

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
et des Sciences de la Matière  
Département de Mathématiques



## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
**Master Académique en Mathématiques**  
Option : **Equations aux Dérivées Partielles**  
**Et analyse numérique**

Par :

**Tlidjani Roumayssa**  
**Intitulé**

**Sur un problème aux limites engendré par une  
équation différentielle du troisième ordre**

Dirigé par :

**Bendjazia Nassima**

Devant le jury

<b>PRESIDENT</b>	<b>Dr. Ghat Mourad</b>	<b>MCA</b>	<b>Univ-Guelma</b>
<b>RAPPORTEUR</b>	<b>Dr. Bendjazia Nassima</b>	<b>MCA</b>	<b>Univ-Guelma</b>
<b>EXAMINATEUR</b>	<b>Dr. Rezgui Nassima</b>	<b>MCA</b>	<b>Univ-Guelma</b>

Session Juin 2023

# Table des matières

0.1	Introduction . . . . .	6
<b>1</b>	<b>Rappels et notions fondamentales</b>	<b>9</b>
1.1	Espace de fonctions . . . . .	10
1.2	Espaces de Hilbert . . . . .	10
1.3	Méthode à noyau reproduisant . . . . .	12
1.3.1	L'espace à noyau reproduisant $W_2^m[a, b]$ . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Solution analytique et approchée</b>	<b>19</b>
2.1	Position du problème . . . . .	19
2.2	La solution exacte et approchée . . . . .	27
2.2.1	Méthode itérative et théorème de convergence . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Application numérique</b>	<b>33</b>

## *Remerciements*

*Je tiens à remercier en premier lieu Allah qui a donnée vie et santé pour le parachèvement de ce modeste travail.*

*Je tiens à remercier vivement mon encadreur Dr.Nassima Bendjazia, pour son soutien, son encouragement, la confiance qu'elle a témoignée en acceptant de diriger ce travail et pour avoir mis à mon disposition ses conseils pour une meilleure maitrise du sujet.*

*J'exprime également mes chaleureux remerciement au .Mr.Ghiat Mourad et au M.Rezgui Nassima, pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'avoir accepté de faire partie de ce jury.*

*Je voudrais également remercier ma familles, et mes amis.*

*Dédicace*

*Je dédie ce travail à*

*A ma chère mère Fatima*

*A mon cher père Sebti*

*A mes soeur Warda Imen et Yassemin*

*Qui étaient toujours à mes cotés pour me soutenir et m'aider*

*dans les moments difficiles.*

*A tous mes professeurs qui ont eu la générosité de partager*

*leur savoir de nous l'inculquer sans relache.*

*A tous mes amis.*

*A tous ce bon monde et tous ceux que j'aime du font de mon*

*cœur, je dis grand merci*

*MAISSA*

# Résumé

L'objectif de travail présenté dans ce memoire est d'appliquer la méthode de noyau reproduisant dans l'espace de Hilbert (*RKHSM*) pour résoudre une équation différentielle du troisième ordre à caractéristiques multiples dans un domaine rectangulaire. La solution analytique est représentée sous forme de séries de Fourier, et la solution approchée est obtenue par une méthode itérative. Ainsi, les solutions numériques obtenues à partir de la méthode proposée sont comparées aux solutions exactes, comme les erreurs trouvées sont très petites, par conséquent, on confirme que cette méthode est efficace pour ce type de problème. Tous les calculs ont été effectués en utilisant Mathematica.9.0 .

**Mots clés : Méthode de Noyau reproduisant. Equation différentielle du troisième ordre, Existence de la solution, Solution approximative, Problèmes de valeur aux limites.**

# Abstract

L'objective of this work presented in this memory is to apply the reproducing kernel Hilbert space methode(*RKHS*) for solving third order differential equations with multiple characteristics in a rectangular domain. The analytical solution is represented in the form of series using the present method. Thus, the approximate solution is obtained. Finally the results obtained from the method are compared with the exact solutions. Consequently the results of the numerical examples show that the RKHS is effective for this kind of the problems. All the computations are performed using Mathematica 9.0.

**Key words :** Reproducing kernel Hilbert space, Third order differential equation, Boundary value problems, Existence of Solution, Approximate solution.

## 0.1 Introduction

Au cours des ces dernières années, de nombreux phénomènes en physique ont été modélisés par des problèmes aux limites, un problème aux limites est constitué d'une équation différentielle (ou plus généralement aux dérivées partielles) dont on recherche une solution prenant de plus des valeurs imposées en des limites du domaine de résolution.

La recherche de solutions analytiques et numériques de différents types d'équations différentielle est un sujet très important et intéressant dans l'étude de nombreux problèmes physiques et de modèles d'ingénierie. L'une des plus importantes équations de la physique mathématique est l'équation différentielles du troisième ordre.

Les équations différentielle sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques et biologiques, par exemple pour l'étude de la radioactivité ou la mécanique céleste. Par conséquent, les équations aux dérivées partielles représentent un vaste champ d'étude, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées.

En général il est difficile de résoudre les équations différentielle du troisième ordre analytiquement, dans de tels cas, le rapprochement des méthodes d'analyse numérique donnent d'autres moyens afin de trouver les approximatives des solutions.

La méthode de noyau de reproduction est un outil pratique pour construire la solution approchée d'équations aux dérivées partielles (EDP), sans discrétisation contrairement à la méthode de Galerkin, la méthode de Rothe... .., en outre la solution numérique obtenue par cette procédure converge rapidement vers la solution exacte avec une petite erreur et une bonne précision.

La théorie du noyau Reproduisant a des applications importantes en analyse numérique, équations différentielles, intégrale et IDE, probabilités et statistiques, etc. [4, 5, 6]. Ces dernières années, il y a eu un intérêt croissant de résoudre les équations aux dérivées partielles du troisième ordre en utilisant le noyau reproduisant. ainsi, plusieurs travaux ont traité avec succès les problèmes aux limites unidimensionnels engendrés par une equa-

tion du troisième ordre, voir [7, 8, 10, 11, 12]. Cependant, dans un domaine rectangulaire, cette méthode n'a été appliquée que dans deux articles [3, 9].

Dans [9], les auteurs s'intéressent à la solution numérique d'équation aux dérivées partielles du troisième ordre avec des conditions aux limites en trois points suivante

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t^3} - \frac{\partial}{\partial x} \left( a(x, t) \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right) &= f(x, t) \\ \int_c^1 u(x, t) &= 0, t \in [0, T], 0 \leq c < 1 \\ u_{tt}(x, 0) &= 0, u_t(x, 0), u(x, 0) = 0, \end{aligned}$$

$f(x, t)$ ,  $a(x, t)$  sont des fonctions données dans  $[0, 1] \times [0, T]$ , telles que  $0 < a_0 < a(x, t) < a_1$ ,  $|a_x(x, t)| \leq b$

Dans [3], les auteurs s'intéressent à la solution numérique d'équation suivante

$$u_{xxx}(x, t) - u_{tt}(x, t) = f(x, t), (x, t) \in Q = (0, 1) \times (0, 1),$$

sous réserve des conditions aux limites :

$$\begin{aligned} u_t(x, 0) &= \varphi_1(x), u(x, 1) = \varphi_2(x), \\ u(0, t) &= \psi_1(t), u(1, t) = \psi_2(t), u_x(1, t) = \psi_3(t). \end{aligned}$$

Notre mémoire ce compose de trois chapitres

Dans le premier chapitre on introduit quelques notions de la théorie des espaces fonctionnels.

Dans le deuxième chapitre on développe la méthode de noyau reproduisant dans l'espace de hilbert pour résoudre une équation différentielle du troisième ordre sous la forme suivante

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} u - \frac{\partial}{\partial t} \left( a(t) \frac{\partial}{\partial t} u \right) + \delta u(x, t) = F(x, t),$$

pour tout  $(x, t) \in Q = (0, 1) \times (0, 1)$ ,



à laquelle sont jointes les conditions initiales

$$\begin{aligned}u(0, t) &= \varphi(t), u(1, t) = \psi(t), u_x(1, t) = \xi(t) \\u_x(x, 0) &= u_t(x, 1) = 0\end{aligned}$$

Dans le dernier chapitre, pour démontrer l'efficacité de la méthode proposée on a traité quelques exemples, les résultats numériques sont représentés par des tableaux et des graphes.

Enfin, ce mémoire est clôturé par une bibliographie.

# Chapitre 1

## Rappels et notions fondamentales

### Résumé

Les outils d'analyse fonctionnelle sont essentiels à l'étude des équations aux dérivées partielles, Dans ce chapitre, on rappelle les résultats fondamentaux, les définitions et les notions élémentaires qui seront utilisées dans l'étude des problèmes posés dans cette mmoire.

## 1.1 Espace de fonctions

On note par  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  le point générique d'un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $u$  une fonction définie de  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , on désigne par  $D^i u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$  la dérivée partielle de la fonction  $u$  par rapport à  $x_i$ . On définit aussi le gradient et le Laplacien de  $u$ , respectivement, comme suit

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^T \quad \text{et} \quad |\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2$$
$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right)(x).$$

On note par  $C(\Omega)$  l'espace des fonctions continues de  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , pour  $k \geq 1$  entier,  $C^k(\Omega)$  est l'espace des fonctions  $u$  qui sont  $k$  fois dérivables et dont la dérivée d'ordre  $k$  est continue sur  $\Omega$ .

Sachant que,  $C_c^k(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions de  $C^k(\Omega)$ , dont le support est compact et contenu dans  $\Omega$ .

On définit aussi  $C^k(\overline{\Omega})$ , comme étant l'ensemble des restrictions à  $\overline{\Omega}$  des éléments de  $C^k(\mathbb{R}^n)$  ou bien comme étant l'ensemble des fonctions de  $C^k(\Omega)$ , telle que pour tout  $0 \leq j \leq k$ , et tout  $x_0 \in \partial\Omega$ , la limite  $\lim_{x \rightarrow x_0} D^j u(x)$  existe et dépend uniquement de  $x_0$ .

## 1.2 Espaces de Hilbert

**Définition 1.1** *Un espace de Hilbert réel est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , muni d'un produit scalaire, noté  $\langle x, y \rangle$ , qui est complet pour la norme associée  $\|x\|$ , tel que  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .*

**Théorème 1.1 (Projection sur un convexe)** *Soit  $V$  un espace de Hilbert. Soit  $K \subset$*

$V$  un convexe fermé non vide. Pour tout  $x \in V$ , il existe un unique  $x_K \in K$  tel que

$$\|x - x_K\| = \min_{y \in K} \|x - y\|$$

De façon équivalente,  $x_K$  est caractérisé par la propriété

$$x_K \in K, \langle x_K - x, x_K - y \rangle \leq 0 \quad \forall y \in K$$

$x_K$  s'appelle la projection orthogonale de  $x$  sur  $K$ .

**Définition 1.2** Une partie  $G$  de  $H$  est dite dense dans  $H$  si

$$\forall h \in H, \forall \epsilon > 0, \exists g \in G; \|g - h\| < \epsilon$$

ou de manière équivalente si tout  $h$  de  $H$  est limite d'une suite d'éléments  $g_n$  de  $G$  :  
 $\|g_n - h\| \rightarrow 0$ .

**Définition 1.3** Une partie  $F$  de  $H$  est dite totale si l'ensemble des combinaisons linéaires finies des éléments de  $F$  est dense dans  $H$ .

**Définition 1.4** Une famille  $\{e_i, i \in I\}$  d'éléments de  $H$  est dite orthonormée si

$$\forall i \in I, \forall j \in I, (e_i, e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

## Base Hilbertienne

**Définition 1.5** Une base hilbertienne de  $H$  ou base orthonormée est une famille orthonormée totale dans  $H$ .

**Proposition 1.1** Soit  $H$  un espace de Hilbert pour le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$ . Soit  $\{e_n\}_{n \geq 1}$  une base hilbertienne de  $H$ . Pour tout élément  $x$  de  $H$ , il existe une unique suite  $(x_n)_{n \geq 1}$

de réels telle que la somme partielle  $\sum_{n=1}^{n=p} x_n e_n$  converge vers  $x$  quand  $p$  tend vers l'infini, et cette suite est définie par  $x_n = (x, e_n)$ . De plus on a

$$\|x\|^2 = (x, x) = \sum_{n \geq 1} |(x, e_n)|^2$$

on écrit alors

$$x = \sum_{n \geq 1} (x, e_n) e_n$$

L'existence d'une base hilbertienne dénombrable n'est pas garantie pour tous les espaces de Hilbert. La proposition suivante donne une condition nécessaire et suffisante de l'existence d'une base hilbertienne dénombrable.

**Proposition 1.2** *Soit  $H$  un espace de Hilbert séparable ( i.e il existe une famille dénombrable dense dans  $H$  ), alors il existe une base hilbertienne dénombrable de  $H$ .*

**Définition 1.6** (*Espaces dual*). *Si  $X$  est un espace linéaire normé, alors l'équation différentielle du troisième ordre son espace dual est l'ensemble des formes linéaires continues dans  $X$ . L'espace dual est généralement noté par  $X'$ . En d'autres termes,*

$$X' = \{T : X \rightarrow \mathbb{R}, T \text{ est continue et linéaire}\}.$$

**Définition 1.7** *Une fonction symétrique  $K(.,.) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  est dite semi-définie positive si*

$$\forall l \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, \dots, x_l \in X, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{R}, \sum_{i,j=1}^l \lambda_i \lambda_j K(x_i, x_j) \geq 0$$

### 1.3 Méthode à noyau reproduisant

En analyse fonctionnelle, un espace de Hilbert à noyau reproduisant (RKHS) est un espace de Hilbert spécial associé à un noyau telque reproduit (via un produit scalaire) chaque fonction

dans l'espace, ou, de façon équivalente, chaque fonction d'évaluation au point  $x$  est bornée. Le sujet a été originellement et simultanément développé par Nachman Aronszajn en 1950, qui affirme dans son théorème de Moore-Aronszajn que tout noyau symétrique défini positif définit un unique espace de Hilbert à noyau reproduisant. Le théorème apparaît pour la première fois dans l'article *Theory of Reproducing Kernels* Aronszajn [1].

**Définition 1.8** *Un RKHS est un espace de Hilbert  $H$  de fonctions définies sur  $X$  à valeurs réelles, tel que*

$$\forall x \in X, \exists M_x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M_x \|f\|_H$$

*En d'autres termes, la fonction d'évaluation  $L_x : H \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par  $L_x(f) = f(x)$  est une forme linéaire continue. D'après le théorème de Riesz, il existe donc un unique élément  $K_x$  de  $H$  vérifiant*

$$L_x f = \langle f(\cdot), K_x(\cdot) \rangle_H = f(x)$$

**Définition 1.9** *soit  $E$  un ensemble abstrait non vide, on dit qu'une fonction  $k : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$  est un noyau reproduisant de l'espace de Hilbert  $H$  si*

1) *pour chaque  $t \in E, k(\cdot, t) \in H$ .*

2) *pour chaque  $t \in E$ , et  $\varphi \in H, \langle \varphi, k(\cdot, t) \rangle = \varphi(t)$ .*

*la dernière condition s'appelle "la propriété de reproduisant" la valeur de la fonction au point  $t$  est reproduite par le produit scalaire de  $f$  avec  $k(\cdot, t)$ . Un espace de Hilbert qui possède un noyau reproduisant et appelé un RKHS. Notons  $k_s(t) = k(s, t)$ .*

**Théorème 1.2** *(de Moore-Aronszajn) À tout RKHS correspond un unique noyau reproduisant. Inversement, si  $K(\cdot, \cdot)$  est une fonction semi-définie positive et symétrique sur  $X \times X$ , on peut construire un unique RKHS de fonctions à valeurs réelles, pour lequel  $K(\cdot, \cdot)$  est un noyau reproduisant.*

### 1.3.1 L'espace à noyau reproduisant $W_2^m[a, b]$

En 1986, Cui [5] a montré que  $W_2^1[a, b]$  est un espace de Hilbert à noyau reproduisant (RKHS), au cours des dernières années, plusieurs recherches ont montré que certains problèmes pourraient être résolus dans l'espace à noyau reproduisant  $W_2^1[a, b]$ .

Basé sur l'espace à noyau reproduisant établi par Cui Minggen et en redéfinissant le produit scalaire, le noyau reproduisant de  $W_2^m[a, b]$  peut être considérablement simplifié et exprimé par des polynômes.

On définit l'espace de fonction  $W_2^m[a, b]$  par :

$$W_2^m[a, b] = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f, f', \dots, f^{(m-1)} \text{ sont absolument continues, } f^{(m)} \in L^2[a, b] \right\}.$$

Le produit scalaire et la norme dans  $W_2^m[a, b]$  sont définies respectivement par

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a)g^{(i)}(a) + \int_a^b f^{(m)}(x)g^{(m)}(x) dx, \\ \|f\| &= \sqrt{\langle f(x), f(x) \rangle}, f(x), g(x) \in W_2^m[a, b]. \end{aligned} \quad (1.1)$$

**Théorème 1.3**  $W_2^m[a, b]$  est un espace à noyau reproduisant si et seulement si pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $I : f \rightarrow f(x)$  est une fonctionnelle bornée dans  $W_2^m[a, b]$ .

**Théorème 1.4** l'espace de fonction  $W_2^m[a, b]$  est un espace de Hilbert.

**Preuve.** En supposant que  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  est une suite de Cauchy dans  $W_2^m[a, b]$ , ie, si  $n \rightarrow \infty$ , alors

$$\begin{aligned} \|f_{n+p} - f_n\|^2 &= \sum_{i=0}^{m-1} \left[ f_{n+p}^{(i)}(a) - f_n^{(i)}(a) \right]^2 \\ &\quad + \int_a^b \left[ f_{n+p}^{(m)}(x) - f_n^{(m)}(x) \right]^2 dx \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$f_{n+p}^{(i)}(a) - f_n^{(i)}(a) \rightarrow 0, i = 0, 1, \dots, m - 1$$

et

$$\int_a^b [f_{n+p}^{(m)}(x) - f_n^{(m)}(x)]^2 dx \rightarrow 0$$

ce qui indique que pour chaque  $i$  ( $0 \leq i \leq m - 1$ ), la suite  $\{f_n^{(i)}(a)\}_{n \geq 1}$  est une suite de Cauchy et  $\{f_n^{(i)}\}_{n \geq 1}$  est une suite de Cauchy dans  $L^2[a, b]$ . Donc, il existe unique nombre réel  $\lambda_i$  ( $0 \leq i \leq m - 1$ ), et une fonction unique  $h \in L^2[a, b]$  tel que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(i)}(a) = \lambda_i \quad (0 \leq i \leq m - 1)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f_n^{(m)}(x) - h(x)]^2 dx = 0$$

En supposant que

$$g(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\lambda_k}{k!} (x - a)^k + \int_a^x \int_a^x \dots \int_a^x h(x) (dx)^m,$$

puisque  $h \in L^2[a, b]$  donc  $g^{(m-1)}(x) = \lambda_{m-1} + \int_a^x h(x) dx$  est absolument continue dans  $[a, b]$  et  $g^{(m)}(x) = h(x)$  est vrai presque partout dans  $[a, b]$ .

D'où  $g \in W_2^m[a, b]$  et  $g^{(i)}(a) = \lambda_i$  ( $0 \leq i \leq m - 1$ ). De plus, on a

$$\begin{aligned} \|f_n - g\|^2 &= \sum_{i=0}^{m-1} [f_n^{(i)}(a) - g^{(i)}(a)]^2 \\ &\quad + \int_a^b [f_n^{(m)}(x) - g^{(m)}(x)]^2 dx \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} [f_n^{(i)}(a) - \lambda_i]^2 + \\ &\quad \int_a^b [f_n^{(m)}(x) - h(x)]^2 dx \rightarrow 0 \end{aligned}$$



Par conséquent, l'espace de fonction  $W_2^m[a, b]$  est un espace de Hilbert. ■

**Théorème 1.5** *L'espace de fonction  $W_2^m[a, b]$  est un espace à noyau reproduisant.*

**Preuve.** En fait, pour  $x \in [a, b]$  et  $f \in W_2^m[a, b]$ , on a

$$f^{(m-1)}(x) = f^{(m-1)}(a) + \int_a^x f^{(m)}(x) dx,$$

d'où

$$\begin{aligned} |f^{(m-1)}(x)| &\leq |f^{(m-1)}(a)| + \int_a^x |f^{(m)}(x)| dx \\ &\leq |f^{(m-1)}(a)| + \int_a^b |f^{(m)}(x)| dx, \end{aligned}$$

et comme(t)

$$\begin{aligned} \int_a^b |f^{(m)}(x)| dx &\leq \sqrt{(b-a) \int_a^b |f^{(m)}(x)|^2 dx} \\ &= \overset{\circ}{M}_1 \sqrt{\int_a^b |f^{(m)}(x)|^2 dx} \\ &\leq \overset{\circ}{M}_1 \sqrt{\sum_{i=0}^{m-1} [f^{(i)}(a)]^2 + \int_a^b |f^{(m)}(x)|^2 dx} \\ &= \overset{\circ}{M}_1 \|f\|_{W_2^m[a,b]} \end{aligned}$$

On note que pour tout  $i(0 \leq i \leq m-1)$ , on a

$$\begin{aligned} |f^{(i-1)}(a)| &= \sqrt{|f^{(i-1)}(a)|^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=0}^{m-1} [f^{(i)}(a)]^2 + \int_a^b |f^{(m)}(x)|^2 dx} = \|f\|_{W_2^m[a,b]}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

par conséquent

$$|f^{(m-1)}(x)| \leq M_1 \|f\|_{W_2^m[a,b]}. \tag{1.3}$$

On note que

$$\begin{aligned} |f^{(m-2)}(x)| &\leq |f^{(m-2)}(a)| + \int_a^x |f^{(m-1)}(x)|^2 dx \\ &\leq |f^{(m-2)}(a)| + \int_a^b |f^{(m-1)}(x)|^2 dx \end{aligned}$$

à partir de (1.10) et (1.11), on a

$$\begin{aligned} |f^{(m-2)}(x)| &\leq \|f\|_{W_2^m[a,b]} + M_1 (b-a) \|f\|_{W_2^m[a,b]} \\ &= M_2 \|f\|_{W_2^m[a,b]}. \end{aligned}$$

De même, on a

$$|I(f)| = |f(x)| \leq M_n \|f\|_{W_2^m[a,b]}.$$

Alors  $I$  est une fonctionnelle bornée dans  $W_2^m[a, b]$  et  $W_2^m[a, b]$  est un espace à noyau reproduisant. ■

**Proposition 1.3** On note par  $R_m(x, y)$ ; un noyau reproduisant de  $W_2^m[a, b]$ . Alors

$$R_m(x, y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{2m} c_i(y) x^{i-1}, & x < y, \\ \sum_{i=1}^6 d_i(y) x^{i-1}, & x \geq y. \end{cases}$$

### Exemple de RKHSé

**Exemple 1.1** On considère l'espace de Hilbert  $H$

$$H = \left\{ f(\cdot) \mid f(\cdot) \text{ est absolument continu dans } [0, 1], f'(\cdot) \in L^2[0, 1], f(0) = 0 \right\}$$

muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_H = \int_0^1 f'(x)g'(x) dx,$$

$H$  est un RKHS et son noyau  $K$  est défini par

$$K(s,t) = \min(s,t)$$

en effet, on a, pour tout  $x \in [0, 1]$  et  $f \in H$

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - 0| = |f(x) - f(0)| \\ \left| \int_0^x f'(t) dt \right| &\leq \sqrt{x} \|f\|_H \end{aligned}$$

Et on a par définition, pour tout  $x \in [0, 1]$   $K(\cdot, x) = \min(\cdot, x) \in H$ . De plus

$$\begin{aligned} \langle f, K_x \rangle_H &= \int_0^1 f'(t) K'_x(t) dt \\ &= \int_0^x f'(t) dt = f(x) \end{aligned}$$

qui montre que  $K$  est le noyau associé à  $H$ .

# Chapitre 2

## Solution analytique et approchée

### 2.1 Position du problème

Le but de ce chapitre est de développer la méthode à noyau reproduisant dans l'espace de Hilbert pour fournir une solution approximative pour le problème aux limites du troisième ordre

Plus précisément, on considère l'équation différentielle du troisième ordre suivante :

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} U - \frac{\partial}{\partial t} \left( a(t) \frac{\partial}{\partial t} U \right) + \delta U(x, t) = F(x, t),$$

pour tout  $(x, t) \in Q = (0, 1) \times (0, 1)$ ,

à laquelle sont jointes les conditions initiales

$$\begin{aligned} U(0, t) &= \varphi(t), U(1, t) = \psi(t), U_x(1, t) = \xi(t) \\ U_x(x, 0) &= U_t(x, 1) = 0 \end{aligned}$$

telle que les conditions de compatibilité soient remplies

$$\begin{aligned}\varphi'(0) &= \psi'(0) = \xi'(0) = 0 \\ \varphi'(1) &= \psi'(1) = \xi'(1) = 0\end{aligned}$$

$a(t)$  et ses dérivées vérifient les conditions  $0 < a_0 \leq a(t) \leq a_1, |a'(t)| \leq a_2, t \in (0, 1) / a'(0) = a'(1)$ .

L'existence, l'unicité et la stabilité de la solution de notre problème sont discutées en [2].

Afin de mettre les conditions aux limites (2, 2) dans l'espace à noyau reproduisant  $H_{(4,3)}$  qui sera construit dans les sections suivantes, nous devons homogénéiser ces conditions, pour cela, on pose

$$u(x, t) = U(x, t) - (x^2 - 2x + 1)\varphi(t) - x(2 - x)\psi(t) - x(x - 1)\xi(t),$$

alors le problème (2, 1) – (2, 2) peut être écrit comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^3}{\partial x^3} u - \frac{\partial}{\partial t} (a(t) \frac{\partial}{\partial t} u) + \delta u(x, t) = f(x, t) \\ u_t(x, 0) = u_t(x, 1) = 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, u_x(1, t) = 0. \end{array} \right. \quad (2,3)$$

Pour l'étude de ce problème, on introduit quelque espaces de Hilbert à noyau reproduisant, soit

$$H_4[0, 1] = \left\{ \begin{array}{l} u \mid u(x), u'(x), u''(x), u'''(x) \text{ sont des fonctions absolument continues} \\ u^{(4)} \in L^2[0, 1], u(0) = u(1) = u'(1) = 0 \end{array} \right\}$$

On note respectivement le produit scalaire et la norme correspondante de l'espace  $H_4[0, 1]$  par

$$\langle u(x), v(x) \rangle_{H_4} = u^{(2)}(0)v^{(2)}(0) + u^{(3)}(0)v^{(3)}(0) + \int_0^1 u^{(4)}(x)v^{(4)}(x) dx$$

$$\| u(x) \|_{H_4} = \sqrt{\langle u(x), u(x) \rangle_{H_4}}, u(x), v(x) \in H_4[0, 1]$$

On donne le résultat suivant.

**Lemme 2.1** [3]  $H_4[0, 1]$  est un espace de Hilbert à noyau reproduisant, autrement dit, pour chaque  $x \in [0, 1]$ , il existe  $R_x \in H_4[0, 1]$ , telle que  $\langle u, R_x \rangle_{H_4} = u(x)$  pour tout  $u \in H_4[0, 1]$ , le noyau reproduisant est donné par

$$R_x(y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^8 C_i(x) y^{i-1}, & y \leq x, \\ \sum_{i=1}^8 D_i(x) y^{i-1}, & y > x, \end{cases} \quad (2.4)$$

où

$$C_1 = -x^2/5040, C_2 = D_2 = 1741x/70272 - 181x^2/3904 + 307x^2/17568 + 307x^4/70272 + 181x^5/234240 + 253x^7/70272, D_1 = 0,$$

$$C_3 = D_3 = -181x/3904 + 173x^2/1952 - 35x^3/976 - 35x^4/3904 - 173x^5/117120 - x^7/7808,$$

$$C_4 = D_4 = -307x^5/17568 + 35x^2/976 - 29x^3/1464 - 29x^4/5856 - 7x^5/11712 + x^7/35136,$$

$$C_5 = D_5 = -307x/70272 + 35x^2/3904 + 35x^3/17568 + 35x^4/70272 - 7x^5/46848 + x^7/468480,$$

$$C_6 = D_6 = -181x/234240 - 21x^2/7808 - 7x^3/11712 - 7x^4/46848 + 7x^5/156160 - x^7/468480,$$

$$C_7 = -x/720, D_7 = 0, C_8 = 253x/702720 - x^2/7808 - x^3/35136 - x^4/140544 + x^5/468480 - x^7/9838080,$$

$$D_8 = -1/5040 + C_8,$$

**Preuve.** Grâce à plusieurs intégrations par parties de  $\int_0^1 u^{(4)}(y) R_x^4(y) dy$  on trouve

$$\begin{aligned} \langle u(y), R_x(y) \rangle_{H_4} &= u^{(2)}(0) \partial_y^2 R_x(0) + u^{(3)}(0) \partial_y^3 R_x(0) \\ &\quad + \sum_{i=0}^3 (-1)^{4-i} u^{(i)}(0) \partial_x^{7-i} R_y(0) \\ &\quad + \sum_{i=0}^3 (-1)^{3-i} u^{(i)}(1) \partial_x^{7-i} R_y(1) \\ &\quad - \int_0^1 u(y) \partial_y^8 R_x(y) dy \end{aligned}$$

Comme  $u(y) \in H_4[0, 1]$ , alors on a  $u(0) = u(1) = u'(1) = 0$ , ce qui implique

$$\begin{aligned}
\langle u(y), R_x(y) \rangle_{H_4} &= u^{(2)}(0) \partial_y^2 R_x(0) + u^{(3)}(0) \partial_x^3 R_x(0) \\
&+ \sum_{i=1}^3 (-1)^{4-i} u^{(i)}(0) \partial_y^{7-i} R_x(0) \\
&+ \sum_{i=2}^3 (-1)^{3-i} u^{(i)}(1) \partial_y^{7-i} R_x(1) \\
&- \int_0^1 u(y) \partial_y^8 R_x(y) dy,
\end{aligned}$$

en vertu de  $\langle u, R_x \rangle_{H_4} = u(x)$  et (2.5) il résulte que  $R_x(y)$  est la solution de l'équation différentielle suivant

$$\partial_y^8 R_x(y) = \delta(x - y), \quad (2.5)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned}
\partial_y^3 R_x(0) - \partial_y^4 R_x(0) &= 0, \\
\partial_y^2 R_x(0) + \partial_y^5 R_x(0) &= 0, \\
\partial_y^6 R_x(0) &= \partial_y^4 R_x(1) = \partial_y^5 R_x(1) = 0,
\end{aligned} \quad (2.6)$$

comme  $x \neq y$  alors la forme générale de l'équation

$$\partial_y^8 R_x(y) = \delta(x - y)$$

est

$$R_x(y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^8 C_i(x) y^{i-1}, & y \leq x, \\ \sum_{i=1}^8 D_i(x) y^{i-1}, & y > x, \end{cases} \quad (2.7)$$



comme  $\partial_y^8 R_x(y) = \delta(x - y)$ , alors on a

$$\begin{aligned} \partial_y^i R_x(x+0) &= \partial_y^i R_x(x-0), \\ i &= 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Intégrant (2.8) pour  $i = 6$  par rapport à  $y$  de  $(x - \epsilon)$  à  $(x + \epsilon)$  et par passage à la limite lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , on obtient

$$\partial_y^7 R_x(x+0) - \partial_y^7 R_x(x-0) = -1, \quad (2.9)$$

de plus, compte tenu de  $R_x(y) \in H_4[0, 1]$ , on a

$$R_x(0) = 0, R_x(1) = 0, \partial_y^1 R_x(1) = 0. \quad (2.10)$$

A l'aide des égalités (2.8) – (2.10), on peut trouver les coefficients inconnus de (2.7).

**Définition 2.1** [3] *On défini l'espace*

$$H_3[0, 1] = \left\{ \begin{array}{l} u \mid u(t), u'(t), u''(t), \text{ sont des fonctions absolument continues sur } [0, 1] \\ u^{(3)} \in L^2[0, 1], u'(0) = u'(1) = 0 \end{array} \right\}$$

le produit scalaire et la norme dans  $H_3[0, 1]$  sont définis respectivement par

$$\begin{aligned} \langle u(t), v(t) \rangle_{H_3} &= \sum_{i=0}^2 u^{(i)}(0) v^{(i)}(0) + \int_0^1 u^{(3)}(t) v^{(3)}(t) dt \\ \| u(t) \|_{H_3} &= \sqrt{\langle u(t), u(t) \rangle_{H_3}}, u(t), v(t) \in H_3[0, 1] \end{aligned}$$

$H_3 [0, 1]$  est un espace à noyau reproduisant et son noyau est dénoté par

$$G_s(t) = \begin{cases} \frac{1}{768}s^4(-32t + 12t^2 + 4t^3 - t^4) + s^2\left(\frac{t^2}{16} - \frac{t^3}{16} + \frac{t^4}{64}\right) \\ \quad + s^3\left(\frac{t^2}{48} - \frac{t^3}{48} - \frac{t^4}{192}\right) + 1 + \frac{s^5}{120}, s \leq t, \\ s^3\left(\frac{t^2}{48} - \frac{t^3}{48} + \frac{t^4}{48} + \frac{t^4}{192}\right) + \frac{1}{768}s^4(-32t + 12t^2 + 4t^2 - t^4) \\ \quad - \frac{1}{24}st^4 + s^2\left(\frac{t^2}{16} - \frac{t^3}{16} + \frac{t^4}{64}\right) + 1 + \frac{t^5}{120}, t < s, \end{cases}$$

**Définition 2.2** [3] on définit l'espace

$$H_{(4,3)}(Q) = \left\{ \begin{array}{l} u(x, t) \mid \frac{\partial^5 u}{\partial^3 x \partial^2 t} \text{ est une fonction absolument continue sur } Q \\ \frac{\partial^7 u}{\partial^4 x \partial^3 t} \in L^2[Q], \frac{\partial u(x,1)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,0)}{\partial x} = 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0 \end{array} \right\}$$

le produit scalaire et la norme qui sont définis respectivement par

$$\begin{aligned} \langle u(x, t), v(x, t) \rangle_{H(4,3)} &= \sum_{i=0}^2 \left( \int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial t^3} \frac{\partial^i}{\partial t^i} u(0, t) \times \frac{\partial^3}{\partial t^3} \frac{\partial^i}{\partial t^i} v(0, t) dt \right. \\ &\quad + \int_0^1 \frac{\partial^4}{\partial t^4} \frac{\partial^i}{\partial t^i} u(x, 0) \times \frac{\partial^4}{\partial t^4} \frac{\partial^i}{\partial t^i} v(x, 0) dx \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^i}{\partial t^i} u(0, 0) \times \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^i}{\partial t^i} v(0, 0) \right) \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^4}{\partial t^4} \frac{\partial^3}{\partial t^3} u(x, t) \times \frac{\partial^3}{\partial t^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} v(x, t) dt dx \\ \|u\|_{H(4,3)} &= \sqrt{\langle u(x, t), u(x, t) \rangle_{H(4,3)}}, u \in H_{(4,3)}(Q), \end{aligned}$$

**Lemme 2.2** [13].  $H_{(4,3)}(Q)$  est un espace à noyau reproduisant dont le noyau  $K_{(y,s)}(x, t)$  est donné par

$$K(y, s)(x, t) = R_y(x) G_s(t)$$

pour tout  $(x, t) \in Q$  et on a

$$u(y, s) = \langle u(x, t), K(y, s)(x, t) \rangle_{H(4,3)}$$

**Définition 2.3** [13]. on définit l'espace de Hilbert à noyau reproduisant  $H [0, 1]$

$$H_1 [0, 1] = \left\{ \begin{array}{l} u \mid u(x) \text{ est absolument continue sur } [0, 1] \\ u'(0) \in L^2 [0, 1] \end{array} \right\}$$

le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H_1} = u(0)v(0) + \int_0^1 u'(x)v'(x) dx$$

et la norme

$$\|u\|_{H_1} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{H_1}}, u, v \in H_1 [0, 1],$$

**Définition 2.4** [13]. on définit l'espace

$$\hat{H}(Q) = \left\{ \begin{array}{l} u \mid u(x, t) \text{ est absolument continue sur } Q \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \in L^2(Q) \end{array} \right\}$$

le produit scalaire et la norme dans  $\hat{H}_{(1,1)}(Q)$  sont définis respectivement par

$$\begin{aligned} \langle u(x, t), v(x, t) \rangle_{\hat{H}} &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} u(o, t) \frac{\partial}{\partial t} v(0, t) dt \\ &+ \langle u(x, 0), v(x, 0) \rangle_{H_1} \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) dt dx \end{aligned}$$

$$\|u\|_{\hat{H}_1} = \sqrt{\langle u(x, t), u(x, t) \rangle_{\hat{H}}}, u \in \hat{H}(Q)$$

**Définition 2.5** [13].  $\hat{H}_{(1,1)}(Q)$  est un espace à noyau reproduisant, ainsi, son noyau reproduisant est

$$\check{R}_{(y,s)}(x, t) = \check{R}_y(x) \check{R}_s(t)$$

où

$$\check{R}_y(x) = \begin{cases} 1 + y, y \preceq x \\ 1 + x, x \prec y \end{cases}$$

■

## 2.2 La solution exacte et approchée

On définit l'opérateur différentiel  $L: H_{(4,3)}(Q) \rightarrow \hat{H}(Q)$  par

$$Lu(x, t) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - a(t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.11)$$

alors l'équation (2.3) peut être convertie sous la forme équivalente suivant dans  $H_{(4,3)}(Q)$

$$(Lu)(x, t) = F(x, t, u(x, t), u_t(x, t)) \quad (2.12)$$

où

$$\begin{aligned} F(x, t, u(x, t), u_t(x, t)) &= f(x, t) - \delta u(x, t) + a_t(t) u_t(x, t) + x(2-x)a(t)\psi_2^{(2)}(t) \\ &\quad + x(x-1)a(t)\psi^{(2)}(t) + (x^2 - 2x + 1)a(t)\xi^{(2)}(t) \end{aligned}$$

telle que

$$u(x, t) \in H_{(4,3)}(Q), F(x, t, u(x, t), u_t(x, t)) \in \hat{H}(Q)$$

il est facile de montrer que  $L$  est un opérateur linéaire borné de  $H_{(4,3)}(Q)$  vers  $\hat{H}(Q)$  en effet

$$\begin{aligned} \|Lu\|_{\hat{H}(1,1)}^2 &= \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|_{\hat{H}}^2 \\ &\leq \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|_{\hat{H}}^2 + \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right\|_{\hat{H}}^2 \end{aligned}$$

d'une autre part, on a

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \langle u(y, s), R_y(x) G_s(t) \rangle_{H(4,3)} \\ u_{tt}(x, t) &= \left\langle u(y, s), R_y(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} G_s(t) \right\rangle_{h_{4,3}} \\ u_{xxx}(x, t) &= \left\langle u(y, s), G_s(t) \frac{\partial^3}{\partial x^3} R_y(x) \right\rangle_{h_{4,3}} \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} |u_{tt}(x, t)| &\leq \|u\|_{H(4,3)} \left\| \frac{\partial^2}{\partial t^2} G_s(t) \right\|_{H_1} \|R_y(x)\|_{H_4} \\ |u_{xxx}(x, t)| &\leq \|u\|_{H(4,3)} \left\| \frac{\partial^3}{\partial x^3} R_y(x) \right\|_{H_1} \|G_s(t)\|_{H_3} \end{aligned}$$

d'après la continuité de  $R_y(x)$ ,  $G_s(t)$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} G_s(t)$ , et  $\frac{\partial^3}{\partial x^3} R_y(x)$ , il résulte que

$$\|R_y(x)\|_{H_4} \leq M_1, \|G_s(t)\|_{H_3} \leq M_2$$

$$\left\| \frac{\partial^3}{\partial x^3} R_y(x) \right\|_{H_1} \leq M_3, \left\| \frac{\partial^2}{\partial t^2} G_s(t) \right\|_{H_1} \leq M_4$$

ces dernières estimations impliquent

$$\|Lu\|_{\hat{H}(1,1)}^2 = M \|u\|_{H(4,3)}^2$$

où

$$M = a_1^2 M_1^2 M_4^2 + M_2^2 M_3^2.$$

Soit  $S = \{(x_1, t_1), (x_2, t_2), \dots\}$  un sous ensemble dénombrable dans  $Q$ , donc on définit

$$\begin{aligned} \varphi_i(x, t) &= \check{R}(x_i, t_i)(x, t) \\ \omega_i(x, t) &= L^* \varphi_i(x, t) \end{aligned} \tag{2.13}$$

**Lemme 2.3** [3] .Si  $S$  est dense dans  $Q$ , alors  $\{\omega_i(x, t)\}_{i=1}^{\infty}$  est un système complet dans  $H_{(4,3)}(Q)$ , tel que

$$\omega_i(x, t) = (L(y, s) K(y, s)(x, t)) / (y, s) = (x_i, t_i).$$

En appliquant le procédé de Gram-schmidt, on obtient une base orthogonale  $\{\varpi_i(x, t)\}_{i=1}^{\infty}$  dans  $H_{(4,3)}(Q)$

tel que

$$\varpi_i(x, t) = \sum_{j=1}^i B_{ij} \omega_j(x, t) \quad (2.14)$$

où  $\beta_{ij}$  sont les coefficients d'orthogonalité définis comme suit

$$\beta_{11} = 1/\|\omega_1\|, \beta_{ii} = 1/d_i,$$

et pour  $k < i$ , on a

$$\beta_{ik} = -(1/d_i) \sum_{j=k}^{i-1} c_{ij} \beta_{jk},$$

où  $d_i = \sqrt{\|\omega_i\|^2 - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}^2}$ ,  $c_{ij} = \langle \omega_i, \varpi_j \rangle_{H_{(4,3)}}$ .

**Lemme 2.4** [3]. Si  $S$  est dense dans  $Q$ , alors, la solution exacte de l'équation (2.12) est

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^i B_{ij} F(x_j, t_j, u(x_j, t_j), u_t(x_j, t_j)) \varpi_i(x, t) \quad (2.15)$$

*Preuve.*

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle u(x, t), \varpi_i(x, t) \rangle_{H(4,3)} \varpi_i(x, t), \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^i B_{ij} \langle u(x, t), \omega_j(x, t) \rangle_{H(4,3)} \varpi_i(x, t), \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^i B_{ij} \langle u(x, t), L^* \varphi_j(x, t) \rangle_{H(4,3)} \varpi_i(x, t), \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^i B_{ij} \langle L u(x, t), \varphi_j(x, t) \rangle_{\hat{H}(Q)} \varpi_i(x, t), \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^i B_{ij} \langle L u(x, t), \check{R}(x_i.t_i)(x, t) \rangle_{\hat{H}(Q)} \varpi_i(x, t), \\
&\quad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^i B_{ij} (Lu)(x_i.t_i) \varpi_i(x, t),
\end{aligned}$$

alors

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^i B_{ij} F(x_j, t_j, u(x_j, t_j), u_t(x_j, t_j)) \varpi_i(x, t).$$

■

## 2.2.1 Méthode itérative et théoreme de convergence

On donne la fonction initiale  $u_0(x, t)$ , et on construit une séquence itérative

$$u_n(x, t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^i B_{ij} F(x_j, t_j, u_{n-1}(x_j, t_j), (u_{n-1})_t(x_j, t_j)) \varpi_i(x, t).$$

Maintenant, la solution approchée peut être obtenue en prenant un nombre fini de termes dans la représentation de série de  $u_n(x, t)$ ; ainsi

$$u_n(x, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i B_{ij} F(x_j, t_j, u_{n-1}(x_j, t_j), (u_{n-1})_t(x_j, t_j)) \varpi_i(x, t). \quad (2.1)$$

**Lemme 2.5** [3]. si  $u_n(x, t)$  est donné par (2, 1), alors

$$(Lu_n)(x, t) = F(x, t, u_{n-1}(x, t), (u_{n-1})_t(x, t))$$

**Théorème 2.1** [3]. si  $C \|L^{-1}\| \leq 1$ ,  $|a_t(t)| \leq a_1$ , alors  $u_n \rightarrow u$  quand  $(n \rightarrow +\infty)$ .

*Preuve.* D'après le théorème précédent, on a

$$(Lu_n)(x, t) = F(x, t, u_{n-1}(x, t), (u_{n-1})_t(x, t))$$

donc

$$\begin{aligned} & \| u_n(x, t) - u(x, t) \|_{H(4,3)} \\ & \| L^{-1}(F(x, t, u_{n-1}, (u_{n-1})_t) - F(x, t, u, u_t)) \|_{H(4,3)} \\ & \leq \| L^{-1} \| \| F(x, t, u_{n-1}, (u_{n-1})_t) - F(x, t, u, u_t) \|_{\hat{H}(1,1)} \\ & \leq \| L^{-1} \| \| -\delta u_{n-1} + a_t(t)(u_{n-1})_t + \delta u - a_t(t)u_t \|_{H(4,3)} \\ & \leq \| L^{-1} \| (\delta \| u - u_{n-1} \|_{H(4,3)} + |a_t(t)| \| (u_{n-1})_t - u_t \|_{H(4,3)}) \\ & \leq C \| L^{-1} \| (\| u - u_{n-1} \|_{H(4,3)} + \| (u_{n-1})_t - u_t \|_{H(4,3)}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

où  $C = \max(\delta, a_2)$ , De  $C \|L^{-1}\| \leq 1$  et (2, 2), et par récurrence on en déduit que

$$\| u_n(x, t) - u(x, t) \|_{H(4,3)} \rightarrow 0$$

**Proposition 2.1** on suppose que  $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|} u$  dans  $H(4,3)$ , lorsque  $(n \rightarrow \infty)$ , alors

$$\left| \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial t^j} u(x, t) - \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial t^j} u(x, t) \right| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, i, j = 0, 1, 2, 3.$$

■



**Preuve.** Pour chaque  $(x, t) \in (Q)$ , on a

$$\begin{aligned}
|u(x, t) - u_n(x, t)| &= \langle u(y, s) - u_n(y, s), K_{(y,s)}(x, t) \rangle_{H(4,3)} \\
&\leq \|u(y, s) - u_n(y, s)\|_{H(4,3)} \|K_{(y,s)}(x, t)\|_{H(4,3)} \\
&\leq C_1 \|u(y, s) - u_n(y, s)\|_{H(4,3)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
|u_x(x, t) - (u_n)_x(x, t)| &= \left\langle u(y, s) - (u_n)(y, s), \frac{\partial}{\partial x} R_y(x) G_s(t) \right\rangle_{H(4,3)} \\
&\leq \|u(y, s) - u_n(y, s)\|_{H(4,3)} \left\| \frac{\partial}{\partial x} R_y(x) \right\|_{H_1} \|G_s(t)\|_{H'_3} \\
&\leq C_2 \|u(y, s) - u_n(y, s)\|_{H(4,3)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

de la même manière, on trouve

$$\begin{aligned}
|u_t(x, t) - (u_n)_t(x, t)| &\leq C_3 \|u(y, s) - u_n(y, s)\|_{H(4,3)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \\
|u_{xt}(x, t) - (u_n)_{xt}(x, t)| &\leq C_4 \|u(y, s) - u_n(y, s)\|_{H(4,3)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \\
|u_{xx}(x, t) - (u_n)_{xx}(x, t)| &\leq C_5 \|u(y, s) - u_n(y, s)\|_{H(4,3)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \\
|u_{tt}(x, t) - (u_n)_{tt}(x, t)| &\leq C_6 \|u(y, s) - u_n(y, s)\|_{H(4,3)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \\
|u_{xxx}(x, t) - (u_n)_{xxx}(x, t)| &\leq C_7 \|u(y, s) - u_n(y, s)\|_{H(4,3)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \\
|u_{xxt}(x, t) - (u_n)_{xxt}(x, t)| &\leq C_8 \|u(y, s) - u_n(y, s)\|_{H(4,3)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

où  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$  sont des constantes positives. ■

# Chapitre 3

## Application numérique

Pour montrer l'efficacité de la méthode proposée, on traite deux exemples, les solutions numériques obtenues à partir de cette méthode sont comparées aux solutions exactes.

Pour calculer la solution approchée on pose

$$\begin{aligned}(x_i, t_i) &= (j/N, k/M), j = 0, 1, \dots, N, k = 0, 1, \dots, M, i = 0, 1, \dots, m = N \times M \\ e_{n,m}(x, t) &= |u(x, t) - u_{n,m}(x, t)|,\end{aligned}$$

**Exemple 3.1** *Considérons*

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{xxx}(x, t) - t U_{tt}(x, t) - U_t(x, t) - U(x, t) = F(x, t) \\ U(0, t) = 0, U(1, t) = 1/6 e^{t^2(1-t)^2}, U_x(1, t) = 1/6 e^{t^2(1-t)^2}, \\ U_t(x, 0) = 0, U_t(x, 1) = 0, \end{array} \right.$$

où

$$\begin{aligned} F(x, t) &= 1/6 e^{t^2(1-t)^2} ((-1 + 4t - 18t^2 + 20t^3 - 24t^4 + 52t^5 - 48t^6 + 16t^7) \\ &\quad \times (2x^4 - 3x^3) + 18 - 48x) \end{aligned}$$

La solution exacte est donnée par  $U(x, t) = (x^3/2 - x^4/3 - x/6) e^{t^2(1-t)^2}$ . Pour homogénéiser la condition initiale nous mettons  $u(x, t) = U(x, t) - x/6 e^{t^2(1-t)^2}$ , alors

$$u_{xxx}(x, t) - t u_{tt}(x, t) - u_t(x, t) - u(x, t) = f(x, t),$$

où

$$\begin{aligned} f(x, t) = & 1/6 \left[ 18 + (-49 + 4t - 18t^2 + 20t^3 - 24t^4 + 52t^5 - 48t^6 + 16t^7) x \right. \\ & + (-1 + 4t - 18t^2 + 20t^3 - 24t^4 + 52t^5 - 48t^6 + 16t^7) \\ & \left. (2x^4 - 3x^3) \right] e^{t^2(1-t)^2} \end{aligned}$$

les résultats numériques aux quelques noeuds sélectionnés pour  $n = 11, 25$  et  $m = 25$  sont donnés par le tableau 1; Fig. 1, Fig. 2, Fig. 3, Fig. 4.

Tableau 1 : Comparaison des résultats de l'exemple 3.1, ( $n = 11, 25$ ) et  $m = 25$

$(x_i, t_i)$	$u(x_i, t_i)$	$(u_{11,25})(x_i, t_i)$	$e_{11,25}(x_i, t_i)$	$(u_{25,25})(x_i, t_i)$	$e_{25,25}(x_i, t_i)$
(0.01, 0.00)	-0.00166617	-0.000528164	0.00113801	-0.00166617	$2.41936*10^{-13}$
(0.10, 0.15)	-0.0164655	-0.00564694	0.0108186	-0.016423	0.0000425001
(0.15, 0.10)	-0.0236722	-0.00891318	0.014759	-0.0236368	0.0000354556
(0.35, 0.20)	-0.0429844	-0.0165564	0.0264279	-0.042873	0.000111365
(0.25, 0.45)	-0.0373771	-0.0116428	0.0257343	-0.0372975	0.0000796333
(0.50, 0.45)	-0.0442988	-0.0142367	0.0300621	-0.044234	0.0000648266
(0.60, 0.65)	-0.0370698	-0.0103444	0.0267254	-0.0370634	$6.34791*10^{-6}$
(0.75, 0.7)	-0.0204119	-0.00520635	0.0152055	-0.0204191	$7.24279*10^{-6}$
(0.80, 0.75)	-0.0143628	-0.00354061	0.0108222	-0.0143717	$8.89467*10^{-6}$
(0.99, 0.99)	-0.0000491748	-0.0000106722	0.0000385026	-0.0000491967	$2.18707*10^{-8}$

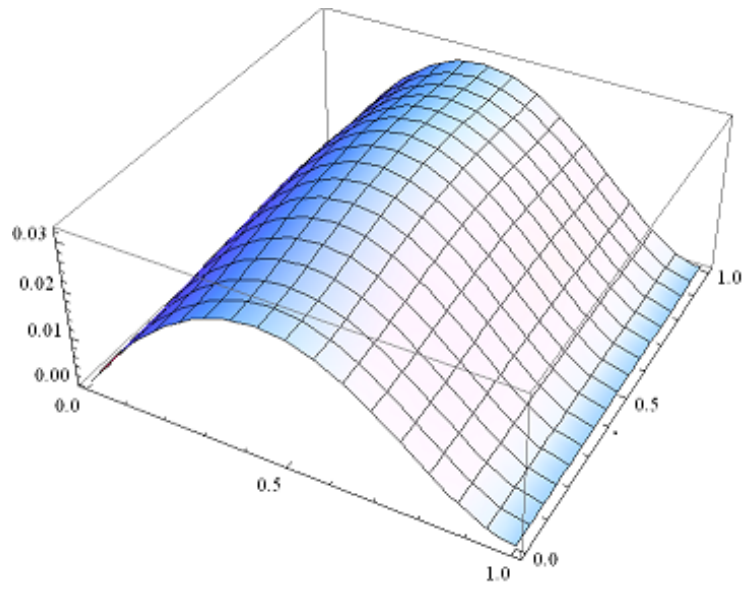


Fig.1.  $e_{11,25}(x,t) = |u(x,t) - u_{11,25}(x,t)|$

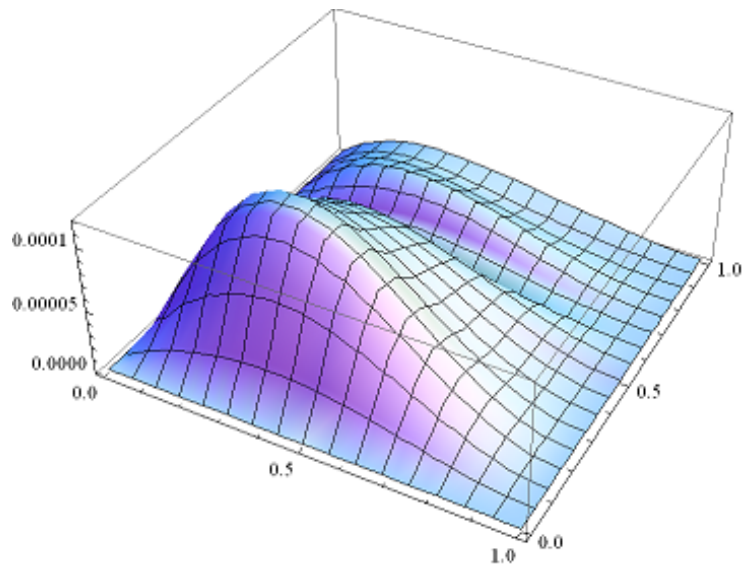
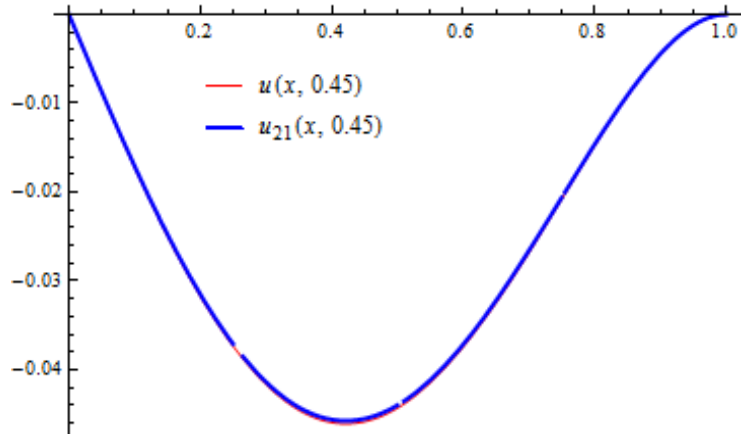


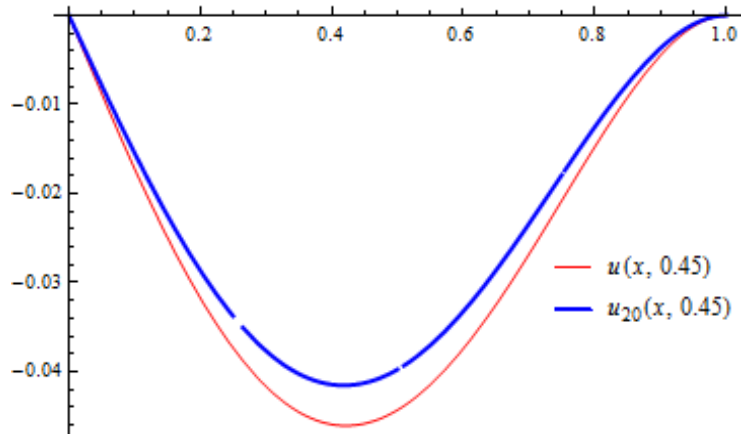
Fig.2.  $e_{25,25}(x,t) = |u(x,t) - u_{25,25}(x,t)|$

Maintenant, on fixe  $t = 0.45$ , on obtient



*Fig.3.*

Fig.3. Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour l'exemple 3.1 ( $n = 21, m = 25, t = 0.45$ )



*Fig.4.*

Fig.4. Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour l'exemple 3.1 ( $n = 20, m = 25, t = 0.45$ )

**Exemple 3.2 .** *Considérons*

$$\begin{aligned}
 u_{xxx}(x, t) - (t + 1) u_{tt}(x, t) - u_t(x, t) + u(x, t) &= f(x, t), \\
 u(0, t) &= 0, u(1, t) = 0, u_x(1, t) = 0, \\
 u_t(x, 0) &= 0, u_t(x, 1) = 0,
 \end{aligned}$$

*pour tout*  $(x, t) \in Q = [0, 1] \times [0, 1]$ , où

$$\begin{aligned}
 f(x, t) &= \frac{1}{2}(-e^x + (1 - x)^2 + xe)2(1 + t)e^t \\
 &\quad -1 + 6t - t^2 + e(-2 - 4t + t^2) \\
 &\quad - \frac{1}{2}(-2e^t + (1 - t)^2 + et^2)e^x.
 \end{aligned}$$

*La solution exacte est donnée par*  $u(x, t) = \frac{1}{2} (-2e^t + (1 - t)^2 + e t^2)(-e^x + (1 - x)^2 + x e)$ , *les résultats numériques aux quelques noeuds sélectionnés pour*  $n = 11, 25$  *et*  $m = 25$  *sont donnés par le tableau 2, Fig. 4, Fig. 5 , Fig. 6.*

Tableau 2 : Comparaison des résultats de l'exemple 3.2, ( $n = 9, 25$ ) et  $m = 25$

$(x_i, t_i)$	$u(x_i, t_i)$	$(u_{9,25})(x_i, t_i)$	$e_{9,25}(x_i, t_i)$	$(u_{22,25})(x_i, t_i)$	$e_{22,25}(x_i, t_i)$
(0.01, 0.00)	0.00415102	0.00302248	0.00112855	0.00416952	0.0000184985
(0.10, 0.15)	0.0348391	0.0249128	0.00992634	0.0350123	0.00017316
(0.15, 0.10)	0.0472799	0.0334371	0.0138428	0.0475083	0.000228419
(0.35, 0.20)	0.0671678	0.0452082	0.0219597	0.0675208	0.000352949
(0.25, 0.45)	0.0605971	0.0417747	0.0188223	0.0610012	0.000404116
(0.50, 0.45)	0.0571673	0.0260705	0.0310968	0.0575495	0.000382122
(0.60, 0.65)	0.0436891	0.0274247	0.0162644	0.0440447	0.000355572
(0.75, 0.7)	0.02199	0.0132544	0.00873562	0.0221793	0.00018928
(0.80, 0.75)	0.0151041	0.00897844	0.00612566	0.0152408	0.0001367
(0.99, 0.99)	0.0000481998	0.0000272136	0.0000209863	0.0000486821	$4.82272 \times 10^{-7}$

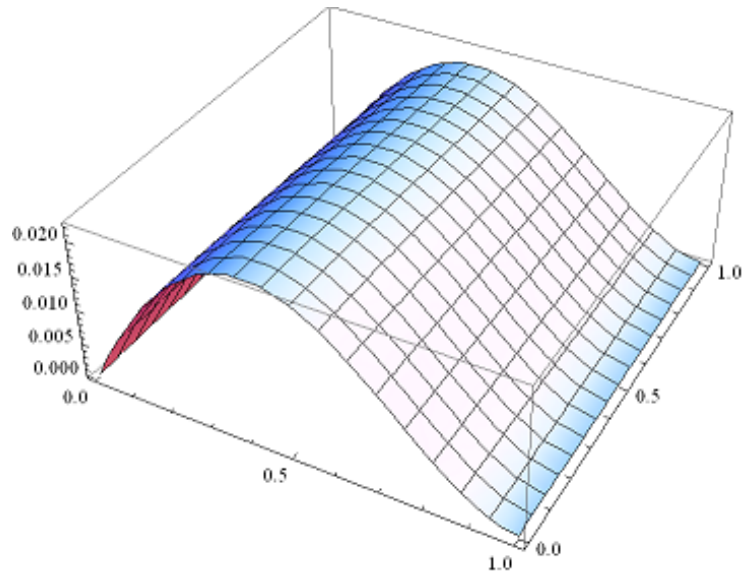
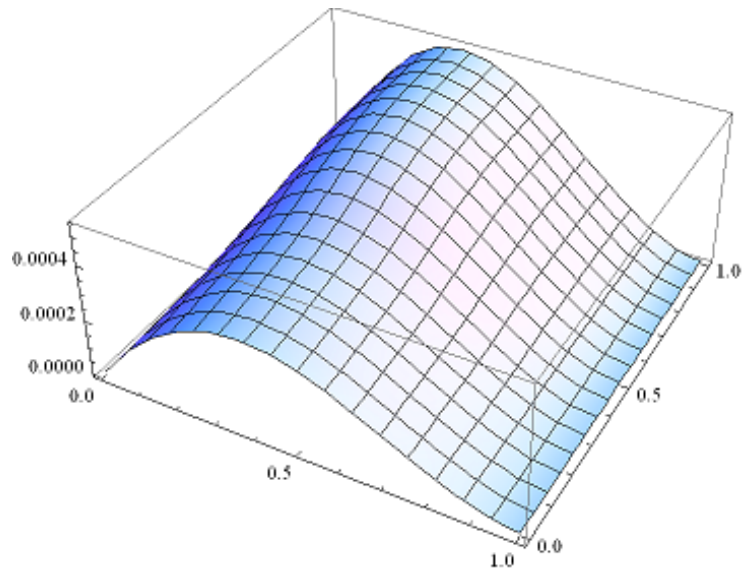


Fig.5.  $e_{9,25}(x, t) = |u(x, t) - u_{9,25}(x, t)|$



$$\text{Fig.6. } e_{20}^{25}(x, t) = |u(x, t) - u_{20}^{25}(x, t)|$$

Maintenant, on fixe  $t = 0.25$ , on obtient

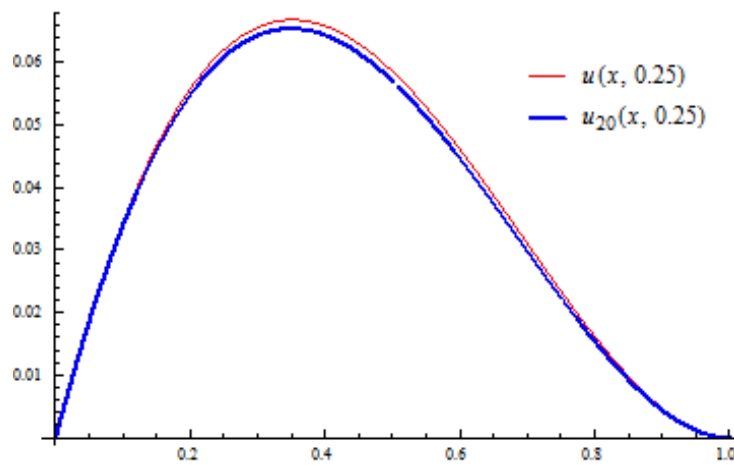


Fig.7.

Fig.7. Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour l'exemple 3.2 ( $n = 20$ ,  $m = 25$ ,  $t = 0.25$ ).



**Conclusion 3.1** *dans ce mémoire on a appliqué la méthode de [RKHSM] pour résoudre une équation différentielle du troisième ordre dans un domaine rectangulaire, les résultats numérique ont montré que seul un petit nombre d'itération peut être utilisé pour obtenir des résultats numériques avec une bonne précision. On constate que les erreurs absolues sont diminués de façon monotone si  $n$  augment. Les exemples numériques montrent que la solution approchée convergent vers la solution exacte . Par conséquent, nous confirmons que cette méthode est efficace pour ce type de problème, tous les calculs on été effectués en utilisant Mathematica.9.0*

# Bibliographie

- [1] N. ARONSAJN : *Theory of reproducing kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. 68 (1950) 337–404.
- [2] A. ASHYRALYEV, KH. BELAKROUM, A. GUEZANE-LAKOUD : *Stability of Boundary Value Problems for third-order partial differential equations*,, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2017 (2017), No. 53, pp. 1-11.
- [3] N. BENDJAZIA, A. GUEZANE-LAKOUD & R. KHALDI : *On Third-Order Boundary Value Problems with Multiple Characteristics*,, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Vol. 2019 (2019), pp. 1-18.
- [4] A. Berlinet and, C. Thomas-Agnan, *Reproducing Kernel Hilbert Space in Probability and Statistics*, Kluwer Academic Publishers ,2004.
- [5] Cui. M, Zhongxing Deng, *The optimal approximation operator in space  $W_{1,2}[a, b]$* , Journal of Computational Mathematics, 8 :2(1986)209-216 (in Chinese).
- [6] M. Cui and Y. Lin, *Nonlinear Numerical Analysis in the Reproducing Kernel Space*, Nova Science Publisher, New York, 2008.
- [7] A. Daniel, *Reproducing Kernel Spaces and Applications*, Springer, 2003. A.
- [8] Geng, F. : *Iterative reproducing kernel method for a beam equation with third-order nonlinear boundary conditions*. Math. Sci. 6, 1 (2012)
- [9] Ghazala, A., Tehseen, M., Siddiqi, S.S. : *Solution of a linear third order multi-point boundary value problem using RKM*. Br. J. Math. Comput. Sci. 3(2), 180–194 (2013)

- [10] J. Niu, P. Li, Numerical algorithm for the third-order partial differential equation with three-point boundary value problem, *Abstract and Applied Analysis*, 45 (2014),1-7. DOI :10.1155/2014/630671.
- [11] Moradi, E., Yusefi, A., Abdollahzadeh, A., Tila, E. : New implementation of reproducing kernel Hilbert
- [12] space method for solving a class of third-order differential equations. *J. Math. Comput. Sci.* 12, 253–262 (2014)
- [13] Wu, B., Li, X. : Application of reproducing kernel method to third order three-point boundary value problems. *Appl. Math. Comput.* 217, 3425–3428 (2010)
- [14] Yao, H., Cui, M. : A new algorithm for a class of singular boundary value problems. *Appl.Math. Comput.* 186, 1183–1191 (2007)