République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université 8 Mai 1945 de Guelma

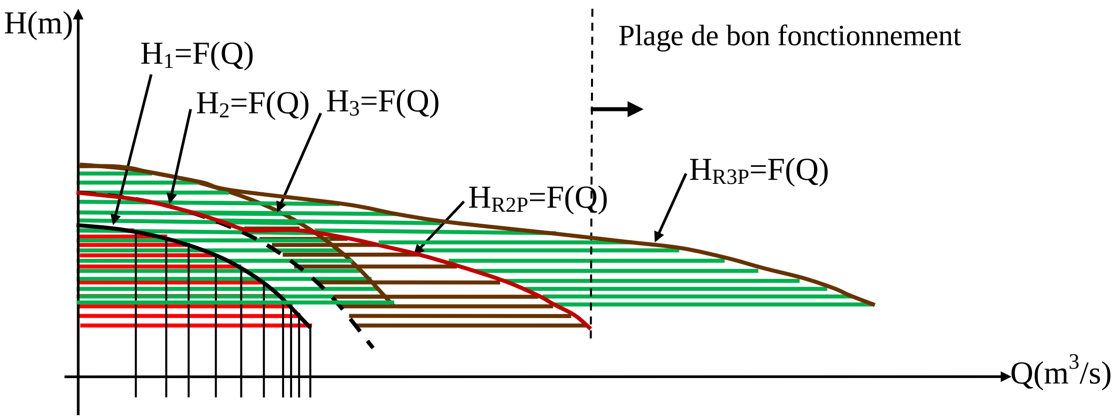
Faculté des sciences et de la technologie

Département de Génie Civil et d'Hydraulique

Pompes et Stations de Pompage

Deuxième partie : Rappels, Exercices & solutions

Fait par : Dr. TOUMI Abdelouaheb



Octobre 2023

Sommaire

Introduction générale

Le but de ce polycopié n'est pas seulement de fournir de rappels de connaissances de base en pompes et stations de pompage, mais aussi un ensemble d'exercices d'ordre pratique dans le souci de mettre en évidence les formules et les équations présentées dans le polycopié de cours d'une part et d'autre part d'augmenter la capacité de compréhension et d'analyse de l'étudiant.

Les rappels des chapitres s'enchaînent en formant un tout. Le rappel du premier chapitre sera consacré à des relations et à des équations en physique et en hydraulique en relativité avec le domaine des pompes et stations de pompage.

Les second et troisième rappels, des chapitres 2 et 3, ont pour objectif de mettre à la portée de l'étudiant l'équation fondamentale des pompes et les processus à suivre pour obtenir leurs courbes caractéristiques.

Les quatrième et cinquième rappels, des chapitres de différents types d'installations et des lois de similitude, permettront de donner les équations des différents types d'installations et les lois de similitude. Ces dernières seront de très grande utilité surtout lors de la réalisation du modèle de pompes et de choix de pompe e

Les rappels des sixième, septième et huitième chapitres, décrivant le phénomène de cavitation, les modes de réglage des débits et le couplage de pompes auront également pour but de mettre en évidence comment positionner une pompe sans avoir de cavitation, d'élucider les différents modes de réglage de débits des pompes et le traçage du courbe résultante et la détermination du point de fonctionnement lors du couplage des pompes en série et en parallèle.

A la fin de chaque rappel de chaque chapitre, une série d'exercices avec des solutions sera proposée pour donner à l'étudiant une large variété d'idées lui permettant d'améliorer sa capacité d'analyse et de réflexion lors de résolutions des problèmes de pompes et stations de pompage. .

Chapitre I : Rappels en physique et en hydraulique

1.1. Le moment cinétique

Le moment cinétique est le produit vectoriel du vecteur déplacement par le vecteur de la quantité de mouvement.

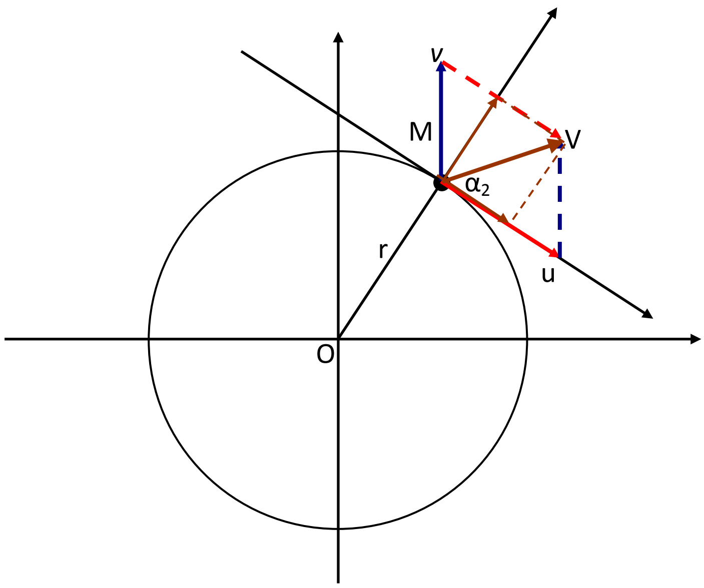


Fig. (1.1) : Triangle des vitesses à la sortie de la roue d'une pompe

$$\vec{C} = \overrightarrow{OM} X \vec{P} \qquad (1.1)$$

$$\vec{C} = \overrightarrow{OM} X m\vec{V} = m(\overrightarrow{OM} X \vec{V}) \qquad (1.1')$$

$$C = \|\vec{C}\| = dm.r.V.\cos\alpha_2 \qquad (1.2)$$

1.2 Le travail d'une force

Le travail est le produit scalaire de la force par le vecteur déplacement $\overrightarrow{\mathbf{dl}}$, son unité est le Joule sachant que le Joule, en système international, est (kg.m^2/s^2).

$$dw = \vec{F}.\overrightarrow{dl} \Rightarrow w_{AB} = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl} \qquad (1.3)$$

Pour qu'une machine puisse fonctionner, il faut lui fournir le travail W_{fourni}. La machine effectue sur un corps le travail W_{utile} qui est en pratique inférieur au travail fourni. En général, la partie du travail fourni transformé par un système en travail utile est donnée par le rendement du système.

Le rendement **η** d'un système est égal au rapport du travail utile W_{utile} effectué par ce système et du travail W_{fourni} nécessaire à son fonctionnement :

$$\eta = \frac{W_{utile}}{W_{fourni}} \qquad (1.4)$$

Le rendement est un nombre sans unité exprimé le plus souvent en %.

1.3. La puissance

La puissance correspond à l'énergie échangée (reçue ou donnée) pendant une seconde.

La puissance mécanique d'une force est l'énergie que l'on peut acquérir ou perdre avec cette force sur un temps donné.

En physique, la puissance reflète la vitesse à laquelle un travail est fourni. C'est la quantité d'énergie par unité de temps fournie par un système à un autre. C'est donc une grandeur scalaire. La puissance correspond donc à un débit d'énergie : si deux systèmes de puissances différentes fournissent le même travail (la même énergie), le plus puissant des deux est celui qui est le plus rapide.

Dans le système international d'unités, une puissance s'exprime en watts, en joules par seconde, ou en $kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-3}$. Une unité ancienne était le cheval-vapeur, où la capacité de traction d'une machine à vapeur était comparée à celle d'un cheval de trait.
La puissance P d'une force est le quotient du travail W effectué par cette force par le temps t nécessaire : $P = \frac{W}{t}$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{\int \vec{F}.\vec{dl}}{t} = \frac{\int m.\vec{\gamma}.\vec{dl}}{t} \qquad (1.5)$$

Pour un mouvement vertical montant ou γ=g et la distance verticale parcourue L=H, la puissance peut s'écrit comme suit:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{\int \vec{F}.\vec{dl}}{t} = \frac{\int m.\vec{\gamma}.\vec{dl}}{t} = \frac{m.g.H}{t} = \frac{\rho.V_{volume}.g.H}{t} = \rho.g.\frac{V_{volume}}{t}.H = \rho.g.Q.H$$

$$P = \rho.g.Q.H \qquad (1.6)$$

L'unité de puissance est le watt (W) : 1W = 1 J/s.

La puissance représente le travail que peut effectuer une force par unité de temps. Lorsqu'un travail de 1 J est réalisé en 1 s, la puissance est 1W.

Le rendement d'un système fonctionnant en régime continu est le plus souvent exprimé en fonction des puissances fournie et utile. À partir de :

$$\eta = \frac{W_{utile}}{W_{fourni}} = \frac{W_{utile}/t}{W_{fourni}/t} \qquad (1.7)$$

On obtient :

$$\eta = \frac{P_{utile}}{P_{fournie}} \qquad (1.8)$$

1.4. L'énergie consommée

L'énergie consommée en électricité est le produit scalaire de la puissance par le temps.

$$E = P * t \qquad (1.9)$$

Son unité est le watt heure (Wh).
La vitesse angulaire de rotation c'est le rapport entre la vitesse linéaire, de déplacement d'un corps, et le rayon de courbure du parcours.

$$\omega = \frac{V}{r}$$

Elle est également calculée en fonction du nombre de tours à la seconde par la relation suivante :

$$\omega = 2\pi n \qquad (1.10)$$

1.5. Accélération

L'accélération est définie comme étant la dérivée première de la vitesse ou la dérivée seconde du vecteur position par rapport au temps.

$$\vec{\gamma} = \frac{d^2\overrightarrow{MM'}}{dt^2} \qquad (1.11)$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} \qquad (1.11')$$

1.5.1. L'accélération tangentielle

L'accélération tangentielle, $\vec{\gamma}_T$, est la dérivée première du module de la vitesse par rapport au temps. Posons $V = \|\vec{V}\|$

$$\vec{\gamma}_T = \frac{1}{2V}\frac{dV^2}{dt} \qquad (1.12')$$

1.5.2. L'accélération normale

Le vecteur accélération normale $\vec{\gamma}_N$ est défini comme étant la différence entre l'accélération et l'accélération tangentielle.

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_T + \vec{\gamma}_N \Rightarrow \vec{\gamma}_N = \vec{\gamma} - \vec{\gamma}_T \qquad (1.13)$$

Pour un mouvement circulaire à vitesse constante (V=constante) l'accélération tangentielle est nulle ($\vec{\gamma}_T = \vec{0}$) d'où l'accélération normale est égale à l'accélération totale.

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_N = \|\vec{\gamma}\| = \sqrt{{\gamma_x}^2 + {\gamma_y}^2} \qquad (1.14)$$

$$\gamma = \|\vec{\gamma}\| = r.\omega^2$$

$$\omega = \frac{V}{r} \Rightarrow \omega^2 = \frac{V^2}{r^2} \qquad (1.15)$$

$$\gamma = \|\vec{\gamma}\| = \|\overrightarrow{\gamma_N}\| = r.\frac{V^2}{r^2} = \frac{V^2}{r} \Rightarrow \gamma_N = \frac{V^2}{r} \qquad (1.16)$$

L'accélération d'un corps, tournant autour d'un axe O à une vitesse constante a un module constant et sa direction est dirigée vers le centre O.

1.6. Les équations de bases en mécanique des fluides

1.6.1. Equation de continuité d'un fluide compressible

L'équation de continuité pour l'écoulement non permanent à trois dimensions, d'un fluide incompressible est :

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (1.17)$$

Pour l'écoulement permanent, les propriétés du fluide ne varient pas avec le temps, d'où :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

L'équation de continuité s'écrit :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\right) = 0 \qquad (1.17')$$

Pour un écoulement permanent isovolume (ρ=constante) l'équation de continuité à trois dimensions s'écrit :

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \qquad (1.17'')$$

1.6.2 Equation de l'écoulement permanent d'un fluide incompressible dans une conduite à section transversale variable (unidimensionnel)

Lorsque l'écoulement est permanent $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ce qui ramène l'équation de continuité à l'expression $\left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\right) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{div}(\rho\vec{V}) = 0 \qquad (1.18)$

Lorsque le fluide est incompressible ou bien isovolume (ρ=constante) l'équation de la continuité devient :

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

Le débit volumique est conservé entre l'entrée et la sortie et l'équation de continuité permet d'écrire :

$$Q_e = Q_s$$

Pour une conduite composée de n tronçons installés en série et de diamètres différents l'équation de continuité s'écrit :

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q_5 = \cdots Q_n$$

$$V_1S_1 = V_2S_2 = V_3S_3 = V_4S_4 = V_5S_5 = \cdots V_nS_n \qquad (1.19)$$

V_1, V_2, V_3, V_4, V_5,…..,V_n se sont les vitesses moyennes dans la direction de l'écoulement.

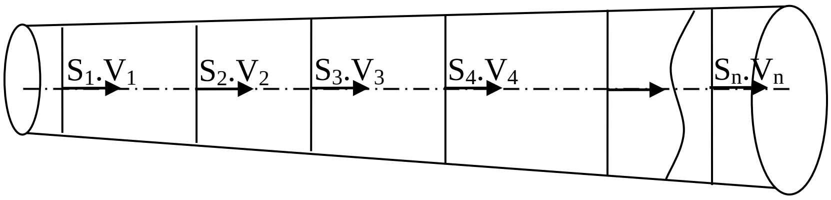


Fig.1.2 : Schéma d'un écoulement dans une conduite à section transversale variable

1.6.3 Equation d'énergie d'un fluide en déplacement

Lors du déplacement d'un fluide réel dans une conduite, entre deux sections 1 et 2, des pertes d'énergie par frottement peuvent apparaitre.

$$H_1 = z_1 + \frac{p_1}{\rho.g} + \frac{\alpha V_1^2}{2.g}$$

$$H_2 = z_2 + \frac{p_2}{\rho.g} + \frac{\alpha V_2^2}{2.g}$$

La différence entre la charge hydraulique à la première section 1, H_1 et celle à la section 2, H_2, donne la perte de charge linéaire entre les deux sections.

$$\Delta H = H_1 - H_2 = \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho.g} + \frac{\alpha V_1^2}{2.g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho.g} + \frac{\alpha V_2^2}{2.g}\right) \qquad (1.20)$$

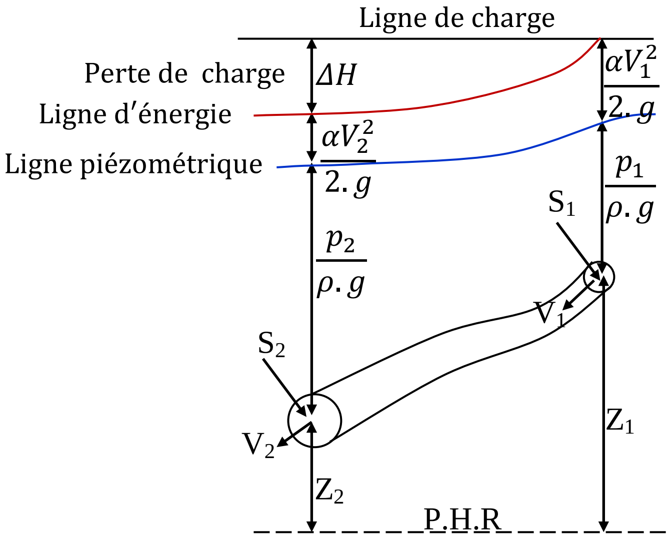


Fig.1.3 : Energie totale d'un fluide en déplacement

Pour les conduites à section transversale circulaire la perte de charge linéaire s'écrit :

$$\Delta H = \frac{\lambda L}{d}\frac{V^2}{2g} \qquad (1.21)$$

Cette dernière relation prend le nom de Darcy Weisbach

Où λ s'appelle le coefficient de Darcy ou coefficient de frottement.

1.7. Distribution transversale de la vitesse dans une conduite en charge

1.7.1. Régime laminaire

$$v = v_{max}(r_0^2 - r^2)/r_0^2 \qquad (1.22)$$

avec

$$v_{max} = \frac{\rho g \Delta H}{4\mu L} r_0^2$$

b) Formule de la vitesse moyenne en régime laminaire

$$V_m = \frac{2.\,v_{max}}{r_0^4}\left[\left(\frac{r_0^4}{4}\right)\right] = V_m = \frac{v_{max}}{2} \qquad (1.23)$$

1.7.2. Régime turbulent

a) Loi de la vitesse ponctuelle en régime turbulent

$$\overline{u_x} = u_{max} - \frac{u_f}{\kappa}\ln\left(\frac{r_0}{z}\right) \qquad (1.24)$$

Cette relation est valable pour $\delta \leq z \leq r_0$

b) Calcul du débit en régime turbulent

$$Q = \left[u_{max} - \frac{3}{2}\frac{u_f}{\kappa}\right]\pi r_0^2 \qquad (1.25)$$

c) Calcul de la vitesse moyenne en régime turbulent

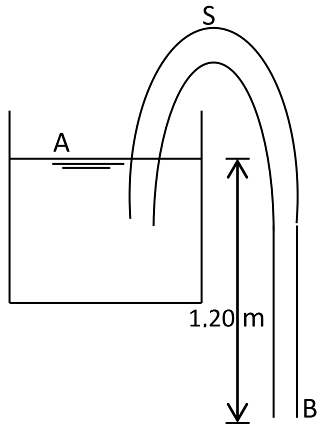
$$V = \left[u_{max} - \frac{3}{2}\frac{u_f}{\kappa}\right] \qquad (1.26)$$

1.8. Formule de calcul du coefficient de Coriolis

$$\alpha = \frac{1}{s}\int\left(\frac{v}{V_m}\right)^3 ds \qquad (1.27)$$

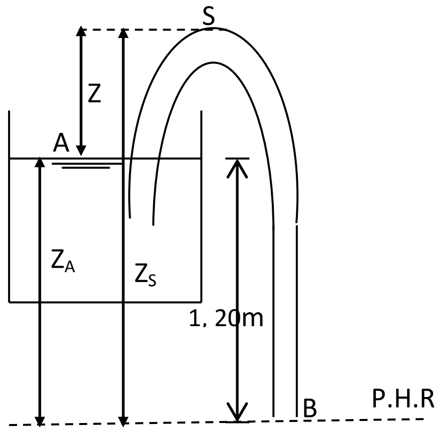
Exercice n°1

La pression à l'intérieur du tuyau en S ne doit pas tomber en-dessous de 0,25 kg / cm^2. En négligeant les pertes de charge, à quelle hauteur au-dessous du niveau de l'eau A le point S doit-il être placé ?



Solution

Prenons le plan de références au point B et appliquons l'équation de Bernoulli entre les points A et B.



$$\left(Z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g}\right) = \left(Z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g}\right) + \sum \Delta H_{AB}$$

Les données de l'exercice permettent d'écrire :

$$\sum \Delta H_{AB} = 0;\ \frac{V_A^2}{2g} \approx 0;\ Z_B = 0;\ \frac{p_A}{\rho g} = \frac{p_B}{\rho g} = \frac{p_{atm}}{\rho g};\ Z_A = 1{,}2\ \text{m}$$

Ce qui conduit à écrire l'équation de Bernoulli comme suit :

$$\left(Z_A + \frac{p_{atm}}{\rho g} + 0\right) = \left(Z_B + \frac{p_{atm}}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g}\right) + 0 \Rightarrow V_B^2 = 2gZ_A \Rightarrow V_B = \sqrt{2gZ_A}$$

$$V_B = \sqrt{19{,}62.1{,}2} = 4{,}852\ \text{m/s}$$

Appliquons maintenant l'équation de Bernoulli entre le point A est le point du sommet S, nous aurons :

$$\left(Z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g}\right) = \left(Z_S + \frac{p_S}{\rho g} + \frac{V_S^2}{2g}\right) + \sum \Delta H_{AS}$$

$$\sum \Delta H_{AS} = 0;\ \frac{V_A^2}{2g} \approx 0;\ Z_S = 1{,}2 + Z;\ \ \frac{p_A}{\rho g} = \frac{p_{atm}}{\rho g};\ Z_A = 1{,}2\ \text{m};\frac{p_S}{\rho g} = 0{,}24\ \text{kgf/cm}^2$$

Le régime d'écoulement est permanent et le diamètre du tuyau est constant, alors on peut mettre

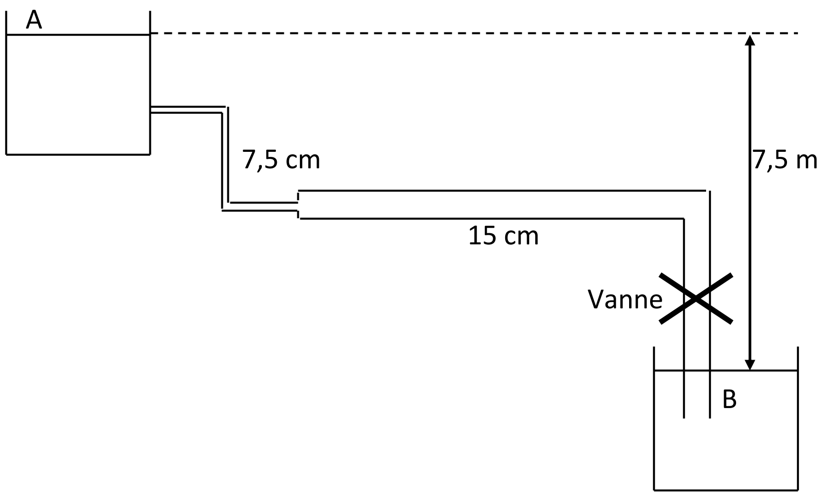
$$\frac{V_S^2}{2g} = \frac{V_B^2}{2g}$$

$$\left(1{,}2 + \frac{p_{atm}}{\rho g} + 0\right) = \left(1{,}2 + Z + \frac{p_S}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g}\right) + 0 \Rightarrow Z = \frac{p_{atm}}{\rho g} - \frac{p_S}{\rho g} - \frac{V_B^2}{2g}$$

$$Z = \frac{101325}{1000.9{,}81} - \frac{0{,}24.9.81.10000}{1000.9{,}81} - 1{,}2 = 6{,}727\ \text{m}$$

Exercice n°2

De l'eau à 38°C s'écoule par le système représenté dans la figure ci-dessous. Les longueurs des tuyaux de 7,5 cm et 15 cm de diamètre en fonte asphaltée neuve (ε=0,012 cm) sont respectivement de 50 m et 30 m. Les facteurs de pertes pour les accessoires et les vannes sont : coudes de 7,5 cm, ξ =0,40 chacun ; coude de 15 cm, ξ =0,60 et vanne de 15 cm, ξ =3,0. Calculer le débit en l/s ?



Solution

Appliquons l'équation de Bernoulli entre le point A et le point B en prenant le plan horizontal de référence en B.

$$\left(Z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g}\right) = \left(Z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g}\right) + \sum \Delta H_{AB}$$

$$Z_A = 7{,}5\ \text{m}; Z_B = 0;\ \frac{p_A}{\rho g} = \frac{p_B}{\rho g} = \frac{p_{atm}}{\rho g};\ \frac{V_B^2}{2g} - \frac{V_A^2}{2g} \simeq 0$$

En plus des pertes linéaires et des pertes singulières au niveau des vannes il y a une perte due à l'élargissement brusque (Borda Carnot), une perte due à l'éntrée dans une conduite et en fin une perte due à l'entrée dans un réservoir.

$$\sum \Delta H_{AB} = \frac{\lambda_{7,5} L_{7,5}}{d_{7,5}} \frac{V_{7,5}^2}{2.g} + \xi_{C7,5} \frac{V_{7,5}^2}{2.g} + \xi_{C7,5} \frac{V_{7,5}^2}{2.g} + \frac{\lambda_{15} L_{15}}{d_{15}} \frac{V_{15}^2}{2.g} + \xi_{C15} \frac{V_{15}^2}{2.g} + \xi_{vanne} \frac{V_{15}^2}{2.g} + \frac{\left(V_{7,5}^2 - V_{15}^2\right)}{2.g} + \xi_{e\ conduite} \frac{V_{7,5}^2}{2.g} + \xi_{e\ réservoir} \frac{V_{15}^2}{2.g}$$

$$7{,}5=\frac{\lambda_{7,5}L_{7,5}}{d_{7,5}}\frac{V_{7,5}^2}{2.g}+\xi_{C7,5}\frac{V_{7,5}^2}{2.g}+\xi_{C7,5}\frac{V_{7,5}^2}{2.g}+\frac{\lambda_{15}L_{15}}{d_{15}}\frac{V_{15}^2}{2.g}+\xi_{C15}\frac{V_{15}^2}{2.g}+\xi_{vanne}\frac{V_{15}^2}{2.g}+\xi_{elarg}\frac{V_{15}^2}{2.g}+\xi_{e\ conduite}\frac{V_{7,5}^2}{2.g}+\xi_{e\ réservoir}\frac{V_{15}^2}{2.g}$$

$$\xi_{C7,5}=0{,}40;\ \xi_{C15}=0{,}6;\ \xi_{entrée\ conduite}=0{,}5;\xi_{entrée\ réservoir}=1;\ \xi_{elarg}=\left(\frac{S_2}{S_1}-1\right)^2=9$$

La teméráture de l'eau est de 38°C ce qui donne une viscosité cinématique ν= m^2/s (calculer par la formule de Hagen Poieuille).

$$\nu=\frac{0{,}0178}{1+0{,}0337t+0{,}000221t^2}=\frac{0{,}0178}{1+0{,}0337.38+0{,}000221(38)^2}=0{,}00684688\ \text{Stokes}$$

$$\nu=6{,}84688.10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s}$$

$$Q=V_{7,5}S_{7,5}=V_{15}S_{15};\ S_{7,5}=\frac{\pi d_{7,5}^2}{4};\ S_{15}=\frac{\pi d_{15}^2}{4}=4.\frac{\pi d_{7,5}^2}{4}$$

$$S_{15}=4S_{7,5};\ V_{15}=\frac{Q}{S_{15}}=\frac{Q}{4S_{7,5}}=\frac{V_{7,5}}{4}$$

$$7{,}5=\frac{\lambda_{7,5}L_{7,5}}{d_{7,5}}\frac{V_{7,5}^2}{2.g}+\xi_{C7,5}\frac{V_{7,5}^2}{2.g}+\xi_{C7,5}\frac{V_{7,5}^2}{2.g}+\frac{\lambda_{15}L_{15}}{d_{15}}\frac{V_{7,5}^2}{16.2g}+\xi_{C15}\frac{V_{7,5}^2}{16.2g}+\xi_{vanne}\frac{V_{7,5}^2}{16.2g}+\frac{9V_{7,5}^2}{16.2g}+\xi_{e\ conduite}\frac{V_{7,5}^2}{2.g}+\xi_{entrée\ réservoir}\frac{V_{7,5}^2}{16.2g}$$

$$7{,}5=\frac{\lambda_{7,5}L_{7,5}}{d_{7,5}}\frac{V_{7,5}^2}{2.g}+0{,}4\frac{V_{7,5}^2}{2.g}+0{,}4\frac{V_{7,5}^2}{2.g}+\frac{\lambda_{15}L_{15}}{d_{15}}\frac{V_{7,5}^2}{16.2g}+0{,}6\frac{V_{7,5}^2}{16.2g}+3\frac{V_{7,5}^2}{16.2g}+\frac{9V_{7,5}^2}{16.2g}+0{,}5\frac{V_{7,5}^2}{2.g}+1\frac{V_{7,5}^2}{16.2g}$$

$$7{,}5=\left(\frac{\lambda_{7,5}L_{7,5}}{d_{7,5}}+\frac{\lambda_{15}L_{15}}{16d_{15}}+2{,}15\right)\frac{V_{7,5}^2}{2.g}$$

Les conduites sont en fonte asphalté neuve c'est-à-dire que la hauteur des aspirités epsilon ε=0,012 cm.

$$\lambda_{7,5}=(1{,}14-0{,}86\ln(\varepsilon/d))^{-2}=(1{,}14-0{,}86\ln(0{,}012/7{,}5))^{-2}=0{,}02243$$

$$\lambda_{15}=(1{,}14-0{,}86\ln(\varepsilon/d))^{-2}=(1{,}14-0{,}86\ln(0{,}012/15))^{-2}=0{,}01891$$

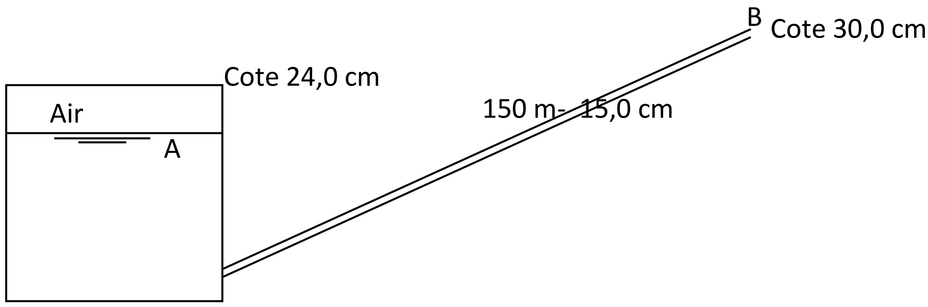
$$7{,}5=\left(\frac{0{,}02243.50}{(0{,}075)}+\frac{0{,}01891.30}{16(0{,}15)}+2{,}525\right)\frac{V_{7,5}^2}{2.g}=(14{,}95+0{,}2364+2{,}15)\frac{V_{7,5}^2}{2.g}$$

$$7{,}5=(17{,}3364)\frac{V_{7,5}^2}{2.g}\Rightarrow V_{7,5}^2=\frac{2.g.7{,}5}{17{,}3364}\Rightarrow V_{7,5}=\sqrt{\frac{2.g.7{,}5}{17{,}3364}}=2{,}9134\ \text{m/s}$$

$$Q=V_{7,5}S_{7,5}=2{,}9134\frac{\pi(0{,}075)^2}{4}=0{,}01287\ \text{m}^3/\text{s}=12{,}87\ \text{l/s}$$

Exercice n°3

De l'huile circule du réservoir A par 150 m de tuyau neuf de fonte asphaltée de 15 cm de diamètre jusqu'au point B de cote 30,0 m, comme le montre la figure suivante.



Quelle devra être la pression en A en kgf/cm^2 pour que le débit soit 13,0 l/s ? Densité =0,840 et ν = 2,10 x 10^{-6} m^2/s) utiliser ε=0,012 cm.
Utiliser la formule de Blasius pour calculer le coefficient de frottement λ=0,3164/(Re^{0,25})
Le coefficient de résistance à l'entrée de la conduite ξ=0,50.

Solution

Calcul de la pression au point A

Calcul de la vitesse de circulation d'eau dans le tuyau de diamètre égal à 150 mm.

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{4.Q}{\pi d^2} = \frac{4.0{,}013}{3{,}14159.(0{,}15)^2} = 0{,}7356 \text{ m/s}$$

$$R_e = \frac{V.d}{\nu} = \frac{0{,}7356.0{,}15}{2{,}6.10^{-6}} = 52546{,}394$$

$$\lambda = \left(\frac{0{,}3164}{Re^{0{,}25}}\right) = 0{,}0208978$$

Appliquons l'équation de Bernoulli entre les points A et B, nous aurons :

$$H_A = H_B + \sum \Delta H_{AB}$$

$$\left(Z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g}\right) = \left(Z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g}\right) + \sum \Delta H_{AB}$$

$$\frac{p_B}{\rho g} = \frac{p_{atm}}{\rho g}; \frac{V_A^2}{2g} \approx \ 0; V_B = V$$

$$\left(24 + \frac{p_A}{\rho g} + 0\right) = \left(30 + \frac{p_{atm}}{\rho g} + \frac{V^2}{2g}\right) + 0{,}5\frac{V^2}{2g} + \frac{\lambda l}{d}\frac{V^2}{2g}$$

$$\frac{p_A}{\rho g} = \left(6 + \frac{101325}{0{,}84.10^3.9{,}81} + \frac{(0{,}7356)^2}{19{,}62}\right) + 0{,}5\frac{(0{,}7356)^2}{19{,}62} + \frac{0{,}0208978.150}{0{,}15}\frac{(0{,}7356)^2}{19{,}62}$$

$$\frac{P_A}{\rho g} = 18{,}9138 \text{ m.c.h}$$

La pression manométrique est égale à la différence entre la pression absolue et atmosphérique

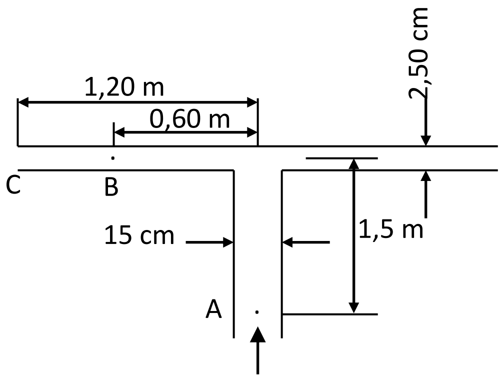
$$\frac{P_{Am}}{\rho g} = \frac{P_A}{\rho g} - \frac{p_{atm}}{\rho g} = 18{,}9138 - \frac{101325}{0{,}84.10^3.9{,}81} = 18{,}9138 - 12{,}291 = 6{,}7177 \text{ m.c.h}$$

La pression en kgf/cm^2

$$P_{Am} = \rho g.\frac{h}{9{,}81.10^{-4}} = \frac{840.9{,}81.6{,}7177}{98100} = 0{,}5559 \text{ kgf/cm}^2$$

Exercice n°4

De l'eau s'écoule radialement entre deux disques situés à l'éxtrémité d'un tuyau de 15 cm de diamètre comme le montre la figure ci-dessus. En négligeant les pertes, si la pression en A est de –0,30 m, trouver la hauteur de pression en B et le débit en l/s ?



Solution

Appliquons l'équation de Bernoulli entre le point A et le point C en prenant le plan horizontal de référence en A.

$$\left(Z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g}\right) = \left(Z_C + \frac{p_C}{\rho g} + \frac{V_C^2}{2g}\right) + \sum \Delta H_{AC}$$

$$Z_A = 0;\ Z_C = 1{,}5\ \mathrm{m}$$

$$\boldsymbol{\frac{p_{man\,A}}{\rho g} = -0,30\ \mathrm{m};\ \sum \Delta H_{AC} = 0;\ \frac{p_C}{\rho g} = \frac{p_{atm}}{\rho g}}$$

$$Q = V_A S_A = V_C S_C \Rightarrow V_C = \frac{V_A S_A}{S_C}$$

$$S_A = \frac{\pi d_A^2}{4} = \frac{\pi(0{,}15)^2}{4} = 0{,}01767\ \mathrm{m}^2;\ S_C = 2\pi r_C.e = (2\pi.1{,}2.0{,}025) = 0{,}1885\mathrm{m}^2$$

$$\left(0 + \frac{p_{atm} - p_{man\,A}}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g}\right) = \left(1{,}5 + \frac{p_{atm}}{\rho g} + \frac{V_C^2}{2g}\right)$$

$$\left(0 - \frac{p_{man\,A}}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g}\right) = \left(1{,}5 + \frac{\left(\frac{V_A S_A}{S_C}\right)^2}{2g}\right) \Rightarrow \left(-\frac{p_{man\,A}}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g}\right) = \left(1{,}5 + \frac{V_A^2 S_A^2}{2g S_C^2}\right)$$

$$\left(-\frac{p_{man\,A}}{\rho g} - 1{,}5\right) = \frac{V_A^2}{2g}\left(\frac{S_A^2}{S_C^2} - 1\right) \Rightarrow -1{,}8 = \frac{V_A^2}{2g}\left(\frac{(0{,}01767)^2}{(0{,}1885)^2} - 1\right)$$

$$-0{,}9912\frac{V_A^2}{2g} = -1{,}8 \Rightarrow \frac{V_A^2}{2g} = \frac{1{,}8}{0{,}9912} = 1{,}8160\ \mathrm{m};\ V_A = \sqrt{0{,}9912.1{,}8.2.9{,}81} = 5{,}9165\ \mathrm{m/s}$$

$$Q = V_A S_A = 5{,}9165\ .0{,}01767 = 0{,}10455\ \mathrm{m^3/s} = 104{,}55\ \mathbf{l/s}$$

Appliquons l'équation de Bernoulli entre le point A et le point B en prenant le plan horizontal de référence en A.

$$\left(Z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g}\right) = \left(Z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g}\right) + \sum \Delta H_{AB}$$

$$Z_A = 0;\ Z_C = 1{,}5\ \mathrm{m}$$

$$\frac{p_{man\,A}}{\rho g} = -0{,}30 \text{ m}; \; \sum \Delta H_{AB} = 0; \; \frac{p_B}{\rho g} = \frac{p_{atm} - p_{man\,B}}{\rho g}$$

$$S_A = \frac{\pi d_A^2}{4} = \frac{\pi (0{,}15)^2}{4} = 0{,}01767 \text{ m}^2; \; S_B = 2\pi r_B . e = (2\pi . 0{,}6 . 0{,}025) = 0{,}09425 \text{m}^2$$

$$Q = V_A S_A = V_B S_B \Rightarrow V_B = \frac{V_A S_A}{S_B} = \frac{Q}{S_B} = \frac{0{,}10455}{0{,}09425} = 1{,}109 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \frac{V_A^2}{2g} = \frac{(1{,}109)^2}{19{,}62} = 0{,}06269$$

$$\left(0 + \frac{p_{atm} + p_{man\,A}}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g}\right) = \left(1{,}5 + \frac{p_{atm} + p_{man\,B}}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g}\right)$$

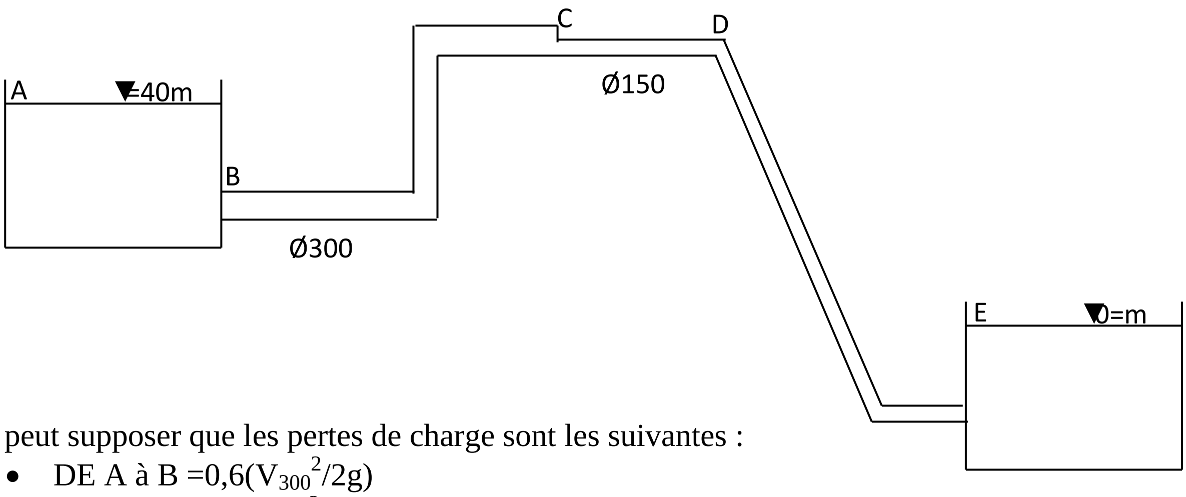
$$\frac{p_{man\,A}}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} = \left(1{,}5 + \frac{p_{man\,B}}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g}\right) \Rightarrow \frac{p_{man\,B}}{\rho g} = \left(-1{,}5 - \frac{V_B^2}{2g} + \frac{p_{man\,A}}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g}\right)$$

$$\frac{p_{man\,B}}{\rho g} = (-1{,}5 - 0{,}06269 - 0{,}3 + 1{,}8160) = -0{,}04669 \simeq -0{,}047 \text{ m}$$

Dépression ou une pression vacuométrique.

Exercice n° 5

De l'huile de pétrole de densité 0,761 circule du réservoir A au réservoir E comme l'indique la figure.



On peut supposer que les pertes de charge sont les suivantes :

- DE A à B $=0{,}6(V_{300}^2/2g)$
- DE B à C $=9{,}0(V_{300}^2/2g)$
- DE C à D $=0{,}4(V_{150}^2/2g)$
- DE D à E $=9{,}0(V_{150}^2/2g)$

Trouver :

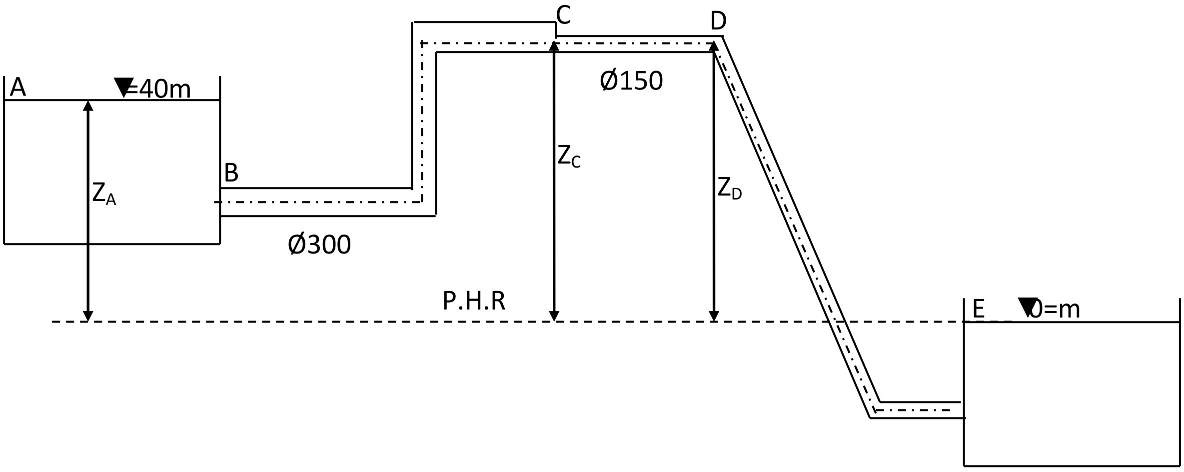
a) Le débit Q en m^3/s ?

b) La pression en C en kg/cm^2(Z_C-Z_A=0,7cm)

c) La puissance en C en Cheval vapeur, sachant que 1CV=736 W ?

Solution

a) Appliquons l'équation de Bernoulli entre le réservoir A et le réservoir E en prenant le plan horizontal de référence au niveau du plan d'eau du réservoir inférieur.



$$\left(Z_A+\frac{p_A}{\rho g}+\frac{V_A^2}{2g}\right)=\left(Z_E+\frac{p_E}{\rho g}+\frac{V_E^2}{2g}\right)+\sum \Delta H_{AE}$$

$$(Z_A-Z_E)+\left(\frac{p_A}{\rho g}-\frac{p_E}{\rho g}\right)+\left(\frac{V_A^2}{2g}-\frac{V_E^2}{2g}\right)=\sum \Delta H_{AE}$$

$$\frac{p_A}{\rho g}=\frac{p_E}{\rho g}=\frac{p_{atm}}{\rho g}\Rightarrow\frac{p_A}{\rho g}-\frac{p_E}{\rho g}=0;\left(\frac{V_A^2}{2g}-\frac{V_E^2}{2g}\right)\approx\ 0;(Z_A-Z_E)=40\text{ m}$$

$$\mathbf{(Z_A-Z_E)}=\sum \mathbf{\Delta H_{AE}}$$

$$\sum \Delta H_{AE}=\sum \Delta H_{AB}+\sum \Delta H_{BC}+\sum \Delta H_{CD}+\sum \Delta H_{DE}$$

$$\sum \Delta H_{AE}=0{,}6\frac{V_{300}^2}{2g}+9{,}0\frac{V_{300}^2}{2g}+0{,}4\frac{V_{150}^2}{2g}+9{,}0\frac{V_{150}^2}{2g}=9{,}6\frac{V_{300}^2}{2g}+9{,}4\frac{V_{150}^2}{2g}$$

$$40=9{,}6\frac{V_{300}^2}{2g}+9{,}4\frac{V_{150}^2}{2g}$$

$$Q=V_{300}.S_{300}=V_{150}.S_{150}\Rightarrow V_{150}=\frac{Q}{S_{150}}\text{ et }V_{300}=\frac{Q}{S_{300}}$$

$$40=\frac{9{,}6}{2g}\frac{Q^2}{S_{300}^2}+\frac{9{,}4}{2g}\frac{Q^2}{S_{150}^2}\Rightarrow Q^2\left(\frac{9{,}6}{2gS_{300}^2}+\frac{9{,}4}{2gS_{150}^2}\right)=40\Rightarrow Q=\sqrt{\frac{40}{\left(\frac{9{,}6}{2gS_{300}^2}+\frac{9{,}4}{2gS_{150}^2}\right)}}$$

$$Q=\sqrt{\frac{40}{\left(\frac{16.9{,}6}{2g\pi^2d_{300}^4}+\frac{16.9{,}4}{2g\pi^2d_{150}^4}\right)}}=0{,}15654958\text{ m}^3/\text{s}=156{,}55\text{ l/s}$$

b) Calcul de la pression au point C

Appliquons l'équation de Bernoulli entre le réservoir A et le point C en prenant le plan horizontal de référence au niveau du plan d'eau du réservoir inférieur.

$$\left(Z_A+\frac{p_A}{\rho g}+\frac{V_A^2}{2g}\right)=\left(Z_C+\frac{p_C}{\rho g}+\frac{V_{AC}^2}{2g}\right)+\sum \Delta H_{AC}$$

$$\frac{V_A^2}{2g}\simeq 0;\ \frac{p_A}{\rho g}=\frac{p_{atm}}{\rho g};\ (Z_C-Z_A)=0{,}7\text{ m};\sum \Delta H_{AC}=\sum \Delta H_{AB}+\sum \Delta H_{BC}$$

$$\sum \Delta H_{AC}=0{,}6\frac{V_{300}^2}{2g}+9{,}0\frac{V_{300}^2}{2g}=9{,}6\frac{V_{300}^2}{2g}$$

$$\frac{V_{AC}^2}{2g}=\frac{V_{300}^2}{2g};\ Q=V_{300}.S_{300}\Rightarrow V_{300}^2=\frac{Q^2}{S_{300}^2}=\frac{16.Q^2}{\pi^2 d_{300}^4}$$

$$(Z_C-Z_A)+\left(\frac{p_C}{\rho g}-\frac{p_A}{\rho g}\right)+\left(\frac{V_{300}^2}{2g}-\frac{V_A^2}{2g}\right)+9{,}6\frac{V_{300}^2}{2g}=0$$

$$(Z_C-Z_A)+\left(\frac{p_C}{\rho g}-\frac{p_A}{\rho g}\right)+\left(\frac{8.Q^2}{g\pi^2 d_{300}^4}-\frac{V_A^2}{2g}\right)+9{,}6\frac{8.Q^2}{g\pi^2 d_{300}^4}=0$$

$$(0{,}7)+\left(\frac{p_C}{761.9{,}81}-\frac{101325}{761.9{,}81}\right)+\left(\frac{8.Q^2}{g\pi^2 d_{300}^4}-0\right)+9{,}6\frac{8.Q^2}{g\pi^2 d_{300}^4}=0$$

$$(0{,}7)+\left(\frac{p_C}{761.9{,}81}-\frac{101325}{761.9{,}81}\right)+\frac{84{,}8.Q^2}{g\pi^2 d_{300}^4}=0$$

$$\frac{p_C}{761.9{,}81}=\frac{101325}{761.9{,}81}-\frac{84{,}8.Q^2}{g\pi^2 d_{300}^4}-0{,}7\Rightarrow\frac{p_C}{761.9{,}81}=10{,}22\Rightarrow p_C=76315{,}8765\ \text{Pascals}$$

La pression calculée ici est la pression absolue.

La pression vacuométrique en C

$$\frac{p_C}{\rho g}-\frac{p_A}{\rho g}=\frac{76315{,}8765}{761.9{,}81}-\frac{101325}{761.9{,}81}=10{,}22-13{,}5726=-3{,}35\ \text{m.c.pétrole}$$

$$p_C=\rho.g.h=761.9{,}81(-3{,}35)=-25009{,}1235\ \text{Pascals}=-0{,}254935\ \text{kgf/cm}^2$$

c) Calcul la puissance en C en cheval vapeur

$$P_u=\rho.g.H_C.Q$$

$$H_C=\left(Z_C+\frac{p_C}{\rho g}+\frac{V_{300}^2}{2g}\right)=40{,}7-3{,}35+\frac{8.Q^2}{g\pi^2 d_{300}^4}=40{,}7-3{,}35+0{,}25=37{,}6\ \text{m.c.p}$$

$$P_u=(761.9{,}81.0{,}15655).(37{,}6)=43943{,}4936\ \text{watts}=59{,}706\ \text{CV}$$

Exercice n°6

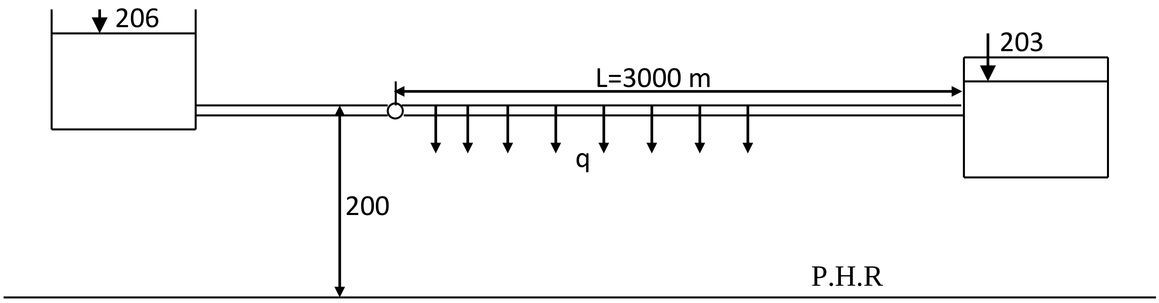
Un bassin d'aspiration à l'air libre dont le niveau du plan d'eau est à la cote z_1=206 m, la pression atmosphérique régnant au-dessus de sa surface libre est de 1 bar. Le nombre de tours n=950 tr/min ; le diamètre de refoulement est Dr=500 mm ; la longueur est de 3000 m ; le coefficient de résistance spécifique de la tuyauterie A=0,058 ; Le débit fourni aux consommateurs est constant et uniformément réparti par unité de longueur, on prendra q=240 l/h par mètre de tuyauterie.

La tuyauterie est horizontale et elle est à la cote z=200 m (Va = Vr).

Un réservoir de refoulement dans lequel règne au-dessus du niveau d'eau une pression de 1,5 bars.

1- Sachant que la pompe délivre un débit de 204 l/s. Calculer le débit d'eau arrivant au réservoir de refoulement ?

2- Sachant que le rendement de la pompe est de 0,6. Déterminer la puissance absorbée par la pompe ?



Solution

a) Calcul du débit arrivant au réservoir

Le débit spécifique q=240 l/hab/ml

Le débit consommé le long du refoulement est calculé est obtenu par l'expression suivante :

$$Q_{Consommé} = \frac{240}{3600} . 3000 = 200 \text{ l/s}$$

Le débit arrivant au réservoir de refoulement

$$Q = Q_{Pompé} - Q_{Consommé} = 204 - 200 = 4 \text{ l/s}$$

b) Calcul de la puissance absorbée par la pompe

- Calcul de hauteur contre laquelle travaille la pompe.

$$H = \left(Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}\right) - \left(Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g}\right) + \sum \Delta H_{1-2}$$

Le débit de dimensionnement s'écrit :

$$Q_{dimens} = Q + 0{,}55Q_{Consommé} = 4 + 0{,}55.200 = 114 \text{ l/s}$$

$$\sum \Delta H_{1-2} = A. Q^2. L = 0{,}058. (144. 10^{-3})^2. 3000 = 3{,}608 \text{ m}$$

$$H = (Z_2 - Z_1) + \left(\frac{p_2}{\rho g} - \frac{p_1}{\rho g}\right) + \left(\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}\right) + \sum \Delta H_{1-2}$$

$$H = (203 - 206) + \left(\frac{101325 + 1{,}5. 10^5}{10^3. 9{,}81} - \frac{101325 + 10^5}{10^3. 9{,}81}\right) + 0 + 2{,}78. 10^{-3}$$

$$H = -3 + 5 + 3{,}608 = 5{,}608 \text{ m}$$

La puissance s'obtient donc :

$$P_{abs} = \frac{\rho g. H. Q}{\eta} = \frac{10^3. 9{,}81.5{,}608.0{,}114}{0{,}6} = 10452{,}7512 \text{ Watts} = 14{,}202 \text{ CV}$$

Chapitre II Equation fondamentale des machines hydrauliques

2.1 Equation fondamentale des machines hydrauliques

$$C = \rho Q(r_2.V_2.\cos\alpha_2 - r_1.V_1.\cos\alpha_1) \qquad (2.1)$$

2.1.1 Calcul de la hauteur théorique produite par la pompe

$$H_{\text{théorique}} = \frac{1}{g}(u_2.V_2.\cos\alpha_2 - u_1.V_1.\cos\alpha_1) \qquad (2.2)$$

Cette dernière équation s'appelle l'équation fondamentale des machines hydrauliques ou équation d'Euler.

2.1.2. Calcul du débit théorique délivré par la pompe

$$Q = -\pi D_2 b_2 tg(\beta_2) u_2 \left(1 - \frac{g.H_{\text{théorique}}}{u_2^2}\right) \qquad (2.3)$$

Cette dernière expression permet d'écrire la relation de Hthéorique en fonction de Q .

$$\left(1 - \frac{g.H_{\text{théorique}}}{u_2^2}\right) = \frac{1}{-\pi D_2 b_2 tg(\beta_2) u_2} Q \Rightarrow \frac{g.H_{\text{théorique}}}{u_2^2} = 1 + \frac{1}{\pi D_2 b_2 tg(\beta_2) u_2} Q$$

$$H_{\text{théorique}} = \frac{u_2^2}{g} + \frac{u_2}{\pi D_2 b_2 tg(\beta_2) g} Q \qquad (2.4)$$

2.2.3. Application de l'équation de Bernoulli (d'énergie) aux pompes à aubes

$$\left(Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g}\right) - \left(\frac{u_1^2}{2g} - \frac{u_2^2}{2g}\right) - \Delta H_{1.2} = \left(Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}\right) \qquad (2.5)$$

2.2.4. Calcul de la hauteur de charge analytique produite par la roue d'une pompe

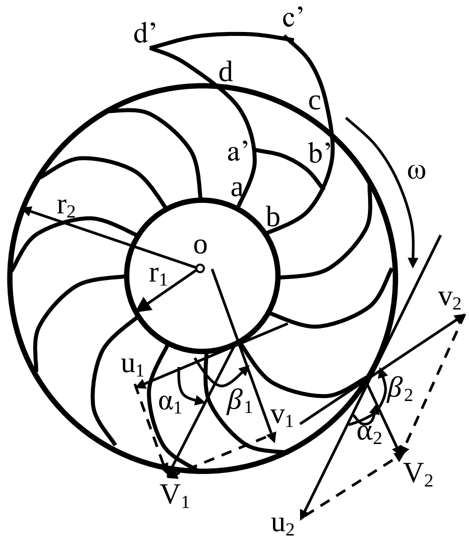
$$H_{\text{réelle}} = \left(\frac{u_2^2}{2g} + \frac{V_2^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g}\right) - k_i \frac{v_2^2}{2g} - k_e \frac{V_2^2}{2g} \qquad (2.6)$$

2.2.5. Décomposition de l'équation fondamentale des machines hydrauliques

$$H_{\text{theorique}} = \left(\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}\right) + \left(\frac{u_2^2}{2g} + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g}\right) \qquad (2.7)$$

$$H_{\text{théorique}} = H_{\text{roue}} + H_{\text{diffuseur}}$$

Exercice n° 1
Calculer le moment et la puissance fournie par le rotor (la roue) d'une pompe dans les conditions de l'écoulement permanent ?
Solution
Nous allons essayer de démontrer que l'énergie transmise à l'eau, grâce à la rotation de la roue, a fait augmenter à la fois la pression et la vitesse de l'eau. Dans ce cas l'application, au mouvement absolu de l'eau entre les aubages, le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe de la pompe entre deux instants t et t+Δt permet d'écrire.



Epures de vitesses à l'entrée et à la sortie de la roue d'une pompe à aubes

A l'instant t, la masse d'eau contenue entre deux aubages occupe un espace limité par la section abcd et, à l'instant (t+Δt) cette masse d'eau se déplace et occupe un espace limité par la section a'b'c'd'. Exprimons la variation de la quantité de mouvement entre ces deux périodes.

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = \frac{d(m\vec{V_2} - m\vec{V_1})}{dt}$$

La projection des vitesses V_1 et V_2 sur les axes portant les vitesses u_1 et u_2 donne :

$$\frac{d(mV_2\cos(\alpha_2) - mV_1\cos(\alpha_1))}{dt}$$

a) Le moment cinétique à l'entrée de la roue est égale au produit vectoriel de la quantité de mouvement par le vecteur déplacement ce qui permet d'écrire :

$$C_1 = m\overrightarrow{V_1}x\overrightarrow{r_1} = m.r_1.V_1.\cos\alpha_1$$

Alors qu'à la sortie

$$C_2 = m\overrightarrow{V_2}x\overrightarrow{r_2} = m.r_2.V_2.\cos\alpha_2$$

La variation du moment cinétique, entre la sortie et l'entrée de la roue, en dt secondes est égale au moment cinétique des forces extérieures par rapport à l'axe de la pompe alors ce dernier n'est autre que le couple du moteur électrique C, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{d(m.r_2.V_2\cos(\alpha_2) - m.r_1.V_1\cos(\alpha_1))}{dt} = C$$

Pour une masse d'eau élémentaire, dm, circulant en dt seconde, la variation de ce moment s'écrit :

$$\frac{C_2 - C_1}{dt} = C \Rightarrow \frac{dm.r_2.V_2.\cos\alpha_2 - dm.r_1.V_1.\cos\alpha_1}{dt} = C$$

$$\Rightarrow dm.r_2.V_2.\cos\alpha_2 - dm.r_1.V_1.\cos\alpha_1 = C.dt$$

$$dm(r_2.V_2.\cos\alpha_2 - r_1.V_1.\cos\alpha_1) = C.dt \Rightarrow \int dm(r_2.V_2.\cos\alpha_2 - r_1.V_1.\cos\alpha_1) = \int C.dt$$

$$M(r_2.V_2.\cos\alpha_2 - r_1.V_1.\cos\alpha_1) = C.t \Rightarrow \frac{M}{t}(r_2.V_2.\cos\alpha_2 - r_1.V_1.\cos\alpha_1) = C$$

$$\frac{M}{t} = \rho\frac{V}{t} = \rho Q$$

$$\mathbf{C = \rho Q(r_2.V_2.\cos\alpha_2 - r_1.V_1.\cos\alpha_1)}$$

b) Calcul de la puissance absorbée d'une pompe

La puissance absorbée est définie comme étant le produit du couple du moteur électrique par la vitesse angulaire ω.

$$P_{absorbée} = C.\omega = \rho Q(r_2.V_2.\cos\alpha_2 - r_1.V_1.\cos\alpha_1).\omega$$

$$P_{absorbée} = \rho Q(\omega.r_2.V_2.\cos\alpha_2 - \omega.r_1.V_1.\cos\alpha_1)$$

Nous avons déjà démontré que :

$$\omega.r_2 = u_2 \text{ et } \omega.r_1 = u_1$$

$$\mathbf{P_{absorbée} = \rho Q(u_2.V_2.\cos\alpha_2 - u_1.V_1.\cos\alpha_1)}$$

Exercice n°2

Démontrer les expressions des hauteurs théorique et réelle de la charge produite par la roue d'une pompe ?

Solution

Pour une pompe idéale, théoriquement on peut négliger les pertes de charge par choc et par frottement à l'intérieure de la roue. Dans ce cas là on peut dire que la puissance utile (fournie par la pompe) est égale à la puissance absorbée (fournie à la pompe).

La puissance utile est donnée par l'expression :

$$\mathbf{P_{utile} = \rho.g.Q.H_{théorique}}$$

Pour un rendement de la pompe (êta) η=100% nous aurons :

$$P_{absorbée} = P_{utile} \Rightarrow \rho Q(u_2.V_2.\cos\alpha_2 - u_1.V_1.\cos\alpha\alpha_1) = \rho.g.Q.H_{théorique}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\mathbf{H_{théorique} = \frac{1}{g}(u_2.V_2.\cos\alpha_2 - u_1.V_1.\cos\alpha_1)}$$

La charge réelle produite par la roue d'une pompe est donnée par l'expression suivante :

$$H_{réelle} = H_{théorique} - \text{pertes dues à la roue} - \text{pertes dues à la sortie}$$

$$H_{réelle} = H_{théorique} - k_i\frac{v_2^2}{2g} - k_e\frac{V_2^2}{2g}$$

$$H_{réelle} = \frac{1}{g}(u_2.V_2.\cos\alpha_2 - u_1.V_1.\cos\alpha_1) - k_i\frac{v_2^2}{2g} - k_e\frac{V_2^2}{2g}$$

Pour la plupart des pompes à aubes l'écoulement à l'entrée des aubes est considéré comme radial et la valeur du terme $u_1V_1\cos(\alpha_1)$ est nulle puisque α_1=90° et cos(90)=0 . L'équation de $H_{réelle}$ s'écrit alors :

$$H_{réelle} = \frac{u_2.V_2.\cos\alpha_2}{g} - k_i\frac{v_2^2}{2g} - k_e\frac{V_2^2}{2g}$$

Exercice n° 3
Etablir l'équation de Bernoulli pour le rotor (la roue) d'une pompe ?
Solution
La hauteur d'élévation réelle d'une pompe à aubes est définie comme étant la différence de charge hydraulique totale entre la sortie et l'entrée de la roue. L'application de l'équation de Bernoulli entre l'entrée et la sortie de la roue d'une pompe à aubes permet d'écrire :

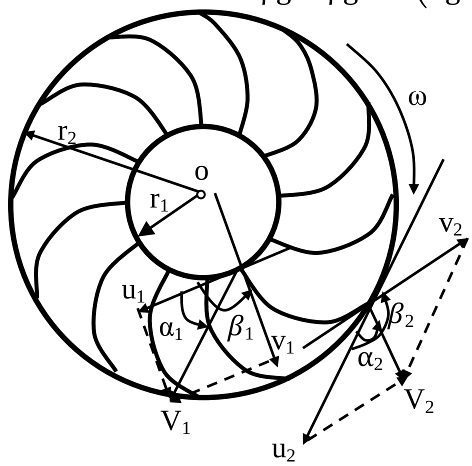
$$H_R = H_S - H_e \Rightarrow \left(Z_S + \frac{p_S}{\rho g} + \frac{V_S^2}{2g}\right) - \left(Z_e + \frac{p_e}{\rho g} + \frac{V_e^2}{2g}\right) = (Z_S - Z_e) + \left(\frac{p_S}{\rho g} - \frac{p_e}{\rho g}\right) + \left(\frac{V_S^2}{2g} - \frac{V_e^2}{2g}\right)$$

La hauteur d'élévation théorique d'une pompe à aubes est donnée aussi par l'expression suivante :

$$H_T = \frac{1}{g}\left(u_2 V_2 \cos(\alpha_2) - u_1 V_1 \cos(\alpha_1)\right)$$

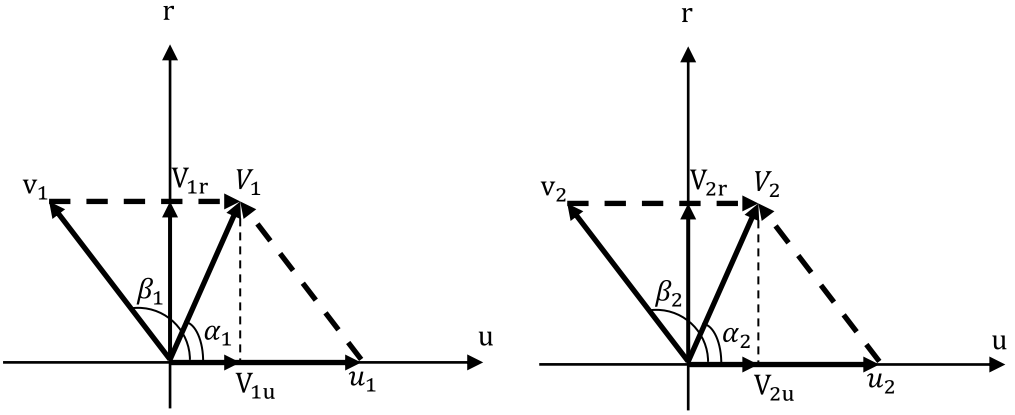
Alors que la hauteur d'élévation réelle, H_R, est égale à la hauteur d'élévation théorique retranchée de la perte de charge générée entre l'entrée et la sortie de la roue.

$$H_R = H_T - \Delta H_{s.e} \Rightarrow (Z_S - Z_e) + \left(\frac{p_S}{\rho g} - \frac{p_e}{\rho g}\right) + \left(\frac{V_S^2}{2g} - \frac{V_e^2}{2g}\right) = H_T - \Delta H_{s.e}$$



Posons la vitesse absolue à la sortie est égale à V_2 ($V_s=V_2$) et la vitesse absolue à l'entrée est égale à V_1 ($V_e=V_1$) nous aurons :

$$(Z_2 - Z_1) + \left(\frac{p_2}{\rho g} - \frac{p_1}{\rho g}\right) + \left(\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}\right) = H_T - \Delta H_{1.2}$$



Triangles de vitesses à l'entrée et à la sortie de la roue d'une pompe à aubes

La vitesse absolue à l'entrée de la roue peut être exprimée par l'expression suivante :

$$V_1^2 = u_1^2 + v_1^2 + 2v_1 u_1 \cos\beta_1$$

$$\cos(\alpha_1) = \frac{V_{1u}}{V_1} \Rightarrow V_{1u} = V_1 \cos(\alpha_1)$$

$$\cos(\pi - \beta_1) = \frac{u_1 - V_{1u}}{v_1} \text{ et } \cos(\pi - \beta_1) = -\cos(\beta_1) \Rightarrow -\cos(\beta_1) = \frac{u_1 - V_{1u}}{v_1}$$

$$\Rightarrow V_{1u} = u_1 + v_1\cos(\beta_1)$$

Ces deux dernières expressions de V_{1u} permettent d'écrire :

$$V_1 \cos(\alpha_1) = u_1 + v_1\cos(\beta_1)$$

Nous pouvons aussi écrire la vitesse absolue à la sortie comme suit :

$$V_2^2 = u_2^2 + v_2^2 + 2v_2u_2\cos\beta_2$$

Et de la même manière nous aurons :

$$V_2 \cos(\alpha_2) = u_2 + v_2\cos(\beta_2)$$

$$(Z_2 - Z_1) + \left(\frac{p_2}{\rho g} - \frac{p_1}{\rho g}\right) + \left(\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}\right) + \Delta H_{1.2} - H_T = 0$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\left(Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g}\right) = \left(Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}\right) + \Delta H_{1.2} - H_T$$

$$\left(Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2 + v_1^2 + 2v_1u_1\cos\beta_1}{2g}\right) = \left(Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2 + v_2^2 + 2v_2u_2\cos\beta_2}{2g}\right) + \Delta H_{1.2} - H_T$$

La hauteur d'élévation théorique peut s'écrit comme suit :

$$H_T = \frac{1}{g}\left(u_2V_2 \cos(\alpha_2) - u_1V_1 \cos(\alpha_1)\right) = \frac{1}{g}\left(u_2\left(u_2 + v_2\cos(\beta_2)\right) - u_1\left(u_1 + v_1\cos(\beta_1)\right)\right)$$

$$H_T = \left(\frac{u_2^2}{g} + \frac{u_2v_2\cos(\beta_2)}{g}\right) - \left(\frac{u_1^2}{g} + \frac{u_1v_1\cos(\beta_1)}{g}\right)$$

$$\left(Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2 + v_1^2 + 2v_1u_1\cos\beta_1}{2g}\right) - \Delta H_{1.2} = \left(Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2 + v_2^2 + 2v_2u_2\cos\beta_2}{2g}\right) - H_T$$

Remplaçons par l'expression de la hauteur d'élévation théorique H_T dans l'expression précédente, nous aurons :

$$\left(Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2 + v_1^2 + 2v_1u_1\cos\beta_1}{2g}\right) - \Delta H_{1.2} - \left(\frac{u_1^2}{g} + \frac{u_1v_1\cos(\beta_1)}{g}\right)$$
$$= \left(Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2 + v_2^2 + 2v_2u_2\cos\beta_2}{2g}\right) - \left(\frac{u_2^2}{g} + \frac{u_2v_2\cos(\beta_2)}{g}\right)$$

Le premier terme peut être simplifié comme suit :

$$\left(Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{2v_1u_1\cos\beta_1}{2g}\right) - \frac{u_1^2}{g} - \frac{u_1v_1\cos(\beta_1)}{g} - \Delta H_{1.2}$$
$$= Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g} - \Delta H_{1.2}$$

Alors que le second terme devient :

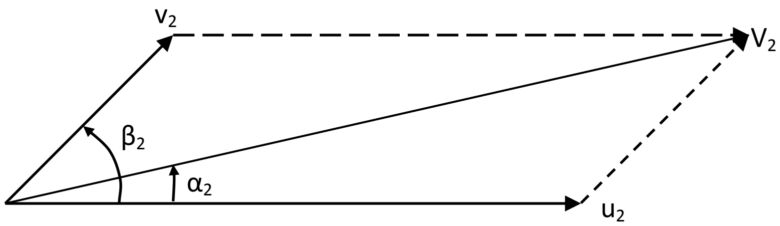
$$\left(Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{2v_2u_2\cos\beta_2}{2g}\right) - \frac{u_2^2}{g} - \frac{u_2v_2\cos(\beta_2)}{g} = Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} - \frac{u_2^2}{2g}$$

Donc nous pouvons écrire :

$$\left(Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g}\right) - \left(\frac{u_1^2}{2g} - \frac{u_2^2}{2g}\right) - \Delta H_{1.2} = \left(Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}\right)$$

Exercice n° :4

Calculer la valeur de la hauteur de charge produite par la roue d'une pompe en fonction de U_2, V_2 et v_2 ?
Sachant que les pertes dues au rotor =Ki .$v_2^2/2g$ et les pertes dues à la sortie =Ke.$V_2^2/2g$



Solution

La hauteur de charge théorique délivrée par la pompe est donnée par la relation déjà démontré.

$$H_{\text{théorique}} = \frac{1}{g}(u_2.V_2.\cos\alpha_2 - u_1.V_1.\cos\alpha_1)$$

Alors que la charge réelle produite par la pompe est inférieure que celle théorique à cause des pertes de charge dues à la roue (glissement de l'eau sur les aubes) et des pertes dues à la sortie.

$$H_{\text{réelle}} = H_{\text{théorique}} - \text{pertes dues à la roue} - \text{pertes dues à la sortie}$$

$$H_{\text{réelle}} = H_{\text{théorique}} - k_i\frac{v_2^2}{2g} - k_e\frac{V_2^2}{2g}$$

$$H_{\text{réelle}} = \frac{1}{g}(u_2.V_2.\cos\alpha_2 - u_1.V_1.\cos\alpha_1) - k_i\frac{v_2^2}{2g} - k_e\frac{V_2^2}{2g}$$

Pour la plupart des pompes à aubes l'écoulement à l'entrée des aubes est considéré comme radial et la valeur du terme $u_1V_1\cos(\alpha_1)$ est nulle puisque α_1=90° et cos(90)=0 . L'équation de $H_{\text{réelle}}$ s'écrit alors :

$$H_{\text{réelle}} = \frac{u_2.V_2.\cos\alpha_2}{g} - k_i\frac{v_2^2}{2g} - k_e\frac{V_2^2}{2g}$$

$$V_2\cos(\alpha_2) = u_2 + v_2\cos(\beta_2)$$

$$H_{\text{réelle}} = \frac{u_2.(u_2 + v_2\cos(\beta_2))}{g} - k_i\frac{v_2^2}{2g} - k_e\frac{V_2^2}{2g} = \frac{u_2^2}{g} + \frac{u_2.v_2\cos(\beta_2)}{g} - k_i\frac{v_2^2}{2g} - k_e\frac{V_2^2}{2g}$$

$$V_2^2 = u_2^2 + v_2^2 + 2v_2u_2\cos\beta_2 \Rightarrow v_2u_2\cos\beta_2 = \frac{V_2^2 - u_2^2 - v_2^2}{2}$$

Introduisons cette dernière dans l'expression de $H_{\text{réelle}}$ nous aurons :

$$H_{\text{réelle}} = \frac{u_2^2}{g} + \frac{V_2^2 - u_2^2 - v_2^2}{2g} - k_i\frac{v_2^2}{2g} - k_e\frac{V_2^2}{2g}$$

$$\mathbf{H_{\text{réelle}} = \left(\frac{u_2^2}{2g} + \frac{V_2^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g}\right) - k_i\frac{v_2^2}{2g} - k_e\frac{V_2^2}{2g}}$$

Exercice n°5

Une pompe centrifuge tourne à 600 tr/min. On prend les données suivantes : r_1=5cm, r_2=20 cm, S_1 radiale=75 π cm^{2,} S_2 radiale=180 π cm^2, β_1=135° ; β_2=120°, l'écoulement est radiale à l'entrée des lames. En négligeant les frottements, calculer les vitesses relatives à l'entrée et à la sortie et la puissance fournie à l'eau ?

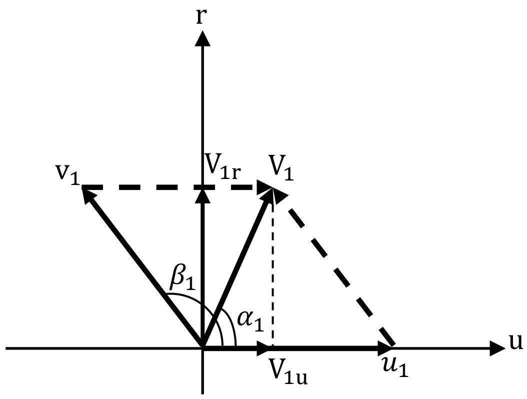
Solution

La vitesse de rotation $\omega = \frac{2\pi n}{60}$ en radians/seconde

Où n est le nombre de tours du moteur d'entrainement à la minute (tours/minute).

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi 600}{60} = 20\pi \ \mathrm{rad/s}$$

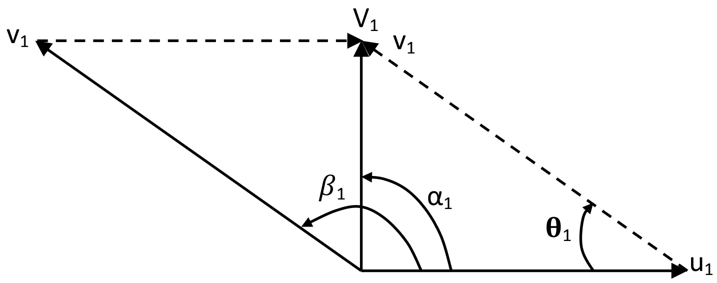
À l'entrée de la roue (rotor) l'épure de vitesses peut représenter par le schéma suivant :



La vitesse circonférentielle u_1 est donnée en fonction de la vitesse angulaire par l'expression suivante :

$$u_1 = \omega . r_1 = 20\pi . 0{,}05 = \pi \ \mathrm{m/s}$$

L'écoulement est radial à l'entrée des lames (aubes), c'est-à-dire α_1=90° ce qui permet d'écrire V_{1r}=V_1 et l'épure de vitesses prend le schéma suivant :



Calcul de la vitesse relative à l'entrée de la roue v_1

$$\theta_1 = \pi - \beta_1 = 180 - 135 = 45°$$

$$\cos(\theta_1) = \frac{\|u_1\|}{\|v_1\|} \Rightarrow \|v_1\| = \frac{\|u_1\|}{\cos(\theta_1)} = \frac{\pi}{\cos(45°)} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi = 4{,}4465 \ \mathrm{m/s}$$

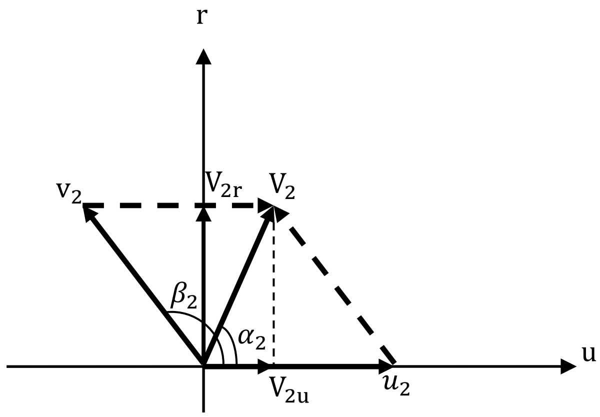
Calcul du débit entrant dans la roue.

$$Q = V_{1r} . S_1 = V_1 . S_1$$

$$v_1^2 = V_1^2 + u_1^2 \Rightarrow V_1^2 = v_1^2 - u_1^2 \Rightarrow V_1 = \sqrt{v_1^2 - u_1^2} = \sqrt{2\pi^2 - \pi^2} = \sqrt{\pi^2} = \pi$$

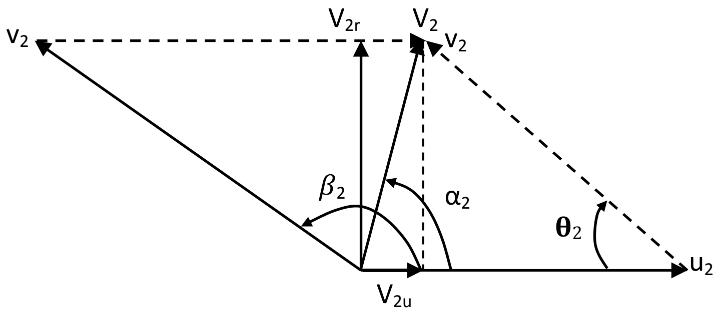
$$Q = V_1 . S_1 = \pi . 75\pi . 10^{-4} = 75\pi^2 . 10^{-4} \mathrm{m^3/s}$$

À la sortie de la roue (rotor) l'épure de vitesses peut être schématisée comme suit :



La vitesse circonférentielle u_2 est donnée en fonction de la vitesse angulaire par l'expression suivante :

$$u_2 = \omega . r_2 = 20\pi . 0{,}2 = 4\pi \text{ m/s}$$



$$\theta_2 = \pi - \beta_2 = 180 - 120 = 60°$$

$$Q = V_{2r}.S_2 \Rightarrow V_{2r} = \frac{Q}{S_2} = \frac{75\pi^2 . 10^{-4}}{180\pi . 10^{-4}} = \frac{75}{180}\pi \text{ m/s}$$

$$V_2^2 = V_{2r}^2 + V_{2u}^2$$

$$\sin(\theta_2) = \frac{V_{2r}}{v_2} \Rightarrow V_{2r} = v_2 \sin(\theta_2)$$

$$\cos(\theta_2) = \frac{u_2 - V_{2u}}{v_2} \Rightarrow u_2 - V_{2u} = v_2 \cos(\theta_2) \Rightarrow V_{2u} = u_2 - v_2 \cos(\theta_2)$$

$$V_2^2 = (v_2 \sin(\theta_2))^2 + (u_2 - v_2 \cos(\theta_2))^2 = v_2^2 + u_2^2 - 2u_2 v_2 \cos(\theta_2)$$

$$\sin(\theta_2) = \frac{V_{2r}}{v_2} \Rightarrow v_2 = \frac{V_{2r}}{\sin(\theta_2)} = \frac{75\pi}{180 . \sin(60°)} = 1{,}51146 \text{ m/s}$$

$$\sin(\theta_2) = \frac{V_{2r}}{v_2} \Rightarrow V_{2r} = v_2 \sin(\theta_2)$$

$$\sin(\alpha_2) = \frac{V_{2r}}{V_2} \Rightarrow V_{2r} = V_2 \sin(\alpha_2) = \frac{75}{180}\pi = 1{,}309$$

Ces deux dernières équations permettent d'écrire :

$$v_2 \sin(\theta_2) = V_2 \sin(\alpha_2) \Rightarrow v_2 = \frac{V_2 \sin(\alpha_2)}{\sin(\theta_2)} = \frac{1{,}309}{\sin(60°)} = 1.51146 \text{ m/s}$$

$$V_2^2 = V_{2r}^2 + V_{2u}^2 = (v_2 \sin(\theta_2))^2 + (u_2 - v_2 \cos(\theta_2))^2$$

$$V_2^2 = (1{,}309)^2 + (4\pi - 1{,}51146.\cos(60°))^2 \Rightarrow V_2 = 11{,}8829\ \mathrm{m/s}$$

$$\sin(\alpha_2) = \frac{V_{2r}}{V_2} = \frac{1{,}309}{11{,}8829} = 0{,}11015 \Rightarrow \alpha_2 = 6{,}32°$$

$$\cos(\alpha_2) = \frac{V_{2u}}{V_2} \Rightarrow V_{2u} = V_2\cos(\alpha_2)$$

La charge délivrée par la pompe

$$H = \frac{1}{g}u_2V_2\cos(\alpha_2) = \frac{1}{9.81}.4\pi.11{,}88.\cos(6.32°) = 15{,}125\ \mathrm{m}$$

La puissance en cheval vapeur

$$P = \frac{\rho.g.H.Q}{736} = \frac{1000.9{,}81.15{,}125.75\pi^2.10^4}{736} = 14{,}92\ \mathrm{C.V}$$

Exercice n° 6

Un rotor de pompe, de 30 cm de diamètre, a un débit de 0,142 m^3/s quand il tourne à 1200 tr/min. L'angle de la lame β_2 est de 120° et l'aire de sortie A_2 est de 0,023 m^2. En admettant que les pertes sont $\mathbf{2,8}(\frac{v_2^2}{2.g})$ et de $\mathbf{0,38}(\frac{V_2^2}{2.g})$ calculer le rendement de la pompe (la surface de sortie A_2 est mesurée normalement à v_2).

Solution

Calcul du rendement de la pompe

Le rendement de la pompe est défini comme étant le rapport entre la hauteur d'élévation théorique et réelle.

$$\eta = \frac{H_{\text{théorique}}}{H_{\text{réelle}}}$$

$$H_{\text{théorique}} = \frac{1}{g}(u_2.V_2.\cos\alpha_2 - u_1.V_1.\cos\alpha_1)$$

$$H_{\text{réelle}} = H_{\text{théorique}} - \text{pertes dues à la roue} - \text{pertes dues à la sortie}$$

$$H_{\text{réelle}} = H_{\text{théorique}} - k_i\frac{v_2^2}{2g} - k_e\frac{V_2^2}{2g}$$

$$H_{\text{réelle}} = \frac{1}{g}(u_2.V_2.\cos\alpha_2 - u_1.V_1.\cos\alpha_1) - k_i\frac{v_2^2}{2g} - k_e\frac{V_2^2}{2g}$$

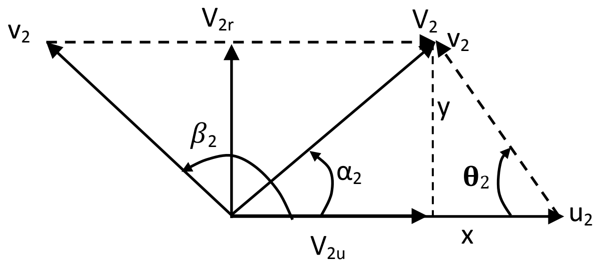
Pour la plupart des pompes à aubes l'écoulement est radial à l'entrée des aubes, c'est-à-dire α_1=90° ce qui permet d'écrire :

$$H_{\text{théorique}} = \frac{1}{g}(u_2.V_2.\cos\alpha_2)$$

$$H_{\text{réelle}} = \frac{1}{g}(u_2.V_2.\cos\alpha_2) - k_i\frac{v_2^2}{2g} - k_e\frac{V_2^2}{2g}$$

La surface de sortie A_2 est mesurée normalement à v_2 c'est-à-dire que v_2 peut être calculée par la relation suivante :

$$v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0{,}142}{0{,}023} = 6{,}174\ \mathrm{m/s}$$



Calcul de la vitesse linéaire (circonférentielle) à la sortie u_2.

$$u_2 = \omega . r_2 = \frac{2\pi n}{60} . r_2 = \frac{2.\pi.1200}{60} . 0{,}15 = 18{,}850 \text{ m/s}$$
$$\theta_2 = \pi - \beta_2 = 180 - 160 = 20°$$
$$\cos(\theta_2) = \frac{x}{\|v_2\|} \Rightarrow x = \|v_2\|\cos(\theta_2) = 6{,}174.\cos(20°) = 5{,}802 \text{ m/s}$$
$$\sin(\theta_2) = \frac{y}{\|v_2\|} \Rightarrow y = \|v_2\|.\sin(\theta_2) = 6{,}174.\sin(20°) = 2{,}112\text{m/s}$$
$$V_{2u} = u_2 - x = 18{,}850 - 5{,}802 = 13{,}048 \text{ m/s}$$
$$tg(\alpha_2) = \frac{y}{V_{2u}} = \frac{2{,}112}{13{,}048} = 0{,}1618639 \Rightarrow \alpha_2 = 9{,}1943°$$
$$\sin(\alpha_2) = \frac{y}{\|V_2\|} \Rightarrow \|V_2\| = \frac{y}{\sin(\alpha_2)} = \frac{2{,}112}{\sin(9.1943°)} = 13{,}218 \text{ m/s}$$
$$H_{théorique} = \frac{1}{9{,}81}(18.850.13{,}218.\cos(9{,}1943°)) = 25{,}072 \text{ m}$$
$$H_{réelle} = H_{théorique} - k_i\frac{v_2^2}{2g} - k_e\frac{V_2^2}{2g} = 25{,}072 - 2{,}8\frac{(6{,}174)^2}{19{,}62} - 0{,}38\frac{(13{,}218)^2}{19{,}62}$$
$$= 16{,}248 \text{ m}$$
$$\eta = \frac{H_{réelle}}{H_{théorique}} = \frac{16{,}248}{25{,}072} = 64{,}806\%$$

Exercice n°7

Une pompe à eau centrifuge a une roue avec les dimensions suivantes : D_2=70mm, D_1= 35 mm, β_1=β_2=160°, l'aube à 5 mm de largeur à D=D_1 et 4mm de largeur à D=D_2.

Pour une vitesse de rotation de 2900 tr/ min, en négligeant les pertes et les épaisseurs des aubes, déterminer :

a) Le débit pour une entrée sans prérotation ?
b) L'angle α_2 et la charge théorique Hth ?
c) La puissance requise si la machine est parfaite ?

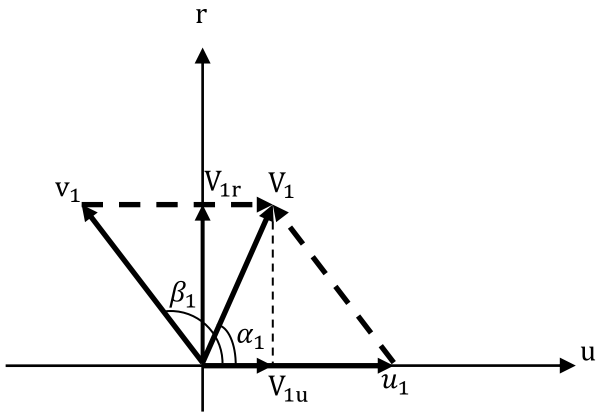
Solution

a) Calcul du débit :

La vitesse angulaire s'écrit par :

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi.2900}{60} = 96{,}67\pi \text{ rad/s}$$

À l'entrée de la roue (rotor) l'épure de vitesses peut représenter par le schéma suivant :



La vitesse circonférentielle u_1 est donnée en fonction de la vitesse angulaire par l'expression suivante :

$$u_1 = \omega . r_1 = \omega . \frac{D_1}{2} = 96{,}67\pi . \frac{0{,}035}{2} = 1{,}6917\pi = 5{,}3146 \text{ m/s}$$

La vitesse circonférentielle u_2 est donnée en fonction de la vitesse angulaire par l'expression suivante :

$$u_2 = \omega . r_2 = 96{,}67\pi . \frac{0{,}07}{2} = 3{,}383\pi = 10{,}628 \text{ m/s}$$

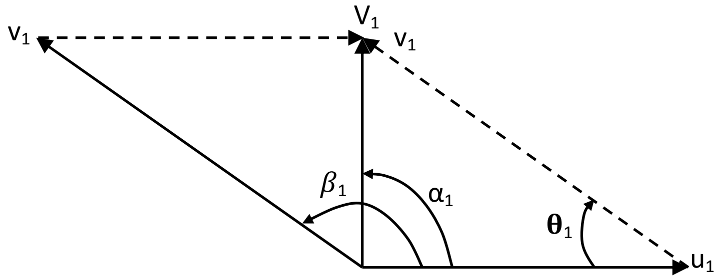
$$Q = -\pi D_2 b_2 tg(\beta_2) u_2 \left(1 - \frac{g . H_{théorique}}{u_2^2}\right)$$

$$H_{théorique} = \frac{1}{g}(u_2 . V_2 . \cos\alpha_2 - u_1 . V_1 . \cos\alpha_1)$$

Pour une entrée sans prérotation :

$$u_1 . V_1 . \cos\alpha_1 = 0$$

$$H_{théorique} = \frac{1}{g} u_2 . V_2 . \cos\alpha_2$$



Calcul de la vitesse relative à l'entrée de la roue v_1

$$\theta_1 = \pi - \beta_1 = 180 - 160 = 20°$$

$$\cos(\theta_1) = \frac{\|u_1\|}{\|v_1\|} \Rightarrow \|v_1\| = \frac{\|u_1\|}{\cos(\theta_1)} = \frac{5{,}3146}{\cos(20°)} = \frac{5{,}3146}{0{,}9396} = 5{,}6557 \text{ m/s}$$

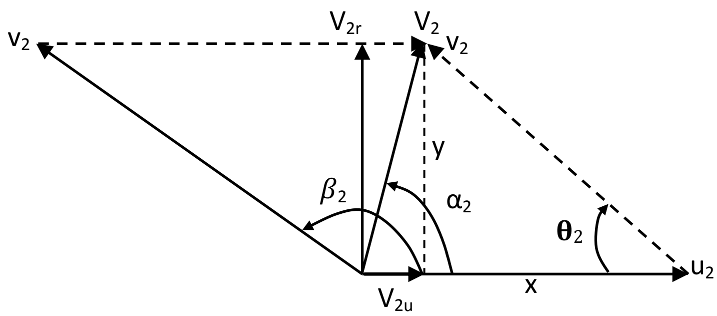
Calcul du débit entrant dans la roue.

L'écoulement est permanent donc on peut appliquer l'équation de continuité.

$$Q = V_{1r} . S_1 = V_1 . S_1 = V_1 . \pi D_1 b_1 = 5{,}6557 . \pi . 0{,}035.0.005 = 3{,}11 \text{ l/s}$$

$$Q = V_{1r} . S_1 = V_1 . S_1 = V_{2r} . S_2 \Rightarrow V_{2r} = \frac{V_1 . S_1}{S_2} = \frac{V_1 . \pi D_1 b_1}{\pi D_2 b_2} = \frac{V_1 . D_1 b_1}{D_2 b_2}$$

$$V_{2r} = \frac{5,6557\,.0,035.0,005}{0,07.0,004} = 3,53\ m/s$$



$$\theta_2 = \pi - \beta_2 = 180 - 160 = 20°$$

$$\sin(\theta_2) = \frac{y}{\|v_2\|} = \frac{\|V_{2r}\|}{\|v_2\|} \Rightarrow \|v_2\| = \frac{\|V_{2r}\|}{\sin(\theta_2)} = \frac{3,53}{\sin(20°)} = 10,321 m/s$$

$$\cos(\theta_2) = \frac{x}{\|v_2\|} \Rightarrow x = \|v_2\|\cos(\theta_2) = 10,321.\cos(20°) = 9,70\ m/s$$

$$V_{2u} = u_2 - x = 10,628 - 9,70 = 0,929\ m/s$$

$$V_2^2 = V_{2r}^2 + V_{2u}^2 \Rightarrow V_2 = \sqrt{V_{2r}^2 + V_{2u}^2} = \sqrt{(3,53)^2 + (0,929)^2} = 3,65\ m/s$$

$$\sin(\alpha_2) = \frac{y}{\|V_2\|} = \frac{\|V_{2r}\|}{\|V_2\|} = \frac{3,53}{3,65} = 0,967 \Rightarrow \alpha_2 = 75,267°$$

$$H_{théorique} = \frac{1}{g} u_2.V_2.\cos\alpha_2 = \frac{1}{9,81}.(10,628).(3,65).\cos(75,267°) = 1,0056\ m$$

$$P = \frac{\rho.g.H.Q}{736} = \frac{1000.9,81.1,0056.3,11.10^{-3}}{736} = 0,0416847\ C.V$$

Exercice n°8

Une pompe centrifuge est déstinée à élever un débit d'eau Q =145 l/s à une hauteur de H=16 m. La vitesse de rotation de sa roue est égale à 1000 tours/minute. Si les caractéristiques géométriques de la roue sont D_2=380 mm et b_2=60 mm.
Détreminer le rendement manométrique de cette pompe, sachant que l'écoulement se fait sans prérotation α_1=90°?

Solution

Le rendement manométrique de cette pompe s'écrit :

$$\eta_{manométrique} = \frac{g.H}{u_2 V_{2u}}$$

Le rendement hydraulique

$$\eta_{hydraulique} = \frac{H}{H_{théorique}}$$

Le rendement volumétrique

$$\eta_{volumétrique} = \frac{Q_{réel}}{Q_{interne}}$$

Le rendement interne

$$\eta_{interne} = \eta_{volumétrique}.\eta_{hydraulique}$$

Q=145 l/s à H=16 m à n=1000 tours/ minutes pour D2=300 mm et b2=60 mm.

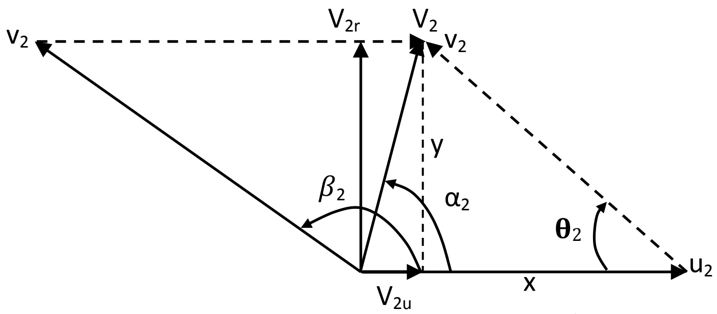
Calcul du rendement manométrique de la pompe

$$\eta_{manométrique} = \frac{g.H}{u_2 V_{2u}}$$

$$H = \frac{1}{g} u_2.V_2.\cos\alpha_2$$

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi.1000}{60} = 33{,}33\pi \text{ rad/s}$$

$$u_2 = \omega.r_2 = 33{,}33\pi.\frac{0{,}30}{2} = 15{,}706 \text{ m/s}$$



$$Q = V_{2r}.S = V_{2r}.\pi D_2 b_2 \Rightarrow V_{2r} = \frac{Q}{\pi D_2 b_2} = \frac{0{,}145}{3{,}14159265.0{,}30.0.06} = 2{,}564 \text{ m/s}$$

Exercice n°9

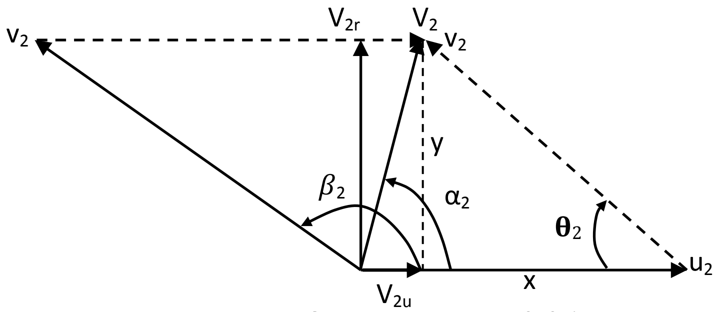
Les caractéristiques de la roue à 3 étages d'une pompe centrifuge D_2=380 mm et la larguer à la sortie b_2=20 mm. Cette pompe assure un débit de 0,06 m^3/s à une vitesse de rotation n=900 tours/ minute. Si l'angle de sortie β_2=135° , Déterminer la valeur de la hauteur manométrique developpée par la pompe pour un rendement η=84% sachnat que α_1=90°?

Solution

La vitesse angulaire s'écrit par :

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi.900}{60} = 30\pi \text{ rad/s}$$

$$u_2 = \omega.r_2 = 30\pi.\frac{0{,}38}{2} = 17{,}907 \text{ m/s}$$



$$Q = V_{2r}.S = V_{2r}.\pi D_2 b_2 \Rightarrow V_{2r} = \frac{Q}{\pi D_2 b_2} = \frac{0{,}06}{3{,}14159265.0{,}38.0.02} = 2{,}51 \text{ m/s}$$

$$\theta_2 = \pi - \beta_2 = 180 - 135 = 45°$$

$$\sin(\theta_2) = \frac{y}{\|v_2\|} = \frac{\|V_{2r}\|}{\|v_2\|} \Rightarrow \|v_2\| = \frac{\|V_{2r}\|}{\sin(\theta_2)} = \frac{2{,}51}{\sin(45°)} = 3{,}55 \text{m/s}$$

$$\cos(\theta_2) = \frac{x}{\|v_2\|} \Rightarrow x = \|v_2\|\cos(\theta_2) = 3{,}55.\cos(45°) = 2{,}51 \text{ m/s}$$

$$V_{2u} = u_2 - x = 17{,}907 - 2{,}51 = 15{,}397 \text{ m/s}$$

$$V_2^2 = V_{2r}^2 + V_{2u}^2 \Rightarrow V_2 = \sqrt{V_{2r}^2 + V_{2u}^2} = \sqrt{(2{,}51)^2 + (15{,}397)^2} = 15{,}600 \text{ m/s}$$

$$\sin(\alpha_2) = \frac{y}{\|V_2\|} = \frac{\|V_{2r}\|}{\|V_2\|} = \frac{2{,}51}{15{,}60} = 0{,}1608974 \Rightarrow \alpha_2 = 9{,}2590°$$

$$H_{developpée} = \eta.\frac{1}{g}u_2.V_2.\cos\alpha_2 = 0{,}84.\frac{1}{9{,}81}.(17{,}907).(15{,}60).\cos(9{,}2590°) = 26{,}24 \text{ m}$$

Pour 3 étages H1=3*H=3.26,24=78,72 m

Chapitre III : Construction des courbes caractéristiques d'une pompe

3.1. La hauteur d'élévation théorique en fonction de débit

La courbe caractéristique théorique donnant H en fonction de Q d'une pompe à aubes est donnée par l'expression suivante :

$$H_{\text{théorique}} = \frac{u_2^2}{g} + \frac{u_2}{\pi D_2 b_2 tg(\beta_2) g} Q \qquad (3.1)$$

Cette dernière équation est de la forme H=AQ+B qui est linéaire.

$$\text{Pour } Q = 0 \ \Rightarrow H_{\text{théorique}} = \frac{u_2^2}{g} \ \text{ ce qu'on appelle le point de barbotage}$$

$$\text{pour } \ H_{\text{théorique}} = 0 \ \Rightarrow \ Q = -\pi D_2 b_2 u_2 tg(\beta_2)$$

Lorsque on parle ici de $H_{\text{réelle}}$ c'est le la hauteur d'élévation obtenue après soustraction des pertes charge théoriques, c'est une hauteur réelle analytique et ce n'est pas celui obtenue expérimentalement.

$$H_{\text{réelle}} = H_{\text{théorique}} - \text{pertes dues à la roue} - \text{pertes dues à la sortie} \qquad (3.2)$$

$$H_{\text{réelle}} = \frac{1}{g}(u_2.V_2.\cos\alpha_2 - u_1.V_1.\cos\alpha_1) - k_i \frac{v_2^2}{2g} - k_e \frac{V_2^2}{2g} \qquad (3.3)$$

Il existe des pertes par choc et des pertes par frottement.

$$H_{\text{réelle}} = \frac{u_2^2}{g} + \frac{u_2}{\pi D_2 b_2 tg(\beta_2) g} Q - R_i Q^2 - R_e Q^2 \qquad (3.4)$$

Ce qui donne une forme parabolique à la hauteur réelle d'élévation.

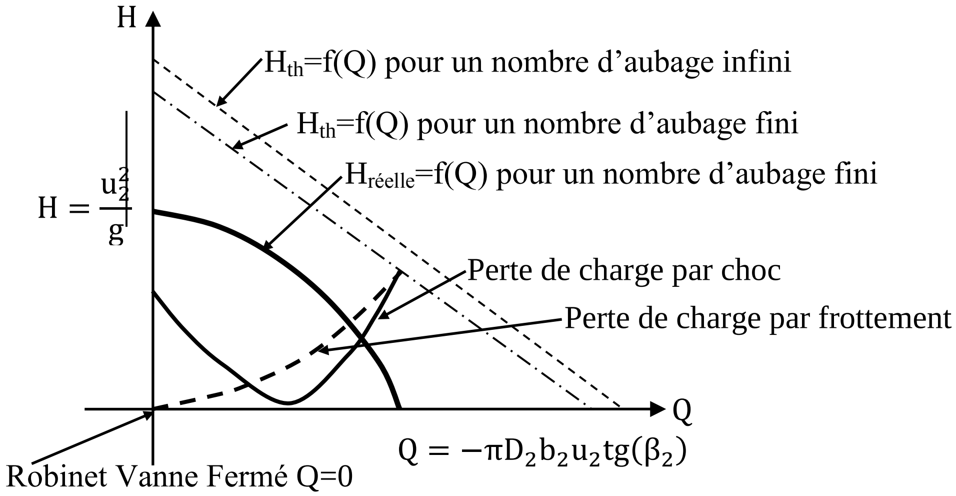


Fig. 3.1 : Représentation des hauteurs d'élévation théoriques et analytique

3.2. La puissance théorique en fonction de Q

a) La puissance utile théorique est donnée par l'expression :

$$\mathbf{P_{ut.thérique}} = A_1 \mathbf{Q^2} + B_1 \mathbf{Q} \qquad (\mathbf{3.5})$$

b) La puissance utile réelle (analytique) est donnée par l'expression

$$\mathbf{P_{ut.réelle} = A_2Q^3 + B_2Q^2 + C_2Q} \qquad (\mathbf{3.6})$$

3.2.1. Le rendement analytique en fonction de débit

Le rendement analytique d'une pompe est le rapport entre la puissance utile réelle est la puissance utile théorique.

$$\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{analytique}} = \frac{\mathbf{P_{ut.réelle}}}{\mathbf{P_{ut.théorique}}} = \frac{\mathbf{A_2Q^3 + B_2Q^2 + C_2Q}}{\mathrm{A_1}\mathbf{Q^2} + \mathrm{B_1}\mathbf{Q}} = \mathrm{A_3}\mathbf{Q} + \mathrm{B_3} \qquad (3.7)$$

3.2.2. La puissance absorbée en fonction de débit (Q)

La puissance absorbée réelle d'une pompe à aubes est étroitement liée au couple fourni par le moteur électrique qui l'accouple. En effet, cette puissance (fournie à la pompe) peut être écrite par la relation suivante :

$$\mathrm{P_{absorbée}} = \mathrm{C}.\,\omega \qquad (3.8)$$

Où ω est la vitesse angulaire du moteur électrique (rad/s).

C : le couple réelle fourni par le moteur électrique (C=F.l) avec l le bras de levier.

Fig. (3.2) : Puissance absorbée en fonction du débit

3.2.3. La puissance utile en fonction du débit (Q)

La puissance utile réelle d'une pompe à aubes est étroitement liée au couple (le débit et la charge) délivrés par la pompe. En effet, cette puissance (fournie par la pompe) en watts peut être exprimée par la relation suivante :

$$\mathrm{P_{utile}} = \rho.\,\mathrm{g}.\,\mathrm{Q}.\,\mathrm{H} \qquad (3.9)$$

Où ρ est la masse volumique su liquide (kg/m^3) et g l'accélération de la pesanteur (m/s^2).

3.3. Les courbes caractéristiques et la plage de bon fonctionnement

Traçons l'ensemble des courbes précédentes dans la même figure, seulement il faut prendre les échelles des ordonnées différentes, nous aurons la figure (3.3).

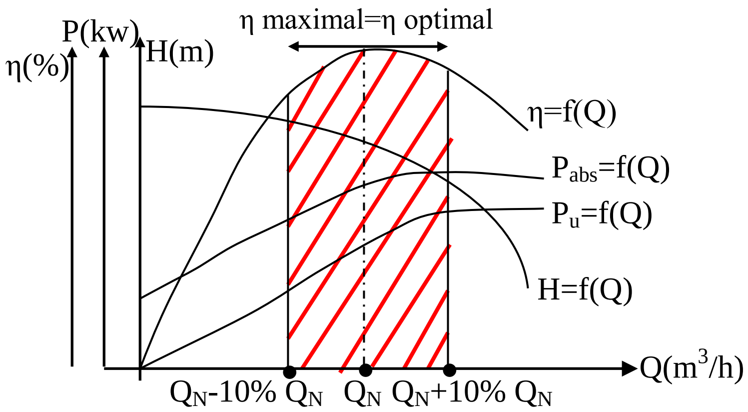


Fig.3.3 : Courbes caractéristiques pratiques d'une pompe à aubes

Le rendement optimal de la pompe est égal au rendement maximum. La projection du rendement maximal sur l'axe du débit donne le débit Q_N qui correspond au rendement maximum. En retranchant et en rajoutant à ce débit 10% de sa valeur nous obtenions $Q_1=Q_N-10\%Q_N$ et $Q_2=Q_N+10\%Q_N$, puis nous traçons deux lignes parallèles à l'axe des ordonnées et passant par ces deux points, nous aurons l'aire hachuré en rouge. Cette aire s'appelle la zone de bon fonctionnement de la pompe. On dit que la pompe fonctionne dans des meilleures conditions lorsque $Q_p€[Q_1,Q_2]$.

Exercice n° :1

Une pompe centrifuge radiale, accouplée directement à un moteur électrique et tournant à une vitesse de rotation de 1460 tr/min, est destinée à relever un débit de 50 l/s à une hauteur de 30 m. Sachant que les caractéristiques de la roue sont :

D_2=0,315 m, b_2=0,020 m, β_2=160°

On demande de :

1/ Tracer la courbe de caractéristique théorique de la pompe : H_{th}=f(Q) théoriques dans ces cas ?

2/Déterminer : V_{2r}, V_{2u}, v_2, α_2 ?

3/Tracer le diagramme des vitesses à la sortie de la roue (avec précision) ?

4 /Donner l'allure des courbes caractéristiques théoriques dans les cas où : β_2=90° et β_2>90° ?

5/Tracer la courbe caractéristique réelle : $H_{réel}$=f(Q) ?

Solution

1/ Traçage de la courbe caractéristique théorique de la pompe.

La hauteur d'élévation théorique de la pompe est donnée par :

$$H_{théorique} = \frac{u_2^2}{g} + \frac{u_2}{\pi D_2 b_2 tg(\beta_2) g} Q$$

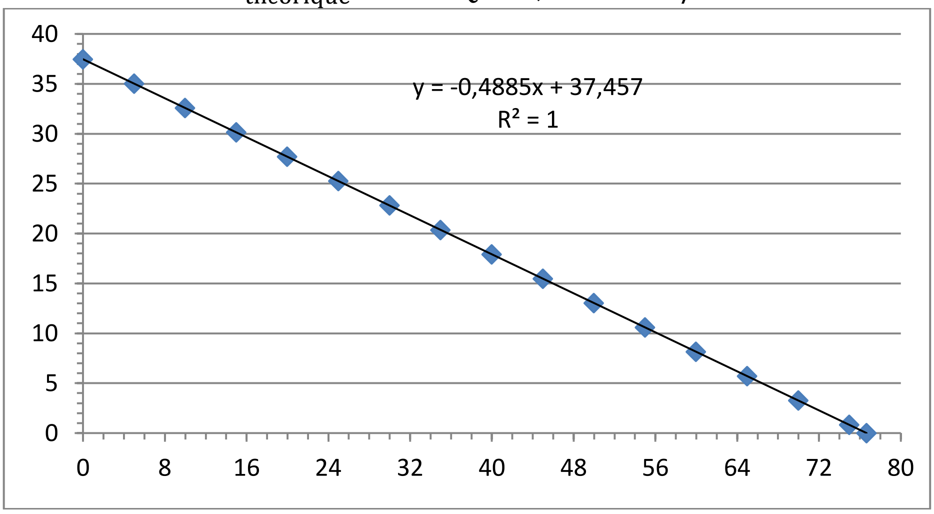
La vitesse de rotation $\omega = \frac{2\pi n}{60}$ en radians/seconde

Où n est le nombre de tours du moteur d'entrainement à la minute (tours/minute).

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi 1460}{60} = 68{,}667\pi \text{ rad/s}$$

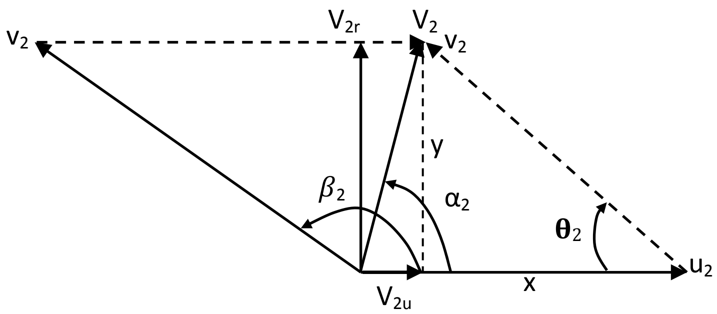
La vitesse circonférentielle u_2 est donnée en fonction de la vitesse angulaire par l'expression suivante :

$$u_2 = \omega . r_2 = 68{,}667\pi . 0{,}1575 = 10{,}815\pi \text{ m/s}$$
$$H_{théorique} = 37{,}4574 - 488{,}5398Q$$
$$Q = 0 \Rightarrow H = 37{,}4574 \text{ m}$$
$$H_{théorique} = 0 \Rightarrow Q = 0{,}07667 \text{ m}^3/\text{s}$$



$H_{\text{théorique}}$ en f(Q)

2/Détermination de : V_{2r}, V_{2u}, v_2 et α_2



$$Q = V_{2r}.S = V_{2r}.\pi D_2 b_2 \Rightarrow V_{2r} = \frac{Q}{\pi D_2 b_2} = \frac{0,05}{3,14159265.0,31.0,02} = 2,567\ m/s$$

$$\theta_2 = \pi - \beta_2 = 180 - 160 = 20°$$

$$\cos(\theta_2) = \frac{x}{\|v_2\|} \Rightarrow x = \|v_2\|\cos(\theta_2) = 7,505.\cos(20°) = 7,052\ m/s$$

$$V_{2u} = u_2 - x = 33,976 - 7,052 = 26,924\ m/s$$

$$\sin(\theta_2) = \frac{y}{\|v_2\|} = \frac{\|V_{2r}\|}{\|v_2\|} \Rightarrow \|v_2\| = \frac{\|V_{2r}\|}{\sin(\theta_2)} = \frac{2,567}{\sin(20°)} = 7,505\ m/s$$

$$V_2^2 = V_{2r}^2 + V_{2u}^2 \Rightarrow V_2 = \sqrt{V_{2r}^2 + V_{2u}^2} = \sqrt{(2,567)^2 + (26,924)^2} = 27,064\ m/s$$

$$\sin(\alpha_2) = \frac{y}{\|V_2\|} = \frac{\|V_{2r}\|}{\|V_2\|} = \frac{2,567}{27,064} = 0,09485 \Rightarrow \alpha_2 = 0,09499°$$

4/ Traçage de l'allure de la courbe théorique

Pour β_2=90°

$$H_{\text{théorique}} = \frac{u_2^2}{g} + \frac{u_2}{\pi D_2 b_2 tg(90°) g} Q = \frac{u_2^2}{g}$$

Pour β_2>90°

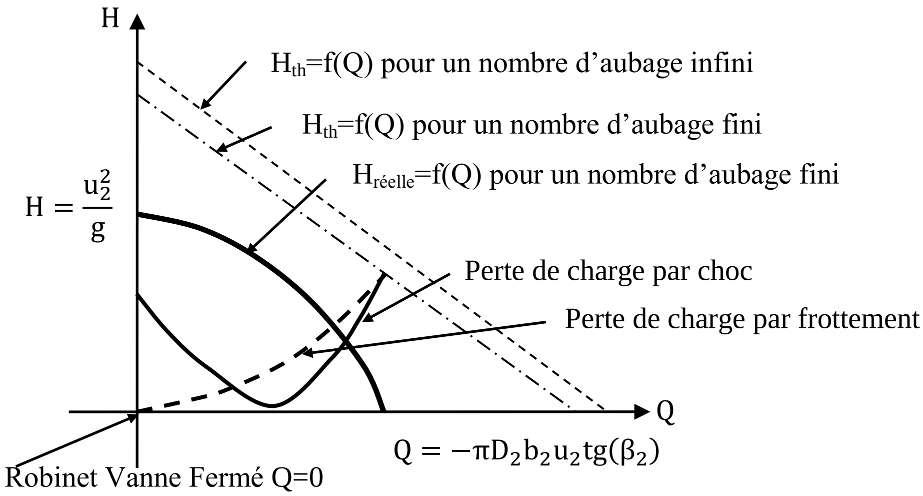
$$H_{\text{théorique}} = \frac{u_2^2}{g} + \frac{u_2}{\pi D_2 b_2 tg(90°) g} Q = \frac{u_2^2}{g} - AQ$$

Avec A une valeur réelle positive.

5/ Traçage de la courbe caractéristique réelle.

$$H_{\text{réelle}} = \frac{u_2^2}{g} + \frac{u_2}{\pi D_2 b_2 tg(\beta_2) g} Q - k_i \frac{v_2^2}{2g} - k_e \frac{V_2^2}{2g}$$

$$H_{\text{réelle}} = \frac{u_2^2}{g} + \frac{u_2}{\pi D_2 b_2 tg(\beta_2) g} Q - R_i Q^2 - R_e Q^2$$


H
H_{th}=f(Q) pour un nombre d'aubage infini
H_{th}=f(Q) pour un nombre d'aubage fini
$H_{réelle}$=f(Q) pour un nombre d'aubage fini
$H = \frac{u_2^2}{g}$
Perte de charge par choc
Perte de charge par frottement
Q
$Q = -\pi D_2 b_2 u_2 tg(\beta_2)$
Robinet Vanne Fermé Q=0

Chapitre IV : Les différents types d'installations & hauteur manométrique totale

4.1. Les différents types d'installations

En pratique hydrotechnique, il existe trois types d'installation à savoir : installation en aspiration site aussi en dépression, l'installation en charge ou forcée et l'installation en siphon. La détermination de la hauteur d'élévation et la hauteur manométrique totale (H.M.T), de chaque type, dépend des appareils de mesure placés en amont (en avant) et en aval (après) de la pompe et des pertes de charge linéaires et singulières à l'aspiration et au refoulement.

4.2. Détermination de la hauteur manométrique totale

4.2.1. Installation en aspiration

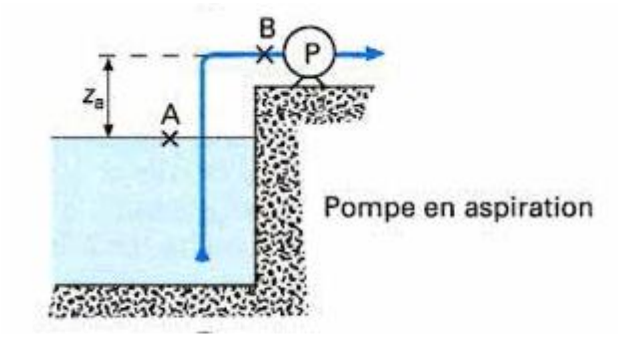


Fig. 4.1 : Installation en aspiration

a) Détermination de la hauteur manométrique totale à partir des appareils de mesure

$$\mathbf{HMT} = (\mathbf{Z_s} - \mathbf{Z_e}) + \left(\frac{\mathbf{p_{man.r}}}{\rho\mathbf{g}} + \frac{\mathbf{p_{vac.a}}}{\rho\mathbf{g}}\right) + \left(\frac{\mathbf{V_r^2}}{2\mathbf{g}} - \frac{\mathbf{V_a^2}}{2\mathbf{g}}\right) \qquad (4.1)$$

b) Détermination de la hauteur manométrique totale pendant l'étude

$$\mathbf{HMT} = (\mathbf{Z_2} - \mathbf{Z_1}) + \left(\frac{\mathbf{p_2}}{\rho\mathbf{g}} - \frac{\mathbf{p_1}}{\rho\mathbf{g}}\right) + \left(\frac{\mathbf{V_2^2}}{2\mathbf{g}} - \frac{\mathbf{V_1^2}}{2\mathbf{g}}\right) + \sum \Delta\mathbf{H_{asp}} + \sum \Delta\mathbf{H_{ref}} \qquad (4.2)$$

$$\mathbf{HMT} = \mathrm{H} + \mathbf{RQ^2} \qquad (4.2')$$

4.2.2. Installation en charge

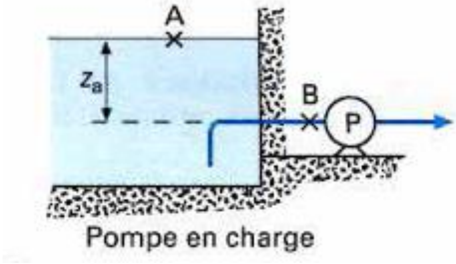


Fig. 4.2 : Installation en charge

a) Détermination de la hauteur manométrique totale à partir des appareils de mesure

La hauteur manométrique totale est définie comme étant la différence de charge totale entre la sortie H_s, et l'entrée, H_e, de la pompe.

$$\mathrm{HMT} = \mathrm{H_s} - \mathrm{H_e}$$

$$\mathrm{HMT} = (\mathrm{Z_s} - \mathrm{Z_e}) + \left(\frac{p_{man.r}}{\rho g} - \frac{p_{man.a}}{\rho g}\right) + \left(\frac{V_r^2}{2g} - \frac{V_a^2}{2g}\right) \qquad (4.3)$$

b) Détermination de la hauteur manométrique totale pendant l'étude

$$\mathrm{HMT} = (\mathrm{Z_2} - \mathrm{Z_1}) + \left(\frac{p_2}{\rho g} - \frac{p_1}{\rho g}\right) + \left(\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}\right) + \sum \Delta H_{asp} + \sum \Delta H_{ref} \qquad (4.4)$$

$$\mathrm{HMT} = \mathrm{H} + \mathrm{RQ^2} \qquad (4.4')$$

Avec :

$$\mathrm{H} = (\mathrm{Z_2} - \mathrm{Z_1}) + \left(\frac{p_2}{\rho g} - \frac{p_1}{\rho g}\right) + \left(\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}\right)$$

4.2.3. Installation en siphon

La représentation de l'installation en siphon est également nécessaire pour comprendre aisément les cas suivants.

a) Détermination de la hauteur manométrique totale à partir des appareils de mesure

La hauteur manométrique totale est définie comme étant la différence de charge totale entre la sortie H_s, et l'entrée, H_e, de la pompe.

$$\mathrm{HMT} = \mathrm{H_s} - \mathrm{H_e}$$

$$\mathbf{HMT} = (\mathbf{Z_s} - \mathbf{Z_e}) + \left(\frac{\mathbf{p_{vac.a}}}{\boldsymbol{\rho}\mathbf{g}} - \frac{\mathbf{p_{vac.r}}}{\boldsymbol{\rho}\mathbf{g}}\right) + \left(\frac{\mathbf{V_r^2}}{\mathbf{2g}} - \frac{\mathbf{V_a^2}}{\mathbf{2g}}\right) \qquad (\mathbf{4.5})$$

b) Détermination de la hauteur manométrique totale pendant l'étude

$$\mathbf{HMT} = \mathrm{H_g} + \sum \boldsymbol{\Delta}\mathbf{H_{asp}} + \sum \boldsymbol{\Delta}\mathbf{H_{ref}} \qquad (\mathbf{4.6})$$

$$\mathbf{HMT} = \mathrm{H_g} + \mathbf{RQ^2} \qquad (\mathbf{4.6'})$$

4.2.4 Courbe caractéristique de la conduite

La courbe caractéristique de la conduite (CCC), quel que soit le type d'installation, est donnée par l'expression suivante :

$$\mathrm{HMT} = \mathrm{H_g} + \mathrm{RQ^2} \qquad (4.7)$$

Cette expression donne l'allure d'une demi-parabole qui se commence de la valeur Hg.

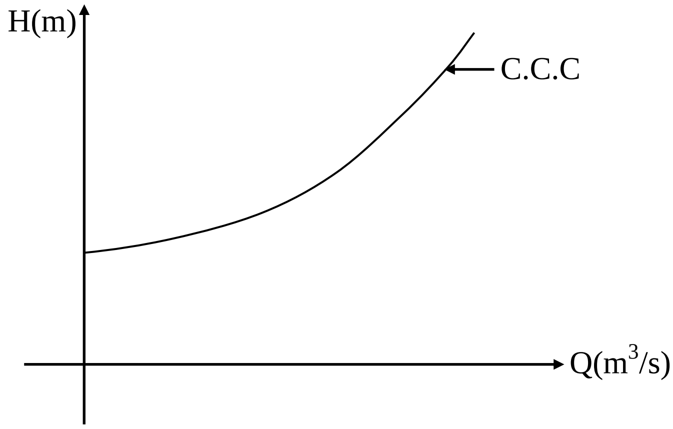


Fig. 3.4 : Courbe caractéristique de la conduite ou du réseau

4.3 Puissances

4.3.1 Puissance utile

La puissance fournie par la pompe appelée aussi la puissance utile est donnée par l'expression suivante :

$$\mathbf{P_u = \rho . g . H . Q} \qquad (\mathbf{4.8})$$

4.3.2 Puissance absorbée

C'est la puissance fournie par le moteur électrique à la pompe est égale.

$$\mathbf{P_{absorbée} = C . \omega} \qquad (\mathbf{4.9})$$

Où C : est le couple du moteur électrique (N.m) et ω la vitesse angulaire du moteur électrique (radian/seconde).

4.4. Rendement de la pompe

Le rendement de la pompe est défini comme étant le rapport de la puissance utile à puissance absorbée.

$$\boldsymbol{\eta_P = \frac{P_u}{P_{absorbée}} . 100} \qquad (\mathbf{4.10})$$

La pompe fonctionne dans des bonnes conditions pour un rendement maximum (η_{max}), alors que la pompe fonctionne normale pour un débit bien déterminé.

4.5 Point de fonctionnement

Le point de fonctionnement est le point d'intersection entre la courbe caractéristique de la conduite et la courbe caractéristique de la pompe. Le point de fonctionnement doit tomber dans la plage de bon fonctionnement de la pompe pour avoir un bon rendement.

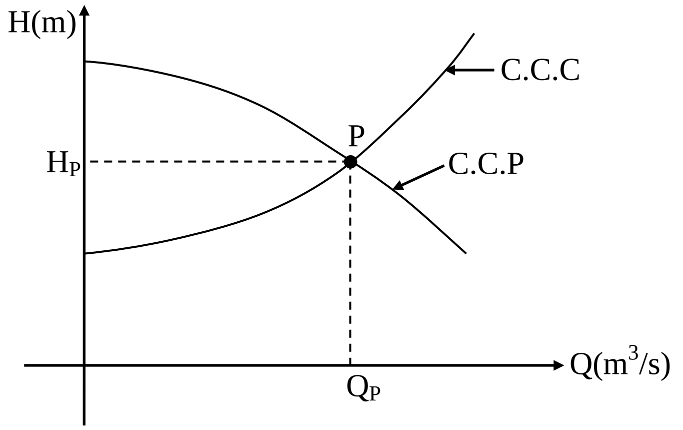


Fig. 3.4 : Point de fonctionnement.

Exercice n°1

Les instruments de mesure d'un banc d'essai d'une pompe centrifuge nous donnent les valeurs suivantes :

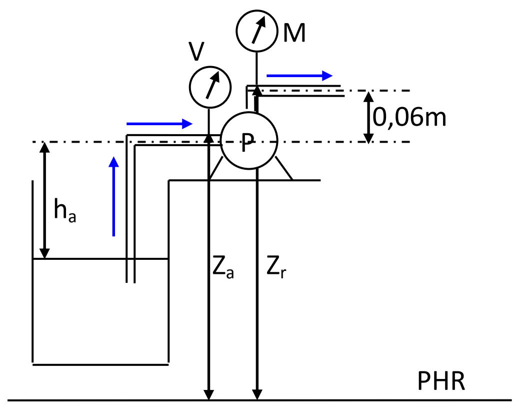
- Vitesse de rotation : n=1500 tours/minute
- Manomètre à l'aspiration :-1,5 m.c.e (c'est à dire 1,5 m sous la pression atmosphérique)
- Débit : Q=10 l/s
- Manomètre au refoulement : 8 m de Colonne d'eau
- Couple fourni à la pompe : C=9,60 N.m

Grandeurs géométriques :

- Diamètre de la conduite d'aspiration : 12 cm
- Diamètre de la conduite de refoulement : 10 cm
- Dénivellation entre les deux prises des manomètres : 6 cm

a) Calculer la hauteur manométrique fournie par la pompe ?
b) Calculer la puissance fournie à la pompe ?
c) Calculer le rendement de la pompe ?

Solution



a) Calcul de la hauteur manométrique fournie par la pompe

Pour une installation en aspiration la hauteur manométrique totale est donnée par l'expression suivante :

$$\mathrm{HMT} = (Z_r - Z_a) + \left(\frac{p_r}{\rho g} + \frac{p_a}{\rho g}\right) + \left(\frac{V_r^2}{2g} - \frac{V_a^2}{2g}\right)$$

$$(Z_r - Z_a) = 6\ \mathrm{cm} = 0{,}06\ \mathrm{m}$$

$$\frac{p_r}{\rho g} = \frac{p_{atm}}{\rho g} + \frac{p_{man.r}}{\rho g} = \frac{101325}{10^3.9{,}81} + 8 = 18{,}3287\ \mathrm{m.c.e}$$

$$\frac{p_a}{\rho g} = \frac{p_{atm}}{\rho g} - \frac{p_{vac.a}}{\rho g} = \frac{101325}{10^3.9{,}81} - 1{,}5 = 8{,}8287\ \mathrm{m.c.e}$$

$$\left(\frac{p_r}{\rho g} + \frac{p_a}{\rho g}\right) = \left(\frac{p_{atm}}{\rho g} + \frac{p_{man.r}}{\rho g}\right) - \left(\frac{p_{atm}}{\rho g} - \frac{p_{vac.a}}{\rho g}\right) = \frac{p_{man.r}}{\rho g} + \frac{p_{vac.a}}{\rho g}$$

D'où la hauteur manométrique totale prend l'expression suivante :

$$\mathrm{HMT} = (Z_r - Z_a) + \left(\frac{p_{man.r}}{\rho g} + \frac{p_{vac.a}}{\rho g}\right) + \left(\frac{V_r^2}{2g} - \frac{V_a^2}{2g}\right)$$

$$V_a = \frac{Q}{S_a} = \frac{4.Q}{\pi d_a^2} = \frac{4.0{,}01}{3.14159.(0{,}12)^2} = 0{,}88\ \mathrm{m/s}$$

$$V_r = \frac{Q}{S_r} = \frac{4.Q}{\pi d_r^2} = \frac{4.0{,}10}{3.14159.(0{,}1)^2} = 1{,}27\ \mathrm{m/s}$$

$$\left(\alpha_r \frac{V_r^2}{2.g} - \alpha_a \frac{V_a^2}{2.g}\right) = \left(1.\frac{(1{,}27)^2}{2.9{,}81} - 1.\frac{(0{,}88)^2}{2.9{,}81}\right) = 0{,}043\ \mathrm{m.c.e}$$

$$\mathrm{HMT} = (0{,}06) + (8 + 1{,}5) + (0{,}043) = 9{,}603\ \mathrm{m.c.e}$$

b) Calcul de la puissance fournie à la pompe

$$P_{absorbée} = \omega.C = 9{,}6.\frac{2\pi}{60}.1500 = 1507{,}2\ \mathrm{watts}$$

c) Calcul de la puissance fournie par la pompe

$$P_u = \rho.g.H.Q = (10^3.9{,}81.0{,}01.9{,}603) = 942{,}05\ \mathrm{watts}$$

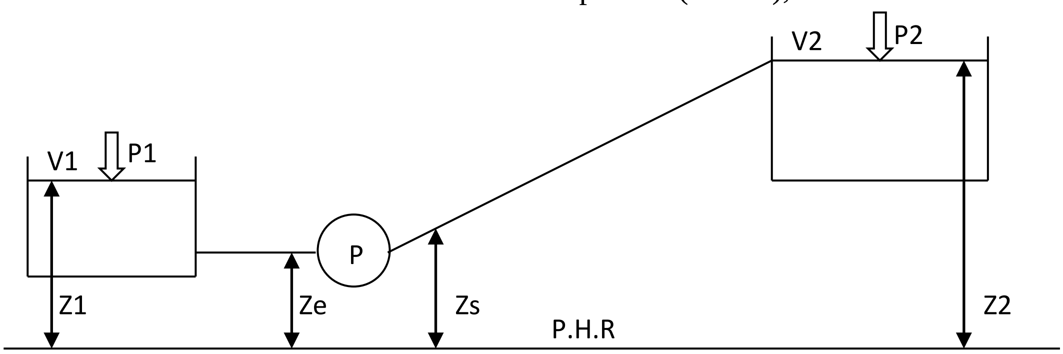
d) Calcul du rendement de la pompe

$$\eta = \frac{P_u}{P_{absorbée}}.100 = \frac{942{,}05}{1507{,}2}.100 = 62{,}50\%$$

Exercice n°2

Soient les deux systèmes de pompage, une installation en charge et une autre en aspiration, représentés sur les figures ci-après.

Pour la première installation, supposons que la pression à la surface libre au réservoir inférieur est différente de celle au Réservoir supérieur (P1#P2), V1#V2 et Ze # Zs



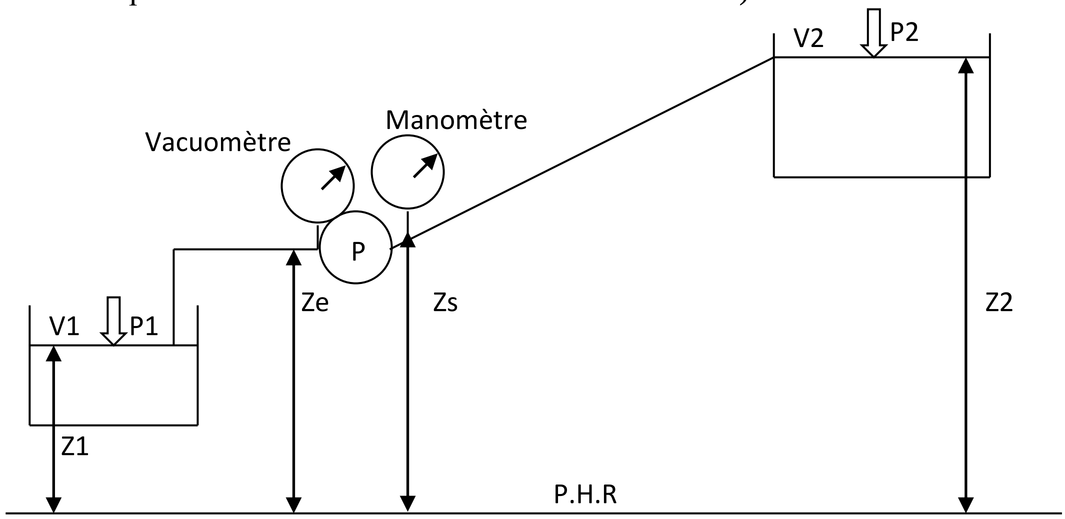
1) Si Z1=15 m, Ze=10 m et P1=Patm ; Calculer les pressions absolue et manométrique à l'entrée de la pompe (Quand la pompe est à l'arrêt) ?

2) Mettre les différents appareils de mesure de pression en amont et en aval de la pompe ?

3) Trouver la relation de la hauteur manométrique totale (HMT) donnée par ce type d'installation (sans utilisation les lectures des appareils de mesure) ?

4) Si la rugosité ε=0,002 m, la longueur de la conduite d'aspiration est de 400 m et celle de refoulement est de 3500 m et également le diamètre de la conduite d'aspiration est identique à celui de la conduite de refoulement et il vaut 600 mm.
Les pertes de charge singulières sont estimées à 10% des pertes de charge linéaires ; le coefficient des pertes de charge λ est donné par la relation : $\lambda = (1{,}14 - 0{,}86\ \ln(\varepsilon/d))^{-2}$
$\Delta H_L=(\lambda l/d)(V^2/2g)$
a) Ecrire la hauteur manométrique en fonction du débit ? Sachant que P2=0,99P1; Z2=55 m et Zs-Ze=0,06 m.
b) Si on dispose d'une pompe ayant la relation suivante : $Hp=-125Q^2+50$; Trouver analytiquement son point de fonctionnement?

Pour la deuxième installation, supposons que les appareils de mesure enregistrent des valeurs de la pression en amont (côté aspiration) et en aval (côté refoulement) de la pompe.
1) En appliquant l'équation de Bernoulli, Trouver la relation de la hauteur manométrique totale en utilisant les lectures des appareils de mesure ?
2) Trouver la valeur de la hauteur manométrique totale (HMT) pour les données suivantes :
P_1=Patm =101325 Pascals; $P_2=0{,}99P_1$;Z_1=5 m; Z_2=55 m; Ze=10 m, Zs=10,06 m ; Pe/ρg=(Patm/ρg)-(Pvac/ρg) ;Ps/ρg=(Patm/ρg)+(Pman/ρg) ; (Pvac=0,8Patm) ; (Pman=5Patm) ; (diamètre d'aspiration =diamètre de refoulement c-à-d Va=Vr).



Solution

a) Première installation

1) La pression absolue est donnée par l'expression suivante :

$$p_{absolue} = \rho.g.h + p_0$$

p_0 est la pression sur la surface libre, dans notre cas $p_0 = p_{atm}$ et h=(Z_1-Z_e)=(15-10)=5 m

$$p_{absolue} = \rho.g.h + p_{atm} = 10^3.9{,}81.5 + 101325 = 150375 \text{ Pascals}$$

La pression manometrique est la différence entre les pressions absolue et atmosphérique.

$$p_m = p_{abs} - p_{atm} = \rho.g.h + p_0 - p_{atm}$$

$$p_m = \rho.g.h + p_{atm} - p_{atm} = \rho.g.h = 10^3.9{,}81.5 = 49050 \text{ Pascals}$$

2) Les appareils de mesure de la pression en amont en aval de la pompe sont deux manomètres parce que la pompe est installée en charge.

3) Recherche de la hauteur manométrique totale

$$\left(Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g}\right) = \left(Z_e + \frac{p_e}{\rho g} + \frac{V_e^2}{2g}\right) + \sum \Delta H_{asp} \Rightarrow \left(Z_e + \frac{p_e}{\rho g} + \frac{V_e^2}{2g}\right)$$
$$= \left(Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g}\right) - \sum \Delta H_{asp}$$

$$\left(Z_s+\frac{p_s}{\rho g}+\frac{V_s^2}{2g}\right)=\left(Z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}\right)+\sum\Delta H_{ref}$$
$$HMT=H_s-H_e$$
$$HMT=(Z_2-Z_1)+\left(\frac{p_2}{\rho g}-\frac{p_1}{\rho g}\right)+\left(\frac{V_2^2}{2g}-\frac{V_1^2}{2g}\right)+\sum\Delta H_{asp}+\sum\Delta H_{ref}$$

4)

a) Recherche de la relation HMT en fonction du débit

$$(Z_2-Z_1)=55-15=40\ \text{m};\left(\frac{p_2}{\rho g}-\frac{p_1}{\rho g}\right)=\left(\frac{0{,}99p_1}{\rho g}-\frac{p_1}{\rho g}\right)=\frac{-0{,}01p_1}{\rho g}=\frac{-0{,}01.101325}{10^3.9{,}81}$$
$$\left(\frac{p_2}{\rho g}-\frac{p_1}{\rho g}\right)=-0{,}103287\ \text{m};\ \left(\frac{V_2^2}{2g}-\frac{V_1^2}{2g}\right)\simeq 0;\ \sum\Delta H_S=10\%\sum\Delta H_L$$
$$HMT=(40)+(-0{,}103287)+(0)+1{,}1\sum\Delta H_{asp}+1{,}1\sum\Delta H_{ref}$$
$$HMT=(39{,}8967)+1{,}1\frac{\lambda_a L_a}{d_a}\frac{V_a^2}{2.g}+1{,}1\frac{\lambda_r L_r}{d_r}\frac{V_r^2}{2.g}$$
$$HMT=(39{,}8967)+\left(1{,}1\frac{8.\lambda_a L_a}{\pi^2.g.d_a^5}+1{,}1\frac{8.\lambda_r L_r}{\pi^2.g.d_r^5}\right)Q^2$$

Dans notre cas $\varepsilon_a=\varepsilon_r=0{,}002$ m et $d_a=d_r=600$ mm $\Rightarrow\lambda_a=\lambda_r=\lambda$ et $L=L_a+L_r$ d'où la relation de la H.M.T s'écrit :

$$HMT=(39{,}8967)+\left(8{,}8\frac{\lambda L}{\pi^2.g.d^5}\right)Q^2$$
$$\lambda=(1{,}14-0{,}86\ln(\varepsilon/d))^{-2}=(1{,}14-0{,}86\ln(0{,}002/0{,}6))^{-2}=0{,}02736$$
$$HMT=(39{,}8967)+\left(8{,}8\frac{0{,}02736.3900}{(3{,}14159265)^2.9{,}81.(0{,}6)^5}\right)Q^2$$
$$HMT=39{,}8967+124{,}7206Q^2$$

b) Détermination du point de fonctionnement

$$HMT=H_p\Rightarrow 39{,}8967+124{,}7206Q^2=-125Q^2+50$$
$$-249{,}7206Q^2=-10{,}1033\Rightarrow Q=\sqrt{\frac{10{,}1033}{249{,}7206}}=0{,}20114\ \text{m}^3/\text{s}=201{,}14\ \text{l/s}$$
$$H_p=-125(0{,}20114)^2+50=44{,}94\ \text{m}$$

Le point de fonctionnement (Q_A, H_A) = (0,20114 m^3/s, 44,94 m).

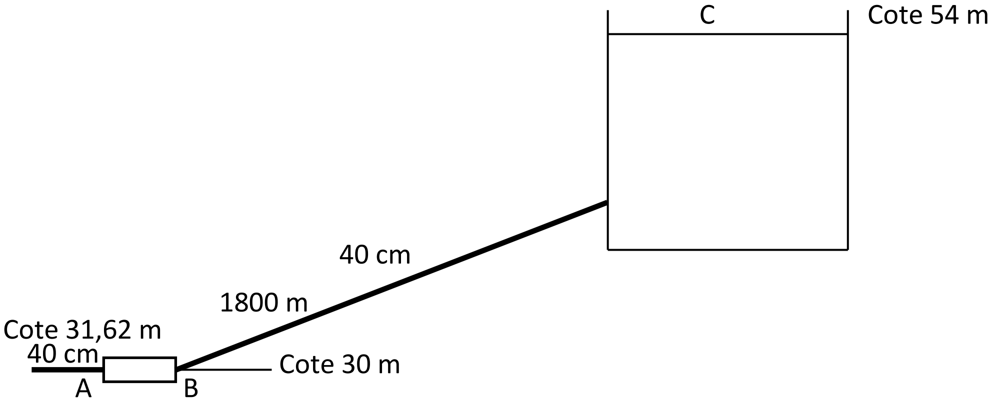
b) Deuxième installation

- Recherche de la hauteur manométrique totale à l'aide des lectures des appareils de mesure

$$HMT=\left(Z_s+\frac{p_s}{\rho g}+\frac{V_s^2}{2g}\right)-\left(Z_e+\frac{p_e}{\rho g}+\frac{V_e^2}{2g}\right)$$
$$\frac{p_s}{\rho g}=\frac{p_{atm}}{\rho g}+\frac{p_{man.r}}{\rho g}\ \text{et}\ \frac{p_e}{\rho g}=\frac{p_{atm}}{\rho g}-\frac{p_{vac.a}}{\rho g};\ \frac{V_s^2}{2g}=\frac{V_r^2}{2g}\ \text{et}\ \frac{V_e^2}{2g}=\frac{V_a^2}{2g}\ \text{d'où}$$
$$HMT=\left(Z_s+\frac{p_{atm}}{\rho g}+\frac{p_{man.r}}{\rho g}+\frac{V_r^2}{2g}\right)-\left(Z_e+\frac{p_{atm}}{\rho g}-\frac{p_{vac.a}}{\rho g}+\frac{V_a^2}{2g}\right)$$
$$HMT=(Z_s-Z_e)+\left(\frac{p_{man.r}}{\rho g}+\frac{p_{vac.a}}{\rho g}\right)+\left(\frac{V_r^2}{2g}-\frac{V_a^2}{2g}\right)$$
$$(Z_s-Z_e)=0{,}06\ \text{m};\left(\frac{p_{man.r}}{\rho g}+\frac{p_{vac.a}}{\rho g}\right)=\left(\frac{5p_{atm}}{\rho g}+\frac{0{,}8p_{atm}}{\rho g}\right)=\frac{5{,}8p_{atm}}{\rho g};\left(\frac{V_r^2}{2g}-\frac{V_a^2}{2g}\right)=0$$
$$HMT=0{,}06+\frac{5{,}8.101325}{10^3.9{,}81}+0=59{,}9667\ \text{m.c.e}$$

Exercice n° :3

On pompe du fuel-oil moyen à 10°C jusqu'au réservoir C par 1800 m de tuyau d'acier riveté (ε=0,18 cm) neuf de 40 cm de diamètre intérieur. La pression en A est de 0,14 kg/ cm^2, quand le débit est de 197 l/s. a) Quelle est la puissance fournie au fuel par la pompe ? b) quelle doit être la pression en B ? c) Tracer la ligne piézométrique ?
La viscosité cinématique du fuel-oil moyen est de à 10°C est de 5,16 $x10^{-6}$ m^2/s



Utiliser la formule de Nikuradzé pour calculer le coefficient de frottement (ou de Darcy) λ,

$$\lambda = \left(1{,}14 - 0{,}86 \ln\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)\right)^{-2}$$

Solution

a) Calcul de la puissance fournie au fuel-oil par la pompe

- Calcul de la vitesse d'écoulment

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{4.Q}{\pi d^2} = \frac{4.0{,}197}{\pi(0{,}4)^2} = 1{,}5677 \text{ m/s}$$

$$R_e = \frac{V.d}{\nu} = \frac{1{,}5677.0{,}4}{5{,}16.10^{-6}} = 121527{,}3181$$

$$\lambda = (1{,}14 - 0{,}86\ln(\varepsilon/d))^{-2} = (1{,}14 - 0{,}86\ln(0{,}0018/0{,}4))^{-2} = 0{,}02986$$

Appliquons l'équation de Bernoulli entre les points A et C, en prenant comme référence le point A.

$$H_A + H_P = H_C + \sum \Delta H_{AC}$$

$$\left(Z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g}\right) + H_P - \sum \Delta H_{AC} = \left(Z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g}\right)$$

$$\left(Z_A + \frac{p_{atm} + p_{mano}}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g}\right) + H_P - \frac{\lambda l}{d}\frac{V^2}{2g} - \xi\frac{V^2}{2g} = \left(Z_C + \frac{p_{atm}}{\rho g} + \frac{V_C^2}{2g}\right)$$

$$\frac{V_A^2}{2g} = \frac{V_B^2}{2g} = \frac{V^2}{2g}$$

$$\left(0 + \frac{101325 + 0{,}14.98100}{0{,}861 10^3 9{,}81} + \frac{(1{,}5677)^2}{19{,}62}\right) + H_P - \frac{0{,}02986.1800}{0{,}4}\frac{(1{,}5677)^2}{19{,}62} - 1\frac{(1{,}5677)^2}{19{,}62} = \left(24 + \frac{101325}{0{,}861 10^3 9{,}81} + 0\right)$$

$$13{,}6222 + 0{,}1253 + H_P - 16{,}8317 - 0{,}1253 = (24 + 11{,}9962 + 0)$$

$$H_P = 24 + 11{,}9962 + 0{,}1253 + 16{,}8317 - 0{,}1253 - 13{,}6222 = 39{,}2057 \text{ m.c.fo}$$

$$P_u = \rho.g.H.Q = (861.9{,}81.0{,}197.39{,}2057)/736 = 88{,}6359 \text{ CV}$$

b) la pression au point B

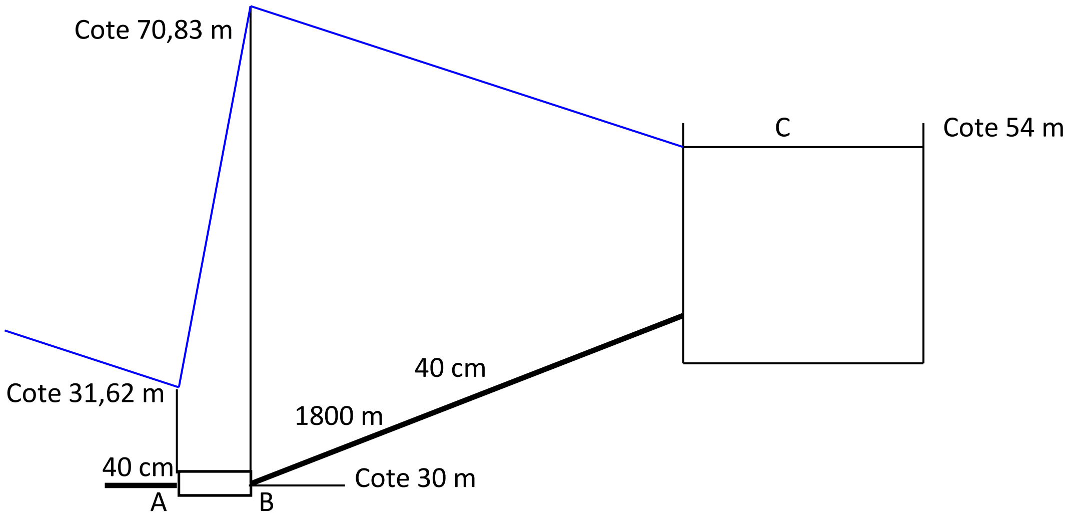
$$\left(Z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g}\right) + H_P = \left(Z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g}\right)$$

$$\left(0+1{,}62+\frac{V^2}{2g}\right)+39{,}2075=\left(0+\frac{p_B}{\rho g}+\frac{V^2}{2g}\right)\Rightarrow\frac{p_B}{\rho g}=40{,}8257$$

$$p_B = 861.9{,}81.40{,}8257 = 3{,}51509 \approx 3{,}52\ \text{kgf/cm}^2$$

c) Traçage de la ligne piézométrique

$$H_B = H_A + H_P = 31{,}62 + 39{,}2075 = 70{,}8275\ \text{m.c.fo}$$



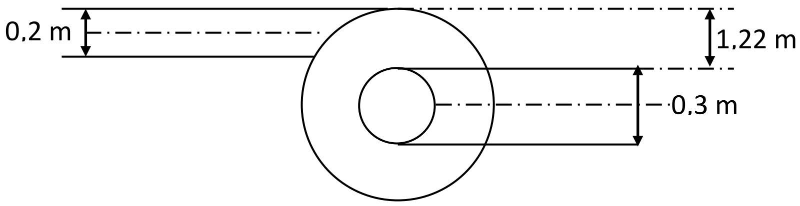
Exercice n° :4

Une pompe centrifuge débite 9000 litres d'eau par minute. Sa conduite d'aspiration horizontale a un diamètre de 0,3 m ; sur l'axe règne une pression P_1 de 0,2 m de mercure au dessous de la pression atmosphérique.

Sa conduite de refoulement horizontale a une diamètre de 0,2 m ; sur l'axe situé à 1,22 m plus haut que le précédent règne une pression P_2 de 0,7 bars supérieure à la pression atmosphérique.

a) en supposant que le rendement de la pompe soit égal à 80%, quelle puissance doit-on lui fournir ?

La densité du mercure =13,6



Solution

La charge hydraulique à l'entrée de la pompe au niveau de l'aspiration

$$H_1 = Z_1 + \frac{p_1}{\rho.g} + \alpha_1\frac{V_1^2}{2.g}$$

La charge hydraulique à la sortie de la pompe

$$H_2 = Z_2 + \frac{p_2}{\rho.g} + \alpha_2\frac{V_2^2}{2.g}$$

Calcul les pressions à l'entrée et à la sortie de la pompe

$$p_1 = 0{,}2\ \text{m Hg} = 0{,}2.13600.9.81 = 26683{,}2\ \text{Pascals}$$

La pression enregistrée à l'entrée de la pompe est au-dessous de la pression atmosphérique

$$p_1 = p_{atm} - 26683{,}2 = 101325 - 26683{,}2 = 74641{,}8 \text{ Pascals}$$
$$p_2 = 0{,}2 \text{ bars} = 0{,}7.10^5 = 70000 \text{ Pascals}$$

La pression à la sortie est enregistrée au-dessus de la pression atmosphérique.

$$p_2 = p_{atm} + 70000 = 101325 + 70000 = 171325 \text{ Pascals}$$

Calcul les vitesses à l'entrée et à la sortie de la pompe

$$V_1 = \frac{Q}{S_1} = \frac{4.Q}{\pi d_a^2} = \frac{4.0{,}15}{3.14159.(0{,}3)^2} = 2{,}123 \text{ m/s}$$
$$V_2 = \frac{Q}{S_2} = \frac{4.Q}{\pi d_r^2} = \frac{4.0{,}15}{3.14159.(0{,}2)^2} = 4{,}777 \text{ m/s}$$
$$H = H_s - H_e = \left(Z_2 + \frac{p_2}{\rho.g} + \alpha\frac{V_2^2}{2.g}\right) - \left(Z_1 + \frac{p_1}{\rho.g} + \alpha\frac{V_1^2}{2.g}\right)$$
$$H = (Z_2 - Z_1) + \left(\frac{p_2}{\rho.g} - \frac{p_1}{\rho.g}\right) + \left(\alpha_2\frac{V_2^2}{2.g} - \alpha_1\frac{V_1^2}{2.g}\right)$$
$$H = (1{,}22 - 0) + \left(\frac{171325}{10^3.9{,}81} - \frac{74641{,}8}{10^3.9{,}81}\right) + \left(1\frac{(4{,}777)^2}{2.9{,}81} - 1\frac{(2{,}123)^2}{2.9{,}81}\right) = 12{,}014 \text{ m}$$

Calcul de la puissance fournie par la pompe

$$P_u = \rho.g.H.Q = 10^3.9{,}81.12{,}014.0{,}15 = 17678{,}601 \text{ watts} = 24{,}02 \text{ CV}$$

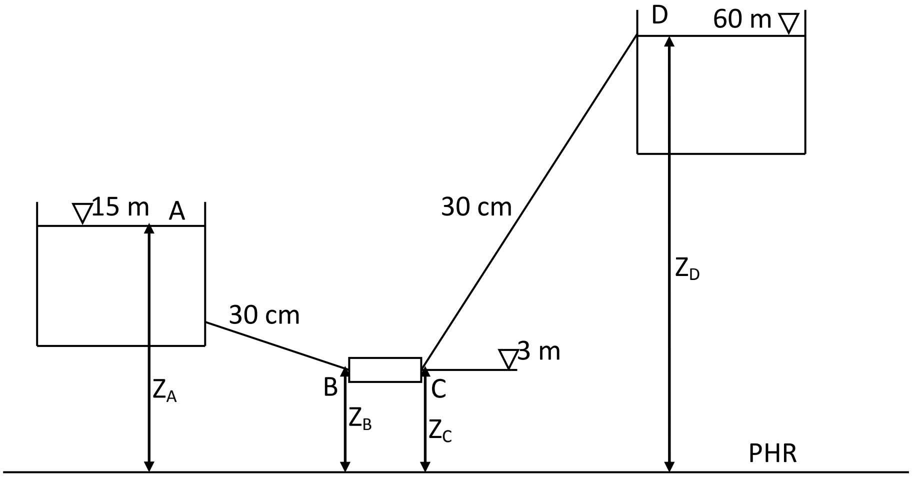
Calcul de la puissance fournie à la pompe

$$P_{abs} = \frac{P_u}{\eta} = \frac{17678{,}601}{0{,}8} = 22098{,}25 \text{ watts} = 30{,}025 \text{ CV}$$

Exercice n°5

Dans le système représenté dans la figure ci-dessous la pompe BC doit amener avec un débit de 160 l/s de l'huile de pétrole, de densité =0,762 au réservoir D, en admettant que l'énergie perdue de A à B est de 2,5 kgm/kg et entre C et D de 6,5 kgm/kg.

a) Combien la pompe doit-elle fournir de cheval vapeur au système ?
b) Tracer la ligne de charge ?



Solution

a) Calcul la puissance en C en cheval vapeur

$$P_u = \rho.g.H.Q$$
$$HMT = H_r - H_a$$
$$H_r = \left(Z_C + \frac{p_C}{\rho g} + \frac{V_C^2}{2g}\right) \text{ et } H_a = \left(Z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g}\right)$$

Appliquons l'équation de Bernoulli entre le réservoir A et l'entrée de la pompe représentée par le point B, nous aurons.

$$H_A = H_B + \sum \Delta H_{AB}$$

$$\left(Z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g}\right) = \left(Z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g}\right) + \sum \Delta H_{AB}$$

$$\frac{p_A}{\rho g} = \frac{p_{atm}}{\rho g}; \frac{V_A^2}{2g} \approx 0$$

$$H_a = \left(Z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g}\right) - \sum \Delta H_{AB} = Z_A + \frac{p_{atm}}{\rho g} + 0 - \sum \Delta H_{AB}$$

Appliquons l'équation de Bernoulli entre la sortie de la pompe représentée par le point C et le point D du réservoir supérieur.

$$H_C = H_D + \sum \Delta H_{CD}$$

$$\left(Z_C + \frac{p_C}{\rho g} + \frac{V_C^2}{2g}\right) = \left(Z_D + \frac{p_D}{\rho g} + \frac{V_D^2}{2g}\right) + \sum \Delta H_{CD}$$

$$\frac{p_D}{\rho g} = \frac{p_{atm}}{\rho g}; \frac{V_D^2}{2g} \approx 0$$

$$H_r = \left(Z_C + \frac{p_C}{\rho g} + \frac{V_C^2}{2g}\right) = \left(Z_D + \frac{p_{atm}}{\rho g} + 0\right) + \sum \Delta H_{CD}$$

$$HMT = H_r - H_a = \left(\left(Z_D + \frac{p_{atm}}{\rho g} + 0\right) + \sum \Delta H_{CD}\right) - \left(Z_A + \frac{p_A}{\rho g} + 0 - \sum \Delta H_{AB}\right)$$

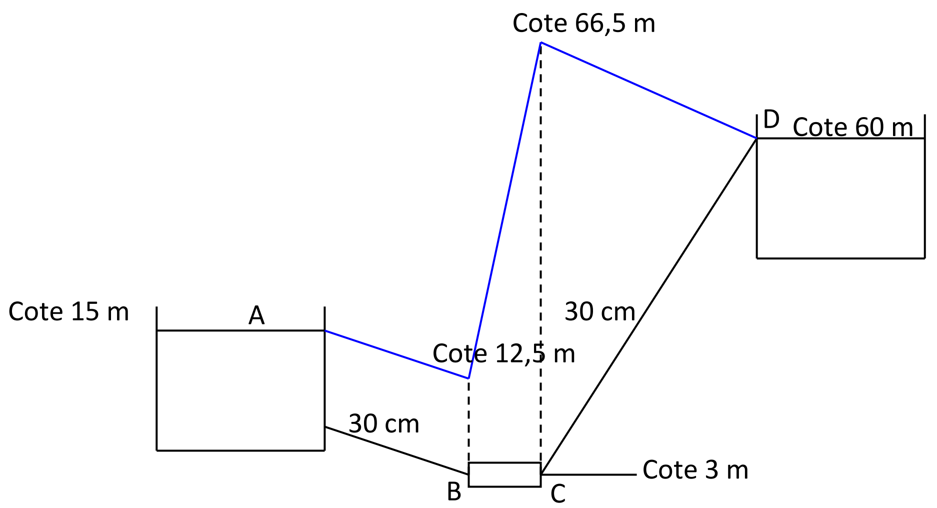
$$HMT = \left(\left(60 + \frac{p_{atm}}{\rho g} + 0\right) + \sum \Delta H_{CD}\right) - \left(15 + \frac{p_{atm}}{\rho g} + 0 - \sum \Delta H_{AB}\right)$$

$$HMT = \left(\left(60 + \frac{p_{atm}}{\rho g} + 0\right) + \sum \Delta H_{CD}\right) - \left(15 + \frac{p_{atm}}{\rho g} + 0 - \sum \Delta H_{AB}\right)$$

$$HMT = \left(60 - 15 + \sum \Delta H_{CD} + \sum \Delta H_{AB}\right) = 45 + 6{,}5 + 2{,}5 = 54 \text{ m.c.e}$$

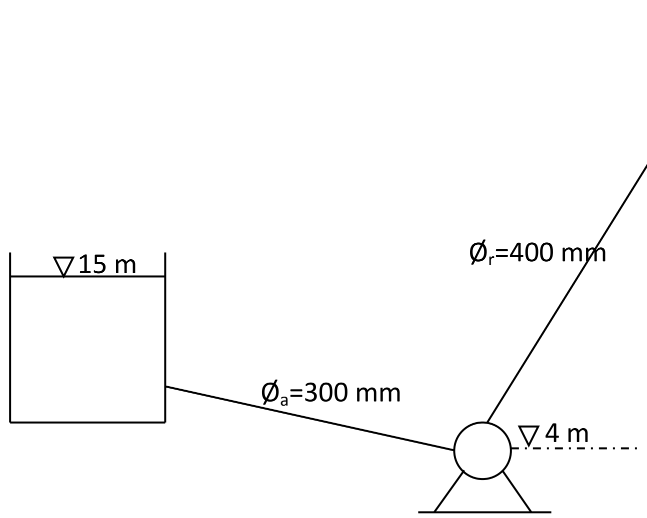
$$P_u = \rho.g.H.Q = 0{,}762.10^3.9{,}81.54.0{,}160 = 64585{,}9008 \text{ Watts} = 87{,}75 \text{ CV}$$

b) Traçage de la ligne de charge



Exercice n°6

Une pompe P doit amener avec un débit de 180 l/s de l'eau du réservoir d'aspiration au réservoir de refoulement comme il est représenté au schéma suivant :
Les pertes de charge à l'aspiration et au refoulement sont estimées respectivement à 3,5 m et 7,5 m ; la pression au réservoir de refoulement Ps=1,5 kgf/cm^2 ; le moteur d'entrainement tourne à 2800 tours /minute ; les pertes de charge à l'intérieure de la pompe sont négligeables.



a) Calculer la hauteur délivrée par la pompe ?
b) Calculer la puissance fournie par la pompe ?
c) Calculer la puissance fournie à la pompe sachant que le couple appliqué sur l'arbre C=1250 N.m ?
d) Calculer le rendement de la pompe en ce point ?
e) Quelle conclusion à tirer ?

Solution

a) Calcul de la hauteur délivrée par la pompe

La hauteur délivrée par la pompe est la différence entre la charge hydraulique totale à la sortie et à l'entrée de la pompe.

$$H_p = H_{sortie} - H_{entrée}$$

Appliquons l'équation de Bernoulli entre la sortie de la pompe et le réservoir de refoulement.

$$H_{Sortie} = H_{R\,ref} + \sum \Delta H_{Sortie-R\,ref}$$

$$\left(Z_{Sortie} + \frac{p_{Sortie}}{\rho g} + \frac{V^2_{Sortie}}{2g}\right) = \left(Z_{R\,ref} + \frac{p_{R\,ref}}{\rho g} + \frac{V^2_{R\,ref}}{2g}\right) + \sum \Delta H_{Sortie-R\,ref}$$

$$\frac{p_{R\,ref}}{\rho g} = \frac{1{,}5.9{,}81.10^4 + p_{atm}}{\rho g};\ \frac{V^2_{sup}}{2g} \approx 0;\ \sum \Delta H_{Sortie-R\,ref} = 7{,}5\ m$$

$$H_{Sortie} = \left(Z_{R\,ref} + \frac{p_{R\,ref}}{\rho g} + \frac{V^2_{R\,ref}}{2g}\right) + \sum \Delta H_{Sortie-R\,ref} = \left(65 + \frac{p_{atm} + p_{mano-sup}}{\rho g} + 0\right) + 7{,}5$$

$$H_{Sortie} = \left(65 + \frac{101325 + 1{,}5.9{,}81.10^4}{10^3.9{,}81} + 0\right) + 7{,}5 = 97{,}8287\ m$$

Appliquons l'équation de Bernoulli entre le réservoir d'aspiration et l'entrée de la pompe.

$$H_{R\,asp} = H_{entrée} + \sum \Delta H_{R\,asp-entrée} \Rightarrow H_{entrée} = H_{R\,asp} - \sum \Delta H_{R\,asp-entrée}$$

$$\left(Z_{entrée} + \frac{p_{entrée}}{\rho g} + \frac{V^2_{entrée}}{2g}\right) = \left(Z_{R\,asp} + \frac{p_{R\,asp}}{\rho g} + \frac{V^2_{R\,asp}}{2g}\right) - \sum \Delta H_{R\,asp-entrée}$$

$$\frac{p_{R\,asp}}{\rho g} = \frac{p_{atm}}{\rho g};\ \frac{V_{R\,asp}^2}{2g} \approx 0;\ \sum \Delta H_{R\,asp-entrée} = 3{,}5\ \mathrm{m}$$

$$H_{entrée} = H_{R\,asp} - \sum \Delta H_{R\,asp-entrée} = \left(15 + \frac{101325}{10^3.9{,}81} + 0\right) - 3{,}5 = 21{,}8287\ \mathrm{m}$$

$$H_p = H_{sortie} - H_{entrée} = 97{,}8287 - 21{,}8287 = 76\ \mathrm{m}$$

b) Calcul de la puissance fournie par la pompe

$$P_u = \rho.g.H.Q = 10^3.9{,}81.76.0{,}180 = 134200{,}8\ \mathrm{Watts} = 182{,}3380\ \mathrm{CV}$$

c) Calcul de la puissance fournie à la pompe

$$P_{abs} = C.\omega = 1250.\frac{2\pi.2800}{60} = 366519{,}143\ \mathrm{Watts} = 497{,}9880\ \mathrm{CV}$$

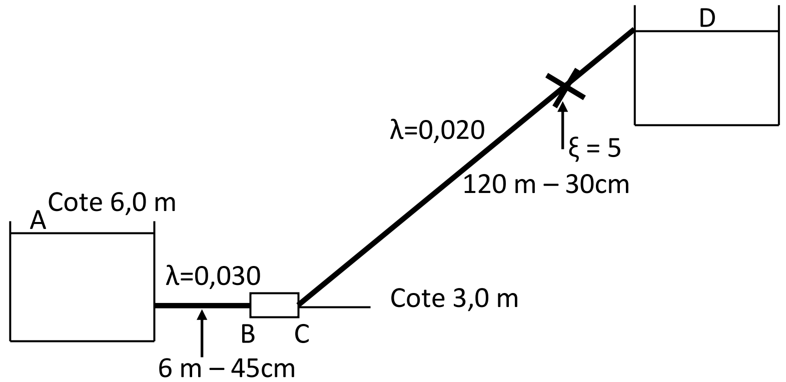
d) Calcul du rendement de la pompe

$$\eta = \frac{P_u}{P_{abs}} = \frac{134200{,}8}{366519{,}143} = 36{,}61\ \%$$

e) La conclusion à tirer est que le rendement est faible et par conséquent cette pompe ne convient pas à cette installation.

Exercice n°7

Si la pompe BC représentée dans la figure ci-dessous fournit 70 CV au système quand le débit d'eau est de 220 l/s. à quel niveau peut-on disposer le réservoir D ?



Solution

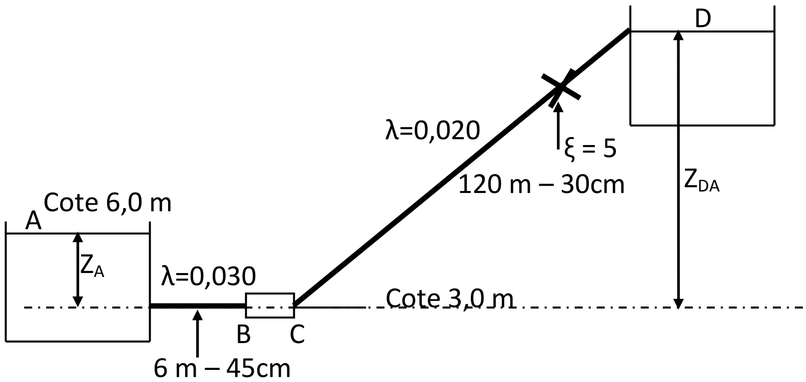
La puissance fournit par la pompe est la puissance utile d'où on peut écrire :

$$P_u = \rho.g.H.Q$$

Mais la puissance donnée est en cheval vapeur sachant que 1CV=736 watts d'où la puissance est égale à 736.70=51520 watts.

$$P_u = \rho.g.H.Q \Rightarrow H = \frac{P_u}{\rho.g.Q} = \frac{51520}{1000.9{,}81.0{,}22} = 23{,}87\ \mathrm{m}$$

Prenons le plan horizontal de référence au niveau de l'axe de la pompe, puis appliquons l'équation de Bernoulli entre l'entrée et la sortie de la pompe nous aurons l'expression de H.



$$H = \left(Z_D + \frac{p_D}{\rho g} + \frac{V_D^2}{2g}\right) - \left(Z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g}\right) + \sum \Delta H_{AD}$$

$$\frac{V_D^2}{2g} - \frac{V_A^2}{2g} \approx 0; \; ; \; \frac{p_D}{\rho g} = \frac{p_A}{\rho g} = \frac{p_{atm}}{\rho g}$$

$$\sum \Delta H_{AD} = \sum \Delta H_{asp} + \sum \Delta H_{ref} + \sum \Delta H_{sing.ref} = \frac{\lambda_a L_a}{d_a}\frac{V_a^2}{2.g} + \frac{\lambda_r L_r}{d_r}\frac{V_r^2}{2.g} + \xi\frac{V_r^2}{2.g}$$

$$H = (Z_D - Z_A) + \frac{\lambda_a L_a}{d_a}\frac{V_a^2}{2.g} + \frac{\lambda_r L_r}{d_r}\frac{V_r^2}{2.g} + \xi\frac{V_r^2}{2.g}$$

$$H = (Z_D - Z_A) + \left(\frac{8.\lambda_a L_a}{\pi^2.g.d_a^5} + \frac{8.\lambda_r L_r}{\pi^2.g.d_r^5} + \frac{8.\xi}{\pi^2.g.d_r^4}\right)Q^2$$

$$Z_D = H + Z_A - \left(\frac{8.\lambda_a L_a}{\pi^2.g.d_a^5} + \frac{8.\lambda_r L_r}{\pi^2.g.d_r^5} + \frac{8.\xi}{\pi^2.g.d_r^4}\right)Q^2$$

$$Z_D = 23{,}87 + 3 - \left(\frac{8.0{,}03.6}{\pi^2.9{,}81(0{,}45)^5} + \frac{8.0{,}02.120}{\pi^2.9{,}81(0{,}3)^5} + \frac{8.5}{\pi^2.9{,}81.(0{,}3)^4}\right).(0{,}220)^2$$

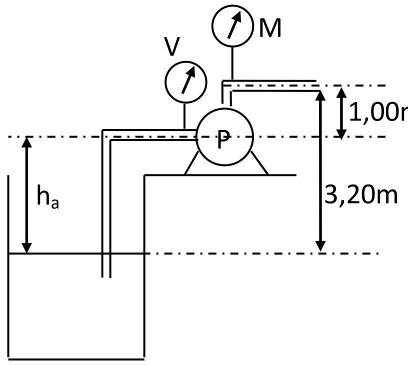
$$Z_D = 26{,}87 - (0{,}8060 + 81{,}606 + 51{,}004).(0{,}220)^2 = 20{,}4126\ \text{m}$$

Le réservoir D peut être disposé à une cote de 20,4126 m.

Exercice n°8

Une pompe aspire de l'eau d'un puits par un tuyau vertical de 15 cm. La pompe possède un tuyau de dégagement horizontal de 10 cm de diamètre qui se trouve à 3,20 m au-desuus du niveau de l'eau dans le puits. Tandis que le pompage s'effectue à la vitesse de 35 l/s, les manomètres placés près de la pompe à l'entrée et à la sortie indiquent –0,32 kg/cm^2 et 1,80 kg/cm^2 respectivement. Le manomètre de sortie est situé à 1,0 m au-dessus du manomètre d'entrée. Calculer la puissance en cheval vapeur délivrée par la pompe et la hauteur de charge perdue dans le tuyau d'aspiration de 15 cm.

Solution
Q=35 l/s
P_{Ve}=-0,32 kgf/cm^2
P_{ms}=1,8 kgf/cm^2
da=15 cm
dr=10 cm



a) Calcul de la puissance délivrée par la pompe

$$H_e = Z_e + \frac{p_e}{\rho.g} + \alpha_e \frac{V_e^2}{2.g};\ H_S = Z_S + \frac{p_S}{\rho.g} + \alpha_S \frac{V_S^2}{2.g}$$

$$HMT = H_S - H_e = H = (Z_s - Z_e) + \left(\frac{p_s}{\rho.g} - \frac{p_e}{\rho.g}\right) + \left(\alpha_s \frac{V_s^2}{2.g} - \alpha_e \frac{V_e^2}{2.g}\right)$$

$$(Z_s - Z_e) = 1\ m$$

$$\frac{p_e}{\rho.g} = \frac{p_{atm}}{\rho.g} - \frac{p_{v.a}}{\rho.g} = \frac{101325}{10^3.9{,}81} - \frac{0{,}32.10^4.9{,}81}{10^3.9{,}81} = 7{,}1287\ m$$

$$\frac{p_s}{\rho.g} = \frac{p_{atm}}{\rho.g} + \frac{p_{m.r}}{\rho.g} = \frac{101325}{10^3.9{,}81} + \frac{1{,}80.10^4.9{,}81}{10^3.9{,}81} = 28{,}3287\ m$$

$$V_e = \frac{Q}{S_e} = \frac{4.Q}{\pi d_a^2} = \frac{4.0{,}035}{3.14159.(0{,}15)^2} = 1{,}9806\ m/s$$

$$V_s = \frac{Q}{S_s} = \frac{4.Q}{\pi d_r^2} = \frac{4.0{,}15}{3.14159.(0{,}1)^2} = 4{,}456\ m/s$$

$$\left(\frac{p_s}{\rho.g} - \frac{p_e}{\rho.g}\right) = 28{,}3287 - 7{,}1287 = 21{,}2\ m.c.e$$

$$\left(\alpha_s \frac{V_s^2}{2.g} - \alpha_e \frac{V_e^2}{2.g}\right) = \left(1.\frac{(4{,}456)^2}{2.9{,}81} - 1.\frac{(1{,}9806)^2}{2.9{,}81}\right) = 0{,}812\ m.c.e$$

$$H_P = HMT = H_S - H_e = H = 1 + 21{,}2 + 0{,}812 = 23{,}012\ m$$

$$P_u = \rho.g.H.Q = 10^3.9{,}81.23{,}012.0{,}035 = 7901{,}1702\ watts = 10{,}735\ CV$$

b) Calcul de la charge perdue dans la conduite d'aspiration

Appliquons l'équation de Bernoulli entre le plan d'eau du réservoir d'aspiration et l'entrée de la pompe en prenant le plan horizontal de référence au niveau du plan d'eau du réservoir d'aspiration.

$$H_{Rasp} = H_e + \sum \Delta H_{AB} \Rightarrow \sum \Delta H_{AB} = H_{Rasp} - H_e$$

$$H_{Rasp} = Z_r + \frac{p_r}{\rho.g} + \alpha_e \frac{V_r^2}{2.g};\ H_e = Z_e + \frac{p_e}{\rho.g} + \alpha_S \frac{V_e^2}{2.g}$$

$$\sum \Delta H_{AB} = \left(Z_r + \frac{p_r}{\rho.g} + \alpha_r \frac{V_r^2}{2.g}\right) - \left(Z_e + \frac{p_e}{\rho.g} + \alpha_e \frac{V_e^2}{2.g}\right)$$

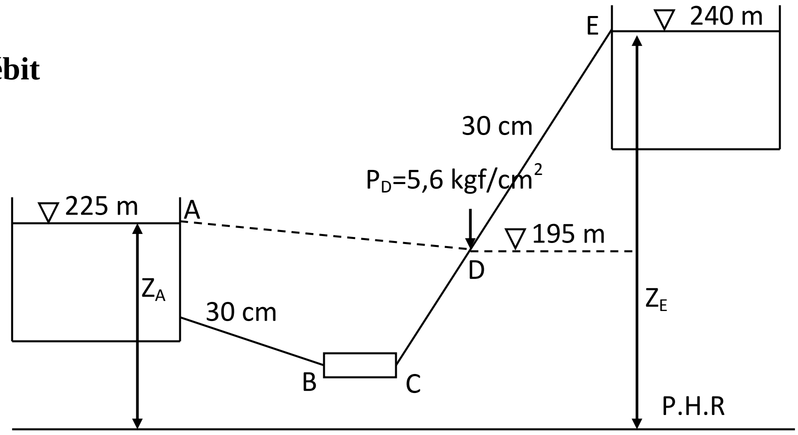
$$\sum \Delta H_{AB} = \left(0 + \frac{p_{atm}}{\rho.g} + 0\right) - \left(2{,}2 + 7{,}1287 + \frac{(1{,}9806)^2}{2.9{,}81}\right) = 0{,}80\ m$$

Exercice n°9

De l'eau est pompée d'un réservoir A à la cote 225 m au réservoir E de cote 240 m par l'intermédiaire d'une conduite de 30 cm. La pression dans le tuyau de 30 cm au point D, à la cote 195 m est de 5,60 kg/cm^2. Les pertes de charge sont de A à l'entrée B de la pompe ; 0,60 m, de la sortie de la pompe C à D ; $38V^2/2g$ et de D à E ; $40V^2/2g$. Trouver le débit Q et la puissance en cheval vapeur fournie par la pompe BC.

Solution

a) Calcul du débit



Appliquons l'équation de Bernoulli entre le réservoir d'aspiration et l'entrée de la pompe (B)

$$\left(Z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g}\right) = \left(Z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g}\right) + \sum \Delta H_{AB}$$

$$H_A = H_B + \sum \Delta H_{AB} \Rightarrow H_B = H_A - \sum \Delta H_{AB}$$

$$H_A = \left(Z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g}\right) = \left(225 + \frac{p_{atm}}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g}\right) = \left(225 + \frac{101325}{9810} + 0\right) = 235{,}3287\ \mathrm{m}$$

$$H_B = H_A - \sum \Delta H_{AB} = 235{,}3287 - 0{,}6 = 234{,}7287\ \mathrm{m}$$

Maintenant appliquons l'équation de Bernoulli entre la sortie de la pompe (le point C) et le point D.

$$\left(Z_C + \frac{p_C}{\rho g} + \frac{V_C^2}{2g}\right) = \left(Z_D + \frac{p_D}{\rho g} + \frac{V_D^2}{2g}\right) + \sum \Delta H_{CD}$$

$$H_C = H_D + \sum \Delta H_{CD} = \left(Z_D + \frac{p_D}{\rho g} + \frac{V_D^2}{2g}\right) + \sum \Delta H_{CD}$$

Le diamètre est constant le long de l'aspiration et du refoulement et par conséquent

$$V_B = V_C = V_D = V$$

$$H_C = \left(195 + \frac{101325 + 5{,}6.10^4.9{,}81}{9810} + \frac{V^2}{2g}\right) + 38\frac{V^2}{2g}$$

$$H_C = 261{,}3287 + \frac{V^2}{2g} + 38\frac{V^2}{2g} = 261{,}3287 + 39\frac{V^2}{2g}$$

Appliquons l'équation de Bernoulli entre le réservoir d'aspiration entre les points D et E.

$$\left(Z_D + \frac{p_D}{\rho g} + \frac{V_D^2}{2g}\right) = \left(Z_E + \frac{p_E}{\rho g} + \frac{V_E^2}{2g}\right) + \sum \Delta H_{DE}$$

$$\frac{V_E^2}{2g} = 0; \frac{p_E}{\rho g} = \frac{p_{atm}}{\rho g} = \frac{101325}{9810} = 10{,}3287\ \mathrm{m.c.e}; Z_E = 240\ \mathrm{m}; \sum \Delta H_{DE} = 40\frac{V^2}{2g}$$

$$H_D = \left(Z_D + \frac{p_D}{\rho g} + \frac{V_D^2}{2g}\right) = 240 + 10,3287 + 40\frac{V^2}{2g} = 250,3287 + 40\frac{V^2}{2g}$$

$$H_D = 250,3287 + 40\frac{V^2}{2g} \qquad (1)$$

$$H_D = 261,3287 + \frac{V^2}{2g} \qquad (2)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow 250,3287 + 40\frac{V^2}{2g} = 261,3287 + \frac{V^2}{2g} \Rightarrow 39\frac{V^2}{2g} = 11 \Rightarrow 39V^2 = 2g.11$$

$$V = \sqrt{\frac{2g.11}{39}} = 2,3524 \text{ m/s}$$

$$Q = V.S = V\frac{\pi d^2}{4} = 2,3524.\frac{\pi(0,3)^2}{4} = 166,28 \text{ l/s}$$

$$H_C = 261,3287 + 39\frac{V^2}{2g} = 261,3287 + 39.\frac{(2,3587)^2}{2g} = 272,3287 \text{ m}$$

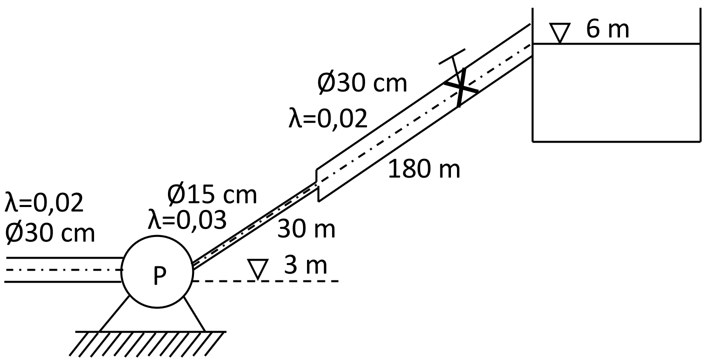
$$H_p = H_C - H_B = 272,3287 - 234,7287 = 37,6 \text{ m.c.e}$$

b) Calcul de la puissance

$$P_u = \rho.g.H.Q = (10^3.9,81.37,6.0,16628)/736 = 83,33 \text{ CV}$$

Exercice n° 10

Une pompe située à la cote 3,0 m fournit 210 l/s d'eau par un système de tuyaux horizontaux à un réservoir fermé où la surface du liquide est à la cote 6,0 m. La hauteur de pression à l'entrée de 30 cm de diamètre de la pompe est de –1,20 m et à la sortie de 15 cm de diamètre de 58,0 m. Le tuyau de 15 cm (λ=0,030) a 30 m de long, passant brutalement à 30 cm (λ=0,020) sur 180 m et se terminant au réservoir. Une vanne de 30 cm, ξ =1,0 est située à 30 m du réservoir. Calculer la pression dans le réservoir au-dessus de la surface de l'eau. Tracer la ligne de charge et la ligne piézométrique ?



Solution

Calcul de la pression dans le réservoir au-dessus de la surface de l'eau

La pression à l'entrée de la pompe =-1,2 m et à la sortie =58 m.

La hauteur de charge délivrée par la pompe s'écrit :

$$H_p = H_S - H_e \Rightarrow H_S = H_p + H_e$$

$$H_S = \left(Z_s + \frac{p_s}{\rho g} + \frac{V_s^2}{2g}\right) \text{ et } H_e = \left(Z_e + \frac{p_e}{\rho g} + \frac{V_e^2}{2g}\right)$$

Supposons que le niveau de l'entrée est égale au niveau de la sortie c'est Z_S=Z_e=3 m.

$$\frac{p_s}{\rho g} = 58\text{ m};\ \frac{p_e}{\rho g} = -1{,}2\text{ m}$$

$$\frac{V_s^2}{2g} = \frac{8Q^2}{g\pi^2 d_{15}^4} = \frac{8(0{,}21)^2}{9{,}81.(3{,}14159265)^2(0{,}15)^4} = 7{,}1977\text{ m}$$

$$\frac{V_e^2}{2g} = \frac{8Q^2}{g\pi^2 d_{30}^4} = \frac{8(0{,}21)^2}{9{,}81.(3{,}14159265)^2(0{,}3)^4} = 0{,}4499\text{ m}$$

$$H_p = H_S - H_e = (3 + 58 + 7{,}1977) - (3 - 1{,}2 + 0{,}4499) = 65{,}9478\text{ m}$$

Appliquons l'équation de Bernoulli entre la sortie de la pompe et le l'entrée du réservoir de refoulement en prenant le plan horizontal de référence au niveau de l'axe de la pompe.

$$H_S = H_{\text{Réservoir}} + \sum \Delta H_{\text{sortie de la pompe}-\text{Réservoir}}$$

$$\left(Z_s + \frac{p_s}{\rho g} + \frac{V_s^2}{2g}\right) = \left(Z_R + \frac{p_R}{\rho g} + \frac{V_R^2}{2g}\right) + \sum \Delta H_{\text{sortie de la pompe}-\text{Réservoir}}$$

$$(Z_R - Z_s) + \left(\frac{p_R}{\rho g} - \frac{p_s}{\rho g}\right) + \left(\frac{V_R^2}{2g} - \frac{V_s^2}{2g}\right) + \sum \Delta H_{\text{sortie de la pompe}-\text{Réservoir}} = 0$$

$$\frac{p_R}{\rho g} = \frac{p_s}{\rho g} - (Z_R - Z_s) - \left(\frac{V_R^2}{2g} - \frac{V_s^2}{2g}\right) - \sum \Delta H_{\text{sortie de la pompe}-\text{Réservoir}}$$

$$(Z_R - Z_s) = (6 - 3) = 3\text{ m};\ \left(\frac{V_R^2}{2g} \simeq 0\right)$$

$$\frac{p_R}{\rho g} = ?\,;\ \frac{p_s}{\rho g} = 58\text{ m}$$

$$\frac{p_R}{\rho g} = \frac{p_s}{\rho g} - 3 - (0 - 7{,}1977) - \sum \Delta H_{\text{sortie de la pompe}-\text{Réservoir}}$$

$$\sum \Delta H_{\text{sortie de la pompe}-\text{Réservoir}} = \Delta H_{L1} + \Delta H_{L1} + \Delta H_{\text{elarg}} + \Delta H_{\text{Vanne}} + \Delta H_{\text{arrivée}-\text{Réservoir}}$$

$$\sum \Delta H_{\text{sort pompe}-\text{Réservoir}} = \frac{\lambda_{15} L_{15}}{d_{15}} \frac{V_{15}^2}{2.g} + \frac{\lambda_{30} L_{30}}{d_{30}} \frac{V_{30}^2}{2.g} + \xi_{\text{elarg}} \frac{V_{30}^2}{2.g} + \xi_{\text{vanne}} \frac{V_{30}^2}{2.g} + \xi_{\text{arr réser}} \frac{V_{30}^2}{2.g}$$

$$\sum \Delta H_{\text{sort p}-\text{R}} = \frac{\lambda_{15} L_{15}}{d_{15}} \frac{V_{15}^2}{2.g} + \frac{\lambda_{30} L_{30}}{d_{30}} \frac{V_{30}^2}{2.g} + \frac{\left(V_{15}^2 - V_{30}^2\right)}{2.g} + \xi_{\text{vanne}} \frac{V_{30}^2}{2.g} + \xi_{\text{arr réser}} \frac{V_{30}^2}{2.g}$$

$$\xi_{\text{vanne}} = 1;\ \xi_{\text{arr réser}} = 1;\ \xi_{\text{elarg}} = \left(\frac{S_2}{S_1} - 1\right)^2;\ \lambda_{15} = 0{,}03;\ \lambda_{30} = 0{,}02$$

$$\xi_{\text{elarg}} = \left(\frac{d_{30}^2}{d_{15}^2} - 1\right)^2 = \left(\frac{(0{,}3)^2}{(0{,}15)^2} - 1\right)^2 = 9$$

$$\sum \Delta H_{\text{sort p}-\text{R}} = \frac{\lambda_{15} L_{15}}{d_{15}} \frac{V_{15}^2}{2.g} + \frac{\lambda_{30} L_{30}}{d_{30}} \frac{V_{30}^2}{2.g} + 9\frac{V_{30}^2}{2.g} + 1\frac{V_{30}^2}{2.g} + 1\frac{V_{30}^2}{2.g}$$

$$\sum \Delta H_{\text{sort p}-\text{R}} = \left(\frac{\lambda_{15} L_{15}}{d_{15}}\right) \frac{V_{15}^2}{2.g} + \left(\frac{\lambda_{30} L_{30}}{d_{30}} + 11\right) \frac{V_{30}^2}{2.g}$$

$$\sum \Delta H_{\text{sort p}-\text{R}} = \left(\frac{\lambda_{15} L_{15}}{d_{15}}\right) \frac{V_{15}^2}{2.g} + \left(\frac{\lambda_{30} L_{30}}{16 d_{30}} + \frac{11}{16}\right) \frac{V_{15}^2}{2.g}$$

$$\sum \Delta H_{\text{sort p}-\text{R}} = \left(\frac{\lambda_{15} L_{15}}{d_{15}} + \frac{\lambda_{30} L_{30}}{16 d_{30}} + \frac{11}{16}\right) \frac{V_{15}^2}{2.g} = \left(\frac{0{,}03.30}{0{,}15} + \frac{0{,}02.180}{16(0{,}3)} + \frac{11}{16}\right) \frac{V_{15}^2}{2.g}$$

$$\sum \Delta H_{\text{sort p}-\text{R}} = (7{,}4375) \frac{V_{15}^2}{2.g} = (7{,}4375) \frac{8(0{,}21)^2}{(9{,}81).(3{,}14159265)^2.(0{,}15)^4} = 53{,}5330\text{ m}$$

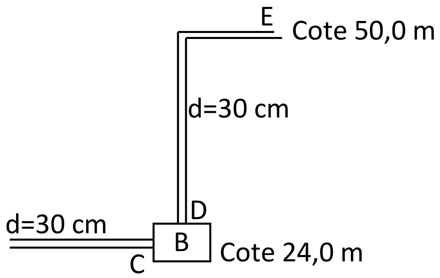
$$\frac{p_R}{\rho g} = 58 - 3 - (0 - 7{,}1977) - 53{,}5330 = 8{,}6647 \text{ m}$$

$$p_R = \left(\frac{9810.8{,}6647}{98100}\right) = 0{,}86647 \text{kgf/cm}^2$$

Exercice n°11

La pompe B fournit une hauteur de charge de 42,20 m à l'eau circulant vers E comme le montre la figure suivante. Si la pression en C est de –0,15 kg/cm^2 et si la perte de charge de D à E est de 8,0 V^2/2g , Quel est le débit ?

Hp=42,20 m
P_{VC}=-15 kgf/cm^2
Q= ?



$$\Delta H_{DE} = 8\frac{V^2}{2.g}$$

Solution

Calcul du débit fourni par la pompe

La hauteur d'élévation de la pompe est égale à la différence de charge entre la sortie et l'entrée de la pompe.

$$H_p = H_S - H_e = H_D - H_C = \left(Z_D + \frac{p_D}{\rho g} + \frac{V_D^2}{2g}\right) - \left(Z_C + \frac{p_C}{\rho g} + \frac{V_C^2}{2g}\right)$$

La pression au point C est négative d'où c'est une pression au-dessous de la pression atmosphérique.

$$\frac{p_C}{\rho g} = \frac{p_{atm}}{\rho g} - \frac{p_{VC}}{\rho g} = \frac{101325}{9810} - \frac{0{,}15.10^4.9{,}81}{9810} = 8{,}8287 \text{ m}$$

Le diamètre de la conduite d'aspiration est identique à celui de la conduite de refoulement (da=dr=0,3 m) d'où Va=Vr ou V_C=V_D puisque l'écoulement est permanent.

$$\left(\frac{V_D^2}{2g} - \frac{V_C^2}{2g} \approx 0\right)$$

$$H_C = \left(Z_C + \frac{p_C}{\rho g} + \frac{V_C^2}{2g}\right) = \left(24 + 8{,}8287 + \frac{V_C^2}{2g}\right)$$

Appliquons l'équation de Bernoulli entre la sortie de la pompe, point D, et la sortie d'eau au point E.

$$H_D = H_E + \sum \Delta H_{DE} = \left(Z_D + \frac{p_D}{\rho g} + \frac{V_D^2}{2g}\right) = \left(Z_E + \frac{p_E}{\rho g} + \frac{V_E^2}{2g}\right) + \sum \Delta H_{DE}$$

$$H_D = 42{,}20 \text{ m} \,;\; Z_E = 50 \text{ m};\; \frac{p_E}{\rho g} = \frac{101325}{9810} = 10{,}3287;\; \sum \Delta H_{DE} = 8\frac{V^2}{2g} \;;\; \frac{V_E^2}{2g} = \frac{V_C^2}{2g} = \frac{V^2}{2g}$$

$$H_D = 50 + 10{,}3287 + 9\frac{V^2}{2g} \qquad (1)$$

$$H_p = H_S - H_e = H_D - H_C \Rightarrow H_D = H_p + H_C$$

$$H_D = 42{,}20 + \left(24 + 8{,}8287 + \frac{V^2}{2g}\right) \qquad (2)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow 50 + 10{,}3287 + 9\frac{V^2}{2g} = 42{,}20 + \left(24 + 8{,}8287 + \frac{V^2}{2g}\right)$$

$$60{,}3287 + 9\frac{V^2}{2g} = 75{,}0287 + \frac{V^2}{2g} \Rightarrow 8\frac{V^2}{2g} = 14{,}7 \Rightarrow V^2 = 36{,}05175$$

$$V = \sqrt{36{,}05175} = 6 \text{ m/s}$$

$$Q = V.S = V\frac{\pi d^2}{4} = 6{,}00.\frac{\pi(0{,}3)^2}{4} = 0{,}42411501 \text{ m}^3/\text{s} = 425{,}115 \ \mathbf{l/s}$$

Exercice n°12

Une pompe fournit du fuel-oil à 15°C par 1000 m de tuyau de laiton de 5 cm de diamètre à un réservoir situé à 10 m au-dessus du réservoir de distribution. En négligeant les pertes mineures, pour un débit de 3,51 l/s, calculer la puissance de la pompe en cheval vapeur si son rendement est de 80% ?

Solution

Calcul de la puissance de la pompe fournie à la pompe

$$P_{absorbée} = \frac{P_u}{\eta} = \frac{\rho.g.H.Q}{\eta}$$

Le seul paramètre qui ne manque dans cette relation pour calculer la puissance absorbée est la charge délivrée par la pompe, H, ce qui nécessite son calcul.

$$H = H_g + \sum \Delta H_L = H_g + \frac{8\lambda L Q^2}{g\pi^2 d^5}$$

$$H_g = 10 \text{ m}; L = 1000 \text{ m}; d = 5 \text{ cm} = 0{,}05 \text{ m}; Q = 0{,}00351 \text{ m}^3/\text{s}$$

Le fuel-oil moyen à 15°C de densité 0,857 a une viscosité cinématique égale $4{,}47.10^{-6} m^2/s$.

Calcul de la vitesse de circulation du fuel-oil dans la conduite en laiton

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4(0{,}00351)}{\pi(0{,}05)^2} = 1{,}7876 \text{ m/s}$$

Calcul du nombre de Reynolds

$$R_e = \frac{V.d}{\nu} = \frac{1{,}7876\ .0{,}05}{4{,}47.10^{-6}} = 19995{,}5257$$

Le Laiton ayant une hauteur d'aspérité ε=0,00015 cm.

$$\lambda_5 = (1{,}14 - 0{,}86\ln(\varepsilon/d))^{-2} = (1{,}14 - 0{,}86\ln(0{,}00012/5))^{-2} = 0{,}00981$$

$$\lambda = \left(\frac{0{,}3164}{Re^{0{,}25}}\right) = \left(\frac{0{,}3164}{(19995{,}5257)^{0{,}25}}\right) = 0{,}02661$$

$$H = 10 + \frac{8.(0{,}02661).1000.(0{,}00351)^2}{9{,}81.(3{,}14159265)^2.(0{,}05)^5} = 96{,}6823 \text{ m}$$

$$P_{absorbée} = \frac{\frac{P_u}{\eta}}{736} = \frac{\frac{857.9{,}81.96{,}6823.0{,}00351}{0{,}8}}{736} = 4{,}8455 \text{ CV}$$

Le fuel-oil lourd à 15°C a une densité 0,912 et a une viscosité cinématique égale $201.10^{-6} m^2/s$.

$$R_e = \frac{V.d}{\nu} = \frac{1{,}7876\ .0{,}05}{201.10^{-6}} = 444{,}6766$$

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{444{,}6766} = 0{,}1439$$

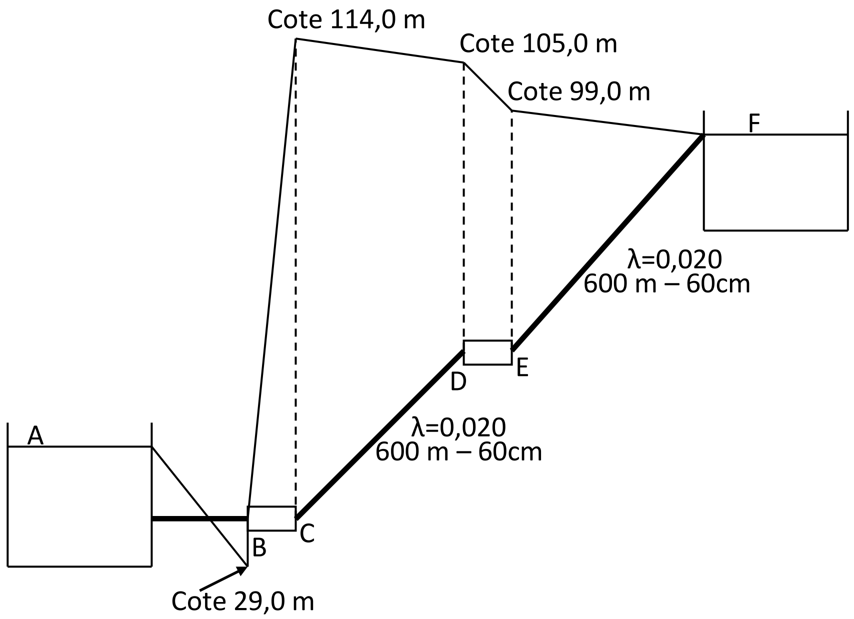
$$H = 10 + \frac{8.(0{,}1439).1000.(0{,}00351)^2}{9{,}81.(3{,}14159265)^2.(0{,}05)^5} = 10 + 468{,}8362 = 478{,}8362 \text{ m}$$

$$P_u = 912.9{,}81.478{,}8362..0{,}00351 = 14722{,}8569 \text{ Watts}$$

$$P_{absorbée} = \frac{\frac{P_u}{\eta}}{736} = 25\ CV$$

Exercice n°13

La pompe BC fournit de l'eau au réservoir F et on a représenté la ligne piézométrique dans la figure ci-après. Calculer a) la puissance fournie à l'eau par la pompe BC, b) la puissance consommée par la turbine DE et c) le niveau d'eau du réservoir F.



Solution

a) Calcul de la puissance fournie par la pompe BC

- À partir de la ligne piézométrique entre l'entrée et la sortie de la pompe BC, on peut tirer la hauteur manométrique totale de la pompe.

$$HMT = H_C - H_B = 114 - 29 = 85\ m$$

- Calcul du débit pompé

La perte de charge entre la sortie de la pompe et l'entrée de la turbine peut être calculée à partir de la ligne piézométrique.

$$\Delta H_{CD} = 114 - 105 = 9\ m$$

$$\Delta H_{CD} = \frac{8.\lambda_{CD} L_{CD}}{\pi^2.g.d_{CD}^5} Q^2 \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{\Delta H_{CD}.\pi^2.g.d_{CD}^5}{8.\lambda_{CD} L_{CD}}}$$

$$Q = \sqrt{\frac{9.(3{,}14159265)^2.9{,}81(0{,}6)^5}{8.0{,}02.600}} = 0{,}84\ m^3/s$$

$$P_u = \rho.g.H.Q = 10^3.9{,}81.85.0{,}84 = 700434\ watts = 951{,}6766\ CV$$

b) La puissance consommée par la turbine

$$H_C = 105 - 99 = 6\ m$$

$$P_c = \rho.g.H_C.Q = 10^3.9{,}81.6.0{,}84 = 49442{,}4\ watts = 67{,}18\ CV$$

c) Calcul du niveau du réservoir F

$$C_F = C_{pE} - \Delta H_{EF} - \Delta H_{S\ entrée\ réservoir}$$

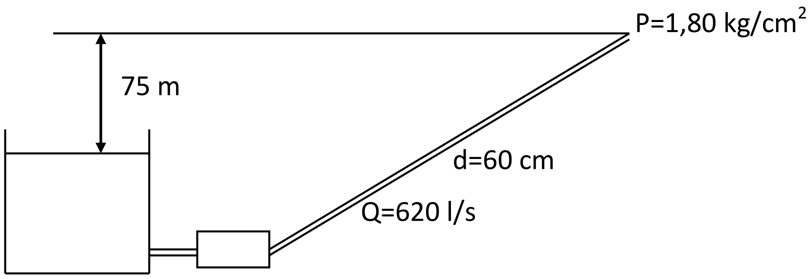
$$C_F = 99 - \frac{8.\lambda_{EF} L_{EF}}{\pi^2.g.d_{EF}^5} Q^2 - \xi \frac{8Q^2}{\pi^2.g.d_{EF}^4}$$

$$C_F = 99 - \frac{8.0{,}02.600}{(3{,}14159265)^2.9{,}81(0{,}6)^5}(0{,}84)^2 - 1\frac{8(0{,}84)^2}{(3{,}14159265)^2.9{,}81.(0{,}6)^4}$$

$$C_F = 99 - 8{,}997 - 0{,}4498 = 89{,}55 \text{ m}$$

Exercice n°14

De l'huile de densité 0,750 est pompée à partir d'un réservoir, par-dessus une colline, par un tuyau de 60 cm de diamètre, la pression au sommet de la colline étant maintenue à 1,80 kg/cm^2. Le sommet est à 75 m au-dessus de la surface du réservoir et l'huile est pompée à une vitesse de 620 l/s. Si la perte de charge du réservoir au sommet est de 4,70 m, quelle est la puissance en cheval vapeur que la pompe doit fournir au liquide ?



Solution

Appliquons l'équation de Bernoulli entre le résrvoir représenté par le point A et le sommet de la colline, le point B.

La hauteur d'élévation est donnée par l'expression

$$H = \left(Z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g}\right) - \left(Z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g}\right) + \sum \Delta H_{AB}$$

$$\frac{p_B}{\rho g} = \frac{p_{atm} + 1{,}8.9{,}81.10^4}{\rho g}; \frac{V_B^2}{2g} = \frac{8Q^2}{g\pi^2 d^4}; \frac{V_A^2}{2g} \simeq 0; \frac{p_A}{\rho g} = \frac{p_{atm}}{\rho g}$$

$$H = (Z_B - Z_A) + \left(\frac{p_B}{\rho g} - \frac{p_A}{\rho g}\right) + \left(\frac{V_B^2}{2g} - \frac{V_A^2}{2g}\right) + \sum \Delta H_{AB}$$

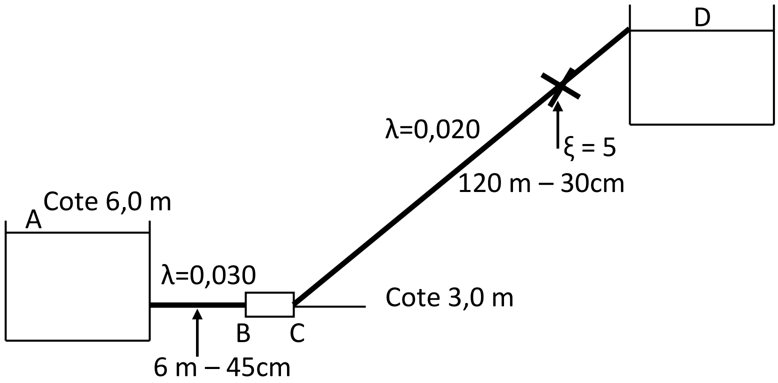
$$H = 75 + \left(\frac{p_{atm} + 1{,}8.9{,}81.10^4}{\rho g} - \frac{p_{atm}}{\rho g}\right) + \left(\frac{V_B^2}{2g} - 0\right) + 4{,}7$$

$$H = 75 + \left(\frac{1{,}8.9{,}81.10^4}{\rho g}\right) + \left(\frac{8Q^2}{g\pi^2 d^4}\right) + 4{,}7 = +75 + 24 + \left(\frac{8Q^2}{g\pi^2 d^4}\right) + 4{,}7$$

$$H = 99 + \left(\frac{8Q^2}{g\pi^2 d^4}\right) = 103{,}7 + \left(\frac{8(0{,}62)^2}{9{,}81(3{,}14159265)^2(0{,}6)^4}\right) = 103{,}945 \text{ m}$$

$$P_u = \rho.g.H.Q = 750.9{,}81.103{,}945.0{,}62 = 474160{,}709 \text{ Watts} = 644{,}24 \text{ CV}$$

Exercice n°15
Si la pompe BC représentée dans la figure ci-dessous fournit 70 CV au système quand le débit d'eau est de 220 l/s. à quel niveau peut-on disposer le réservoir D ?



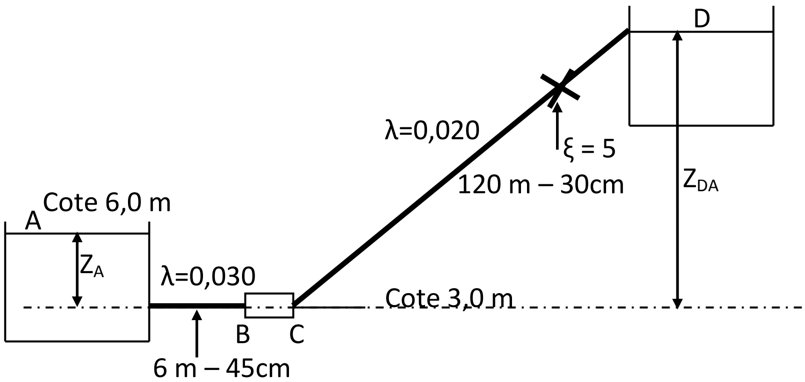
Solution
La puissance fournit par la pompe est la puissance utile d'où on peut écrire :

$$P_u = \rho.g.H.Q$$

Mais la puissance donnée est en cheval vapeur sachant que 1CV=736 watts d'où la puissance est égale à 736.70=51520 watts.

$$P_u = \rho.g.H.Q \Rightarrow H = \frac{P_u}{\rho.g.Q} = \frac{51520}{1000.9,81.0,22} = 23,87\ \text{m}$$

Prenons le plan horizontal de référence au niveau de l'axe de la pompe, puis appliquons l'équation de Bernoulli entre l'entrée et la sortie de la pompe nous aurons l'expression de H.



$$H = \left(Z_D + \frac{p_D}{\rho g} + \frac{V_D^2}{2g}\right) - \left(Z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g}\right) + \sum \Delta H_{AD}$$

$$\frac{V_D^2}{2g} - \frac{V_A^2}{2g} \approx 0;\ ;\ \frac{p_D}{\rho g} = \frac{p_A}{\rho g} = \frac{p_{atm}}{\rho g}$$

$$\sum \Delta H_{AD} = \sum \Delta H_{asp} + \sum \Delta H_{ref} + \sum \Delta H_{sing.ref} = \frac{\lambda_a L_a}{d_a}\frac{V_a^2}{2.g} + \frac{\lambda_r L_r}{d_r}\frac{V_r^2}{2.g} + \xi\frac{V_r^2}{2.g}$$

$$H = (Z_D - Z_A) + \frac{\lambda_a L_a}{d_a}\frac{V_a^2}{2.g} + \frac{\lambda_r L_r}{d_r}\frac{V_r^2}{2.g} + \xi\frac{V_r^2}{2.g}$$

$$H = (Z_D - Z_A) + \left(\frac{8.\lambda_a L_a}{\pi^2.g.d_a^5} + \frac{8.\lambda_r L_r}{\pi^2.g.d_r^5} + \frac{8.\xi}{\pi^2.g.d_r^4}\right)Q^2$$

$$Z_D = H + Z_A - (\frac{8.\lambda_a L_a}{\pi^2.g.d_a^5} + \frac{8.\lambda_r L_r}{\pi^2.g.d_r^5} + \frac{8.\xi}{\pi^2.g.d_r^4})Q^2$$

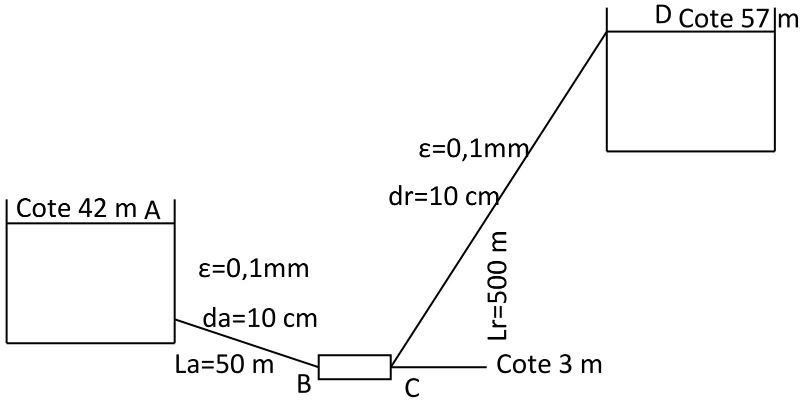
$$Z_D = 23{,}87 + 3 - (\frac{8.0{,}03.6}{\pi^2.9{,}81(0{,}45)^5} + \frac{8.0{,}02.120}{\pi^2.9{,}81(0{,}3)^5} + \frac{8.5}{\pi^2.9{,}81.(0{,}3)^4}).(0{,}220)^2$$

$$Z_D = 26{,}87 - (0{,}8060 + 81{,}606 + 51{,}004).(0{,}220)^2 = 20{,}4126\ \mathrm{m}$$

Le réservoir D peut être disposé à une cote de 20,4126 m.

Exercice n°16

La courbe des hauteurs manométriques H en fonction du débit Q d'une pompe centrifuge radiale est une parabole à axe vertical donnée par :
$H = 0{,}08Q^2 - 2{,}4Q + 32$
La puissance absorbée varie linéairement avec le débit, elle est de 5kw à un débit nul est 12,5 kw pour Q = 15 l/s.
a) Exprimer la fonction P=F(Q) et donné dans un tableau la hauteur manométrique H, la puissance absorbée Pabs et le rendement η pour un débit variant de 5 à 15 l/s.
b) Tracer les courbe H, Pabs et η en fonction de Q ?
La pompe est installée en charge dont le plan d'eau est de 42 m, la hauteur d'aspiration est de 1,70 m.



b) Trouver le point de fonctionnement de l'installation ?

Solution

P=AQ+B
P=5 Kw pour un débit Q=0 l/s⇒B=5
P=12,5 Kw pour un débit Q=15 l/s⇒12,5=A(15)+5⇒A=0,5⇒P=0,5Q+5

Q (l/s)	H (m)	P_{abs} (Kw)	Pu (Kw)	η (%)	Q (l/s)	H (m)	P_{abs} (Kw)	Pu (Kw)	η (%)
0	32	5	0,0000	0,00	8	17,92	9	1,4064	15,63
0,5	30,82	5,25	0,1512	2,88	8,5	17,38	9,25	1,4492	15,67
1	29,68	5,5	0,2912	5,29	9	16,88	9,5	1,4903	15,69
1,5	28,58	5,75	0,4206	7,31	9,5	16,42	9,75	1,5303	15,69
2	27,52	6	0,5399	9,00	10	16	10	1,5696	15,70
2,5	26,5	6,25	0,6499	10,40	10,5	15,62	10,25	1,6089	15,70
3	25,52	6,5	0,7511	11,55	11	15,28	10,5	1,6489	15,70
3,5	24,58	6,75	0,8440	12,50	11,5	14,98	10,75	1,6900	15,72
4	23,68	7	0,9292	13,27	12	14,72	11	1,7328	15,75
4,5	22,82	7,25	1,0074	13,90	12,5	14,5	11,25	1,7781	15,81

5	22	7,5	1,0791	14,39	13	14,32	11,5	1,8262	15,88
5,5	21,22	7,75	1,1449	14,77	13,5	14,18	11,75	1,8779	15,98
6	20,48	8	1,2055	15,07	14	14,08	12	1,9337	16,11
6,5	19,78	8,25	1,2613	15,29	14,5	14,02	12,25	1,9943	16,28
7	19,12	8,5	1,3130	15,45	15	14	12,5	2,0601	16,48
7,5	18,5	8,75	1,3611	15,56					

b) Recherche du point de fonctionnement du système

La pompe doit travailler contre une charge H qui est déterminée comme suit :

Appliquons l'équation de Bernoulli entre le point A et le point B (à l'entrée de la pompe) en prenant le plan horizontal de référence au niveau zéro.

$$H_A = H_B + \sum \Delta H_{AB} \Rightarrow H_B = H_A - \sum \Delta H_{AB}$$

$$\left(Z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g}\right) = \left(Z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g}\right) + \sum \Delta H_{AB}$$

$$\left(Z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g}\right) = \left(Z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g}\right) - \sum \Delta H_{AB}$$

Appliquons l'équation de Bernoulli entre le point C (à la sortie de la pompe) et le point D en prenant le plan horizontal de référence au niveau zéro.

$$H_C = H_D + \sum \Delta H_{CD}$$

$$\left(Z_C + \frac{p_C}{\rho g} + \frac{V_C^2}{2g}\right) = \left(Z_D + \frac{p_D}{\rho g} + \frac{V_D^2}{2g}\right) + \sum \Delta H_{CD}$$

$$H = H_C - H_B$$

$$H = \left(Z_D + \frac{p_D}{\rho g} + \frac{V_D^2}{2g}\right) + \sum \Delta H_{CD} - \left(\left(Z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g}\right) - \sum \Delta H_{AB}\right)$$

$$H = (Z_D - Z_A) + \left(\frac{p_D}{\rho g} - \frac{p_A}{\rho g}\right) + \left(\frac{V_D^2}{2g} - \frac{V_A^2}{2g}\right) + \sum \Delta H_{AB} + \sum \Delta H_{CD}$$

$$Z_A = 42 \text{ m}; Z_D = 57; \frac{p_A}{\rho g} = \frac{p_B}{\rho g} = \frac{p_{atm}}{\rho g}; \frac{V_D^2}{2g} - \frac{V_A^2}{2g} \simeq 0$$

$$H = 15 + 0 + 0 + \sum \Delta H_{AB\,(sing)} + \sum \Delta H_{AB\,(lin)} + \sum \Delta H_{CD\,(sing)} + \sum \Delta H_{CD\,(lin)} = 0$$

$$\sum \Delta H_{(lin)} = \frac{\lambda L}{d}\frac{V^2}{2.g} = \frac{8\lambda L}{g.\pi^2.d^5} Q^2$$

$$d_a = d_r \text{ et } \varepsilon_a = \varepsilon_r \text{ d'où } \lambda_a = \lambda_r = \lambda$$

$$\lambda = \left(1{,}14 - 0{,}86 \ln\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)\right)^{-2} = \left(1{,}14 - 0{,}86 \ln\left(\frac{0{,}10}{100}\right)\right)^{-2} = 0{,}01994579$$

$$\sum \Delta H_{(lin)} = \sum \Delta H_{AB\,(lin)} + \sum \Delta H_{CD\,(lin)}$$

$$\sum \Delta H_{(lin)} = \frac{8\lambda_a L_a}{g.\pi^2.{d_a}^5} Q^2 + \frac{8\lambda_r L_r}{g.\pi^2.{d_r}^5} Q^2 = \frac{8\lambda\,(L_a + L_r)}{g.\pi^2.d^5} Q^2$$

$$\sum \Delta H_{(lin)} = \frac{8.0{,}01994579\,(50 + 500)}{9{,}81.(3{,}14159265)^2.(0{,}1)^5} Q^2 = 90643{,}187 Q^2$$

$$H = 15 + 90643{,}187 Q^2$$

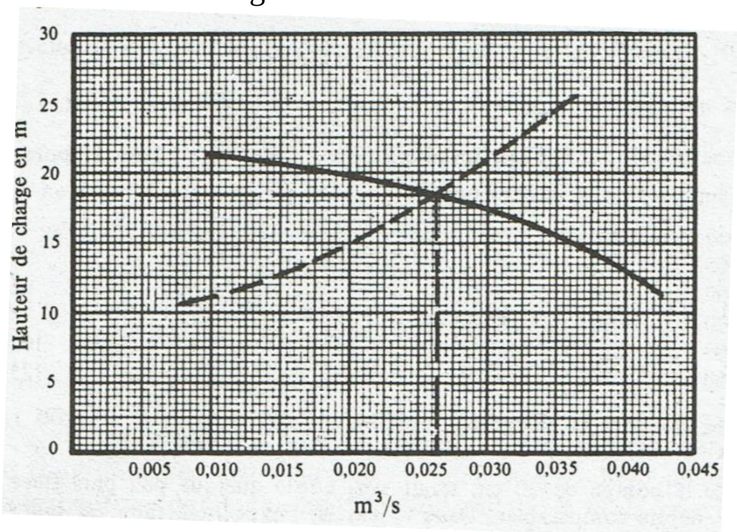
Le point de fonctionnement est abouti lorsque la hauteur délivrée par la pompe est égale à celle contre laquelle la pompe travaille H=Hp.

$$15 + 90643{,}187Q^2 = 0{,}08Q^2 - 2{,}4Q + 32$$
$$-90643{,}107Q^2 - 2{,}4Q + 17 = 0$$
$$\Delta = 6163737{,}04$$
$$Q_1 = 0{,}01368161 = 136{,}82\ l/s$$
$$Q_2 = -0{,}01370809 = -137{,}08\ l/s$$

On prendra la valeur positive puis on rempalce dans la relation de H, on obtient :
H=31,9672 m
Le point de fonctionnement A (QA, HA) prend les cordonnées (136,82 l/s, 31,9672 m).

Exercice n°17

Une pompe tournant à 1750 tours /minute, présente pour courbe de charge en fonction du débit celle qu'on a représenté sur la figure ci-dessous. La pompe doit faire circuler de l'eau par 450 m de tuyau de 15 cm de diamètre, λ=0,025. La charge statique est de 10 m et les pertes mineures (singulières) peuvent être négligées.
Calculer le débit et la hauteur de charge dans ces conditions.



Solution

Calcul du débit et de la hauteur de charge dans ces conditions

En point de fonctionnement qui est le point d'intersection entre la courbe caractéristique de la pompe et celle de la conduite les valeurs des deux hauteurs sont égales $H_p= H_C$. Toutefois, dans notre cas nous n'avons pas l'équation de la courbe caractéristique de la pompe. Dans de telle situation le passage au retraçage des courbes de la conduite et de la pompe dans le même graphique s'avère d'une très grande utilité.

La charge contre laquelle on pompe peut être obtenue en utilisant l'expression de la hauteur d'élévation en cas de réaliser une étude.

$$HMT = (Z_2 - Z_1) + \left(\frac{p_2}{\rho g} - \frac{p_1}{\rho g}\right) + \left(\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}\right) + \sum \Delta H_{singulières} + \sum \Delta H_{linéaires}$$

Dans notre cas les termes suivants ont les valeurs suivantes :

$$(Z_2 - Z_1) = H_g = 10\ m; \left(\frac{p_2}{\rho g} - \frac{p_1}{\rho g}\right) = 0;\ \left(\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}\right) \simeq 0;\ \sum \Delta H_{singulières} = 0$$

$$H_C = H_g + \sum \Delta H_{linéaires} \Rightarrow H_C = 10 + \frac{\lambda L}{d}\frac{V^2}{2g} = 10 + \frac{8\lambda L}{g\pi^2 d^5}Q^2$$

Le point d'intersection est obtenu après traçage des deux courbes en prenant plusieurs valeurs du débit sans sortir de l'intervalle des valeurs de la courbe caractéristique de la pompe.

$$H_C = 10 + \frac{8.0,025.450}{9,81.(3,14159265)^2(0,15)^5}Q^2 = 10 + 12241,0159Q^2$$

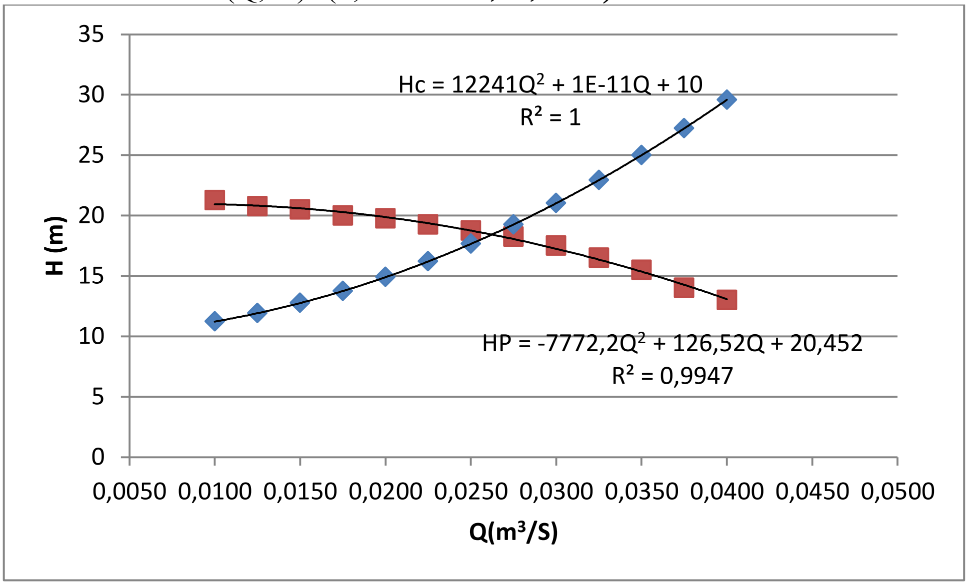
Dressons le tableau suivant

Q (m^3/s)	0,0100	0,0125	0,0150	0,0175	0,0200	0,0225
Hc (m)	11,2241	11,9127	12,7542	13,7488	14,8964	16,1970
Hp (m)	21,25	20,75	20,5	20	19,75	19,25

Suite du tableau

Q (m^3/s)	0,0250	0,0275	0,0300	0,0325	0,0350	0,0375	0,0400
Hc (m)	17,6506	19,2573	21,0169	22,9296	24,9952	27,2139	29,5856
Hp (m)	18,75	18,25	17,5	16,5	15,5	14	13

Le point d'intersection est (Q, H)=(0,0264 m^3/s,18,53 m).



Chapitre V : Lois de similitudes des pompes à aubes

5.1 Les différentes lois de similitude

5.1.1 Lois de similitude géométrique

$$\frac{(D_1)_I}{(D_1)_{II}} = \frac{(D_2)_I}{(D_2)_{II}} = \frac{(b_1)_I}{(b_1)_{II}} = \frac{(b_2)_I}{(b_2)_{II}} = \frac{(d_m)_I}{(d_m)_{II}} = \frac{(d_o)_I}{(d_o)_{II}} = \cdots = \text{constante} \qquad (5.1)$$

($D1)_I$, $(D2)_I$: diamètres successivement à l'entrée et à la sortie de la roue de la pompe réelle.

$(D1)_{II}$, $(D2)_{II}$: diamètres successivement à l'entrée et à la sortie de la roue de la pompe modèle.

($b1)_I$, $(b2)_I$: espacement entre les deux flasques (disques) successivement à l'entrée et à la sortie de la roue de la pompe réelle.

$(b1)_{II}$, $(b2)_{II}$: espacement entre les deux flasques (disques) successivement à l'entrée et à la sortie de la roue de la pompe modèle.

($d_m)_I$: diamètre du moyeu de la roue de la pompe réelle.

$(d_m)_{II}$: diamètre du moyeu de la roue de la pompe modèle.

($d_O)_I$: diamètre de l'ouïe de la roue de la pompe réelle.

$(d_O)_{II}$: diamètre de l'ouïe de la roue de la pompe modèle.

5.1.2 Lois de similitude cinématique

La similitude cinématique est la proportionnalité des paramètres cinétiques homologues d'une roue réelle et d'une roue modèle. Elle signifiée aussi la similitude des triangles des vitesses construits pour des points homologue des roues réelle et modèle.

$$\frac{(u_1)_I}{(u_1)_{II}} = \frac{(u_2)_I}{(u_2)_{II}} = \frac{(v_1)_I}{(v_1)_{II}} = \frac{(v_2)_I}{(v_2)_{II}} = \frac{(V_{2u})_I}{(V_{2u})_{II}} = \frac{(V_{2r})_I}{(V_{2r})_{II}} = \frac{(V_2)_I}{(V_2)_{II}} = \cdots = \text{constante} \qquad (5.2)$$

5.1.3 Lois de similitude dynamique

La similitude cinématique est la proportionnalité des paramètres dynamiques homologues d'une roue réelle et d'une roue modèle.

a) Rapport des charges

$$\frac{(H)_I}{(H)_{II}} = \left(\frac{(n)_I(D_2)_I}{(n)_{II}(D_2)_{II}}\right)^2 \qquad (5.3)$$

b) Rapport des débits

$$\frac{(Q)_I}{(Q)_{II}} = \frac{(n)_I}{(n)_{II}} \frac{((D_2)_I)^3}{((D_2)_{II})^3} \qquad (5.4)$$

c) Rapport des puissances

$$\frac{(P)_I}{(P)_{II}} = \left(\frac{(n)_I}{(n)_{II}}\right)^3 \frac{((D_2)_I)^5}{((D_2)_{II})^5} \qquad (5.5)$$

5.2 Vitesse spécifique

La vitesse spécifique désigné par Ns est le nombre de tours par minute auquel devrait tourner la roue d'une pompe à aubes qui débiterait un débit de 1 m^3/s à 1 m de hauteur (charge), généralement elle est calculée pour un rendement (η) maximum, donc pour un point correspondant à des valeurs Q et H bien définies et les mieux adaptées pour la pompe. En effet, sans cette condition il y aurait une infinité de valeur de Ns.

$$N_S = n.\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{H^3}} \qquad (5.6)$$

Où N_S est exprimée en tours/minutes, Q en (m^3/s) et H en mètre de colonne du liquide.

Le plus souvent la vitesse spécifique, N_S, est considérée comme un nombre sans dimensions, ce qui n'est pas exacte et parfois elle exprimée en (tours/minutes).

Exercice n° 1

Une pompe centrifuge a un diamètre de refoulement de 40 cm et sa roue tourne à une vitesse de rotation de 2000 tr/min, ses caractéristiques sont les suivantes :

Q (m^3/s)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
H(m)	12	11,8	11,6	11,2	10,7	10,0	9,2	8,4	7,0	4,4	3,0	0

a) Obtenir les caractéristiques d'une pompe géométriquement semblable de diamètre d=0,5 m et tourne à une vitesse de 2500 trours/minute ?

b) Si les deux pompes sont installées une fois en série et une autre en parallèle, trouver les courbes résultantes de ces deux instllations et déterminer les marges de bon fonctionnement des deux installations ?

Solution

a) Recherche des cacartéristiques de la pompe semblable

Pour obtenir les caractéristiques d'une pompe géométriquement sembalbale, on doit utiuliser les lois de similitude.

$$\frac{(H)_{40}}{(H)_{50}} = \left(\frac{(n)_{40}(D_2)_{40}}{(n)_{50}(D_2)_{50}}\right)^2 \Rightarrow (H)_{50} = \left(\frac{(n)_{50}(D_2)_{50}}{(n)_{40}(D_2)_{40}}\right)^2 (H)_{40}$$

$$\frac{(Q)_{40}}{(Q)_{50}} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right).\left(\frac{(D_2)_{40}}{(D_2)_{50}}\right)^3 \Rightarrow (Q)_{50} = \left(\frac{n_2}{n_2}\right).\left(\frac{(D_2)_{50}}{(D_2)_{40}}\right)^3 (Q)_{40}$$

$$(H)_{50} = \left(\frac{2500.0,5}{2000.0,4}\right)^2 (H)_{40} = 2,4414(H)_{40}$$

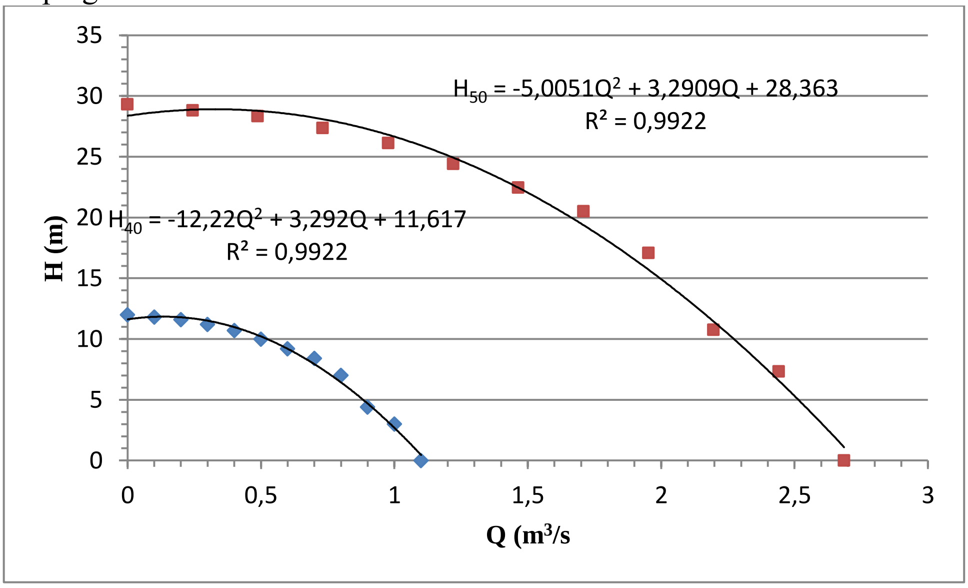
$$(Q)_{50} = \left(\frac{2500}{2000}\right).\left(\frac{0,5}{0,4}\right)^3 (Q)_{40} = 2,4414(Q)_{40}$$

Les résultats sont indiqués dans le tableau suivant :

Q (m^3/s)	0,000	0,244	0,488	0,732	0,977	1,221	1,465	1,709	1,953	2,197	2,441	2,686
H(m)	29,297	28,809	28,320	27,344	26,123	24,414	22,461	20,508	17,090	10,742	7,324	0,000

b) Recherche des courbes résultantes des deux pompes

cas d'un couplage en série



Exercice n° :2

Une pompe centrifuge a débité 1000 l/min, en travaillant contre une charge de 15 m quand la vitesse était de 1500 tours/minute. Le diamètre du rotor est de 30 cm et la puissance au frein de 6 CV. Une pompe géométriquement semblable de 35 cm de diamètre doit fonctionner à 1750 tours/min. En admettant que les rendements sont égaux .

a) Quelle est la hauteur de charge fournie ?
b) Quel est le débit d'eau pompé ?
c) Quelle la puissance fournie ?

Solution

a) Calcul de la hauteur de charge fournie par la pompe de 35 cm de diamètre de la roue

Les rendements sont égaux c'est-à-dire que les rendements hydrauliques et volumétriques des deux pompes semblables sont égaux.

$$(\mathrm{H})_{\mathrm{I}} = (\eta_{\mathrm{H}})_{\mathrm{I}}.(\eta_{\mathrm{V}})_{\mathrm{I}}.\frac{(u_2)_{\mathrm{I}}(V_{2u})_{\mathrm{I}}}{g}$$

$$(\mathrm{H})_{\mathrm{II}} = (\eta_{\mathrm{H}})_{\mathrm{II}}.(\eta_{\mathrm{V}})_{\mathrm{II}}.\frac{(u_2)_{\mathrm{II}}(V_{2u})_{\mathrm{II}}}{g}$$

D'une autre manière lorsqu'on calcule le rapport des deux charges on obtient l'expression suivante :

$$\frac{(\mathrm{H})_{\mathrm{I}}}{(\mathrm{H})_{\mathrm{II}}} = \left(\frac{(n)_{\mathrm{I}}(D_2)_{\mathrm{I}}}{(n)_{\mathrm{II}}(D_2)_{\mathrm{II}}}\right)^2$$

De cette expression on peut extraire la relation de H_{II}.

$$(\mathrm{H})_{\mathrm{II}} = \left(\frac{(n)_{\mathrm{II}}(D_2)_{\mathrm{II}}}{(n)_{\mathrm{I}}(D_2)_{\mathrm{I}}}\right)^2 (\mathrm{H})_{\mathrm{I}} = \left(\frac{1750.0,35}{1500.0,30}\right)^2 .15 = 27,78935 \text{ m}$$

b) Calcul du débit pompé

De la deuxième loi de la similitude on peut calculer le débit de la deuxième pompe.

$$\frac{(Q)_{\mathrm{I}}}{(Q)_{\mathrm{II}}} = \frac{(n)_{\mathrm{I}}}{(n)_{\mathrm{II}}}\frac{((D_2)_{\mathrm{I}})^3}{((D_2)_{\mathrm{II}})^3} \Rightarrow (Q)_{\mathrm{II}} = \frac{(n)_{\mathrm{II}}}{(n)_{\mathrm{I}}}\frac{((D_2)_{\mathrm{II}})^3}{((D_2)_{\mathrm{I}})^3}.(Q)_{\mathrm{I}} = \frac{1750}{1500}\frac{(0,35)^3}{(0,30)^3}.\left(\frac{1}{60}\right) = 0,30877$$

$$(Q)_{\mathrm{II}} = 0,30877 \text{ m}^3/\text{s} = 1852,62 \text{ l/minute}$$

c) Calcul de la puissance fournie

De la troisième loi de la similitude, on peut calculer la puissance fournie de la deuxième pompe.

$$\frac{(P)_{\mathrm{I}}}{(P)_{\mathrm{II}}} = \left(\frac{(n)_{\mathrm{I}}}{(n)_{\mathrm{II}}}\right)^3 \frac{((D_2)_{\mathrm{I}})^5}{((D_2)_{\mathrm{II}})^5} \Rightarrow (P)_{\mathrm{II}} = \left(\frac{(n)_{\mathrm{II}}}{(n)_{\mathrm{I}}}\right)^3 \frac{((D_2)_{\mathrm{II}})^5}{((D_2)_{\mathrm{I}})^5}(P)_{\mathrm{I}} = \left(\frac{1750}{1500}\right)^3 .\frac{(0,35)^5}{(0,3)^5}.6$$

$$(P)_{\mathrm{II}} = 20,5933 \text{ CV}$$

Exercice n° :3

Dans un magasin, on dispose de moteurs de puissances diverses dont la vitesse de rotation est de 1400 tours/min.

On dispose aussi de roues d'un groupe de pompes centrifuges radiales homologues dont la vitesse spécifique est de 50 pour le rendement maximal.

Trois commandes ont été adressées en vue de satisfaire les conditions de marché ci-après :

Commande n°1 :

Q=210 l/s, H=30m

Commande n°2

Q=100 l/s, H=60m

Commande n°3

Q=500 l/s, H=15m

Comment peut-on satisfaire ces commandes, on demande le nombre de roues ou de pompes et le type de montage.

Solution
La première commande
Q=210 l/s, H=30 m
A partir de la vitesse spécifique et la vitesse de rotation qui sont disponible, on peut calculer le rapport de $Q^{1/2}/H^{3/4}$

$$N_s = 50 \text{ et } n = 1400 \text{ tours/ minute}$$

$$N_S = n.\frac{Q^{1/2}}{H^{3/4}} \Rightarrow \frac{Q^{1/2}}{H^{3/4}} = \frac{N_S}{n} = \frac{50}{1400} = 0{,}03571$$

Notre première commande permet d'avoir un rapport de $Q^{1/2}/H^{3/4} = (0{,}210)^{1/2}/(30)^{3/4} = 0{,}03574$
On constate que les deux rapports sont égaux et par conséquent il suffit la pompe une seule roue pour réponde à la première commande.

La deuxième commande
Q=100 l/s, H=60 m
La deuxième commande permet d'avoir un rapport de $Q^{1/2}/H^{3/4} = (0{,}1)^{1/2}/(60)^{3/4} = 0{,}0147$
Il faut augmenter le rapport $Q^{1/2}/H^{3/4}$, ce qui nous oblige de diminuer la charge H, elle devient H' ou H=qH'.

$$N_S = n.\frac{Q^{1/2}}{(H')^{3/4}}$$

Où p est le nombre de roues en série.

$$N_S = n.\frac{Q^{1/2}}{\left(\frac{H}{q}\right)^{3/4}} \Rightarrow \left(\frac{H}{q}\right)^{3/4} = n.\frac{Q^{1/2}}{N_S} \Rightarrow \left(\left(\frac{H}{q}\right)^{3/4}\right)^{4/3} = \left(n.\frac{Q^{1/2}}{N_S}\right)^{4/3} \Rightarrow \frac{H}{q} = \left(\frac{n}{N_S}\right)^{4/3} Q^{2/3}$$

$$\frac{q}{H} = \frac{1}{\left(\frac{n}{N_S}\right)^{4/3} Q^{2/3}} \Rightarrow q = \frac{H}{\left(\frac{n}{N_S}\right)^{4/3} Q^{2/3}} = \frac{60}{\left(\frac{1400}{50}\right)^{4/3} (0{,}1)^{2/3}} = 3{,}275 \text{ roues}$$

L'installation doit composer d'environ 4 roues ou pompes placées en série pour qu'elle puisse répondre aux exigences de la deuxième commande.
Troisième commande
Q=500 l/s, H=15 m
La deuxième commande permet d'avoir un rapport de $Q^{1/2}/H^{3/4} = (0{,}5)^{1/2}/(15)^{3/4} = 0{,}0928$
Il faut diminuer le rapport $Q^{1/2}/H^{3/4}$, ce qui nous oblige de diminuer le débit Q qui devient Q'.

$$N_S = n.\frac{Q^{1/2}}{H^{3/4}} \Rightarrow Q' = \left(N_S.\frac{H^{3/4}}{n}\right)^2 = \left(50.\frac{(15)^{3/4}}{1400}\right)^2 = 0.0741 \text{ m}^3/\text{s}$$

Notre débit Q=0,5 m^3/s, pour calculer le nombre de roues pour cette pompe, on doit effectuer le calcul comme suit :

$$Q = p.Q' \Rightarrow p = \frac{Q}{Q'} = \frac{0{,}5}{0{,}0741} = 6{,}748 \approx 7 \text{ roues}$$

$$N_S = n.\frac{\left(\frac{Q}{p}\right)^{1/2}}{H^{3/4}} \Rightarrow \left(\frac{Q}{p}\right)^{1/2} = \left(N_S.\frac{H^{3/4}}{n}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{Q}{p}\right) = \left(N_S.\frac{H^{3/4}}{n}\right)^2 \Rightarrow p = \frac{Q}{\left(N_S.\frac{H^{3/4}}{n}\right)^2}$$

$$p=\left(\frac{n}{N_S}\right)^2\frac{Q}{H^{3/2}}=\left(\frac{1400}{50}\right)^2\frac{0,5}{(15)^{3/2}}=6,748$$

L'installation de pompage doit composer de 7 pompes en parallèle pour qu'elle puisse répondre aux exigences de la troisième commande.

Exercice n° :4

Pour prévoir le comportement d'une petite pompe à huile, on fait des essais sur un modèle utilisant l'air. La pompe à huile doit être mue par un moteur de 1/20 CV à 1800 tours/min et on dispose d'un moteur de 1/4 CV pour faire tourner la pompe à air à 600 tours/min.

Prenant pour densité de l'huile 0,912 et pour masse volumique de l'air (constante)=1,227 kg masse/m^3

Quelle est la taille que doit avoir le modèle ?

Solution

Nous avons l'air et l'huile de densités différentes, ce qui oblige de suivre de faire ce qui suit.

La relation de la puissance de la pompe s'écrit:

$$P=\rho.g.Q.H$$

Lorsqu'elle pompe de l'huile c'est la pompe réelle et l'expression de la puissance devient :

$$(P)_r=(\rho)_r.g.(Q)_r(H)_r=(\rho)_r.g.\frac{2\pi}{60}.(n)_r.((D_2)_r)^3.\left(\frac{2\pi(n)_r}{60}\frac{(D_2)_r}{2}\right)^2$$

Lorsqu'elle pompe de l'air, on la considère comme modèle et la relation de la puissance devient :

$$(P)_m=(\rho)_m.g.(Q)_m(H)_m=(\rho)_m.g.\frac{2\pi}{60}.(n)_m.((D_2)_m)^3.\left(\frac{2\pi(n)_m}{60}\frac{(D_2)_m}{2}\right)^2$$

Le rapport entre les deux puissances permet d'écrire :

$$\frac{(P)_r}{(P)_m}=\frac{(\rho)_r.g.\frac{2\pi}{60}.(n)_r.((D_2)_r)^3\left(\frac{2\pi(n)_r}{60}\frac{(D_2)_r}{2}\right)^2}{(\rho)_m.g.\frac{2\pi}{60}.(n)_m.((D_2)_m)^3\left(\frac{2\pi(n)_m}{60}\frac{(D_2)_m}{2}\right)^2}=\frac{(\rho)_r}{(\rho)_m}.\left(\frac{(n)_r}{(n)_m}\right)^3.\left(\frac{(D_2)_r}{(D_2)_m}\right)^5$$

$$\Rightarrow((D_2)_m)^5=\frac{(\rho)_r}{(\rho)_m}.\left(\frac{(n)_r}{(n)_m}\right)^3.\frac{(P)_m}{(P)_r}.((D_2)_r)^5=\frac{912}{1,227}\left(\frac{1800}{600}\right)^3\frac{1/4}{1/20}((D_2)_r)^5$$

$$(D_2)_m=\left(\frac{912}{1,227}\left(\frac{1800}{600}\right)^3\frac{1/4}{1/20}\right)^{1/5}(D_2)_r\Rightarrow(D_2)_m=(100342,298)^{1/5}(D_2)_r$$

$$(D_2)_m=10(D_2)_r$$

La roue modèle doit être dix fois plus grande que la roue réelle.

Exercice n° :5

Une pompe centrifuge fournit 0,070 m^3/s contre une charge de 7,5 m à 1450 tours/min, et nécessite 9,0 CV. Si la vitesse est réduite à 1200 tours/min.

Calculer le débit, la charge et la puissance en supposant le rendement inchangé.

Solution

Calcul du débit

$$\frac{(Q)_I}{(Q)_{II}}=\frac{(n)_I}{(n)_{II}}\frac{((D_2)_I)^3}{((D_2)_{II})^3}$$

$$(D_2)_I = (D_2)_{II} \Rightarrow \frac{(Q)_I}{(Q)_{II}} = \frac{(n)_I}{(n)_{II}} \Rightarrow (Q)_{II} = \frac{(n)_{II}}{(n)_I}(Q)_I$$

$$(Q)_{II} = \frac{1200}{1450}.0{,}070 = 0{,}05793\ m^3/s$$

Calcul de la charge

$$\frac{(H)_I}{(H)_{II}} = \left(\frac{(n)_I}{(n)_{II}}\right)^2 \Rightarrow (H)_{II} = \left(\frac{(n)_{II}}{(n)_I}\right)^2.(H)_I = \left(\frac{1200}{1450}\right)^2.7{,}5 = 5{,}1367\ m$$

Calcul de la puissance

$$\frac{(P)_I}{(P)_{II}} = \left(\frac{(n)_I}{(n)_{II}}\right)^3 \Rightarrow (P)_{II} = \left(\frac{(n)_{II}}{(n)_I}\right)^3.(P)_I = \left(\frac{1200}{1450}\right)^3.9 = 5{,}1013\ CV$$

Exercice n°6

On a besoin de fournir 1225 l/min. En travaillant contre une charge de 126 m à 3600 tours /min. En admettant que la pompe a un rendement acceptable et que la vitesse spécifique du rotor est comprise entre 6000 et 19000 tours/min, quand le débit Q est exprimé en l/min, combien d'étages de pompage doit on utiliser ?

Solution

$$N_S = n.\frac{Q^{1/2}}{H^{3/4}} = 3600\frac{(1225)^{1/2}}{(126)^{3/4}} = 3350{,}37$$

Cette valeur est trop faible par rapport, on doit diminuer la valeur de H pour augmenter la valeur de Ns.

Essayons pour 2 étages

$$N_S = n.\frac{Q^{1/2}}{H'^{3/4}} = 3600\frac{(1225)^{1/2}}{(63)^{3/4}} = 5634{,}6265$$

C'est une valeur qui n'appartient pas à la gamme 6000-19000.

Essayons 3 étages

$$N_S = n.\frac{Q^{1/2}}{H'^{3/4}} = 3600\frac{(1225)^{1/2}}{(42)^{3/4}} = 7637{,}1897$$

Essayons 4 étages

$$N_S = n.\frac{Q^{1/2}}{H'^{3/4}} = 3600\frac{(1225)^{1/2}}{(31{,}5)^{3/4}} = 9476{,}2744$$

Essayons 5 étages

$$N_S = n.\frac{Q^{1/2}}{H'^{3/4}} = 3600\frac{(1225)^{1/2}}{(31{,}5)^{3/4}} = 11202{,}6338$$

Il existe plusieurs étages de pompage pour lesquels les valeurs de Ns restent dans la gamme donnée. Pour avoir un nombre d'étages optimal il faut faire une étude technico-économique.

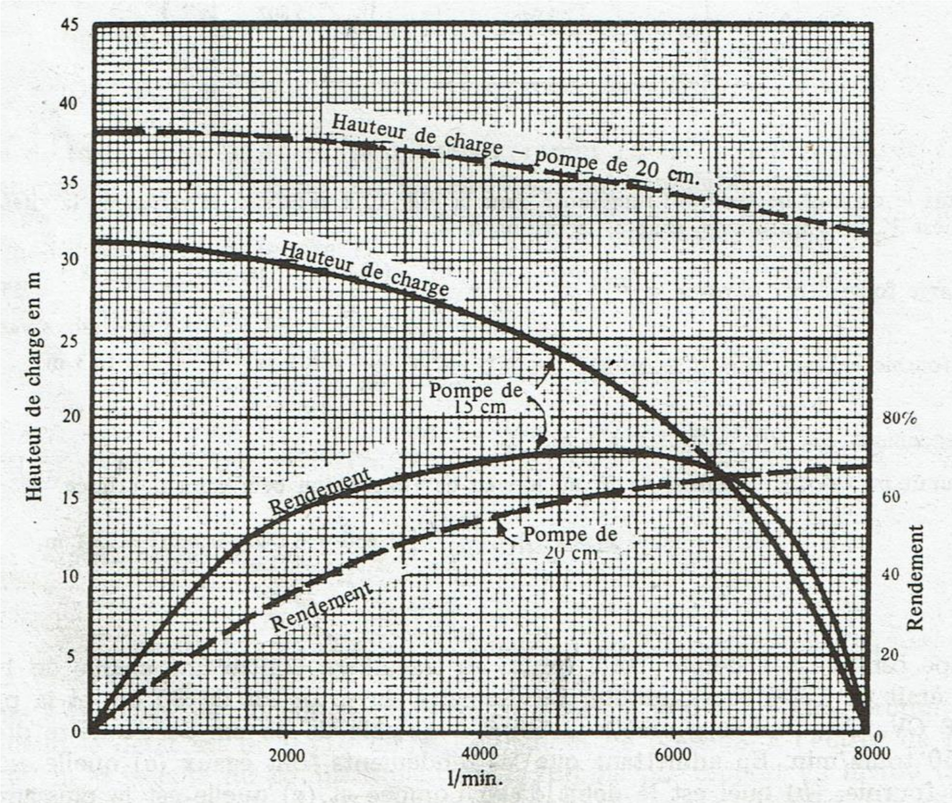
Exercice n°7

Une pompe de 15 cm produit 5200 litres/minute, en travaillant contre une charge de 22,5 m quand elle tourne à 1750 tours/minute. On a représenté sur la figure suivante, les courbes représentatives de la hauteur de charge en fonction du débit et la courbe de rendement.

Pour une pompe géométriquement semblable de 20 cm de diamètre tournant à 1450 tours/minute et produisant 7200 litres/minute. Déterminer :

a) La hauteur de charge probable fournie par la pompe est de 20 cm,

b) en admettant que la courbe du rendement est identique pour la pompe de 20 cm, Quelle est la puissance nécessaire pour avoir un débit de 7200 litres/minute.



Solution

a) Calcul de la hauteur de charge probable fournie par la pompe de 20 cm de diamètre et qui refoule 7200 l/min.

Deux pompes géométriquement semblables ont les caractéristiques identiques pour les débits qui se correspondent.

De la charge fournie de 22,5 m contre laquelle travaille la pompe d'une roue de 15 cm de diamètre et tournant à 1750 tours /minute, nous obtenons la charge qui correspond à une pompe semblable tournant 1450 tours/ minute et de 20 cm de diamètre.

$$\frac{(H)_{15}}{(H)_{20}} = \left(\frac{(n)_{15}(D_2)_{15}}{(n)_{20}(D_2)_{20}}\right)^2 \Rightarrow (H)_{20} = \left(\frac{(n)_{20}(D_2)_{20}}{(n)_{15}(D_2)_{15}}\right)^2 (H)_{15}$$

$$(H)_{20} = \left(\frac{1450.0,2}{1750.0,15}\right)^2 22,5 = 27,46 \text{ m}$$

Du débit donné de 5200 l/s de la roue de 15 cm de diamètre tournant à 1750 tours /minute, nous obtenons le débit qui correspond à une pompe semblable tournant à 1450 tours/ minute et de 20 cm de diamètre.

$$\frac{(Q)_{15}}{(Q)_{20}} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right).\left(\frac{(D_2)_{15}}{(D_2)_{20}}\right)^3 \Rightarrow (Q)_{20} = \left(\frac{n_2}{n_2}\right).\left(\frac{(D_2)_{20}}{(D_2)_{15}}\right)^3 (Q)_{15}$$

$$(Q)_{20} = \left(\frac{1450}{1750}\right).\left(\frac{0,2}{0,15}\right)^3 .5200 = 10212,91 \text{ litres/minute}$$

Pour avoir la charge qui correspond à un débit de 7200 l/min pour la pompe tournant à 1750 tours /min, on doit nécessairement passer par le traçage de la courbe de cette dernière en se basant sur quelques valeurs du débit de la pompe de 15 cm de diamètre, par la suite, nous calculons les valeurs de la charge et du débit correspondantes.

Pompe de 15 cm de diamètre (n=1750trs/min)			Pompe de 20 cm de diamètre ; n=1450trs/min)		
Q (l/min)	H (m)	Rendement (η%)	Q (l/min)	H (m)	Rendement (η%)
0	31	4	0,00	37,84	4
2000	29,5	54	3928,04	36,00	54
3200	28	64	6284,87	34,17	64
4000	26	68	7856,08	31,73	68
5200	22,5	70	10212,91	27,46	70
6400	17	67	12569,74	20,75	67

D'après la courbe donnant la charge en fonction des débits, de la pompe de 20 cm de diamètre, pour Q=7200 l/min, la hauteur de charge est de 32,5 m.
b) Calcul de la puissance

$$P_u = \rho.g.H.Q = 1000.9{,}81.32{,}5.0{,}12 = 38259 \text{ watts} = 51{,}98 \text{ CV}$$
$$P_{abs} = \frac{P_u}{\eta} = \frac{51{,}98}{0{,}67} = 77{,}56 \text{ CV}$$

Exercice n° :8

Une pompe centrifuge radiale, accouplée directement à un moteur électrique et tournant à une vitesse de rotation de 1460 tr/min, est destinée à relever un débit de 50 l/s à une hauteur de 30 m. Sachant que les caractéristiques de la roue sont :
D_2=0,315 m, b_2=0,020 m, β_2=160°
On demande de :
1/ Tracer la courbe de caractéristique théorique de la pompe : H_{th}=f(Q) théoriques dans ces cas ?
2/Déterminer : V_{2r}, V_{2u}, v_2, α_2 ?
3/Tracer le diagramme des vitesses à la sortie de la roue (avec précision) ?
4 /Donner l'allure des courbes caractéristiques théoriques dans les cas où : β_2=90° et β_2>90° ?
5/Tracer la courbe caractéristique réelle : $H_{réel}$=f(Q) *?*
6/ On veut construire une pompe semblable au 1/5 de la première et tournant à la même vitesse de rotation, Quelle sera sa hauteur théorique maximale et son diamètre extérieur de la roue ?

Solution

1/ Traçage de la courbe caractéristique théorique de la pompe.
La hauteur d'élévation théorique de la pompe est donnée par :

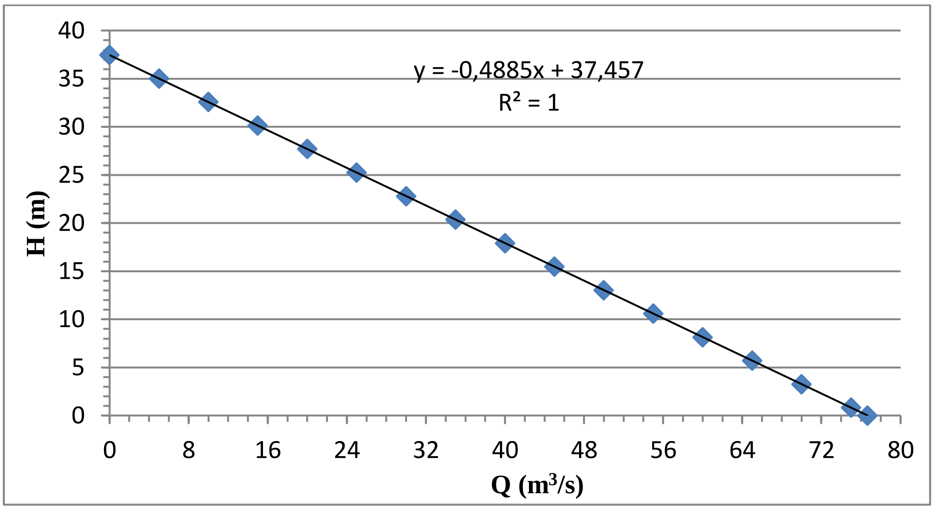
$$H_{théorique} = \frac{u_2^2}{g} + \frac{u_2}{\pi D_2 b_2 tg(\beta_2) g} Q$$

La vitesse de rotation $\omega = \frac{2\pi n}{60}$ en radians/seconde
Où n est le nombre de tours du moteur d'entrainement à la minute (tours/minute).

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi 1460}{60} = 68{,}667\pi \text{ rad/s}$$

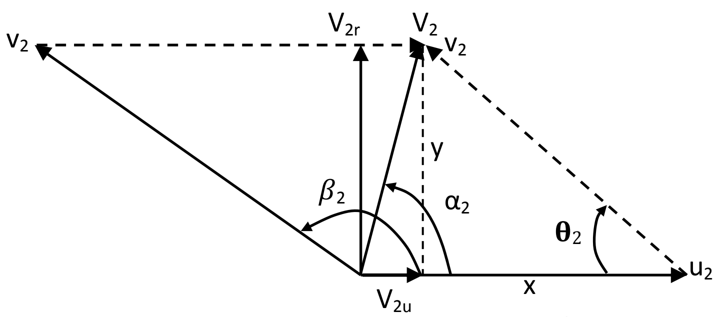
La vitesse circonférentielle u_2 est donnée en fonction de la vitesse angulaire par l'expression suivante :

$$u_2 = \omega.r_2 = 68{,}667\pi.0{,}1575 = 10{,}815\pi \text{ m/s}$$
$$H_{théorique} = 37{,}4574 - 488{,}5398Q$$
$$Q = 0 \Rightarrow H = 37{,}4574 \text{ m}$$
$$H_{théorique} = 0 \Rightarrow Q = 0{,}07667 \text{ m}^3/\text{s}$$



H $_{\text{théorique}}$ en f(Q)

2/Détermination de : V_{2r}, V_{2u}, v_2 et α_2



$$Q = V_{2r}.S = V_{2r}.\pi D_2 b_2 \Rightarrow V_{2r} = \frac{Q}{\pi D_2 b_2} = \frac{0{,}05}{3{,}14159265.0{,}31.0{,}02} = 2{,}567\ m/s$$

$$\theta_2 = \pi - \beta_2 = 180 - 160 = 20°$$

$$\cos(\theta_2) = \frac{x}{\|v_2\|} \Rightarrow x = \|v_2\|\cos(\theta_2) = 7{,}505.\cos(20°) = 7{,}052\ m/s$$

$$V_{2u} = u_2 - x = 33{,}976 - 7{,}052 = 26{,}924\ m/s$$

$$\sin(\theta_2) = \frac{y}{\|v_2\|} = \frac{\|V_{2r}\|}{\|v_2\|} \Rightarrow \|v_2\| = \frac{\|V_{2r}\|}{\sin(\theta_2)} = \frac{2{,}567}{\sin(20°)} = 7{,}505\ m/s$$

$$V_2^2 = V_{2r}^2 + V_{2u}^2 \Rightarrow V_2 = \sqrt{V_{2r}^2 + V_{2u}^2} = \sqrt{(2{,}567)^2 + (26{,}924)^2} = 27{,}064\ m/s$$

$$\sin(\alpha_2) = \frac{y}{\|V_2\|} = \frac{\|V_{2r}\|}{\|V_2\|} = \frac{2{,}567}{27{,}064} = 0{,}09485 \Rightarrow \alpha_2 = 0{,}09499°$$

4/ Traçage de l'allure de la courbe théorique

Pour β_2=90°

$$H_{\text{théorique}} = \frac{u_2^2}{g} + \frac{u_2}{\pi D_2 b_2 tg(90°) g} Q = \frac{u_2^2}{g}$$

Pour β_2>90°

$$H_{\text{théorique}} = \frac{u_2^2}{g} + \frac{u_2}{\pi D_2 b_2 tg(90°) g} Q = \frac{u_2^2}{g} - AQ$$

Avec A une valeur réelle positive.

5/ Traçage de la courbe caractéristique réelle.

$$H_{réelle} = \frac{u_2^2}{g} + \frac{u_2}{\pi D_2 b_2 tg(\beta_2) g} Q - k_i \frac{v_2^2}{2g} - k_e \frac{V_2^2}{2g}$$

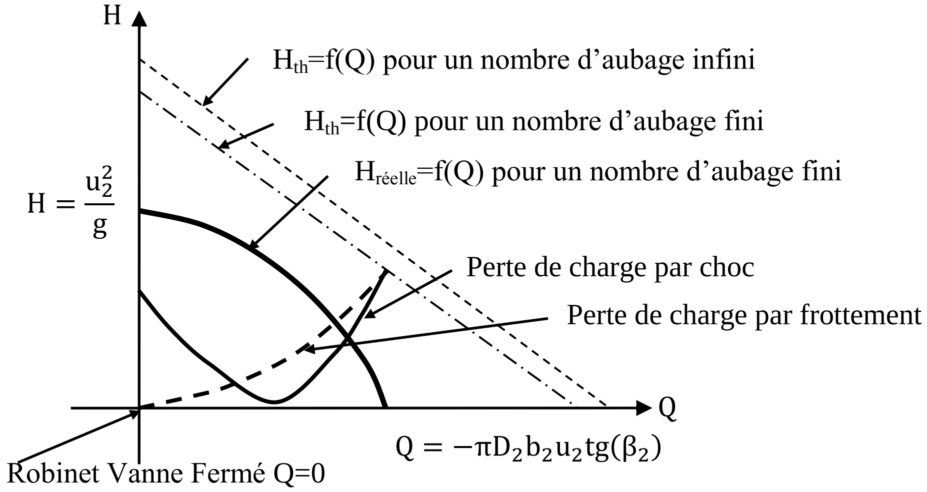
$$H_{réelle} = \frac{u_2^2}{g} + \frac{u_2}{\pi D_2 b_2 tg(\beta_2) g} Q - R_i Q^2 - R_e Q^2$$

7/ Calcul de la hauteur théorique maximale et son diamètre

$$H_{théorique} = \frac{1}{g} u_2 . V_2 . \cos\alpha_2 = \frac{1}{9{,}81} (33{,}976).(27{,}064).\cos(0{,}09499°) = 93{,}73 \text{ m}$$

$$\frac{(H)_{15}}{(H)_{20}} = \left(\frac{(n)_{315}(D_2)_{315}}{(n)_{63}(D_2)_{63}}\right)^2 \Rightarrow (H)_{63} = \left(\frac{(D_2)_{63}}{(D_2)_{315}}\right)^2 (H)_{315}$$

$$(H)_{20} = \left(\frac{0{,}063}{0{,}315}\right)^2 93{,}73 = 3{,}7492 \text{ m}$$



$$(D_2)_{63} = \frac{1}{5}(D_2)_{315} = 63 \text{ mm}$$

Chapitre VI : Phénomène de cavitation, causes, conséquences et calage

6.1. Définition et cause de la cavitation

La cavitation est la perturbation des veines liquides à l'intérieure d'une pompe, c'est-à-dire la formation de cavités ou de poches, bulles de vapeur ou du gaz dessous dans l'eau, dans une masse de liquide en écoulement.

6.2. Etude de la cavitation dans les différentes installations des pompes

6.2.1 Installation en dépression (aspiration)

$$\mathbf{(N.P.S.H)_d = \frac{p_{atm}}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g} - \left(h_a + \frac{V^2_{aspiration}}{2g} + \Delta H_{aspiration}\right)} \qquad \mathbf{(6.1)}$$

$$\frac{p_v}{\rho g} = h_v \text{ est la hauteur de la tension du liquide}$$

6.2.2. Installation en charge (forcée)

$$\mathbf{(N.P.S.H)_d = \frac{p_{atm}}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g} - \left(-h_a + \frac{V^2_{aspiration}}{2g} + \Delta H_{aspiration}\right)} \qquad \mathbf{(6.2)}$$

6.2.3. Installation de type siphon

Cette installation a une relation de $(NPSH)_d$ similaire à celle d'une installation en aspiration.

$$\mathbf{(N.P.S.H)_d = \frac{p_{atm}}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g} - \left(h_a + \frac{V^2_{aspiration}}{2g} + \Delta H_{aspiration}\right)} \qquad \mathbf{(6.3)}$$

6.3. Hauteur d'aspiration admissible

C'est la différence de cotes entre le niveau de l'axe de la pompe et le niveau minium du plan d'eau du réservoir d'aspiration pour laquelle la pompe ne cavite pas. Donc, il est obligatoire de déterminer sa valeur exactement. Elle liée au du type d'installation réalisée au niveau de la station de pompage (installation en aspiration ou en charge).

6.3.1. Installation en aspiration

La détermination de la hauteur d'aspiration admissible est reliée à l'expression suivante :

$$(N.P.S.H)_d = (N.P.S.H)_r + S$$

$$\mathbf{h_a^{admisssible} = \frac{p_{atm}}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g} - \frac{V^2_{aspiration}}{2g} - \Delta H_{aspiration} - (N.P.S.H)_r - S} \qquad \mathbf{(6.4)}$$

6.3.2. Installation en charge

$$\mathbf{h_a^{admisssible} = \frac{p_v}{\rho g} - \frac{p_{atm}}{\rho g} + \frac{V^2_{aspiration}}{2g} + \Delta H_{aspiration} + (N.P.S.H)_r + S} \qquad \mathbf{(6.5)}$$

6.4. Calage des pompes

6.4.1. Définition du calage d'une pompe

Le calage est de bien positionner l'axe de la pompe par rapport au plan d'eau du réservoir d'aspiration sans aucun risque de cavitation.

6.4.2. Installation en aspiration

Le niveau de l'axe de la pompe est égal au niveau minimum du réservoir d'aspiration plus la charge d'aspiration admissible moins une marge de sécurité.

$$\boldsymbol{\nabla}_{\textbf{axe de la pompe}} = \boldsymbol{\nabla}_{\textbf{minimum du réservoir}} + \mathbf{h_a^{admisssible}} - \mathbf{r} \qquad (\mathbf{6.6})$$

Avec r= (0,1÷0,3) m

$$\boldsymbol{\nabla}_{\textbf{axe de la pompe}} = \boldsymbol{\nabla}_{\textbf{minimum du réservoir}} + \left(\frac{\mathbf{p_{atm}}}{\boldsymbol{\rho}\mathbf{g}} - \frac{\mathbf{p_v}}{\boldsymbol{\rho}\mathbf{g}} - \frac{\mathbf{V^2_{aspiration}}}{\mathbf{2g}} - \boldsymbol{\Delta}\mathbf{H_{aspiration}} - (\mathbf{N.P.S.H})_\mathbf{r} - \mathbf{S}\right) - \mathrm{r} \qquad (6.7)$$

6.4.3. Installation en charge

$$\boldsymbol{\nabla}_{\textbf{axe de la pompe}} = \boldsymbol{\nabla}_{\textbf{minimum du réservoir}} - \mathbf{h_a^{admisssible}} + \mathbf{r} \qquad (\mathbf{6.8})$$

Où r= (0,1÷0,3) m.

$$\boldsymbol{\nabla}_{\textbf{axe de la pompe}} = \boldsymbol{\nabla}_{\textbf{minimum du réservoir}} - \left(\frac{\mathbf{p_v}}{\boldsymbol{\rho}\mathbf{g}} - \frac{\mathbf{p_{atm}}}{\boldsymbol{\rho}\mathbf{g}} + \frac{\mathbf{V^2_{aspiration}}}{\mathbf{2g}} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{H_{aspiration}} + (\mathbf{N.P.S.H})_\mathbf{r} + \mathbf{S}\right) + \mathbf{r} \qquad (\mathbf{6.9})$$

6.5. Détermination de la zone de cavitation

La détermination de la zone de cavitation s'avère d'une très grande importance pour éviter que le point de fonctionnement de notre système soit en dehors de cette zone. Donc le retraçage de la courbe $(N.P.S.H)_r$ en fonction du débit ainsi que $(NPSH)_d$ pour les mêmes valeurs du débit permettent d'avoir deux courbes qui se croisent.

A partir du point d'intersection de ces deux courbes, on trace une ligne verticale parallèle à l'axe des ordonnées, la zone se trouvant à droite de cette ligne s'appelle la zone de cavitation et cette à gauche la zone de non cavitation.

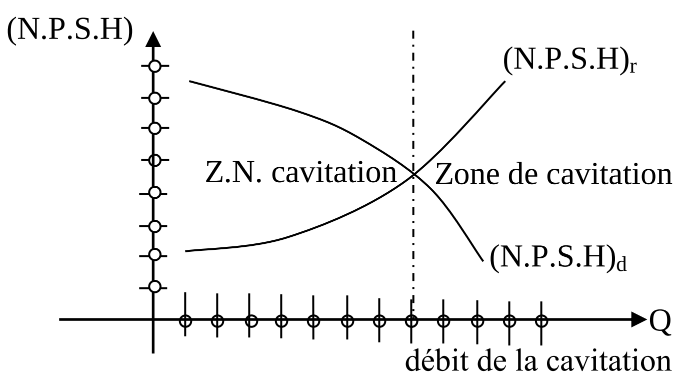


Fig.6.1 : Graphique du couple $(N.P.S.H)_d$ et $(N.P.S.H)_r$ requise en fonction du débit

Il faut que $(\mathrm{N.P.S.H})_\mathrm{d}$ soit $>$ $(\mathrm{N.P.S.H})_\mathrm{r}$ de quelques centimètres pour rester dans la bonne plage de fonctionnement (pour avoir un rendement optimal) tout en restant dans la zone de non cavitation.

6.6 Point de fonctionnement et débit de cavitation

La détermination du point de fonctionnement s'avère d'une très grande utilité, en effet, la projection du point de fonctionnement sur la courbe représentant $(NPSH)_r$ en fonction du débit permet d'avoir la valeur de (NPSH)r de notre système de pompage. Il faudrait avoir cette valeur en dessous de (NPSH)d de l'installation. Le point de fonctionnement également doit tomber dans la plage de bon fonctionnement de la pompe pour avoir un rendement optimal. Le débit du point de fonctionnement doit être inférieur au débit de cavitation pour être également à la plage de bon fonctionnement.

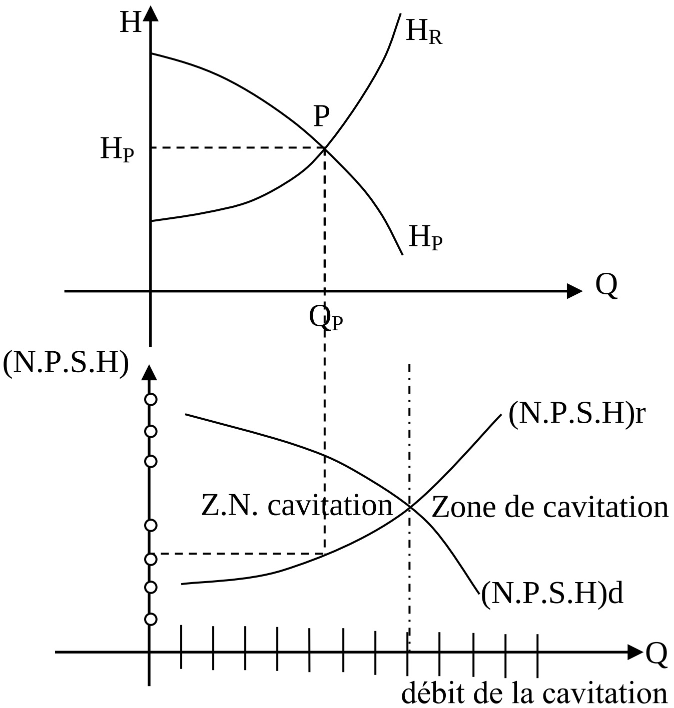


Fig. 6.2 : Point de fonctionnement et débit de cavitation

Exercice n° :1
Soit une pompe centrifuge radiale à l'aspiration en charge le niveau du plan d'eau dans le réservoir d'aspiration est à 1 m, au-dessus de l'axe de la pompe et dans celui du refoulement, il est à 10 m.
Sachant que les pertes de charge à l'aspiration sont estimées à 5 m, $(Va^2/2g)=0$, $h_v=0{,}1$ m, $(NPSH)_r=6{,}4$ m et que $(P_{atm}/\rho g)=10$ m.
Vérifier que la pompe est installée correctement vis-à-vis de la cavitation, sinon déterminer la hauteur admissible d'aspiration et le niveau de l'axe de la pompe ?
Solution

a) Vérification de l'installation de la pompe vis-à-vis la cavitation

La pompe est installée en charge et par conséquent, on doit vérifier si elle est installée correctement vis-à-vis la cavitation.
Pour ce faire, il faut que (N.P.S.H)d> (N.P.S.H)r
Pour une installation en charge le (N.P.S.H)d est donnée par l'expression suivante :

$$(\mathrm{N.P.S.H})_d = \frac{p_{atm}}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g} - \left(-h_a + \frac{V^2_{aspiration}}{2g} + \Delta H_{aspiration}\right)$$

$$(\mathrm{N.P.S.H})_d = 10 - 0{,}1 - (-1 + 0 + 5) = 5{,}9 \text{ m}$$

On constate que (N.P.S.H)d=5,9 m < (N.P.S.H)r=6,4 m d'où la pompe n'est pas installée correctement vis-à-vis le phénomène de la cavitation, elle nécessite une réinstallation pour l'éviter.

b) Détermination de la hauteur d'aspiration admissible

$$(\mathrm{N.P.S.H})_d > (\mathrm{N.P.S.H})_r$$

Pour être sûr on doit rajouter une marge de sécurité S.

$$(\mathrm{N.P.S.H})_d = (\mathrm{N.P.S.H})_r + S$$

$$h_a^{admisssible} = \frac{p_v}{\rho g} - \frac{p_{atm}}{\rho g} + \frac{V^2_{aspiration}}{2g} + \Delta H_{aspiration} + (\mathrm{N.P.S.H})_r + S$$

On prend dans ce cas S=0,1 m (Faible variation du niveau du plan d'eau et de la température du liquide).

$$h_a^{admisssible} = 0{,}1 - 10 + 0 + 5 + 6{,}4 + 0{,}1 = 1{,}6 \text{ m}$$

Exercice n°2
On veut élever un débit horaire de 1800 m^3, avec une pompe monocellulaire située à 500 m d'altitude, la hauteur d'aspiration est de 1,7 m.
1) Vérifier si cette pompe ne cavite pas (installée correctement vis-à-vis la cavitation) dans les cas :

- d'une installation en aspiration
- d'une installation en charge

Sinon, déterminer la hauteur d'aspiration admissible ainsi que la cote de l'axe de la pompe.
On donne :

- ▼eau.min = 39 m
- (NPSH)r=4,3 m
- hv=0,2 m
- $P_{atm}/\rho g=10{,}39-0{,}00139H$

Avec H : la cote du lieu de pompage

- Pertes de charge à l'aspiration =2 m
- $Va^2/2g=0$

3) Si la perte de charge à l'aspiration =5 m et la hauteur d'aspiration est de 1 m, vérifier pour, les deux installations, la situation de la pompe vis-à-vis la cavitation ?

Solution

1) Vérification de l'installation vis-à-vis le phénomène de cavitation

a) Cas d'une installation en aspiration

Pour éviter tous risques de cavitation il faut que la charge totale nette d'aspiration admissible soit supérieure à la charge totale nette d'aspiration requises.

$$(N.P.S.H)_d > (N.P.S.H)_r$$

$$(N.P.S.H)_d = \frac{p_{atm}}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g} - \left(h_a + \frac{V^2_{aspiration}}{2g} + \Delta H_{aspiration}\right)$$

$$\frac{p_{atm}}{\rho g} = 10{,}39 - 0{,}00139H = 10{,}39 - 0{,}0013.500 = 9{,}695 \text{ m}$$

$$\frac{p_v}{\rho g} = h_v = 0{,}2 \text{ m};\ h_a = 1{,}7 \text{ m};\ \frac{V^2}{2.g} = 0;\ \Delta H_{aspiration} = 2 \text{ m}$$

$$(N.P.S.H)_d = 9{,}695 - 0{,}2 - (1{,}7 + 0 + 2) = 5{,}795 \text{ m}$$

$$(N.P.S.H)_d = 5{,}795 > (N.P.S.H)_r = 4{,}3 \text{ m}$$

La condition est vérifiée d'où il n'y a aucun risque de cavitation.

b) Cas d'une installation en charge

$$(N.P.S.H)_d = \frac{p_{atm}}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g} - \left(-h_a + \frac{V^2_{aspiration}}{2g} + \Delta H_{aspiration}\right)$$

$$(N.P.S.H)_d = 9{,}695 - 0{,}2 - (-1{,}7 + 0 + 2) = 9{,}195 \text{ m}$$

$$(N.P.S.H)_d = 9{,}195 > (N.P.S.H)_r = 4{,}3 \text{ m}$$

La condition est vérifiée d'où il n'y a aucun risque de cavitation.

2) Détermination de la hauteur d'aspiration admissible et de la cote de l'axe de la pompe

Le risque de caviation n'existe pas et par conséquent on peut garder la hauteur d'aspiration, ha, comme la hauteur d'aspiration admissible.

a) Cas d'une installation en aspiration

$$\nabla_{\text{axe de pompe}} = \nabla_{\text{minimum du plan d'eau}} + h_a^{adm} - r$$

Prenons r=0,3 m.

$$\nabla_{\text{axe de pompe}} = 39 + 1{,}7 - 0{,}3 = 40{,}4 \text{ m}$$

a) Cas d'une installation en charge

$$\nabla_{\text{axe de pompe}} = \nabla_{\text{minimum du plan d'eau}} - h_a^{adm} + r$$

Prenons r=0,3 m.

$$\nabla_{\text{axe de pompe}} = 39 - 1{,}7 + 0{,}3 = 37{,}6 \text{ m}$$

3) Vérification de la cavitaion

a) Cas d'une installation en aspiration

$$(N.P.S.H)_d = \frac{p_{atm}}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g} - \left(h_a + \frac{V^2_{aspiration}}{2g} + \Delta H_{aspiration}\right)$$

$$\frac{p_{atm}}{\rho g} = 10{,}39 - 0{,}00139H = 10{,}39 - 0{,}0013.500 = 9{,}695 \text{ m}$$

$$\frac{p_v}{\rho g} = h_v = 0{,}2 \text{ m};\ h_a = 1 \text{ m};\ \frac{V^2}{2.g} = 0;\ \Delta H_{aspiration} = 5 \text{ m}$$

$$(N.P.S.H)_d = 9{,}695 - 0{,}2 - (1 + 0 + 5) = 3{,}495 \text{ m}$$

$$(N.P.S.H)_d = 3{,}495 < (N.P.S.H)_r = 4{,}3 \text{ m}$$

d'où la pompe cavite et pour éviter ce phénomène on doit réinstaller la pompe en cherchant la hauteur d'aspiration admissible.

$$h_a^{admisssible} = \frac{p_{atm}}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g} - \frac{V_{aspiration}^2}{2g} - \Delta H_{aspiration} - (N.P.S.H)_r - S$$

Prenons S=0,1 m

$$h_a^{admisssible} = 9{,}695 - 0{,}2 - 0 - 5 - 4{,}3 - 0{,}1 = 0{,}095 \text{ m}$$

$$\nabla_{axe\ de\ pompe} = \nabla_{minimum\ du\ plan\ d'eau} + h_a^{adm} - r$$

Prenons r=0,3 m.

$$\nabla_{axe\ de\ pompe} = 39 + 0{,}095 - 0{,}3 = 38{,}795 \text{ m}$$

b) Cas d'une installation en charge

$$(N.P.S.H)_d = \frac{p_{atm}}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g} - \left(-h_a + \frac{V_{aspiration}^2}{2g} + \Delta H_{aspiration}\right)$$

$$\frac{p_{atm}}{\rho g} = 10{,}39 - 0{,}00139H = 10{,}39 - 0{,}0013.500 = 9{,}695 \text{ m}$$

$$\frac{p_v}{\rho g} = h_v = 0{,}2 \text{ m};\ h_a = 1 \text{ m};\ \frac{V^2}{2.g} = 0;\ \Delta H_{aspiration} = 5 \text{ m}$$

$$(N.P.S.H)_d = 9{,}695 - 0{,}2 - (-1 + 0 + 5) = 5{,}495 \text{ m}$$

$$(N.P.S.H)_d = 5{,}495 > (N.P.S.H)_r = 4{,}3 \text{ m}$$

d'où la pompe n'a aucun risque de cavitation

$$\nabla_{axe\ de\ pompe} = \nabla_{minimum\ du\ plan\ d'eau} - h_a^{adm} + r$$

Prenons r=0,3 m.

$$\nabla_{axe\ de\ pompe} = 39 - 1 + 0{,}3 = 38{,}30 \text{ m}$$

Exercice n° :3

Soit une pompe installée en charge dont le plan d'eau est de 42 m, la hauteur d'aspiration est de 1,70 m

1/ Vérifier que si la pompe est installée correctement du point de vue cavitation ?

2/Déterminer la cote de l'axe de la pompe pour quelle soit bien calée et sans risque de cavitation ?

Données :

a) Pertes de charge d'aspiration 5,86 m
b) Tension de vapeur du liquide (Pv/ρg)=0,24 m pour une température de 20°
c) La cote absolue du lieu de pompage est de 1000 m, dont la pression atmosphérique (Patm/ρg)=8,9 m
d) (NPSH)r=4,80 m pour un débit donné de 20 m^3/h
e) (Va/2g)=0

Solution

Pour éviter tous risque de cavitation il faut que

$$(N.P.S.H)_d > (N.P.S.H)_r$$

$$(N.P.S.H)_d = \frac{p_{atm}}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g} - \left(-h_a + \frac{V_{aspiration}^2}{2g} + \Delta H_{aspiration}\right)$$

$$\frac{p_{atm}}{\rho g} = 8{,}9;\ \frac{p_v}{\rho g} = h_v = 0{,}24 \text{ m};\ h_a = 1{,}7 \text{ m};\ \frac{V^2}{2.g} = 0;\ \Delta H_{aspiration} = 5{,}86 \text{ m}$$

$$(N.P.S.H)_d = 8{,}9 - 0{,}24 - (-1{,}7 + 0 + 5{,}86) = 4{,}5 \text{ m}$$

$$(N.P.S.H)_d = 4{,}5 < (N.P.S.H)_r = 4{,}8 \text{ m}$$

D'où la pompe est en risque de cavitation.

$$h_a^{admisssible} = \frac{p_v}{\rho g} - \frac{p_{atm}}{\rho g} + \frac{V_{aspiration}^2}{2g} + \Delta H_{aspiration} + (N.P.S.H)_r + S$$

Prenons s=0,1

$$h_a^{admisssible} = 0,24 - 8,9 + 0 + 5,86 + 4,8 + 0,1 = 2,1\ m$$
$$\nabla_{axe\ de\ pompe} = \nabla_{minimum\ du\ plan\ d'eau} - h_a^{adm} + r$$

Prenons r=0,2 m.

$$\nabla_{axe\ de\ pompe} = 42 - 2,1 + 0,2 = 40,10\ m$$

Exercice n° :4

Soit une pompe installée en aspiration dont le plan d'eau est de 42 m, la hauteur d'aspiration est de 1,74 m

1/ Vérifier que si la pompe est installée correctement du point de vue cavitation ?

2/Déterminer la cote de l'axe de la pompe pour quelle soit bien calée et sans risque de cavitation ?

Données :

f) Pertes de charge d'aspiration 3,84m
g) Tension de vapeur du liquide (Pv/ρg)=0,23 m pour une température de 20°
h) La cote absolue du lieu de pompage est de 400 m, dont la pression atmosphérique (Patm/ρg)=9,8 m
i) (NPSH)r=4,20 m pour un débit donné de 20 m^3/h

(Va/2g)=0

Solution

Pour éviter tous risque de cavitation il faut que

$$(N.P.S.H)_d > (N.P.S.H)_r$$
$$(N.P.S.H)_d = \frac{p_{atm}}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g} - \left(h_a + \frac{V_{aspiration}^2}{2g} + \Delta H_{aspiration}\right)$$
$$\frac{p_{atm}}{\rho g} = 9,8;\ \frac{p_v}{\rho g} = h_v = 0,23\ m;\ h_a = 1,74\ m;\ \frac{V^2}{2.g} = 0;\ \Delta H_{aspiration} = 3,84\ m$$
$$(N.P.S.H)_d = 9,8 - 0,23 - (1,74 + 0 + 3,84) = 3,99\ m$$
$$(N.P.S.H)_d = 3,99 < (N.P.S.H)_r = 4,2\ m$$

D'où la pompe est en risque de cavitation.

$$h_a^{admisssible} = \frac{p_{atm}}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g} - \frac{V_{aspiration}^2}{2g} - \Delta H_{aspiration} - (N.P.S.H)_r - S$$

Prenons s=0,1

$$h_a^{admisssible} = 9,8 - 0,23 - 0 - 3,84 - 4,2 - 0,1 = 1,43\ m$$
$$\nabla_{axe\ de\ pompe} = \nabla_{minimum\ du\ plan\ d'eau} + h_a^{adm} - r$$

Prenons r=0,2 m.

$$\nabla_{axe\ de\ pompe} = 42 + 1,43 - 0,2 = 43,23\ m$$

Exercice n° :5

Soit une installation en aspiration, avec les caractéristiques suivantes de la pompe :

$Hp=35-4000Q^2$

$Hc=15+3500Q^2$

Déterminer la hauteur d'aspiration maximale, sans avoir de cavitation, au point de fonctionnement, sachant que :

- $(NPSH)r=10+1000Q^2$
- hv=0,2m
- $P_{atm}/\rho g$=8,9m
- Pertes de charge à l'aspiration $=1500Q^2$
- $Va^2/2g=2.10^{-4}$m

- $(NPSH)d= (Patm/\rho g) –(Pv/\rho g)-ha- (Va^2 /2g)-hp(aspiration)$

Solution

Détermination du point de fonctionnement

Au point de fonctionnement la hauteur délivrée par la pompe est égale à la hauteur du réseau.

$$\mathrm{H} = \mathrm{Hc} \Rightarrow 35 - 4000\mathrm{Q}^2 = 15 + 3500\mathrm{Q}^2 \Rightarrow 20 = 7500\mathrm{Q}^2 \Rightarrow \mathrm{Q}^2 = \frac{20}{7500} \Rightarrow \mathrm{Q} = \sqrt{\frac{20}{7500}}$$

$$\mathrm{Q_A} = 0{,}0516\ \mathrm{m^3/s}$$

$$\mathrm{H_A} = 35 - 4000.(0{,}0516)^2 = 24{,}33\ \mathrm{m}$$

Calcul de la charge totale nette d'aspiration requis $(NPSH)_r$

$$(\mathrm{NPSH})_r = 10 + 1000.\mathrm{Q}^2 = 10 + 1000.(0{,}0516)^2 = 12{,}67\mathrm{m}$$

$$\Delta\mathrm{H_{asp}} = 1500\mathrm{Q}^2 = 1500.(0{,}0516)^2 = 4$$

$$\mathrm{NPSH})_d = \frac{p_{atm}}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g} - h_a - \left(\frac{V_a^2}{2g}\right) - \Delta\mathrm{H_{asp}} = 8{,}9 - 0{,}2 - h_a - 0{,}0002 - 4$$

Pour éviter tous risque de cavitation il faut garantir que $(NPSH)_d>(NPSH)_r$.

$$8{,}9 - 0{,}2 - h_a - 0{,}0002 - 4 > 12{,}67\mathrm{m} \Rightarrow 4{,}6998 - h_a > 12{,}67m \Rightarrow -h_a > 7{,}9702$$

Pour éviter tous risque de cavitation, il faudrait ha<7,9702 m.

Exercice n°6

La courbe des hauteurs manometriques H en fonction du débit Q d'une pompe centrifuge est une parabole à axe vertical donnée par la relation : $H_P=AQ^2+B$

H_P= 32 m pour Q=0 L/s

H_P=0 m pour Q=20 L/s

1) Déterminer A et B ?

La puissance absorbée varie linéairement avec le débit, $P_{absorbée}=A_1Q+B_1$, elle est de 1 Kw à Q=0 et 4Kw pour Q=15L/s.

2) Trouver A_1 et B_1 ?

La courbe caractéristique de la conduite est également une parabole à axe vertical donnée par la relation suivante : $H_C=A_2Q^2+B_2$

H_C=15 m pour Q=0 L/s

H_C=51 m pour Q=20 L/s

3) Déterminer A_2 et B_2 ?

4) Donner dans un tableau la hauteur manométrique H_P, H_C, la puissance absorbée ($P_{absorbée}$), la puissance utile (P_{utile}) et le rendement (η) pour un débit varié de 0 à 16 L/s (Prendre un pas de 1 L/s et g=9,81 m/s^2)

5) Tracer les courbes $H_P=f(Q)$, $H_C=f(Q)$, $P_{absorbée}=f(Q)$, $P_{utile}=f(Q)$ et $\eta=f(Q)$?

6) Trouver le point de fonctionnement

a) à partir du tableau
b) à partir des graphes
c) analytiquement ?

7) Donner la plage de meilleur fonctionnement de cette pompe ?

8) La pompe est installée en charge dont le plan d'eau est de 42 m, la hauteur d'aspiration est de 1,70 m.

a) Vérifier si la pompe est installée correctement du point de vue cavitation ?
b) Déterminer la cote de l'axe de la pompe pour qu'elle soit bien calée et sans le risque de cavitation ?

Données :

- Les pertes de charge d'aspiration =5,86 m
- La température du liquide est de 10°C ; Tension de vapeur du liquide h_V= ? m
- La cote absolue de la cote du pompage est de 1000 m, dont la pression atmosphérique Patm/ρg= ? m.
- (NPSH)r=4,80 m pour un débit de 15 L/s ?
- $Va^2/2g \approx 0$
- (NPSH)d= (Patm/ρg) –(Pv/ρg)+ha- (Va^2/2g)-hp(aspiration)

Solution

1) Détermination de A et B

$$H_P = AQ^2 + B$$
$$32 = A(0)^2 + B \Rightarrow B = 32$$
$$0 = A(20)^2 + B \Rightarrow A = -\frac{B}{(20)^2} = -\frac{32}{400} = -0{,}08$$
$$H_P = -0{,}08Q^2 + 32$$

2) Détermination de A_1 et de B_1

$$P_{Abs} = A_1Q + B_1$$
$$P_{Abs} = 1 = A_1(0) + B_1 \Rightarrow B_1 = 1$$
$$P_{Abs} = 4 = A_1(15) + B_1 \Rightarrow A_1 = \frac{4 - B_1}{15} = \frac{3}{15} = 0{,}2$$
$$P_{Abs} = 0{,}2Q + 1$$

3) Détermination de A_2 et de B_2

$$H_C = A_2Q^2 + B_2$$
$$H_C = 15 = A_2(0)^2 + B_2 \Rightarrow B_2 = 15$$
$$H_C = 51 = A_2(20)^2 + B_2 \Rightarrow A_2 = \frac{51 - 15}{400} = 0{,}09$$
$$H_C = 0{,}09Q^2 + 15$$

4) Tableau des paramètres à calculer

Q (l/s)	Hc (m)	Hp (m)	Pabs (Kw)	Put (Kw)	Rendement (%)
0	15	32	1,0000	0,0000	0,0000
1	15,09	31,92	1,2000	0,3131	26,0946
2	15,36	31,68	1,4000	0,6216	44,3973
3	15,81	31,28	1,6000	0,9206	57,5357
4	16,44	30,72	1,8000	1,2055	66,9696
5	17,25	30	2,0000	1,4715	73,5750
6	18,24	29,12	2,2000	1,7140	77,9092
7	19,41	28,08	2,4000	1,9283	80,3439
8	20,76	26,88	2,6000	2,1095	81,1362
9	22,29	25,52	2,8000	2,2532	80,4700
10	24	24	3,0000	2,3544	78,4800
11	25,89	22,32	3,2000	2,4086	75,2672
12	27,96	20,48	3,4000	2,4109	70,9090
13	30,21	18,48	3,6000	2,3568	65,4654
14	32,64	16,32	3,8000	2,2414	58,9839
15	35,25	14	4,0000	2,0601	51,5025
16	38,04	11,52	4,2000	1,8082	43,0519

6) Recherche du point de fonctionnement

$$H_P = H_C \Rightarrow -0{,}08Q^2 + 32 = 0{,}09Q^2 + 15 \Rightarrow 0{,}017Q^2 = 17 \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{17}{0{,}17}} = 10\ l/s$$

$$H_A = -0{,}08.(10)^2 + 32 = 24\ \mathrm{m}$$

Le point de fonctionnement (Q_A, H_A)= (10 l/s, H=24 m).

7) La plage de bon fonctionnement de cette pompe

Prendre à partir du tableau le plus grand rendement puis rechercher le débit qui le correspond, par la suite retrancher et rajouter 10 % de ce débit en suite faire la projection sur la courbe du rendement, hachurer la zone comprise entre ces deux débits, cette zone hachurée est la plage de fonctionnement.

Pour notre cas, le rendement maximum est égale à 81,1362 %, il correspond à un débit de 8 l/s. la plage de bon fonctionnement se trouve entre [7,2 l/s et 8,8 l/s] qui correspond à une plage de rendement comprise entre [80,6274 %, 80,7129].

Pour éviter tous risque de cavitation il faut que

$$(\mathrm{N.P.S.H})_d > (\mathrm{N.P.S.H})_r$$

$$(\mathrm{N.P.S.H})_d = \frac{p_{atm}}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g} - \left(-h_a + \frac{V^2_{aspiration}}{2g} + \Delta H_{aspiration}\right)$$

$$\frac{p_{atm}}{\rho g} = 10{,}181;\ \frac{p_v}{\rho g} = h_v = 0{,}125\ \mathrm{m};\ h_a = 1{,}7\ \mathrm{m};\ \frac{V^2}{2.g} = 0;\ \Delta H_{aspiration} = 5{,}86\ \mathrm{m}$$

$$(\mathrm{N.P.S.H})_d = 10{,}181 - 0{,}125 - (-1{,}7 + 0 + 5{,}86) = 5{,}896\ \mathrm{m}$$

$$(\mathrm{N.P.S.H})_d = 5{,}896 > (\mathrm{N.P.S.H})_r = 4{,}8\ \mathrm{m}$$

D'où la pompe n'est pas en risque de cavitation.

$$\nabla_{\text{axe de pompe}} = \nabla_{\text{minimum du plan d'eau}} - h_a^{adm} + r$$

Prenons r=0,2 m.

$$\nabla_{\text{axe de pompe}} = 42 - 1{,}7 + 0{,}2 = 40{,}50\ \mathrm{m}$$

Chapitre VII : Modes de réglage des débits des pompes

7.1. Les différents modes de réglage

En pratique, il existe trois modes de réglage: réglage quantitatif, qualitatif et le rognage.

7.1.1 Rognage

Le rognage est une technique pratique utilisée pour minimiser le débit délivré par la pompe afin de l'égaliser à celui demandé par le réseau.

Le rognage est la diminution, de quelques millimètres, du diamètre extérieur de la roue de la pompe, D_2, en gardant la même vitesse de rotation de la roue (n=constante) et la même distance entre les deux flasques (b_2= constante).

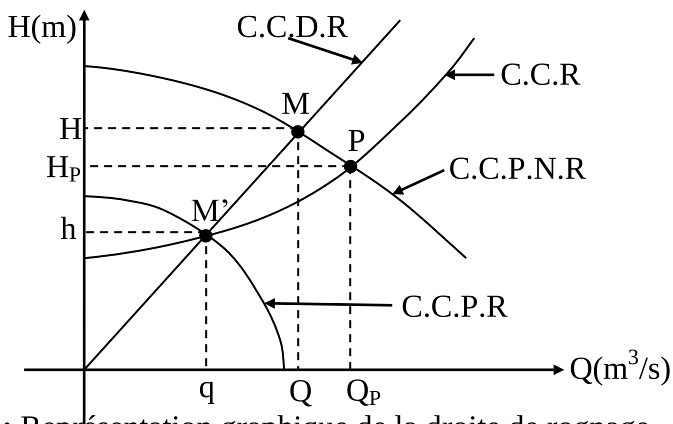


Fig. 7.1 : Représentation graphique de la droite de rognage.

Traçons la courbe caractéristique de la pompe à roue rognée (C.C.P.R) en se basant sur la première loi de similitude.

$$\frac{H_1}{H_2} = \left(\frac{n_1}{n_2} . \frac{D_{21}}{D_{22}}\right)^2 = \left(\frac{D_{21}}{D_{22}}\right)^2 \Rightarrow H_2 = \left(\frac{D_{22}}{D_{21}}\right)^2 H_1 \qquad (7.1)$$

Prenons plusieurs valeurs de H_1 pour avoir celles de H_2, du fait, qu'il ya une diminution du diamètre extérieur de la roue. Nous aurons sûrement, d'après l'expression précédente, une diminution de la hauteur de la charge délivrée par la pompe.

De la seconde loi de similitude, nous pouvons établir le rapport des débits.

$$\frac{(Q)_I}{(Q)_{II}} = \frac{\pi(D_2)_I(b_2)_I(V_{2r})_I}{\pi(D_2)_{II}(b_2)_{II}(V_{2r})_{II}} = \frac{(D_2)_I(b_2)_I(V_{2r})_I}{(D_2)_{II}(b_2)_{II}(V_{2r})_{II}} \qquad (7.2)$$

$(b_2)_I$ étant la distance entre les deux flasques à la sortie de la roue. Elle est pratiquement constante si $(b_2)_I$ ne varie pas le long du centre au rayon extérieur de la roue pour des rognages inférieur à 15 %, ce qui permet d'écrire la relation suivante:

$$\frac{(b_2)_I}{(b_2)_{II}} = 1 \qquad (7.3)$$

$$\frac{(Q)_I}{(Q)_{II}} = \frac{(D_2)_I(V_{2r})_I}{(D_2)_{II}(V_{2r})_{II}} = \frac{(D_2)_I}{(D_2)_{II}}\frac{(u_2)_I}{(u_2)_{II}} = \frac{(D_2)_I}{(D_2)_{II}}.\frac{\frac{2\pi(n)_I}{60}\frac{(D_2)_I}{2}}{\frac{2\pi(n)_{II}}{60}\frac{(D_2)_{II}}{2}} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right).\left(\frac{(D_2)_I}{(D_2)_{II}}\right)^2$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right).\left(\frac{D_{21}}{D_{22}}\right)^2 = \left(\frac{D_{21}}{D_{22}}\right)^2 \qquad (7.4)$$

D'une manière générale, nous extrairons H_2 en $F(Q_2)$ en se basant sur ces deux lois de similitude.

$$\frac{H_I}{H_{II}} = \left(\frac{D_{21}}{D_{22}}\right)^2 \text{ et } \frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{D_{21}}{D_{22}}\right)^2 \Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{H_1}{H_2} \Rightarrow H_2 = \frac{H_1}{Q_1}Q_2 \qquad (7.5)$$

$$\text{Posons } \frac{H_1}{Q_1} = A, \text{nous aurons } H_2 = A.Q_2 \text{ ou d'une manière générale } H = A.Q \qquad (7.6)$$

Cette dernière est une droite passant par l'origine appelée droite de rognage.

M(Q,H) est le point d'intersection de la droite de rognage et la courbe caractéristique de la pompe avant le rognage.

M'(q,h) est le point d'intersection de la droite de rognage et la nouvelle courbe caractéristique de la pompe après rognage de la roue. Le point M(Q,H) est homologue à M'(q,h).

Appliquant le théorème de Thalès nous obtenons :

$$\frac{H}{h} = \frac{Q}{q} \Rightarrow H = \frac{h}{q}Q \Rightarrow H = aQ$$

Cette dernière s'appelle l'équation de la droite de rognage.

Posons D_{21}=D et D_{22}=d nous aurons :

$$\frac{Q}{q} = \left(\frac{D}{d}\right)^2 \Rightarrow d = D.\sqrt{\frac{q}{Q}} \qquad (7.7)$$

Où d est le diamètre de la roue après rognage (roue rognée).

a) Coefficient de rognage

Le coefficient de rognage, m, est le rapport des diamètres après et avant le rognage.

$$m = \left(\frac{d}{D}\right) \qquad (7.8)$$

Il est également le rapport de la racine carrée du débit demandé au débit calculé pour $h=H_c$ c'est-à-dire au point d'intersection de la droite de rognage avec la courbe caractéristique de la conduite.

$$m = \sqrt{(q/Q)} \qquad (7.8')$$

b) Rendement de rognage

Le rendement du rognage est déterminé en fonction du coefficient de rognage par l'expression suivante:

$$R = (1 - m).100 \qquad (7.9)$$

Si le rendement du rognage est inférieur à 15 %, nous pouvons accepter ce mode de réglage et dans le cas contraire, nous dirons que ce mode n'est pas efficace, et par conséquent nous serons obligés d'opter pour un autre (une solution) mode de réglage.

7.1.2 Réglage qualitatif

Ce type de réglage intervient dans le cas où le débit appelé par le réseau est supérieur ou inférieur à celui garanti par la pompe au point de fonctionnement.

Ce mode de réglage consiste à diminuer ou à augmenter la vitesse de rotation de la roue. A cet effet, l'accouplement à la pompe d'un moteur électrique asynchrone c'est-à-dire à vitesse variable s'avère une nécessité absolue.

Ce mode de réglage reste fiable pour les deux cas, mais il peut entrainer une réduction de la durée de vie de la pompe et du moteur électrique.

7.1.2.1 Réduction de la vitesse de rotation

Ce mode réglage est basé sur la réduction de la vitesse de rotation de la roue entrainée par le moteur électrique en gardant le même diamètre extérieur de la roue. Afin d'avoir un débit de la pompe au point de fonctionnement très proche du débit demandé par le réseau sans modifier le bon fonctionnement. Ce réglage du débit de la pompe est appliqué lorsque le débit du réseau est inférieur au débit de la pompe ($Q_d<Q_P$).

a) Courbe de proportionnalité

La courbe de proportionnalité d'un réglage qualitatif est obtenue en utilisant les deux premières lois de similitude.

$$\frac{H_1}{H_2}=\left(\frac{n_1}{n_2}.\frac{D_{21}}{D_{22}}\right)^2=\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2$$

$$\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{n_1}{n_2}.\left(\frac{D_{21}}{D_{22}}\right)^3=\frac{n_1}{n_2}\Rightarrow\left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^2=\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2=\frac{H_1}{H_2}$$

$$\frac{H_1}{H_2}=\left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^2\Rightarrow H_2=\frac{H_1}{Q_1^2}Q_2^2 \qquad (7.10)$$

Après posons $H1/Q_1^2=A$, on peut écrire la dernière relation sous la forme suivante :

$$H=AQ^2 \qquad (7.11)$$

C'est une équation d'une parabole.

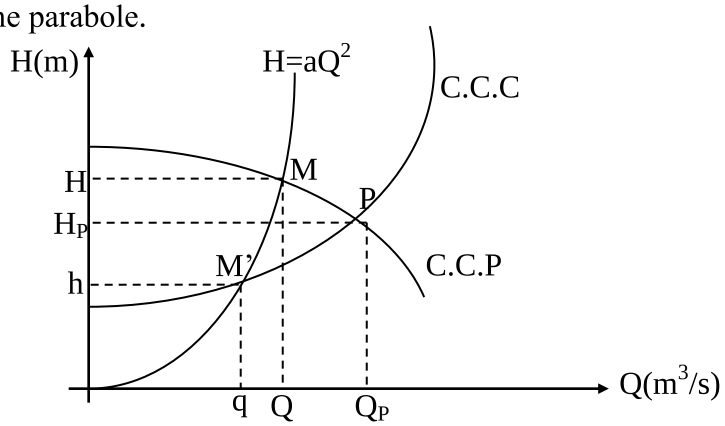


Fig.7.2 : Réglage qualitatif cas où Qd<Qp

M(Q,H) est le point d'intersection de la courbe de proportionnalité, $H=AQ^2$, et la courbe caractéristique de la pompe, ce point est homologue au point M'(Q,H).

Pour obtenir la vitesse de rotation réduite, nous suivrons

$$\frac{H_1}{H_2}=\left(\frac{n_1}{n_2}.\frac{D_{21}}{D_{22}}\right)^2=\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\Rightarrow\frac{H}{h}=\left(\frac{N}{n}\right)^2\Rightarrow n=N.\sqrt{\frac{h}{H}}\qquad(7.12)$$

Cette dernière est la nouvelle vitesse de rotation pour laquelle devrait tourner la roue pour avoir un débit de la pompe au point de fonctionnement égal à celui appelé par le réseau.

7.1.2.2 Augmentation de la vitesse de rotation

Lorsque le débit appelé est supérieur au débit de la pompe au point de fonctionnement (Q_d>Q_P), l'augmentation de la vitesse de rotation de la roue, dans la mesure du possible, s'avère parmi les solutions à n'est pas écartée. En effet, cette augmentation entraine une élévation du débit pompé. Toutefois, il faut assurer que cet accroissement de la vitesse de rotation doit maintenir le fonctionnement de la pompe dans les meilleures conditions.

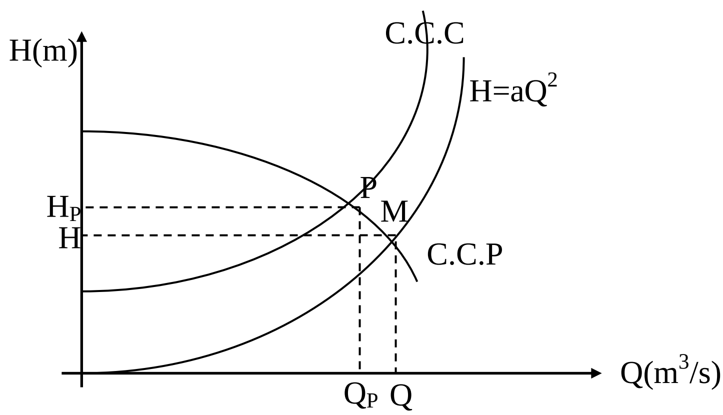


Fig.7.3 : Réglage qualitatif cas où Qd>Qp

$$\frac{H_p}{H}=\left(\frac{N}{n}\right)^2\Rightarrow n=N.\sqrt{\frac{H}{H_p}}\qquad(7.12.\text{bis})$$

7.1.3 Réglage quantitatif

Le réglage quantitatif conduit directement aux deux modes les plus couramment pratiqués qui sont le vannage et la réduction du temps de pompage du fait que ces deux techniques sont faciles à pratiquer.

7.1.3.1 Vannage

Le vannage est une technique beaucoup plus pratique qui consiste à la fermeture progressive de la vanne et donc l'ajout d'une perte de charge singulière qui relèvera la courbe caractéristique du réseau, ce qui portera le débit du point de fonctionnement au débit demandé par le réseau.

$$\sum\Delta H=\sum\Delta H+\sum\Delta H_{sv}\qquad(7.13)$$

$$H_C=H_g+\sum\Delta H+\sum\Delta H_{sv}\qquad(7.14)$$

Avec $\Sigma\Delta H_{sv}$ est la perte de charge créée par la technique du vannage.

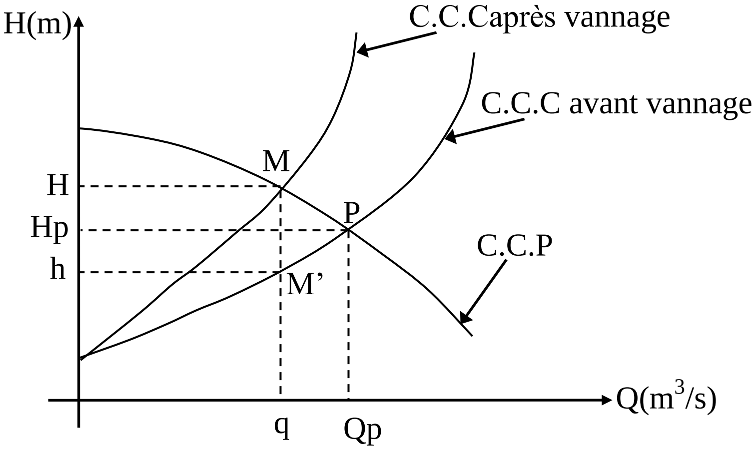


Fig.7.4 : Réglage quantitatif cas du vannage

$$H_C = H_g + R.Q^2 + \xi_v.Q^2 \qquad (7.15)$$

Le vannage est la solution la plus pratique (facile) mais la plus mauvaise, car elle nécessite un investissement supplémentaire qui nécessite l'utilisation d'une pompe qui fourni un grand débit seulement pour assurer un débit inférieur.

7.1.3.2 Réduction du temps de pompage

La réduction du temps de pompage est aussi l'un des modes de réglage du débit d'une pompe pour avoir un débit plus proche de celui appelé par le réseau, c'est-à-dire au lieu de pomper durant, par exemple, vingt-quatre heures, on pompe la même quantité (le même volume) durant des temps moins, par exemple seize heure, dix-huit et vingt heure.

Cette technique est valable seulement lorsque le débit demandé est inférieur à celui délivré par la pompe.

On suppose qu'on a un moteur électrique de vitesse constante et que le mode de réglage par vannage est déconseillé et que notre station de pompage refoule vers un réservoir. On peut apporter une autre solution qui est la durée de pompage sera réduite pour le point de fonctionnement A.

Multiplions le débit au point de fonctionnement par le temps d'une heure, nous aurons le volume horaire refoulé par la pompe. Par la suite, en utilisant la règle du trois pour déduire le temps total de pompage du volume journalier appelé (demandé) par les consommateurs.

Qp.3600⇒V(m³)→1 heure

Qd.24.3600→t (heures)

$$t(\text{heures}) = \frac{V_j}{Q_p.3600} = \frac{Q_d.24.3600}{Q_p.3600} \qquad (7.16)$$

7.2. By- pass

Il est utilisé dans le cas des pompes à grand débit. Cette technique permettant de réduire le débit pompé.

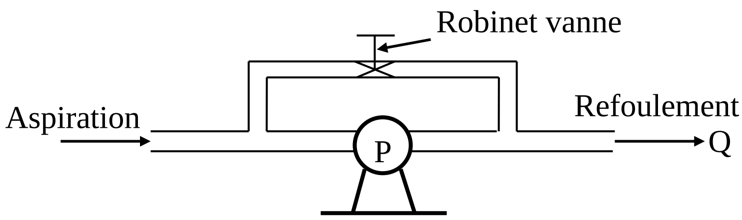


Fig.7.5 : Réglage de débit par By-pass dans une station de pompage

7.3. Introduction d'air dans la conduite d'aspiration

Technique basée sur l'injection de l'air à l'aspiration pour minimiser le débit d'eau assurer par la pompe, mais elle est rarement utilisée. Elle ne concerne que les pompes volumétriques à grand débit et elle déconseillée du fait qu'elle permet l'entrée d'air dans les singularités comme les coins.

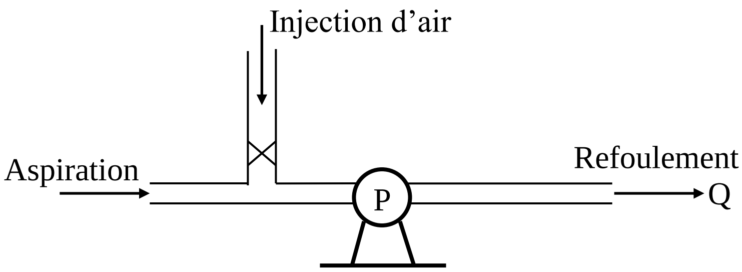


Fig.7.6 : Réglage de débit d'une pompe par injection d'air

7.4. Changement de la pompe

C'est l'un parmi tous les modes n'est pas faisable pour régler le débit, on doit refaire le choix de la pompe.

Exercice n°1

Une série d'essai exécutée avec une pompe ayant un diamètre de la roue D=1,8 mm et tournant à une vitesse n=225 tr/min fournie les données du tableau ci-après :

H(m)	Q (m^3/s)	η (%)
12,55	10,90	87,00
18,00	5,70	69,00
10,50	11,70	82,00
13,50	10,00	88,00
16,00	8,25	87,90

1) Déterminer la vitesse spécifique ?

2) Quelle n'et D' doit avoir une pompe homologue pour élever un débit Q'=5,4 m^3/s à H'=18 m ceci en fonction à un rendement maximum.

Solution

1) Détermination de la vitesse spécifique N_S

La vitesse spécifique est calculée pour un rendement maximum, ce qui nous permet d'écrire :

$$N_S = n.\frac{Q^{1/2}}{H^{3/4}} = 225.\frac{(10)^{1/2}}{(13{,}5)^{3/4}} = 101{,}03$$

2) Calcul n' et D' d'une pompe homologue pour élever un débit Q'=5,4 m^3/s à une hauteur H'=18 m.

Une pompe homologue c'est-à-dire elle a la même vitesse spécifique Ns.

$$N_S = n'.\frac{Q'^{\frac{1}{2}}}{H'^{\frac{3}{4}}} \Rightarrow n' = \frac{N_S.H'^{\frac{3}{4}}}{Q'^{\frac{1}{2}}} = \frac{101{,}03.(18)^{3/4}}{(5{,}4)^{1/2}} = 379{,}9337 \text{ tours/minute}$$

$$\frac{H}{H'} = (\frac{n}{n'}\frac{D}{D'})^2 \Rightarrow D' = \frac{n}{n'}.D\sqrt{\frac{H'}{H}} = \frac{225}{379{,}9337}.(1{,}8)\sqrt{\frac{18}{13{,}5}} = 1{,}2174 \approx 1{,}22 \text{ m}$$

Exercice n°2

La droite OP coupe la caractéristique (Q,H) de rayon R au point P tel que le débit en ce point est Q =30 L/s, on désire un débit Q = 10 L/s .

1/ Quel sera dans ce cas le diamètre de la roue pour que le point de fonctionnement passe par ce point ?

2/ Peut-on utiliser cette pompe dans le cas où on veut un débit de 25 L/s ?

Le diamètre extérieur de la roue D_2=200 mm.

Solution

a) Pour un débit de 10 l/s

$$d = D_2.\sqrt{\frac{q}{Q}} = 200.\sqrt{\frac{0{,}01}{0.03}} = 115{,}47 \text{ mm}$$

Calcul du coefficient de rognage

$$m = \frac{d}{D_2} = \frac{115{,}47}{200} = 0{,}57735$$

Le rendement de rognage

$$R = (1 - m).100 = (1 - 0{,}57735).100 = 42{,}265\%$$

R=42,265% >15%, donc le rognage n'est pas une solution de réglage.

b) Pour un débit de 30 l/s

$$\mathrm{d} = \mathrm{D_2}.\sqrt{\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{Q}}} = 200.\sqrt{\frac{0,025}{0.03}} = 182,574186\ \mathrm{mm}$$

Calcul du coefficient de rognage

$$\mathrm{m} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{D_2}} = \frac{182,574186}{200} = 0,9129$$

Le rendement de rognage

$$\mathrm{R} = (1 - \mathrm{m}).100 = (1 - 0,9129).100 = 8,7129\%$$

R=8,7129%<15%, donc le rognage peut être utilisé comme une solution de réglage.

Exercice n°3

On veut équiper une station de pompage d'une pompe tournant à 1500 tr/min, en vue de refouler un débit journalier de 8500 m^3 vers un réservoir de stockage ; l'exploitation se fait d'une manière continue, mais la durée de pompage peut être inférieure à 24 heures par jour.

1) Donner le pourcentage de rognage de la roue et tracer la courbe caractéristique de la roue rognée ?

2) Le rognage est-il une solution efficace ?

3) Dans le cas où on accepte le point de fonctionnement de la pompe, trouver le temps de pompage réduit sachant que le rendement au point de fonctionnement de la pompe est de 80% et le prix du KWh est de 4 DA. Calculer le prix de l'énergie absorbée par jour ?

4) Dans le cas où on veut procéder par modification de la vitesse donner la nouvelle vitesse de rotation ?

NB : Dans chaque cas, on demande une représentation graphique claire et détaillée.

$H_P = 25\text{-}260Q^2$

$H_C = 15+240Q^2$

Solution

1) Calcul du pourcentage du rognage de la roue au point de fonctionnement.

Au point de fonctionnement la hauteur délivrée par la pompe est égale à la hauteur du réseau.

$$\mathrm{H} = \mathrm{Hc} \Rightarrow 25 - 260\mathrm{Q}^2 = 15 + 240\mathrm{Q}^2 \Rightarrow 10 = 500\mathrm{Q}^2 \Rightarrow \mathrm{Q}^2 = \frac{10}{500} \Rightarrow \mathrm{Q} = \sqrt{\frac{10}{500}}$$

$$\mathrm{Q} = 0,141\ \mathrm{m^3/s} = \mathrm{Q_A}$$

$$\mathrm{H_A} = 25 - 260.(0,141)^2 = 19,8309\ \mathrm{m}$$

Le débit demandé par le réseau

$$\mathrm{Q_{demandé}} = \frac{8500}{(24.3600)} = 0,09838\ \mathrm{m^3/s}$$

De la seconde loi de similitude, nous pouvons le rapport des débits.

$$\frac{(\mathrm{Q})_\mathrm{I}}{(\mathrm{Q})_\mathrm{II}} = \frac{\pi(\mathrm{D_2})_\mathrm{I}(\mathrm{b_2})_\mathrm{I}(\mathrm{V_{2r}})_\mathrm{I}}{\pi(\mathrm{D_2})_\mathrm{II}(\mathrm{b_2})_\mathrm{II}(\mathrm{V_{2r}})_\mathrm{II}} = \frac{(\mathrm{D_2})_\mathrm{I}(\mathrm{b_2})_\mathrm{I}(\mathrm{V_{2r}})_\mathrm{I}}{(\mathrm{D_2})_\mathrm{II}(\mathrm{b_2})_\mathrm{II}(\mathrm{V_{2r}})_\mathrm{II}}$$

$(b_2)_I$ étant la distance entre les deux flasques à la sortie de la roue, elle est pratiquement constante si $(b_2)_I$ ne varie pas le long du centre au rayon extérieur de la roue ainsi que pour des rognages inférieur à 15 %, ce qui permet d'écrire

$$\frac{(b_2)_I}{(b_2)_{II}} = 1$$

$$\frac{(Q)_I}{(Q)_{II}} = \frac{(D_2)_I (V_{2r})_I}{(D_2)_{II}(V_{2r})_{II}} = \frac{(D_2)_I}{(D_2)_{II}}\frac{(u_2)_I}{(u_2)_{II}} = \frac{(D_2)_I}{(D_2)_{II}}.\frac{\frac{2\pi(n)_I}{60}\frac{(D_2)_I}{2}}{\frac{2\pi(n)_{II}}{60}\frac{(D_2)_{II}}{2}} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right).\left(\frac{(D_2)_I}{(D_2)_{II}}\right)^2$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right).\left(\frac{D_{21}}{D_{22}}\right)^2 = \left(\frac{D_{21}}{D_{22}}\right)^2$$

Ou d'une manière générale, nous extrairons H_2 en $F(Q_2)$ en se basant sur ces deux lois de similitude.

$$\frac{H_I}{H_{II}} = \left(\frac{D_{21}}{D_{22}}\right)^2 \text{ et } \frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{D_{21}}{D_{22}}\right)^2 \Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{H_1}{H_2} \Rightarrow H_2 = \frac{H_1}{Q_1}Q_2$$

$$\text{Posons } \frac{H_1}{Q_1} = A \text{ nous aurons } H_2 = A.Q_2 \text{ ou d'une manière générale } H = A.Q$$

Cette dernière est une droite passant par l'origine qui s'appelle la droite de rognage.

$$H = \frac{h}{q}Q$$

M(Q,H) est le point d'intersection de la droite de rognage et la courbe caractéristique de la pompe avant le rognage.

M'(q,h) est le point d'intersection de la droite de rognage et la nouvelle courbe caractéristique de la pompe après rognage de la roue. Le point M(Q,H) est homologue à M'(q,h).

Posons Q_d=q=0,09838 m^3/s

Du théorème de Thalès on peut écrire :

$$\frac{Q}{q} = \frac{H}{h} \Rightarrow H = \frac{h}{q}Q$$

Au point M(Q,H) qui est le point d'intersection entre la droite de rognage et la courbe caractéristique de la pompe H_P=H, ce qui permet d'écrire :

$$25 - 260Q^2 = \frac{h}{q}Q$$

Alors que h peut être calculé comme suit :

On a pris q=$Q_{demandé}$ qui est le point d'intersection entre la droite de rognage et la courbe caractéristique du réseau.

$$h = 15 + 240q^2 = 15 + 240.(0.09838)^2 = 17{,}3229 \text{ m}$$

$$25 - 260Q^2 = \frac{17{,}3229}{0{,}09838}Q \Rightarrow -260Q^2 - 176{,}0815Q + 25 = 0$$

$$\Delta = B^2 - 4.A.C = (-176{,}0815)^2 - 4.(-260).25 = 57004{,}6946 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 238{,}7566$$

$$Q_1 = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{176{,}082 - 238{,}7566}{2.(-260)} = \frac{-62{,}6751}{-520} = 0{,}12053 \text{ m}^3/s$$

$$Q_1 = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{176{,}082 + 238{,}7566}{2.(-260)} = \frac{414{,}8381}{-520} = -0{,}7977 \text{ m}^3/s$$

On prend le débit de signe positif, donc notre débit Q=0,12053 m^3/s.

Le coefficient de rognage, m, est le rapport des diamètres après et avant le rognage.

$$m = \left(\frac{d}{D}\right)$$

Il est également égal au rapport de la racine carrée du débit demandé au débit calculé pour $h=H_c$ c'est-à-dire au point d'intersection de la droite de rognage avec la courbe caractéristique de la conduite.

$$m = \sqrt{(q/Q)} = \sqrt{0,09838/0,12053} = 0,9035$$

2) Le rendement du rognage est déterminé en fonction du coefficient de rognage par l'expression suivante:

$$R = (1-m).100 = (1-0,9035).100 = 9,65\%$$

Le rendement de rognage R=9.65% est inférieur à 15%, on peut dire que le rognage est une solution efficace.

3) Calcul du temps réduit et du prix de l'énergie consommée

a) Calcul du temps de pompage réduit au point de fonctionnement

Le débit au point de fonctionnement Q_A=0,141 m^3/s.

8500 $m^3 \rightarrow t$

0,141*3600 $m^3 \rightarrow$ 1 heure

$$t = \frac{8500}{0,141.3600} = 16,7455 \text{ heures}$$

b) Calcul du prix de l'énergie consommée au point de fonctionnement

$$P_u = \rho.g.H_A.Q_A = 1000.9,81.19,8309.0,141 = 27430,2992 \text{ watts} = 27,4303 \text{ KW}$$

$$P_{Abs} = \frac{P_u}{\eta} = \frac{27,4303}{0,8} = 34,2879 \text{ KW}$$

L'énergie consommée par jour est calculée par l'expression suivante :

$$E_{consommée} = P_{abs}.t_{pompage\ réduit} = 34,2879.16,7455 = 574,1680 \text{ kwh}$$

Le prix total de l'énergie

$$prix_{total} = prix_{unitaire}.E_{consommée} = 4.574,1680 = 2296,672 \text{ D.A}$$

4) Calcul de la nouvelle vitesse de rotation

De la courbe de proportionnalité lors d'un réglage qualitatif, on peut aboutir à écrire

$$H = \frac{h}{q^2}Q^2 = \frac{17,3229}{(0,09838)^2}Q^2 = 1789,8101Q^2$$

$$\frac{H_1}{H_2} = \left(\frac{n_1}{n_2}.\frac{D_{21}}{D_{22}}\right)^2 = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{H}{h} = \left(\frac{N}{n}\right)^2 \Rightarrow n = N.\sqrt{\frac{h}{H}}$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{n_1}{n_2}\left(\frac{D_{21}}{D_{22}}\right)^3 = \frac{n_1}{n_2}$$

Au point d'intersection de la courbe de proportionnalité avec la courbe caractéristique de la pompe, on peut écrire :

$H = H_p \Rightarrow 1789,8101Q^2 = 25 - 260Q^2 \Rightarrow 2049,8101Q^2 = 25$

$$\Rightarrow Q = \sqrt{\frac{25}{2049.8101}} = 0,110436 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$n = N.\frac{q}{Q} = 1500.\frac{0,09838}{0,110436} = 1336,24 \text{ tours/minute}$$

Chapitre VIII : Couplage des pompes identiques et non identiques et détermination du point de fonctionnement

8.1 Couplage de deux pompes identiques

8.1.1 Couplage de deux pompes en série

Pour avoir la courbe résultante de H en f(Q) de deux pompes identiques accouplées en série, on doit disposer de la courbe d'une seule pompe ou de son équation et par la suite réaliser la composition. La figure 8.1 représente deux pompes placées en série.

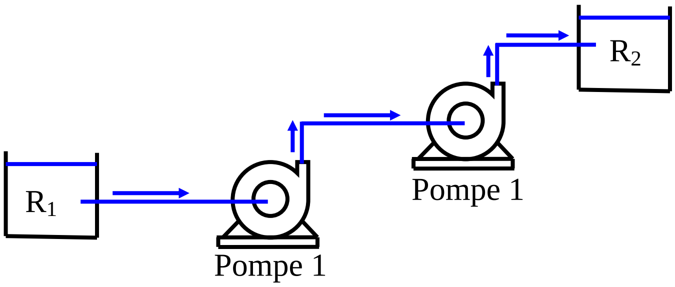


Fig. 8.1 : Schéma de deux pompes placées en série

a) Résultante analytique

$$H_R = 2AQ^2 + 2BQ + 2C = 2H_{p1} = 2H_{p2} \qquad (8.1)$$

Le couplage de deux pompes identiques en série permet d'augmenter la hauteur d'élévation deux fois.

b) Résultante graphique

L'obtention de la résultante se fait de la manière suivante : Prenons un nombre important de points sur l'axe des abscisses, puis mesurer à chaque point la hauteur de charge correspondante, rajouter, en chaque point, cette valeur à la charge initiale, par la suite raccorder les point entre eux. La courbe obtenue s'appelle la résultante de deux pompes identiques accouplées en série.

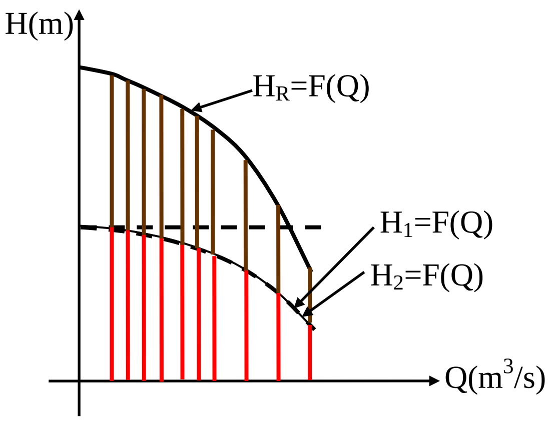


Fig. 8.2 : Courbe résultante de deux pompes identiques accouplées en série

Il faut assurer que la hauteur d'élévation assurée par deux pompes placées en série soit supérieure à la hauteur d'élévation assurée par une pompe pour tomber dans la plage de bon fonctionnement.

8.1.2 Couplage de trois pompes identiques en série

La figure (8.3) donne un schéma simple de trois pompes identiques placées en série.

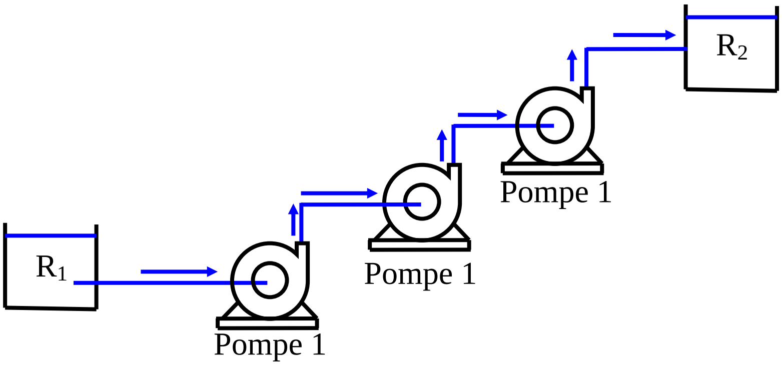


Fig. 8.3 : Schéma de trois pompes identiques placées en série

a) Résultante analytique

Si trois pompes identiques sont placées en série, la courbe caractéristique résultante analytique peut avoir l'expression suivante.

$$H_R = 3AQ^2 + 3BQ + 3C = 3H_{p1} = 3H_{p2} = 3H_{p3} \qquad (8.2)$$

Le couplage de trois pompes identiques en série permet d'agrandir la hauteur d'élévation trois fois.

b) Résultante graphique

Prenons un nombre important de points à l'axe des abscisses, puis mesurer à chaque point la hauteur de charge correspondante, rajouter deux fois, en chaque point, cette valeur à la charge initiale, par la suite raccorder les point entre eux.

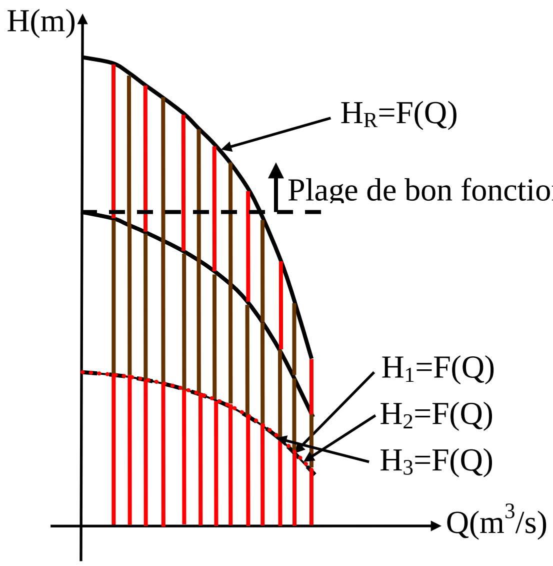


Fig. 8.4 : Courbe résultante de trois pompes identiques accouplées en série

Il faut assurer que la charge délivrée par trois pompes associées soit supérieure à la charge donnée par deux pompes pour rester dans la plage de bon fonctionnement.

8.2 Coulage de deux pompes non identiques

8.2.1 Couplage de deux pompes en série

La figure 8.5 représente deux pompes non identiques placées en série refoulant dans le même réservoir. Les méthodes analytique et graphique permettent d'aboutir à la courbe résultante H en fonction de Q.

a) Résultante analytique

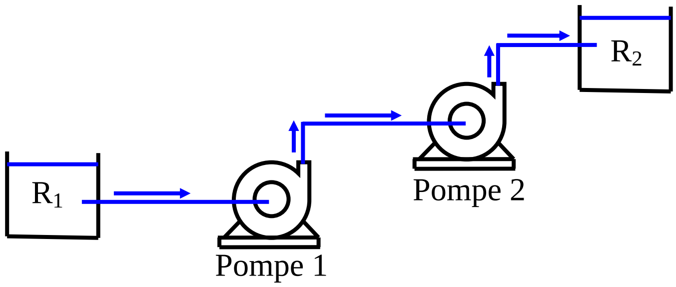


Fig. 8.5 : Schéma de deux pompes non identiques placées en série

$$H_{p1} = A_1Q^2 + B_1Q + C_1$$

$$H_{p2} = A_2Q^2 + B_2Q + C_2$$

Si les deux pompes ne sont pas identiques, la courbe caractéristique de la première pompe est différente de celle de la deuxième, ce qui donne une résultante analytique ayant l'expression suivante.

$$H_R = H_{p1} + H_{p2} = (A_1 + A_2)Q^2 + (B_1 + B_2)Q + (C_1 + C_2) \qquad (8.3)$$

Le couplage de deux pompes non identiques en série permet d'augmenter la hauteur d'élévation d'une valeur égale à la somme des hauteurs des deux pompes.

b) Résultante graphique

L'obtention de la résultante de H en fonction de Q se fait de la manière suivante : Prenons un nombre important de points sur l'axe des abscisses, puis mesurer à chaque point la hauteur de charge correspondante pour l'une des pompes, rajouter, en chaque point, cette valeur à la charge de la deuxième pompe, par la suite raccorder les point entre eux. La courbe obtenue s'appelle la résultante de deux pompes non identiques accouplées en série.

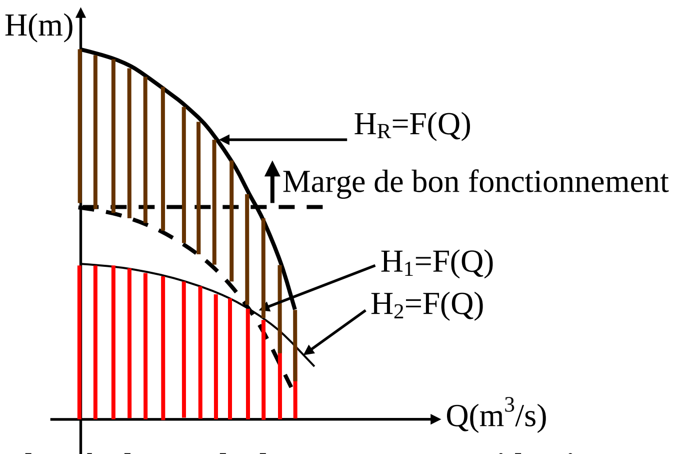


Fig. 8.6 : Courbe résultante de deux pompes non identiques accouplées en série

Il faut assurer que la hauteur d'élévation assurée par les deux pompes accouplées soit supérieure à la plus grande charge assurée par l'une des pompes pour tomber dans la marge de bon fonctionnement.

8.2.2 Couplage de trois pompes non identiques en série

La figure 8.7 donne un schéma de trois pompes non identiques accouplées en série.

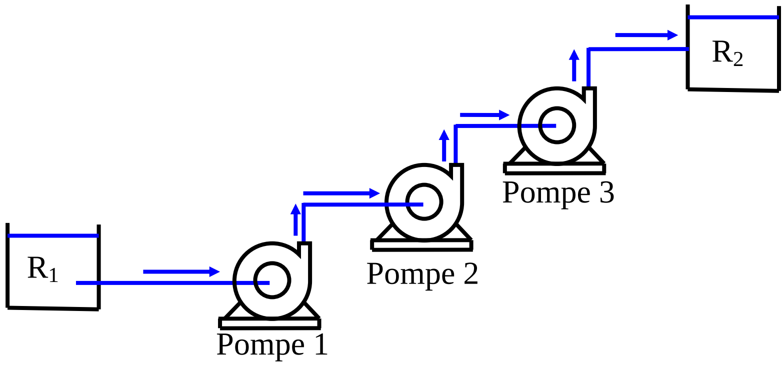


Fig. 8.7 : Schéma de trois pompes non identiques placées en série

a) Résultante analytique

$$H_{p1} = A_1Q^2 + B_1Q + C_1$$

$$H_{p2} = A_2Q^2 + B_2Q + C_2$$

$$H_{p3} = A_3Q^2 + B_3Q + C_3$$

Si les trois pompes ne sont pas identiques, la courbe caractéristique de la première pompe est différente des deux autres, ce qui donne une résultante analytique ayant l'expression suivante.

$$H_R = H_{p1} + H_{p2} + H_{p3} = (A_1 + A_2 + A_3)Q^2 + (B_1 + B_2 + B_3)Q + (C_1 + C_2 + C_3)$$

$$H_R = H_{p1} + H_{p2} + H_{p3} \qquad (8.4)$$

Le couplage de trois pompes non identiques en série permet d'agrandir la hauteur d'élévation à une cote est égale à la somme des trois hauteurs.

b) Résultante graphique

L'obtention de la résultante de H en fonction de Q se fait de la manière suivante : en premier lieu, prenons un nombre important de points sur l'axe des abscisses, puis mesurer à chaque point la hauteur de charge correspondante pour l'une des pompes, rajouter, en chaque point, cette valeur à la charge de la deuxième pompe, on aura une résultante pour les deux premières pompes, mesurer aux mêmes points la charge de la troisième pompe, puis rajouter cette charge en chaque point à celle de la résultante précédemment obtenue, par la suite raccorder les point entre eux. La courbe obtenue s'appelle la résultante de trois pompes non identiques accouplées en série.

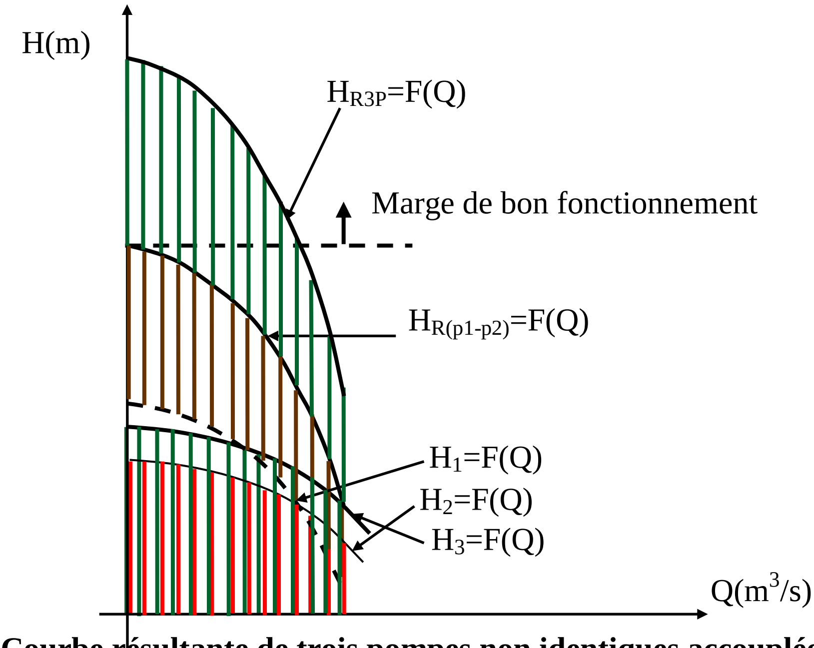


Fig. 8.8 : Courbe résultante de trois pompes non identiques accouplées en série

Il faut assurer que la hauteur d'élévation assurée par les trois pompes accouplées en série soit supérieure à la plus grande charge assurée par le couplage de deux pompes pour tomber dans la marge de bon fonctionnement.

8.2.3 Couplage de deux pompes non identiques en parallèle

Soient deux pompes non identiques, ayant la même cote, accouplées en parallèle et refoulant dans le même réservoir comme il est indiqué sur la figure 8.9. La résultante de la charge, H, en fonction du débit, Q, des deux pompes peut être obtenue analytiquement ou graphiquement.

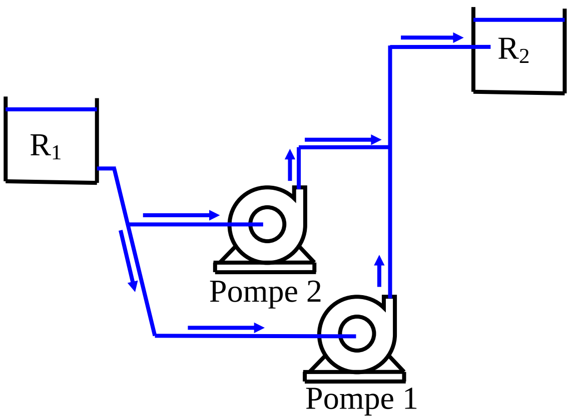


Fig. 8.9 : Schéma de deux pompes non identiques placées en parallèle

a) Résultante analytique

$$H_{p1} = A_1Q_1^2 + B_1Q_1 + C_1$$

$$H_{p2} = A_2Q_2^2 + B_2Q_2 + C_2$$

Si les deux pompes ne sont pas identiques, la courbe caractéristique de la première pompe est différente de celle de la deuxième, ce qui donne une résultante analytique ayant l'expression suivante.

$$H_R = H_{p1} = H_{p2} \Rightarrow A(Q_1^2 + Q_2^2) + B(Q_1 + Q_2) + C = A_1Q_1^2 + B_1Q_1 + C_1$$
$$= A_2Q_2^2 + B_2Q_2 + C_2$$

$$H_R = A(Q_1^2 + Q_2^2) + B(Q_1 + Q_2) + C \qquad (8.5)$$

Le couplage de deux pompes non identiques en parallèle permet d'augmenter le débit d'une valeur égale à la somme des débits fournis par les deux pompes.

b) Résultante graphique

La résultante représentant H en f(Q), pour deux pompes non identiques placées en parallèle, est obtenue en prenant un nombre important de points sur l'axe des ordonnées, puis mesurer à chaque point la valeur du débit correspondante, rajouter, en chaque point, cette valeur au débit de la seconde pompe, par la suite raccorder les point entre eux. Le schéma 8.10 élucide clairement les étapes à suivre pour arriver à la résultante.

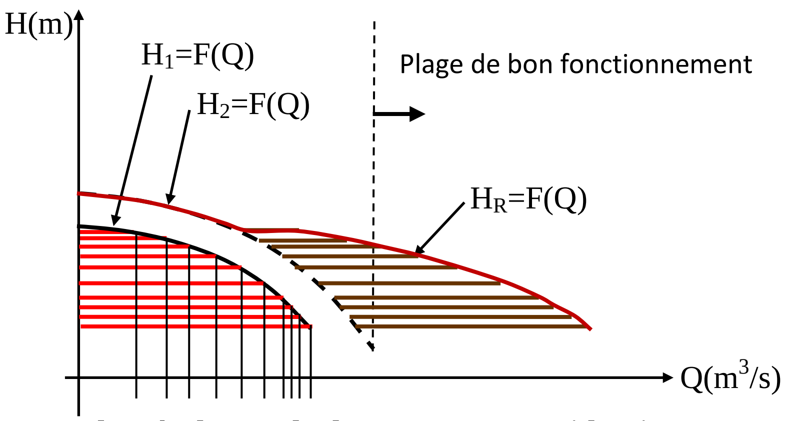


Fig. 8.10 : Courbe résultante de deux pompes non identiques accouplées en parallèle

Il faut assurer que le débit assuré par les deux pompes accouplées en parallèle soit supérieur au maximum du débit assuré par l'une des pompes pour rester dans la marge de bon fonctionnement.

8.2.4. Couplage de trois pompes non identiques en parallèle

La figure 8.11 représente trois pompes non identiques, ayant la même cote, placées en parallèle et refoulant dans le même réservoir. La résultante de ce système peut être obtenue soit par la méthode analytique soit par celle graphique.

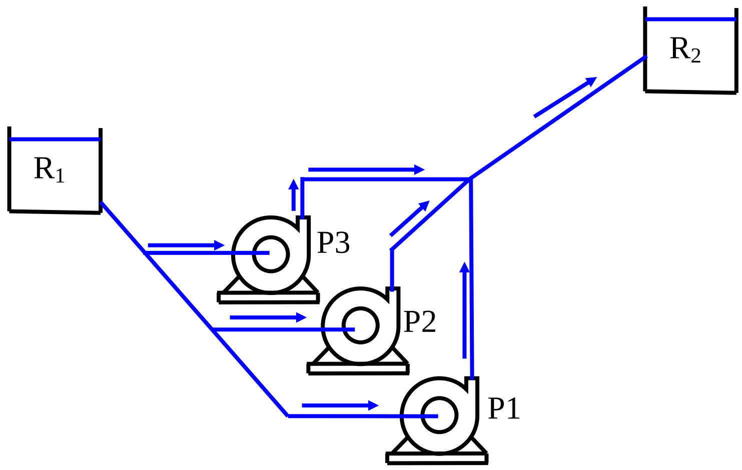


Fig. 8.11 : Schéma de trois pompes non identiques placées en parallèle

$$H_{p1} = A_1Q_1^2 + B_1Q_1 + C_1$$

$$H_{p2} = A_2Q_2^2 + B_2Q_2 + C_2$$

$$H_{p3} = A_3Q_3^2 + B_3Q_3 + C_3$$

Si les trois pompes ne sont pas identiques, la courbe caractéristique de la première pompe est différente des deux autres, ce qui donne une résultante analytique ayant l'expression suivante.

$$H_R = H_{p1} = H_{p2} = H_{p3} \Rightarrow A(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) + B(Q_1 + Q_2 + Q_3) + C = A_1Q_1^2 + B_1Q_1 + C_1 = A_2Q_2^2 + B_2Q_2 + C_2 = A_3Q_3^2 + B_3Q_3 + C_3$$

$$H_R = A(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) + B(Q_1 + Q_2 + Q_3) + C \qquad (8.6)$$

Le couplage de trois pompes non identiques en parallèle permet d'augmenter le débit d'une valeur égale à la somme des débits fournis par les trois pompes.

b) Résultante graphique

Pour obtenir la résultante de trois pompes non identiques placées en parallèle, on suit l'itinéraire suivant : Prenons un nombre important de points sur l'axe des ordonnées, puis mesurer à chaque point la valeur du débit correspondante, rajouter cette valeur, en chaque point, à la valeur du débit de l'une parmi les deux pompes restantes, puis mesurer aux mêmes points les valeurs du débit pour la troisième pompe et les rajouter à la résultante obtenue entre les deux premières pompes, par la suite raccorder les point finaux entre eux. La figure 8.12 montre les étapes à suivre pour aboutir à la résultante de 3 pompes en parallèle.

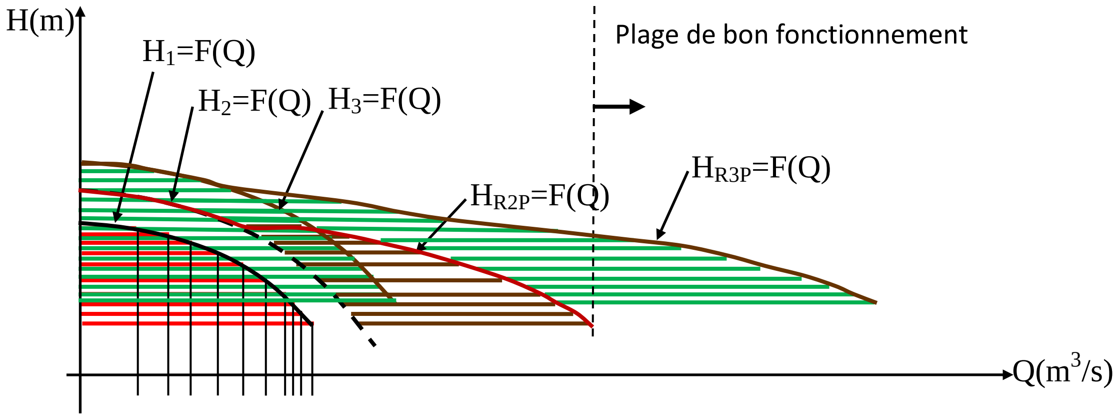


Fig. 8.12 : Courbe résultante de trois pompes non identiques couplées en parallèle

Il faut assurer que le débit assuré par trois pompes accouplées soit supérieur au débit assuré par deux pompes pour tomber dans la plage de bon fonctionnement.

8.3. Détermination du point de fonctionnement

Le point de fonctionnement est déterminé à l'aide de deux courbes, la courbe caractéristique de la pompe choisie et la courbe caractéristique du réseau. En effet, le point d'intersection de ces deux courbes donne le point de fonctionnement du système réseau-pompe, mais la question qui se pose comment obtenir ces deux courbes.

Le traçage des deux courbes caractéristique de la pompe, en se basant du la courbe expérimentale fournie par le constructeur, et du réseau doit être guidé par étapes suivantes :

1° A partir de la courbe caractéristique fournie par le constructeur des pompes, prenons sur l'axe des abscisses plusieurs valeurs (au moins dix valeurs) du débit puis monter verticalement pour lire, en chaque point, les valeurs de la charge correspondantes.

2° Pour les mêmes valeurs du débit déjà obtenues, calculer en tous les points les valeurs de la hauteur d'élévation à l'aide de la formule suivante :

$$H_R = H_g + \sum \Delta H$$

$$\sum \Delta H = \sum \Delta H_{aspiration} + \sum \Delta H_{refoulement} + = R_{aspiration} Q^2 + R_{refoulement} Q^2 = RQ^2$$

$$H_R = H_g + RQ^2 \qquad (8.7)$$

avec

$$R = \frac{8\lambda L}{\pi^2 . g . d^5} \qquad (8.8)$$

Où le coefficient de frottement λ est calculé par l'un des formules suivantes.

a) Formule de Swamee (1993)

$$\lambda = \left\{ \left(\frac{64}{Re}\right)^8 + 9{,}5 \left[\ln\left(\frac{\varepsilon}{3{,}7d} + \frac{5{,}74}{Re^{0{,}9}}\right) - \left(\frac{2500}{Re}\right)^6 \right]^{-16} \right\}^{0{,}125} \qquad (8.9)$$

b) Formule de Nikuradzé

$$\lambda = (1{,}14 - 0{,}86 \ln\left(\frac{\varepsilon}{d}\right))^{-2} \qquad (8.10)$$

c) Formule de Colebrook-White(1938) :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\lg\left(\frac{\varepsilon}{3{,}71d} + \frac{2{,}51}{R_e\sqrt{\lambda}}\right) \qquad (8.11)$$

d) Formule de ACHOUR.B (2007)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left[\frac{\varepsilon/d}{3{,}7} + \frac{4{,}5}{Re}\log\frac{Re}{6{,}97}\right] \qquad (8.12)$$

e) Formule de Shifrinson

$$\lambda = 0{,}11\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)^{0{,}25} \qquad (8.13)$$

f) Formule de Prandtl-Nikuradzé

$$\lambda = \frac{0{,}25}{\left(\lg\frac{3{,}71d}{\varepsilon}\right)^2} \qquad (8.14)$$

Sachant que Re est le nombre de Reynolds, ε et d sont successivement la rugosité absolue (hauteur des aspérités) et le diamètre intérieur de la conduite.

3° Dresser le tableau suivant.

N°	Q	H_P	Hg	ΣΔH	H_R
1	0	Val max	Hg	0	Hg
2	Q1	Hp1	Hg	ΣΔH1	Hg+ ΣΔH1
3	Q2	Hp2	Hg	ΣΔH2	Hg+ ΣΔH2
4	Q3	Hp3	Hg	ΣΔH3	Hg+ ΣΔH3
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
n	Qn	Hpn	Hg	ΣΔHn	Hg+ ΣΔHn

4° T racer les deux courbes caractéristique de la pompe, HP, et du réseau, HR, en fonction de Q.

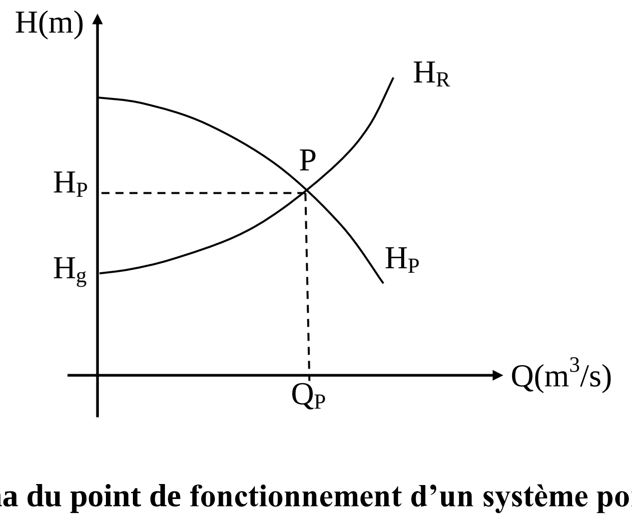


Fig. 8.13 : Schéma du point de fonctionnement d'un système pompe-réseau

5° Le point d'intersection des deux courbes obtenues est appelé le point de fonctionnement qui est défini par un débit Q_A et une charge H_A. Ce point doit également se caractériser par un rendement optimal (maximum).

a) Point de fonctionnement d'une station de pompage composée de deux pompes identiques placées en parallèle et refoulant dans le même réseau

Pour obtenir le point de fonctionnement de deux pompes placées en parallèle, on doit tout d'abord réaliser les résultantes représentant H_{2p} et H_R en fonction du débit. Le point d'intersection de ces nouvelles courbes donne le point de fonctionnement du système. La figure 8.14 représente la méthode graphique pour aboutir au point de fonctionnement.

En pratique hydrotechnique, on peut avoir 1, 2, 3, …, n pompes identiques en parallèle refoulant dans un seul réseau et pour déterminer leur point de fonctionnement. On peut écrire la perte de charge, pour une seule pompe refoulant un débit Q, sous la forme suivante :

$$\Delta H=RQ^2$$

Pour 2 pompes identiques placées en parallèle $Q=2Q \Rightarrow \Delta H=R(2Q)^2 =4R\,Q^2=4\Delta H$

Pour 3 pompes identiques placées en parallèle $Q=3Q \Rightarrow \Delta H=R(3Q)^2 =9R\,Q^2=9\,\Delta H$

Pour 4 pompes identiques placées en parallèle $Q=4Q \Rightarrow \Delta H=R(4Q)^2 =16R\,Q^2=16\,\Delta H$

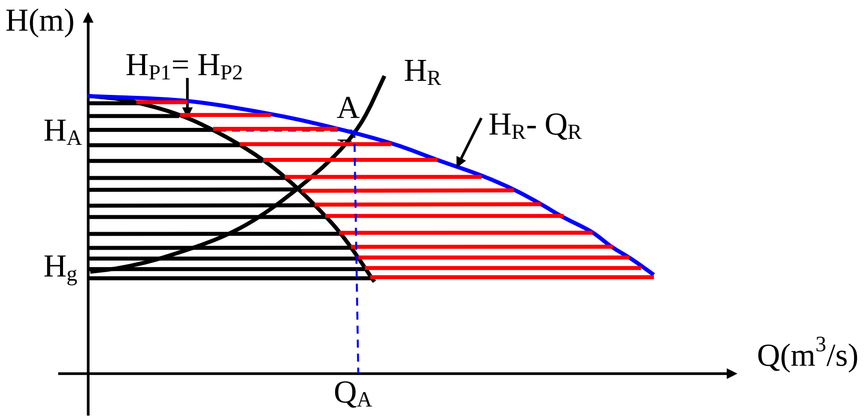


Fig. 8.14 : Point de fonctionnement de deux pompes identiques refoulant dans le même réseau

b) Point de fonctionnement de deux stations de pompage éloignées l'une de l'autre et refoulant vers le même réservoir.

Dans la vie pratique, il existe des cas où le réservoir est alimenté à partir de 2 stations de pompage c'est le cas du schéma 8.15. Quel est dans ce cas, le point de fonctionnement du système.

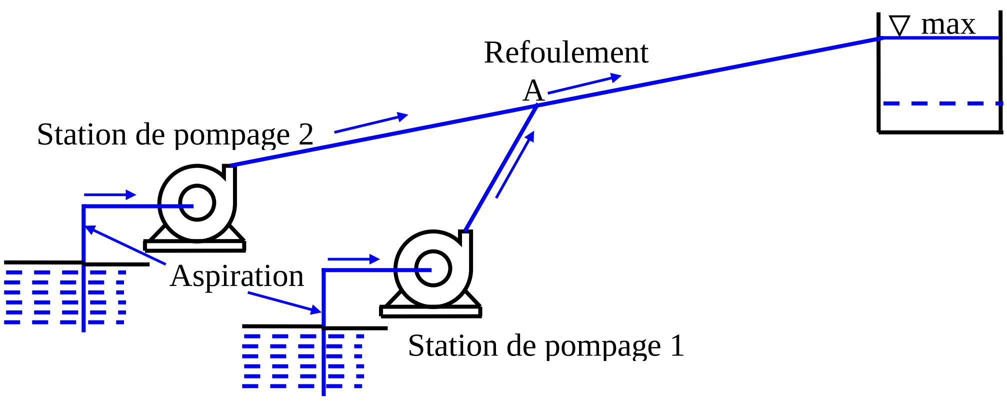


Fig. 8.15 : Schéma de deux stations de pompage refoulant dans le même réservoir

Le point de fonctionnement dans ce cas, nous conduirons à réaliser toutes les courbes caractéristiques, cotés aspiration et refoulement à part et communs à part, nécessaires représentant $H_{ST.P1}$, $H_{ST.P2}$, $H_{R1aspiration}$, $H_{R2aspiration}$, $H_{R1\ refoulement}$, $H_{R2refoulement}$, $H_{R\ commun}$ en fonction du débit, Q.

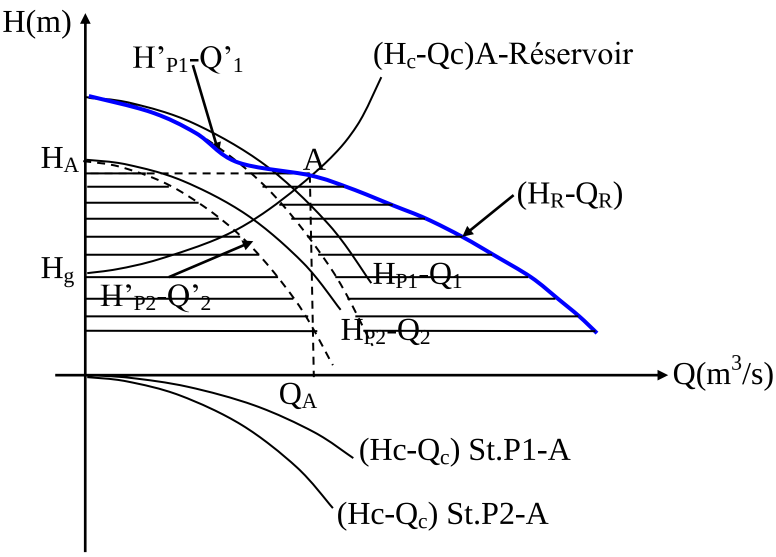


Fig. 8.16 : Point de fonctionnement de deux stations de pompage distinctes refoulant l'eau vers le même réservoir

d) Point de fonctionnement d'une station de pompage refoulant l'eau vers deux réservoirs éloignés l'un de l'autre et de cotes différentes.

Dans plusieurs situations, la station de pompage alimente deux réservoirs éloignés et de cotes différentes, comment obtenir dans ce cas le point de fonctionnement du système.

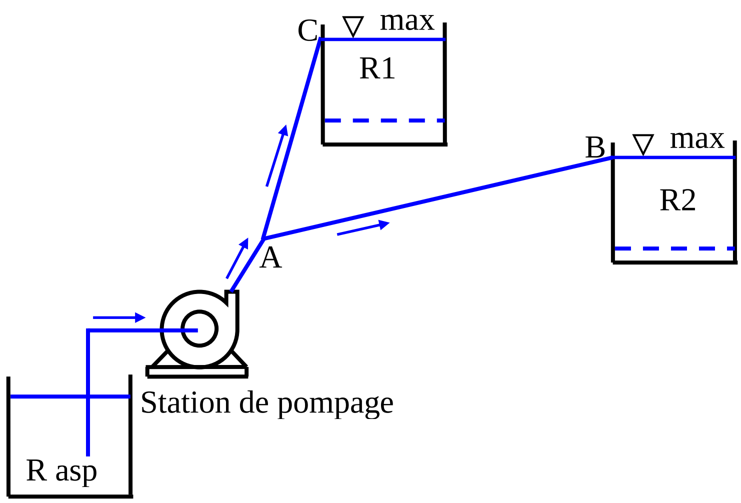


Fig.8.17 : Schéma d'une station de pompage refoulant vers deux réservoirs

Pour aboutir au point de fonctionnement du système, on doit passer par le traçage des caractéristiques qu'on est en besoin.

En plus de la caractéristique de la pompe, nous serons obligés de tracer, en fonction du débit, les courbes caractéristiques (Hc-Q) station de pompage-point A, (Hc-Q) point A-réservoir B et (Hc-Q) point A-réservoir C.

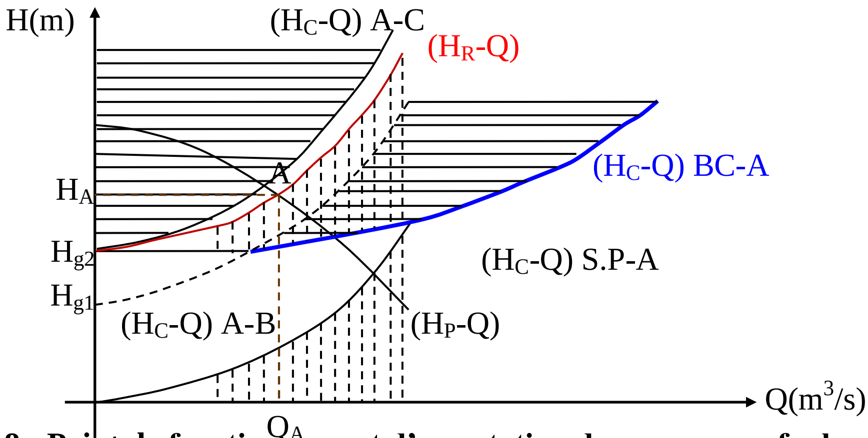


Fig. 8.18 : Point de fonctionnement d'une station de pompage refoulant l'eau vers deux réservoirs éloignés et de cotes différentes

Par la suite, il faut obtenir la résultante de la courbe représentant les caractéristiques de la conduite en fonction Q des tronçons AB et AC. Rajouter la courbe caractéristique du tronçon situé entre la station de pompage et le point A, nous obtenons la courbe caractéristique du réseau. L'intersection entre la dernière caractéristique et celle de la pompe est le point de fonctionnement du système.

e) Point de fonctionnement d'une station de pompage composée de deux pompes identiques refoulant l'eau vers deux réservoirs éloignées l'un de l'autre et de cotes du plan d'eau différentes.

Soit le schéma illustré par la figure (8.19) représentant deux pompes identiques refoulant l'eau vers deux réservoirs éloignés et de cote du plan d'eau différents, il demandé de déterminer le point de fonctionnement de ce système.

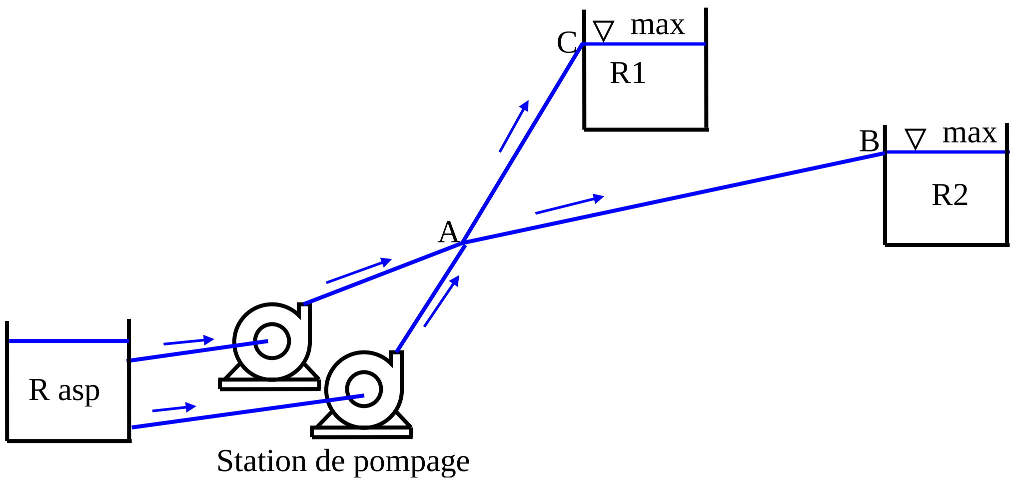


Fig. 8.19 : Schéma de deux pompes identiques refoulant vers deux réservoirs éloignés et de cotes du plan d'eau différentes

Pour arriver à déterminer le point de fonctionnement de ce type d'installation, on doit passer par le traçage de toutes les courbes caractéristiques de ce montage.

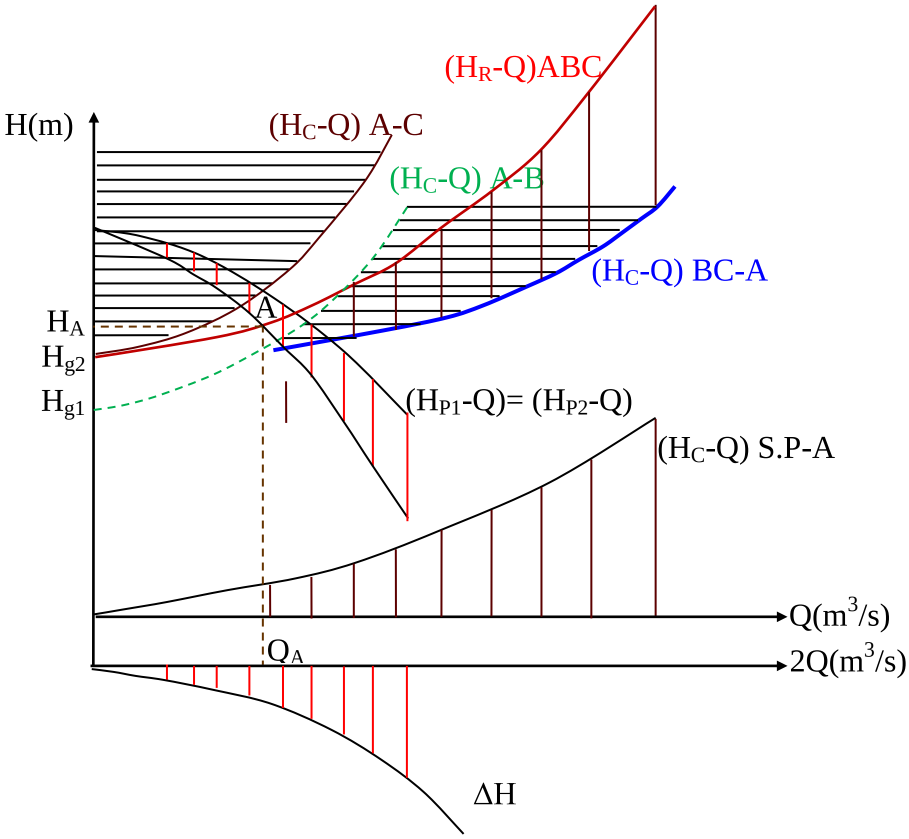


Fig. 8.20 : Point de fonctionnement d'une station de pompage composée de deux pompes identiques refoulant l'eau vers deux réservoirs éloignés et de cotes différentes

Traçons les courbes caractéristiques des tronçons Station de pompage-A, AB et AC en fonction du débit par la suite, obtenons la résultante BC-A. Puis traçons la résultante de $H_{BC\text{-}A}$ avec la caractéristique $H_{SP\text{-}A}$ qui donne H_{ABC} en fonction du débit (courbe en rouge).

Traçons la courbe caractéristique de la pompe en fonction de Q puis tracer la courbe de la perte de charge pour un débit égal à deux fois le débit d'une seule pompe (Q=2Q). Retranchons en plusieurs points la perte de charge de la courbe caractéristique de la conduite (les bâtons verticales en rouge), nous obtenons la courbe résultante (H_R, Q_R).

Le point d'intersection entre les courbes (H_R, Q_R) et (H_{ABC},Q) donne le point de fonctionnement A caractérisé par (H_A, Q_A).

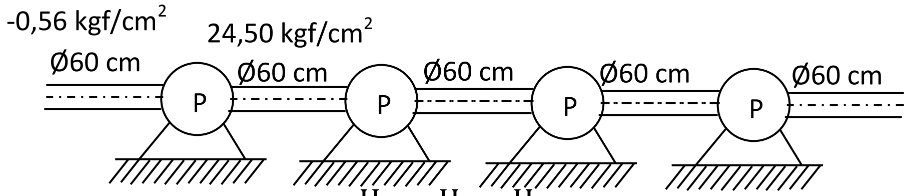
Exercice n°1

Un tuyau horizontal de 60 cm transporte de l'huile de pétrole de densité 0,825 circulant à la vitesse de 440 l/s. Les quatre pompes nécessaires le long de la ligne sont pareilles, c'est-à-dire que les pressions du côté entrée et du côté sortie sont respectivement de –0,56 kg/cm^2 et 24,50 kg/cm^2. Si la perte de charge à la sortie est de 6,00 m pour 1000 m de tuyau, à quelle distance l'une de l'autre doit-on placer les pompes ?

Réponse : 50 600 m

Solution

Calcul de la distance qui sépare deux pompes :



$$H_p = H_S - H_e$$

$$H_S = \left(Z_s + \frac{p_s}{\rho g} + \frac{V_s^2}{2g}\right) \text{ et } H_e = \left(Z_e + \frac{p_e}{\rho g} + \frac{V_e^2}{2g}\right)$$

$$(\mathbf{Z_s - Z_s}) = \mathbf{0};\ \frac{\mathbf{p_s}}{\boldsymbol{\rho}\mathbf{g}} = \frac{\mathbf{p_{man}}}{\boldsymbol{\rho}\mathbf{g}} + \frac{\mathbf{p_{atm}}}{\boldsymbol{\rho}\mathbf{g}};\ \frac{\mathbf{p_e}}{\boldsymbol{\rho}\mathbf{g}} = \frac{\mathbf{p_{atm}}}{\boldsymbol{\rho}\mathbf{g}} - \frac{\mathbf{p_{vac}}}{\boldsymbol{\rho}\mathbf{g}};\ \left(\frac{\mathbf{V_s^2}}{\mathbf{2g}} - \frac{\mathbf{V_e^2}}{\mathbf{2g}}\right) = \mathbf{0}$$

$$\frac{p_s}{\rho g} = \frac{p_{man}}{\rho g} + \frac{p_{atm}}{\rho g} = \frac{24{,}50.98100}{825.9{,}81} + \frac{101325}{825.9{,}81} = 309{,}4894$$

$$\frac{p_e}{\rho g} = \frac{p_{atm}}{\rho g} - \frac{p_{vac}}{\rho g} = \frac{101325}{825.9{,}81} - \frac{(0{,}56.98100)}{825.9{,}81} = 5{,}7318 \text{ m}$$

$$H_p = H_S - H_e = \frac{p_{man}}{\rho g} + \frac{p_{vac}}{\rho g} = \frac{24{,}50.98100}{825.9{,}81} + \frac{(0{,}56.98100)}{825.9{,}81} = 303{,}7576 \text{ m}$$

6 m→1000 m

303,7576→x(m)

$$x = \frac{303{,}7576.1000}{6} = 50625{,}2626 \text{ m}$$

Exercice n°2

Un fabricant de pompe centrifuge dispose en magasin de moteurs de puissance diverses dont la vitesse de rotation est de 1450 tr/min, il dispose également de roues de pompes de divers diamètres géométriquement semblable qui correspondent à une vitesse spécifique Ns=53 sous un rendement maximal.

Deux commandes lui sont adressées :

1ère commande Q = 84 l/s , H=10 m

2ème commande Q = 61 l/s, H=64 m

1) On demande de combien de roue se composera la pompe à chacun des cas envisagés ci-dessus ?

2) Ces roues seront-elles montées en série ou bien en parallèle ?

Solution

$$N_s = 53 \text{ et } n = 1450 \text{ tours/ minute}$$

$$N_S = n.\frac{Q^{1/2}}{H^{3/4}} \Rightarrow \frac{Q^{1/2}}{H^{3/4}} = \frac{N_S}{n} = \frac{53}{1450} = 0{,}03655$$

La première commande

Q=84 l/s, H=10 m

La première commande permet d'avoir un rapport de $Q^{1/2}/H^{3/4} = (0{,}084)^{1/2}/(10)^{3/4} = 0{,}05154$

Il faut diminuer le rapport $Q^{1/2}/H^{3/4}$, ce qui nous oblige de diminuer le débit Q qui devient Q'.

$$N_S = n.\frac{Q^{1/2}}{H^{3/4}} \Rightarrow Q' = \left(N_S.\frac{H^{\frac{3}{4}}}{n}\right)^2 = \left(53.\frac{(10)^{\frac{3}{4}}}{1450}\right)^2 = 0{,}042249\ m^3/s$$

Notre débit Q=0,084 m^3/s, pour calculer le nombre de roues pour cette pompe, on doit effectuer le calcul comme suit :

$$Q = p.Q' \Rightarrow p = \frac{Q}{Q'} = \frac{0{,}084}{0{,}042249} = 1{,}988 \approx 2 \text{ roues}$$

$$N_S = n.\frac{\left(\frac{Q}{p}\right)^{1/2}}{H^{3/4}} \Rightarrow \left(\frac{Q}{p}\right)^{1/2} = \left(N_S.\frac{H^{3/4}}{n}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{Q}{p}\right) = \left(N_S.\frac{H^{3/4}}{n}\right)^2 \Rightarrow p = \frac{Q}{\left(N_S.\frac{H^{3/4}}{n}\right)^2}$$

$$p = \left(\frac{n}{N_S}\right)^2 \frac{Q}{H^{3/2}} = \left(\frac{1450}{53}\right)^2 \frac{0{,}084}{(10)^{3/2}} = 1{,}988$$

L'installation de pompage doit composer de 2 pompes en parallèle pour qu'elle puisse répondre aux exigences de la première commande.

Deuxième commande

Q=61 l/s, H=64 m

La deuxième commande permet d'avoir un rapport de $Q^{1/2}/H^{3/4} = (0{,}061)^{1/2}/(64)^{3/4} = 0{,}010915$

Il faut augmenter le rapport $Q^{1/2}/H^{3/4}$, ce qui nous oblige de diminuer la charge H, elle devient H' ou H=qH'.

$$N_S = n.\frac{Q^{1/2}}{(H')^{3/4}}$$

Où p est le nombre de roues en série.

$$N_S = n.\frac{Q^{1/2}}{\left(\frac{H}{q}\right)^{3/4}} \Rightarrow \left(\frac{H}{q}\right)^{3/4} = n.\frac{Q^{1/2}}{N_S} \Rightarrow \left(\left(\frac{H}{q}\right)^{3/4}\right)^{4/3} = \left(n.\frac{Q^{1/2}}{N_S}\right)^{4/3} \Rightarrow \frac{H}{q} = \left(\frac{n}{N_S}\right)^{4/3} Q^{2/3}$$

$$\frac{q}{H} = \frac{1}{\left(\frac{n}{N_S}\right)^{4/3} Q^{2/3}} \Rightarrow q = \frac{H}{\left(\frac{n}{N_S}\right)^{4/3} Q^{2/3}} = \frac{64}{\left(\frac{1450}{53}\right)^{4/3} (0{,}061)^{2/3}} = 5{,}00999 \text{ roues}$$

L'installation doit composer d'environ 5 roues ou pompes placées en série pour qu'elle puisse répondre aux exigences de la deuxième commande.

Références bibliographiques

[1] DUPONT A. (1979), Hydraulique urbaine, Ouvrages de transport, d'élévation et de distribution des eaux, Tome II, Edition Eyrolles, 384 pages.

[2] Anne Zimmer, Daniel Fernex, Antoine Griere, TP n°2, étude préliminaire des pompes centrifuges.

[3] CARLIER.M, GARNIER.B, (1982), Les stations de pompage d'eau, Edition Eyrolles. Paris.

[4] DALI Rachid, (2013) « étude d'un écoulement dans une conduite d'aspiration d'une pompe centrifuge », mémoire de projet de fin d'étude pour l'obtention du diplôme de master en hydraulique, université Aboubekr BELKAID Tlemcen, Algérie, 83 pages.

[5] JEAN LAPRAY .F, (2002), « Technique de l'ingénieur », machine hydraulique et thermique. Edition PYC. France.

[6] LE LEC P. (1966), Transport des fluides pompes», Université de Nancy .36p.

[7] LENCASTRE, A. (1996), Hydraulique générale, Ed. EYROLLES. Paris.

[8] KREMENETSKI N., SCHTERENLIHT D., ALYCHEV V., YAKOVLEVA L. (1984). Hydraulique, Édition MIR. Moscou, 325 pages.

[9] OBATON Vincent, (2008), Les vecteurs, lycée Stendhal de Grenoble, France.

[10] PD Smith, Basic Hydraulics, 156 pages.

[11] RANALD V.GILES. (1984), Mécaniques des fluides et hydraulique, cours et problèmes Série Schaum, 475 pages.

[12] TOUMI Abdelouaheb, (1997-1999) « Cahier de pompes et stations de pompage » enseignant Pr. K.K.Omar. ENSH, Algérie.