

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté de Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Laboratoire de Mathématiques Appliquées et de Modélisation
Département de Mathématiques



Thèse :

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat 3ème cycle en Mathématiques

Option : Analyse non linéaire et Modélisation

Par : LEMITA Samir

Intitulée

***Traitement numérique des équations intégrales de Fredholm:
Généralisation des méthodes itératives***

Sous la direction du : Dr. GUEBBAI Hamza
Co-encadreur : Prof. AISSAOUI Mohamed-Zine

Devant le jury :

Président	KECHKAR Nasserline	Prof	Univ-Constantine
Examineur	CHAOUI Abderrezak	Prof	Univ-Guelma
Examineur	ELLAGGOUNE Fateh	Prof	Univ-Guelma
Examineur	HAIOUR Mohamed	Prof	U. B. M-Annaba

Résumé

L'objectif de cette thèse est de construire un nouveau processus numérique pour l'approximation de la solution d'une équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce. Nous construisons une généralisation des méthodes itératives stationnaires de Jacobi et Gauss-Seidel adaptées aux systèmes d'opérateurs linéaires bornés, cette approche est arrivée meilleur comparée aux techniques classiques.

Mots clés : Équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce, large intervalle d'intégration, noyau régulier, noyau faiblement singulier, méthode de Jacobi, méthode de Gauss-Seidel, matrice d'opérateurs, méthode de Nyström, méthode d'intégration produit (product integration).

Abstract

The objective of this thesis is to build a new numerical process to approach the solution of a linear Fredholm integral equation of the second kind. We build a generalization of the stationary iterative methods of Jacobi and Gauss-Seidel adapted to the linear bounded operators systems, this approach arrived better compared with the conventional techniques.

Key words : Fredholm integral equations of the second kind, great integration interval, regular kernel, weakly singular kernel, Jacobi method, Gauss-Seidel method, bounded operators matrix, Nyström method, product integration method.

Mathematics Subject Classification (2010) 45B05, 65F10, 65J10.

ملخص

الهدف من هذه الرسالة هو بناء طريقة عددية جديدة لتقريب حل المعادلة التكاملية الخطية لفريدهولم من النوع الثاني. تتمحور هذه الطريقة الجديدة على إنشاء تعميم للطرق التكرارية لجاكوبي و غوس سايدل حتى تتكيف مع جملة مؤثرات خطية محدودة. من خلال دراستنا تم الحكم على فعالية هذه الطرق التكرارية المعممة مقارنة بالطرق التكرارية الكلاسيكية.

كلمات مفتاحية:

المعادلات التكاملية لفريدهولم من الدرجة الثانية، المجال الزمني الكبير، النواة المنتظمة، النواة الضعيفة، الطريقة التكرارية لجاكوبي، الطريقة التكرارية لغوس سايدل، مصفوفة المؤثرات الخطية المحدودة، طريقة نيشتروم، طريقة التكامل المنتج.

Remerciements

Je tiens, avant tout, à remercier très sincèrement " Allah " pour la force et la volonté qu'il m'a données pour pouvoir achever ce travail.

J'exprime toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse : Dr. GUEBBAI Hamza. Je le remercie de m'avoir fait confiance tout au long de ces années, pour son aide, son soutien et ses conseils. Ainsi, pour le temps qu'il m'a consacré, je le remercie infiniment.

Je remercie très sincèrement Prof. AISSAOUI Mohamed-Zine, mon autre directeur de thèse, qui m'a toujours encouragé. Je le remercie pour sa collaboration, son aide et son soutien.

Je tiens également à remercier vivement Prof. KECHKAR Nasserline qui m'a fait l'honneur de présider le jury de mon doctorat, ainsi que Prof. CHAOUI Abderrezak, Prof. ELLAGGOUNE Fateh et Prof. HAIOUR Mohamed pour avoir accepté de rapporter ma thèse et de faire partie du jury.

Au Laboratoire de Mathématiques de l'université de Guelma LMAM, j'ai eu la chance d'effectuer ma thèse. Je remercie tous ces membres pour le soutien. J'adresse mes remer-

ciements aussi à tous les membres du département de mathématiques.

Enfin, je tiens à exprimer ma gratitude à toute ma famille et en particulier mes parents, pour leur confiance, leur soutien et leur amour. Je tiens aussi à remercier mes camarades, mes amis et mes collègues qui m'ont apporté leur aide et qui m'ont soutenu moralement tout au long de ces années d'études.

Table des matières

Introduction	1
1 Introduction à la théorie des équations intégrales	5
1.1 Notions sur les opérateurs linéaires bornés	5
1.2 Les opérateurs intégraux à noyau régulier	11
1.2.1 Méthode de Nyström	11
1.3 Les opérateurs intégraux à noyau faiblement singulier	14
1.3.1 Méthode d'intégration produit	16
1.4 Les méthodes itératives stationnaires	19
1.4.1 Le principe des méthodes itératives stationnaires	20
1.4.2 La méthode de Jacobi	21
1.4.3 La méthode de Gauss-Seidel	22
2 La méthode de Jacobi et Gauss-Seidel généralisée	26
2.1 Notions et résultats préliminaires	26
2.2 Formulation du système d'opérateurs	34
2.3 La méthode de Jacobi généralisée adaptée au système d'opérateurs	36
2.4 La méthode de Gauss-Seidel généralisée adaptée au système d'opérateurs	39

3 Méthodes itératives généralisées pour les équations intégrales régulières	45
3.1 Application de la méthode de Jacobi généralisée	46
3.2 Application de la méthode de Gauss-Seidel généralisée	50
3.3 Les tests numériques	52
4 Méthodes itératives généralisées pour les équations intégrales faiblement sin-	
gulières	62
4.1 Application de la méthode de Jacobi généralisée	63
4.2 Application de la méthode de Gauss-Seidel généralisée	68
4.3 Les tests numériques	70
Conclusion et perspective	77
Bibliographie	79

INTRODUCTION

Les équations intégrales présentent un grand intérêt scientifique, elles sont parmi les branches les plus importantes en mathématiques, il est connu qu'elles touchent divers domaines des mathématiques appliquées et de la physique [1]. En effet, la plus part des modèles construits à partir des problèmes physiques d'ingénierie et de biologie, sont mieux traités lorsqu'ils sont présentés sous la forme d'équations intégrales. D'autre part, avec l'avantage des machines de calcul numérique, notamment les ordinateurs, les méthodes de résolution numérique des équations intégrales jouent un rôle très important. Vu que ce genre d'équations est très bien conditionné à l'approximation numérique. Ces méthodes sont devenues aujourd'hui, un outil essentiel pour l'investigation des différents problèmes fondamentaux scientifiques qui sont difficiles, à savoir impossible à résoudre dans le passé.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la résolution numérique des équations intégrales linéaires de Fredholm de deuxième espèce régulières ou faiblement singulières, définies sur un intervalle de longueur très grand. Nous pouvons écrire ces dernières équations sous sa forme usuelle par :

$$\text{Trouver } u \text{ tel que : } \forall t \in [0, \tau], \lambda u(t) = \int_0^{\tau} k(t, s)u(s)ds + f(t), \tau \gg 1,$$

où, $k(t, s)$ est une fonction régulière ou faiblement singulière. La difficulté de l'approximation des solutions de ces équations, est accrue par la présence d'un très grand paramètre

d'intégration.

Ce type d'équation intervient fortement dans la résolution du problème de transfert radiatif en physique [2], et plus particulièrement dans la modélisation des atmosphères stellaires, où nous pouvons modéliser le problème physique sous forme d'équation intégrale de Fredholm de second espèce à noyau de convolution faiblement singulier défini sur un grand intervalle. La théorie de cette équation a été développée en détail dans [3]. Cette équation a été étudiée numériquement par plusieurs mathématiciens [3–5] : Dans ces travaux, les auteurs ont proposé une technique en utilisant la propriété de la décroissance très rapide du noyau de cette équation, permettant de modifier la structure du système linéaire à résoudre (passage d'une matrice pleine à une matrice "creuse" voire "bande"). Comme, nous insistons sur l'intérêt de la méthode de développement asymptotique de décomposition du domaine [6, 7], la contribution de la méthode Lambda-iteration et ALI method [8], où les auteurs ont établi des techniques efficaces pour essayer de surmonter la difficulté majeure de ce problème, qui réside en l'amplitude très importante de l'intervalle d'intégration. Il faut savoir que dans ces travaux, les auteurs ont ajouté des hypothèses sur les données et ont besoin des propriétés très particulières du noyau de cette équation, à savoir l'exponentielle intégrale [9].

Par contre, l'étude effectuée dans cette thèse est plus approfondie, plus générale et moins restrictive que les études précédentes : Nous allons traiter des équations intégrales de Fredholm avec noyaux plus généraux que l'exponentielle intégrale. Nous allons traiter des noyaux réguliers croissants et ceux faiblement singuliers mais sans exiger la décroissance rapide, comme par exemple le noyau faiblement singulier de type algébrique.

Dans la littérature, le processus numérique conventionnel qui étudie ces dernières équations intégrales, consiste à appliquer les méthodes d'approximations de rang fini [10], compatibles à leurs types. Cette procédure, nous oblige à résoudre des grands systèmes complètement pleins. D'ailleurs l'ordinateur est incapable de les inverser. Dans ce cas là, les méthodes itératives stationnaire (Jacobi ou bien Gauss-Seidel [11]) se présentent comme la seule issue possible, elles nous permettent d'obtenir d'une façon itérative, une

approximation de la solution de ces grands systèmes linéaires.

Notre but est de construire une généralisation des méthodes itératives de Jacobi et Gauss Seidel, adaptées aux systèmes d'opérateurs linéaires bornés. D'ailleurs, toutes les méthodes itératives stationnaires précédentes développées jusqu'à maintenant, sont limitées aux systèmes algébriques. Nous appliquons ces nouvelles méthodes itératives pour résoudre une seule équation intégrale de Fredholm après sa transformation en un système d'équations intégrales de Fredholm, de sorte que nous n'aurons pas besoin de la discrétisation totale de l'équation, mais de la diagonale seulement de matrice d'opérateurs construite dans cette généralisation. En conséquence, nous avons trouvé que ce nouveau processus est meilleur que le conventionnel. Il nous permet d'améliorer la borne d'erreur et d'obtenir une meilleure solution approchée.

Ainsi notre thèse est structurée comme suit :

Le premier chapitre fixe brièvement la description et l'analyse du processus numérique conventionnel. Nous rappelons tout d'abord l'essentiel de l'analyse fonctionnelle nécessaire aux équations intégrales. Puis, l'analyse des méthodes de résolution approchée adaptée à ce genre d'équations, en particulier la méthode Nyström et l'intégration produit. Nous donnons aussi des majorations pour l'erreur associée à chaque méthode. Enfin, nous expliquons l'intérêt des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel dans l'approximation des solutions des grands systèmes obtenus.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation des nouvelles méthodes itératives de Jacobi et Gauss-Seidel généralisées, qui représentent le résultat principal de notre travail. Ce chapitre est scindé en trois sections : La première aborde des notions et des résultats préliminaires. Dans la deuxième section, en utilisant les notions précédentes nous montrons comment formuler le système d'équations intégrales de Fredholm à partir d'une seule équation intégrale. Enfin, l'objet de la dernière section est l'état d'art numérique de ces nouvelles méthodes itératives adaptées aux systèmes d'équations intégrales, ainsi nous construisons en détail leur cadre théorique de convergence.

Le troisième chapitre traite l'application de ces méthodes généralisées (Jacobi et Gauss-

Seidel) à la résolution des équations intégrales régulières. Ces dernières sont traitées par la méthode de Nyström pour approcher les opérateurs intégraux concernés selon chaque méthode. Finalement, des tests numériques sont présentés, ils confirment l'efficacité de cette nouvelle version des méthodes itératives comparée aux méthodes conventionnelles.

Le quatrième chapitre est structuré comme le précédent, où nous appliquons les nouvelles méthodes itératives à la résolution des équations intégrales faiblement singulières, puis nous allons les faire suivre par la méthode d'intégration produit. Aussi des tests numériques sont présentés pour valider nos études.

Introduction à la théorie des équations intégrales

Sommaire

1.1	Notions sur les opérateurs linéaires bornés	5
1.2	Les opérateurs intégraux à noyau régulier	11
1.3	Les opérateurs intégraux à noyau faiblement singulier	14
1.4	Les méthodes itératives stationnaires	19

Nous rappelons dans ce chapitre les définitions et les résultats les plus importants concernant les opérateurs linéaires bornés, ceux dont nous aurons besoin pour introduire le processus classique d'approximation des équations intégrales, qui sont définies sur un grand intervalle. Ce qui nous conduit à une bonne compréhension des méthodes généralisées présentées dans le prochain chapitre.

1.1 Notions sur les opérateurs linéaires bornés

Tout au long de cette thèse, $X = C([0, \tau])$, désigne l'espace des fonctions continues sur $[0, \tau]$, supposé être un grand intervalle de \mathbb{R} , c.à.d. $\tau \gg 0$. L'espace de Banach X est

utilisé avec sa norme usuelle suivante :

$$\forall x \in X, \|x\|_X = \max_{0 \leq t \leq \tau} |x(t)|.$$

$BL(X)$ désigne l'espace des opérateurs linéaires bornés sur X , qui a la structure d'un espace de Banach avec la norme :

$$\forall A \in BL(X), \|A\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_X.$$

Définition 1.1.1. *Un opérateur $A \in BL(X)$ est dit compact, s'il transforme tout sous-ensemble borné de X en un ensemble relativement compact.*

Théorème 1.1.1. *Un opérateur $A \in BL(X)$ est compact si et seulement si, pour toute suite bornée (x_n) de X , on peut extraire de la suite (Ax_n) une sous suite convergente.*

Dans le cas particulier où $X = C([0, \tau])$, le Théorème suivant d'Arzela-Ascoli assure généralement la compacité de A .

Théorème 1.1.2. (Arzela-Ascoli) *Une condition nécessaire et suffisante de la compacité d'une famille de fonctions continues, définies sur l'intervalle compact $[0, \tau]$, est que cette famille est uniformément bornée et équicontinue.*

Dans le Théorème suivant, nous donnons des propriétés concernant les opérateurs compacts.

Théorème 1.1.3. 1- *Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.*

2- *Une combinaison linéaire des opérateurs compacts est un opérateur compact.*

3- *Le produit de deux opérateurs bornés est compact, si l'un des opérateurs est compact.*

4- *Soit $A_n \in BL(X)$ une suite d'opérateurs compacts, si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$, alors, A est compact.*

5- *Soit $A_n \in BL(X)$ à image $A(X)$ de dimension finie, alors, A est compact.*

Considérons le problème qui nous s'intéresse :

$$(E) : \quad \lambda u = Au + f,$$

où la fonction u est l'inconnue, $A \in BL(X)$, $f \in X$ et λ un scalaire donné qui peut être réel ou complexe.

Passons maintenant aux Théorèmes qui assurent l'existence et l'unicité de la solution pour le problème précédent (E) . Cette étude est nécessaire avant toute démarche de résolution numérique.

Définition 1.1.2. On appelle ensemble résolvant de A , l'ensemble défini par

$$re(A) := \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ est bijectif} \},$$

où, I est l'opérateur identité de l'espace X . Pour tout $\lambda \in re(A)$, la résolvante de A en λ est définie par

$$R(A, \lambda) = (\lambda I - A)^{-1}.$$

Théorème 1.1.4. Soient $A \in BL(X)$ et $\lambda \in re(A)$, alors, $R(A, \lambda) \in BL(X)$.

Démonstration. Pour les détails sur cette caractérisation, voir [13]. □

De ce fait, pour tout $\lambda \in re(A)$ et tout $f \in X$, il existe une unique solution u du problème (E) déterminée par

$$u = R(A, \lambda)f.$$

Théorème 1.1.5. Soit $A \in BL(X)$, si $\|A\| < |\lambda|$, alors, $\lambda \in re(A)$ et l'opérateur $\lambda I - A$ admet un opérateur inverse borné, donné par la série de Neumann

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k,$$

de plus,

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|A\|}.$$

Ce qui montre qu'il existe une unique solution u du problème (E) , pour tout $f \in X$.

Démonstration. Voir [12]. □

Nous voyons dans le Théorème suivant une autre vision pour assurer l'existence et l'unicité du problème (E)

Théorème 1.1.6. *Soit $A \in BL(X)$ un opérateur compact, alors pour que l'équation non homogène (E) admette une unique solution $u \in X$ pour tout $f \in X$, il faut et il suffit que l'équation homogène*

$$\lambda u - Au = 0,$$

admette la solution triviale $u = 0$.

Démonstration. Voir [12] □

Dans la pratique, la condition $\|A\| < |\lambda|$ du Théorème (1.1.5) est la plus utilisée pour assurer l'existence et l'unicité d'une solution unique du problème (E). C'est la condition que nous allons exiger sur λ tout au long de cette thèse, puisqu'elle est facile à vérifier. Particulièrement, nous nous intéressons dans cette thèse aux opérateurs intégraux de type Fredholm qui ont une forme générale donnée par l'expression suivante :

$$\forall x \in X : Ax(t) = \int_0^\tau k(t, s)x(s)ds,$$

où, $k \in C([0, \tau]^2)$ est appelée le noyau de l'opérateur A . Le problème (E) devient

$$\text{Trouver } u \in X \quad \text{tq : } \forall t \in [0, \tau], \lambda u(t) = \int_0^\tau k(t, s)u(s)ds + f(t).$$

Ce genre d'équation est appelé équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce. D'après le Théorème (1.1.5) la condition suivante :

$$\|A\| = \max_{0 \leq t \leq \tau} \int_0^\tau |k(t, s)|ds < |\lambda|,$$

est suffisante pour confirmer l'existence et l'unicité de la solution. L'objectif principal maintenant est de déterminer la fonction inconnue u en utilisant un certain nombre de

techniques des solutions. Analytiquement, nous pouvons trouver la solution exacte u facilement, si le noyau $k(t, s)$ s'écrit sous la forme dégénérée suivante :

$$k(t, s) = \sum_i^{\text{fini}} \varphi_i(t) \phi_i(s).$$

Cette forme du noyau rend l'image de l'opérateur A de dimension fini et engendré par la famille $\varphi_i(t)$, ce qui nous permet d'obtenir la solution u par une simple résolution d'un système linéaire. De cette manière, l'idée fondamentale dans la plupart des méthodes numériques de la résolution des équations intégrales, est basée sur l'approximation de l'opérateur intégrale A , par un opérateur intégrale à noyau dégénéré, que nous pouvons noter par A_n . Ainsi, l'équation exacte va être approchée par

$$(E_n) : \quad \lambda u_n = A_n u_n + f,$$

ce qui est réduit aussi à la résolution d'un système de dimension fini pour trouver la solution approchée u_n . Il est clair que l'équation approchée n'admettra une solution unique, que si $\lambda \in \text{re}(A_n)$. Il convient donc de le savoir, suivant le type d'approximation de la suite A_n . Dans la suite nous allons donc brièvement présenter les différents types d'approximations dans l'espace $BL(X)$.

Définition 1.1.3. *On dit que la suite $A_n \in BL(X)$ converge ponctuellement (ou simplement) vers $A \in BL(X)$, si et seulement si, pour tout $x \in X$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(A_n - A)x\| = 0.$$

Définition 1.1.4. *On dit que $A_n \in BL(X)$ est une suite d'approximations en norme de $A \in BL(X)$, si et seulement si,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0.$$

Définition 1.1.5. *On dit que $A_n \in BL(X)$ est une suite d'approximations collectivement compacte de $A \in BL(X)$, si et seulement si, A_n converge ponctuellement vers $A \in BL(X)$ et qu'il existe $n_0 \geq 0$ tel que :*

$$\bigcup_{n \geq n_0} \{(A_n - A)x, x \in X, \|x\| \leq 1\}$$

est un sous-ensemble relativement compact de X .

Définition 1.1.6. On dit que $A_n \in BL(X)$ est ν -convergente vers $A \in BL(X)$, si et seulement si, la suite $(\|A_n\|)$ est bornée,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(A_n - A)A\| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|(A_n - A)A_n\| = 0.$$

Les deux Propositions suivantes donnent les relations entre les définitions précédentes.

Proposition 1.1.1. Soit $A_n \in BL(X)$ une suite d'approximations collectivement compacte d'un opérateur compact $A \in BL(X)$, alors, cette suite est ν -convergente vers A .

Proposition 1.1.2. Soit $A_n \in BL(X)$ une suite d'approximation uniforme de $A \in BL(X)$, alors, cette suite est ν -convergente vers A .

Les deux méthodes numériques qui nous allons utiliser dans cette thèse, vérifient la ν -convergente seulement comme un type d'approximation. Donc, nous utilisons seulement le Théorème suivant qui nous permet de confirmer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (E_n) .

Théorème 1.1.7. Soient $A \in BL(X)$, E un compact de \mathbb{C} contenu dans $re(A)$ et A_n la suite dans $BL(X)$ ν -convergente vers A , alors il existe n_0 , tel que

$$\sup\{\|R(A_n, \lambda)\| : \lambda \in E, n \geq n_0\} < \infty.$$

Démonstration. voir le Théorème 2.6 dans [13]. □

Une application directe de ce dernier Théorème (1.1.7) nous confirme que pour n assez grand, la résolvante de A_n en λ existe et elle est uniformément bornée. Par conséquent, pour chaque $f \in X$, l'équation approchée (E_n) admet une solution unique $u_n \in X$.

1.2 Les opérateurs intégraux à noyau régulier

La première équation que nous allons traiter dans cette thèse, est une équation linéaire de Fredholm de deuxième espèce avec noyau régulier de la forme :

$$\text{Trouver } u \in X \text{ tel que } \forall t \in [0, \tau], \lambda u(t) = \int_0^\tau g(t, s)u(s)ds + f(t), \lambda \neq 0 \quad (1.2.1)$$

où, $f(t) \in X$ est une fonction donnée (le terme source) et λ est un paramètre réel ou complexe, $g : [0, \tau]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est le noyau supposé être **positive et continu**. L'équation (1.2.1) est dite régulière à cause de la régularité de son noyau.

Sous une autre forme simple en terme d'opérateur, l'équation (1.2.1) peut être réécrite comme suit

$$\lambda u = Tu + f, \lambda \neq 0, \quad (1.2.2)$$

où, T est l'opérateur intégral de Fredholm à noyau g , défini de X dans lui-même par

$$\forall x \in X, \forall t \in [0, \tau], Tx(t) = \int_0^\tau g(t, s)x(s)ds.$$

Cet opérateur est linéaire borné et compact [12], de norme donnée par

$$\|T\| = \max_{0 \leq t \leq \tau} \int_0^\tau g(t, s)ds.$$

Dans la suite, nous prenons $|\lambda| > \|T\|$, qui assure d'après le Théorème (1.1.5), que l'équation (1.2.2) a une solution unique u déterminée par

$$u = R(T, \lambda)f.$$

1.2.1 Méthode de Nyström

Suivant la complexité de l'opérateur T , l'équation (1.2.2) devient difficile, voire impossible à résoudre. Nous nous contentons alors d'une solution approchée à l'aide des

méthodes numériques pour résoudre les équations intégrales. Précisément dans cette partie, nous approchons l'opérateur T par un opérateur à noyau dégénéré T_n , issue de la méthode de Nyström [10]. Cette méthode, aussi appelée méthode de quadrature, consiste à appliquer les méthodes d'intégration numériques pour aboutir à un système linéaire.

Soit la subdivision uniforme de l'intervalle $[0, \tau]$, d'un pas h_n (qu'on fixera plus tard) par

$$0 = s_1 < s_2 < \dots < s_{\sigma_n-1} < s_{\sigma_n} = \tau,$$

où, σ_n note le nombre de noeuds sur tout l'intervalle. Pour ces noeuds, nous définissons la quadrature suivante, qui revient à la construction d'une suite d'approximations T_n de T , définie par

$$\forall \sigma_n \geq 1, \forall x \in X, \forall t \in [0, \tau], T_n x(t) \approx \sum_{p=1}^{\sigma_n} w_p g(t, s_p) x(s_p),$$

où, $\{w_p\}_{p=1}^{\sigma_n}$ les poids de notre quadrature sont des termes positifs bien choisis, vérifiant

$$W := \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{p=1}^{\sigma_n} |w_p| < \infty.$$

et

$$\forall x \in X, \sup_{t \in [0, \tau]} \left| \int_0^\tau g(t, s) x(s) ds - \sum_{p=1}^{\sigma_n} w_p g(t, s_p) x(s_p) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Alors, la solution u de l'équation intégrale (1.2.2) est approchée par la solution $u_n(t)$ à savoir

$$\forall t \in [0, \tau], \lambda u_n(t) = T_n u_n(t) + f(t). \quad (1.2.3)$$

La suite T_n est bornée, en plus elle est ν -convergente vers T (voir le Lemme 11.4.2 dans [12]). En appliquant le Théorème (1.1.7), nous aurons pour n assez grand et pour tout $f \in X$, l'équation approchée (1.2.3) admet une solution unique. En plus, nous arrivons à obtenir l'existence de n_1 tel que :

$$C_1 := \sup_{n \geq n_1} \|(\lambda I - T_n)^{-1}\| < \infty, \quad (1.2.4)$$

Cette constante joue un rôle important dans la convergence de la méthode de Nyström. En plus, elle montre que u_n est bien définie.

Passons maintenant à la collocation de l'équation (1.2.3) aux points noeuds, pour tout $1 \leq q \leq \sigma_n$

$$\lambda u_n(t_q) = T_n u_n(t_q) + f(t_q).$$

Nous posons pour tout $1 \leq p, q \leq \sigma_n$

$$A_{\sigma_n}^1(p, q) := w_p g(t_q, s_p), b_{\sigma_n}^1(q) := f(t_q), x_{\sigma_n}(q) = u_n(t_q),$$

alors, l'équation (1.2.3) conduit au système linéaire, de dimension σ_n et d'inconnue x_{σ_n} , suivant

$$(\lambda I_{\sigma_n} - A_{\sigma_n}^1) x_{\sigma_n} = b_{\sigma_n}^1, \tag{1.2.5}$$

où, I_{σ_n} désigne la matrice identité d'ordre σ_n . Une fois le système (1.2.5) résolu, la relation (1.2.3) nous donne $u_n(t)$ sous la forme

$$u_n(t) = \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{p=1}^{\sigma_n} w_p g(t, s_p) x_{\sigma_n}(p) + f(t) \right). \tag{1.2.6}$$

La formule (1.2.6) s'appelle "**Nyström interpolation formula**".

Le Théorème suivant nous assure que la solution approchée u_n , converge vers la solution exacte u si $n \rightarrow \infty$.

Théorème 1.2.1. *Soient $u(t)$ la solution de (1.2.2), $u_n(t)$ la solution de (1.2.3), alors, on a l'estimation d'erreur suivante*

$$\|u(t) - u_n(t)\|_X \leq C_1 \omega_1(h_n, u), \tag{1.2.7}$$

où, C_1 est donnée par (1.2.4) et $\omega_1(h_n, u)$ par

$$\omega_1(h_n, u) := \sup_{t \in [0, \tau]} \left| \int_0^\tau g(t, s) u(s) ds - \sum_{p=1}^{\sigma_n} w_p g(t, s_p) u(s_p) \right| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

Démonstration. Nous utilisons le fait que,

$$u - u_n = (\lambda I - T_n)^{-1}(T - T_n)u,$$

puis, en appliquant le Lemme 4.1.2 de [10], pour obtenir la borne d'erreur décrit ci-dessus. □

Pratiquement, avec le choix de n assez grand le pas h_n va diminuer, en plus, à cause de la présence du grand paramètre τ , le dernier système (1.2.5) va être assez grand, donc il ne peut être résolu directement la plupart du temps. Dans ce cas, il y a beaucoup de méthodes itératives qui devraient être utilisées [11], comme le schéma itératif de Jacobi ou Gauss-Seidel, pour approcher leurs solutions, ainsi nous notons par $x_{\sigma_n}^*$ la solution approximative du système (1.2.5), en utilisant ces dernières méthodes itératives, par conséquent, la solution approchée u_n donnée par la formule (1.2.6) sera donnée par

$$u_n(t) = \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{p=1}^{\sigma_n} w_p g(t, s_p) x_{\sigma_n}^*(p) + f(t) \right).$$

D'ailleurs, ce processus conventionnel suivi pour trouver $u_n(t)$ a été déjà noté **option B** dans notre premier papier [14], où nous l'avons comparé avec le nouveau processus **option A**, qui sera développé plus en détail dans le prochain chapitre.

1.3 Les opérateurs intégraux à noyau faiblement singulier

Dans cette partie, comme la précédente, nous rappelons les définitions et les résultats principaux, concernant une deuxième équation intégrale que nous allons étudier.

Considérons l'équations intégrale suivante :

Trouver $v \in X$, tel que $\forall t \in [0, \tau]$, $\lambda v(t) = \int_0^\tau g(|s - t|)v(s)ds + f(t)$, $\lambda \neq 0$, (3.8)

où, $f(t) \in X$ est une fonction donnée et λ est un paramètre réel ou complexe. Nous supposons que la fonction $g :]0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$ est faiblement singulière en zéro au sens suivant :

$$(\mathcal{H}) : \left\{ \begin{array}{l} \lim_{s \rightarrow 0^+} g(s) = +\infty, \\ g \in C(]0, \tau]) \cap L^1([0, \tau]), \\ g(s) \geq 0 \text{ pour tout } s \in]0, \tau], \\ g \text{ est une fonction strictement décroissante sur }]0, \tau]. \end{array} \right.$$

L'équation (1.3.8) est dite faiblement singulière à cause de la singularité faible de son noyau. Ce type d'équations représente un grand intérêt dans le domaine de transfert radiatif en physique [2].

L'équation (1.3.8) peut être réécrite sous la forme d'opérateur équivalente

$$\lambda v = Sv + f, \lambda \neq 0, \tag{1.3.9}$$

où,

$$\forall x \in X, \forall t \in [0, \tau], Sx(t) = \int_0^\tau g(|s - t|)x(s)ds,$$

est appelé opérateur intégral de noyau faiblement singulier g , défini de l'espace X dans lui-même. Nous pouvons voir facilement que l'opérateur S est linéaire, borné et compacte, en outre que sa norme est exactement calculée par

$$\|S\| = 2 \int_0^{\tau/2} g(s)ds.$$

Pour les détails de la démonstration, voir [15]. Pour cette équation nous prenons

$$|\lambda| > 2 \int_0^{\tau/2} g(s)ds,$$

pour assurer que l'équation (1.3.9) a une solution unique déterminée par

$$v = R(S, \lambda)f.$$

1.3.1 Méthode d'intégration produit

L'approche numérique reste la seule issue pour la résolution de cette équation (1.3.9), vu que la singularité et la forme du noyau rendent la résolution analytique, pratiquement impossible. Pour le faire, nous devons utiliser une méthode numérique appropriée à la singularité du noyau g . Donc, nous allons appliquer la méthode d'intégration produit [10]. Cette méthode est facile et efficace, elle nous permet d'approcher l'opérateur S par S_n , qui est un opérateur à noyau dégénéré et absorber la singularité de son noyau.

Nous reprenons la même subdivision de la section précédente :

$$0 = s_1 < s_2 < \dots < s_{\sigma_n-1} < s_{\sigma_n} = \tau.$$

Nous considérons les fonctions chapeaux $\{e_p(s)\}_{p=1}^{\sigma_n}$, qui définissent une base d'interpolation pour l'espace X , données par, pour $2 \leq p \leq \sigma_n - 1$,

$$e_p(s) = \begin{cases} 1 - \frac{|s - s_p|}{h_n}, & s_{p-1} \leq s \leq s_{p+1}, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

$$e_1(s) = \begin{cases} \frac{s_2 - s}{h_n}, & s_1 \leq s \leq s_2, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

$$e_{\sigma_n}(s) = \begin{cases} \frac{s - s_{\sigma_n-1}}{h_n}, & s_{\sigma_n-1} \leq s \leq s_{\sigma_n}, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Pour cette méthode, la suite d'approximation S_n est donnée par

$$\forall \sigma_n \geq 1, \forall x \in X, \forall t \in [0, \tau], S_n x(t) \approx \sum_{p=1}^{\sigma_n} w_p(t) x(s_p),$$

où,

$$w_p(t) = \int_0^{\tau} g(|s - t|) e_p(s) ds, \quad 1 \leq p \leq \sigma_n.$$

Cette méthode numérique s'appelle aussi "**the product trapezoidal rule**". Alors, l'équation (1.3.9) va être approché par

$$\forall t \in [0, \tau], \lambda v_n(t) = S_n v(t) + f(t). \quad (1.3.10)$$

Théorème 1.3.1. $\forall \sigma_n \geq 1$, la suite S_n est bornée par la constante γ :

$$\|S_n\| \leq \max_{0 \leq t \leq \tau} \int_0^{\tau} g(|s-t|) ds = 2 \int_0^{\tau/2} g(s) ds = \gamma. \quad (1.3.11)$$

Aussi la suite S_n est ν -convergente vers S .

Démonstration. Voir le Théorème 11.5.1 dans [12]. □

Corollaire 1.3.1. Il existe n_2 , tel que

$$C_2 := \sup_{n \geq n_2} \|(\lambda I - S_n)^{-1}\| < \infty. \quad (1.3.12)$$

Démonstration. Le même principe du Théorème (1.1.7). □

D'après le Corollaire (1.3.1), pour n assez grand et $f \in X$, l'équation approchée (1.3.10) admet une unique solution. Nous trouvons par la collocation de l'équation (1.3.10) aux noeuds, pour tout $1 \leq q \leq \sigma_n$,

$$\lambda v_n(t_q) = S_n v_n(t_q) + f(t_q).$$

Ce qui est revient à la résolution d'un système linéaire, de dimension finie σ_n et d'inconnue y_{σ_n} suivant :

$$(\lambda I_{\sigma_n} - A_{\sigma_n}^2) y_{\sigma_n} = b_{\sigma_n}^2. \quad (1.3.13)$$

Les coefficients de la matrice $A_{\sigma_n}^2$ et du vecteur $b_{\sigma_n}^2$ du système (1.3.13) sont donnés par, pour tout $1 \leq p, q \leq \sigma_n$,

$$A_{\sigma_n}^2(p, q) := w_p(t_q), \quad b_{\sigma_n}^2(q) := f(t_q),$$

et l'inconnue y_{σ_n} par

$$y_{\sigma_n}(q) = v_n(t_q).$$

Une fois le système (1.3.13) résolu, alors $v_n(t)$ est donnée par la formule d'interpolation suivante :

$$v_n(t) = \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{p=1}^{\sigma_n} w_p(t) y_{\sigma_n}(p) + f(t) \right). \quad (1.3.14)$$

Le Théorème suivant nous assure que la solution approchée v_n converge vers la solution exacte v si $n \rightarrow \infty$.

Théorème 1.3.2. Soient $v(t)$ la solution de (1.3.9), $v_n(t)$ la solution de (1.3.10), alors, on a l'estimation d'erreur suivante :

$$\|v(t) - v_n(t)\|_X \leq C_2 \gamma \omega_2(h_n, v), \quad (1.3.15)$$

où γ , C_2 sont données par (1.3.11), (1.3.12) respectivement et $\omega_2(h_n, v)$ est le module de continuité de la fonction v sur l'intervalle $[0, \tau]$, défini par

$$\omega_2(h_n, v) = \max_{|s-t| \leq h_n} |v(t) - v(s)|.$$

Démonstration. Nous utilisons le fait que,

$$v - v_n = (\lambda I - S_n)^{-1}(S - S_n)v,$$

puis, nous appliquons le Théorème 4.2.1 de [10] pour conclure. □

Pratiquement, la matrice $A_{\sigma_n}^2$ est complètement pleine de dimension très grand, il faut résoudre le système (1.3.13) en utilisant la méthode itérative de Jacobi ou bien Gauss-Seidel. Si nous notons $y_{\sigma_n}^*$ comme sa solution approchée, alors la formule de $v_n(t)$ donnée par (1.3.14) sera changer par la formule suivante :

$$v_n(t) = \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{p=1}^{\sigma_n} w_p(t) y_{\sigma_n}^*(p) + f(t) \right).$$

D'autre part, nous avons noté ce processus conventionnel pour trouver $v_n(t)$ par "**Conventional Jacobi method**" dans notre deuxième papier [16] et le nouveau processus par "**Generalized Jacobi method**" qui nous présentons en détail dans le prochain chapitre.

Remarque 1.3.1. *Le sens du caractère faiblement singulier d'un noyau est souvent plus actif, dans la plupart des ouvrages sur les équations intégrales, où les chercheurs traitent d'autres types de méthodes numériques pour approcher ces équations. Nous rappelons la méthode de soustraction de la singularité, développée par Anselone [17]. La famille de projections bornées, par exemple le choix de Sloan [18], Galerkin [19], Kantorovich [20]*

et Kulkarni [21]. En outre, nous ajoutons la méthode d'intégration produit intermédiaire, traitée par Titaud [3], où il a construit une grille intermédiaire à partir de la grille initiale et il a identifié une nouvelle famille de fonctions de bases. Aussi, nous rappelons la nouvelle quadrature numérique étudiée par Largillier [22] et comme conclusion, nous trouvons beaucoup de méthodes numériques efficaces qui peuvent être employées.

1.4 Les méthodes itératives stationnaires

La discrétisation numérique des problèmes linéaires mène aux systèmes linéaires, où la taille des matrices obtenues dépend de l'ordre de la convergence : En conséquence, concernant nos équations intégrales, définies sur les grands intervalles, (1.2.1) et (1.3.8) ; pour obtenir une meilleur approximation, nous devons résoudre des systèmes énormes, comme ceux définis par (1.2.5) et (1.3.13). Dans la majorité du temps, ces derniers systèmes ne peuvent pas être résolus directement. Evidemment, quelques méthodes de résolution basique comme, l'élimination gaussienne, la décomposition LU ou la factorisation de Cholesky, ne sont pas efficaces pour ce genre de grands systèmes pleins, puisqu'elles sont trop lentes et beaucoup trop coûteuses. D'autre part, les erreurs de calcul dépendent directement du nombre de calculs effectués, donc les erreurs d'arrondi se propagent au cours des calculs et peuvent augmenter l'erreur du résultat final. Aussi, n'oublions pas le conditionnement de la matrice obtenu, qui peut être mauvais à cause de sa grande taille. Comme conclusion, les méthodes les plus souvent utilisées et les plus efficaces dans ce cas, sont les méthodes itératives [11]. L'objet de cette partie est de donner une brève introduction théorique de ces méthodes et plus particulièrement la méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel. Nous allons les employer pour résoudre les systèmes décrits par (1.2.5) et (1.3.13).

1.4.1 Le principe des méthodes itératives stationnaires

Considérons un grand système linéaire de la forme présentée par (1.2.5) et (1.3.13),

$$Ax = b, \quad (1.4.16)$$

où, $A = (a_{pq}), 1 \leq p, q \leq \sigma_n$, désigne une matrice de taille $\sigma_n \times \sigma_n$ de nombres réels, $b = (b_p), 1 \leq p \leq \sigma_n$, un vecteur colonne réel et $x = (x_p), 1 \leq p \leq \sigma_n$, est le vecteur des inconnues du système. Nous supposons que la matrice A est régulière, ce qui assure l'existence et l'unicité de la solution x pour n'importe quel vecteur b donné. Le but est de construire une approximation de la solution de (1.4.16).

L'idée de base des méthodes itératives est de construire une suite de vecteurs x^k qui converge vers le vecteur x , solution du système (1.4.16), c.à.d.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x.$$

L'intérêt des méthodes itératives, comparées aux méthodes directes, est d'être simple à réaliser, simple à programmer et nécessitant moins de place mémoire. Cependant le temps de calcul est souvent plus long.

La stratégie générale pour construire les méthodes itératives, est la construction d'une relation de récurrence linéaire, basée sur une décomposition (splitting) de la matrice A sous la forme

$$A = P - N,$$

où, P et N sont des matrices à déterminer avec P non singulière. La matrice P est appelée matrice de préconditionnement, elle est choisie pour être facile à inverser. Il est ensuite possible d'écrire le système (1.4.16) sous la forme équivalente suivante :

$$Px = Nx + b,$$

le système précédent peut être réécrit également

$$x = P^{-1}Nx + P^{-1}b.$$

Nous pouvons caractériser la formule générale de la méthode itérative associée par

$$\begin{cases} x^{k+1} = Bx^k + c, & k \geq 0, \\ x^0 & \text{choisie,} \end{cases} \quad (1.4.17)$$

où, $B = P^{-1}N$ est appelée la matrice d'itération de la méthode itérative et $c = P^{-1}b$.

Définition 1.4.1. *Le rayon spectral $\rho(B)$ de la matrice B est le plus grand des modules des valeurs propres de B et on écrit*

$$\rho(B) = \max_i |\lambda_i(B)|,$$

où, $\lambda_i(B)$ sont les valeurs propres de la matrice B .

Théorème 1.4.1. *La suite x^k ainsi définie converge pour tout x^0 donné, si et seulement si, $\rho(B) < 1$. En plus, la convergence est d'autant plus rapide que $\rho(B)$ est petit.*

Démonstration. Voir le livre [11]. □

Dans la pratique, il faudra décomposer $A = P - N$ de façon que la suite x^k convergente (ca veut dire que la condition $\rho(P^{-1}N) < 1$ doit être vérifiée) et que P^{-1} se déduise facilement de P . Simplement, le système (1.4.17) est facile à résoudre, d'ailleurs, nous obtiendrons la décomposition de la matrice A à partir de différents types de regroupements des matrices P et N , ce qui va nous amener aux deux méthodes Jacobi et Gauss-Seidel, présentées en détail dans la suite.

1.4.2 La méthode de Jacobi

Nous supposons désormais que les éléments diagonaux de la matrice A sont non nuls. Nous notons par D , $-E$ et $-F$:

D : La matrice diagonale obtenue à partir des éléments diagonaux de A .

$-E$: La matrice triangulaire inférieure de A , avec des 0 sur la diagonale. (triangulaire inférieure stricte de la matrice A).

$-F$: La matrice triangulaire supérieure de A , avec des 0 sur la diagonale. (triangulaire supérieure stricte de la matrice A).

Cela permet d'identifier le splitting suivant pour A ,

$$A = D - E - F.$$

Pour construire la première méthode itérative la plus simple, nous choisissons

$$P = D \quad \text{et} \quad N = E + F.$$

Le schéma itératif (1.4.17) devient

$$\begin{cases} x^{k+1} = B_J x^k + D^{-1}b, & k \geq 0, \\ x^0 \quad \text{choisie,} \end{cases} \quad (1.4.18)$$

où, $B_J = D^{-1}(E + F)$ est la matrice d'itération de la méthode de Jacobi. Une écriture par composante du schéma de Jacobi (1.4.18) en fonction des éléments de la matrice A , est donnée par la relation suivante :

$$\begin{cases} x_p^{k+1} = \frac{1}{a_{pp}} \left(b_p - \sum_{q=1, q \neq p}^{\sigma_n} a_{pq} x_q^k \right), & k \geq 0, \quad p = 1, \dots, \sigma_n, \\ x_p^0 \quad \text{choisie.} \end{cases} \quad (1.4.19)$$

1.4.3 La méthode de Gauss-Seidel

Pour construire cette méthode, nous fixons à partir du splitting de A ,

$$P = D - E \quad \text{et} \quad N = F.$$

Il est clair que P est une matrice triangulaire inférieure inversible. Le schéma itératif de Gauss-Seidel est donné par

$$\begin{cases} x^{k+1} = B_{GS}x^k + (D - E)^{-1}b, & k \geq 0, \\ x^0 \text{ choisie,} \end{cases} \quad (1.4.20)$$

où, la matrice d'itération associée B_{GS} est donnée par

$$B_{GS} = (D - E)^{-1}F.$$

Par calculs successifs, le schéma de Gauss-Seidel (1.4.20) en fonction des éléments de la matrice A , est le suivant :

$$\begin{cases} x_p^{k+1} = \frac{1}{a_{pp}} \left(b_p - \sum_{q=1}^{p-1} a_{pq}x_q^{k+1} - \sum_{q=p+1}^{\sigma_n} a_{pq}x_q^k \right), & k \geq 0, \quad p = 1, \dots, \sigma_n, \\ x_p^0 \text{ choisie.} \end{cases} \quad (1.4.21)$$

Remarque 1.4.1. Concernant les deux schémas itératifs (1.4.19) et (1.4.21), l'algorithme de Gauss-Seidel modifie l'algorithme de Jacobi, pour utiliser à chaque itération les valeurs x_p^{k+1} déjà calculées.

Cependant, la convergence de x^k en utilisant l'un de ces deux schémas (1.4.18) ou (1.4.20), est assuré sous certaines conditions exigées sur la matrice A , ce que nous allons voir dans la suite.

Définition 1.4.2. La matrice A est dite à diagonale strictement dominante si,

$$\forall p, 1 \leq p \leq \sigma_n, |a_{pp}| > \sum_{q=1, q \neq p}^{\sigma_n} |a_{pq}|.$$

Théorème 1.4.2. Si A est une matrice à diagonale strictement dominante, alors, les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel sont convergentes.

Démonstration. Il faut prouver seulement que le rayon spectral de la matrice d'itération B_J (resp. B_{GS}) de la méthode de Jacobi (resp. Gauss-Seidel) est strictement inférieure à 1, c.à.d.

$$\rho(B_J) < 1 \quad \text{et} \quad \rho(B_{GS}) < 1.$$

Pour plus des détails voir [11]. □

Dans le Corollaire suivant, nous pouvons voir que,

Corollaire 1.4.1.

$$\rho(B_{GS}) < \rho(B_J) < 1.$$

Ceci montre que l'algorithme de Gauss-Seidel en général converge plus rapidement que l'algorithme de Jacobi.

En pratique la dominance stricte n'est pas indispensable, l'inégalité large suffit pour la plupart des matrices inversibles. Ce qui va nous amener à une autre condition suffisante de convergence dans le prochain Théorème.

Théorème 1.4.3. *Si A est une matrice symétrique définie positive, alors, la méthode de Gauss-Seidel converge (la méthode de Jacobi pas forcément).*

Démonstration. Pour les détails voir [11]. □

Commentaires bibliographiques :

Les méthodes itératives sont principalement utilisées pour des matrices de grandes tailles. Pour toute méthode itérative, il convient de s'assurer que la convergence est suffisamment rapide pour que le temps de calcul ne soit pas consommé sans que la recherche d'une solution ne soit réellement effectuée. D'ailleurs, nous pouvons modifier l'algorithme de Gauss-Seidel, en introduisant un paramètre ω_0 dit paramètre de relaxation, la dernière est connue sous le nom **SOR** (successive over relaxation) [11], qui permet d'améliorer la rapidité de la convergence, mais dans lequel nous ne pouvons pas valablement espérer de trouver un paramètre optimal de relaxation ω_0 . En outre, il existe d'autres méthodes itératives comme par exemple l'algorithme du gradient conjugué, méthode de Krylov [11], ainsi que d'autres techniques développées dans le même sens dans [23], [24] et [25]. Concernant la méthode de Jacobi et Gauss-Seidel, dernièrement des chercheurs ont généralisé des méthodes [26], [27], [28], [29] et [30] appelées : Generalized Jacobi (Gauss-Seidel), refinement of Jacobi (Gauss-Seidel) et refinement of generalized Jacobi (Gauss-Seidel) respectivement, où, ils ont trouvé des bons résultats en comparaison avec

les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel classiques. Mais comme nous avons déjà dit précédemment, toutes les méthodes itératives précédentes développées jusqu'à maintenant, ont été adaptées aux systèmes algébriques linéaires et l'amélioration entre eux est seulement dans la vitesse de convergence. Dans notre thèse nous allons voir comment appliquer ces méthodes itératives pour les systèmes d'opérateurs.

La méthode de Jacobi et Gauss-Seidel généralisée

Sommaire

2.1	Notions et résultats préliminaires	26
2.2	Formulation du système d'opérateurs	34
2.3	La méthode de Jacobi généralisée adaptée au système d'opérateurs	36
2.4	La méthode de Gauss-Seidel généralisée adaptée au système d'opérateurs	39

Ce chapitre représente l'essence même de notre contribution mathématique. Dans lequel, nous allons construire une généralisation des méthodes itératives étudiées précédemment, pour obtenir une forme adaptée aux systèmes d'opérateurs linéaires.

2.1 Notions et résultats préliminaires

Pour $N \geq 2$, on définit une subdivision de l'intervalle $[0, \tau]$ par

$$H = \frac{\tau}{N}, t_j = (j - 1) H, 1 \leq j \leq N + 1.$$

Par cette subdivision, nous obtenons N sous intervalles de longueur H , qui vont jouer un rôle essentiel dans notre travail de généralisation.

Définition 2.1.1. Soit $\{(X_j, \|\cdot\|_j)\}_{j=1}^N$, $N \geq 2$, une famille d'espaces de Banach, où, $X_j = C([t_j, t_{j+1}])$ associé à la norme suivante :

$$\forall z \in X_j, \|z\|_j = \max_{t_j \leq t \leq t_{j+1}} |z(t)|.$$

Définition 2.1.2. On définit $B_{ij} = BL(X_j, X_i)$ pour $1 \leq i, j \leq N$, l'espace de Banach de tous les opérateurs bornés définis de X_j à image dans X_i , avec la norme d'opérateurs suivante :

$$\forall K \in B_{ij}, \|K\|_{ij} = \sup_{\|z\|_j=1} \|Kz\|_i.$$

Définition 2.1.3. Soit $\tilde{X}_N = \prod_{j=1}^N X_j$ l'espace produit qui a la structure d'espace de Banach associé à la norme

$$\forall Z = (z_1, \dots, z_N) \in \tilde{X}_N, \|Z\|_{\tilde{X}_N} = \max_{1 \leq j \leq N} \|z_j\|_j.$$

Définition 2.1.4. On définit $\tilde{B}_N = BL(\tilde{X}_N)$, l'espace de Banach de tous les opérateurs bornés définis de \tilde{X}_N dans lui-même, associé à la norme d'opérateurs suivante :

$$\forall \tilde{K} \in \tilde{B}_N, \|\tilde{K}\| = \sup_{\|Z\|_{\tilde{X}_N}=1} \|\tilde{K}Z\|_{\tilde{X}_N}.$$

En utilisant les définitions précédentes (2.1.2) et (2.1.3), nous allons construire une famille d'opérateurs intégraux à partir de l'opérateur T et S présentés dans le chapitre précédent.

Définition 2.1.5. Nous définissons la famille des opérateurs $\{T_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq N}$ et $\{S_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq N}$ à partir de T et S respectivement par

$$\begin{aligned} T_{ij} : X_j &\rightarrow X_i, \\ z &\mapsto T_{ij}z(t) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} g(s, t)z(s)ds, \quad t \in [t_i, t_{i+1}]. \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

$$\begin{aligned}
S_{ij} : X_j &\rightarrow X_i, \\
z &\mapsto S_{ij}z(t) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} g(|s-t|)z(s)ds, \quad t \in [t_i, t_{i+1}].
\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Il est clair que $T_{ij}, S_{ij} \in B_{ij}$ pour tout $1 \leq i, j \leq N$, en plus, nous avons

$$\begin{aligned}
\|T_{ij}\|_{ij} &= \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \int_{t_j}^{t_{j+1}} g(s, t) ds, \\
\|S_{ij}\|_{ij} &= \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \int_{t_j}^{t_{j+1}} g(|s-t|) ds.
\end{aligned}$$

Le Corollaire suivant nous donne la forme spécifique du T_{ij} et S_{ij} pour tout $1 \leq i, j \leq N$ dans le cas où $i = j$.

Corollaire 2.1.1. *Pour tout $1 \leq i \leq N$, il est clair que $\|T_{ii}\|_{ii} < |\lambda|$ et $\|S_{ii}\|_{ii} < |\lambda|$, en plus, on peut voir que les opérateurs*

$$(\lambda I_{ii} - T_{ii}) \quad \text{et} \quad (\lambda I_{ii} - S_{ii}),$$

sont des bijections dans X_i respectivement et leurs inverses sont des opérateurs linéaires bornés [12]

$$\begin{aligned}
\|(\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1}\|_{ii} &\leq \frac{1}{|\lambda| - \|T_{ii}\|_{ii}}, \\
\|(\lambda I_{ii} - S_{ii})^{-1}\|_{ii} &\leq \frac{1}{|\lambda| - \|S_{ii}\|_{ii}},
\end{aligned}$$

où, I_{ii} est l'opérateur identité de X_i .

D'autre part, à cause de la convolution du noyau de l'opérateurs S_{ij} pour tout $1 \leq i, j \leq N$, nous pouvons calculer sa norme exactement. Ce que nous allons voir dans le Lemme suivant :

Lemme 2.1.1. Pour tout $1 \leq i, j \leq N$, les normes $\|S_{ij}\|_{ij}$ sont données par

$$\|S_{ij}\|_{ij} = \begin{cases} H/2 & \\ 2 \int_0^{H/2} g(s) ds, & \text{si } i = j, \\ \int_{t_{j+1}-t_{i+1}}^{t_j-t_{i+1}} g(s) ds, & \text{si } i < j, \\ \int_{t_i-t_{j+1}}^{t_i-t_j} g(s) ds, & \text{si } i > j. \end{cases}$$

Démonstration. Définissons tout d'abord la fonction $G : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$, ci-dessous qui joue un rôle technique important tout au long de cette démonstration

$$G(t) := \int_0^t g(s) ds.$$

Cas 1 : Si $i = j$.

Soit $y_m(t) : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} y_m(t) &:= \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(|s-t|) ds = \int_{t_i}^t g(t-s) ds + \int_t^{t_{i+1}} g(s-t) ds \\ &= G(t-t_i) + G(t_{i+1}-t), \end{aligned}$$

la fonction $y_m(t)$ possède une symétrie axiale par rapport à $t = \frac{t_i + t_{i+1}}{2}$ et

$$y'_m(t) = g(t-t_i) - g(t_{i+1}-t) \begin{cases} > 0 & \text{si } t_i < t < \frac{t_i+t_{i+1}}{2}, \\ < 0 & \text{si } \frac{t_i+t_{i+1}}{2} < t < t_{i+1}. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\|S_{ii}\|_{ii} = \max_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} \{y_m(t)\} = y_m\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right) = 2 \int_0^{H/2} g(s) ds.$$

Cas 2 : Si $i < j$.

Soit $y_r(t) : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$y_r(t) := \int_{t_j}^{t_{j+1}} g(s-t) ds = G(t_{j+1}-t) - G(t_j-t),$$

nous avons

$$y'_r(t) = g(t_j - t) - g(t_{j+1} - t) > 0 \quad \text{pour tout } t_i < t < t_{i+1}.$$

Par conséquent,

$$\|S_{ij}\|_{ij} = \max_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} \{y_r(t)\} = y_r(t_{i+1}) = \int_{t_j - t_{i+1}}^{t_{j+1} - t_{i+1}} g(s) ds.$$

Cas 3 : Si $i > j$.

Soit $y_l(t) : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$y_l(t) := \int_{t_j}^{t_{j+1}} g(t - s) ds = G(t - t_j) - G(t - t_{j+1}),$$

nous avons

$$y'_l(t) = g(t - t_j) - g(t - t_{j+1}) < 0 \quad \text{pour tout } t_i < t < t_{i+1}.$$

Par conséquent,

$$\|S_{ij}\|_{ij} = \max_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} \{y_l(t)\} = y_l(t_i) = \int_{t_i - t_{j+1}}^{t_i - t_j} g(s) ds.$$

□

Théorème 2.1.1. Soient $\beta_T(i, N)$, $\beta_S(i, N)$ deux paramètres positifs donnés par, pour tout $1 \leq i \leq N$, $N \geq 2$,

$$\beta_T(i, N) = \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^N \|T_{ij}\|_{ij}}{|\lambda| - \|T_{ii}\|_{ii}},$$

$$\beta_S(i, N) = \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^N \|S_{ij}\|_{ij}}{|\lambda| - \|S_{ii}\|_{ii}},$$

alors,

$$\beta_T(i, N) < 1, \quad \text{pour tout } |\lambda| > \|T\|,$$

$$\beta_S(i, N) < 1, \quad \text{pour tout } |\lambda| > \|S\|.$$

Démonstration. Commençons par $\beta_T(i, N)$, nous avons

$$\begin{aligned}\beta_T(i, N) &= \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^N \|T_{ij}\|_{ij}}{|\lambda| - \|T_{ii}\|_{ii}}, \\ &= \frac{\|T\| - \|T_{ii}\|_{ii}}{|\lambda| - \|T_{ii}\|_{ii}},\end{aligned}$$

donc $\beta_T(i, N) < 1$ est conséquence directe de la condition $|\lambda| > \|T\|$.

Pour le deuxième paramètre $\beta_S(i, N)$, nous suivons la même démonstration précédente, ou nous choisissons de calculer la quantité $\beta_S(i, N)$ exactement.

Tout d'abord, il est clair que

$$\begin{aligned}\beta_S(i, N) &= \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^N \|S_{ij}\|_{ij}}{|\lambda| - \|S_{ii}\|_{ii}}, \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{j < i} \|S_{ij}\|_{ij} + \sum_{j > i}^N \|S_{ij}\|_{ij}}{|\lambda| - \|S_{ii}\|_{ii}}.\end{aligned}$$

Nous remplaçons les normes $\|S_{ij}\|_{ij}$, pour tout $1 \leq i, j \leq N$ par leurs formules obtenues dans le Lemme précédent et $|\lambda|$ par

$$|\lambda| = 2\mu \int_0^{\tau/2} g(s) ds, \quad \mu > 1,$$

alors,

$$\begin{aligned}
\beta_S(i, N) &= \frac{\sum_{j=1}^{j < i} \int_{t_i - t_{j+1}}^{t_i - t_j} g(s) ds + \sum_{j > i}^N \int_{t_j - t_{i+1}}^{t_{j+1} - t_{i+1}} g(s) ds}{|\lambda| - \|S_{ii}\|_{ii}}, \\
&= \frac{\int_0^{t_i} g(s) ds + \int_0^{\tau - t_{i+1}} g(s) ds}{\frac{\tau/2}{2\mu \int_0^{\tau/2} g(s) ds} - \frac{H/2}{2 \int_0^{H/2} g(s) ds}}, \\
&= \frac{y_H(t_i)}{\frac{\tau/2}{2\mu \int_0^{\tau/2} g(s) ds} - \frac{H/2}{2 \int_0^{H/2} g(s) ds}},
\end{aligned}$$

où, $y_H(t_i) : \{t_i, 1 \leq i \leq N\} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$y_H(t_i) := \int_0^{t_i} g(s) ds + \int_0^{\tau - t_{i+1}} g(s) ds = G(t_i) + G(\tau - t_{i+1}),$$

la suite $\{y_H(t_i)\}$ est symétrique aux points $\frac{\tau}{2}$ ou $\frac{\tau}{2} - H$ et

$$y'_H(t_i) = g(t_i) - g(\tau - t_{i+1}) \begin{cases} > 0 & \text{si } \{0 < t_i < \frac{\tau}{2} - H\}, \\ < 0 & \text{si } \{\frac{\tau}{2} < t_i < \tau\}, \end{cases}$$

de plus,

$$\max_{1 \leq i \leq N} \{y_H(t_i)\} = y_H\left(\frac{\tau}{2} - H\right) = y_H\left(\frac{\tau}{2}\right) = \int_0^{\tau/2} g(s) ds + \int_0^{\tau/2 - H} g(s) ds.$$

D'autre part, comme $N \geq 2$ alors $H \leq \frac{\tau}{2}$, finalement nous obtenons

$$\begin{aligned}
\beta_S(i, N) &\leq \frac{\max_{1 \leq i \leq N} \{y_H(t_i)\}}{\frac{\tau/2}{2\mu \int_0^{\tau/2} g(s) ds} - \frac{H/2}{2 \int_0^{H/2} g(s) ds}}, \\
&\leq \frac{\int_0^{\tau/2} g(s) ds + \int_0^{\tau/2 - H} g(s) ds}{\frac{\tau/2}{2\mu \int_0^{\tau/2} g(s) ds} - \frac{H/2}{2 \int_0^{H/2} g(s) ds}}, \\
&\leq \frac{1}{\mu} < 1.
\end{aligned}$$

□

Nous pouvons réécrire $\beta_T(i, N), \beta_S(i, N)$ dans le Théorème précédent par, pour tout $1 \leq i \leq N, N \geq 2$

$$\begin{aligned}
\beta_T(i, N) &= \underline{\delta}_T(i, N) + \bar{\delta}_T(i, N), \\
\beta_S(i, N) &= \underline{\delta}_S(i, N) + \bar{\delta}_S(i, N),
\end{aligned}$$

où,

$$\begin{aligned}
\underline{\delta}_T(i, N) &= \frac{\sum_{j < i} \|T_{ij}\|_{ij}}{|\lambda| - \|T_{ii}\|_{ii}}, & \bar{\delta}_T(i, N) &= \frac{\sum_{j > i} \|T_{ij}\|_{ij}}{|\lambda| - \|T_{ii}\|_{ii}}, \\
\underline{\delta}_S(i, N) &= \frac{\sum_{j < i} \|S_{ij}\|_{ij}}{|\lambda| - \|S_{ii}\|_{ii}}, & \bar{\delta}_S(i, N) &= \frac{\sum_{j > i} \|S_{ij}\|_{ij}}{|\lambda| - \|S_{ii}\|_{ii}}.
\end{aligned}$$

A partir de cette nouvelle écriture, le Lemme suivant nous donne des nouveaux paramètres qui vont jouer un rôle important dans notre travail de généralisation.

Lemme 2.1.2. *Nous considérons les paramètres positifs suivants $\beta_T^J, \beta_S^J, \beta_T^{GS}$ et β_S^{GS} , qui*

vérifient

$$\beta_T^J = \max_{1 \leq i \leq N} \{\beta_T(i, N)\} < 1, \quad (2.1.3)$$

$$\beta_S^J = \max_{1 \leq i \leq N} \{\beta_S(i, N)\} < 1, \quad (2.1.4)$$

$$\beta_T^{GS} = \max_{1 \leq i \leq N} \left\{ \frac{\bar{\delta}_T(i, N)}{1 - \underline{\delta}_T(i, N)} \right\} < 1, \quad (2.1.5)$$

$$\beta_S^{GS} = \max_{1 \leq i \leq N} \left\{ \frac{\bar{\delta}_S(i, N)}{1 - \underline{\delta}_S(i, N)} \right\} < 1. \quad (2.1.6)$$

Démonstration. La démonstration est évidente à partir du Théorème précédent. \square

2.2 Formulation du système d'opérateurs

Dans cette section, nous proposons une formulation, sous forme de système d'opérateurs bornés de notre équation intégrale (1.2.2).

Soit $\{u_j\}_{1 \leq j \leq N}$ et $\{f_j\}_{1 \leq j \leq N}$, des familles de fonctions continues qui représentent les restrictions de fonction u et f respectivement sur les intervalles $[t_j, t_{j+1}]$, pour $1 \leq j \leq N$, nous avons

$$u_j \in X_j, \text{ où, } u_j(t) = u(t), \forall t \in [t_j, t_{j+1}],$$

$$f_j \in X_j, \text{ où, } f_j(t) = f(t), \forall t \in [t_j, t_{j+1}],$$

alors,

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, \tau], \lambda u(t) &= \int_0^\tau g(t, s)u(s)ds + f(t) \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{t_j}^{t_{j+1}} g(t, s)u_j(s)ds + f(t). \end{aligned}$$

Nous restreignons la variable t sur les intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ pour $1 \leq i \leq N$ respectivement, puis en employant les opérateurs $\{T_{ij}\}_{1 \leq ij \leq N}$ donnés par (2.1.1), nous obtenons le

système suivant :

$$(\Xi)_T \begin{cases} \forall t \in [t_1, t_2], & \lambda u_1(t) = T_{11}u_1(t) + T_{12}u_2(t) + \dots + T_{1N}u_N(t) + f_1(t), \\ \forall t \in [t_2, t_3], & \lambda u_2(t) = T_{21}u_1(t) + T_{22}u_2(t) + \dots + T_{2N}u_N(t) + f_2(t), \\ \vdots & \vdots \\ \forall t \in [t_N, t_{N+1}], & \lambda u_N(t) = T_{N1}u_1(t) + T_{N2}u_2(t) + \dots + T_{NN}u_N(t) + f_N(t), \end{cases}$$

c'est un système d'équations intégrales (système d'opérateurs bornés).

Ce système $(\Xi)_T$ est équivalent à l'équation matricielle linéaire suivante :

$$\lambda U = M_T U + F,$$

où, $M_T : \widetilde{X}_N \rightarrow \widetilde{X}_N$ est la matrice d'opérateurs définie par

$$M_T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1N} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{N1} & T_{N2} & \dots & T_{NN} \end{pmatrix},$$

et F, U sont deux vecteurs dans \widetilde{X}_N donnés par

$$F = (f_1, \dots, f_N)^t \quad \text{et} \quad U = (u_1, \dots, u_N)^t.$$

Il est clair que M_T est un opérateur borné. En effet

$$\begin{aligned} \|M_T\| &= \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N \|T_{ij}\|_{ij} = \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \int_{t_j}^{t_{j+1}} g(t, s) ds \\ &= \max_{0 \leq t \leq \tau} \int_0^{\tau} g(t, s) ds < |\lambda|. \end{aligned}$$

Le Théorème (1.1.5) nous permet de dire que l'opérateur $(\lambda I_N - M_T)^{-1}$ existe et

$$\|(\lambda I_N - M_T)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|M_T\|},$$

où, I_N est l'opérateur identité de \widetilde{X}_N . Ceci assure l'existence et l'unicité de la solution U du système $(\Xi)_T$ pour tout F dans \widetilde{X}_N .

De la même façon, nous pouvons transformer l'équation (1.3.9) vers un système d'opérateurs $(\Xi)_S$ présenté par sa forme matricielle suivante :

$$\lambda V = M_S V + F,$$

où, $M_S : \widetilde{X}_N \rightarrow \widetilde{X}_N$ est la matrice d'opérateurs définie par

$$M_S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1N} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{N1} & S_{N2} & \dots & S_{NN} \end{pmatrix},$$

$\{S_{ij}\}_{1 \leq ij \leq N}$ sont donnés par (2.1.2) et F, V sont deux vecteurs dans \widetilde{X}_N donnés par

$$F = (f_1, \dots, f_N)^t \quad \text{et} \quad V = (v_1, \dots, v_N)^t.$$

Il est clair aussi que $\|M_S\| < |\lambda|$, ainsi l'opérateur $(\lambda I_N - M_S)^{-1}$ existe, ceci assure l'existence et l'unicité de la solution V du système $(\Xi)_S$ pour tout F dans \widetilde{X}_N .

Remarque 2.2.1. *A partir de cette construction, la solution u, v de l'équation intégrale (1.2.2), (1.3.9) respectivement dans l'espace X a été transformée vers le vecteur des solutions U, V du système $(\Xi)_T, (\Xi)_S$ respectivement dans l'espace \widetilde{X}_N .*

2.3 La méthode de Jacobi généralisée adaptée au système d'opérateurs

Dans cette section, nous établissons une généralisation de la méthode de Jacobi adaptée aux systèmes d'opérateurs. Nous définissons le schéma itératif adapté premièrement au système $(\Xi)_T$ par

$$\begin{cases} \lambda U^k & = D_T U^k + (M_T - D_T) U^{k-1} + F, \quad k \geq 1, \\ U^0 & \in \widetilde{X}_N, \end{cases} \quad (2.3.7)$$

où, D_T est la matrice diagonale obtenue à partir des éléments diagonaux de M_T donnée par

$$D_T = \begin{pmatrix} T_{11} & O_{12} & \dots & O_{1N} \\ O_{21} & T_{22} & \dots & O_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O_{N1} & O_{N2} & \dots & T_{NN} \end{pmatrix},$$

et pour tout $1 \leq i, j \leq N$, $O_{ij} : X_j \rightarrow X_i$ représente l'opérateur nul, c.à.d. $\forall x \in X_j$, $O_{ij}x = 0_{X_i}$.

Nous pouvons réécrire le schéma itératif précédent (2.3.7) sous la forme simple et clair par, pour tout $1 \leq i \leq N$,

$$\begin{cases} \lambda u_i^k & = T_{ii}u_i^k + \sum_{j=1, j \neq i}^N T_{ij}u_j^{k-1} + f_i, \quad k \geq 1, \\ u_i^0 & \in X_i. \end{cases} \quad (2.3.8)$$

Notre but est de prouver que la solution itérative U^k obtenue par la méthode de Jacobi généralisée, converge vers la solution exacte U

$$U^k \rightarrow U \quad \text{si} \quad k \rightarrow \infty.$$

Ce que nous allons voir dans le Théorème suivant :

Théorème 2.3.1. *Si $|\lambda| > \|T\|$, alors,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|U^k - U\|_{\tilde{X}_N} = 0.$$

Démonstration. A partir du système $(\Xi)_T$, nous avons pour tout $1 \leq i \leq N$,

$$\begin{aligned} \lambda u_i &= T_{ii}u_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N T_{ij}u_j + f_i, \\ (\lambda I_{ii} - T_{ii})u_i &= \sum_{j=1, j \neq i}^N T_{ij}u_j + f_i, \\ u_i &= (\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1} \sum_{j=1, j \neq i}^N T_{ij}u_j + (\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1} f_i. \end{aligned}$$

De la même manière, nous obtenons à partir du schéma (2.3.8)

$$u_i^k = (\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1} \sum_{j=1, j \neq i}^N T_{ij} u_j^{k-1} + (\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1} f_i,$$

alors,

$$(u_i^k - u_i) = (\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1} \sum_{j=1, j \neq i}^N T_{ij} (u_j^{k-1} - u_j).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|u_i^k - u_i\|_i &\leq \|(\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1}\|_{ii} \sum_{j=1, j \neq i}^N \|T_{ij}\|_{ij} \|u_j^{k-1} - u_j\|_j, \\ &\leq \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^N \|T_{ij}\|_{ij}}{|\lambda| - \|T_{ii}\|_{ii}} \|u_j^{k-1} - u_j\|_j, \\ &\leq \beta_T(i, N) \|U^{k-1} - U\|_{\tilde{X}_N}. \end{aligned}$$

Soit $i_m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|u_{i_m}^k - u_{i_m}\|_{X_{i_m}} = \|U^k - U\|_{\tilde{X}_N}.$$

Ce qui implique, que

$$\begin{aligned} \|U^k - U\|_{\tilde{X}_N} &\leq \beta_T(i_m, N) \|U^{k-1} - U\|_{\tilde{X}_N}, \\ \|U^k - U\|_{\tilde{X}_N} &\leq \beta_T^J \|U^{k-1} - U\|_{\tilde{X}_N}, \end{aligned}$$

où, β_T^J est donnée par (2.1.3).

Répétant k-fois cette opération, nous trouvons

$$\|U^k - U\|_{\tilde{X}_N} \leq (\beta_T^J)^k \|U^0 - U\|_{\tilde{X}_N}.$$

Nous utilisons le fait que $\beta_T^J < 1$, pour conclure. □

De manière analogue, nous définissons le schéma itératif de Jacobi généralisé adapté au système $(\Xi)_S$ par

$$\begin{cases} \lambda V^k &= D_S V^k + (M_S - D_S) V^{k-1} + F, \quad k \geq 1, \\ V^0 &\in \tilde{X}_N, \end{cases} \quad (2.3.9)$$

où, D_S est la matrice diagonale obtenue à partir des éléments diagonaux de M_S donnée par

$$D_S = \begin{pmatrix} S_{11} & O_{12} & \dots & O_{1N} \\ O_{21} & S_{22} & \dots & O_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O_{N1} & O_{N2} & \dots & S_{NN} \end{pmatrix}.$$

Le schéma itératif (2.3.9) peut être réécrit sous la forme simple et clair par, pour tout $1 \leq i \leq N$,

$$\begin{cases} \lambda v_i^k & = S_{ii} v_i^k + \sum_{j=1, j \neq i}^N S_{ij} v_j^{k-1} + f_i, \quad k \geq 1, \\ v_i^0 & \in X_i. \end{cases} \quad (2.3.10)$$

Le Théorème suivant prouve que la solution itérative V^k obtenue par la méthode de Jacobi généralisée, converge vers la solution exacte V

$$V^k \rightarrow V \quad \text{si} \quad k \rightarrow \infty.$$

Théorème 2.3.2. Si $|\lambda| > \|S\|$, alors,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|V^k - V\|_{\tilde{X}_N} = 0.$$

Démonstration. En suivant les mêmes étapes du Théorème (2.3.1), nous trouvons

$$\|V^k - V\|_{\tilde{X}_N} \leq (\beta_S^J)^k \|V^0 - V\|_{\tilde{X}_N}.$$

où, β_S^J est donnée par (2.1.4). Nous utilisons aussi le fait que $\beta_S^J < 1$, pour conclure. \square

2.4 La méthode de Gauss-Seidel généralisée adaptée au système d'opérateurs

Dans cette section, nous construisons une généralisation de la méthode de Gauss-Seidel adaptée aux systèmes $(\Xi)_T$ et $(\Xi)_S$. Nous commençons par le schéma itératif de

Gauss-Seidel adapté au $(\Xi)_T$

$$\begin{cases} \lambda \tilde{U}^k &= L_T \tilde{U}^k + (M_T - L_T) \tilde{U}^{k-1} + F, \quad k \geq 1, \\ \tilde{U}^0 &\in \tilde{X}_N, \end{cases} \quad (2.4.11)$$

où, L_T est la matrice triangulaire inférieure de M_T donnée par

$$L_T = \begin{pmatrix} T_{11} & O_{12} & \dots & O_{1N} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & O_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{N1} & T_{N2} & \dots & T_{NN} \end{pmatrix}.$$

Nous réécrivons le schéma itératif (2.4.11) sous la forme simple suivante, pour tout $1 \leq i \leq N$,

$$\begin{cases} \lambda \tilde{u}_i^k &= T_{ii} \tilde{u}_i^k + \sum_{j=1}^{i-1} T_{ij} \tilde{u}_j^k + \sum_{j=i+1}^N T_{ij} \tilde{u}_j^{k-1} + f_i, \quad k \geq 1, \\ \tilde{u}_i^0 &\in X_i, \end{cases} \quad (2.4.12)$$

avec l'ajustement évident de la définition pour

$$\sum_{j=1}^0 T_{ij} \tilde{u}_j^k = \sum_{j=N+1}^N T_{ij} \tilde{u}_j^{k-1} = 0_{X_i}.$$

Dans le Théorème suivant, nous allons montrer que la solution itérative \tilde{U}^k obtenue par la méthode de Gauss-Seidel généralisée, converge vers la solution exacte U

$$\tilde{U}^k \rightarrow U \quad \text{si} \quad k \rightarrow \infty$$

Théorème 2.4.1. Si $|\lambda| > \|T\|$, alors,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{U}^k - U\|_{\tilde{X}_N} = 0.$$

Démonstration. A partir du système $(\Xi)_T$, nous avons pour tout $1 \leq i \leq N$,

$$\begin{aligned} \lambda u_i &= T_{ii} u_i + \sum_{j=1}^{i-1} T_{ij} u_j + \sum_{j=i+1}^N T_{ij} u_j + f_i, \\ (\lambda I_{ii} - T_{ii}) u_i &= \sum_{j=1}^{i-1} T_{ij} u_j + \sum_{j=i+1}^N T_{ij} u_j + f_i, \end{aligned}$$

d'où,

$$u_i = (\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1} \sum_{j=1}^{i-1} T_{ij} u_j + (\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1} \sum_{j=i+1}^N T_{ij} u_j + (\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1} f_i.$$

De la même façon, nous obtenons à partir du schéma (2.4.12)

$$\tilde{u}_i^k = (\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1} \sum_{j=1}^{i-1} T_{ij} \tilde{u}_j^k + (\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1} \sum_{j=i+1}^N T_{ij} \tilde{u}_j^{k-1} + (\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1} f_i,$$

alors,

$$(\tilde{u}_i^k - u_i) = (\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1} \sum_{j=1}^{i-1} T_{ij} (\tilde{u}_j^k - u_j) + (\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1} \sum_{j=i+1}^N T_{ij} (\tilde{u}_j^{k-1} - u_j).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_i^k - u_i\|_i &\leq \|(\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1}\|_{ii} \sum_{j=1}^{i-1} \|T_{ij}\|_{ij} \|\tilde{u}_j^k - u_j\|_j \\ &\quad + \|(\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1}\|_{ii} \sum_{j=i+1}^N \|T_{ij}\|_{ij} \|\tilde{u}_j^{k-1} - u_j\|_j \\ &\leq \frac{\sum_{j=1}^{i-1} \|T_{ij}\|_{ij}}{|\lambda| - \|T_{ii}\|_{ii}} \|\tilde{u}_j^k - u_j\|_j + \frac{\sum_{j=i+1}^N \|T_{ij}\|_{ij}}{|\lambda| - \|T_{ii}\|_{ii}} \|\tilde{u}_j^{k-1} - u_j\|_j, \\ &\leq \underline{\delta}_T(i, N) \|\tilde{U}^k - U\|_{\tilde{X}_N} + \bar{\delta}_T(i, N) \|\tilde{U}^{k-1} - U\|_{\tilde{X}_N}, \end{aligned}$$

Soit $i_{m'} \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|\tilde{u}_{i_{m'}}^k - u_{i_{m'}}\|_{X_{i_{m'}}} = \|\tilde{U}^k - U\|_{\tilde{X}_N}.$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\tilde{U}^k - U\|_{\tilde{X}_N} &\leq \underline{\delta}_T(i_{m'}, N) \|\tilde{U}^k - U\|_{\tilde{X}_N} \\ &\quad + \bar{\delta}_T(i_{m'}, N) \|\tilde{U}^{k-1} - U\|_{\tilde{X}_N}, \\ (1 - \underline{\delta}_T(i_{m'}, N)) \|\tilde{U}^k - U\|_{\tilde{X}_N} &\leq \bar{\delta}_T(i_{m'}, N) \|\tilde{U}^{k-1} - U\|_{\tilde{X}_N}, \\ \|\tilde{U}^k - U\|_{\tilde{X}_N} &\leq \frac{\bar{\delta}_T(i_{m'}, N)}{1 - \underline{\delta}_T(i_{m'}, N)} \|\tilde{U}^{k-1} - U\|_{\tilde{X}_N}, \\ \|\tilde{U}^k - U\|_{\tilde{X}_N} &\leq \beta_T^{GS} \|\tilde{U}^{k-1} - U\|_{\tilde{X}_N}, \end{aligned}$$

où, β_T^{GS} est donnée par (2.1.5).

Répétant k-fois cette dernière inégalité, nous trouvons

$$\|\tilde{U}^k - U\|_{\tilde{X}_N} \leq (\beta_T^{GS})^k \|\tilde{U}^0 - U\|_{\tilde{X}_N}.$$

Ce qui achève la démonstration comme $\beta_T^{GS} < 1$. □

Comme pour la section précédente, nous définissons le schéma itératif de Gauss-Seidel généralisé adapté au système $(\Xi)_S$ par

$$\begin{cases} \lambda \tilde{V}^k &= L_S \tilde{V}^k + (M_S - L_S) \tilde{V}^{k-1} + F, \quad k \geq 1, \\ \tilde{V}^0 &\in \tilde{X}_N, \end{cases} \quad (2.4.13)$$

où, L_S est la matrice triangulaire inférieure de M_S donnée par

$$L_S = \begin{pmatrix} S_{11} & O_{12} & \dots & O_{1N} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & O_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{N1} & S_{N2} & \dots & S_{NN} \end{pmatrix}.$$

Le schéma itératif (2.4.13) peut être réécrit sous la forme simple suivante, pour tout $1 \leq i \leq N$,

$$\begin{cases} \lambda \tilde{v}_i^k &= S_{ii} \tilde{v}_i^k + \sum_{j=1}^{i-1} S_{ij} \tilde{v}_j^k + \sum_{j=i+1}^N S_{ij} \tilde{v}_j^{k-1} + f_i, \quad k \geq 1, \\ \tilde{v}_i^0 &\in X_i, \end{cases} \quad (2.4.14)$$

avec l'ajustement évident de la définition pour

$$\sum_{j=1}^0 S_{ij} \tilde{v}_j^k = \sum_{j=N+1}^N S_{ij} \tilde{v}_j^{k-1} = 0_{X_i}.$$

Nous allons voir dans le Théorème suivant que la solution itérative \tilde{V}^k obtenue par la méthode de Gauss-Seidel généralisée, converge vers la solution exacte V

$$\tilde{V}^k \rightarrow V \quad \text{si} \quad k \rightarrow \infty$$

Théorème 2.4.2. *Si $|\lambda| > \|S\|$, alors,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{V}^k - V\|_{\tilde{X}_N} = 0.$$

Démonstration. En suivant les mêmes étapes du Théorème (2.4.1), nous trouvons

$$\|\tilde{V}^k - V\|_{\tilde{X}_N} \leq (\beta_S^{GS})^k \|\tilde{V}^0 - V\|_{\tilde{X}_N},$$

où, β_S^{GS} est donnée par (2.1.6). Nous utilisons aussi le fait que $\beta_S^{GS} < 1$, pour conclure. \square

Dans ce chapitre, nous avons vu un processus qui transforme l'équation intégrale (1.2.2) (resp. (1.3.9)) en un système d'équations intégrales $(\Xi)_T$ (resp. $(\Xi)_S$), puis nous avons appliqué les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel généralisées adaptées au $(\Xi)_T$ (resp. $(\Xi)_S$). Pour obtenir la convergence de ces nouvelles méthodes itératives la condition suivante doit être vérifiée

$$|\lambda| > \|T\|, \quad (\text{resp. } |\lambda| > \|S\|).$$

D'autre part, dans le Théorème (2.1.1) cette condition implique

$$\beta_T(i, N) = \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^N \|T_{ij}\|_{ij}}{|\lambda| - \|T_{ii}\|_{ii}} < 1, \quad (\text{resp. } \beta_S(i, N) = \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^N \|S_{ij}\|_{ij}}{|\lambda| - \|S_{ii}\|_{ii}} < 1),$$

cette inégalité peut être vue comme la notion de la dominance stricte de la diagonale de la matrice d'opérateurs suivante :

$$A_T = \lambda I_N - M_T, \quad (\text{resp. } A_S = \lambda I_N - M_S),$$

qui est presque la même condition nécessaire pour la convergence des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel classiques. Sauf que dans les méthodes classiques nous traitons un système algébrique et dans notre cas généralisé nous traitons un système d'opérateurs.

Remarque 2.4.1. *En pratique, pour approcher une équation intégrale définie sur un grand intervalle, le processus conventionnel consiste à commencer par une méthode de*

discrétisation, suivi par l'application de la méthode de Jacobi ou celle de Gauss-Seidel pour approcher la solution du système algébrique obtenu. D'autre part, en utilisant notre méthode généralisée de Jacobi ou Gauss-Seidel, nous proposons un processus numérique alternatif pour approcher une équation intégrale linéaire de Fredholm. Le nouveau processus commence par la méthode généralisée de Jacobi ou Gauss-Seidel puis nous allons la suivre par une méthode de discrétisation, où les testes numériques prouvent que ce nouveau processus est meilleur que le processus conventionnel (nous allons voir les détails dans le prochain chapitre). Le cadre de notre idée est semblable au [31], où les auteurs ont démontré pour étudier une équation intégrale non-linéaire, le processus qui commence par la linéarisation puis la discrétisation du problème linéaire obtenu, est plus performant. Ceci prouve que la vision développée dans [31] est également correcte dans notre cas.

**Méthodes itératives généralisées pour les équations
intégrales régulières**

Sommaire

3.1 Application de la méthode de Jacobi généralisée	46
3.2 Application de la méthode de Gauss-Seidel généralisée	50
3.3 Les tests numériques	52

Notre objectif dans ce chapitre est d'appliquer les méthodes itératives généralisées de Jacobi et Gauss-Seidel présentées dans le chapitre précédent, sur les équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce. Ce chapitre est consacré à ces dernières lorsque l'opérateur concerné est régulier. Le cas faiblement singulier est étudié dans le chapitre suivant. Nous complétons notre approche par une comparaison avec les versions classiques de ces deux méthodes.

Mais, dans la pratique, l'utilisation de ces méthodes itératives généralisées, nécessite l'inversion de certains opérateurs à chaque itération. Pour cette raison, les méthodes itératives généralisées de Jacobi et Gauss-Seidel doivent être injecté par la méthode de

Nyström pour approcher ces inverses d'opérateurs. Ainsi, il est capital de présenter la nouvelle majoration de l'erreur obtenue de la solution approchée, ce que nous allons détailler dans ce chapitre.

3.1 Application de la méthode de Jacobi généralisée

Concernant le schéma itératif de Jacobi généralisé (2.3.8), construit dans le chapitre précédent ; pour passer d'une itération à une autre nous avons besoin de calculer les opérateurs $(\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1}$ pour tout $1 \leq i \leq N$, ce qui est impossible en pratique, pour cela nous approchons les opérateurs T_{ii} en utilisant la méthode de Nyström [10] présentée dans le chapitre 1.

Tout d'abord, pour tout $1 \leq i \leq N$ nous définissons la subdivision de l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, pour $n \geq 2$

$$h_n = \frac{H}{n-1}, \quad s_{i,p} = t_i + (p-1)h_n, \quad 1 \leq p \leq n.$$

Ici nous avons fixé le pas h_n , de façon que la comparaison entre la méthode de Jacobi classique présentée dans le chapitre 1 et la méthode de Jacobi généralisée soit homogène. D'autre part, la longueur H des petits intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ est choisie assez petite pour obtenir des systèmes linéaires peu coûteux en résolution numérique.

Nous définissons l'opérateur approché $T_{ii,n} : X_i \rightarrow X_i$ de T_{ii} en utilisant la méthode de Nyström par

$$\forall x \in X_i, \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}], \quad T_{ii,n}x(t) \approx \sum_{p=1}^n w_{i,p} g(t, s_{i,p}) x(s_{i,p}),$$

où, $\{w_{i,p}\}_{p=1}^n$ sont les poids de la quadrature, tels que

$$W_i := \sup_{n \geq 2} \sum_{p=1}^n |w_{i,p}| < \infty,$$

nous supposons que

$$\bar{W} := \sup_{N \geq 2} \max_{1 \leq i \leq N} W_i < \infty,$$

alors, de [12], pour tout $1 \leq i \leq N$, $T_{ii,n} \in B_{ii}$, en plus,

$$\|T_{ii,n}\|_{ii} = \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \sum_{p=1}^n |w_{i,p} g(t, s_{i,p})| \leq \bar{W} \max_{0 \leq t, s \leq \tau} g(t, s).$$

Théorème 3.1.1. *Pour tout $1 \leq i \leq N$ et pour n assez grand, $(\lambda I_{ii} - T_{ii,n})^{-1}$ existe. En plus nous avons*

$$\|(\lambda I_{ii} - T_{ii,n})^{-1}\|_{ii} \leq \kappa_T,$$

où, κ_T est une constante positive indépendante de i et n .

Démonstration. Nous pouvons dire que la démonstration est un résultat direct du Théorème (1.1.7), mais nous allons apporter plus de précision sur la constante κ_T .

Pour tout $1 \leq i \leq N$, d'après le Lemme 11.4.2 [10], nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(T_{ii} - T_{ii,n})T_{ii,n}\|_{ii} = 0.$$

En plus, d'après le Théorème 11.4.4 [10], nous avons pour n assez grand,

$$\|(\lambda I_{ii} - T_{ii,n})^{-1}\|_{ii} \leq \frac{1 + \|(\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1}\|_{ii} \|T_{ii,n}\|_{ii}}{|\lambda| - \|(T_{ii} - T_{ii,n})T_{ii,n}\|_{ii}}.$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} \|T_{ii,n}\|_{ii} &\leq \bar{W} \max_{0 \leq t, s \leq \tau} g(t, s), \\ \|(\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1}\|_{ii} &\leq \frac{1}{|\lambda| - \|T_{ii}\|_{ii}} \leq \frac{1}{|\lambda| - \gamma_T^H}, \quad \text{où } \gamma_T^H = \max_{1 \leq i \leq N} \{\|T_{ii}\|_{ii}\}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \|(\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1}\|_{ii} \|T_{ii,n}\|_{ii}}{|\lambda| - \|(T_{ii} - T_{ii,n})T_{ii,n}\|_{ii}} \leq |\lambda|^{-1} \left(1 + (|\lambda| - \gamma_T^H)^{-1} \bar{W} \max_{0 \leq t, s \leq \tau} g(t, s) \right).$$

Pour conclure nous pouvons prendre

$$\kappa_T = 1 + |\lambda|^{-1} \left(1 + (|\lambda| - \gamma_T^H)^{-1} \bar{W} \max_{0 \leq t, s \leq \tau} g(t, s) \right). \quad (3.1.1)$$

□

Pour tout $1 \leq i \leq N$, soit u_i la solution exacte et $u_{i,n}$ son approximation obtenue par la méthode de Nyström ; elles vérifient les équations suivantes respectivement, en effet pour n assez grand, nous avons

$$\begin{aligned}\forall t \in [t_i, t_{i+1}], \lambda u_i(t) &= T_{ii} u_i(t) + \psi_i(t), \\ \lambda u_{i,n}(t) &= T_{ii,n} u_{i,n}(t) + \psi_i(t).\end{aligned}$$

Il est clair que, pour tout $\psi_i \in X_i$, les deux équations précédentes admettent des solutions uniques u_i et $u_{i,n}$ respectivement. Le Théorème suivant assure que la solution approchée $u_{i,n}$ converge vers la solution exacte u_i lorsque n tend vers ∞ . En plus, il nous donne une nouvelle estimation d'erreur.

Théorème 3.1.2. *Pour tout $1 \leq i \leq N$ et pour n assez grand,*

$$\|u_i - u_{i,n}\|_i \leq \kappa_T \omega_1(h_n, u_i),$$

où,

$$\omega_1(h_n, u_i) = \sup_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t, s) u_i(s) ds - \sum_{p=1}^n w_{i,p} g(t, s_{i,p}) u_i(s_{i,p}) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.1.2)$$

Démonstration. Nous utilisons le fait que,

$$u_i - u_{i,n} = (\lambda I_{ii} - T_{ii,n})^{-1} (T_{ii} - T_{ii,n}) u_i,$$

pour conclure. □

D'autre part, la formule d'interpolation de Nyström nous permet de calculer $u_{i,n}$ par la formule suivante ; pour tout $1 \leq i \leq N$,

$$\forall t \in [t_i, t_{i+1}], u_{i,n}(t) = \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{p=1}^n w_{i,p} g(t, s_{i,p}) x_p + \psi_i(t) \right),$$

où, $x = (x_1, \dots, x_n)$ est la solution unique du système de dimension n suivant :

$$\lambda x = Ax + b, \quad A_{qp} = w_{i,p} g(s_{i,q}, s_{i,p}), \quad b_q = \psi_i(s_{i,q}), \quad 1 \leq q, p \leq n.$$

Nous définissons le schéma itératif de la méthode de Jacobi généralisée (2.3.8) en conjonction avec la méthode de Nyström par ; pour tout $1 \leq i \leq N$ et $n \geq 2$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in [t_i, t_{i+1}], \quad \lambda u_{i,n}^k(t) = T_{ii,n} u_{i,n}^k(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N T_{ij} u_{j,n}^{k-1}(t) + f_i(t), \quad k \geq 1, \\ u_i^0 \in X_i, \end{array} \right. \quad (3.1.3)$$

afin d'obtenir la solution approchée $U_n^k = (u_{1,n}^k, u_{1,n}^k, \dots, u_{N,n}^k) \in \widetilde{X}_N$. Notre but maintenant est de prouver que

$$U_n^k \rightarrow U \quad \text{lorsque} \quad k \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad n \rightarrow \infty.$$

Ce qui est démontré dans le Théorème suivant. Avant la démonstration et pour une raison technique, nous devons définir $\hat{U}_n^k = (\hat{u}_{1,n}^k, \hat{u}_{1,n}^k, \dots, \hat{u}_{N,n}^k) \in \widetilde{X}_N$ la solution du système ci-dessous ; pour tout $1 \leq i \leq N$ et $n \geq 2$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in [t_i, t_{i+1}], \quad \lambda \hat{u}_{i,n}^k(t) = T_{ii} \hat{u}_{i,n}^k(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N T_{ij} u_{j,n}^{k-1} + f_i(t), \quad k \geq 1, \\ u_i^0 \in X_i, \end{array} \right. \quad (3.1.4)$$

Théorème 3.1.3. *Pour $k \geq 1$ et pour n assez grand,*

$$\|U_n^k - U\|_{\widetilde{X}_N} \leq \frac{\kappa_T}{1 - \beta_T^J} \max_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq l \leq k}} \omega_1(h_n, \hat{u}_{i,n}^l) + (\beta_T^J)^k \|U^0 - U\|_{\widetilde{X}_N},$$

où, $\kappa_T, \omega_1(h_n, \hat{u}_{i,n}^l)$ et β_T^J sont données par (3.1.1), (3.1.2) et (2.1.3) respectivement.

Démonstration. Tout d'abord, pour $n \geq 2$, nous avons l'inégalité suivante :

$$\|U_n^k - U\|_{\widetilde{X}_N} \leq \|U_n^k - \hat{U}_n^k\|_{\widetilde{X}_N} + \|\hat{U}_n^k - U\|_{\widetilde{X}_N}.$$

Nous allons voir comment majorer les deux quantités de l'inégalité précédente. En effet, pour tout $1 \leq i \leq N$, à partir du schéma (3.1.4) et le système $(\Xi)_T$, nous avons

$$(\hat{u}_{i,n}^k - u_i) = (\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1} \sum_{j=1, j \neq i}^N T_{ij} (u_{j,n}^{k-1} - u_j).$$

De la même manière que celle utilisée dans le Théorème (2.3.1), nous trouvons que

$$\|\hat{U}_n^k - U\|_{\tilde{X}_N} \leq \beta_T^J \|U_n^{k-1} - U\|_{\tilde{X}_N}.$$

D'autre part, l'application du Théorème (3.1.2) aux schémas (3.1.3) et (3.1.4) nous donne

$$\|U_n^k - \hat{U}_n^k\|_{\tilde{X}_N} \leq \kappa_T \max_{1 \leq i \leq N} \omega_1(h_n, \hat{u}_{i,n}^k)$$

Finalement, nous obtenons

$$\|U_n^k - U\|_{\tilde{X}_N} \leq \kappa_T \max_{1 \leq i \leq N} \omega_1(h_n, \hat{u}_{i,n}^k) + \beta_T^J \|U_n^{k-1} - U\|_{\tilde{X}_N}.$$

Répetons la dernière inégalité k -fois, nous trouvons

$$\begin{aligned} \|U_n^k - U\|_{\tilde{X}_N} &\leq \kappa_T \max_{1 \leq i \leq N} \omega_1(h_n, \hat{u}_{i,n}^k) \\ &+ \beta_T^J \left(\kappa_T \max_{1 \leq i \leq N} \omega_1(h_n, \hat{u}_{i,n}^{k-1}) + \beta_T^J \|U_n^{k-2} - U\|_{\tilde{X}_N} \right), \\ &\leq \kappa_T \sum_{l=0}^{k-1} (\beta_T^J)^l \max_{1 \leq i \leq N} \omega_1(h_n, \hat{u}_{i,n}^{k-l}) + (\beta_T^J)^k \|U^0 - U\|_{\tilde{X}_N}, \\ &\leq \frac{\kappa_T}{1 - \beta_T^J} \max_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq l \leq k}} \omega_1(h_n, \hat{u}_{i,n}^l) + (\beta_T^J)^k \|U^0 - U\|_{\tilde{X}_N}. \end{aligned}$$

□

Ce qui achève la démonstration. Ce Théorème est le premier résultat dans notre travail, il a été publié dans [14].

3.2 Application de la méthode de Gauss-Seidel généralisée

De manière analogue, concernant le schéma itératif de Gauss-Seidel généralisé (2.4.12), nous avons besoin aussi d'approcher les opérateurs T_{ii} pour tout $1 \leq i \leq N$, en utilisant la méthode de Nyström [10].

Dons, Nous définissons le schéma itératif de la méthode de Gauss-Seidel généralisée

(2.4.12) en conjonction avec la méthode de Nyström, en effet pour tout $1 \leq i \leq N$ et $n \geq 2$,

$$\begin{cases} \lambda \tilde{u}_{i,n}^k(t) &= T_{ii,n} \tilde{u}_{i,n}^k(t) + \sum_{j=1}^{i-1} T_{ij} \tilde{u}_{j,n}^k(t) + \sum_{j=i+1}^N T_{ij} \tilde{u}_{j,n}^{k-1}(t) + f_i(t), \quad k \geq 1, \\ \tilde{u}_i^0(t) &\in X_i, \end{cases} \quad (3.2.5)$$

afin d'obtenir la solution approchée $\tilde{U}_n^k = (\tilde{u}_{1,n}^k, \tilde{u}_{1,n}^k, \dots, \tilde{u}_{N,n}^k) \in \tilde{X}_N$. Notre but maintenant est de prouver que

$$\tilde{U}_n^k \rightarrow U \quad \text{lorsque} \quad k \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad n \rightarrow \infty.$$

Ce qui sera démontré dans le Théorème suivant. Pour les mêmes arguments précédents, avant la démonstration pour une raison technique, nous devons définir $\hat{U}_n^k = (\hat{u}_{1,n}^k, \hat{u}_{1,n}^k, \dots, \hat{u}_{N,n}^k) \in \tilde{X}_N$ la solution du système défini par ; pour tout $1 \leq i \leq N$ et $n \geq 2$,

$$\begin{cases} \lambda \hat{u}_{i,n}^k(t) &= T_{ii} \hat{u}_{i,n}^k(t) + \sum_{j=1}^{i-1} T_{ij} \hat{u}_{j,n}^k(t) + \sum_{j=i+1}^N T_{ij} \hat{u}_{j,n}^{k-1}(t) + f_i(t), \quad k \geq 1, \\ \hat{u}_i^0(t) &\in X_i. \end{cases} \quad (3.2.6)$$

Théorème 3.2.1. *Pour $k \geq 1$ et pour n assez grand,*

$$\|\tilde{U}_n^k - U\|_{\tilde{X}_N} \leq \frac{\vartheta_T \kappa_T}{1 - \beta_T^{GS}} \max_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq l \leq k}} \omega_1(h_n, \hat{u}_{i,n}^l) + (\beta_T^{GS})^k \|U^0 - U\|_{\tilde{X}_N},$$

où, $\kappa_T, \omega_1(h_n, \hat{u}_{i,n}^l)$ et β_T^{GS} sont données par (3.1.1), (3.1.2) et (2.1.5) respectivement et ϑ_T par la relation

$$\vartheta_T = \frac{|\lambda|}{|\lambda| - \|T\|}.$$

Démonstration. Tout d'abord, pour $n \geq 2$, nous avons l'inégalité suivante :

$$\|\tilde{U}_n^k - U\|_{\tilde{X}_N} \leq \|\tilde{U}_n^k - \hat{U}_n^k\|_{\tilde{X}_N} + \|\hat{U}_n^k - U\|_{\tilde{X}_N}.$$

Nous allons voir comment majorer les deux quantités de l'inégalité précédente. En effet, pour tout $1 \leq i \leq N$, à partir du schéma (3.2.6) et le système $(\Xi)_T$, nous avons

$$(\hat{u}_{i,n}^k - u_i) = (\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1} \sum_{j=1}^{i-1} T_{ij} (\hat{u}_{j,n}^k - u_j) + (\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1} \sum_{j=i+1}^N T_{ij} (\hat{u}_{j,n}^{k-1} - u_j).$$

De la même manière que celle utilisée dans le Théorème (2.4.1), nous trouvons que

$$\|\hat{U}_n^k - U\|_{\tilde{X}_N} \leq \underline{\delta}_T(i_{m'}, N) \|\tilde{U}_n^k - U\|_{\tilde{X}_N} + \bar{\delta}_T(i_{m'}, N) \|\tilde{U}_n^{k-1} - U\|_{\tilde{X}_N}.$$

D'autre part, l'application du Théorème (3.1.2) aux schémas (3.2.5) et (3.2.6) nous donne

$$\|\tilde{U}_n^k - \hat{U}_n^k\|_{\tilde{X}_N} \leq \kappa_T \max_{1 \leq i \leq N} \omega_1 \left(h_n, \hat{u}_{i,n}^k \right)$$

Finalement, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\tilde{U}_n^k - U\|_{\tilde{X}_N} &\leq \|\tilde{U}_n^k - \hat{U}_n^k\|_{\tilde{X}_N} + \underline{\delta}_T(i_{m'}, N) \|\tilde{U}_n^k - U\|_{\tilde{X}_N} + \bar{\delta}_T(i_{m'}, N) \|\tilde{U}_n^{k-1} - U\|_{\tilde{X}_N}, \\ \|\tilde{U}_n^k - U\|_{\tilde{X}_N} &\leq \frac{1}{1 - \underline{\delta}_T(i_{m'}, N)} \|\tilde{U}_n^k - \hat{U}_n^k\|_{\tilde{X}_N} + \frac{\bar{\delta}_T(i_{m'}, N)}{1 - \underline{\delta}_T(i_{m'}, N)} \|\tilde{U}_n^{k-1} - U\|_{\tilde{X}_N}, \\ &\leq \vartheta_T \kappa_T \max_{1 \leq i \leq N} \omega_1 \left(h_n, \hat{u}_{i,n}^k \right) + \beta_T^{GS} \|\tilde{U}_n^{k-1} - U\|_{\tilde{X}_N}. \end{aligned}$$

Répetons la dernière inégalité k-fois, nous obtenons la majoration

$$\begin{aligned} \|\tilde{U}_n^k - U\|_{\tilde{X}_N} &\leq \vartheta_T \kappa_T \max_{1 \leq i \leq N} \omega_1 \left(h_n, \hat{u}_{i,n}^k \right) \\ &\quad + \beta_T^{GS} \left(\vartheta_T \kappa_T \max_{1 \leq i \leq N} \omega_1 \left(h_n, \hat{u}_{i,n}^{k-1} \right) + \beta_T^{GS} \|\tilde{U}_n^{k-2} - U\|_{\tilde{X}_N} \right), \\ &\leq \vartheta_T \kappa_T \sum_{l=0}^{k-1} (\beta_T^{GS})^l \max_{1 \leq i \leq N} \omega_1 \left(h_n, \hat{u}_{i,n}^{k-l} \right) + (\beta_T^{GS})^k \|U^0 - U\|_{\tilde{X}_N}, \\ &\leq \frac{\vartheta_T \kappa_T}{1 - \beta_T^{GS}} \max_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq l \leq k}} \omega_1 \left(h_n, \hat{u}_{i,n}^l \right) + (\beta_T^{GS})^k \|U^0 - U\|_{\tilde{X}_N}. \end{aligned}$$

□

Ce qui achève la démonstration. Ce résultat a été développé dans un papier pour publication [32].

3.3 Les tests numériques

Dans cette section, nous cherchons à illustrer l'application de notre généralisation, pour cela, nous choisissons l'équation intégrale de Fedholm de deuxième espèce sur l'intervalle $[0, 100]$.

Exemple 1 :

$$\lambda u(t) = \int_0^{100} \sin(st\theta)u(s)ds + f(t), \quad \lambda = 100\mu, \quad \mu > 1, \quad \theta = \frac{\pi}{2 \cdot 10^4}, \quad t \in [0, 100].$$

Le noyau $g(s, t) = \sin(st\theta)$ est positive, continue et λ est dans l'ensemble résolvant de l'opérateur T . Si nous prenons

$$f(t) = 100\mu t - \frac{\sin(100\theta t) - 100\theta t \cos(100\theta t)}{(t\theta)^2},$$

alors, la solution exacte est donnée par $u(t) = t$ sur l'intervalle $[0, 100]$. D'autre part, si nous fixons $\mu = 2$, l'équation présentée ci-dessus dans l'exemple 1, devient la même équation étudiée dans [14].

Pour étudier cet exemple, nous considérons la quadrature des Trapèzes comme méthode de discrétisation, puis nous changeons le pas h_n pour la comparaison entre les quatre méthodes suivantes, la méthode de Jacobi classique, la méthode de Gauss-Seidel classique (les processus conventionnels), la méthode de Jacobi généralisée et la méthode de Gauss-Seidel généralisée (les nouveaux processus).

La méthode de Jacobi classique : Nous choisissons le pas h_n pour subdiviser l'intervalle $[0, 100]$ puis nous utilisons la méthode de Nyström pour approcher l'équation intégrale présentée dans l'exemple, ce qui nous donne le grand système de dimension σ_n suivant :

$$\begin{aligned} \lambda x &= Ax + b, \\ A_{qp} &= w_p \sin(s_q s_p \theta), \quad 1 \leq q, p \leq \sigma_n, \\ b_q &= f(s_q), \quad 1 \leq q \leq \sigma_n, \\ s_q &= (q - 1)h_n, \quad 1 \leq q \leq \sigma_n. \end{aligned}$$

Dans ce cas, nous appliquons la méthode de Jacobi classique décrite par (1.4.19) pour approcher sa solution. A partir de $x^k = (x_1^k, \dots, x_{\sigma_n}^k)$, la k -itération de la méthode de

Jacobi, nous construisons la solution approchée u_n^k de notre équation intégrale par

$$\forall t \in [0, 100], u_n^k(t) = \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{p=1}^{\sigma_n} x_p^k w_p g(t, s_p) + f(t) \right).$$

Nous employons la condition d'arrêt suivante :

$$\|u_n^k - u_n^{k-1}\|_{\infty} \leq 10^{-8}.$$

Pour comparer entre les résultats, l'erreur obtenue par cette méthode est notée par

$$E_{JM} = \|u_n^k - u\|_{\infty}.$$

La méthode de Gauss-Seidel classique : Nous appliquons les mêmes étapes précédentes de la méthode de Jacobi classique, sauf que nous employons la méthode de Gauss-Seidel classique décrite par (1.4.21) pour approcher la solution du grand système obtenu. Nous prenons aussi la même condition d'arrêt et nous notons l'erreur obtenue par cette méthode par

$$E_{GSM} = \|u_n^k - u\|_{\infty}.$$

Nous rappelons que ce processus conventionnel a été étudié en détail dans [33].

Remarque 3.3.1. *Le principe des méthodes itératives est d'approcher les grands systèmes algébriques, parce que nous ne pouvons pas les inverser directement. Donc, nous allons ajouter la méthode directe, dans laquelle nous inversons le grand système directement et nous allons ajouter aussi ses résultats dans nos tableaux, pour mieux expliquer l'intérêt des méthodes itératives classiques et généralisées. Nous notons aussi l'erreur obtenue par la méthode directe par*

$$E_{DM} = \|u_n - u\|_{\infty}.$$

Maintenant, nous passons au nouveau processus de la généralisation des méthodes itératives.

L'erreur obtenue par cette méthode est notée par

$$E_{GJM} = \max_{1 \leq i \leq 100} \|u_{i,n}^k - u\|_{\infty} = \|U_n^k - U\|_{\infty}.$$

La méthode de Gauss-Seidel généralisée : De la même manière que la méthode généralisée précédente, nous transformons notre exemple en un système de 100 équations intégrales puis nous appliquons la méthode généralisée de Gauss-Seidel, en conjonction avec la méthode de Nyström présentée par (3.2.5), pour construire la solution approchée $\tilde{u}_{i,n}^k$, pour $k \geq 0$, $1 \leq i \leq 100$, $n = \frac{1}{h_n} + 1$ et $h_n > 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in [i-1, i], \quad \tilde{u}_{i,n}^0(t) = 0 \\ \forall t \in [i-1, i], \quad \tilde{u}_{i,n}^k(t) = \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{p=1}^n x_{i,p}^k w_{i,p} \sin(ts_{i,p}\theta) + \sum_{j=1}^{i-1} \int_{j-1}^j \sin(ts\theta) \tilde{u}_{j,n}^k(s) ds \right. \\ \left. + \sum_{j=i+1}^{100} \int_{j-1}^j \sin(ts\theta) \tilde{u}_{j,n}^{k-1}(s) ds + f(t) \right), \quad k \geq 1, \end{array} \right. ,$$

où, $x_i^k = (x_{i,1}^k, \dots, x_{i,n}^k)$ est la solution unique du système algébrique

$$\begin{aligned} \lambda x_i^k &= A_i x_i^k + b_i^k, \\ A_{i,qp} &= w_{i,p} \sin(s_{i,q} s_{i,p} \theta), \quad 1 \leq q, p \leq n, \\ b_{i,q}^k &= \sum_{j=1}^{i-1} \int_{j-1}^j \sin(s_{i,q} s \theta) \tilde{u}_{j,n}^k(s) ds + \sum_{j=i+1}^{100} \int_{j-1}^j \sin(s_{i,q} s \theta) \tilde{u}_{j,n}^{k-1}(s) ds + f(s_{i,q}), \quad 1 \leq q \leq n, \\ s_{i,q} &= i - 1 + (q - 1)h_n, \quad 1 \leq q \leq n. \end{aligned}$$

Nous employons aussi la même condition d'arrêt

$$\max_{1 \leq i \leq 100} \|\tilde{u}_{i,n}^k - \tilde{u}_{i,n}^{k-1}\|_{\infty} = \|\tilde{U}_n^k - \tilde{U}_n^{k-1}\|_{\infty} \leq 10^{-8}.$$

Nous notons l'erreur obtenue par cette méthode par

$$E_{GGSM} = \max_{1 \leq i \leq 100} \|\tilde{u}_{i,n}^k - u\|_{\infty} = \|\tilde{U}_n^k - U\|_{\infty}.$$

Nous allons maintenant discuter nos essais numériques. Tout d'abord, nous avons 3 paramètres reliés entre eux : h_n , μ et H . Nous fixons deux paramètres et nous étudions l'influence du troisième. Nous notons que l'ordinateur utilisé est de type : Intel(R)

TABLE 3.1 – Les erreurs obtenues en employant les méthodes itératives classiques.

h_n	σ_n	E_{DM}	E_{JM}	k	E_{GSM} [33]	k
0.250	401	4.62E-5	4.62E-5	16	4.62E-5	9
0.125	801	1.15E-5	1.15E-5	16	1.15E-5	9
0.050	2001	1.85E-6	1.84E-6	16	1.84E-6	9
0.010	10001	7.40E-8	7.33E-8	16	7.33E-8	9
0.005	20001	Out of memory	1.78E-8	16	1.78E-8	9

TABLE 3.2 – Les erreurs obtenues en employant les méthodes itératives généralisées.

h_n	n	E_{GJM}	k	E_{GGSM}	k
0.250	5	8.02E-7	16	8.02E-7	9
0.125	9	1.98E-7	16	1.98E-7	9
0.050	21	2.98E-8	16	2.98E-8	9
0.010	101	1.47E-9	16	1.47E-9	9
0.005	201	6.52E-10	16	6.52E-10	9

Core(TM) i5-3340 CPU @ 3.10GHz 3.10GHz. RAM. 4.Go.

1- l'influence de h_n : Nous fixons $\mu = 2$ et $H = 1$ puis nous diminuons le pas h_n et nous comparons les résultats.

Logiquement, le tableau (3.1) prouve que l'erreur obtenue par la méthode directe, la méthode de Jacobi classique et Gauss-Seidel classique diminue avec la diminution de h_n , ainsi elles nous donnent les mêmes résultats ; excepte, pour $h = 0.005$, la méthode directe bloque parce que nous avons dépassé la mémoire maximum de la machine. D'autre part, nous pouvons voir, comme il est connu que la méthode Gauss-Seidel classique est plus rapide que celle de Jacobi classique.

TABLE 3.3 – Les erreurs obtenues en employant les méthodes itératives classiques.

μ	E_{DM}	E_{JM}	k	E_{GSM}	k
2	1.85E-6	1.84E-6	16	1.84E-6	9
10	3.02E-7	3.02E-7	8	3.02E-7	5
50	5.84E-8	5.84E-8	5	5.84E-8	4
100	2.91E-8	2.90E-8	5	2.90E-8	3

TABLE 3.4 – Les erreurs obtenues en employant les méthodes itératives généralisées.

μ	E_{GJM}	k	E_{GGSM}	k
2	2.98E-8	16	2.98E-8	9
10	5.66E-9	8	5.66E-9	5
50	1.08E-9	5	1.08E-9	4
100	5.57E-10	5	5.57E-10	3

Le tableau (3.2), prouve que l'erreur obtenue par les méthodes itératives généralisées (Jacobi et Gauss-Seidel) diminue plus rapidement que les méthodes itératives classiques. En plus, nous pouvons voir que la méthode de Gauss-Seidel généralisée est plus rapide que la méthode de Jacobi généralisée, cela nous confirme que notre vision de la généralisation est raisonnable.

2- l'influence de μ : Nous fixons le pas $h_n = 0.05$ et $H = 1$ puis nous varions le paramètre μ pour voir son effet sur les résultats des méthodes.

Il est connue que l'augmentation de la valeur de λ (c.à.d. μ) dans n'importe quelle équation intégrale, va diminuer l'erreur. Dans le tableau (3.3), avec l'incrément des valeurs de μ , nous pouvons voir que les erreurs s'approchent de zéro. Dans le tableau (3.4),

TABLE 3.5 – Les erreurs obtenues en employant les méthodes itératives généralisées.

H	n	E_{DM}	E_{GJM}	k	E_{GGSM}	k
1	21	1.84E-6	2.98E-8	16	2.98E-8	9
5	101	1.85E-6	9.54E-8	16	9.54E-8	9
10	201	1.85E-6	1.83E-7	16	1.83E-7	8
50	1001	1.85E-6	8.58E-7	11	8.58E-7	5
100	2001	1.85E-6	1.85E-6	1	1.85E-6	1

nous pouvons voir que les erreurs obtenues en utilisant les méthodes itératives généralisées, s'approchent aussi de zéro, mais plus rapide que les méthodes itératives classiques. En outre, nous observons que si nous augmentons le paramètre μ , les deux constantes β_T^J et β_T^{GS} diminuent aussi, ce qui accélère les deux méthodes itératives généralisées.

3- l'influence de H : Dans les choix précédents nous avons pris $H = 1$. Maintenant, nous fixons $\mu = 2$ et $h_n = 0.05$, puis nous augmentons H pour montrer son influence sur les résultats de nos méthodes itératives généralisées.

Tout d'abord, nous rappelons que en changeant le paramètre H nous obtenons $\frac{100}{H}$ équations, avec $n = \frac{H}{0.05} + 1$. Dans le tableau (3.5), l'erreur de nos méthodes itératives généralisées croît avec l'augmentation de H , mais elle reste encore plus petite que l'erreur de méthodes itératives classique, sauf pour $H = 100$; logiquement nous revenons à l'équation intégrale initiale sur l'intervalle $[0, 100]$ où les méthodes itératives généralisées nous donnent les mêmes résultats que les méthodes itératives classiques.

Nous donnons une certaine interprétation mathématique de ce tableau, en effet nous voyons dans la bande d'erreur concernant les méthodes itératives généralisées, que le paramètre κ_T défini par (3.1.1) augmente avec l'augmentation de H à cause de sa relation avec γ_T^H , ce qui augmente l'erreur de nos méthode itératives généralisées. En plus, nous

TABLE 3.6 – Les erreurs obtenues en employant les méthodes itératives classiques.

h_n	σ_n	E_{DM}	E_{JM}	k	E_{GSM}	k
0.250	2001	2.91E-5	2.91E-5	14	2.91E-5	8
0.125	4001	1.02E-5	1.02E-5	14	1.02E-5	8
0.050	10001	2.59E-6	2.59E-6	14	2.59E-6	8
0.010	50001	Out of memory	2.32E-7	14	2.32E-7	8
0.005	100001	Out of memory	8.23E-8	14	8.23E-8	8

avons

$$\text{Lorsque } H \rightarrow \tau, \text{ on a } \gamma_T^H \rightarrow \|T\| \text{ et } \kappa_T \rightarrow C_1,$$

où, C_1 est définie par (1.2.4), ce qui montre que la borne d'erreur de nos méthodes itératives généralisées devient la même borne d'erreur des méthodes itératives classiques, ce que nous avons vu dans ce tableau si $H = 100$. Comme conclusion de ce tableau, nous pouvons choisir une valeur appropriée de H selon la longueur τ pour obtenir une petite erreur que les méthodes itératives classiques ; ce que nous allons voir dans l'exemple suivant.

Exemple 2 :

Considérons la deuxième équation intégrale de Fredholm définie sur l'intervalle $[0, 500]$

$$\lambda u(t) = \int_0^{500} |s - t| u(s) ds + f(t), \quad \lambda = 500^2 \mu, \quad t \in [0, 500],$$

où,

$$f(t) = \lambda \sqrt{t} - \frac{2(10\sqrt{5})^5}{5} + \frac{2(10\sqrt{5})^3 t}{3} - \frac{8(\sqrt{t})^5}{15},$$

et $u(t) = \sqrt{t}$ la solution exacte sur $[0, 500]$. Nous fixons $\mu = 2$ et $H = 10$, puis nous diminuons le pas h_n pour comparer les résultats de différentes méthodes.

TABLE 3.7 – Les erreurs obtenues en employant les méthodes itératives généralisées.

h_n	n	E_{GJM}	k	E_{GGSM}	k
0.250	41	3.56E-6	14	3.56E-6	8
0.125	81	1.26E-6	14	1.26E-6	8
0.050	201	3.21E-7	14	3.21E-7	8
0.010	1001	2.93E-8	14	2.93E-8	8
0.005	2001	1.06E-8	14	1.06E-8	8

Les tableaux (3.6) et (3.7) nous prouvent que l'erreur obtenue par nos méthodes itératives généralisées est la meilleur, en la comparant avec des autres méthodes étudiées.

Remarques et conclusion :

Les essais numériques prouvent que nos méthodes itératives généralisées présentent des avantages leurs assurant une préférence aux méthodes itératives classiques. La raison est que les suites $u_{i,n}^k$ ou $\tilde{u}_{i,n}^k$ développées par nos méthodes itératives généralisées convergent directement vers la solution exacte u , tandis que la suite u_n^k développée par les méthodes itératives classiques converge vers u_n , qui n'est qu'une approximation de u (en effet u_n est la solution du problème discrétisé selon la méthode de Nyström).

**Méthodes itératives généralisées pour les équations
intégrales faiblement singulières**

Sommaire

4.1 Application de la méthode de Jacobi généralisée	63
4.2 Application de la méthode de Gauss-Seidel généralisée	68
4.3 Les tests numériques	70

Ce chapitre est structuré comme le précédent, nous allons appliquer les méthodes itératives généralisées de Jacobi et Gauss-Seidel sur les équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce faiblement singulières. Dans la pratique, l'utilisation de ces méthodes itératives généralisées, nécessite l'inversion de certains opérateurs à chaque itération, par conséquent, ces méthodes itératives généralisées doivent être injectées par la méthode d'intégration produit pour approcher ces inverses d'opérateurs. Notre objectif est de compléter notre approche par une présentation d'une nouvelle majoration de l'erreur de la solution approchée suivi d'une comparaison avec les versions classiques de ces deux méthodes.

4.1 Application de la méthode de Jacobi généralisée

Concernant le schéma itératif de Jacobi généralisé (2.3.10), nous avons besoin de calculer les opérateurs $(\lambda I_{ii} - S_{ii})^{-1}$ pour tout $1 \leq i \leq N$ dans chaque itération, ce qui est impossible en pratique, pour cela nous approchons les opérateurs S_{ii} en utilisant la méthode d'intégration produit [10] présentée dans le chapitre 1.

Tout d'abord, pour tout $1 \leq i \leq N$ nous définissons la subdivision de l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, pour $n \geq 2$

$$h_n = \frac{H}{n-1}, \quad s_{i,p} = t_i + (p-1)h_n, \quad 1 \leq p \leq n.$$

Ici nous avons fixé aussi le pas h_n , afin que la comparaison entre la méthode de Jacobi classique et celle généralisée soit homogène. D'autre part, la longueur H des petits intervalles $[t_i, t_{i+1}]$, est choisie assez petite pour obtenir des systèmes linéaires peu coûteux en résolution numérique.

Pour tout $1 \leq i \leq N$, nous considérons les fonctions chapeaux $\{e_{i,p}(s)\}_{p=1}^n$ qui définissent une base d'interpolation pour l'espace X_i . Pour tout $2 \leq p \leq n-1$, nous notons par

$$e_{i,p}(s) = \begin{cases} 1 - \frac{|s - s_{i,p}|}{h_n}, & s_{i,p-1} \leq s \leq s_{i,p+1}, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

$$e_{i,1}(s) = \begin{cases} \frac{s_{i,2} - s}{h_n}, & s_{i,1} \leq s \leq s_{i,2}, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

$$e_{i,n}(s) = \begin{cases} \frac{s - s_{i,n-1}}{h_n}, & s_{i,n-1} \leq s \leq s_{i,n}, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Nous définissons l'opérateur approché $S_{ii,n} : X_i \rightarrow X_i$ de S_{ii} en utilisant la méthode

d'intégration produit, en effet

$$\forall x \in X_i, \forall t \in [t_i, t_{i+1}], S_{ii,n}x(t) \approx \sum_{p=1}^n w_{i,p}(t)x(s_{i,p}),$$

où,

$$w_{i,p}(t) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(|s-t|)e_{i,p}(s)ds, \quad 1 \leq p \leq n.$$

Alors, pour tout $1 \leq i \leq N$, $S_{ii,n} \in B_{ii}$ [10], en plus

$$\|S_{ii,n}\|_{ii} \leq 2 \int_0^{H/2} g(s)ds = \gamma_S^H.$$

Théorème 4.1.1. *Pour tout $1 \leq i \leq N$ et pour n assez grand, $(\lambda I_{ii} - S_{ii,n})^{-1}$ existe et on a*

$$\|(\lambda I_{ii} - S_{ii,n})^{-1}\|_{ii} \leq \kappa_S,$$

où, κ_S est une constante positive indépendante de i et n .

Démonstration. Nous pouvons dire que la démonstration est un résultat direct du Théorème (1.1.7), mais nous allons apporter plus de précision sur la constante κ_S .

Pour tout $1 \leq i \leq N$, d'après le Lemme 4.1.2 [10], nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(S_{ii} - S_{ii,n})S_{ii,n}\|_{ii} = 0.$$

En plus, d'après le Théorème 4.1.2 [10], nous avons pour n assez grand,

$$\|(\lambda I_{ii} - S_{ii,n})^{-1}\|_{ii} \leq \frac{1 + \|(\lambda I_{ii} - S_{ii})^{-1}\|_{ii} \|S_{ii,n}\|_{ii}}{|\lambda| - \|(S_{ii} - S_{ii,n})S_{ii,n}\|_{ii}}.$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} \|S_{ii,n}\|_{ii} &\leq \gamma_S^H, \\ \|(\lambda I_{ii} - S_{ii})^{-1}\|_{ii} &\leq \frac{1}{|\lambda| - \|S_{ii}\|_{ii}} \leq \frac{1}{|\lambda| - \gamma_S^H}, \end{aligned}$$

alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \|(\lambda I_{ii} - S_{ii})^{-1}\|_{ii} \|S_{ii,n}\|_{ii}}{|\lambda| - \|(S_{ii} - S_{ii,n})S_{ii,n}\|_{ii}} \leq |\lambda|^{-1} \left(1 + (|\lambda| - \gamma_S^H)^{-1} \gamma_S^H\right).$$

Pour conclure, nous pouvons prendre

$$\kappa_S = 1 + |\lambda|^{-1} \left(1 + (|\lambda| - \gamma_S^H)^{-1} \gamma_S^H\right). \quad (4.1.1)$$

□

Pour tout $1 \leq i \leq N$, soit v_i la solution exacte et $v_{i,n}$ son approximation obtenue par la méthode d'intégration produit, elles vérifient les équations suivantes respectivement ; pour n assez grand,

$$\begin{aligned} \forall t \in [t_i, t_{i+1}], \lambda v_i(t) &= S_{ii} v_i(t) + \bar{\psi}_i(t), \\ \lambda v_{i,n}(t) &= S_{ii,n} v_{i,n}(t) + \bar{\psi}_i(t). \end{aligned}$$

Il est clair que, pour tout $\bar{\psi}_i \in X_i$, les deux équations précédentes admettent des solutions uniques v_i et $v_{i,n}$ respectivement. Le Théorème suivant assure que la solution approchée $v_{i,n}$ converge vers la solution exacte v_i lorsque n tend vers ∞ . En plus, il nous donne une nouvelle estimation d'erreur.

Théorème 4.1.2. *Pour tout $1 \leq i \leq N$ et pour n assez grand,*

$$\|v_i - v_{i,n}\|_i \leq \kappa_S \gamma_S^H \omega_2(h_n, v_i),$$

où, $\omega_2(h_n, v_i)$ est le module de continuité de la fonction v_i sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, défini par

$$\omega_2(h_n, v_i) := \max_{|s-t| \leq h_n} |v_i(t) - v_i(s)|. \quad (4.1.2)$$

Démonstration. Nous utilisons le fait que,

$$v_i - v_{i,n} = (\lambda I_{ii} - S_{ii,n})^{-1} (S_{ii} - S_{ii,n}) v_i,$$

puis, nous appliquons le Théorème 4.2.1 de [10] pour conclure. □

D'autre part, $v_{i,n}$ est donnée par la formule d'interpolation suivante, pour tout $1 \leq i \leq N$,

$$\forall t \in [t_i, t_{i+1}], v_{i,n}(t) = \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{p=1}^n w_{i,p}(t) x_p + \bar{\psi}_i(t) \right),$$

où, $x = (x_1, \dots, x_n)$ est la solution unique du système de dimension n suivant :

$$\lambda x = Ax + b, A_{qp} = w_{i,p}(s_{i,q}), b_q = \bar{\psi}_i(s_{i,q}), 1 \leq q, p \leq n.$$

Nous définissons le schéma itératif de la méthode de Jacobi généralisée (2.3.10) en conjonction avec la méthode d'intégration produit par ; pour tout $1 \leq i \leq N$ et $n \geq 2$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in [t_i, t_{i+1}], \quad \lambda v_{i,n}^k(t) = S_{ii,n} v_{i,n}^k(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N S_{ij} v_{j,n}^{k-1}(t) + f_i(t), \quad k \geq 1, \\ v_i^0 \in X_i, \end{array} \right. \quad (4.1.3)$$

afin d'obtenir la solution approchée $V_n^k = (v_{1,n}^k, v_{1,n}^k, \dots, v_{N,n}^k) \in \widetilde{X}_N$. Notre but maintenant est de prouver que

$$V_n^k \rightarrow V \quad \text{lorsque} \quad k \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad n \rightarrow \infty,$$

ce qui sera démontré dans le Théorème suivant. Avant la démonstration et pour une raison technique, nous devons définir $\hat{V}_n^k = (\hat{v}_{1,n}^k, \hat{v}_{1,n}^k, \dots, \hat{v}_{N,n}^k) \in \widetilde{X}_N$ la solution du système, pour tout $1 \leq i \leq N$ et $n \geq 2$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in [t_i, t_{i+1}], \quad \lambda \hat{v}_{i,n}^k(t) = S_{ii} \hat{v}_{i,n}^k(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N S_{ij} v_{j,n}^{k-1} + f_i(t), \quad k \geq 1, \\ v_i^0 \in X_i, \end{array} \right. \quad (4.1.4)$$

Théorème 4.1.3. *Pour $k \geq 1$ et pour n assez grand,*

$$\|V_n^k - V\|_{\widetilde{X}_N} \leq \frac{\kappa_S \gamma_S^H}{1 - \beta_S^J} \max_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq l \leq k}} \omega_2(h_n, \hat{v}_{i,n}^l) + (\beta_S^J)^k \|V^0 - V\|_{\widetilde{X}_N},$$

où, $\kappa_S, \omega_2(h_n, \hat{v}_{i,n}^l)$ et β_S^J sont données par (4.1.1), (4.1.2) et (2.1.4) respectivement.

Démonstration. Tout d'abord, pour $n \geq 2$, nous avons l'inégalité suivante :

$$\|V_n^k - V\|_{\tilde{X}_N} \leq \|V_n^k - \hat{V}_n^k\|_{\tilde{X}_N} + \|\hat{V}_n^k - V\|_{\tilde{X}_N}.$$

Nous allons voir comment majorer les deux quantités de l'inégalité précédente. Premièrement, pour tout $1 \leq i \leq N$, à partir du schéma (4.1.4) et le système $(\Xi)_S$, nous avons

$$(\hat{v}_{i,n}^k - v_i) = (\lambda I_{ii} - S_{ii})^{-1} \sum_{j=1, j \neq i}^N S_{ij} (v_{j,n}^{k-1} - v_j).$$

De la même manière que celle utilisée dans le Théorème (2.3.2), nous trouvons que

$$\|\hat{V}_n^k - V\|_{\tilde{X}_N} \leq \beta_S^J \|V_n^{k-1} - V\|_{\tilde{X}_N}.$$

Deuxièmement, l'application du Théorème (4.1.2) aux schémas (4.1.3) et (4.1.4) nous donne la relation

$$\|V_n^k - \hat{V}_n^k\|_{\tilde{X}_N} \leq \kappa_S \gamma_S^H \max_{1 \leq i \leq N} \omega_2(h_n, \hat{v}_{i,n}^k),$$

finalemt, nous obtenons

$$\|V_n^k - V\|_{\tilde{X}_N} \leq \kappa_S \gamma_S^H \max_{1 \leq i \leq N} \omega_2(h_n, \hat{v}_{i,n}^k) + \beta_S^J \|V_n^{k-1} - V\|_{\tilde{X}_N}.$$

Répetons la dernière inégalité k-fois, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|V_n^k - V\|_{\tilde{X}_N} &\leq \kappa_S \gamma_S^H \max_{1 \leq i \leq N} \omega_2(h_n, \hat{v}_{i,n}^k) \\ &+ \beta_S^J \left(\kappa_S \gamma_S^H \max_{1 \leq i \leq N} \omega_2(h_n, \hat{v}_{i,n}^{k-1}) + \beta_S^J \|V_n^{k-2} - V\|_{\tilde{X}_N} \right), \\ &\leq \kappa_S \gamma_S^H \sum_{l=0}^{k-1} (\beta_S^J)^l \max_{1 \leq i \leq N} \omega_2(h_n, \hat{v}_{i,n}^{k-l}) + (\beta_S^J)^k \|V^0 - V\|_{\tilde{X}_N}, \\ &\leq \frac{\kappa_S \gamma_S^H}{1 - \beta_S^J} \max_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq l \leq k}} \omega_2(h_n, \hat{v}_{i,n}^l) + (\beta_S^J)^k \|V^0 - V\|_{\tilde{X}_N}, \end{aligned}$$

□

ce qui achève la démonstration. Ce Théorème est le deuxième résultat dans notre travail, publié dans [16].

4.2 Application de la méthode de Gauss-Seidel généralisée

De manière analogue, concernant le schéma itératif de Gauss-Seidel généralisé (2.4.14), nous avons besoin aussi d'approcher les opérateurs S_{ii} pour tout $1 \leq i \leq N$, en utilisant la méthode d'intégration produit [10].

Nous définissons le schéma itératif de la méthode de Gauss-Seidel généralisée (2.4.14) en conjonction avec la méthode d'intégration produit par, pour tout $1 \leq i \leq N$ et $n \geq 2$,

$$\begin{cases} \lambda \tilde{v}_{i,n}^k(t) &= S_{ii,n} \tilde{v}_{i,n}^k(t) + \sum_{j=1}^{i-1} S_{ij} \tilde{v}_{j,n}^k(t) + \sum_{j=i+1}^N S_{ij} \tilde{v}_{j,n}^{k-1}(t) + f_i(t), \quad k \geq 1, \\ \tilde{v}_i^0(t) &\in X_i, \end{cases} \quad (4.2.5)$$

afin d'obtenir la solution approchée $\tilde{V}_n^k = (\tilde{v}_{1,n}^k, \tilde{v}_{1,n}^k, \dots, \tilde{v}_{N,n}^k) \in \tilde{X}_N$. Notre but maintenant est de prouver que

$$\tilde{V}_n^k \rightarrow V \quad \text{lorsque } k \rightarrow \infty \quad \text{et } n \rightarrow \infty,$$

ce qui est démontré dans le Théorème suivant selon le même principe précédent. Avant la démonstration et pour une raison technique, nous devons définir $\hat{V}_n^k = (\hat{v}_{1,n}^k, \hat{v}_{1,n}^k, \dots, \hat{v}_{N,n}^k) \in \tilde{X}_N$ la solution du système, pour tout $1 \leq i \leq N$ et $n \geq 2$,

$$\begin{cases} \lambda \hat{v}_{i,n}^k(t) &= S_{ii} \hat{v}_{i,n}^k(t) + \sum_{j=1}^{i-1} S_{ij} \hat{v}_{j,n}^k(t) + \sum_{j=i+1}^N S_{ij} \hat{v}_{j,n}^{k-1}(t) + f_i(t), \quad k \geq 1, \\ \hat{v}_i^0(t) &\in X_i, \end{cases} \quad (4.2.6)$$

Théorème 4.2.1. *Pour $k \geq 1$ et pour n assez grand,*

$$\|\tilde{V}_n^k - V\|_{\tilde{X}_N} \leq \frac{\vartheta_S \kappa_S \gamma_S^H}{1 - \beta_S^{GS}} \max_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq l \leq k}} \omega_2(h_n, \hat{v}_{i,n}^l) + (\beta_S^{GS})^k \|V^0 - V\|_{\tilde{X}_N},$$

où, $\kappa_S, \omega_2(h_n, \hat{v}_{i,n}^l)$ et β_S^{GS} sont données par (4.1.1), (4.1.2) et (2.1.6) respectivement, alors que ϑ_S s'écrit

$$\vartheta_S = \frac{|\lambda|}{|\lambda| - \|S\|}.$$

Démonstration. Tout d'abord, pour $n \geq 2$, nous avons l'inégalité suivante :

$$\|\tilde{V}_n^k - V\|_{\tilde{X}_N} \leq \|\tilde{V}_n^k - \hat{V}_n^k\|_{\tilde{X}_N} + \|\hat{V}_n^k - V\|_{\tilde{X}_N}.$$

Nous allons voir comment majorer les deux quantités de l'inégalité précédente. Premièrement, pour tout $1 \leq i \leq N$, à partir du schéma (4.2.6) et le système $(\Xi)_S$, nous avons

$$(\hat{v}_{i,n}^k - v_i) = (\lambda I_{ii} - S_{ii})^{-1} \sum_{j=1}^{i-1} S_{ij}(\hat{v}_{j,n}^k - v_j) + (\lambda I_{ii} - S_{ii})^{-1} \sum_{j=i+1}^N S_{ij}(\hat{v}_{j,n}^{k-1} - v_j).$$

De la même manière que celle utilisée dans le Théorème (2.4.2), nous obtenons

$$\|\hat{V}_n^k - V\|_{\tilde{X}_N} \leq \underline{\delta}_S(i_{m'}, N) \|\tilde{V}_n^k - V\|_{\tilde{X}_N} + \bar{\delta}_S(i_{m'}, N) \|\tilde{V}_n^{k-1} - V\|_{\tilde{X}_N}.$$

Deuxièmement, l'application du Théorème (4.1.2) aux schémas (4.2.5) et (4.2.6) nous donne

$$\|\tilde{V}_n^k - \hat{V}_n^k\|_{\tilde{X}_N} \leq \kappa_S \gamma_S^H \max_{1 \leq i \leq N} \omega_2 \left(h_n, \hat{v}_{i,n}^k \right),$$

finalement, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\tilde{V}_n^k - V\|_{\tilde{X}_N} &\leq \|\tilde{V}_n^k - \hat{V}_n^k\|_{\tilde{X}_N} + \underline{\delta}_S(i_{m'}, N) \|\tilde{V}_n^k - V\|_{\tilde{X}_N} + \bar{\delta}_S(i_{m'}, N) \|\tilde{V}_n^{k-1} - V\|_{\tilde{X}_N}, \\ \|\tilde{V}_n^k - V\|_{\tilde{X}_N} &\leq \frac{1}{1 - \underline{\delta}_S(i_{m'}, N)} \|\tilde{V}_n^k - \hat{V}_n^k\|_{\tilde{X}_N} + \frac{\bar{\delta}_S(i_{m'}, N)}{1 - \underline{\delta}_S(i_{m'}, N)} \|\tilde{V}_n^{k-1} - V\|_{\tilde{X}_N}, \\ &\leq \vartheta_S \kappa_S \gamma_S^H \max_{1 \leq i \leq N} \omega_2 \left(h_n, \hat{v}_{i,n}^k \right) + \beta_S^{GS} \|\tilde{V}_n^{k-1} - V\|_{\tilde{X}_N}. \end{aligned}$$

Répetons la dernière inégalité k -fois, nous aurons

$$\begin{aligned} \|\tilde{V}_n^k - V\|_{\tilde{X}_N} &\leq \vartheta_S \kappa_S \gamma_S^H \max_{1 \leq i \leq N} \omega_2 \left(h_n, \hat{v}_{i,n}^k \right) \\ &\quad + \beta_S^{GS} \left(\vartheta_S \kappa_S \gamma_S^H \max_{1 \leq i \leq N} \omega_2 \left(h_n, \hat{v}_{i,n}^{k-1} \right) + \beta_S^{GS} \|\tilde{V}_n^{k-2} - V\|_{\tilde{X}_N} \right), \\ &\leq \vartheta_S \kappa_S \gamma_S^H \sum_{l=0}^{k-1} (\beta_S^{GS})^l \max_{1 \leq i \leq N} \omega_2 \left(h_n, \hat{v}_{i,n}^{k-l} \right) + (\beta_S^{GS})^k \|V^0 - V\|_{\tilde{X}_N}, \\ &\leq \frac{\vartheta_S \kappa_S \gamma_S^H}{1 - \beta_S^{GS}} \max_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq l \leq k}} \omega_2 \left(h_n, \hat{v}_{i,n}^l \right) + (\beta_S^{GS})^k \|V^0 - V\|_{\tilde{X}_N}, \end{aligned}$$

□

ce qui achève la démonstration. Nous avons développé ce résultat dans le papier [34] qui a été soumis pour publication.

4.3 Les tests numériques

Dans cette section, pour illustrer l'application de notre généralisation, nous choisissons dans ce cas là, une équation intégrale de Fedholm de deuxième espèce faiblement singulière, définie sur l'intervalle $[0, \tau]$, où, $\tau \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, par

$$\lambda v(t) = \int_0^\tau \frac{v(s)}{\sqrt{|s-t|}} ds + f(t), \quad \lambda = 4\sqrt{2\tau}, \quad t \in [0, \tau].$$

Le noyau $g(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}$ satisfait (\mathcal{H}) et λ est choisie dans l'ensemble résolvant de l'opérateur S . Si nous prenons

$$f(t) = \lambda t^2 - \frac{2(3\tau^2 + 4\tau t + 8t^2)\sqrt{\tau-t}}{15} - \frac{16}{15}t^{5/2},$$

alors, la solution exacte est donnée par $v(t) = t^2$ sur l'intervalle $[0, \tau]$. D'autre part, l'exemple présentée ci-dessus est le même étudié dans notre papier [16].

Comme dans le chapitre précédent, nous allons étudier cet exemple en utilisant les quatre méthodes suivantes ; la méthode de Jacobi classique, la méthode de Gauss-Seidel classique (les processus conventionnels), la méthode de Jacobi généralisée et la méthode de Gauss-Seidel généralisée (les nouveaux processus).

La méthode de Jacobi classique : Nous choisissons le pas h_n pour subdiviser l'intervalle $[0, \tau]$ puis nous utilisons la méthode d'intégration produit pour approcher l'équation intégrale présentée dans l'exemple, ce qui nous donne le grand système de dimension σ_n , suivant :

$$\lambda x = Ax + b,$$

$$A_{qp} = w_p(s_q), \quad 1 \leq q, p \leq \sigma_n,$$

$$b_q = f(s_q), \quad 1 \leq q \leq \sigma_n,$$

$$s_q = (q-1)h_n, \quad 1 \leq q \leq \sigma_n.$$

où, $w_p(t)$ est donnée par

$$w_p(t) = \int_0^\tau \frac{e_p(s)}{\sqrt{|s-t|}} ds, \quad 1 \leq p \leq \sigma_n.$$

Dans ce cas, nous appliquons la méthode de Jacobi classique décrite par (1.4.19) pour approcher sa solution. A partir de $x^k = (x_1^k, \dots, x_{\sigma_n}^k)$ la k -itération de la méthode de Jacobi, nous construisons la solution approchée v_n^k de notre équation intégrale par

$$\forall t \in [0, \tau], v_n^k(t) = \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{p=1}^{\sigma_n} x_p^k w_p(t) + f(t) \right).$$

Nous employons la condition d'arrêt suivante :

$$\|v_n^k - v_n^{k-1}\|_\infty \leq 10^{-8}.$$

Pour comparer entre les résultats, nous notons l'erreur obtenue par cette méthode par

$$E_{JM} = \|v_n^k - v\|_\infty.$$

La méthode de Gauss-Seidel classique : Nous appliquons les mêmes étapes précédentes de la méthode de Jacobi classique, sauf que nous employons la méthode de Gauss-Seidel classique décrite par (1.4.21) pour approcher les solutions du grand système obtenu. Nous prenons aussi la même condition d'arrêt et nous notons l'erreur obtenue par cette méthode par

$$E_{GSM} = \|v_n^k - v\|_\infty.$$

Maintenant, nous passons au nouveau processus de la généralisation des méthodes itératives.

La méthode de Jacobi généralisée : Nous fixons $H = 1$, alors, $N = \tau$. Ainsi, nous

transformons l'exemple au système de N équations intégrales suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in [0, 1], \quad \lambda v_1(t) = \int_0^1 \frac{v_1(s)}{\sqrt{|s-t|}} ds + \int_1^2 \frac{v_2(s)}{\sqrt{s-t}} ds + \dots + \int_{N-1}^N \frac{v_N(s)}{\sqrt{s-t}} ds + f(t), \\ \forall t \in [1, 2], \quad \lambda v_2(t) = \int_0^1 \frac{v_1(s)}{\sqrt{t-s}} ds + \int_1^2 \frac{v_2(s)}{\sqrt{|s-t|}} ds + \dots + \int_{N-1}^N \frac{v_N(s)}{\sqrt{s-t}} ds + f(t), \\ \vdots \\ \forall t \in [N-1, N], \quad \lambda v_N(t) = \int_0^1 \frac{v_1(s)}{\sqrt{t-s}} ds + \int_1^2 \frac{v_2(s)}{\sqrt{t-s}} ds + \dots + \int_{N-1}^N \frac{v_N(s)}{\sqrt{|s-t|}} ds + f(t). \end{array} \right.$$

Nous appliquons la méthode de Jacobi généralisée en conjonction avec la méthode d'intégration produit présentée par (4.1.3) au système précédent. Nous choisissons le même pas h_n pour subdiviser les intervalles $[i-1, i]$ pour tout $1 \leq i \leq N$, dans le but d'homogénéiser la comparaison entre les méthodes itératives classiques et les méthodes itératives généralisées. Ainsi les solutions approchées $v_{i,n}^k$, pour $k \geq 0$, $1 \leq i \leq N$, $n = \frac{1}{h_n} + 1$ et $h_n > 0$ sont données par

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in [i-1, i], \quad v_{i,n}^0(t) = 0 \\ \forall t \in [i-1, i], \quad v_{i,n}^k(t) = \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{p=1}^n x_{i,p}^k w_{i,p}(t) + \sum_{j=1, j \neq i_{j-1}}^N \int_{i_{j-1}}^j \frac{v_{j,n}^{k-1}(s)}{\sqrt{|s-t|}} ds + f(t) \right), \quad k \geq 1, \end{array} \right.$$

où, $w_{i,p}(t)$ est donnée par

$$w_{i,p}(t) = \int_{i-1}^i \frac{e_{i,p}(s)}{\sqrt{|s-t|}} ds, \quad 1 \leq p \leq n,$$

et $x_i^k = (x_{i,1}^k, \dots, x_{i,n}^k)$ est la solution unique du système algébrique suivant :

$$\begin{aligned} \lambda x_i^k &= A_i x_i^k + b_i^k, \\ A_{i,qp} &= w_{i,p}(s_{i,q}), \quad 1 \leq q, p \leq n, \\ b_{i,q}^k &= \sum_{j=1, j \neq i_{j-1}}^N \int_{i_{j-1}}^j \frac{v_{j,n}^{k-1}(s)}{\sqrt{|s-s_{i,q}|}} ds + f(s_{i,q}), \quad 1 \leq q \leq n, \\ s_{i,q} &= i-1 + (q-1)h_n, \quad 1 \leq q \leq n. \end{aligned}$$

Nous employons la condition d'arrêt suivante :

$$\max_{1 \leq i \leq N} \|v_{i,n}^k - v_{i,n}^{k-1}\|_{\infty} = \|V_n^k - V_n^{k-1}\|_{\infty} \leq 10^{-8}.$$

L'erreur obtenue par cette méthode est notée par

$$E_{GJM} = \max_{1 \leq i \leq N} \|v_{i,n}^k - v\|_{\infty} = \|V_n^k - V\|_{\infty}.$$

La méthode de Gauss-Seidel généralisée : De la même manière que la méthode généralisée précédente, nous transformons notre exemple en un système de N équations intégrales, puis nous appliquons la méthode généralisée de Gauss-Seidel en conjonction avec la méthode d'intégration produit présentée par (4.2.5) pour construire la solution approchée $\tilde{v}_{i,n}^k$. Pour $k \geq 0$, $1 \leq i \leq N$, $n = \frac{1}{h_n} + 1$ et $h_n > 0$ nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in [i-1, i], \quad \tilde{v}_{i,n}^0(t) = 0 \\ \forall t \in [i-1, i], \quad \tilde{v}_{i,n}^k(t) = \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{p=1}^n x_{i,p}^k w_{i,p}(t) + \sum_{j=1}^{i-1} \int_{j-1}^j \frac{\tilde{v}_{j,n}^k(s)}{\sqrt{t-s}} ds \right. \\ \left. + \sum_{j=i+1}^N \int_{j-1}^j \frac{\tilde{v}_{j,n}^{k-1}(s)}{\sqrt{s-t}} ds + f(t) \right), \quad k \geq 1, \end{array} \right. ,$$

où, $x_i^k = (x_{i,1}^k, \dots, x_{i,n}^k)$ est la solution unique du système algébrique suivant :

$$\begin{aligned} \lambda x_i^k &= A_i x_i^k + b_i^k, \\ A_{i,qp} &= w_{i,p}(s_{i,q}), \quad 1 \leq q, p \leq n, \\ b_{i,q}^k &= \sum_{j=1}^{i-1} \int_{j-1}^j \frac{\tilde{v}_{j,n}^k(s)}{\sqrt{s_{i,q}-s}} ds + \sum_{j=i+1}^N \int_{j-1}^j \frac{\tilde{v}_{j,n}^{k-1}(s)}{\sqrt{s-s_{i,q}}} ds + f(s_{i,q}), \quad 1 \leq q \leq n, \\ s_{i,q} &= i-1 + (q-1)h_n, \quad 1 \leq q \leq n. \end{aligned}$$

Nous employons aussi la même condition d'arrêt

$$\max_{1 \leq i \leq N} \|\tilde{v}_{i,n}^k - \tilde{v}_{i,n}^{k-1}\|_{\infty} = \|\tilde{V}_n^k - \tilde{V}_n^{k-1}\|_{\infty} \leq 10^{-8}.$$

Nous notons aussi l'erreur obtenue par cette méthode par

$$E_{GGSM} = \max_{1 \leq i \leq N} \|\tilde{v}_{i,n}^k - v\|_{\infty} = \|\tilde{V}_n^k - V\|_{\infty}.$$

TABLE 4.1 – Les erreurs obtenues en employant les méthodes itératives classiques.

h_n	σ_n	E_{JM}	k	E_{GSM}	k
0.250	401	9.86E-3	34	9.86E-3	20
0.125	801	2.47E-3	34	2.47E-3	20
0.050	2001	3.97E-4	34	3.97E-4	20
0.025	4001	1.01E-4	34	1.01E-4	20

TABLE 4.2 – Les erreurs obtenues en employant les méthodes itératives généralisées.

h_n	n	E_{GJM}	k	E_{GGSM}	k
0.250	5	1.20E-3	34	1.20E-3	20
0.125	9	3.12E-4	34	3.12E-4	20
0.050	21	5.15E-5	34	5.15E-5	20
0.025	41	1.38E-5	34	1.38E-5	20

Dans ce cas, pour les essais numériques, nous fixons premièrement $\tau = 100$ et nous diminuons le pas h_n . Deuxièmement, nous fixons $h_n = 0.125$ et nous augmentons la longueur τ .

Logiquement, le tableau (4.1) prouve que l'erreur obtenue par les méthodes de Jacobi Gauss-Seidel classiques décroît avec la diminution de h_n . Aussi, elles nous donnent les mêmes résultats, sauf que la méthode de Gauss-Seidel classique est plus rapide que la méthode de Jacobi classique.

Le tableau (4.2), comme nous avons déjà vu dans le cas régulier étudié dans le chapitre précédent, prouve que l'erreur obtenue par les méthodes itératives généralisées (Jacobi et Gauss-Seidel) diminue plus rapidement que les méthodes itératives classiques. En plus,

TABLE 4.3 – Les erreurs obtenues en employant les méthodes itératives classiques.

τ	σ_n	E_{JM}	k	E_{GSM}	k
10	81	2.42E-3	24	2.42E-3	14
100	801	2.47E-3	34	2.47E-3	20
250	2001	2.48E-3	37	2.48E-3	23
500	4001	2.49E-3	40	2.49E-3	27

TABLE 4.4 – Les erreurs obtenues en employant les méthodes itératives généralisées.

τ	n	E_{GJM}	k	E_{GGSM}	k
10	9	7.71E-4	24	7.71E-4	14
100	9	3.12E-4	34	3.12E-4	20
250	9	2.34E-4	37	2.34E-4	23
500	9	1.25E-4	40	1.25E-4	27

nous pouvons voir aussi que la méthode de Gauss-Seidel généralisée est plus rapide que la méthode de Jacobi généralisée.

Dans le tableau (4.3), nous pouvons voir que l'erreur obtenue par les méthodes itératives de Jacobi et Gauss-Seidel classiques est fixée avec l'augmentation de la longueur τ , par ce que l'ordre de l'erreur dépend au pas h_n , qui est fixé. Pour cela, les méthodes itératives classique nous donnent la même erreur.

Dans le tableau (4.4), en utilisant les méthodes itératives généralisées, nous donne des très bons résultats comparés aux méthodes itératives classiques, où, l'erreur obtenue diminue avec l'augmentation de la longueur τ , malgré que le pas h_n est fixé. De cette façon, l'augmentation de la longueur de l'intervalle d'intégration est un point positif pour nous.

Passons maintenant à l'interprétation mathématique de ce tableau ; comme nous avons déjà vu pour montrer l'influence de H dans le chapitre précédent, que la borne d'erreur des méthodes itératives généralisées dépend de h_n et de κ_S donnée par (4.1.1) ; lorsque nous augmentons la longueur τ , automatiquement, la valeur de λ va augmenter aussi pour rester toujours dans l'ensemble résolvant de l'opérateur S . Par conséquent, la quantité κ_S va diminuer à cause de sa relation avec $(|\lambda| - \gamma_S^H)^{-1}$, ce qui diminue l'erreur de nos méthodes itératives généralisées.

Remarques et conclusion :

Les essais numériques prouvent aussi que les méthodes itératives généralisées restent les meilleurs même dans le cas des équations intégrales faiblement singulières, comparées aux méthodes itératives classiques. La raison aussi est que les suites $v_{i,n}^k$ ou $\tilde{v}_{i,n}^k$ développées par les méthodes itératives généralisées convergent directement vers la solution exacte v , alors que, la suite v_n^k développée par les méthodes itératives classiques converge vers v_n solution du problème discrétisé obtenu par la méthode d'intégration produit.

CONCLUSION

Dans cette thèse, nous avons considéré les équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce définies sur un intervalle de longueur très large. Nous avons construit un nouveau processus numérique pour résoudre ce type des équations intégrales. Pour cela, nous avons défini une nouvelle version des méthodes itératives de Jacobi et Gauss-Seidel plus générales, car elles sont adaptées aux systèmes d'opérateurs linéaires bornés.

Nous avons appliqué ces méthodes itératives de Jacobi et Gauss-Seidel généralisées aux équations intégrales régulières et faiblement singulières. Les tests numériques effectués montrent leurs efficacités. Elles présentent une meilleure précision de la solution approchée comparée à celle obtenue par les méthodes itératives classiques.

Comme perspectives, nous allons essayer d'appliquer ces nouvelles méthodes itératives généralisées en conjonction avec la méthode de Kantorovich [13], pour la résolution de l'équation intégrale qui modélise le problème de transfert radiatif [4]. Comme, nous allons essayer de généraliser nos résultats pour d'autres espaces fonctionnels plus faibles, tels les espaces L^p , $p \geq 1$.

Nous allons aussi voir comment construire une généralisation des autres méthodes itératives par exemple : La méthode SOR (successive over relaxation). Ainsi, nous allons

vérifier que notre vision de généralisation reste toujours possible pour les méthodes itératives non stationnaires par exemple : Les méthodes du gradient ?

Finalement, nous espérons résoudre d'autres problèmes mathématiques par exemple : Les EDP, en appliquant notre vision de généralisation.

Bibliographie

- [1] Constanda, C., Pérez, M. E. : Integral Methods in Science and Engineering, volume 1 : analytic method. Birkhäuser Boston, 2010.
- [2] Busbridge, I. W. : The Mathematics of radiative transfer. Cambridge University Press, 1960.
- [3] Titaud, O. : Analyse et résolution numérique de l'équation de transfert. Application au atmosphères stellaires. Thèse de doctorat en Mathématiques université Jean Monnet-Saint-Etienne. 2001.
- [4] Ahues, M., D'Almeida, F. D., Largillier, A., Titaud, O., Vasconcelos, P.B. : An L^1 refined projection approximate solution of the radiation transfer equation in stellar atmospheres, Journal of Computational and Applied Mathematics. 140 (2002), pp. 13-26.
- [5] Titaud, O. : Reduction of Computation in the Numerical Resolution of a Second-Kind Weakly Singular Fredholm Equation, Integral Methods in Science and Engineering. Birkhäuser Boston. (2004), pp. 255-260.

-
- [6] Panasenko, G., Rutily, B., Titaud, O. : Asymptotic analysis of integral equations for a great interval and its application to stellar radiative transfer. *Comptes Rendus Mecanique*. 330.11 (2002), pp. 735-740.
- [7] Amosov, A., Panasenko, G., Rutily, B. : An approximate solution to the integral radiative transfer equation in an optically thick slab. *Comptes Rendus Mecanique*. 331.12 (2003), pp. 823-828.
- [8] Chevallier, L., Paletou, F., Rutily, B. : On the accuracy of the ALI method for solving the radiative transfer equation. *Astronomy Astrophysics*. 411 (2003), pp. 221-227.
- [9] Abramowitz, M., Stegun, I. A. : *Handbook of Mathematical Function*. National Bureau Of Standards. Applied Math.Series, Washington D.C. - US Government Printing Office, 1967.
- [10] Atkinson, K. E. : *The numerical solution of integral equations of the second kind*. Cambridge university press, 1997.
- [11] Saad, Y. : *Iterative methods for sparse linear systems*. Siam, 2003.
- [12] Atkinson, K. E., Han, W. : *Theoretical Numerical Analysis : A Functional Analysis Approach*. Springer New York, 2009.
- [13] Ahues, M., Largillier, A., Limaye B. V. : *Spectral Computations for Bounded Operators*. Chapman and Hall/CRC, 2001.
- [14] Samir, L., Hamza, G. : New process to approach linear Fredholm integral equations defined on large interval. *Asian-European Journal of Mathematics* (2017). <https://doi.org/10.1142/S1793557119500098>
- [15] Ahues, M., Largillier, A., Titaud, O. : The roles of a weak singularity and the grid uniformity in relative error bounds. *Numerical Functional Analysis and Optimization*. 22.7(2001), pp. 789-814.

- [16] Samir, L., Hamza, G., Mohamed-Zine, A. : Generalized Jacobi method for linear bounded operators system. *Comp. Appl. Math.* (2017), <https://doi.org/10.1007/s40314-017-0557-3>
- [17] Anselone, M. : Singularity subtraction in the numerical solution of integral equations. *J. Austral. Math. Soc.* 22 (1981), pp. 408-418.
- [18] Sloan, I. H. : Iterated Galerkin method for eigenvalue problems. *SIAM, J. Numer. Anal.*, 13(1976), pp. 753-760.
- [19] Hackbusch, W., Sauter, S. A. : On the efficient use of the Galerkin-method to solve Fredholm integral equations. *Applications of Mathematics.* 38.4(1993), pp. 301-322.
- [20] Amosov, A., Ahues, M., Largillier, A. : Superconvergence of some projection approximations for weakly singular equations using general grids. *SIAM journal on Numerical Analysis.* 47.1(2009), pp. 646-674.
- [21] Kulkarni, R. P. : A superconvergence result for solutions of compact operator equations. *Bull. Austral. Math. Soc.* 68(2003), pp. 517-528.
- [22] Largillier, A. : A numerical quadrature for some weakly singular integral operators. *Appl. Math. Lett.* 19(1995), pp. 1114.
- [23] Li, W., Sun, W. : Modified Gauss-Seidel type methods and Jacobi type methods for Z-matrices. *Linear Algebra and Its Applications.* 317.1(2000), pp. 227-240.
- [24] Zhang, Y., Huang, T. Z., Liu, X. P. : Modified iterative methods for nonnegative matrices and M-matrices linear systems. *Computers & Mathematics with Applications.* 50.10(2005), pp. 1587-1602.
- [25] Zou, L., Jiang, Y. : Convergence of The Gauss-Seidel Iterative Method. *Procedia Engineering.* 15(2011), pp. 1647-1650.

- [26] Salkuyeh, D. K. : Generalized Jacobi and Gauss-Seidel methods for solving linear system of equations. Numer. Math. J. Chinese Univ. (English Ser.). 16.2(2007), pp. 164-170.
- [27] Dafchahi, F. N. : A new refinement of Jacobi method for solution of linear system equations $Ax = b$. International Journal of Contemporary Mathematical Sciences 3.17(2008), pp. 819-827.
- [28] Vatti, V. K., Eneyew, T. K. : A refinement of Gauss-Seidel method for solving of linear system of equations. International Journal of Contemporary Mathematical Sciences 6.3(2011), pp. 117-121.
- [29] Vatti, V. K., Gonfa, G. G. : Refinement of generalized Jacobi (RGJ) method for solving system of linear equations. International Journal of Contemporary Mathematical Sciences 6.3(2011), pp. 109-116.
- [30] Laskar, A. H., Behera, S. : A new refinement of generalized Gauss-Seidel method for solving system of linear equations. International Journal of Mathematical Archive (IJMA) ISSN : 5.6.(2014), pp. 2229-5046.
- [31] Grammont, L., Ahues, M., D'Almeida, F. D. : For nonlinear infinite dimensional equations, which to begin with : Linearization or discretization ?. J. Integral Equations Applications 26.3(2014), pp. 413-436.
- [32] Samir, L., Hamza, G. : New version of Gauss-Seidel iterative method for operators system and its application to solve a linear Fredholm integral equations defined on great interval. (submitted)
- [33] Muthuvalu, M. S. : The preconditioned Gauss-Seidel iterative methods for solving Fredholm integral equations of the second kind. AIP Conf Proc. 1751 :020001(2016).
- [34] Samir, L., Hamza, G. : For linear Fredholm integral equation on great interval, which to begin with : discretization or iterative scheme. (submitted)

Bibliographie
