

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master Académique en Mathématiques
Option : **Equations aux Dérivées Partielles**
Et analyse numérique

Par :

Zeraoulia Warda
Intitulé

**Cycles limites de quelques classes d'équations
de Mathieu-Duffing perturbées**

Dirigé par :

Dr. Menaceur Amor
Devant le jury

PRESIDENT
RAPPORTEUR
EXAMINATEUR

Dr. Bouattia Yassine
Dr. Menaceur Amor
Dr. Sellami Nabil

MCA
MCA
MCA

Univ-Guelma
Univ-Guelma
Univ-Guelma

Session Juin 2023

Remerciement

*En premier lieu et avant tout, j'adresse mes remerciements à **ALLAH** Tout Puissant qui m'éclairé mon chemin et qui ma donnée la force, la patience, la volonté et le courage pour réaliser ce travail.*

*En second lieu, j'adresse tout particulièrement tous mes remerciement, ma reconnaissance et ma gratitude à mon encadreur **Mr. Menaceur Amor** pour les conseils et le temps précieux qu'il ma consacré durant ce travail.*

*Je remercie **Mr. Sellami Nabil** et **Mr. Bouattia Yassine** qui m'ont fait l'honneur d'être membre du jury.*

Je remercie tous professeurs et enseignements de département de mathématiques

Enfin, je remercie toutes les personnes, famille, amies, qui directement ou indirectement ont contribué à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à ceux qui m'ont soutenu au long de mes études, qui m'ont toujours poussé vers le chemin du savoir, à ma source d'amour et d'affection, les deux êtres les plus chères au monde, mes chères parents.

A La femme qui a souffert sans me laisser souffrir, qui n'a jamais dit non à mes exigences et qui n'a épargné aucun effort pour me rendre heureuse : mon adorable mère offre du dieu, qui doit ma vie, ma réussite et tout mon respect :

*ma cher mère : **HADDA***

A L'homme mon précieux offre du dieu, qui doit ma vie, ma réussite et tout mon respect :

*mon cher père : **TUDJAN***

*À ma sœur : **DJAZIRA**, qui m'a beaucoup aidée et m'a encouragée à arriver au bout*

*et aussi ma sœur **NOURA, SIHAM** et Surtout à mes sœurs jumelles **SOUMIA, BOUCHRA**.*

*A me frère : **RIAD** et sa femme **LAMIA***

*Et me frère : **JALAL**.*

*A mon fiancé : **Khaled**.*

*A mes meilleures amis : **LINDA, SALMA, HANAN, MAISSA, HALA, SAFA, INES, ROMAISSA, CHAIMA, RAZIKA**.*

A tous personne qui m'ont encouragé ou aidé au long de mes études

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Notions préliminaires | 3 |
| 1.1 | Système dynamique | 3 |
| 1.2 | Portait de phases | 5 |
| 1.3 | Stabilité du point critique | 6 |
| 1.4 | Cycle limite et solution périodique | 7 |
| 1.4.1 | Existences et non-existence de cycle limite | 9 |
| 1.5 | Equation de Mathieu | 9 |
| 1.6 | Equation de Duffing | 11 |
| 1.7 | Règle des signes de Descartes | 11 |
| 2 | Méthode de moyennisation et application | 13 |
| 2.1 | Méthode de moyennisation et solutions périodiques | 13 |
| 2.2 | Méthode de moyennisation du premier ordre | 14 |
| 2.3 | Méthode de moyennisation du deuxième ordre | 16 |
| 3 | Cycles limites de certains systèmes de Mathieu-Duffing généralisés dépendant d'un petit paramètre | 22 |
| 3.1 | Introduction | 22 |
| 3.2 | Cycles limites pour une classe généralisée des équations de Mathieu-Duffing | 23 |
| 3.2.1 | Présentation du problème | 23 |
| 3.2.2 | Preuve du théorème 3.2.1 | 24 |
| 3.3 | Cycles limites pour une classe généralisée des systèmes de Mathieu | 31 |
| 3.3.1 | Présentation du problème | 31 |
| 3.3.2 | Preuve du théorème 3.3.1 | 32 |
| 4 | Conclusion et perspectives | 40 |

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions premièrement le nombre maximum de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ perturbé par une classe généralisée des équations de Mathieu-Duffing de la forme

$$\dot{x} = y, \dot{y} = -x - \varepsilon(1 + \cos^m \theta)Q(x, y).$$

où $Q(x, y)$ est un polynôme de degré $n, \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, m est un entier positif et $|\varepsilon|$ est un paramètre suffisamment petit, en utilisant la méthode de moyennisation du premier ordre.

La second partie de ce travail est l'étude du nombre maximum de cycles limites d'une classe des systèmes de Mathieu de la form

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(1 - \cos^l \theta)P(x, y), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(1 + \cos^m \theta)Q(x, y), \end{cases}$$

où les polynomes $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont de degré $n, \theta = \arctan(y/x)$ et l, m sont des entiers positifs. Cette étude est illustrée par des applications.

Mots clé : Cycle limite, Théorie de moyennisation, Système de Mathieu.

Abstract

In this work, first we study the maximum number of limit cycles for a class of polynomial differential systems that can bifurcate from the periodic orbits of the linear center $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ perturbed inside a class of the generalized Mathieu-Duffing differential systems of the form

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - \varepsilon(1 + \cos^m \theta)Q(x, y).$$

where the polynomial $Q(x, y)$ have degree n , $\theta = \arctan(y/x)$, m is a positive integer and $|\varepsilon|$ is a small paramete, by using the averaging method of first ordre.

The second part of this work is the study of the maximum number limit cycles of the class the generalised Mathieu systems of the forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(1 - \cos^l \theta)P(x, y), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(1 + \cos^m \theta)Q(x, y), \end{cases}$$

where the polynomials $P(x, y)$ and $Q(x, y)$ have degrees n , $\theta = \arctan(y/x)$ and l, m are positive integers. This study is illustrated by applications.

Keywords : Limit cycle, Averaging theory, Mathieu system.

ملخص

في هذا العمل، درسنا أولاً العدد الأقصى للحلول الدورية المعزولة المتفرعة من المدارات الدورية للمركز

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

و المضطربة بفئة من المعادلات التفاضلية المعممة لماتيو-دفينق من الشكل

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(1 + \cos^m \theta) Q(x, y) \end{cases}$$

حيث m عدد صحيح موجب، $Q(x, y)$ كثيرة حدود من الدرجة n ، $\theta = \arctan(y/x)$ ، و $|\varepsilon|$ معامل صغير كفاية. باستخدام طريقة المتوسط من الدرجة الأولى. في الجزء الثاني من عملنا، درسنا العدد الأقصى للحلول الدورية المعزولة لفئة أخرى من أنظمة ماتيو المعممة من الشكل

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(1 + \cos^l \theta) P(x, y) \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(1 + \cos^m \theta) Q(x, y) \end{cases}$$

حيث l, m أعداد صحيحة موجبة، $P(x, y), Q(x, y)$ كثيرات حدود من الدرجة n ، $\theta = \arctan(y/x)$ ، و $|\varepsilon|$ معامل صغير كفاية. بالإضافة إلى ذلك وضحنا بأمثلة تطبيقية.

الكلمات الرئيسية: الحلول الدورية المعزولة، طريقة المتوسط، جملة ماتيو.

Introduction

Un des problèmes principaux dans la théorie qualitative des équations différentielles est l'étude de l'intégrabilité et les cycles limites des systèmes différentiels planaires polynomiaux. Les équations différentielles sont apparues historiquement tout au début du développement de l'analyse, en général à l'occasion de problèmes de mécanique ou de géométrie. L'intérêt des cycles limites des systèmes différentiels planaires est dû à leurs de la pratique dans plusieurs des sciences est physiques, biologie, économie, mécanique,...

Cette l'étude qualitative des systèmes différentiels permet de fournir des informations sur le comportement des solution d'un système différentiel sans la nécessité de le résoudre explicitement, et elle consiste, à examiner les propriétés et les caractéristiques des solution de ce système, et de justifier, permet ces solutions, l'existence ou la non existence d'un forme de courbe fermé isolée appelée cycle limite.

Un cycle limite d'un système différentiel est une orbite périodique isolée dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques d'un équation différentielles, la notion de cycle limite a été introduite en 1881 par Poincaré [11]. Puis au début du 20ème siècle, dans le 2ème congrès international de Mathématique en 1900 à Paris, David Hilbert a présenté son célèbre exposé intitulé "Problèmes Mathématiques". La 16ème de ses 23 problèmes s'écrite de déterminer le nombre maximal de cycles limites existants pour le système polynomial planaire de degré n

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases}$$

Les recherche ont donnés méthodes pour chercher le nombre maximal de cycles limites des systèmes différentiels : le théorème de Poincaré Bendixson, le critère de non existence de Dulac, la bifurcation de Hopf, la méthode de Melnikov, méthodes de perturbations, la méthode de Moyennisation . . .

La méthode de Moyennisation est l'une des plus importantes méthodes pour étudier le nombre de cycles limites pour certains système différentiels, voir par exemple les articles ([2], [7], [8], [9]).

L'équation différentielle classique de Mathieu [10] est

$$\ddot{x} + b(1 + \cos \theta)x = 0, \tag{0.1}$$

où b est paramètre réel, et les points indiquent la dérivée seconde par rapport au temps t , cette équation a d'abord été discuté en 1868 par Mathieu alors qu'il étudiait le problème des vibrations sur une peau de tambour elliptique.

Celui de Mathieu l'équation a de nombreuses applications en ingénierie [12] et aussi en physique théorique [13].

Dans ce travail nous allons utiliser la théorie qualitative des équations différentielles ordinaires pour traiter une classe généralisée des équations de Mathieu de la forme (0.1). Plus précisément nous sommes intéressés à la recherche des cycles limites de certaines classes de systèmes de Mathieu-Duffing :

Système 1 :

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - \varepsilon (1 + \cos^m \theta) Q(x, y),$$

où $Q(x, y)$ est un polynôme de degré n , $\theta = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$, m est un entier positif, et $|\varepsilon|$ est un paramètre suffisamment petit.

Système 2 :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon (1 - \cos^l \theta) P(x, y), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon (1 + \cos^m \theta) Q(x, y), \end{cases}$$

où $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ des polynômes en x et y de degré n et $\theta = \arctan(y/x)$, l et m sont des entiers positifs et $|\varepsilon|$ est suffisamment petit.

Ce mémoire est structuré comme suit :

- Le premier chapitre comporte des rappels sur des notions préliminaires classiques et des outils que nous avons utilisés dans ce travail pour démontrer nos résultats. Nous avons commencé par définir les systèmes dynamiques, la linéarisation, les points d'équilibre et leur nature. Nous avons défini aussi la notion de cycle limite, l'équation de Duffing, l'équation de Mathieu et l'équation de Mathieu-Duffing.

- Dans Le deuxième chapitre, Nous avons introduit la théorie de la moyennisation pour chercher les cycles limites des systèmes différentiels. Nous avons illustré les théorèmes par des exemples.

- Dans Le troisième chapitre, nous avons donné le nombre maximum de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ perturbé par une classe généralisée des équations de Mathieu-Duffing, en utilisant la méthode de moyennisation du premier ordre. De plus, on donne aussi le nombre maximum des cycles limites d'une classe des systèmes différentiels de Mathieu généralisés. Nous traitons cette étude en utilisant le théorème de la moyennisation du premier ordre.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions de base des système dynamique, points d'équilibre, portrait de phase, cycles limites. Enfin nous terminons par donner les définitions de l'équation de Duffing, l'équation de Mathieu et l'équation de Duffing.

1.1 Système dynamique

Définition 1.1.1 *Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application*

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Définie sur tout $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$; telle que

$U(\cdot, x) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.

$U(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.

$U(t + s, x) = U(t, U(s, x))$ pour $t, s \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^n$.

$U(0, x) = x$.

Exemple 1.1.1 *Soit le système linéaire*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}^+ ; x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

où A la matrice constante, la solution de (1.1) est

$$x(t) = e^{tA}x_0.$$

Le système (1.1) engendre un système dynamique, car l'application

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

qui à tout $t \in \mathbb{R}^n$; $x \in \mathbb{R}^n$ associe :

$$U(t, x) = e^{tA}x_0.$$

vérifie les quatre propriétés précédents.

Définition 1.1.2 *Soit le système non linéaire :*

$$\dot{x} = f(x), \quad x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \quad f = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_n) \quad (1.2)$$

On appelle point critique ou point d'équilibre du système (1.2), le point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$f(x_0) = 0.$$

Définition 1.1.3 *Considérons le système (1.2)*

Le système

$$\dot{x} = Ax,$$

où

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial f_j}(x_0) \right) = Df(x_0), \quad 1 \leq i, \quad j \leq n,$$

est un matrice ($n \times n$), est appelé linéarisation de (1.2) en x_0 .

Exemple 1.1.2 *Soit le système non linéaire suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = y^3 - x. \end{cases} \quad (1.3)$$

Il est clair que $f(X) = 0$, entraîne que $X_0 = (0,0)$ est le seul point d'équilibre de ce système. On cherche le linéarisé de ce système en X_0 ,

$$\begin{aligned} Df(X) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(X) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(X) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(X) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(X) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc le système linéarisé du système (1.3) est :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

1.2 Portait de phases

Définition 1.2.1 Soit le système planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}, \quad (1.4)$$

où P, Q sont des polynômes en x et y : Les solution $(x(t), y(t))$ du système(1.4) représentent dans le plan (x, y) des courbes appelés orbites. Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentés dans le plan (x, y) s'appelle portrait de phase, et le plan (x, y) est appelé plan de phase.

Exemple 1.2.1 On considère le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}, \quad (1.5)$$

qui peut être réduit à qui peut être réduit à l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{-y}$ le champ de vecteurs associé au système (1.5) est donné par le figure 1.1.

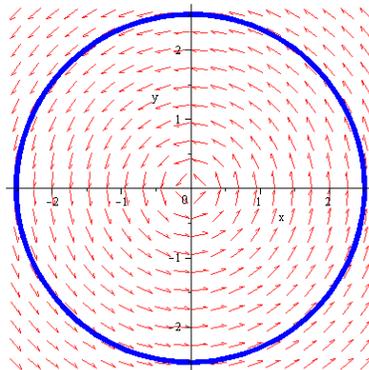


FIG.1.1.

1.3 Stabilité du point critique

Soit donnée un système de deux équations différentielles linéaires homogènes à coefficient constantes

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \quad (1.6)$$

et

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Le point $x = 0, y = 0$, en lequel s'annulent les second membres des équations du système (1.6) s'appelle point critique du système (1.6), pour étudier le point critique du système (1.6) il faut établir l'équation caractéristique.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (1.7)$$

et chercher ses racines λ_1 et λ_2 . Les cas suivantes peuvent se présenter :

1- Les racines λ_1, λ_2 de l'équation caractéristique à (1.7) sont réelle et distincts :

a) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$. Le point critique est asymptotiquement stable (noeud stables).

b) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$. Le point critique est instable (noeud instable).

c) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$. Le point critique est un point selle, il est toujours instable.

2- Les racines λ_1, λ_2 de l'équation caractéristique (1.7) sont complexes :

$$\lambda_1 = p + iq, \quad \lambda_2 = p - iq,$$

a) $p < 0, q \neq 0$. Le point critique asymptotiquement stable (foyer stable).

b) $p > 0, q \neq 0$. Le point critique est instable (foyer instable).

c) $p = 0, q \neq 0$. Le point critique est stable (centre).

3- Les racines $\lambda_1 = \lambda_2$ sont multiples :

a) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. Le point critique est asymptotiquement stable (noeud stable).

b) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$. Le point critique est instable (noeud instable).

1.4. CYCLE LIMITE ET SOLUTION PÉRIODIQUE

Exemple 1.3.1 On étudie la nature du point critique $(0, 0)$ du système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases},$$

écrivons l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 5 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

où

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0.$$

Ses racines $\lambda_1 = 2 - 3i$, et $\lambda_2 = 2 + 3i$ sont des complexes. ont des parties réelles positives par suite, le point critique $(0, 0)$ est un foyer instable.

Exemple 1.3.2 On considère le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y + 3z \\ \frac{dy}{dt} = 2y + 3z \\ \frac{dz}{dt} = -5y \end{cases},$$

L'équation caractéristique de la forme

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 3 \\ 0 & 2 - \lambda & 3 \\ 0 & 0 & -5 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

où

$$(1 - \lambda)(2 - \lambda)(-5 - \lambda) = 0.$$

les racines de cette équation $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -5$, λ_1 et $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$ sont réelles distinctes par suite, le point critique $(0, 0, 0)$ est un instable.

1.4 Cycle limite et solution périodique

Quelque définitions

Définition 1.4.1 On dit que $(x(t), y(t))$ est une solution du système (1.4) si le champ de vecteurs $X = (P, Q)$ est toujours tangent à la trajectoire représentée par cette solution dans le plan de phase, autrement dit,

$$\forall t \in I : P(x(t), y(t))x + Q(x(t), y(t))y = 0.$$

Définition 1.4.2 On appelle solution périodique du système (1.4), toute solution $(x(t), y(t))$ pour laquelle il existe un réel $T > 0$ tel que

$$\forall t \in [0, T] \quad x(t+T) = x(t) \quad \text{et} \quad y(t+T) = y(t).$$

Le plus petit nombre T qui convien s'appelle alors période de cette solution.

Donnons d'abord la définition des cycles limites par

Définition 1.4.3 On appelle cycle limite du système (1.4), toute solution périodique isolée dans l'ensemble de toutes les solution périodiques isolée de ce système.

Exemple 1.4.1 L'exemple repris par beaucoup d'auteurs est le suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -x + 2y - y(x^2 + y^2) \end{cases}, \quad (1.8)$$

En coordonnées polaires $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, ce système s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(2 - r^2) \\ \dot{\theta} &= -1, \end{aligned}$$

Ce qui donne visiblement une seule solution périodique

$$\begin{aligned} r(t) &= \sqrt{2} \\ \theta(t) &= \theta_0 - t. \end{aligned}$$

Dans le plan de phase, c'est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 2$ et c'est un cycle limite unique.

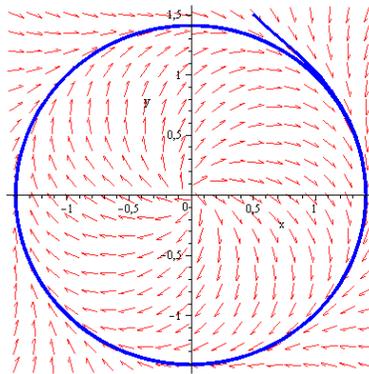


FIG. 1.2 – Cycle limite du système 1.8

1.4.1 Existences et non-existence de cycle limite

Une condition suffisante de non-existence de solution périodique (et donc de cycle limite) est donnée par :

Théorème 1.4.1 *Il n'y pas de trajectoires fermée dans un domaine simplement connexe Ω du plan de phase dans lequel la divergence $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ garde un signe constant.*

Théorème 1.4.2 *Si toutes les trajectoires du système (1,4) entrent transversalement dans un domaine fermé et borné D du plan ne contenant pas de points d'équilibre du système (1,4), et ne ressortent pas de ce domaine, alors ce domaine contient au moins une orbite périodique.*

Lemme 1.4.1 *Pour $n, m \in \mathbb{N}$, On définit*

$$I_{m, n} = \int_0^{2\pi} \cos^m(\theta) \sin^n(\theta) d\theta$$

alors

$$I_{m, n} = \frac{m-1}{m+n} I_{m-2, n}$$

et

$$I_{m, n} = \frac{n-1}{m+n} I_{m, n-2}$$

Ces intégrales sont utilisées jusqu'à ce qu'on arrive à $I_{0, 0} = 1$ ou $I_{0, 1} = I_{1, 0} = I_{1, 1} = 0$, Notons que $I_{m, n} \neq 0$ Si et seulement si m et n sont paires.

1.5 Equation de Mathieu

Définition 1.5.1 *L'équation de Mathieu est une équation différentielle de seconde order :*

$$\ddot{x} + b(1 + \cos(t))x = 0.$$

où b est une constante réelle.

a- Equation de Mathieu modifiée

Soit l'équation de Mathieu

$$\frac{d^2y}{dx^2} + [p - 2q \cos(x)]y = 0.$$

On a l'identité : $\exp(ix) + \exp(-ix) = 2 \cos(x)$, donc on obtient :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + [p - q(\exp(ix) + \exp(-ix))]y = 0.$$

Soit le changement de variable suivant : $X = ix$, on a donc

$$\frac{d^2y}{dx^2} = i^2 \frac{d^2y}{dX^2} = -\frac{d^2y}{dX^2}$$

ce qui donne : $-\frac{d^2y}{dX^2} + [p - q(\exp(X) + \exp(-X))]y = 0$

$$\frac{d^2y}{dX^2} - [p - 2q \cos(X)]y = 0.$$

b- Forme Hamiltonienne de l'équation de Mathieu

$$\frac{d^2x}{dt^2} + [p - 2q \cos(2t)]x = 0.$$

Posons $\frac{dx}{dt} = y$ on obtient le système :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -[p - 2q \cos(2t)]x \end{cases}$$

la formule générale pour un système Hamiltonien est :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial y} &= y \implies H(x, y, t) = \frac{1}{2}y^2 + \varphi(x, t) \\ \frac{\partial H}{\partial x} &= -[p - 2q \cos(2t)] \\ \implies H(x, y, t) &= -\frac{1}{2}[p - 2q \cos(2t)]x^2 + \psi(y, t) \end{aligned}$$

par identification on obtient :

$$H(x, y, t) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}[p - 2q \cos(2t)]x^2.$$

1.6 Equation de Duffing

Définition 1.6.1 *L'équation de Duffing est une équation différentielle de second ordre non linéaire de la forme :*

$$\ddot{x} + c\dot{x} + g(x) = h(t).$$

où $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et localement Lipschitzienne, c est une constante et $c > 0$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, et T -périodique.

Définition 1.6.2 *L'équation de Matieu-Duffing est une équation différentielle de second ordre non linéaire de la forme :*

$$\ddot{x} + b(1 + \cos(t))x + x^\beta = 0.$$

où β est un entier et $b > 0$.

1.7 Règle des signes de Descartes

En mathématiques, la règle des signes de Descartes, décrite par René Descartes dans son livre *La Géométrie*, est une technique qui donne des informations partielles sur le nombre de racines réelles positives ou négatives d'un polynôme.

La règle est appliquée en comptant le nombre de changements de signe dans la suite formée par les coefficients du polynôme. Si un coefficient est égal à zéro, ce terme est tout simplement omis de la suite. (Voir [1])

Définition : La règle des signes de Descartes est une méthode pour déterminer le nombre de racines positives d'un polynôme. On compte le nombre de changements de signes dans les coefficients en partant du monôme de plus haut degré jusqu'au monôme de plus bas degré. Si n est le nombre de changements de signes, alors n est le nombre maximum de racines positives.

Exemple 1 : Considérons le polynôme

$$P(X) = x^7 + 2x^6 - 3x^5 - x^2 + 7x - 8$$

Alors il y a 3 changements de signes dans la liste des coefficients. Le polynôme P admet donc ou bien trois racines positives ou bien une racine positive.

Exemple 2 : Considérons le polynôme

$$K(X) = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$$

CHAPITRE 1. NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Puisque $K(x)$ est un polynôme engendré par une combinaison linéaire $\{x, x^2, \dots, x^m\}$ (a au plus $m - 1$ changements de signes dans la liste des coefficients), donc le polynôme $K(x)$ a au plus $(m - 1)$ racines positives.

Chapitre 2

Méthode de moyennisation et application

Dans ce chapitre, nous introduisons la théorie de la moyennisation. La méthode de la moyennisation est l'une des plus importantes méthodes pour chercher le nombre maximum de cycles limites des systèmes différentiels. Nous avons illustré les théorèmes par des exemples.

2.1 Méthode de moyennisation et solutions périodiques

L'idée générale de la méthode de moyennisation est d'étudier le système différentiel perturbé

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, t, \varepsilon), \quad (2.1)$$

où $t \in D$, $x \in \mathbb{R}^n$, $|\varepsilon| \ll 1$ et f est fonction T -périodique en t , en considérant le système moyenné

$$\dot{x} = \varepsilon F_{10}(x),$$

où

$$F_{10}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x, t, 0) dt.$$

La recherche des racines positives du $F_{10}(x)$ réduit le problème de la détermination des solutions T-périodique de (2.1) qui est en général un problème difficile.

2.2 Méthode de moyennisation du premier ordre

Définition 2.2.1 *Soit le système différentiel*

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \varepsilon F_1(x, t) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \quad (2.2)$$

où $F_1 : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[\rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues, T-périodique par rapport à t , D un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n on définit

$F_{10} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. comme suite

$$F_{10}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) ds. \quad (2.3)$$

supposons que :

- (i) F_1 et R sont localement Liphitzienne par rapport à x .
- (ii) Pour $a \in D$ avec $F_{10}(a) = 0$, il existe un voisinage V de a tel que $F_{10}(z) \neq 0$ pour tout $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$ et $d_B(F_{10}, V, 0) \neq 0$.

alors, pour tout $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution $\Phi(., \varepsilon)$ du système (2.2) T-périodique isolée telle que $\Phi(., \varepsilon) \rightarrow a$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Démonstration. (Voir[3]).

Remarque 2.2.1 *Les hypothèses de ce théorème sont plus que celles remarque où à la place de (i), il suppose que (j) $F_1, R, D_x F_1, D_x^2 F$ et $D_x R$ sont définies, continues et bornées par une constante M (indépendante de ε). A la place de (ii), il suppose que (jj) pour $a \in D$ avec $F_{10}(a) = 0$, on a $J_{F_{10}} \neq 0$, où $D_x F$ désigne la matrice jacobienne de F par rapport à x , $D_x^2 F$ la matrice hessienne de F et $J_{F_{10}}$ désigne le déterminant de la jacobienne de F_{10} en a .*

2.2. MÉTHODE DE MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE

Exemple 2.2.1 Soit le système perturbé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(4x^2 + x - 2)y \end{cases} ,$$

En utilisant les coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, on obtient le système

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r \sin^2 \theta (4r^2 \cos^2 \theta + r \cos \theta - 2) \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon \cos \theta [4r^2 \cos^2 \theta \sin \theta + r \cos \theta \sin \theta - 2 \sin \theta]. \end{cases}$$

En dérivant \dot{r} par $\dot{\theta}$, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{\varepsilon \sin^2 \theta (4r^3 \cos^2 \theta + r^2 \cos \theta - 2r)}{-1 + \varepsilon \cos \theta [4r^2 \cos^2 \theta \sin \theta + r \cos \theta \sin \theta - 2 \sin \theta]} \\ \frac{dr}{d\theta} &= -\varepsilon \sin^2 \theta (4r^3 \cos^2 \theta + r^2 \cos \theta - 2r) + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon F_1(r, \theta) + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

où

$$F_1(r, \theta) = -\sin^2 \theta (4r^3 \cos^2 \theta + r^2 \cos \theta - 2r).$$

On cherche maintenant la fonction moyenné $F_{10}(r)$

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta (4r^3 \cos^2 \theta + r^2 \cos \theta - 2r) d\theta \\ &= -r \left[\frac{1}{2} r^2 - 1 \right]. \end{aligned}$$

Le système moyenné

$$\dot{r} = \varepsilon F_{10}(r) = -\varepsilon r \left[\frac{1}{2} r^2 - 1 \right].$$

La racine positive unique de $F_{10}(r)$ est $r_0 = \sqrt{2}$.

Donc l'équation différentielle a pour $\varepsilon \neq 0$, suffisamment petit, admet un

cycle limite qui bifurque de l'orbite périodique de rayon $r_0 = \sqrt{2}$ du système non perturbé, de plus

$$\frac{dF_{10}}{dr}(r) = 1 - \frac{3}{2}r^2.$$

On a

$$\frac{dF_{10}}{dr}(r_0 = \sqrt{2}) = -2 < 0,$$

a un cycle limite instable d'amplitude $r = \sqrt{2}$, ce cycle limite est stable ($\frac{dF_{10}}{dr}(r_0\sqrt{2}) > 0$). [Voir(FIG. 2.1)].

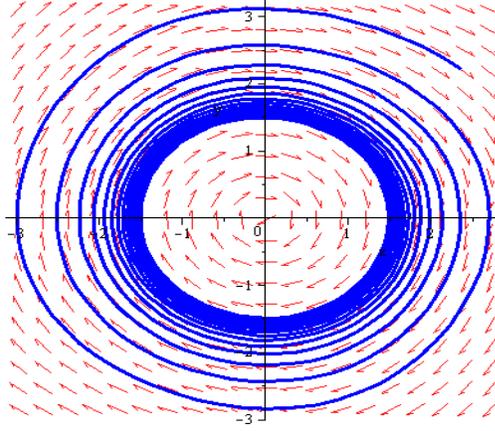


FIG.2.1. – Un cycle limite pour $\varepsilon = 0.01$.

2.3 Méthode de moyennisation du deuxième ordre

Théorème 2.3.1 *Considérons le système différentiel*

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 R(t, x, \varepsilon), \quad (2.4)$$

où F_1 et $F_2 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[\rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues, T -périodique par rapport à t , D un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n .

2.3. MÉTHODE DE MOYENNISATION DU DEUXIÈME ORDRE

On définit

$$F_{10}, F_{20} : D \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

tel que

$$F_{10}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) ds,$$

et

$$F_{20}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T [D_s F_1(s, z) \cdot y_1(s, z) + F_2(s, z)] ds, \quad (2.5)$$

où

$$y_1(s, z) = \int_0^s F_1(t, z) dt.$$

On suppose que

(i) $F_1(t, \cdot) \in C^1(D)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, F_1, F_2, R et $D_x F_1$ sont localement lipshitziennes par rapport à x , R est différentiable par rapport à ε .

(ii) pour $V \subset D$ un sous ensemble ouvert bornée et pour tout

$$\varepsilon \in]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[\setminus \{0\}$$

il existe $a_\varepsilon \in V$ tel que

$$(F_{10} + \varepsilon F_{20}) = 0 \text{ et } d_B(F_{10}(a_\varepsilon) + \varepsilon F_{20}(a_\varepsilon), V, a_\varepsilon) \neq 0,$$

(i.e le degré de Brouwer de $F_{10}(a_\varepsilon) + \varepsilon F_{20}(a_\varepsilon) \setminus \{a_\varepsilon\}$ est non nul).

Alore, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution T-périodique isolée $\Phi(\cdot, \varepsilon)$ de l'équation (2.4) telle que $\Phi(0, \varepsilon) = a_\varepsilon$.

Démonstration. (Voir[4]).

Exemple 2.3.1 Soit le système différentiel polynômial perturbé

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(x^2 + 8xy) - \varepsilon^2(4x) \\ \dot{y} = x + \varepsilon(2xy) - \varepsilon^2(4y) \end{cases},$$

CHAPITRE 2. MÉTHODE DE MOYENNISATION ET APPLICATION

En utilisant les coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, on obtient le système

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon(r^2 \cos^3 \theta + 8r^2 \cos^2 \theta \sin \theta + 2r^2 \cos \theta \sin^2 \theta) - \varepsilon^2(4r) \\ \dot{\theta} = 1 - \varepsilon r(8 \cos \theta \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \sin \theta) \end{cases},$$

est équivalent à l'équation différentiel

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{\varepsilon(r^2 \cos^3 \theta + 8r^2 \cos^2 \theta \sin \theta + 2r^2 \cos \theta \sin^2 \theta) - \varepsilon^2(4r)}{1 - \varepsilon r(8 \cos \theta \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \sin \theta)} \\ \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + O(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

où

$$F_1(r, \theta) = r^2(\cos^3 \theta + 8 \cos^2 \theta \sin \theta + 2 \cos \theta \sin^2 \theta),$$

et

$$F_2(r, \theta) = r^3(-\cos^5 \theta \sin \theta + 62 \cos^3 \theta \sin^3 \theta + 16 \cos^2 \theta \sin^4 \theta) - 4r,$$

$F_{10}(r)$ la fonction moyenné de $F_1(r, \theta)$ est

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{r^2}{2\pi} [I_{3.0} + 8I_{2.1} + 2I_{1.2}] \\ &= 0, \end{aligned}$$

puisque $F_{10}(r) = 0$ on passe la méthode de la moyenne seconde ordre, on a

$$D_r F_1(r, \theta) = 2r(\cos^3 \theta + 8 \cos^2 \theta \sin \theta + 2 \cos \theta \sin^2 \theta),$$

$$\begin{aligned} y_1(s, z) &= \int_0^s F_1(r, \theta) d\theta \\ &= r^2 \int_0^s (\cos^3 \theta + 8 \cos^2 \theta \sin \theta + 2 \cos \theta \sin^2 \theta) d\theta, \end{aligned}$$

2.3. MÉTHODE DE MOYENNISATION DU DEUXIÈME ORDRE

et

$$\begin{aligned}\int_0^s \cos^3 \theta d\theta &= \frac{3}{4} \sin s + \frac{1}{12} \sin 3s \\ &= \frac{3}{4} \sin s + \frac{3}{12} \cos^2 s \sin s - \frac{1}{12} \sin^3 s \\ \int_0^s \cos^2 \theta \sin \theta d\theta &= \frac{1}{3} - \frac{1}{12} \cos 3s - \frac{1}{4} \cos s \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cos^3 s,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^s \cos \theta \sin^2 \theta d\theta &= \frac{1}{4} \sin s - \frac{1}{12} \sin 3s \\ &= \frac{1}{4} \sin s - \frac{1}{4} \sin s \cos^2 s + \frac{1}{12} \sin^3 s,\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}y_1(s, z) &= r^2 \left[\frac{3}{4} \sin s + \frac{3}{12} \cos^2 s \sin s - \frac{1}{12} \sin^3 s \right. \\ &\quad \left. + 8 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cos^3 s \right) + 2 \left(\frac{1}{4} \sin s - \frac{1}{4} \sin s \cos^2 s + \frac{1}{12} \sin^3 s \right) \right]\end{aligned}$$

on a

$$y_1(s, z) = r^2 \left(\frac{1}{3} \sin^3 s - \frac{8}{3} \cos^3 s + \sin s + \frac{8}{3} \right),$$

donc

$$\begin{aligned}
 F_{20}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [D_r F_1(r, s) \cdot y_1(r, s) + F_2(r, s)] ds \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [(2r(\cos^3 s + 8 \cos^2 s \sin s + 2 \cos s \sin^2 s)) \\
 &\quad \times \left(r^2 \left(\frac{5}{4} \sin s - \frac{3}{12} \cos^2 s \sin s + \frac{1}{12} \sin^3 s + \frac{8}{3} - \frac{8}{3} \cos^3 s \right) \right) \\
 &\quad + (r^3(-\cos^5 s \sin s + 62 \cos^3 s \sin^3 s + \cos^2 s \sin^4 s) - 4r)] ds.
 \end{aligned}$$

Pour calculer l'expression exacte de $F_{20}(r)$, nous utilisons Lemme 1.4.1, nous obtenons

$$F_{20}(r) = \frac{1}{16} r (r^2 - 64).$$

Donc $F_{20}(r)$ à au plus une seul racine positive $r_0 = 8$, de plus

$$\frac{dF_{20}}{dr}(r) = \frac{3}{16} r^2 - \frac{1}{4},$$

alors

$$\frac{dF_{20}}{dr}(r_0 = 8) = \frac{3}{16} 8^2 - \frac{1}{4} = \frac{47}{4} > 0,$$

par conséquent, le système admet un cycle limite unique, et ce cycle limite

2.3. MÉTHODE DE MOYENNISATION DU DEUXIÈME ORDRE

est instable d'amplitude $r_0 = 8$. [Voir(FIG. 2.2)].

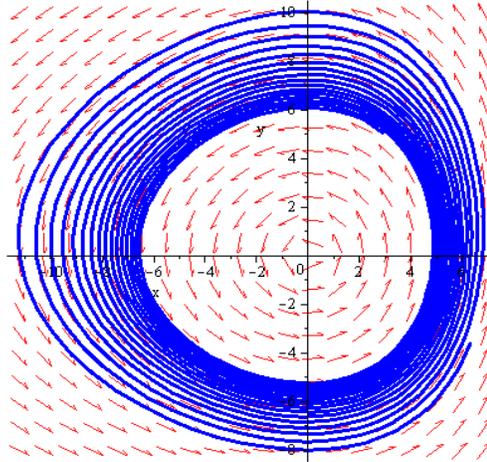


FIG.2.2 – Un cycle limite pour $\varepsilon = 0.01$.

Chapitre 3

Cycles limites de certains systèmes de Mathieu-Duffing généralisés dépendant d'un petit paramètre

3.1 Introduction

Les équations différentielles qu'on rencontre en Mécanique et Physique sont généralement non linéaires. Cependant des approximations permettent souvent de les simplifier et de les ramener à des équations linéaires dont le type le plus simple est l'équation à coefficients constants

$$a_0\ddot{x} + b_0\dot{x} + c_0x = 0.$$

Un exemple bien connu est celui du pendule simple, dont l'équation rigoureuse

$$ml^2\ddot{x} + mgl \sin x = 0,$$

où m :masse ; l :longueur

se ramène à

$$ml^2\ddot{x} + mglx = 0,$$

pour de faibles élongations.

Ce cas est néanmoins assez exceptionnel, d'une part les approximations linéaires sont très souvent insuffisantes, et d'autre part les équations linéarisées ont généralement des coefficients qui sont fonctions du temps, telle l'équation de Mathieu

$$\ddot{x} + (c_0 + c_1 \cos t)x = 0.$$

3.2 Cycles limites pour une classe généralisée des équations de Mathieu-Duffing

3.2.1 Présentation du problème

Les chercheurs considèrent deux classe spéciales des équations différentielles, l'équation de Mathieu et l'équation de Mathieu-Duffing. sorte l'équation différentielle du second ordre

$$\ddot{x} + \varepsilon(1 + \cos^m \theta)Q(x, y) + x = 0,$$

où $Q(x, y)$ est un polynôme de degré n , $\theta = \arctan(y/x)$ et $|\varepsilon|$ est un paramètre suffisamment petit. Cette équation peut se transformer en un système de deux équations du premier ordre en posant $\dot{x} = y$ on a :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(1 + \cos^m \theta)Q(x, y). \end{cases} \quad (3.1)$$

Dans cette section, en utilisant le théorie de moyennisation, nous étudient le nombre maximal de cycle limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$ de systèmes (3.1). Cette étude a fait l'objet d'un article publié dans "Applied Mathematics Letters"[5].

Théorème 3.2.1 *On suppose que $Q(x, y)$ de degré n , soit $|\varepsilon|$ un paramètre suffisamment petit. le nombre maximum de cycle limites des systèmes différentielles Mathieu-Duffing (3.1) qui peuvent bifurquer du centre linéaire $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$, en utilisant la théorie de moyennisation de premier ordre est :*

- i) $(n - 1)$ cycles limites si m impaire.
- ii) $\frac{(n-2)}{2}$ cycles limites si m paire et n paire.
- iii) $\frac{(n-1)}{2}$ cycles limites si m paire et n impaire.

3.2.2 Preuve du théorème 3.2.1

Pour appliquer la moyennisation de premier ordre, on écrit le système (3.1), en coordonnées polaires $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, posons : $Q(x, y) = \sum_{i+j=0}^n a_{ij} x^i y^j$, le système (3.1) devient :

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon \sum_{i+j=0}^n M_{ij}(\theta) r^{i+j}, \\ \dot{\theta} = -1 - \varepsilon \sum_{i+j=0}^n H_{ij}(\theta) r^{i+j-1}, \end{cases} \quad (3.2)$$

où

$$\begin{aligned} M_{ij}(\theta) &= a_{ij} (\cos^i \theta \sin^{j+1} \theta + \cos^{i+m} \theta \sin^{j+1} \theta), \\ H_{ij}(\theta) &= a_{ij} (\cos^{i+1} \theta \sin^j \theta + \cos^{i+m+1} \theta \sin^j \theta). \end{aligned}$$

Considérons maintenant θ comme nouvelle variable indépendante, le système (3.2) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon \sum_{i+j=0}^n M_{ij}(\theta) r^{i+j} + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon F(r, \theta) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Alors

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta,$$

pour calculer l'expression exacte de F_{10} , nous utilisons les expressions des intégrales :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^p \theta \sin^{2q} \theta d\theta &= \frac{(2q-1)!!}{(2q+p)(2q+p-2)\dots(p+2)} \int_0^{2\pi} \cos^p \theta d\theta. \\ \int_0^{2\pi} \cos^p \theta \sin^{2q+1} \theta d\theta &= 0. \end{aligned}$$

Si $q = 0$, on a

$$\int_0^{2\pi} \cos^p \theta d\theta = \begin{cases} \frac{(2l-1)!!}{2^l l!} 2\pi, & \text{si } p = 2l \\ 0 & \text{si } p = 2l + 1 \end{cases}$$

3.2. CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE GÉNÉRALISÉE DES ÉQUATIONS DE MATHIEU-DUFFING

Pour étudier le nombre de racines positives de F_{10} nous supposons deux cas :

Cas (i). Soit m impaire, nous considérons deux sous-cas :

(i) – 1 : Si n paire

$$\begin{aligned}
 F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^n [a_{ij} (\cos^i \theta + \cos^{i+m} \theta) \sin^{j+1} \theta] r^{i+j} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+2q=2}^{n+1} [a_{i,2q-1} (\cos^i \theta + \cos^{i+m} \theta) \sin^{2q} \theta] r^{i+2q-1} d\theta,
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{2l+1+2q=3}^{n+1} a_{2l+1,2q-1} r^{2l+2q} \int_0^{2\pi} \cos^{2l+m+1} \theta \sin^{2q} \theta d\theta \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{2l+2q=2}^n a_{2l,2q-1} r^{2l+2q-1} \int_0^{2\pi} \cos^{2l} \theta \sin^{2q} \theta d\theta \right],
 \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned}
 F_{10}(r) &= \sum_{l+q=1}^{n/2} a_{2l+1,2q-1} r^{2l+2q} \frac{(2q-1)!!}{(2q+2l+1)(2q+2l-1)\dots(2l+3)} \frac{(2l+m)!!}{2^{\frac{2l+m+1}{2}} (\frac{2l+m+1}{2})!} \\
 &\quad + \sum_{l+q=1}^{n/2} a_{2l,2q-1} r^{2l+2q-1} \frac{(2q-1)!!}{(2q+2l)(2q+2l-2)\dots(2l+2)} \frac{(2l-1)!!}{2^l l!},
 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
 F_{10}(r) &= \sum_{l+q=1}^{n/2} a_{2l+1,2q-1} r^{2l+2q} \frac{(2l+m)!!(2q-1)!!}{2^{\frac{2l+m+1}{2}} (\frac{2l+m+1}{2})! (2q+2l+1)(2q+2l-1)\dots(2l+3)} \\
 &\quad + \sum_{l+q=1}^{n/2} a_{2l,2q-1} r^{2l+2q-1} \frac{(2l-1)!!(2q-1)!!}{2^{l+q} l! (q+l)(q+l-1)\dots(l+1)},
 \end{aligned}$$

CHAPITRE 3. CYCLES LIMITES DE CERTAINS SYSTÈMES DE
MATHIEU-DUFFING GÉNÉRALISÉS DÉPENDANT D'UN PETIT
PARAMÈTRE

Donc

$$F_{10}(r) = \sum_{k=1}^n A_k r^k.$$

Puisque $F_{10}(r)$ est un polynôme engendré par une combinaison linéaire $\{r, r^2, r^3, \dots, r^n\}$. En utilisant la règle des signes de Descartes, le polynôme $F_{10}(r)$ a au plus $(n - 1)$ racines positives.

(i) - 2 : Si n impair,

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^n [a_{ij} (\cos^i \theta + \cos^{i+m} \theta) \sin^{j+1} \theta] r^{i+j} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+2q=2}^{n+1} [a_{i,2q-1} (\cos^i \theta + \cos^{i+m} \theta) \sin^{2q} \theta] r^{i+2q-1} d\theta, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{2l+1+2q=3}^n a_{2l+1,2q-1} r^{2l+2q} \int_0^{2\pi} \cos^{2l+m+1} \theta \sin^{2q} \theta d\theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{2l+2q=2}^{n+1} a_{2l,2q-1} r^{2l+2q-1} \int_0^{2\pi} \cos^{2l} \theta \sin^{2q} \theta d\theta \right], \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \sum_{l+q=1}^{(n-1)/2} a_{2l+1,2q-1} r^{2l+2q} \frac{(2l+m)!!(2q-1)!!}{2^{\frac{2l+m+1}{2}} \left(\frac{2l+m+1}{2}\right)! (2q+2l+1)(2q+2l-1)\dots(2l+3)} \\ &\quad + \sum_{l+q=1}^{n/2} a_{2l,2q-1} r^{2l+2q-1} \frac{(2l-1)!!(2q-1)!!}{2^{l+q} l! (q+l)(q+l-1)\dots(l+1)}, \end{aligned}$$

alors

$$F_{10}(r) = \sum_{k=1}^n \tilde{A}_k r^k.$$

3.2. CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE GÉNÉRALISÉE DES ÉQUATIONS DE MATHIEU-DUFFING

Puisque $F_{10}(r)$ est un polynôme engendré par une combinaison linéaire $\{r, r^2, r^3, \dots, r^n\}$. En utilisant la règle des signes de Descartes, le polynôme $F_{10}(r)$ a au plus $(n - 1)$ racines positives.

Cas (ii). Soit m paire, nous considérons deux sous-cas :

(ii) - 1 : Si n pair

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^n [a_{ij} (\cos^i \theta + \cos^{i+m} \theta) \sin^{j+1} \theta] r^{i+j} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+2q=2}^{n+1} [a_{i,2q-1} (\cos^i \theta + \cos^{i+m} \theta) \sin^{2q} \theta] r^{i+2q-1} d\theta, \end{aligned}$$

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{l+q=1}^n a_{2l,2q-1} r^{2l+2q-1} \int_0^{2\pi} (\cos^{2l} \theta + \cos^{2l+m} \theta) \sin^{2q} \theta d\theta \right],$$

alors

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \sum_{l+q=1}^{n/2} a_{2l,2q-1} r^{2l+2q-1} \frac{(2q-1)!!}{2^q (q+l)(q+l-1)\dots(l+1)} \left[\frac{(2l-1)!!}{2^l l!} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(2l+m-1)!!}{2^{\frac{2l+m}{2}} (\frac{2l+m}{2})!} \right], \end{aligned}$$

Donc

$$F_{10}(r) = \sum_{k=1}^{n/2} B_k r^{2k-1}.$$

Puisque $F_{10}(r)$ est un polynôme engendré par une combinaison linéaire $\{r, r^3, r^5, \dots, r^{(n-1)}\}$. En utilisant la règle des signes de Descartes, le polynôme $F_{10}(r)$ a au plus $\frac{(n-2)}{2}$ racines positives.

**CHAPITRE 3. CYCLES LIMITES DE CERTAINS SYSTÈMES DE
MATHIEU-DUFFING GÉNÉRALISÉS DÉPENDANT D'UN PETIT
PARAMÈTRE**

(ii) – 2 : Si n impaire, on a :

$$\begin{aligned}
 F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^n [a_{ij}(\cos^i \theta + \cos^{i+m} \theta) \sin^{j+1} \theta] r^{i+j} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+2q=2}^{n+1} [a_{i,2q-1}(\cos^i \theta + \cos^{i+m} \theta) \sin^{2q} \theta] r^{i+2q-1} d\theta
 \end{aligned}$$

donc

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{2l+2q=2}^n a_{2l,2q-1} r^{2l+2q-1} \int_0^{2\pi} (\cos^{2l} \theta + \cos^{2l+m} \theta) \sin^{2q} \theta d\theta \right]$$

,on a

$$\begin{aligned}
 F_{10}(r) &= \sum_{l+q=1}^{(n+1)/2} a_{2l,2q-1} r^{2l+2q-1} \frac{(2q-1)!!}{2^q(q+l)(q+l-1)\dots(l+1)} \left[\frac{(2l-1)!!}{2^l l!} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(2l+m-1)!!}{2^{\frac{2l+m}{2}} (\frac{2l+m}{2})!} \right],
 \end{aligned}$$

alors

$$F_{10}(r) = \sum_{k=1}^{(n+1)/2} B_k r^{2k-1}.$$

Puisque $F_{10}(r)$ est un polynôme engendré par une combinaison linéaire des monômes $\{r, r^3, r^5, \dots, r^n\}$. En utilisant la règle des signes de Descartes, le polynôme $F_{10}(r)$ a au plus $\frac{(n-1)}{2}$ racines positives.

Exemple 3.2.1 On considère le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(1 + \cos^3 \theta)(2x^2 + 4xy + y^2 + x - y). \end{cases} \quad (3.4)$$

3.2. CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE GÉNÉRALISÉE DES ÉQUATIONS DE MATHIEU-DUFFING

En écrivant le système (3.4) en coordonnées polaires (r, θ) , on obtint :

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon \sin \theta (2r^2 \cos^2 \theta + 4r^2 \cos \theta \sin \theta + r^2 \sin^2 \theta + r \cos \theta - 2r \sin \theta \\ \quad + 2r^2 \cos^5 \theta + 4r^2 \cos^4 \theta \sin \theta + r^2 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + r \cos^4 \theta - 2r \cos^3 \theta \sin \theta) \\ \dot{\theta} = -1 - \varepsilon \cos \theta (2r \cos^2 \theta + 4r \cos \theta \sin \theta + r \sin^2 \theta + \cos \theta - 2 \sin \theta \\ \quad + 2r \cos^5 \theta + 4r \cos^4 \theta \sin \theta + r \cos^3 \theta \sin^2 \theta + \cos^4 \theta - 2 \cos^3 \theta \sin \theta). \end{cases}$$

En dérivant \dot{r} par $\dot{\theta}$, on trouve

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + O(\varepsilon^2),$$

où

$$F_1(r, \theta) = \sin \theta (2r^2 \cos^2 \theta + 4r^2 \cos \theta \sin \theta + r^2 \sin^2 \theta + r \cos \theta - 2r \sin \theta + 2r^2 \cos^5 \theta \\ + 4r^2 \cos^4 \theta \sin \theta + r^2 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + r \cos^4 \theta - 2r \cos^3 \theta \sin \theta).$$

On cherche maintenant la fonction moyennée $F_{10}(r)$

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2r^2 \cos^2 \theta \sin \theta + 4r^2 \cos \theta \sin^2 \theta + r^2 \sin^3 \theta + r \cos \theta \sin \theta \\ &\quad - 2r \sin^2 \theta + 2r^2 \cos^5 \theta \sin \theta + 4r^2 \cos^4 \theta \sin^2 \theta + r^2 \cos^3 \theta \sin^3 \theta \\ &\quad + r \cos^4 \theta \sin \theta - 2r \cos^3 \theta \sin \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Pour calculer l'expression exacte de $F_{10}(r)$, nous utilisons Lemme 1.4.1, nous obtenons

$$F_{10}(r) = \frac{1}{4} r [r - 4].$$

La racine positive unique de $F_{10}(r)$ est $r_0 = 4$,

Donc l'équation différentielle a pour ε suffisamment petit admet un cycle limite qui bifurque de l'orbite périodique de rayon 4 du système perturbé (3.4).

[Voir (FIG. 3.1)].

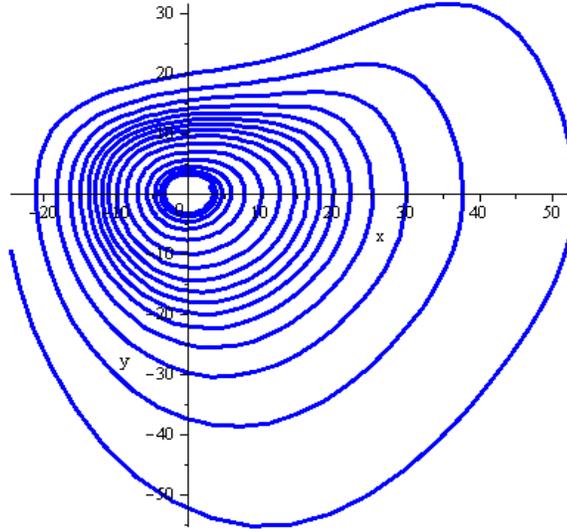


FIG.3.1 – Le cycle limite du système (3.4)
pour $\varepsilon = 0.01$.

Exemple 3.2.2 *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \varepsilon (1 + \cos^2 \theta) (y^3 - x^2 y^3). \end{cases} \quad (3.5)$$

En coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r > 0$, le système (3.5) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon r^3 \sin^4 \theta (1 - r^2 \cos^2 \theta + \cos^2 \theta - r^2 \cos^4 \theta), \\ \dot{\theta} = -1 - \varepsilon r^2 \cos \theta (\sin^3 \theta - r^2 \cos^2 \theta \sin^3 \theta + \cos^2 \theta \sin^3 - r^2 \cos^4 \theta \sin^3 \theta). \end{cases}$$

Pour déterminer les cycles limites, on résout l'équation

$$F_{10}(r) = \frac{7}{16}r^3 - \frac{11}{128}r^5 = 0,$$

l'équation $F_{10}(r)$ possède une racine positive $r = \sqrt{\frac{56}{11}}$. D'après le théorème (3.1.1) le système (3.5) a exactement un unique cycle limite qui bifurque des

3.3. CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE GÉNÉRALISÉE DES SYSTÈMES DE MATHIEU

orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$. [Voir(FIG. 3.2)].

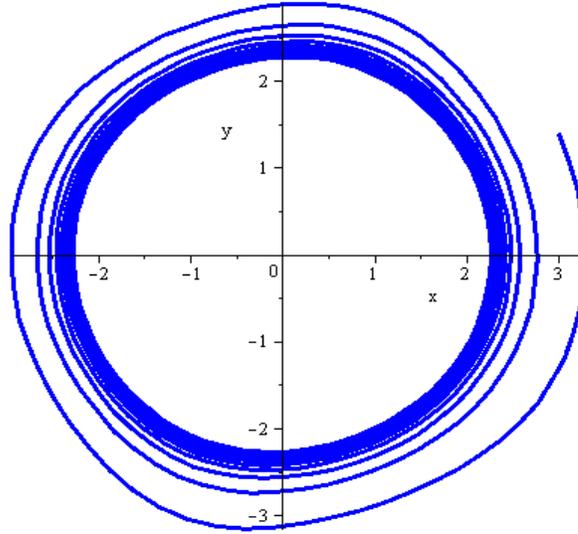


FIG.3.2 -un cycle limite du systme (3.5)
pour $\varepsilon = 0.01$.

3.3 Cycles limites pour une classe généralisée des systèmes de Mathieu

3.3.1 Présentation du problème

Nous allons étudier le nombre maximum de cycles limites qui peuvent bifurquer des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$, perturbé par une classe généralisée d'équation différentielles de Mathieu-Duffing de forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon (1 - \cos^l \theta) P(x, y), \\ \dot{y} = -y - \varepsilon (1 + \cos^m \theta) Q(x, y), \end{cases} \quad (3.6)$$

où $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ des polynômes en x et y de degré n et $\theta = \arctan(y/x)$, l et m sont des entiers positifs et $|\varepsilon|$ est suffisamment petit. On note que ce système est plus général que celui étudié dans [5]. Cette étude a fait l'objet d'un article publié dans " Applied Mathematics and Nonlinear Sciences" [6].

Notre résultat est le suivant :

CHAPITRE 3. CYCLES LIMITES DE CERTAINS SYSTÈMES DE
MATHIEU-DUFFING GÉNÉRALISÉS DÉPENDANT D'UN PETIT
PARAMÈTRE

Théorème 3.3.1 *Pour ε suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites pour la classe généralisée du système de Mathieu-Duffing (3.6) qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ est*

1) n cycles limites si n paire et

$$\left\{ \begin{array}{l} a) l \text{ impaire et } m \text{ impaire} \\ \text{ou} \\ b) l \text{ impaire et } m \text{ paire} \\ \text{ou} \\ c) l \text{ paire et } m \text{ impaire} \end{array} \right.$$

2) $\frac{n}{2}$ cycles limites si n paire et l et m paire.

3) $n - 1$ cycles limites si n impaire et

$$\left\{ \begin{array}{l} a) l \text{ impaire et } m \text{ paire} \\ \text{ou} \\ b) l \text{ paire et } m \text{ impaire} \end{array} \right.$$

4) $\frac{(n-1)}{2}$ cycles limites si n impaire, et l et m paire.

5) n cycles limites si n impaire, et l et m impaire.

3.3.2 Preuve du théorème 3.3.1

Dans cette preuve, On utilise la méthode de moyennisation d'ordre un. Supposons que

$$P(x, y) = \sum_{i+j=0}^n a_{ij} x^i y^j, \quad Q(x, y) = \sum_{i+j=0}^n b_{ij} x^i y^j.$$

En coordonnées polaires $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, r > 0$, le système (3.6) devient :

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon (\cos \theta (1 + \cos^l \theta) P(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta (1 + \cos^m \theta) Q(r \cos \theta, r \sin \theta)), \\ \dot{\theta} = -1 + \frac{\varepsilon}{r} (\sin \theta (1 + \cos^l \theta) P(r \cos \theta, r \sin \theta) - \cos \theta (1 + \cos^m \theta) Q(r \cos \theta, r \sin \theta)). \end{cases} \quad (3.7)$$

Considérons maintenant θ comme nouvelle variable indépendante, le système (3.7) s'écrit sous la forme standard du théorème de moyennisation d'ordre

3.3. CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE GÉNÉRALISÉE DES SYSTÈMES DE MATHIEU

un

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon (\cos \theta (1 + \cos^l \theta) P(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta (1 + \cos^m \theta) Q(r \cos \theta, r \sin \theta)) + O(\varepsilon^2), \\ &= \varepsilon \sum_{i+j=0}^n \cos^i \theta \sin^j \theta (a_{ij} (\cos \theta + \cos^{l+1} \theta) + b_{ij} (\sin \theta + \sin \theta \cos^m \theta)) r^{i+j} + O(\varepsilon^2), \\ &= \varepsilon F(r, \theta) + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

où

$$F(r, \theta) = \sum_{i+j=0}^n \cos^i \theta \sin^j \theta (a_{ij} (\cos \theta + \cos^{l+1} \theta) + b_{ij} (\sin \theta + \sin \theta \cos^m \theta)) r^{i+j}.$$

Maintenant, on calcule la fonction moyennée

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta.$$

Pour calculer l'expression exacte de $F_{10}(r)$, nous utilisons les expressions des intégrales

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^p \theta \sin^{2q} \theta d\theta &= \frac{(2q-1)!!}{(2q+p)(2q+p-2)\dots(p+2)} \int_0^{2\pi} \cos^p \theta d\theta \\ &= 2\pi \alpha_{p,2q}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^{2s} \theta d\theta &= \frac{(2s-1)!!}{2^s s!} 2\pi \\ &= 2\pi \beta_{2s}, \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2s+1} \theta d\theta = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^p \theta \sin^{2q+1} \theta d\theta = 0.$$

*CHAPITRE 3. CYCLES LIMITES DE CERTAINS SYSTÈMES DE
MATHIEU-DUFFING GÉNÉRALISÉS DÉPENDANT D'UN PETIT
PARAMÈTRE*

où p, q et s sont des entiers positifs. Voir ([14], pages 152 et 153).

Pour étudier le nombre de racines positives de F_{10} nous supposons deux cas :

Cas (i). Soit n paire, nous considérons quatre cas :

(i) – 1 : si m et l impaire

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^n [a_{ij} \cos^{i+1} \theta \sin^j \theta + a_{ij} \cos^{i+l+1} \theta \sin^j \theta \\ &\quad + b_{ij} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta + b_{ij} \cos^{i+m} \theta \sin^{j+1} \theta] r^{i+j} d\theta. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+2q=2}^{n+1} [(a_{i,2q-1} \cos^{i+1} \theta + a_{i,2q-1} \cos^{i+l+1} \theta) \sin^{2q-1} \theta \\ &\quad + (b_{i,2q-1} \cos^i \theta + b_{i,2q-1} \cos^{i+m} \theta) \sin^{2q} \theta] r^{i+2q-1} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+2q=2}^n [(a_{i,2q} \cos^{i+1} \theta + a_{i,2q} \cos^{i+l+1} \theta) \sin^{2q} \theta \\ &\quad + (b_{i,2q} \cos^i \theta + b_{i,2q} \cos^{i+m} \theta) \sin^{2q+1} \theta] r^{i+2q} d\theta, \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{2s+1+2q=3}^{n+1} \int_0^{2\pi} b_{2s+1,2q-1} \cos^{2s+1+m} \theta \sin^{2q} \theta r^{2s+2q} d\theta \right. \\ &\quad + \sum_{2s+2q=2}^n \int_0^{2\pi} (b_{2s,2q-1} \cos^{2s} \theta \sin^{2q} \theta) r^{2s+2q-1} d\theta \\ &\quad + \sum_{2s+1+2q=3}^{n+1} \int_0^{2\pi} (a_{2s+1,2q} \cos^{2s+2} \theta \sin^{2q} \theta) r^{2s+1+2q} d\theta \\ &\quad \left. + \sum_{2s+2q=2}^n \int_0^{2\pi} (a_{2s,2q} \cos^{2s+l+1} \theta \sin^{2q} \theta) r^{2s+2q} d\theta \right] \end{aligned}$$

3.3. CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE GÉNÉRALISÉE DES SYSTÈMES DE MATHIEU

Alors

$$\begin{aligned}
 F_{10}(r) &= \sum_{s+q=1}^{n/2} b_{2s+1,2q-1} \alpha_{2s+1+m,2q} r^{2s+2q} + \sum_{s+q=1}^{n/2} b_{2s,2q-1} \alpha_{2s,2q} r^{2s+2q-1} \\
 &+ \sum_{s+q=1}^{n/2} a_{2s+1,2q} \alpha_{2s+2,2q} r^{2s+1+2q} + \sum_{s+q=1}^{n/2} a_{2s,2q} \alpha_{2s+l+1,2q} r^{2s+2q},
 \end{aligned}$$

on a

$$F_{10}(r) = \sum_{k=1}^{n+1} A_k r^k.$$

Puisque $F_{10}(r)$ est un polynôme engendré par une combinaison linéaire $\{r, r^2, \dots, r^{n+1}\}$. En utilisant la règle des signes de Descartes, le polynôme $F_{10}(r)$ a au plus n racines positives.

(i) – 2 : Si m impair et l pair

$$\begin{aligned}
 F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta \\
 &= \sum_{s+q=1}^{n/2} b_{2s+1,2q-1} \alpha_{2s+1+m,2q} r^{2s+2q} + \sum_{s+q=1}^{n/2} b_{2s,2q-1} \alpha_{2s,2q} r^{2s+2q-1} \\
 &+ \sum_{s+q=1}^{n/2} a_{2s+1,2q} \alpha_{2s+2,2q} r^{2s+1+2q} + \sum_{s+q=1}^{n/2} a_{2s+1,2q} \alpha_{2s+l+1,2q} r^{2s+1+2q} \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \tilde{A}_k r^k.
 \end{aligned}$$

Puisque $F_{10}(r)$ est un polynôme engendré par une combinaison linéaire $\{r, r^2, \dots, r^{n+1}\}$. En utilisant la règle des signes de Descartes, le polynôme $F_{10}(r)$ a au plus n racines positives.

CHAPITRE 3. CYCLES LIMITES DE CERTAINS SYSTÈMES DE
MATHIEU-DUFFING GÉNÉRALISÉS DÉPENDANT D'UN PETIT
PARAMÈTRE

(i) – 3 : Si m pair et l impair

$$\begin{aligned}
 F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta \\
 &= \sum_{s+q=1}^{n/2} b_{2s,2q-1} \alpha_{2s+m,2q} r^{2s+2q-1} + \sum_{s+q=1}^{n/2} b_{2s,2q-1} \alpha_{2s,2q} r^{2s+2q-1} \\
 &\quad + \sum_{s+q=1}^{n/2} a_{2s+1,2q} \alpha_{2s+2,2q} r^{2s+1+2q} + \sum_{s+q=1}^{n/2} a_{2s,2q} \alpha_{2s+l+1,2q} r^{2s+2q} \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \hat{A}_k r^k.
 \end{aligned}$$

Puisque $F_{10}(r)$ est un polynôme engendré par une combinaison linéaire $\{r, r^2, \dots, r^{n+1}\}$. En utilisant la règle des signes de Descartes, le polynôme $F_{10}(r)$ a au plus n racines positives.

(i) – 4 : si m et l pair,

$$\begin{aligned}
 F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta \\
 &= \sum_{s+q=1}^{n/2} b_{2s,2q-1} \alpha_{2s+m,2q} r^{2s+2q-1} + \sum_{s+q=1}^{n/2} b_{2s,2q-1} \alpha_{2s,2q} r^{2s+2q-1} \\
 &\quad + \sum_{s+q=1}^{n/2} a_{2s+1,2q} \alpha_{2s+2,2q} r^{2s+1+2q} + \sum_{s+q=1}^{n/2} a_{2s+1,2q} \alpha_{2s+l+2,2q} r^{2s+1+2q} \quad (3.1) \\
 &= \sum_{k=1}^{(n/2)+1} B_k r^{2k-1}.
 \end{aligned}$$

Puisque $F_{10}(r)$ est un polynôme engendré par une combinaison linéaire $\{r, r^3, \dots, r^{n+1}\}$. En utilisant la règle des signes de Descartes, le polynôme $F_{10}(r)$ a au plus $n/2$ racines positives.

Cas (ii). Soit n impaire, nous considérons quatre cas :

3.3. CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE GÉNÉRALISÉE DES SYSTÈMES DE MATHIEU

(ii) – 1 : si m impaire et l paire

$$\begin{aligned}
 F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta \\
 &= \sum_{s+q=1}^{(n-1)/2} b_{2s+1, 2q-1} \alpha_{2s+1+m, 2q} r^{2s+2q} + \sum_{s+q=1}^{(n+1)/2} b_{2s, 2q-1} \alpha_{2s, 2q} r^{2s+2q-1} \\
 &\quad + \sum_{s+q=1}^{(n-1)/2} a_{2s+1, 2q} \alpha_{2s+2, 2q} r^{2s+1+2q} + \sum_{s+q=1}^{(n-1)/2} a_{2s+1, 2q} \alpha_{2s+l+2, 2q} r^{2s+1+2q} \\
 &= \sum_{k=1}^n C_k r^k.
 \end{aligned}$$

Puisque $F_{10}(r)$ est un polynôme engendré par une combinaison linéaire $\{r, r^2, \dots, r^n\}$.
En utilisant la règle des signes de Descartes, le polynôme $F_{10}(r)$ a au plus
 $(n-1)$ racines positives.

(ii) – 2 : si m paire et l impaire

$$\begin{aligned}
 F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta \\
 &= \sum_{s+q=1}^{(n+1)/2} b_{2s, 2q-1} \alpha_{2s+m, 2q} r^{2s+2q-1} + \sum_{s+q=1}^{(n+1)/2} b_{2s, 2q-1} \alpha_{2s, 2q} r^{2s+2q-1} \\
 &\quad + \sum_{s+q=1}^{(n-1)/2} a_{2s+1, 2q} \alpha_{2s+2, 2q} r^{2s+1+2q} + \sum_{s+q=1}^{(n-1)/2} a_{2s, 2q} \alpha_{2s+l+1, 2q} r^{2s+2q} \\
 &= \sum_{k=1}^n \tilde{C}_k r^k.
 \end{aligned}$$

Puisque $F_{10}(r)$ est un polynôme engendré par une combinaison linéaire $\{r, \dots, r^n\}$.
En utilisant la règle des signes de Descartes, le polynôme $F_{10}(r)$ a au plus
 $(n-1)$ racines positives.

CHAPITRE 3. CYCLES LIMITES DE CERTAINS SYSTÈMES DE
MATHIEU-DUFFING GÉNÉRALISÉS DÉPENDANT D'UN PETIT
PARAMÈTRE

(ii) – 3 : si m et l paire

$$\begin{aligned}
 F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta \\
 &= \sum_{s+q=1}^{(n+1)/2} b_{2s,2q-1} \alpha_{2s+m,2q} r^{2s+2q-1} + \sum_{s+q=1}^{(n+1)/2} b_{2s,2q-1} \alpha_{2s,2q} r^{2s+2q-1} \\
 &\quad + \sum_{s+q=1}^{(n-1)/2} a_{2s+1,2q} \alpha_{2s+2,2q} r^{2s+1+2q} + \sum_{s+q=1}^{(n-1)/2} a_{2s+1,2q} \alpha_{2s+l+2,2q} r^{2s+1+2q} \\
 &= \sum_{k=1}^{(n+1)/2} D_k r^{2k-1} + \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \tilde{D}_k r^{2k+1}.
 \end{aligned}$$

Puisque $F_{10}(r)$ est un polynôme engendré par une combinaison linéaire $\{r, r^3, \dots, r^n\}$. En utilisant la règle des signes de Descartes, le polynôme $F_{10}(r)$ a au plus $(n-1)/2$ racines positives.

(ii) – 4 : si m et l impaire

$$\begin{aligned}
 F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta \\
 &= \sum_{s+q=1}^{(n-1)/2} b_{2s+1,2q-1} \alpha_{2s+1+m,2q} r^{2s+2q} + \sum_{s+q=1}^{(n+1)/2} b_{2s,2q-1} \alpha_{2s,2q} r^{2s+2q-1} \\
 &\quad + \sum_{s+q=1}^{(n-1)/2} a_{2s+1,2q} \alpha_{2s+2,2q} r^{2s+1+2q} + \sum_{s+q=1}^{(n+1)/2} a_{2s,2q} \alpha_{2s+l+2,2q} r^{2s+2q} \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \hat{C}_k r^k.
 \end{aligned}$$

Puisque $F_{10}(r)$ est un polynôme engendré par une combinaison linéaire $\{r, r^2, \dots, r^{n+1}\}$. En utilisant la règle des signes de Descartes, le polynôme $F_{10}(r)$ a au plus n racines positives.

Exemple 3.3.1 *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon (1 + \cos^2 \theta) (x^2 - xy^2), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon (1 + \cos^3 \theta) (2x^2y - x^3). \end{cases} \quad (3.8)$$

3.3. CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE GÉNÉRALISÉE DES SYSTÈMES DE MATHIEU

En coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r > 0$, le système (3.8) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon \cos \theta (r^2 \cos^2 \theta - r^3 \cos \theta \sin^2 \theta + r^2 \cos^4 \theta - r^3 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 2r^2 \cos \theta \sin^2 \theta \\ - r^3 \cos^2 \theta \sin \theta + 2r^2 \cos^4 \theta \sin^2 \theta - r^3 \cos^4 \theta \sin \theta), \\ \dot{\theta} = -1 - \varepsilon \cos \theta (2r \cos^2 \theta \sin \theta - r^2 \cos^3 \theta + 2r^2 \cos^5 \theta \sin \theta + r^2 \cos^6 \theta \\ + \sin \theta + \cos^2 \theta \sin \theta - r \sin^2 \theta) - \varepsilon (r \sin^2 \theta). \end{cases}$$

Pour déterminer les cycles limites, on résoudre l'équation

$$F_{10}(r) = \frac{1}{4}r^2 - \frac{3}{16}r^3 = 0,$$

l'équation $F_{10}(r)$ possède un racine positive $r = \frac{4}{3}$. D'après le théorème (3.3.1) le système (3.8) a exactement un unique cycle limite qui bifurque des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$. [Voir(FIG. 3.3)].

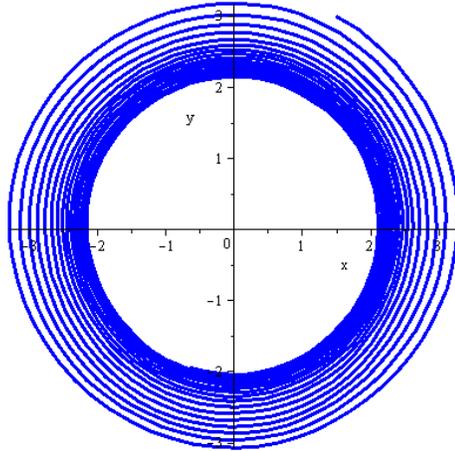


FIG.3.3 – Le cycle limite du système (3.8) pour $\varepsilon = 0.01$.

Chapitre 4

Conclusion et perspectives

La méthode de moyennisation "Averaging Method" est l'une des plus importantes méthodes de perturbations utilisées actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques. Cette théorie a été abondamment utilisée ces dernières années pour l'étude des cycles limites de certains systèmes de Mathieu généralisés. Nous continuons à travailler sur des problèmes analogues, on se propose d'étudier le nombre maximum de cycles limites du système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y(x+1)^2 \\ \dot{y} = -x(x+1)^2 - \varepsilon(1 + \cos^m \theta)Q(x, y), \end{cases}$$

où $Q(x, y)$ est un polynôme de degré n , $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, m est un entier positif et $|\varepsilon|$ est un paramètre suffisamment petit, en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre.

Bibliographie

- [1] I.S. Berezin, N.P. Zhidkov, Computing Methods, vol. II, Pergamon Press, Oxford, 1964.
- [2] A. Buică, J. Giné, J. Llibre, Bifurcation of limit cycles from a polynomial degenerate center, *Adv. Nonlinear Stud.* 10 (2010) 597–609.
- [3] A. Buica. and J. Llibre, Averaging methods for finding poeriodic orbits via Brouwer degree, *Bull.Sci. Math.*, **128** : 7-22, 2004.
- [4] A. Buica., J. P.Françoise and J. Llibre, Periodic Solutions of Nonlinear periodic Differential Systems with a Small Parameter. *Comm. On Pure and Appl. Anal.*, **6** :103-111, 2007.
- [5] T. Chen and Jaume Llibre, Limit Cycles of a second order differential equation, *Applied Mathematics Letters* 88 (2019) 111-117.
- [6] Z. Diab, J. L.G. Guirao, J. Llibre and A. Makhlouf, Limit cycles of a generalised Mathieu differential system, *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, Sciendo (2021), pp. 1–8. doi :10.2478/amns.2021.2.00180.
- [7] J. Llibre and A.C.Mereu, Limit cycles for generalized Kukles polynomial systems, *Nonlinear Anal.* 2011, 74, 1261–1271.
- [8] J. Llibre, B.D. Lopes and J.R. De Moraes, Limit Cycles for a Class of Continuous and Discontinuous Cubic Polynomial Differential Systems. *Qual. Theory Dyn. Syst.* 13, 129–148 (2014). <https://doi.org/10.1007/s12346-014-0109-9>
- [9] A. Makhlouf and A. Menaceur, On the Limit cycles of a class of generalized Kukles polynomial differential systems via averaging theory, *Int. J. Differ. Equ.* 2015, 2015, 325102.
- [10] E. Mathieu, Mémoire sur le mouvement vibratoire d’une membrane de forme elliptique, *J. Math. Pures Appl.* 13 (1868) 137–203.
- [11] H. Poincaré, Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle I, II, *J. Math. Pures Appl.* 7 (1881), 375-422 ; 251-296.

- [12] L. Ruby, ApplicationS of the Mathieu Equation, Am. J. Phys. 64 (1) (1996), 39-44.
- [13] A. C.Tzemos, G. Contopoulos, Integrals of Motion in Time-periodic Hamiltonain Systems, The Case of the Mathieu Equation, Regul. Chaotic Dyn. 26 (2021), no. 1, 89-104.
- [14] D. Zwillinger, Table of Integrals, Series, and Products, ISBN : 978-0-12-384933-5, 2014.