a produit cette section ;
- pour chaque prisme, ou tronc de prisme considéré, la section droite est, parmi toutes celles produites en sectionnant uniquement les arêtes latérales, celle qui a le plus petit périmètre et la plus petite superficie.

VII.6.b. <u>Section plane d'un tétraèdre :</u>

Étudier les sections planes spéciales que l'on peut obtenir dans le tétraèdre régulier, nous considérerons le solide reposent toujours sur $\mathbf{P_1}$ et qu'il est supporté par l'une de ses faces. Le polyèdre est coupé par un plan **(α).** nous commenterons les particularités, au cas par cas.

<u>1er cas :</u>

Toutes les sections produites par des plans parallèles à une face du tétraèdre régulier sont des triangles équilatéraux homothétiques à cette face (voir figure 91).

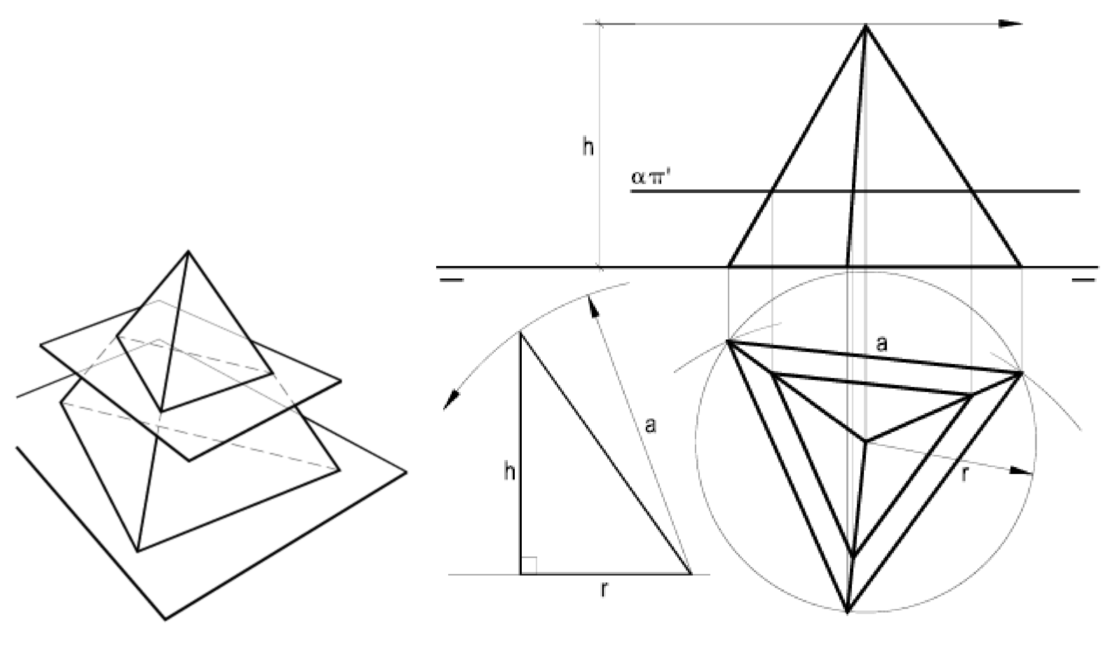


Figure 91 : Section plane d'un tétraèdre

2ème cas :

Tous les plans passant par l'une des arêtes du tétraèdre régulier coupent le solide selon les triangles isocèles (voir figure 92).

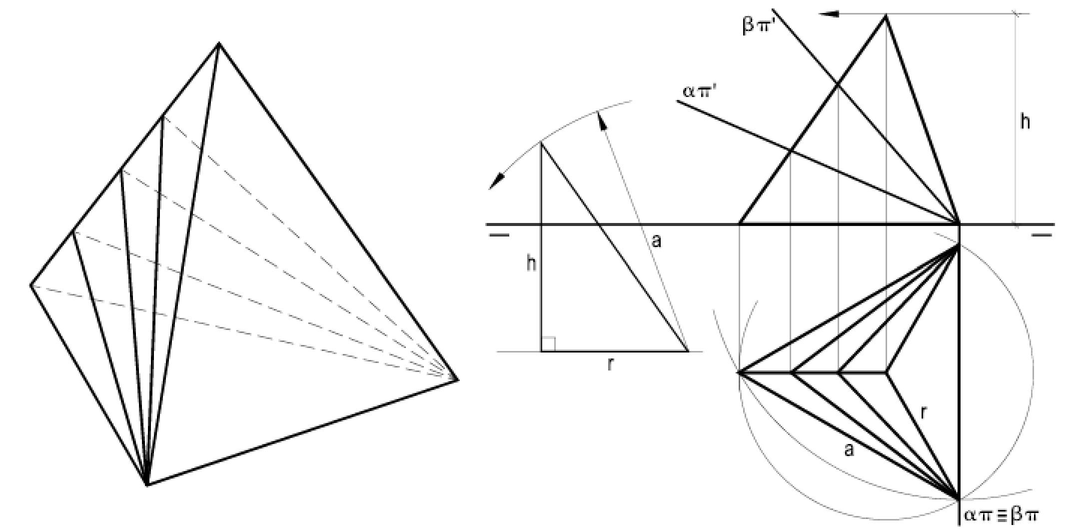


Figure 92 : Section plane d'un tétraèdre, produite par un plan passant par une de ses arrêtes.

3ème cas :

Les plans parallèles à une seule arrête du tétraèdre régulier, atteignant les trois faces du solide convergeant vers l'un de ses sommets, coupent ce tétraèdre selon des triangles isocèles (voir figure 93).

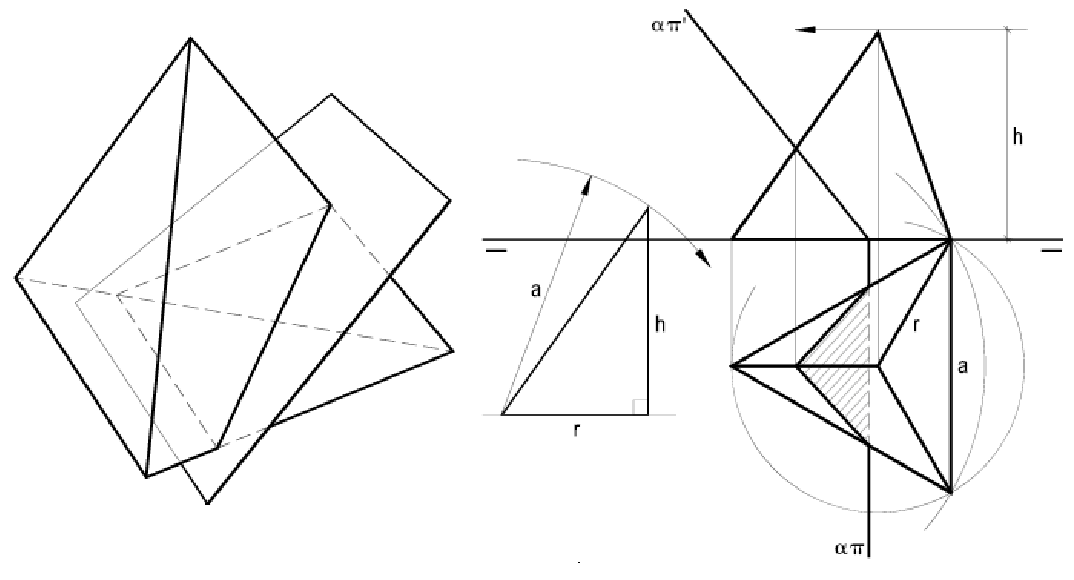


Figure 93 : Section plane d'un tétraèdre, produite par un plan parallèle à une de ses arrêtes, coupant trois faces du tétraèdre.

4ème cas :

Les plans parallèles à une seule arrête du tétraèdre régulier, atteignant les quatre arrêtes du solide, produisent des sections en forme des trapèzes isocèles (voir figure 94).

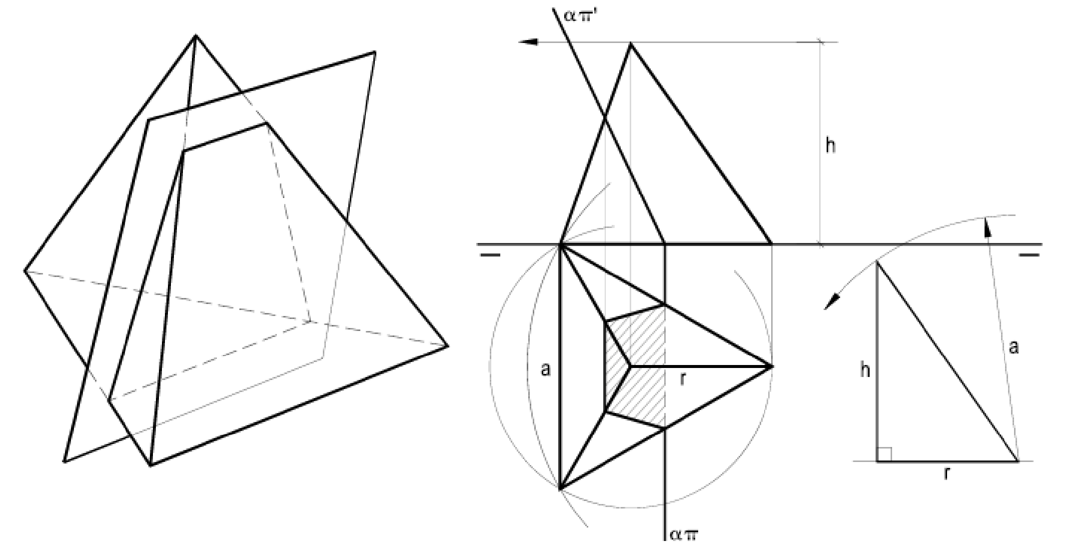


Figure 94 : Section plane d'un tétraèdre, produite par un plan parallèle à une de ses arrêtes, coupant les quatre faces du tétraèdre.

5ème cas :

Les plans parallèles à deux arêtes opposées du tétraèdre régulier produisent des sections planes rectangulaires (voir figure 94).

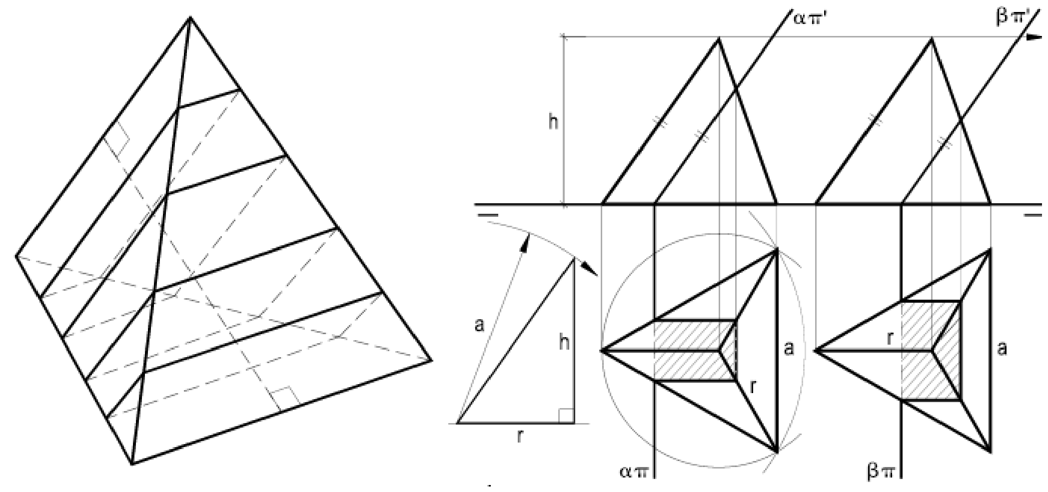


Figure 95 : Section plane d'un tétraèdre, produite par un plan parallèle à deux arrêtes opposée.

VII.6.c. <u>Section plane d'un hexaèdre régulier :</u>

Comme dans le cas du tétraèdre régulier, pour étudier les sections planes spéciales produites par l'intersection du polyèdre avec un plan **(α)**, nous considérerons que le solide repose toujours sur $\mathbf{P_1}$ et est supporté par une de ses faces.

1er cas :

- l'ensemble des sections produites dans un hexaèdre régulier par des plans parallèles à une face du solide sont carrés et égales à ses faces et sont des translations de cette face (voir figure 96).

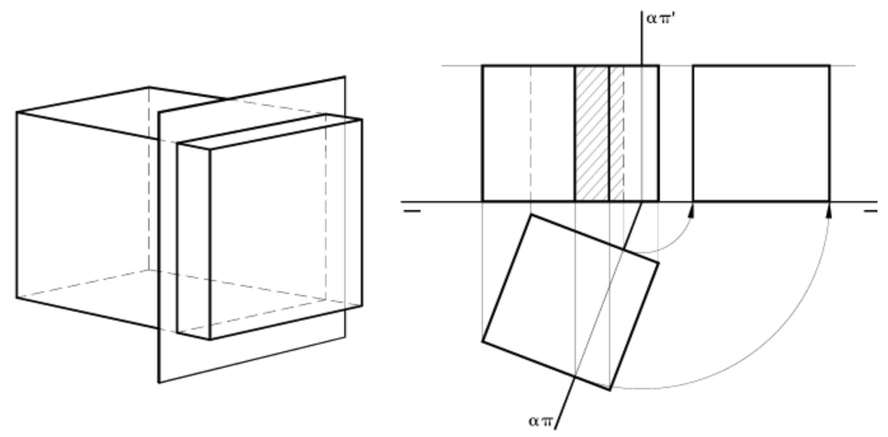


Figure 96 : Section plane d'un hexaèdre régulier produite par un plan parallèle à une de ses faces

2ème cas :

Les plans perpendiculaires à une face du cube produisent, dans le solide, des sections rectangulaires ou carrées (voir figure 97).

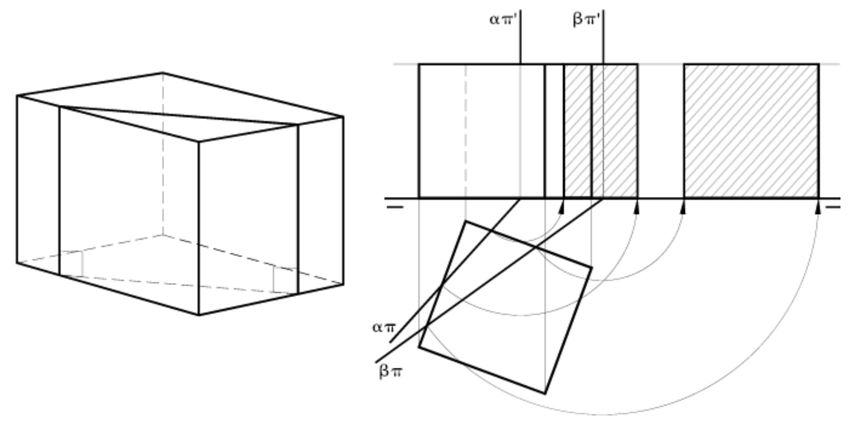


Figure 97 : Section plane d'un hexaèdre régulier produite par un plan perpendiculaire à une de ses faces.

3ème cas :

Tout plan qui coupe quatre arrêtes parallèles d'un hexaèdre, et seulement celles-ci, produit donc, sur le solide, un parallélogramme (voir figure 98).

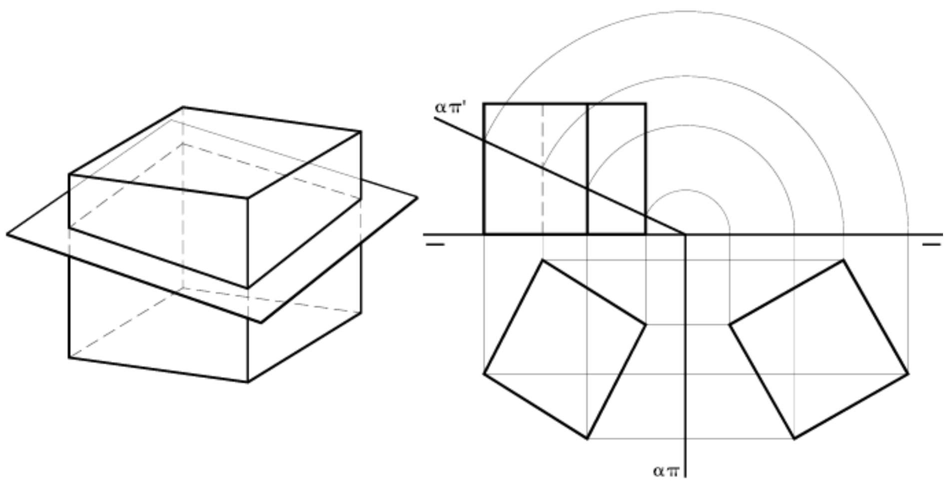


Figure 998 : Section plane d'un hexaèdre régulier produite par un plan coupant quatre arrêtes parallèles.

<u>4ème cas :</u>

Les plans perpendiculaires à une diagonale d'un cube produisent, dans le solide sections triangulaires équilatérales ou hexagonales équiangulaires selon qu'ils atteignent ou non les tiers extrêmes de la diagonale (figure 99) ou son tiers central (figure 100).

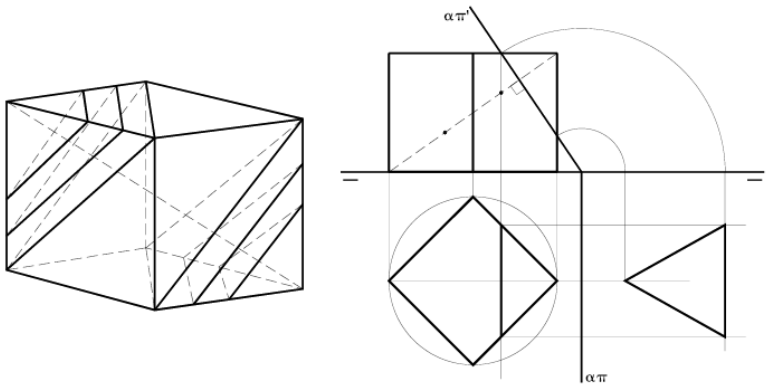


Figure 99 : Section plane d'un hexaèdre régulier produite par un plan perpendiculaire à une diagonale (1).

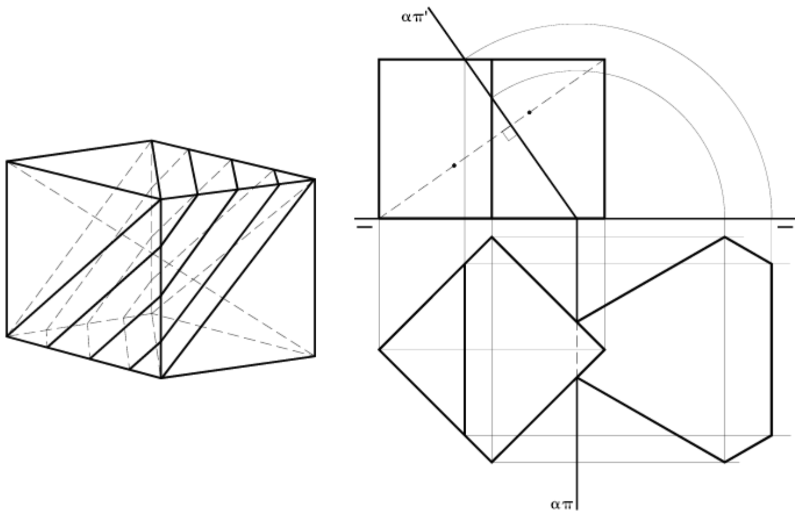


Figure 100 : Section plane d'un hexaèdre régulier produite par un plan perpendiculaire à une diagonale (2).

5ème cas :

L'hexagone à section équiangulaire, étudié ci-dessus, est régulier lorsque le plan de section **(β)** est la médiane de la diagonale de l'hexaèdre (voir figure 102).

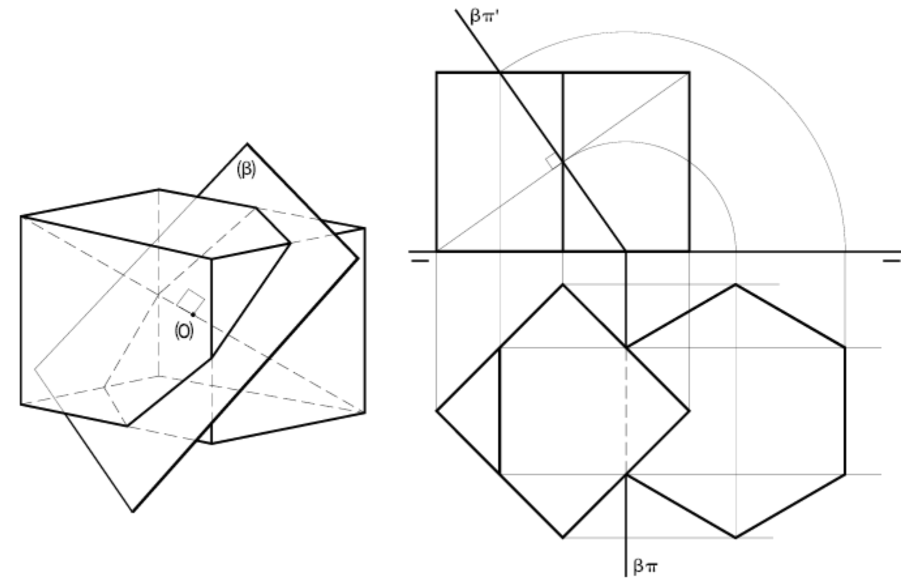


Figure 101 : Section plane d'un hexaèdre régulier produite par un plan perpendiculaire à une diagonale (3).

VII.6.d. Section plane d'un octaèdre régulier :

Pour étudier les sections planes spéciales de l'octaèdre régulier, nous considérons toujours le solide avec une de ses diagonales en position verticale.

1er cas :

Toutes les sections produites par des plans perpendiculaires à une diagonale de l'axe de l'octaèdre régulier sont des carrés, homothétiques à la section diagonale perpendiculaire à cette diagonale (voir figure 102).

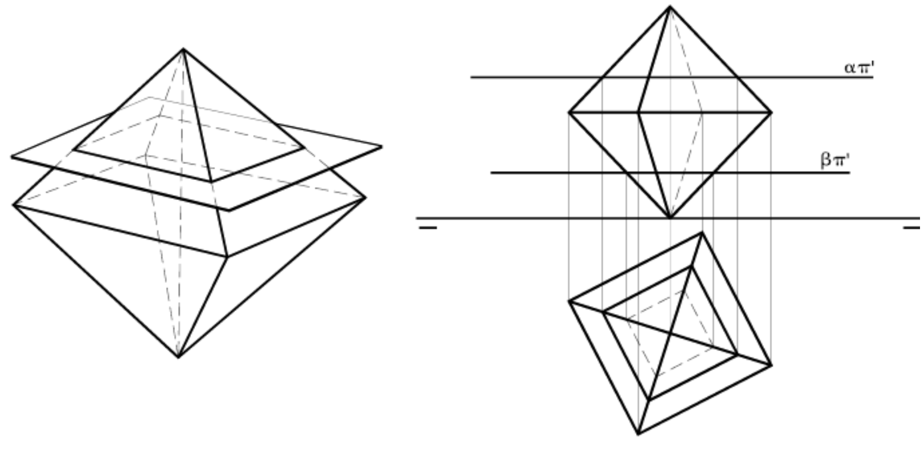


Figure 102 : Section plane produite par un plan perpendiculaire à une diagonale de l'axe de l'octaèdre.

<u>**2ème cas :**</u>

Tous les plans contenant la diagonale de l'axe de l'octaèdre régulier coupent le solide selon un losange (voir figure 103).

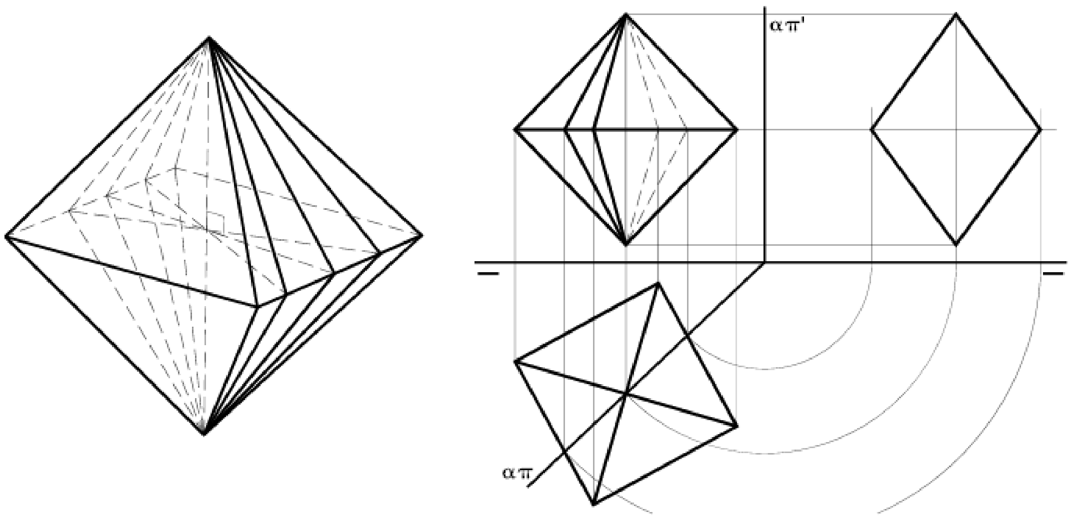


Figure 103 : Section plane produite par un plan contenant la diagonale de l'axe de l'octaèdre.

<u>**3ème cas :**</u>

Lorsque le plan sécant contient une seule arrête de l'octaèdre régulier, la section produite est un trapèze isocèles (voir figure 104).

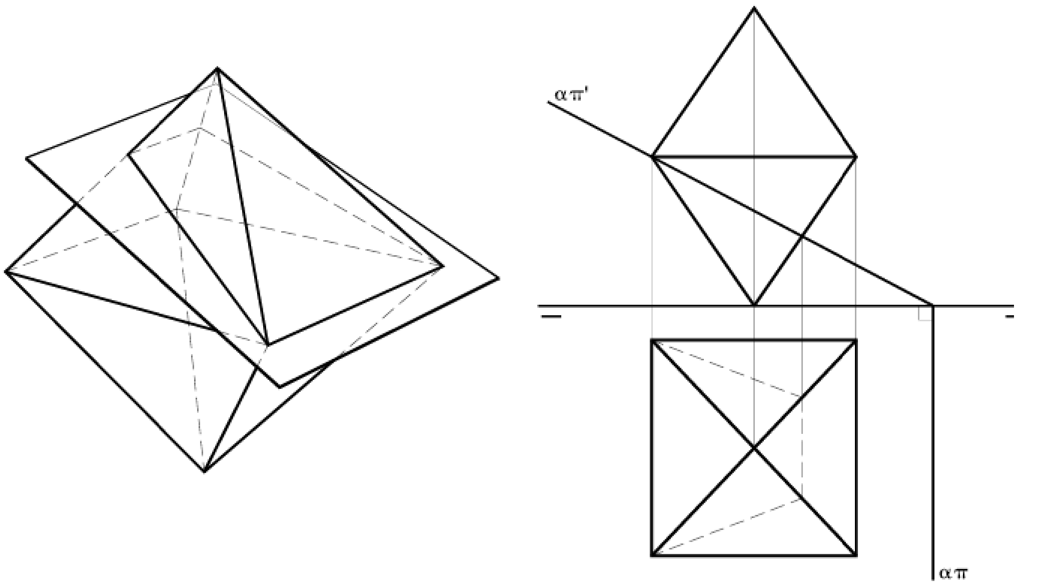


Figure 104 : Section plane produite par un plan contenant une seule arrête de l'octaèdre.

4ème cas :

Tous les plans parallèles à seulement deux arrêtes parallèles et sécants à seulement quatre arêtes de l'octaèdre régulier, coupent ce dernier selon des trapèzes. Ces plans doivent être parallèles à un plan appartenant à une arrête de l'octaèdre (cas précédent) (voir figure 105).

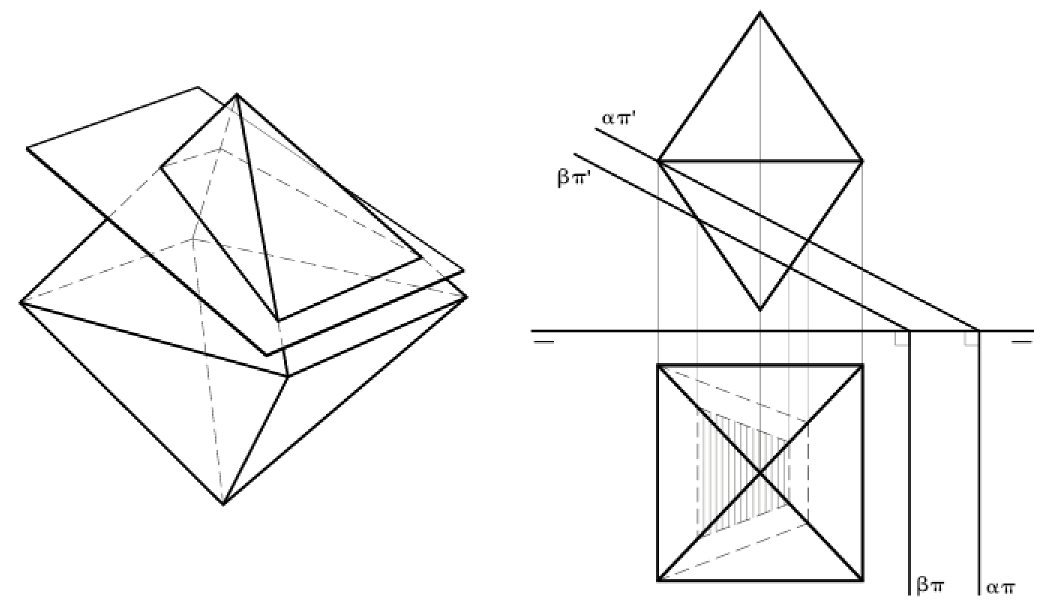


Figure 105 : Section plane produite par un plan parallèle à deux arrêtes de l'octaèdre, le coupant en quatre arrêtes.

5ème cas :

Tous les plans parallèles à deux faces opposées de l'octaèdre régulier produisent des sections hexagonales équiangulaires (voir figure 106).

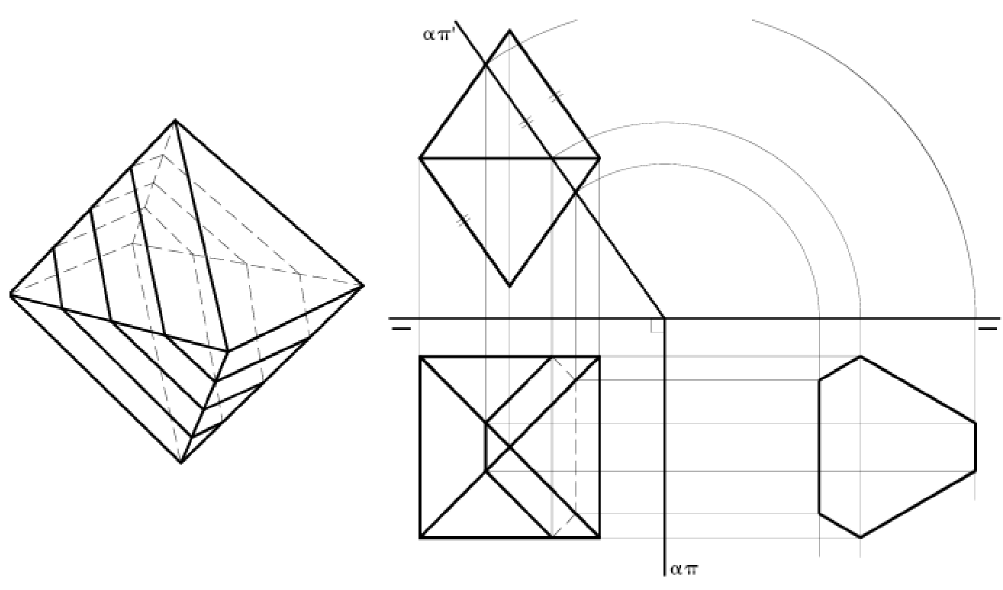


Figure 106 : Section plane produite par un plan parallèle à deux faces opposées de l'octaèdre.

$6^{ème}$ cas :

Dans le cas particulier où le plan sécant, en plus d'être parallèle à deux faces opposées, est équidistant de celles-ci, c'est-à-dire passant par le centre du solide, la section hexagonale est régulière (voir figure 107).

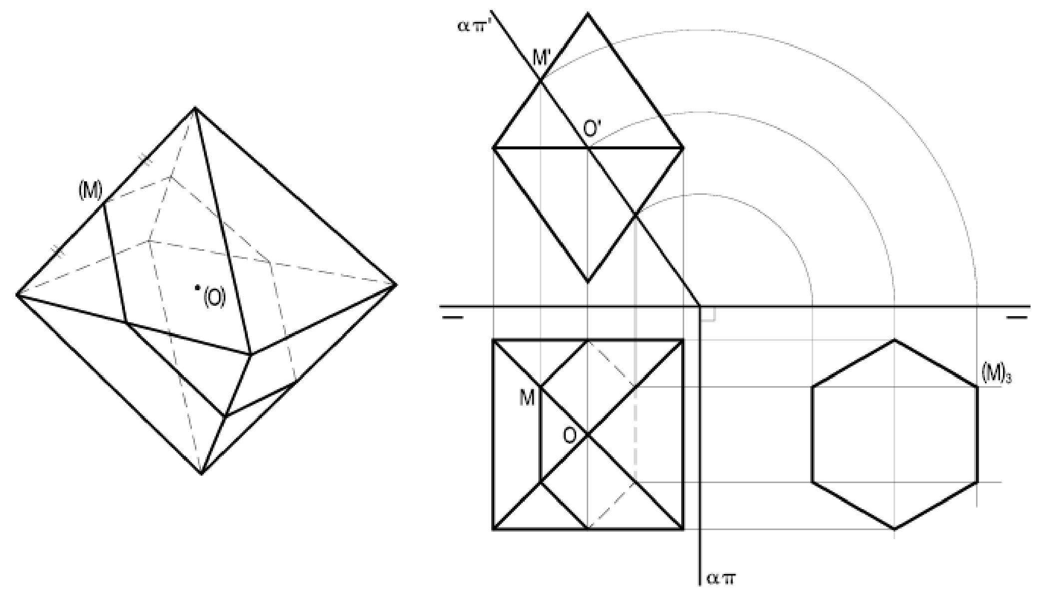


Figure 107 : Section plane produite par un plan parallèle à deux faces opposées de l'octaèdre, passant par son centre.

VII.6.e. Section plan d'un prisme :

Comme dans les études précédentes, afin d'apprécier les sections planes spéciales produites dans les prismes et les troncs de prismes, nous considérerons toujours que les solides reposent sur $\mathbf{P_1}$ et sont supportés par une de leurs bases.

1^{er} cas :

Toutes les sections planes produites dans le parallélépipède par des plans qui coupent les quatre arrêtes parallèles du solide sont des parallélogrammes (voir figure 108).

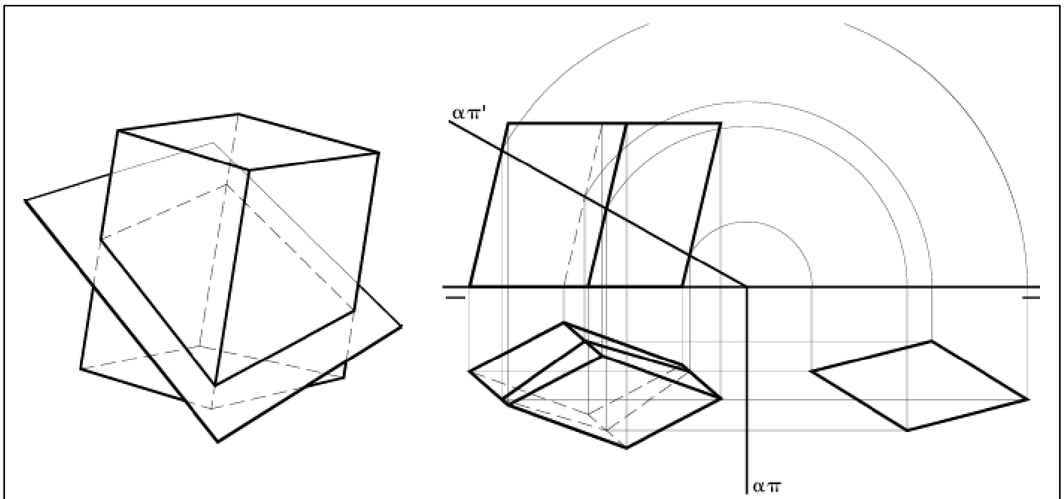


Figure 108 : Section plane produite par un plan coupant quatre arrêtes parallèles d'un prisme

2ème cas :

Tous les plans parallèles aux bases d'un prisme, ou à l'une des bases d'un tronc de prisme, produisent des sections planes égales, par translation, à la base à laquelle ils sont parallèles (voir figure 109).

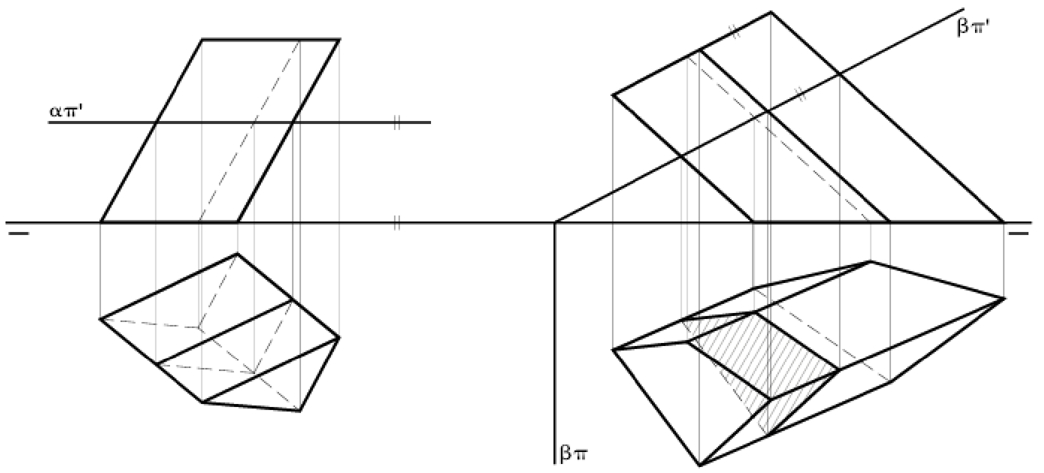


Figure 109 : Section plane produite par un plan parallèle aux bases d'un prisme, et parallèle à l'une des bases d'un tronc de prisme

3ème cas :

Tout plan parallèle aux arrêtes latérales d'un prisme produit, dans le prisme une section en forme de parallélogramme, car les faces latérales qu'il touche sont coupées dans une direction qui lui est parallèle (voir figure 110).

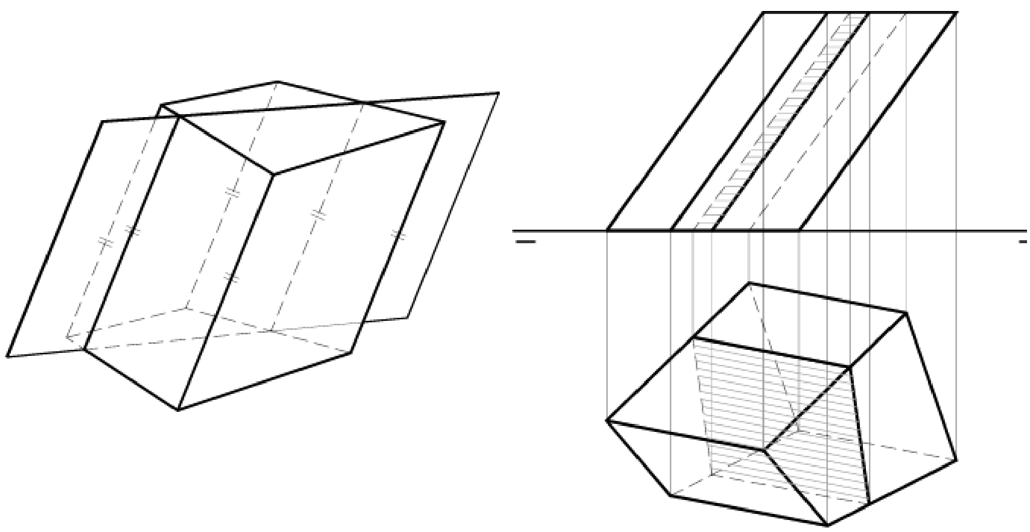


Figure 110 : Section plane produite par un plan parallèle aux arrêtes latérales d'un prisme.

VII.6.f. Section plane d'une pyramide :

Comme au précédent, pour l'étude des sections planes, on considérera que les solides sont appuyés sur leur base sur **P_1**.

1er cas :

Tout plan parallèle à la base d'une pyramide, ou à l'une des bases d'un tronc de pyramide, produit, par section, un polygone homothétique à celui de la base à laquelle il est parallèle (voir figure 111).

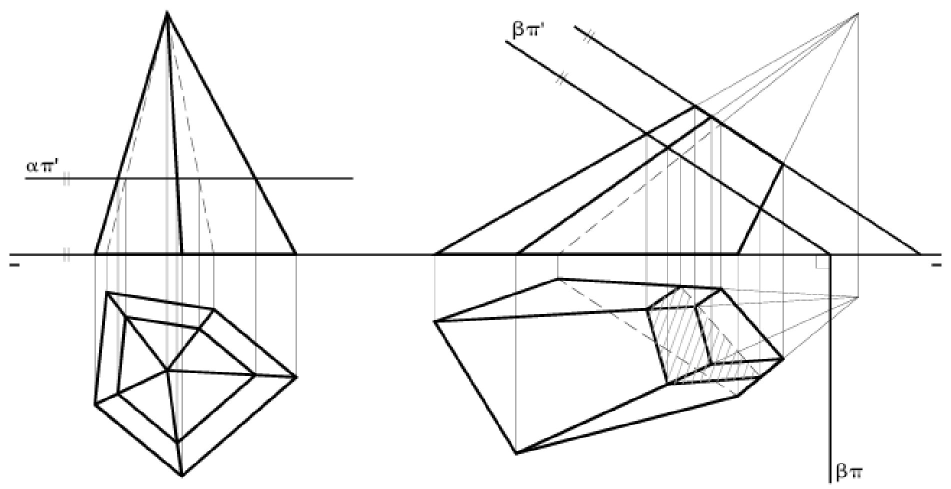


Figure 111 : Section plane produite par un plan parallèle à la base d'une pyramide ou d'un tronc de pyramide.

2ème cas :

Lorsqu'un plan coupe une pyramide et passe par son sommet, la section produite est un triangle.
Lorsqu'un plan, passant par un tronc de pyramide à bases parallèles, et qui contient le sommet de la pyramide de laquelle le tronc de pyramide a été extrait, la section produite est un trapèze (voir figure 112).

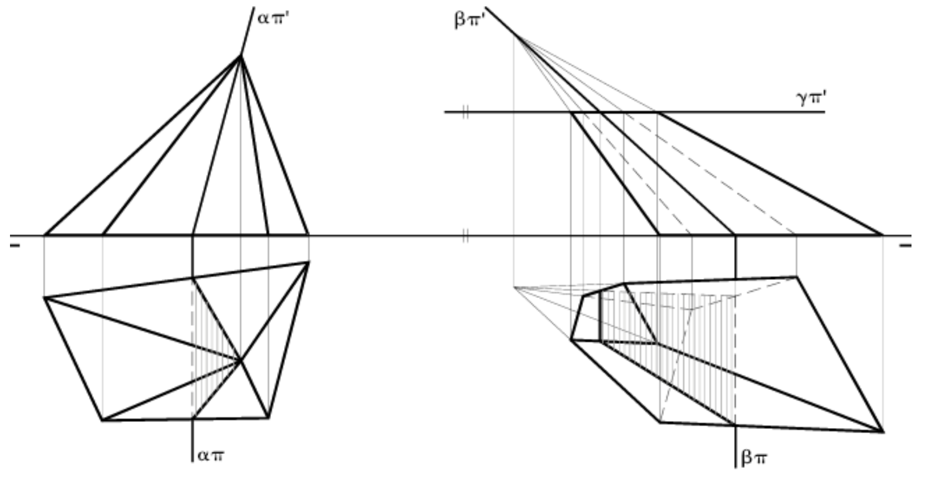
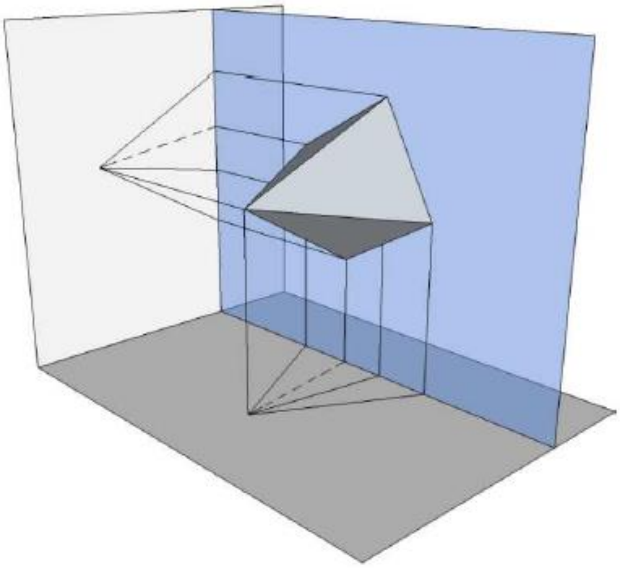


Figure 112 : Section plane produite par un plan contenant le sommet d'une pyramide.

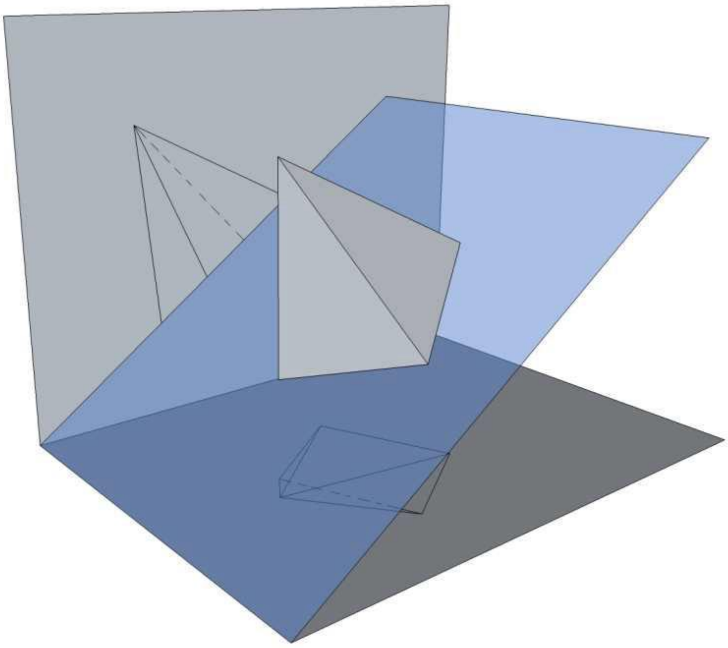
VII.7. **Exercice 1 :**

Soit la pyramide suivante, sa base appartient à un plan de profil. Réalisez son épure, sachant que sa base est carré de 4cm de longueur, et que sa hauteur h est de 6 cm.



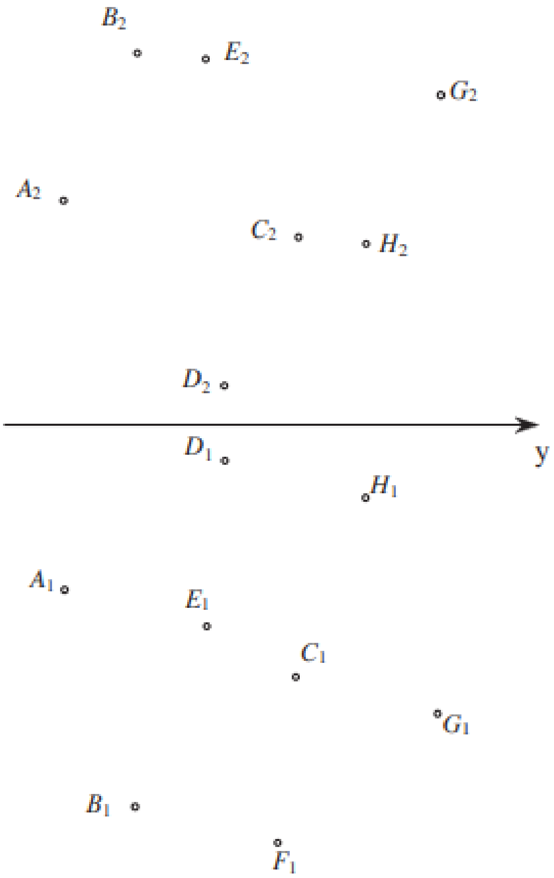
VII.8. **Exercice 2 :**

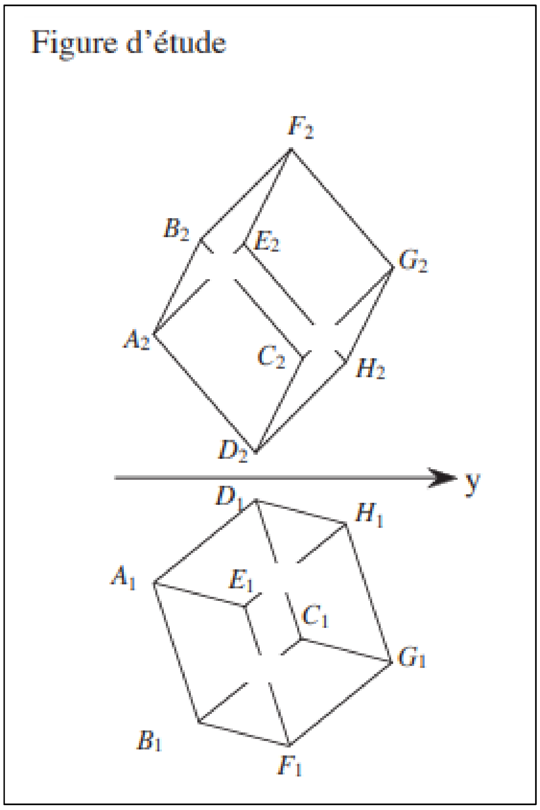
En se basant sur les mêmes données de l'exercice précédent, réalisez l'épure de la pyramide en sachant que sa base appartient à un plan de bout qui forme un angle de 45° avec P_1.



VII.9. <u>Exercice 3 :</u>

A l'aide de la figure d'étude, déterminer la position respective des différentes arêtes afin de pouvoir représenter la visibilité (trait pointillé pour les arêtes cachées) de la projection du parallélépipède ABCDEFGH ci-dessous





VIII. Méthode de conception des toitures inclinées

VIII.1. Généralités :

Les toitures en pentes sont composées de plusieurs plans inclinés. Ce sont une forme architecturale spéciale dont la conception revient à résoudre des problèmes relatifs à l'intersection des plans. L'objectif de ce chapitre est de présenter, à partir d'un cas pratique, la méthode qui permet de déterminer les propriétés géométriques des toitures en pente.

Nous appellerons les côtés du périmètre de la toiture **traces** et les intersections des plans qui la composent **intersections**.

La projection horizontale de chaque intersection des plans sera basée sur deux théorèmes principaux.

VIII.1.a. Théorème 1 :

L'**intersection** de deux plans dont les **traces** sont parallèles, sera une ligne parallèle passant par le point médian entre ces deux **traces**.

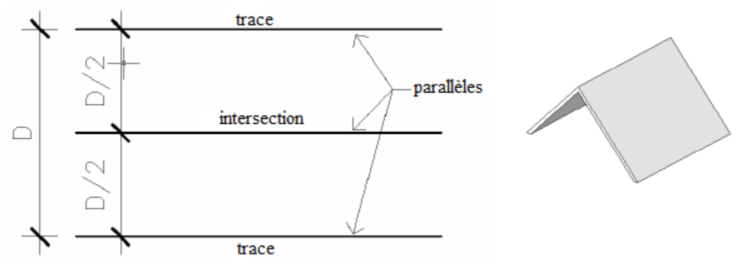


Figure 113 : Intersection de deux plans inclinés à traces parallèles.

VIII.1.b. Théorème 2 :

L'**intersection** de deux plans dont les **traces** se coupent à un point et forment un angle quelconque, sera la bissectrice de l'angle formé.

Dans l'exemple ci-contre les traces forment un angle de 90°, par conséquent, l'intersection divise l'angle en deux.

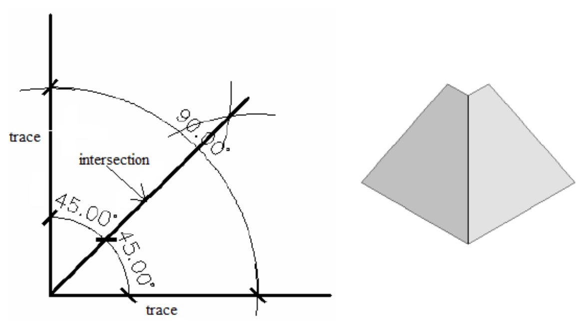


Figure 114 : l'intersection des deux plans est la bissectrice de l'angle formé par les traces.

Dans les deux exemples en face, les **traces** forment des angles différents de 90°, on voit alors que l'**intersection** correspond toujours à la bissectrice de l'angle.

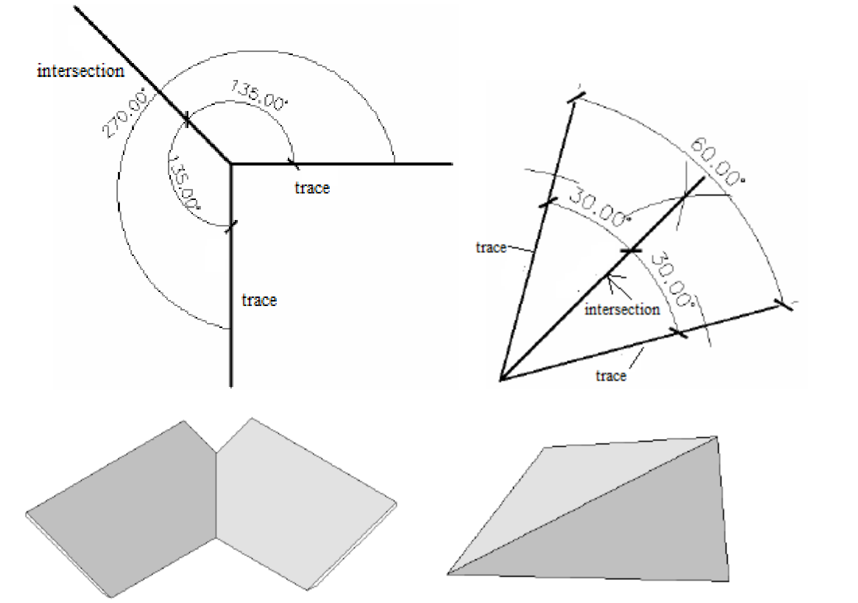


Figure 115 : L'intersection des plans est toujours la ligne bissectrice de l'angle formé par les traces

VIII.2. Application sur la conception d'une toiture à pans inclinés :

Le plan suivant représente le périmètre d'une toiture inclinée à quatre pans. A partir de ce plan, déterminer la géométrie des plans inclinés composant la toiture.

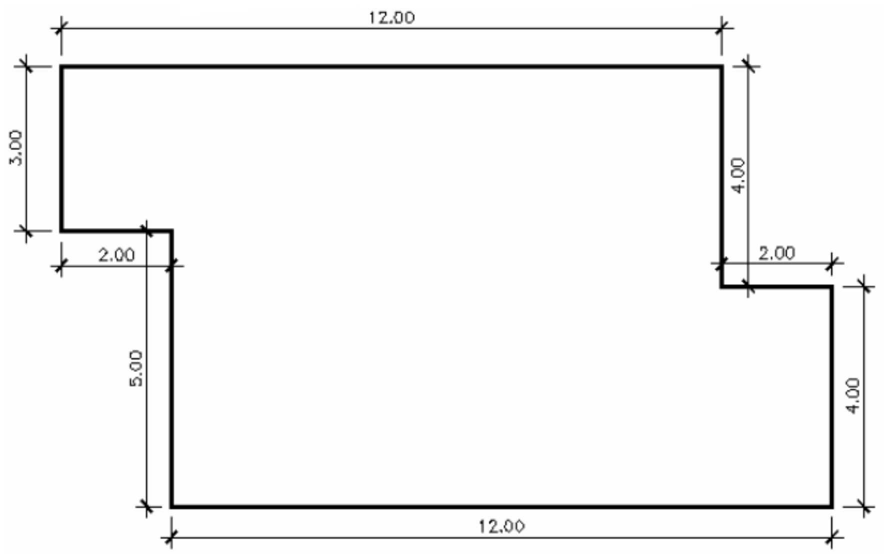


Figure 116 : Plan du périmètre de la toiture

VIII.3. Résolution due l'application :

La conception de la toiture à pans inclinés passe par les étapes suivantes :

VIII.3.a. Etape 1 : Numéroter les traces

Pour une meilleure identification des plans et de leurs intersections, la première étape consiste en la numérotation des traces, ces traces représentent les limites des plans inclinés, il y aura donc autant de plans que de traces.

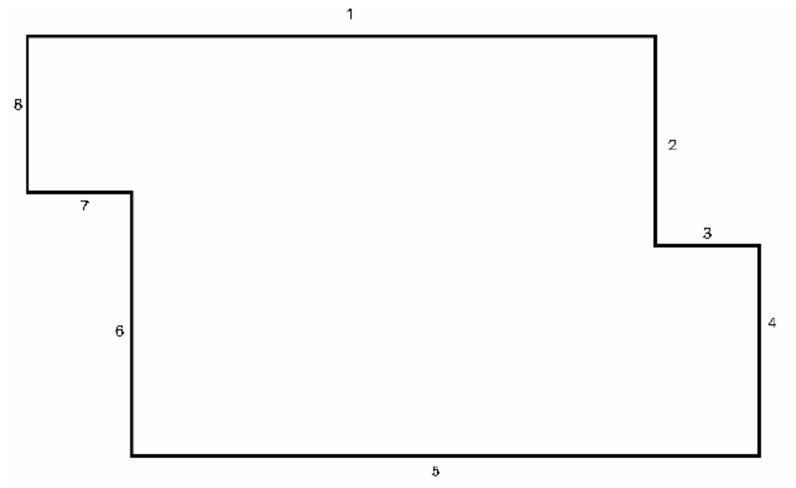


Figure 117 : Numérotation des traces

VIII.3.b. Etape 2 : Construire les intersections

Les intersections entre deux plans (arêtiers) sont les éléments de la toiture qui correspondent géométriquement, aux bissectrices des angles formés par les traces. Comme le montre la figure ci-dessous, toutes les intersections des sommets résultent de l'application du théorème des traces (théorème 2) qui se coupent en un point. De ce fait, les intersections seront les bissectrices de c ces angles. Dans l'exemple proposé, le périmètre de la toiture est orthogonale, il est constitué, principalement, d'angles droits. Les angles résultants sont de **90°** et **270°** degrés, ainsi, ses bissectrices seront respectivement de **45°** et **135°**.

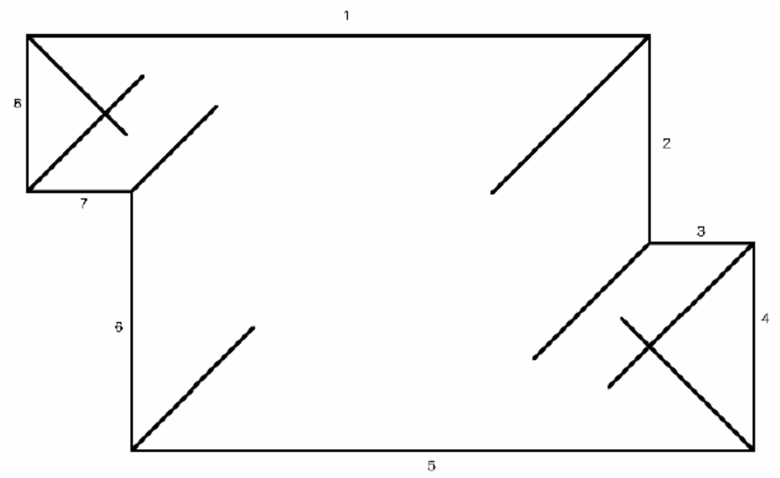


Figure 118 : Détermination des bissectrices d'angles formés par les traces. Dans la terminologie architecturale, ces intersections sont appelées les arêtiers.

VIII.3.c. Etape 3 : Déterminer les premiers plans inclinés

Lorsque deux des intersections (arêtiers) se rencontrent, elles délimitent un plan (plan triangulaire), par exemple les plans **8** ou **4**.

Comme le montre l'exemple, les premiers plans générés suite à l'entrecoupement des intersections sont les plans 8 et **4**. Néanmoins, et pour une plus grande précision, il est recommandé de commencer par le plan de plus petite dimension, dans ce cas nous allons commencer par le plan **8**.

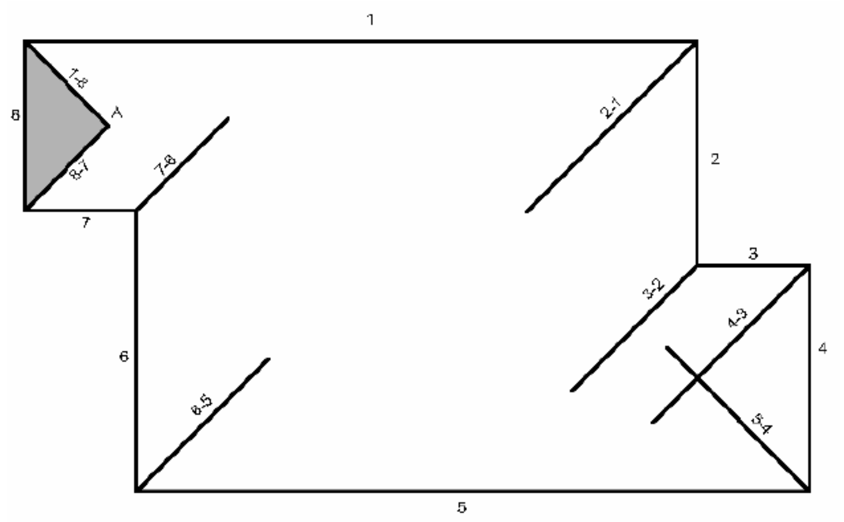


Figure 119 : Délimitation des premiers plans.
Ce sont les plans formés par la convergence des intersections.

VIII.3.d. Etape 4 : Compléter les intersections manquantes

En fermant le plan **8**, un nouveau point **(A)** est formé, vers lequel convergent les intersections **1-8** et **8-7**.

(1-8) x (8-7) = (A)

Pour que la solution soit complète à ce point, il est nécessaire de trouver une troisième intersection, cette intersection doit correspondre à la combinaison manquante entre les 3 plans **1**, **8** et **7**.
Sachant que, les plans **1** et **8** sont liés et que les plans **7** et **8** sont également liés, il reste de trouver, alors, la combinaison entre les plans **1** et **7**.
Nous devons maintenant définir à quel théorème correspond cette intersection. Dans l'exemple précédent, la trace **1** et la trace **7** sont parallèles. Leur intersection sera alors un autre parallèle passant par le point médian est situé au point (**A)** vers lequel convergent les deux intersections précédentes (**1-8** et **8-7**) (théorème1).

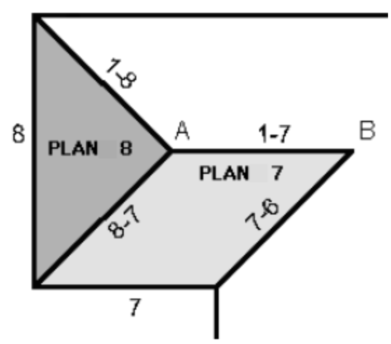


Figure 120 : La combinaison de 3 plans

La nouvelle intersection **(1-7)** commence alors au point **(A),** parallèlement aux traces **1** et **7** et va jusqu'à l'intersection suivante, dans ce cas c'est l'intersection **(7-6)**. Par la suite, l'intersection qui passe par le point **(A)** se coupe avec l'intersection **(7-6)** dans le point **(B).**
C'est ainsi que le plan **7** est, à son tour, formé.
Cette opération doit être répétée là où c'est nécessaire (par exemple au niveau des plans **3**,**4** et **5**).

Si nous répétons la procédure ci-dessus avec chacun des points résultants, nous aurons :

Les intersections contenant le point **B** : **1-7** et **6-7** sont tracées. Il reste l'intersection **1-6** qui lie les traces **1** et **6.** Ces deux traces forment un angle droit et se croisent au niveau du point auxiliaire **(m)**. Notant qu'il est nécessaire de prolonger la trace **6** jusqu'à la trace **1** pour trouver le point **(m).**

Trace 1 x Trace 6 = m

Donc, l'intersection **1-6** est la bissectrice de l'angle (théorème 2), elle passe par le point **B** et s'entrecoupe avec l'intersection **(6-5)**. Ainsi un nouveau plan incliné est délimité.

Le tronçon **m-B** de l'intersection **1-6** est également considéré comme une construction auxiliaire (les constructions auxiliaires sont en pointillés dans le schéma).

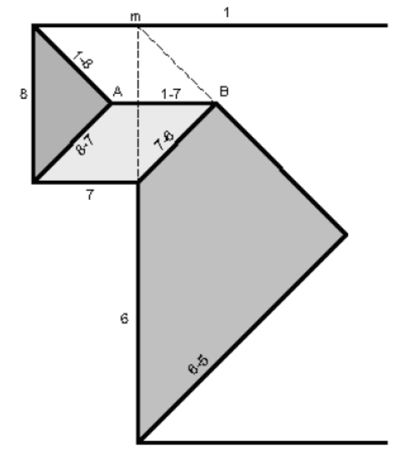


Figure 121 : Intersection de deux traces à priori non liées

L'intersection qui passe par le point **D**, **1-5** et **2-1** est tracée**.** L'intersection **2-5** liant les traces **2** et **5** est manquante.

Pour trouver cette intersection, nous appliquons le théorème 2 de l'intersection des traces. Il faut d'abord, prolonger la trace2 pour rejoindre la trace 5 dans le point auxiliaire **(n)** :

Traces 2 x trace 5= (n)

Il faut lier, par la suite les points **D** et **(n)** pour trouver l'intersection **2-5**. **intersection 2-5 x intersection 3-2 = E** le plan **2-5 es**t délimité**.**

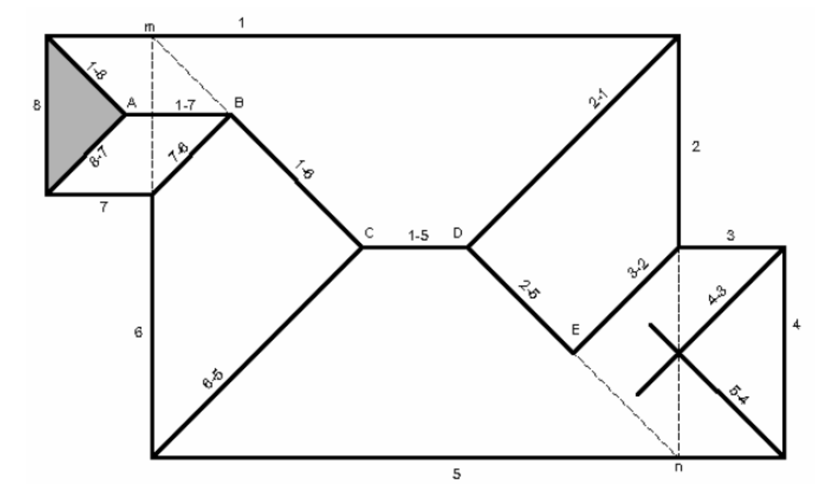


Figure 122 : Délimitation du plan 2-5.

Intersections qui passent par le point **C** : **1-6** et **6-5**, sont délimitées. L'intersection **1-5** est manquante. Le théorème 1 des traces parallèles est appliqué, cette intersection croise l'intersection **2-1** au point **(D)**.

Intersection **1-5 x** intersection **2-1 = D**

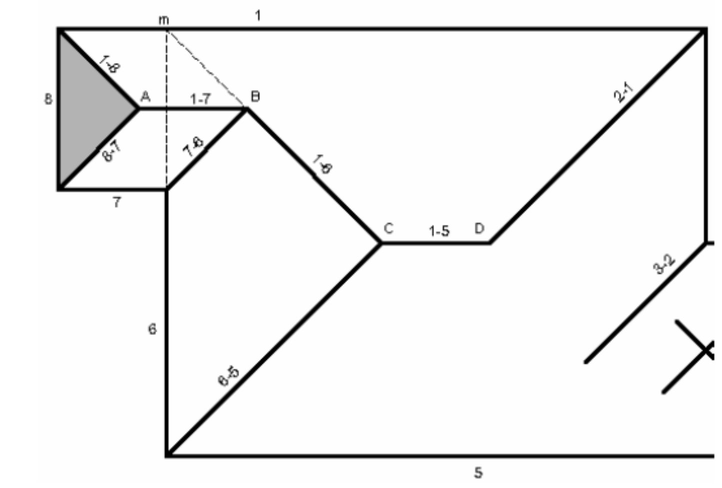


Figure 123 : Pour trace l'intersection 1-5, Le théorème 1 est appliqué

Si nous construisons la dernière intersection au point **E**, qui serait entre les plans **3** et **5** (théorème 1 des traces parallèles), le résultat complet ressemblerait à la figure ci-dessous. Au final, nous aurons une toiture composée de **13** intersections (arêtiers) et **8** plans inclinés.

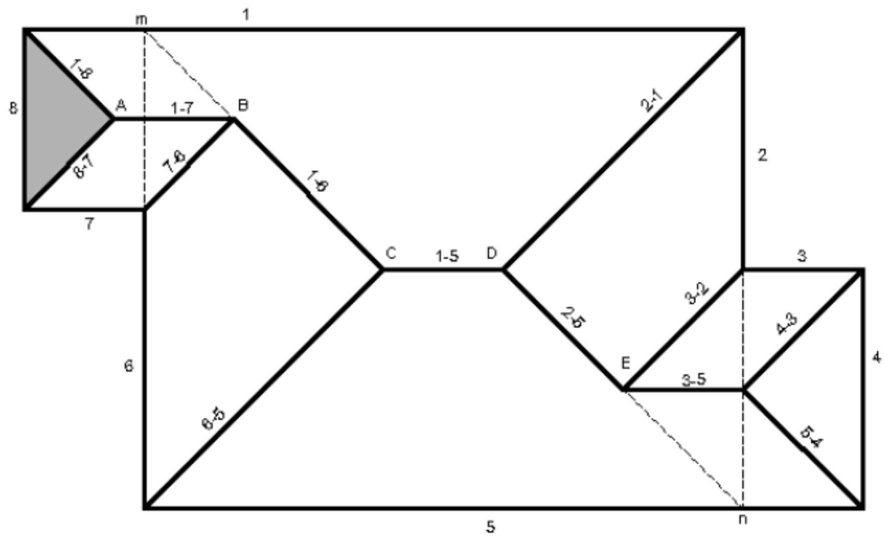


Figure 124 : Solution finale de la toiture
l'intersection **3-5** est dernière intersection à tracer pour finir le plan de la toiture.

Si nous définissons une pente pour les plans du toit **(40%)**, sa construction volumétrique se présenterait alors comme suit :
NOTE : Il est important de noter que quelle que soit la pente des plans de toiture, la solution en plan (projection horizontale) est la même.

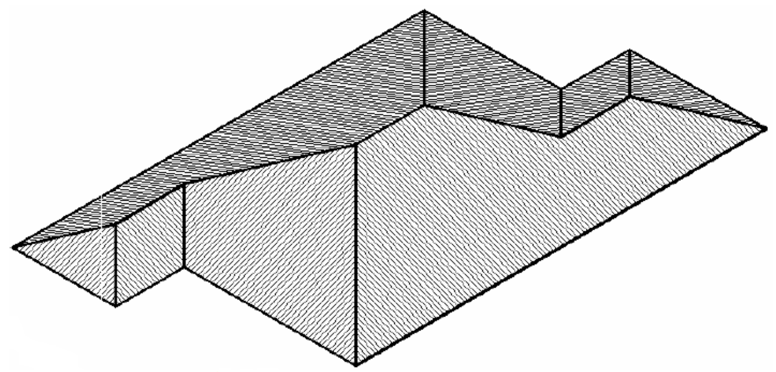


Figure 125 : volumétrie de la toiture finalisée.

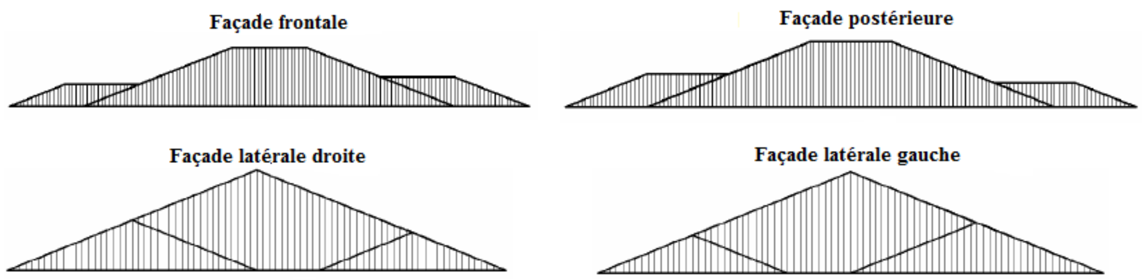


Figure 126 : Les projections orthogonales de la toiture, avec une pente de 40%

VIII.4. **Autre exercice résolu :**

Dans la figure suivante, nous pouvons voir une autre toiture conçue selon la méthode des plans inclinés de la même pente.
Suivant la même logique que l'exercice précédent, l'ordre des points (**A**, **B**, **C**, etc.) permet d'expliquer l'enchainement des étapes de résolution du problème.
Lors de la construction de l'intersection **10-4** à partir du point **(C)**, il est nécessaire de quitter cette intersection et revenir à la fermeture du plan **(9)** au niveau du point **(D)** et le rencontrer ensuite avec les points (**E**) et (**F**) et ainsi de suite jusqu'à la complétion de l'exercice au point **(H)**.
Pour cet exercice, une pente de **60 %** a été choisie.

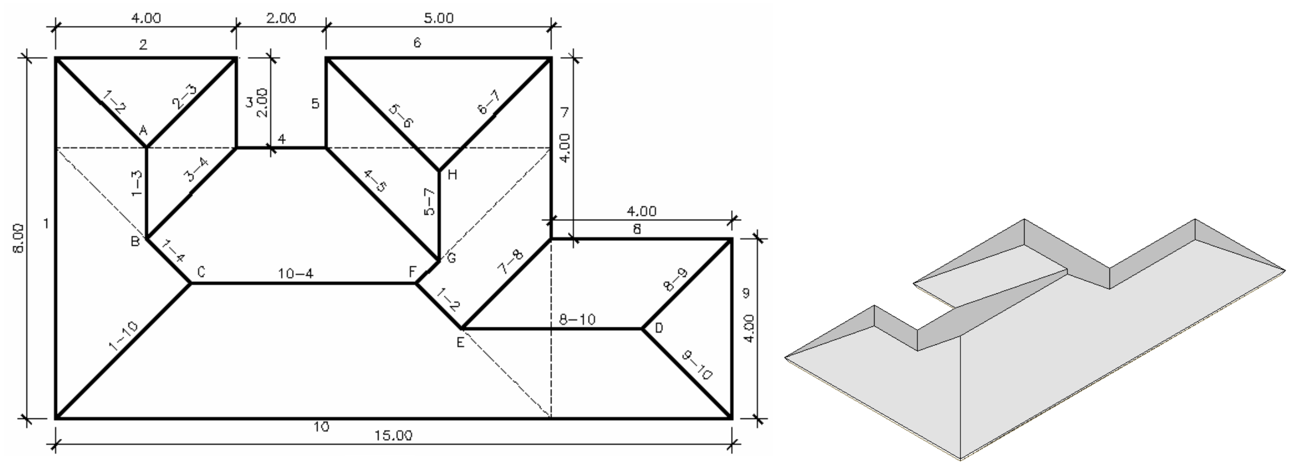


Figure 127 : Autre exemple montrant la résolution du problème d'une toiture à pans inclinés.

NOTE :

Si la toiture de la figure précédente possède une cour intérieure, il sera recommandé de commencer la solution en construisant l'intersection entre les plans **2** et **9**, en appliquant le théorème 1 des traces parallèles. Ensuite, il est possible de continuer avec les intersections **2-8** et **2-10**, de manière à ce que la cour soit entourée par une partie de la toiture. Par la suite, il est conseillé de fermer le plan **5** et de construire l'intersection **4-6**. Enfin, la fermeture de la de la solution sera avec la construction des intersections **10-4** et **10-6**.

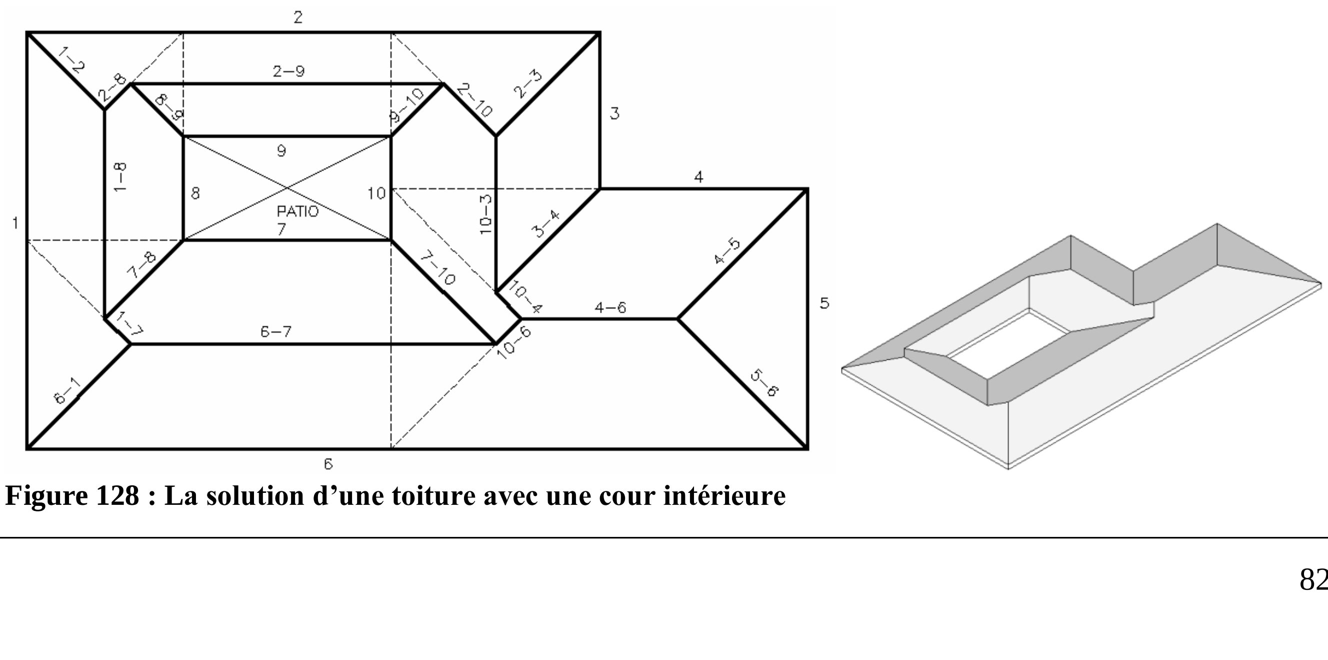


Figure 128 : La solution d'une toiture avec une cour intérieure

VIII.5. **Exercice 1 :**

Les figures suivantes donnent le périmètre d'une surface à couvrir par un toit à plans inclinés de pente égale. Trouvez la solution en plan, dessinez les 4 élévations et la volumétrie de la toiture.

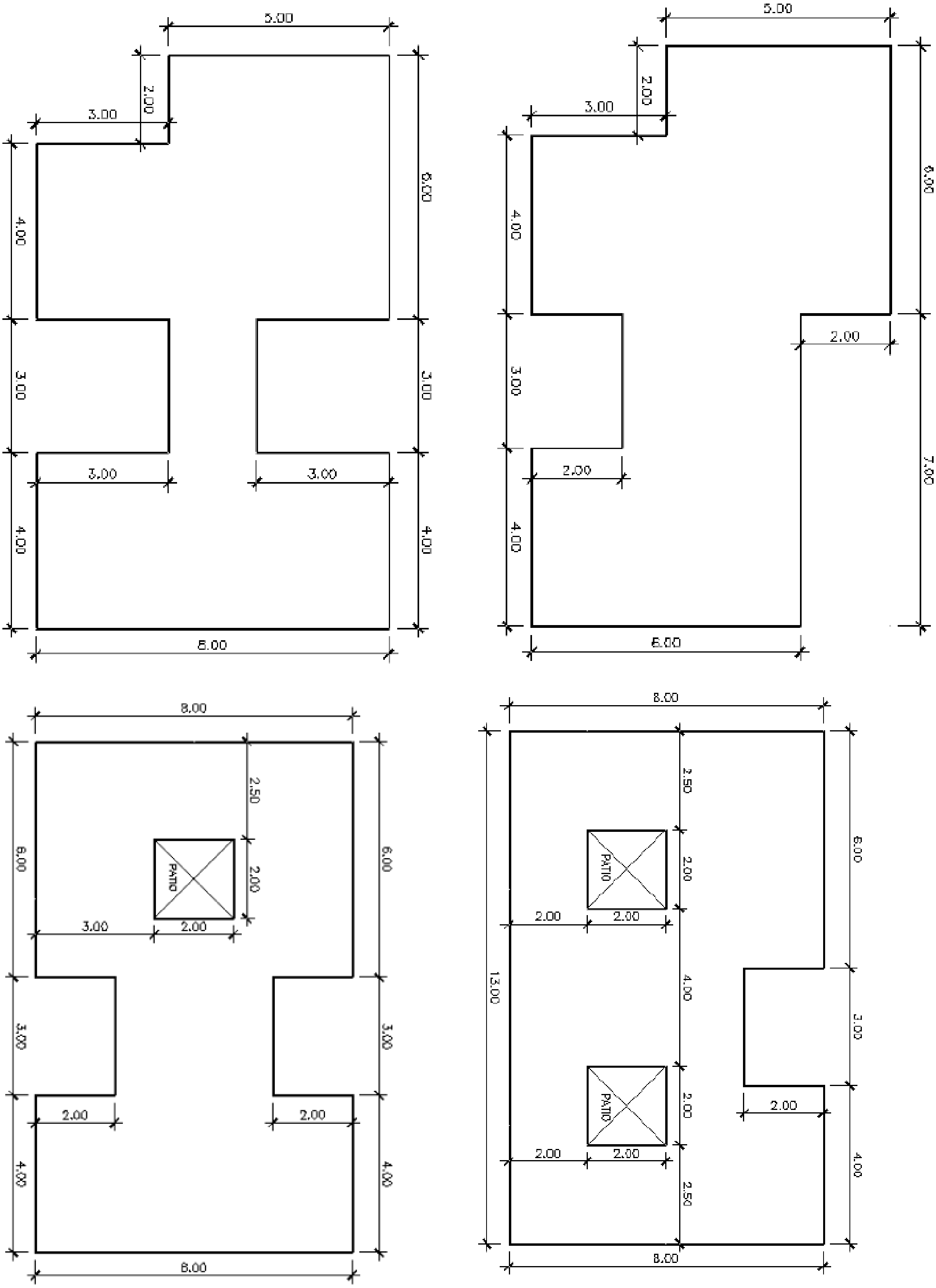


Figure 129 : périmètres des surfaces à couvrir par une toiture à pans inclinés

VIII.6. **<u>Cas particuliers de toitures à géométrie régulière et des pentes égales :</u>**

Ce groupe de couvertures se caractérisent par une géométrie non seulement régulière (orthogonale), mais aussi symétrique, ce qui donnera lieu à une solution spéciale. Les dessins ci-dessous montrent la solution de couverture en plan et en volumétrie.

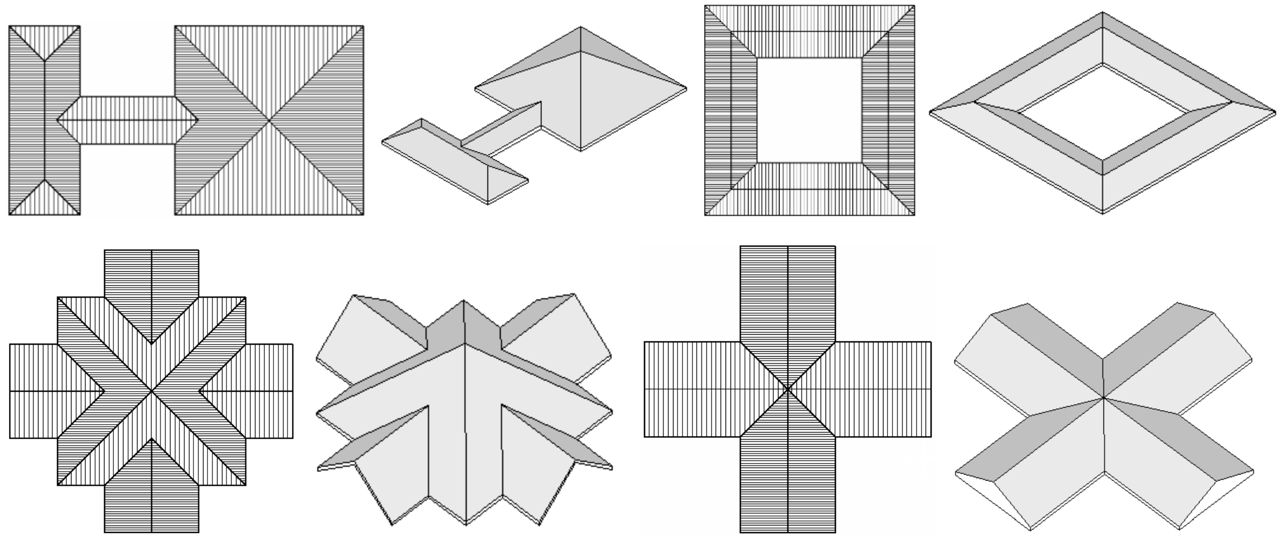


Figure 130 : Exemples de toitures symétriques à géométrie régulières

Référence :

Ching, F, 1985. *Architectural graphics* (2nd edition). New York: Van Nostrand Reinhold company.

Cruz, D. C., Amaral, L. G. H., 2012. *Apostila de Geometria Descritiva*. Barreiras : Université fédérale de Bahia, Institut des sciences de l'environnement et du développement durable.

Jacques, D., Calame, J.-F, 2013. *Géométrie spatiale, le vade-mecum*. École polytechnique fédérale de Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes.

Monge, G., 1811. *Géométrie descriptive*. Nouvelle edition, Paris: J. Klostermann fils.

Nestor, E., Duque, M. 2007. *Geometría Descriptiva Aplicada a la Arquitectura*. Document éléctronique, Bibliothèque digitale de l'Université de San Gregorio de Portoviejo.

Paeme, S., Bleus J.-M., 2010. *Cours de Géométrie descriptive orientée architecture*. Liège : Université de Liège.

Rabello, P.S.B., 2005. *Geometria descritiva básica*. Rio de Janeiro : UFRJ.

Ribouh, B., Tebib, E., 1999. *Cours de Géométrie descriptive et Perspective* (Tome 1). Constantine : Université de Constantine.