République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par : **M^{elle} NASRI Ghada**

Intitulé

Existence et contrôlabilité trajectoire pour les équations différentielles fractionnaires ψ-Caputo

Dirigé par : Dr. KERBOUA Mourad

Devant le jury

PRESIDENT	**Pr. SEKRANI Samia**	**PR**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr. KERBOUA Mourad**	**MCA**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr. BOUHADJAR Slimane**	**MCB**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2023

Remerciements

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance.

Je tiens à remercier chaleureusement à mon encadreur de ce travail ***Dr. KERBOUA Mourad*** pour sa disponibilité, son dynamisme et sa gentillesse.

Je remercie ***Pr. SEKRANI Samia*** pour l'honneur qu'il m'a fait en président le jury de cette mémoire. Je remercie également le ***Dr. BOUHADJAR Slimane***, d'avoir accepté d'examiner ce travail et faire partie du jury, et je les en remercie sincèrement.

Je désire aussi remercier les professeurs qui m'ont fourni les outils nécessaires à la réussite de mes études universitaire.

Dédicace

Je dédie ce travail :

A mon cher père

Pour son aide et soutien et son patience, cette aventure n’aurait certainement pas existé sans vous.

A ma chère mère

En témoignage de mon éternelle reconnaissance, que Dieu vous protège et vous prête bonne sante et longue vie.

A mes frères et mes sœurs

Qui ont toujours su me motiver même dans les moments de doute. Un grand merci pour leur encouragement et leur soutien moral.

A tous les gens qui m’aiment

En témoignage de mon amour et de ma profonde admiration.

Table des matières

Résumé

Dans ce mémoire, nous présentons des résultats d'une étude concernant l'existence d'une solution Douce (Mild) et la contrôlabilité trajectoire (CT) d'un système non linéaire régi par des équations différentielles fractionnaires ψ-Caputo avec des conditions classiques et non locales respectivement. En basant sur le calcul ψ-fractionnaire, la théorie des semi-groupes des opérateurs linéaires, le principe du point fixe de Banach et l'inégalité de Gronwall pour montrer la contrôlabilité trajectoire du système considéré. Enfin, nous donnons deux exemples pour illustrer les applications de ces résultats.

Mots clés : Contrôlabilité trajectoire (CT), Dérivée fractionnaire de $\psi-$Caputo, Equation différentielle fractionnaire, Théorème du point fixe, C_0-semi-groupe, Inégalité de Gronwall.

Abstract

In this thesis, we present results of a study concerning the existence of a Mild solution and the trajectory controllability (TC) of a nonlinear system governed by ψ-Caputo fractional differential equations with classical conditions and nonlocal respectively. Based on the ψ-fractional calculus, the semigroup theory of linear operators, Banach's fixed point principle and Gronwall's inequality to show the trajectory controllability of the considered system. Finally, we give two examples to illustrate the applications of these results.

Keywords : Trajectory controllability (TC), Fractional derivative of ψ-Caputo, Fractional differential equation, Fixed point theorem, C_0-semigroup, Gronwall inequality.

ملخص

في هذه المذكـرة، نقـدم نتائج دراسـة تتعلق بوجود حـل معتـدل وإمكانية التحكـم في المسـار لنظام غير خطـي تحكمه معادلات تفاضلية جزئيـة **Ψ-كابـوتـو** ذات الشروط الكلاسيكية وغير المحلية على التوالـي. استنادًا إلى حساب التفاضل والتكامـل **Ψ**-جـزئي، ونظرية شبه المجموعة للمـؤثـرات الخطـية، ومبدأ النقطة الثابتة لبنـاخ و متراجحــة قرونوال لإظهار إمكانية التحكم في المسـار للنظام المدروس. أخيــرًا، نقدم مثالين لتوضيـح تطبيقـات هذه النتائـج.

.

الكلمـات المفتاحيــة : قابلية التحكم في المسار (ت م)، مشتق كسري لـ **Ψ**-كابوتو، معادلة تفاضلية كسرية، نظرية النقطة الثابتة، شبـه المجمـوعة C_0، متراجحـة قرونـوال.

Introduction

Le calcul fractionnaire et les équations différentielles sont devenus une branche importante des mathématiques appliquées. Cela est dû à de nombreux problèmes des domaines des sciences physiques, des sciences chimiques, des sciences biologiques, de la finance et du traitement d'image qui sont modélisés à l'aide d'opérateurs différentiels fractionnaires et donnent de meilleures approximations que ceux modélisés à l'aide d'opérateurs différentiels d'ordre entier [14, 17].
Actuellement, dans la littérature, plusieurs approches / définitions des intégrales fractionnaires et des dérivées sont disponibles, telles que la définition de Riemann Liouville, la définition de Caputo, Caputo – Hadamard, Hilfer. Cependant, il existe un autre type de dérivées fractionnaires qui apparaît dans la littérature a été introduit par ALMEIDA [3], qu'il a appelé opérateur fractionnaire ψ–Caputo.
De nombreux chercheurs se sont tournés vers l'existence et l'unicité des solutions pour les équations différentielles de ψ–Caputo soumises à diverses conditions aux limites [2, 4, 5].

Il existe différents concepts de contrôlabilité ; à savoir la contrôlabilité approchée (tout vecteur d'état peut être dirigé arbitrairement près d'un autre vecteur d'état), la contrôlabilité exacte (toute paire de vecteurs d'état peut être reliée par une trajectoire) et la contrôlabilité nulle (tout vecteur d'état peut être dirigé vers 0).
La contrôlabilité est l'une des propriétés qualitatives essentielles des systèmes dynamiques dans laquelle il faut trouver un contrôleur approprié pour le système qui dirige l'état du système d'un état initial arbitraire à l'état final souhaité. Les différents types de contrôlabilité des systèmes de dimension finie et infinie pour les fonctions (linéaires, non linéaires et semi-linéaires) à travers les concepts de la théorie des opérateurs peuvent être vus dans les monographies RUSSELL [18], BALACHANDRAN, MATAR, & TRUJILLO [6], SAKTHIVEL, MAHMUDOV, & NIETO [19] .
La contrôlabilité trajectoire (TC) consiste à trouver une fonction de contrôle pour le système qui oriente l'état initial vers l'état final souhaité du système via une trajectoire prescrite. Il existe de nombreux systèmes physiques en aérodynamique pour lesquels nous avons exigé la contrôlabilité de la trajectoire du système pour un meilleur rapport coût-efficacité. Par conséquent, la contrôlabilité de la trajectoire est plus forte que toute autre contrôlabilité. TC est étudié par de nombreux auteurs, voir MUSLIM, & GEORGE [15], Dhayal, Malik, & Abbas [8], GOVINDARAJ, & GEORGE [10].
L'objet de notre mémoire est de présenter les conditions suffisantes et appropiées pour l'existence et la contrôlabilité trajectoire (CT) de l'équation d'évolution fractionnaire ψ-Caputo avec des conditions classiques et non locales. Les résultats obtenués se basent sur le principe du point fixe de Banach et l'inégalité de Gronwall.
Le premier chapitre est consacré aux bases mathématiques du calcul $\psi-$fractionnaire, quelques notions essentielles en calcul $\psi-$fractionnaire seront introduits comme l'intégrale $\psi-$fractionnaire et les dérivées $\psi-$Caputo.
Dans **le deuxième chapitre** de ce mémoire nous présentons quelques éléments de base sur la théorie des semi-groupes et la notion du solution Mild (Douce), ainsi on fait rappel sur les transformations de Laplace et l'inégalité de Gronwall qui sont trés utils à la résolution des équations différentielles d'ordre $\psi-$fractionnaire.

Le troisième chapitre de ce mémoire est dédié au système gouverné par deux classes d'équations différentielles fractionnaires avec dérivées $\psi-$Caputo, une avec des conditions classiques et l'autre, avec des conditions non locales. Nous intéresserons ici, à la question de l'existence et la TC de ce système. Comme application, deux exemples sont données pour illustrer la théorie.

Chapitre 1

Opérateurs fractionnaires

1.1 Fonctions spéciales

1.1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma d'Euler est une fonction de base du calcul fractionnaire. Elle prolonge la fonction factorielle $n!$ à l'ensemble des nombres réelles où même complexe.

Définition 1.1. *La fonction Gamma est definie par l'integrale*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0 \tag{1.1}$$

ou parfois

$$\Gamma(x) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2} t^{2x-1} dt, \ \ x > 0$$

avec $\Gamma(1) = 1, \ \Gamma(0_+) = +\infty.$

Quelques propriétés sur la fonction Gamma

Soit $x \neq 0, \ n \in \mathbb{N}$, alors :

1. $\Gamma(n+1) = n!$
2. $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}, x \in \mathbb{R}.$
3. $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$
4. $\frac{d^n}{dx^n}\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} (\ln t)^n \, dt, \quad x > 0.$

De ce qui précède, nous pouvons obtenir :

a) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

b) $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$.

c) $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{-3}{2}+1)}{\frac{-3}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right)}{\frac{-3}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{-3}{2}\frac{-1}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$.

1.1.2 La fonction Bêta

Parmi les fonctions de base du calcul fractionnaire : la fonction Bêta. Cette fonction joue un rôle trés important spécialement dans une certaine combinaison avec la fonction Gamma.

Définition 1.2. *La fonction Bêta est donné par :*

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt,\ Re(x)>0,\ Re(y)>01.2 \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{2x-1}\cos(t)^{2y-1}\,dt. \end{aligned} \tag{1.1}$$

La fonction Bêta est liée a la fonction Gamma comme suit

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(y,x),\ Re(x)>0,\ Re(y)>0.$$

Quelques propriétés sur la fonction Bêta

Soient $Re(x)>0$ et $Re(y)>0$, alors :

1. $B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y)$.
2. $B(x,1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$.
3. $B(x,1) = \frac{1}{x}$.
4. $B(x,n) = \frac{(n-1)!}{x(x+1)...(x+n-1)},\ \ n\geq 1$.
5. $B(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!},\ \ m\geq 1$et $n\geq 1$.

1.2 Intégrales et dérivées fractionnaires

1.2.1 Intégrale d'ordre arbitraire

Soit $f:[a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue. b pouvant être fini ou infini.

Une primitive de f est donné par l'expression :

$$\left(I_a^1 f\right)(t) = \int_a^t f(\tau)\,d\tau,$$

pour une primitive second on aurra

$$\left(I_a^2 f\right)(t) = \int_a^t \left(\int_a^s f(t)\,dt\right) ds,$$

on utilisant le théoréme de fubini, on peut écrire :

$$\left(I_a^2 f\right)(t) = \int_a^t (t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau,$$

en itérant, on arrive a :

$$\left(I_a^n f\right)(t) = \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)\, d\tau.$$

1.2.2 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

L'approche de Riemann-Liouville relative à la définition de l'intégrale fractionnaire s'appuie sur la formule de Cauchy pour le calcul de l'intégrale répétée n fois qui est donnée par

$$I^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s)\, ds, \quad t > 0 \text{ et } n \in \mathbb{N}^*.$$

En généralisant cette formule à un ordre α réel positif et en remplaçant la fonction factorielle par la fonction Gamma on aurra la définition suivant :

Définition 1.3. [14] *L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ est formellement définie par :*

$$I_{0^+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds. \tag{1.3}$$

Propriétés de l'intégrale fractionnaire de R-L

1. L'opérateur d'intégration fractionnaire $I_{0_+}^{\alpha}$ est borné dans $L^p(\mathbb{R}^+)$, $(1 \leq p \leq +\infty)$ et on a

$$\left\| I_{0^+}^{\alpha} f \right\|_p \leq K \left\| f \right\|_p,$$

pour toute $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$.

2. Soit $\alpha, \beta > 0$, alors pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ on a

$$I_{0^+}^{\alpha} I_{0^+}^{\beta} f(t) = I_{0^+}^{\alpha+\beta} f(t) = I_{0^+}^{\beta} I_{0^+}^{\alpha} f(t),$$

pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+$.

3. Soit $\alpha > 1$, alors pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ on a

$$\frac{d}{dt}\left(I_{0^+}^{\alpha} f\right)(t) = \left(I_{0^+}^{\alpha-1} f\right)(t).$$

4. Soit $\alpha > 0$, alors pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ on a

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \left(I_{0^+}^{\alpha} f\right)(t) = f(t).$$

1.2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.4. [14] *Pour $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ est formellement définie par :*

$$\begin{aligned} {}^{L}D_{0^+}^{\alpha} f(t) &= D^n I_{0^+}^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)\, ds, \quad t \in \mathbb{R}_+, 1.4 \end{aligned} \tag{1.2}$$

où $D^n = \frac{d^n}{dt^n}$.

Remarques

- Pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coincide avec la dérivée ordinaire.
- En général, la dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville est ni nulle ni constante. A titre d'exemple si $\alpha > 0$ est non entier alors :

$${}^{L}D_{0^+}^{\alpha} C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

pout toute constante $C \in \mathbb{R}$.

1.3 Opérateurs ψ-fractionnaires

Nous commençons dans cette section par définir les intégrales et dérivées $\psi-$fractionnaires et donnant quelques résultats et propriétés pour ces opérateurs.

1.3.1 Intégrale fractionnaire $\psi-$Riemann-Liouville

Définition 1.5. [13] *Soit $J=[0,b]$ et $\alpha>0$, l'intégrale fractionnaire de ψ-Riemann-Liouville á gauche d'ordre α pour une fonction intégrable $f:J\to\mathbb{R}$ par rapport à une autre fonction $\psi:J\to\mathbb{R}$ qui est une fonction différentiable croissante tel que $\psi'(t)\neq 0$, pour tout $t\in J$ est définie par :*

$$I_{0^+}^{\alpha;\psi}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}f(s)\,ds, \tag{1.5}$$

oú Γ est la fonction Gamma.

Notons que l'équation (1.5) est réduite aux intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville lorsque $\psi(t)=t$.

Exemple

Considérons la fonction $f(t)=t^\beta$ et $\psi(t)=t$, $\psi'(t)=1$. Alors

$$I_{0^+}^{\alpha;t}t^\beta=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}s^\beta ds$$

En effectuant le changement $s=t\tau$, on obtient

$$\begin{aligned}
I_{0^+}^{\alpha;t}t^\beta &= \frac{t^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^\beta d\tau=\frac{t^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}B(\beta+1,\alpha)\\
&= \frac{t^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)}t^{\beta+\alpha}.
\end{aligned}$$

1.3.2 Dérivée fractionnaire $\psi-$Riemann-Liouville

Définition 1.6. [13] *Soit $n\in\mathbb{N}$ et soient $\psi,f\in C^n(J)$ deux fonctions telles que ψ est croissante et $\psi'(t)\neq 0$, pour tout $t\in J$. La dérivée fractionnaire de ψ-Riemann-Liouville à gauche d'une fonction f d'ordre α est définie par :*

$$\begin{aligned}
D_{0^+}^{\alpha;\psi}f(t) &= \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n I_{0^+}^{n-\alpha;\psi}f(t)\\
&= \frac{\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{n-\alpha-1}f(s)\,ds, 1.6
\end{aligned} \tag{1.3}$$

oú $n=[\alpha]+1$.

Exemple

Soit la fonction $f(t) = t^{\beta},\ \beta > -1, \psi\left(t\right) = t$ et $0 \leq n-1 < \alpha < n$, alors on a

$$D_{0^+}^{\alpha;t} t^{\beta} = \frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \left(t-s\right)^{n-\alpha-1} s^{\beta} ds$$

En effectuant le changement de variable $s = t\tau$, on aura :

$$\begin{aligned} D_{0^+}^{\alpha;t} t^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)} \frac{d^n}{dt^n} t^{n+\beta-\alpha} \int_0^1 \left(1-\tau\right)^{n-\alpha-1} \tau^{\beta} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)} \frac{d^n}{dt^n} t^{n+\beta-\alpha} B\left(\beta+1, n-\alpha\right) \\ &= \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(n+\beta-\alpha+1\right)} \frac{d^n}{dt^n} t^{n+\beta-\alpha} \end{aligned}$$

On sait que

$$\frac{d^n}{dt^n} t^{n+\beta-\alpha} = \left(\beta+n-\alpha\right)\left(\beta+n-\alpha-1\right) \ldots \left(\beta-\alpha+1\right) t^{\beta-\alpha}$$

par substitution et utilisons le fait que $\Gamma\left(z+1\right) = z\Gamma\left(z\right)$, on obtient :

$$D_{a^+}^{\alpha;t} t^{\beta} = \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\beta-\alpha+1\right)} t^{\beta-\alpha}.$$

1.3.3 Dérivée fractionnaire $\psi-$Caputo

Définition 1.7. [5] *Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $f, \psi \in C^n\left(J\right)$ deux fonctions telles que ψ est croissante et $\psi'\left(t\right) \neq 0$, pour tout $t \in J$. La dérivée fractionnaire ψ-Caputo à gauche de f d'ordre α est définie par :*

$$^{C}D_{0^+}^{\alpha;\psi} f\left(t\right) = I_{0^+}^{n-\alpha;\psi} \left(\frac{1}{\psi'\left(t\right)} \frac{d}{dt}\right)^n f\left(t\right), \tag{1.7}$$

oú $n = [\alpha]+1$ pour $\alpha \notin N,\ n = \alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{N}$.

Pour simplifier la notation, nous utilisérons le symbole abrégé
$f_{\psi}^{[n]}\left(t\right) = \left(\frac{1}{\psi'(t)} \frac{d}{dt}\right)^n f\left(t\right).$
D'aprés la définition, il est clair que :

$$^{c}D_{0^+}^{\alpha;\psi} f\left(t\right) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \psi'\left(s\right)\left(\psi\left(t\right)-\psi\left(s\right)\right)^{n-\alpha-1} f_{\psi}^{[n]}\left(s\right) ds & \text{si} \quad \alpha \notin \mathbb{N} \\ f_{\psi}^{[n]}\left(t\right) & \text{si} \quad \alpha \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{1.8}$$

Cette généralisation (1.8) donne l'opérateur de dérivée fractionnaire au sens de Caputo quand $\psi\left(t\right) = t$.

Remarque 1.1.

Si $f \in C^n(J)$, la dérivée fractionnaire $\psi-$Caputo d'ordre α de f est donnée par :

$$^C D_{0^+}^{\alpha;\psi} f(t) = D_{0^+}^{\alpha;\psi}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_\psi^{[k]} f(0)}{k!} (\psi(t) - \psi(0))^k\right].$$

Exemple

Soit la fonction $f(t) = t^\beta,\ \beta > n-1, \psi(t) = t$ et $0 \leq n-1 < \alpha < n$, alors on a

$$f_t^{[n]}(s) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} s^{\beta-n},$$

d'où

$$^C D_{0^+}^{\alpha;t} t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n} ds,$$

effectuant le changement de variable $s = \tau t$ on obtient

$$\begin{aligned} ^C D_{0^+}^{\alpha;t} t^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} t^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-\tau)^{n-\alpha-1} \tau^{\alpha-n} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} t^{\beta-\alpha} B(\alpha-n+1, n-\alpha) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Lemme 1.1. [5] *Soit $\alpha, \beta > 0$, et $f \in L^1(J)$,alors :*

$$I_{0^+}^{\alpha;\psi} I_{0^+}^{\beta;\psi} f(t) = I_{0^+}^{\alpha+\beta;\psi} f(t) \quad \text{p.p } t \in J.$$

En particulier, si $f \in C(J)$, alors

$$I_{0^+}^{\alpha;\psi} I_{0^+}^{\beta;\psi} f(t) = I_{0^+}^{\alpha+\beta;\psi} f(t), \ \ t \in J.$$

Propriétées des intégrales et dérivées $\psi-$fractionnaires

Lemme 1.2. [1] *Soit $\alpha > 0$, on a :*

a) *Si $f \in C[0,b]$ alors $^C D_{0^+}^{\alpha;\psi} I_{0^+}^{\alpha;\psi} f(t) = f(t), \ \ t \in [0,b]$.*

b) *Si $f \in C^m(J)$, $n-1 < \alpha \leq n$. Alors :*

$$I_{0^+}^{\alpha;\psi}\, {}^C D_{0^+}^{\alpha;\psi} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_\psi^{[k]}(a)}{k!} [\psi(t) - \psi(a)]^k, \ \textit{pour tout } t \in [a,b].$$

En particulier, si $0 < \alpha \leq 1$, *on a :*

$$I_{0^+}^{\alpha;\psi} {}^C D_{0^+}^{\alpha;\psi} f(t) = f(t) - f(0).$$

Lemme 1.3. *(*[3] , [13]*) Soit* $t > 0$, $\alpha \geq 0$ *et* $\beta \geq 0$. *Alors :*

1. $I_{a^+}^{\alpha;\psi} (\psi(t) - \psi(0))^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (\psi(t) - \psi(0))^{\beta+\alpha-1}$.

2. ${}^C D_{a^+}^{\alpha;\psi} (\psi(t) - \psi(0))^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (\psi(t) - \psi(0))^{\beta-\alpha-1}$.

3. ${}^C D_{a^+}^{\alpha;\psi} (\psi(t) - \psi(0))^{k} = 0$, *pour tout* $k \in \{0, ..., n-1\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Chapitre 2

Semi-groupes et Représentation de la Solution

Dans ce chapitre nous preséntons les notions de base de la théorie des semi-groupes qui seront utilisées tout au long de ce mémoire.
Soit X un espace de Banach muni d'une norme noté $\|\cdot\|$et le produit scalaire $\langle .,. \rangle$.
$\mathcal{B}(x)$ est l'espace des opérateurs linéares bornées de X dans lui même dont la norme est

$$\|U\|_{\mathcal{B}(X)} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|}$$

pour tout $U \in \mathcal{B}(x),\ \mathcal{B}(x)$ est un espace de Banach.

2.1 Semi-groupe fortement continue

Définition 2.1. [16] *Une famille d'opérateurs $\{\Phi(t)\}_{t\geq 0}$ linéaires bornés définis sur X est dite semi-groupe fortement continu (ou de classe C_0), ou simplement C_0-semi-groupe si on a :*
(i) $\Phi(0) = I$ *(I est l'opérateur d'identité dans $\mathcal{B}(x)$).*
(ii) $\Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s)$ *pour $s, t \geqslant 0$. (propriéte algebrique)*
(iii) $\lim\limits_{t\to 0}\|\Phi(t)x - x\| = 0$ *pour tout x dans X. (propriéte topologique)*

*si on remplace (**iii**) par :*

$$\lim_{t\to 0} \|\Phi(t) - I\| = 0,\ t \geq 0,$$

il s'agît d'un semi-groupe uniformement continue.

Théorème 2.1. [16] *Pour $\{\Phi(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur X, alors on a la propriétés suivantes :*

(**i**) $t \to |\Phi(t)|_{\mathcal{B}(X)}$ *est bornée sur tout intrvalle compact* $[0, t_1]$ *;*

(**ii**) *Pour tout x dans X, la fonction $t \to \Phi(t)x$ est continue sur $R_{+;}$*

(**iii**) Il exists des constantes $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ telles que :

$$|\Phi(t)|_{\mathcal{B}(X)} \leq M \exp(\omega t),\quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Définition 2.2. [16] *L'opérateur A defini par :*

$$D(A) = \{x \in X : \lim_{t\to 0} \frac{\Phi(t)x - x}{t} \textit{ existe pour tout } t > 0\}$$

et

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi(t)x - x}{t} = \frac{d}{dt}\Phi(t)x\bigg|_{t=0.} \quad \textit{pour } x \in D(A).$$

est dit générateur infinitésimal du C_0 -semi-groupe.

L'espase $D(A)$ est muni de la norme du graphe $\|x\|_{D(A)} = \|x\| + \|Ax\|,\ x \in D(A)$.

Remarque 2.1. Si $\{\Phi(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés de générateur infinitésimal A, alors il est unique.

Proposition 2.1. *Soient $\{\Phi(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés et A son générateur infinitésimal. Si $x \in D(A)$, alors $\Phi(t)x \in D(A)$ et on a l'égalité*

$$\Phi(t)Ax = A\Phi(t)x,\ \forall t \geq 0.$$

Remarque 2.2. On voit que : $\Phi(t)D(A) \subseteq D(A),\ \forall t \geq 0.$

2.2 Représentation de la solution (Solution Mild)

Dans cette section on présente la solution de l'équation différentielle linéaire fractionnaire. Le concept du solution mild peut être introduit pour étudier le probléme à valeur initiale non homogéne suivant

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + f(t), \quad 0 < t < b, \\ x(0) = x_0, \qquad x \in X, \end{cases} \tag{2.1}$$

oú $f : [0, b[\to X$.

Nous définissons maintenant le concept d'une solution mild.

Définition 2.3. [13] *Soit A un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{\Phi(t)\}_{t\geq 0}$ sur X, $x_0 \in X$ et $f \in L^1([0, b], X)$ l'espace des fonctions Bochner-intégrable sur $[0, b]$ á valeurs dans X. La fonction $x \in C([0, b], X)$ est donné par*

$$x(t) = \Phi(t)x_0 +_0^t \Phi(t-s)f(s)ds, \quad 0 < t < b$$

est la solution mild du probléme (2.1) à valeur initiale sur $[0, b]$.

2.3 Eléments sur la transformée de Laplace

Nous rappelons dans ce paragraphe quelques éléments de base sur la transformée de Laplace dans le cas entier que nous allons par la suite l'étendre au cas fractionnaire.

Définition 2.4. *On dit que $f(t)$ est une fonction originale si :*

1. *$f(t) = 0$ pour $t < 0$.*

2. *$|f(t)| < Me^{s_0 t}$ pour $t > 0$ avec $M > 0$, $s_0 \in \mathbb{R}$.*

3. *La fonction $f(t)$ satisfait les conditions de Dirichlet pour tout intervalle $[a, b]$:*

a) *$f(t)$ est bornée,*

b) *$f(t)$ est continue, ou bien a un nombre fini des points de discontinuites de premiére forme,*

c) *$f(t)$ a un nombre fini des extrémes.*

On consindére la variable complexe telle que : $s = \alpha + i\beta$ et $Re(s) = \alpha \geq s_1 \geq s_0$ alors

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

est dite la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ et on note

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt\ .$$

2.3.1 Images de quelques fonctions élémentaires

Original	Image	Original	Image
1	$\frac{1}{s}$	$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$	$\frac{t^n}{n!}e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(s-\alpha)^{n+1}}$
$\cos\beta t$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$	$t\cos\beta t$	$\frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}$
$\sin\beta t$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$	$t\sin\beta t$	$\frac{2s\beta}{(s^2+\beta^2)^2}$
$\cosh(\beta t)$	$\frac{s}{s^2-\beta^2}$	$\sinh(\beta t)$	$\frac{\beta}{s^2-\beta^2}$

2.3.2 Propriétés de la transformée de Laplace

Dans cette sous-section on utilisant la notation $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ et $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$

- Propriété de la linéairité

$$\mathcal{L}[a\ f(t) + b\ g(t)] = aF(s) + bG(s),\ a, b \in \mathbb{R}$$

- Propriété de la similarité

$$\mathcal{L}[\ f(\alpha t)\ ] = \frac{1}{\alpha}\ F(\frac{s}{\alpha}), \quad \alpha > 0$$

- Propriété de convolution

La transformée de Laplace de la convolution

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

de deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$, qui sont égales a zéro pour $t < 0$, est égale au produit de leurs transformées de Laplace

$$\mathcal{L}\left\{f(t) * g(t); s\right\} = F(s)G(s)$$

sous l'hypothèse que $F(s)$ et $G(s)$ existent.

2.3.3 La transformée de Laplace de l'intégrale et la dérivée fractionnaire au sens R-L

- **Intégrales fractionnaires**

Si $\alpha > 0$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville est donée par :

$$I = I_{0^+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-y)^{\alpha-1}\, f(y)\, dy$$

$$\mathcal{L}[I] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{L}[t^{\alpha-1}]\mathcal{L}[f(t)] = \frac{F(s)}{s^{\alpha}}$$

- **Dérivées fractionnaires**

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[{}^{L}D_t^{\alpha} f(t)] &= \mathcal{L}[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} (\frac{dt^n}{d^n t}) \int_0^t (t-u)^{n-\alpha-1}\, f(u)\, du] \\
&= \mathcal{L}[(\frac{dt^n}{d^n t}) I^{n-\alpha} f(t)]
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0),$$

$$\mathcal{L}[{}^{L}D_t^{\alpha} f(t)] = s^n \frac{F(s)}{s^{n-\alpha}} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-\alpha-1} [D^k I^{n-\alpha} f(t)]_{t=0,}$$

$$\mathcal{L}[{}^{L}D_t^{\alpha} f(t)] = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-\alpha-1} [D^k I^{n-\alpha} f(t)]_{t=0,}$$

2.3.4 La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo se donne par la formule :

$$\mathcal{L}\left[{}^{C}D_{0^+}^{\alpha} f(t)\right] = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} \left.\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right|_{t=0_+}, \quad n-1 < \alpha < n$$

2.3.5 La transformée de Laplace des opérateurs $\psi-$fractionnaires

Définition 2.5. [12] *Soit $y : J \to R$ une fonction à valeurs réelles. La transformée de Laplace généralisée de y est donnée par*

$$\mathcal{L}_{\psi}\left[y(t)\right](s) := \hat{Y}(s) = \int_0^{\infty} \psi'(t)\, e^{-s(\psi(t)-\psi(0))} y(t)\, dt, \quad \forall\, s.$$

Lemme 2.1. [12] *Soit $\alpha > 0$ et y une fonction continue par morceaux sur chaque intervalle $[0, t]$ et d'ordre $\psi(t)-$exponentiel. Alors, on a*

1. $\mathcal{L}_\psi \left[I_{a^+}^{\alpha;\psi} y(t) \right] (s) = \frac{\hat{Y}(s)}{s^\alpha}$.

2. $\mathcal{L}_\psi \left[{}^C D_{0^+}^{\alpha;\psi} y(t) \right] (s) = s^\alpha \left[\mathcal{L}_\psi \left[y(t) \right] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{-k-1} f^{[k]}(0) \right]$, *où* $n = [\alpha] + 1$.

2.4 Théorème de point fixe et inégalité de Gronwall

Théorème 2.2. *(Théorème du point fixe de Banach)*[11] *Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application de contraction. Alors T admet un unique point fixe dans X.*

Lemme 2.2. *(Inégalité de Gronwall généralisée)*[7] *Soit x , y deux fonctions intégrables et z continues, de domaine J. Soit $\psi \in C(J, \mathbb{R})$ une fonction croissante telle que $\psi'(t) \neq 0$, $\forall t \in J$. Supposons que x et y sont non négatifs et z est non négatif et non décroissant. Si*

$$x(t) \leq y(t) + z(t) \int_0^t \psi'(s) (\psi(t) - \psi(s))^{\alpha-1} x(s) \, ds,$$

alors, pour tout $t \in J$, on a

$$x(t) \leq y(t) + \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[z(t) \Gamma(\alpha) \right]^k}{\Gamma(\alpha k)} \psi'(s) (\psi(t) - \psi(s))^{\alpha k-1} y(s) \, ds.$$

Chapitre 3

Existence et contrôlabilité trajectoire pour les équations différentielles fractionnaires $\psi-$Caputo

Le but de ce chapitre est l'étude de l'existence et la contrôlabilité trajectoire de l'équation d'évolution fractionnaire ψ-Caputo avec des conditions classiques et non locales. Les outils mathématiques de base utilisés ici reposent sur le concept de semi-groupe d'opérateurs, le calcul ψ-fractionnaire, le principe du point fixe de Banach et l'inégalité de Gronwall.

3.1 Position du Problème

Ci-dessous, Nous discutons principalement l'existence et la contrôlabilité trajectoire (CT) du système gouverné par l'équation différentielle fractionnaire de $\psi-$Caputo dans un espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$:

$$^{C}D_{0^+}^{\alpha;\psi}x(t) = Ax(t) + u(t) + f\left(t, x(t)\right), \;\; t \in \mathcal{J} := [0, b] ,$$

avec condition classique $x(0) = x_0$ et condition non locale $x(0) = h(x)$.

Où ${}^{C}D_{0^+}^{\alpha;\psi}$ désigne la dérivée fractionnaire de $\psi-$Caputo d'ordre α, $0<\alpha<1$. A est un opérateur linéaire fermé qui est un générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe $\{\Phi(t)\}_{t\geq 0}$ dans X et $x_0 \in X$. La fonction de contrôle $u(\cdot)$ prend des valeurs dans $L^2(\mathcal{J},U)$, l'espace de Hilbert des fonctions de contrôle admissibles pour un espace de Hilbert U. De plus les fonctions $f:\mathcal{J}\times X\to X$ et $h:C(\mathcal{J},X)\to X$ sont des fonctions données satisfaisant certaines conditions à préciser ultérieurement.
Soit $\mathcal{C}_b=C(\mathcal{J},X)$, l'ensemble de toutes les fonctions continues de $[0,b]$ dans X est un espace de Banach muni de la norme supremum donnée par

$$\|f\|_b := \sup_{0\leq t\leq b}\|f(t)\|, \quad f\in\mathcal{C}_b.$$

3.2 Existence et CT avec conditions classiques

Cette section est consacrée à l'existence et au CT du système régi par le système d'évolution fractionnaire de $\psi-$Caputo

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{\alpha;\psi}x(t) & = & Ax(t)+u(t)+f(t,x(t)), \\ x(0) & = & x_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

d'ordre $0<\alpha<1$ sur l'intervalle $\mathcal{J}$.
Nous adoptons maintenant la solution Mild (Douce) de notre problème (3.1)
Définition 3.1. *Une fonction continue $x\in\mathcal{C}_b$ est dite solution Mild du problème (3.1) si x est solution de l'équation intégrale suivante*

$$x(t)=\mathcal{U}_\alpha^\psi(t,0)\,x_0+\int_0^t(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}\,\mathcal{V}_\alpha^\psi(t,s)\,[u(s)+f(s,x(s))]\,\psi'(s)\,ds, \quad t\in\mathcal{J} \tag{3.2}$$

Où $\mathcal{U}_\alpha^\psi(t,s)$ et $\mathcal{V}_\alpha^\psi(t,s)$ sont des opérateurs caractéristiques donnés par

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\alpha^\psi(t,s)\,x &= \int_0^\infty h_\alpha(\theta)\,\Phi\left((\psi(t)-\psi(s))^\alpha\theta\right)x\,d\theta, \\ \mathcal{V}_\alpha^\psi(t,s) &= \alpha\int_0^\infty \theta h_\alpha(\theta)\,\Phi\left((\psi(t)-\psi(s))^\alpha\theta\right)x\,d\theta, \end{aligned}$$

h_α est une fonction de densité de probabilité définie sur $(0,\infty)$, telle que

$$h_\alpha(\theta)\geq 0,\ \theta\in(0,\infty) \quad et \quad \int_0^\infty h_\alpha(\theta)\,d\theta=1.$$

Lemme 3.1. *Les opérateurs* $\mathcal{U}_\alpha^\psi$ *et* $\mathcal{V}_\alpha^\psi$ *ont les propriétés suivantes :*
(i) Pour tout (t, s) *fixés* $0 \leq s \leq t \leq b$, $\mathcal{U}_\alpha^\psi(t, s)$ *et* $\mathcal{V}_\alpha^\psi(t, s)$ *sont des opérateurs linéaires et bornés, et*

$$\left\|\mathcal{U}_\alpha^\psi(t, s)\, x\right\| \leq M\|x\| \text{ et } \left\|\mathcal{V}_\alpha^\psi(t, s)\, x\right\| \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\|x\| \text{ pour tout } x \in X,$$

où $M := \sup_{t \geq 0}\|\Phi(t)\|$.
(ii) Les opérateurs $\mathcal{U}_\alpha^\psi$ *et* $\mathcal{V}_\alpha^\psi$ *sont fortement continus pour tout* $t \geq s \geq 0$*, i.e., pour tout* $x \in X$ *et* $0 \leq s \leq t_1 < t_2 \leq b$*, on a*

$$\left\|\mathcal{U}_\alpha^\psi(t_2, s)\, x - \mathcal{U}_\alpha^\psi(t_1, s)\, x\right\| \to 0$$

et

$$\left\|\mathcal{V}_\alpha^\psi(t_2, s)\, x - \mathcal{V}_\alpha^\psi(t_1, s)\, x\right\| \to 0$$

quand $t_1 - t_2 \to 0.$
Soit $\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$ l'ensemble de toutes les fonctions $y(\cdot)$ définies sur $\mathcal{J}$ telles que $y(0) = x_0$, $y(b) = x_1$ pour tout $t \in \mathcal{J}$ et la dérivée fractionnaire ${}^C D_{0+}^{\alpha;\psi} y$ existe presque partout. On appelle $\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$ l'ensemble de toutes les trajectoires réalisables pour le système (3.1).
Définition 3.2. *Le système (3.1) est dit contrôlable en trajectoire ($\mathbb{T}$-contrôlable) si pour tout* $y \in \mathcal{H}_{\mathcal{T}}$*, il existe une fonction de contrôle* $u \in L^2(\mathcal{J}, U)$ *telle que la solution correspondante* $x(\cdot)$ *de l'Eq. (3.1) satisfait* $x(t) = y(t)$ *presque partout.*
Ci-dessous nous imposons les conditions suivantes sur les données de notre problème :
$(A1)$ $\{\Phi(t)\}_{t \geq 0}$ est compact.
$(A2)$ Il existe une constante $L_f > 0$ telle que

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L_f\|x_1 - x_2\|,$$

pour tout $t \in \mathcal{J},\ x_1, x_2 \in X$.
Le théorème suivant traite des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité de la solution Mild pour notre problème (3.1).
Théorème 3.1. *Si les hypothèses* $(A1)$ *et* $(A2)$ *sont satisfaites, alors le système (3.1) a une solution Mild unique pour toute fonction mesurable* $u(t)$ *sur l'intervalle* J.

Preuve.

Soit $u(t)$ une fonction quelconque mesurable sur $\mathcal{J}$. Définissons un opérateur $\mathcal{F}$ sur l'espace de Banach $\mathcal{C}_b$ par

$$(\mathcal{F}x)(t) = \mathcal{U}_\alpha^\psi(t,0)\,x_0 + \int_0^t (\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}\,\mathcal{V}_\alpha^\psi(t,s)\,[u(s)+f(s,x(s))]\,\psi'(s)\,ds.$$

L'équation (3.1) a une solution Mild unique (3.2) si $\mathcal{F}$ a un unique point fixe. Pour montrer que l'opérateur $\mathcal{F}$ a un point fixe unique, il suffit de montrer que $\mathcal{F}^n$ est une contraction pour au moins pour $n > 1$.

Soit $t \in \mathcal{J}$ et $x, y \in X$ alors pour $n = 1$,

$$\|(\mathcal{F}x)(t)-(\mathcal{F}y)(t)\| \leq \int_0^t (\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}\left\|\mathcal{V}_\alpha^\psi(t,s)\right\|\|f(s,x(s))-f(s,y(s))\|\,\psi'(s)\,ds.$$

D'après **Lemme 3.1.** et les hypothèses (A1)-(A2), on a

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{F}x)(t)-(\mathcal{F}y)(t)\| &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}L_f\int_0^b (\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}\|x(s)-y(s)\|\,\psi'(s)\,ds \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}L_f\frac{(\psi(b)-\psi(0))^\alpha}{\alpha}\|x(t)-y(t)\| \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}L_f(\psi(b)-\psi(0))^\alpha\|x(t)-y(t)\|
\end{aligned}$$

On obtient donc une constante réelle positive $\rho(b)$ telle que

$$\|(\mathcal{F}x)(t)-(\mathcal{F}y)(t)\| \leq \rho(b)\,\|x(t)-y(t)\|,$$

où

$$\rho(b) = \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}L_f(\psi(b)-\psi(0))^\alpha$$

Pour $n = 2$

$$\left\|\left(\mathcal{F}^2x\right)(t)-\left(\mathcal{F}^2y\right)(t)\right\| \leq \int_0^t (\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}\left\|\mathcal{V}_\alpha^\psi(t,s)\right\|\|f(s,\mathcal{F}x(s))-f(s,\mathcal{F}y(s))\|\,\psi'(s)\,ds.$$

D'après **Lemme 3.1.** et les hypothèses (A1)-(A2), on a

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\mathcal{F}^{2}x\right)(t)-\left(\mathcal{F}^{2}y\right)(t)\right\| &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}L_f\int_0^t(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}\left\|\mathcal{F}x(s)-\mathcal{F}y(s)\right\|\psi'(s)\,ds\\
&\leq \left(\frac{M}{\Gamma(\alpha)}L_f\right)^2\int_0^b(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}\\
&\quad\times\left(\int_0^b(\psi(s)-\psi(u))^{\alpha-1}\left\|x(s)-y(s)\right\|\psi'(u)\,du\right)\psi'(s)\,ds\\
&\leq \frac{(\rho(b))^2}{2!}\left\|x(t)-y(t)\right\|.
\end{aligned}$$

Poursuivre ce processus pour $n=3,4,...m$ et appliquant le **Lemme 3.1.** et les hypothèses (A1)-(A2) pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\left\|(\mathcal{F}^{m}x)(t)-(\mathcal{F}^{m}y)(t)\right\| &\leq \int_0^t\int_0^{\tau_1}...\int_0^{\tau_{m-1}}(\psi(t)-\psi(\tau_1))^{\alpha-1}(\psi(\tau_1)-\psi(\tau_2))^{\alpha-1}...\\
&\quad(\psi(\tau_{m-1})-\psi(s))^{\alpha-1}\left(\frac{ML_f(\tau)}{\Gamma(\alpha)}\right)^m\left\|x-y\right\|\\
&\quad\times\psi'(s)\,ds\psi'(\tau_{m-1})\,d_{\tau_{m-1}}...\psi'(\tau_1)\,d_{\tau_1}\\
&\leq \int_0^b\int_0^b...\int_0^b(\psi(b)-\psi(0))^{m(\alpha-1)}\left(\frac{ML_f(\tau)}{\Gamma(\alpha)}\right)^m\left\|x-y\right\|\\
&\quad\times\psi'(s)\,ds\psi'(\tau_{m-1})\,d_{\tau_{m-1}}...\psi'(\tau_1)\,d_{\tau_1}\\
&\leq \frac{(\psi(b)-\psi(0))^{m(\alpha-1)}}{(m-1)!}\left(\frac{ML_f}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^m\\
&\quad\times\int_0^b(\psi(b)-\psi(\tau))^{m-1}\left\|x-y\right\|\psi'(\tau)\,d\tau\\
&\leq \frac{(\psi(b)-\psi(0))^{m\alpha}}{m!}\left(\frac{ML_f}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^m\left\|x-y\right\|\\
&\leq \frac{(\rho(b))^m}{m!}\left\|x-y\right\|
\end{aligned}$$

Puis en prenant le supremum sur $\mathcal{J}$,

$$\left\|\mathcal{F}^{m}x-\mathcal{F}^{m}y\right\|_b\leq\frac{(\rho(b))^m}{m!}\left\|x-y\right\|_b.$$

la quantité $\frac{(\rho(b))^m}{m!}\to 0$ quand $m\to\infty$ pour b fixe. Il existe donc m avec $\mathcal{F}^m$ est contraction sur X. Par conséquent, le système (3.1) a une solution Mild unique pour toute fonction mesurable $u(t)$ sur l'intervalle $\mathcal{J}$ par le théorème général de contraction de Banach.

Théorème 3.2. *Si les hypothèses* $(A1)$ *et* $(A2)$ *sont satisfaites alors le système (3.1) est* $\mathbb{T}$*-contrôlable sur* $\mathcal{J}$.

Preuve.

Soit $y(t)$ une trajectoire quelconque de $\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$ et définissons le contrôle $u(t)$ du système par :

$$u(t) = {}^{C}D_{0^+}^{\alpha;\psi} y(t) - Ay(t) - f(t, y(t)) \tag{3.3}$$

En mettant la valeur du contrôle $u(t)$ de l'Eq. (3.3) dans l'Eq. (3.1), on obtient

$$^{C}D_{0^+}^{\alpha;\psi} x(t) = Ax(t) + f(t, x(t)) +^{C} D_{0^+}^{\alpha;\psi} y(t) - Ay(t) - f(t, y(t))$$

Par conséquent, nous obtenons

$$^{C}D_{0^+}^{\alpha;\psi} [x(t) - y(t)] = A[x(t) - y(t)] + [f(t, x(t)) - f(t, y(t))] \tag{3.4}$$

Posons $z(t) = x(t) - y(t)$, l'équation (3.4) devient

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{\alpha;\psi} z(t) & = & Az(t) + [f(t, x(t)) - f(t, y(t))] \\ z(0) & = & 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

La solution Mild du problème (3.5) ci-dessus est donnée par

$$z(t) = \int_0^t (\psi(t) - \psi(s))^{\alpha-1} \mathcal{V}_\alpha^\psi(t, s) [f(t, x(t)) - f(t, y(t))] \psi'(s) \, ds$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} \|z(t)\| &\leq \int_0^t (\psi(t) - \psi(s))^{\alpha-1} \left\|\mathcal{V}_\alpha^\psi(t, s)\right\| \|f(t, x(t)) - f(t, y(t))\| \psi'(s) \, ds \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} L_f \int_0^t (\psi(t) - \psi(s))^{\alpha-1} \|z(s)\| \psi'(s) \, ds \\ &\leq L \int_0^t (\psi(t) - \psi(s))^{\alpha-1} \|z(s)\| \psi'(s) \, ds, \end{aligned}$$

où $L = \frac{M}{\Gamma(\alpha)} L_f$. Utilisons l'inégalité de Gronwall à l'inégalité ci-dessus, on obtient $z(t) = 0$ presque partout. Donc $x(t) = y(t)$ presque partout. Ainsi, le système de contrôle (3.1) est $\mathbb{T}$-contrôlable sur $\mathcal{J}$.

3.3 Existence et CT avec condition non locale

On considère le système de contrôle gouverné par une équation différentielle fractionnaire non locale de $\psi-$Caputo suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} {}^{C}D_{0^+}^{\alpha;\psi}x(t) & = & Ax(t)+u(t)+f\left(t,x(t)\right), \\ x(0) & = & h\left(x\right), \end{array} \right. \tag{3.6}$$

d'ordre $0<\alpha<1$ sur l'intervalle $\mathcal{J}$.

Soit $\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{T}}$ l'ensemble de toutes les fonctions $y(\cdot)$ définies sur $\mathcal{J}$ telles que $y(0)=h\left(x\right)$, $y(b)=x_1$ pour tout $t\in\mathcal{J}$. On appelle $\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{T}}$ l'ensemble de toutes les trajectoires réalisables pour le système (3.6).

Définition 3.3. *Une fonction continue $x\in\mathcal{C}_b$ est dite solution Mild du problème (3.6) si x est solution de l'équation intégrale suivante*

$$x\left(t\right)=\mathcal{U}_{\alpha}^{\psi}\left(t,0\right)h\left(x\right)+\int_0^t\left(\psi\left(t\right)-\psi\left(s\right)\right)^{\alpha-1}\mathcal{V}_{\alpha}^{\psi}\left(t,s\right)\left[u(s)+f\left(s,x(s)\right)\right]\psi'\left(s\right)ds,\quad t\in\mathcal{J} \tag{3.7}$$

Nous avons besoin de l'hypothèse suivante sur la fonction h.

$(A3)$ La fonction non locale $h:X\to X$ est continue et il existe une constante $L_h>0$ telle que

$$\left\|h\left(x_1\right)-h\left(x_2\right)\right\|\leq L_h\left\|x_1-x_2\right\|,$$

pour tout $x_1,x_2\in X$.

Théorème 3.3. *Si les hypothèses $(A1)-(A3)$ sont satisfaites, alors le système (3.6) a une solution Mild unique pour toute fonction mesurable $u(t)$ sur l'intervalle $\mathcal{J}$.*

Preuve.

Soit $u(t)$ une fonction quelconque mesurable sur $\mathcal{J}$. Définissons un opérateur Π sur l'espace de Banach $\mathcal{C}_b$ par

$$\left(\Pi x\right)\left(t\right)=\mathcal{U}_{\alpha}^{\psi}\left(t,0\right)h\left(x\right)+\int_0^t\left(\psi\left(t\right)-\psi\left(s\right)\right)^{\alpha-1}\mathcal{V}_{\alpha}^{\psi}\left(t,s\right)\left[u(s)+f\left(s,x(s)\right)\right]\psi'\left(s\right)ds.$$

L'équation (3.6) a une solution Mild unique (3.7) si Π a un unique point fixe. Pour montrer que l'opérateur Π a un point fixe unique, il suffit de montrer que Π est une contraction. Soient $t \in \mathcal{J}$ et $x, y \in X$ alors

$$\begin{aligned}\left\|(\Pi x)(t)-(\Pi y)(t)\right\| &\leq \left\|\mathcal{U}_{\alpha}^{\psi}(t,0)\right\|\left\|h(x)-h(y)\right\|+\int_{0}^{t}(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}\\ &\quad\times\left\|\mathcal{V}_{\alpha}^{\psi}(t,s)\right\|\left\|f(s,x(s))-f(s,y(s))\right\|\psi'(s)\,ds.\end{aligned}$$

D'après **Lemme 3.1.** et les hypothèses (A1)-(A3), on a

$$\begin{aligned}\left\|(\Pi x)(t)-(\Pi y)(t)\right\| &\leq ML_h\left\|x(t)-y(t)\right\|+\frac{M}{\Gamma(\alpha)}L_f\int_{0}^{b}(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}\\ &\quad\times\left\|x(s)-y(s)\right\|\psi'(s)\,ds\\ &\leq (ML_h+\rho(b))\left\|x(t)-y(t)\right\|.\end{aligned}$$

Puis en prenant le supremum sur $\mathcal{J}$,

$$\left\|\Pi x-\Pi y\right\|_b \leq (ML_h+\rho(b))\left\|x-y\right\|_b.$$

Par conséquent, l'opérateur Π est contraction si $ML_h+\rho(b)<1$. Ainsi, le système (3.6) a une solution Mild unique pour toute fonction mesurable $u(t)$ sur l'intervalle $\mathcal{J}$ si $ML_h+\rho(b)<1$.

Théorème 3.4. *Si les hypothèses $(A1)-(A3)$ sont satisfaites alors le système (3.6) est $\mathbb{T}$-contrôlable sur $\mathcal{J}$ pourvu que*

$$L^* = ML_h < 1.$$

Preuve

Soit $y(t)$ une trajectoire quelconque de $\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{T}}$ et définissons le contrôle $u(t)$ du système par :

$$u(t) = {}^{C}D_{0^+}^{\alpha;\psi}y(t)-Ay(t)-f(t,y(t)) \tag{3.8}$$

En mettant la valeur du contrôle $u(t)$ de l'Eq. (3.8) dans l'Eq. (3.6), on obtient

$${}^{C}D_{0^+}^{\alpha;\psi}x(t) = Ax(t)+f(t,x(t))+{}^{C}D_{0^+}^{\alpha;\psi}y(t)-Ay(t)-f(t,y(t))$$

Par conséquent, nous obtenons

$${}^{C}D_{0^+}^{\alpha;\psi}[x(t)-y(t)] = A[x(t)-y(t)]+[f(t,x(t))-f(t,y(t))] \tag{3.9}$$

Posons $z(t) = x(t) - y(t)$, l'équation (3.9) devient

$$\left\{ \begin{array}{lll} {}^{C}D_{0^+}^{\alpha;\psi} z\left(t\right) & = & Az\left(t\right) + \left[f\left(t, x(t)\right) - f\left(t, y(t)\right)\right] \\ z\left(0\right) & = & h\left(x\right) - h\left(y\right). \end{array} \right. \tag{3.10}$$

La solution Mild du problème (3.10) ci-dessus est donnée par

$$z\left(t\right) = \mathcal{U}_{\alpha}^{\psi}\left(t, 0\right)\left[h\left(x\left(t\right)\right) - h\left(y\left(t\right)\right)\right] + \int_0^t \left(\psi\left(t\right) - \psi\left(s\right)\right)^{\alpha-1} \mathcal{V}_{\alpha}^{\psi}\left(t, s\right)\left[f\left(t, x(t)\right) - f\left(t, y(t)\right)\right]\psi'\left(s\right) ds$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{array}{rcl} \left\|z\left(t\right)\right\| & \leq & \left\|\mathcal{U}_{\alpha}^{\psi}\left(t, 0\right)\right\| \left\|h\left(x\left(t\right)\right) - h\left(y\left(t\right)\right)\right\| + \displaystyle\int_0^t \left(\psi\left(t\right) - \psi\left(s\right)\right)^{\alpha-1} \\ & & \times \left\|\mathcal{V}_{\alpha}^{\psi}\left(t, s\right)\right\| \left\|f\left(t, x(t)\right) - f\left(t, y(t)\right)\right\| \psi'\left(s\right) ds \\ & \leq & ML_h \left\|z\left(t\right)\right\| + \dfrac{M}{\Gamma\left(\alpha\right)} L_f \displaystyle\int_0^t \left(\psi\left(t\right) - \psi\left(s\right)\right)^{\alpha-1} \left\|z\left(s\right)\right\| \psi'\left(s\right) ds \\ & \leq & L^* \left\|z\left(t\right)\right\| + L \displaystyle\int_0^t \left(\psi\left(t\right) - \psi\left(s\right)\right)^{\alpha-1} \left\|z\left(s\right)\right\| \psi'\left(s\right) ds \\ \left\|z\left(t\right)\right\| & \leq & \dfrac{L}{1 - L^*} \displaystyle\int_0^t \left(\psi\left(t\right) - \psi\left(s\right)\right)^{\alpha-1} \left\|z\left(s\right)\right\| \psi'\left(s\right) ds, \end{array}$$

où $L = \frac{M}{\Gamma(\alpha)} L_f,\ L^* = ML_h$ et $L^* < 1$. Utilisons l'inégalité de Gronwall à l'inégalité ci-dessus, on obtient $z(t) = 0$ presque partout. Donc $x(t) = y(t)$ presque partout. Ainsi, le système de contrôle (3.6) est $\mathbb{T}$-contrôlable sur $\mathcal{J}$.

3.4 Applications

3.4.1 Exemple 1

Considérons l'équation d'évolution fractionnaire suivante dans l'espace $X = L^2([0, \pi]; \mathbb{R})$:

$$\left\{ \begin{array}{lll} {}^{C}D_{0^+}^{\frac{1}{2};e^t} y(t, x) & = & \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(t, x) + \frac{e^{-t}}{2+e^t} \cos\left(y(t, x)\right) + u\left(t\right), \quad (t, x) \in [0, 1] \times [0, \pi], \\ y(t, 0) & = & y(t, \pi) = 0, \quad t \in [0, 1], \\ y(0, x) & = & y_0\left(x\right). \end{array} \right. \tag{4.1}$$

Dans cet exemple on choisit $\alpha = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $\psi(t) = e^t$, $f\left(t, y\right) = \frac{e^{-t}}{2+e^t} \cos\left(y(t, x)\right)$.

On définit l'opérateur $A : D(A) \subset X \to X$ par

$$D(A) := \left\{ \begin{array}{c} y \in X : y, y' \text{ sont absolument continues} \\ \text{et } y'' \in X,\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{array} \right\},$$

et

$$Ay = \frac{\partial^2}{\partial x^2} y.$$

Il est bien connu que A a un spectre discret.

Les valeurs propres sont $-n^2,\ n \in \mathbb{N}$, avec les vecteurs propres normalisés correspondants $e_n(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(n\theta)$. Alors

$$Ay = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 \langle y, e_n \rangle e_n, \quad y \in D(A).$$

De plus, A engendre un semi-groupe analytique uniformément borné $\{\Phi(t)\}_{t \geq 0}$ dans X et est donné par

$$\Phi(t) y = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \langle y, e_n \rangle e_n, \quad y \in X,$$

où

$$\langle y, e_n \rangle = \int_0^{\pi} y(t) e_n(t) \, dt.$$

L'équation (4.1) peut être réécrite en $X = L^2([0, \pi]; \mathbb{R})$ sous forme abstraite :

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{\alpha;\psi} z(t) & = & Az(t) + u(t) + f(t, z(t)), \\ z(0) & = & y_0, \end{cases} \tag{4.2}$$

où nous définissons $z(t)$ par $z(t) = y(t, \cdot)$.

Comme $\|\Phi(t)\| \leq e^{-t}$ pour tout $t \geq 0$, alors $M = 1$. Ce qui implique que $\sup\limits_{t \in [0,\infty)} \|\Phi(t)\| = 1$ et la condition $(A1)$ est vérifiée.

Clairement, $f(t, z) = \frac{e^{-t}}{2+e^t} \cos(z)$ est une fonction continue et il existe $L_f = \frac{1}{3}$ vérifiant

$$|f(t, z_1) - f(t, z_2)| \leq \frac{1}{3} |z_1 - z_2|.$$

(Car si $t \in [0, 1] \Longrightarrow |e^{-t}| \leq 1$ et $\frac{1}{|2+e^t|} \leq \frac{1}{3}$). Ce qui implique que la condition $(A2)$ est satisfaite et on a aussi $\rho(1) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \frac{1}{3} \sqrt{(e-1)} = 0.493\,04 \simeq 0.5 < 1$.

Ainsi, d'après le **théorème 3.3**, le système (3.1) a une solution Mild unique pour toute fonction mesurable $u(t)$ sur l'intervalle $\mathcal{J}$ et par le **théorème 3.2**, le système (3.1) est $\mathbb{T}$-contrôlable sur $\mathcal{J}$.

3.4.2 Exemple 2

Considérons l'équation différentielle fractionnaire suivante dans l'espace $X = L^2([0,\pi];\mathbb{R})$:

$$\left\{\begin{array}{lll} {}^{C}D_{0^+}^{\frac{1}{3};t}y(t,x) & = & \frac{\partial^2}{\partial x^2}y(t,x)+\frac{t^{\frac{2}{3}}}{10}e^{-y(t,x)}+u\left(t\right), \quad (t,x)\in[0,1]\times[0,\pi], \\ y(t,0) & = & y(t,\pi)=0, \quad t\in[0,1], \\ y(0,x) & = & h\left(y\right), \quad h\left(y\left(x\right)\right)=\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{5^k}y\left(\frac{1}{k},x\right). \end{array}\right. \tag{4.3}$$

Dans cet exemple on choisit $\alpha = \frac{1}{3}$, $b = 1$, $\psi(t) = t$, $f\left(t,y\right) = \frac{t^{\frac{2}{3}}}{10}e^{-y(t,x)}$ et $h\left(y\left(x\right)\right) = \sum_{k=1}^{2}\frac{1}{5^k}y\left(\frac{1}{k},x\right)$.

En procédant de la même manière que dans l'exemple 1 précédant, l'équation (4.3) s'écrit sous forme équation abstraite en $X = L^2([0,\pi];\mathbb{R})$ comme :

$$\left\{\begin{array}{lll} {}^{C}D_{0^+}^{\alpha;\psi}z(t) & = & Az(t)+u(t)+f\left(t,z(t)\right), \\ z(0) & = & h\left(z\right), \end{array}\right. \tag{4.4}$$

Clairement, $f(t,z) = \frac{t^{\frac{2}{3}}}{10}e^{-z}$ est une fonction continue et il existe $L_f = \frac{1}{10}$ satisfaisant

$$\left|f(t,z_1)-f(t,z_2)\right| \leq \frac{1}{10}\left|z_1-z_2\right|.$$

Ce qui implique que la condition $(A2)$ est satisfaite.

Pour prouver l'hypothèse $(A3)$, soit $z_1, z_2 \in X$, alors on a

$$\begin{aligned} \left|h(z_1)-h(z_2)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{5^k}z_1\left(\frac{1}{k},x\right)-\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{5^k}z_2\left(\frac{1}{k},x\right)\right| \\ &\leq \frac{1}{5}\left|z_1-z_2\right|+\frac{1}{25}\left|z_1-z_2\right| \\ &\leq \frac{6}{25}\left|z_1-z_2\right|, \end{aligned}$$

donc $(A3)$ est satisfaite avec $L_h = \frac{6}{25}$. D'autre part, on a aussi $ML_h+\rho\left(b\right) = \frac{6}{25}+\frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\frac{1}{10}\left(1-0\right)^{\frac{1}{3}} = 0.313\,85 < 1$ et $L^* = ML_h = \frac{6}{25} < 1$.

Ainsi, d'après le **théorème 3.3**, le système (3.6) a une solution Mild unique pour toute fonction mesurable $u(t)$ sur l'intervalle $\mathcal{J}$ et par le **théorème 3.4**, le système (3.6) est $\mathbb{T}$-contrôlable sur $\mathcal{J}$.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenter une étude de l'existence et la contrôlabilité trajectoire d'un système non linéaire gouvernés par des équations différentielles fractionnaires de ψ-Caputo avec des conditions classiques et non locales dans un espace de Banach. Les résultats présentés sont obtenus en basant sur la théorie des semi-groupes des opérateurs linéaires et de l'inégalité de Gronwall. Finalement, nous avons présenté deux exemples pour illustrer l'applicabilité des résultats théoriques de notre étude.

Bibliographie

[1] M. S. ABDO, A. G. IBRAHIM AND S. K. PANCHAL, Nonlinear implicit fractional differential equation involving ψ-Caputo fractional derivative, Proc. Jangjeon Math. Soc. (PJMS), 22(3) (**2019**), 387-400.

[2] M. S. ABDO, S. K. PANCHAL AND A.M. SAEED, Fractional boundary value problem with ψ-Caputo fractional derivative, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 129 (**2019**), 14pp.

[3] R. ALMEIDA, A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 44 (**2017**), 460-481.

[4] R. ALMEIDA, M. JLELI AND B. SAMET, A numerical study of fractional relaxation-oscillation equations involving ψ-Caputo fractional derivative, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM. 113 (**2019**), 1873-1891.

[5] R. ALMEIDA, A. B. MALINOWSKA AND M. T. T. MONTEIRO, Fractional differential equations with a Caputo derivative with respect to a kernel function and their applications, Math. Meth. Appl. Sci. 41 (**2018**), 336–352.

[6] K. BALACHANDRAN, M. MATAR AND J. J. TRUJILLO, Note on controllability of linear fractional dynamical systems. Journal of Control and Decision, 3(4) (**2016**), 267-279.

[7] J. V. C. DA SOUSA AND E.C. DE OLIVEIRA, a Gronwall inequality and the Cauchy-type problem by means of ψ-Hilfer operator, Diff. Equ. Appl., 11, (**2019**), 87-106.

[8] R. DHAYAL, M. MALIK AND S. ABBAS, Approximate and trajectory controllability of fractional stochastic differential equation with non-instantaneous impulses and Poisson jumps. Asian Journal of Control, 23(6) (**2021**), 2669-2680.

[9] N. E. GHAZI, Contrôlabilité approchée des équations différentielles impulsives avec dérivée fractionnaire de Caputo, Mémoire de fin d'études (Master) soutenue en juin **2022**, Département de Mathématiques, Universitaire 8 Mai 1945 Guelma.

[10] V. GOVINDARAJ AND R. K. GEORGE, Trajectory controllability of fractional integrodifferential systems in Hilbert spaces. Asian Journal of Control, 20(5) (**2018**), 1994-2004.

[11] A. GRANAS, J. DUGUNDJI, Fixed point theory, Springer-Verlag, New York, **2003**.

[12] F. JARAD AND T. ABDELJAWAD, Generalized fractional derivatives and Laplace transform. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser, 13(3) (**2019**), 709-722.

[13] A. A. KILBAS, H. M. SRIVASTAVA, AND J. J. TRUJILLO, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, NorthHolland Math. Stud, 204 Elsevier, Amsterdam, **2006**.

[14] K. S. MILLER AND B. ROSS, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, **1993**.

[15] M. MUSLIM AND R. K. GEORGE, Trajectory controllability of the nonlinear systems governed by fractional differential equations. Differential Equations and Dynamical Systems, 27(4) (**2019**), 529-537.

[16] A. PAZY, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer-Verlag, New York, **1983**.

[17] I. PODLUBNY, Fractional differential equations, volume 198 of Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, Inc., San Diego, CA, **1999**.

[18] D. RUSSELL, Mathematics of Finite-dimensional Control Systems : Theory and Design, M. Dekker, New York, **1979**.

[19] R. SAKTHIVEL, N. I. MAHMUDOV AND J. J. NIETO, Controllability for a class of fractional-order neutral evolution control systems, Appl. Math. Comput. 218 (**2012**), 10334-10340.