قسم الرياضيات

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة 8 ماي 1945 قالمة

كلية الرياضيات والإعلام الآلي وعلوم المادة

Mémoire de Master Académique

Filière : Mathématiques

Option : Equations aux Dérivées Partielles et Analyse Numérique

Présenté par : Selma LAMOURI

Deux méthodes de régularisation pour un problème inverse de conduction thermique semi-linéaire mal-posé

Dirigé par : Benrabah ABDERAFIK

Soutenu le 19 juin 2023
Devant le Jury composé de :

Boussetila Nadjib	Prof.	Président	U. Guelma
Benrabah Abderafik	Prof.	Encadreur	U. Guelma
Hamlaoui Hamid	MCA.	Examinateur	U. Guelma

Année Universitaire 2022/2023

MASTER

Résumé

Dans le présent mémoire, nous considérons un problème de conduction thermique semi-linéaire inverse, et nous supposons qu'il existe une source de chaleur qui dépend de manière significative de l'espace, du temps, de la température et du flux de chaleur.

Le problème est mal posé dans le sens où la solution (si elle existe) ne dépend pas continûment des données cauchy. Afin d'obtenir une solution numérique stable, nous proposons deux méthodes de régularisation pour résoudre le problème semi-linéaire dans lequel la source de chaleur est une fonction Lipschitz de la température. nous montrons rigoureusement, avec des estimations d'erreur fournies, que les solutions régularisées correspondantes convergent fortement vers la solution exacte dans L^2 uniformément par rapport à la coordonnée spatiale sous certaines hypothèses a priori sur la solution.

Mots-clés : *Equation de la conduction Thermique semi-linéaire, Problème inverse, problème mal-posé, Estimation d'erreurs, régularisation.*

Abstract

The present memory we consider an inverse semi linear heat conduction problem, and we assume that there existe a heat source which is significantly dependant on space, time and temperature and heat flux.

The problem is ill-posed in the sense that the solution(if it exists) does not depend continuously on the cauchy data. In order to obtain a stable numerical solution, we propose two regularization methods to solve the semilinear problem in which the heat source is a Lipschitz function of temperature. we show rigourously, with error estimates provided, that the corresponding regularized solutions converge to the true solution strongly in L^2 uniformily with respect to the space coordinate under some a priori assumptions on the solution.

Keywords : *Semi linear heat conduction equation, inverse problems, Ill-posed problem, regularization ,errors estimats , regularization.*

Remerciements

Avant tout je remercie Allah le tout puissant qui m'a donné la volonté, le courage, la force et la patience pour réaliser ce travail.

- Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements et ma profonde gratitude à mon rapporteur monsieur le docteur : *BENRABAH ABDERAFIK* (Univ. Guelma) pour son encadrement continu, pour les remarques constructives qu'il me fournies, ainsi que pour ses précieux conseils durant toute la période de réalisation de mon projet de fin d'étude.
Mes remerciements lui vont aussi pour le temps qu'il a consacré pour les corrections et la révision du contenu de mon mémoire.
En dehors de son apport en matière d'analyse scientifique, je n'oublierai pas de le remercier pour ses qualités humaines, son hospitalité et le soutien qui m'a permis de mener à terme ce mémoire.

- Je tiens également à remercier *M. Bousstila. N* (Dr. Univ. Guelma) qui m'a fait l'honneur de présider ce jury, ainsi que *M. Hamlaoui. H* (Dr. Univ. Guelma), pour avoir accepté de faire partie du jury et d'y avoir consacré une partie de leurs temps.

- Je remercie chaleureusement tous les membres de la composante administrative du département de mathématiques (Univ. Guelma) pour toute l'aide qui m'a été accordée.

- Une grande reconnaissance et un grand remerciement à tous mes enseignants qui ont participé à ma formation.

- Je remercie aussi ma famille, mes amis. Enfin, un grand merci à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de cette mémoire.

Dédicace

Tout d'abord, je tiens à remercier DIEU le tout puissant
De m'avoir donné la force et le courage de mener à bien ce modeste travail.
Je tiens à dédier cet humble travail à :
Mon cher père ***ALI*** *qui m'a apporté son appui durant toutes mes années d'études, qui m'a appris le sens de la persévérance tout au long de mes études, pour son sacrifice et ses conseils et soutien qui m'ont donné confiance, courage et sécurité, Que Dieu le garde.*
Ma chère mère ***NADIA*** *de m'avoir toujours soutenu durant mon enfance et pendant les années d'études, pendant les bons moments et les plus difficiles, merci de m'avoir toujours encouragé et cru en moi, mon chère sœur :* ***MOUNA*** *pour ses encouragement permanent, a mon frère,* ***MOUHAMED CHAWKI****, pour son soutien, Que Dieu les garde.*
Mes chères copines : ***CH. Bouthaina****;* ***N. Oumaima****;* ***Z. warda****, qui ont toujours cru en moi pendant toutes ces années vous étiez plus que des collègues ou des amies, vous êtes et vous resterez mes sœurs, mes meilleures amies par excellence. j'ai appris tellement avec vous, vous avez rendu mes journées plus joyeuses et ma vie débordante de joie.*
Mes chères collègues : ***L. Safa****;* ***H. Chaima****;* ***F. Razika****;* ***O.M. Feriel*** *qui m'ont donné beaucoup de courage, et qui sont restés toujours serviables surtout aux moments difficiles tout au long de mon cursus universitaire.*
Et à ma chère tante ***NASSIMA****, qui était avec nous dans les moments difficiles.*

Table des matières

Contenu du Mémoire

Le présent manuscrit est composé de trois chapitres, le premier est un petit rappel sur l'étude d'existence, d'unicité et de stabilité pour une équation classique de la conduction thermique. Le second chapitre est consacré à l'étude d'un problème mal-posé pour une équation semi-linéaire de la conduction thermique et la présentation de deux méthodes de règularisation.

Le dernier chapitre présente la démonstration détaillée des deux théorèmes de l'estimation d'erreur pour les deux méthodes de règularisation proposées.

Le manuscrit se termine par une conclusion et quelques perspectives.

CHAPITRE 1

Problème classique de la conduction thermique

1.1 Introduction

1.1.1 Flux de chaleur

La loi fondamentale définissant la relation entre le flux de chaleur et le gradient de température est basée sur des observations expérimentales, est généralement nommé après le physicien mathématicien Joseph Fourier qui l'a utilisé dans sa théorie analytique de la chaleur.
Pour un solide isotrope homogène (c'est-à-dire un matériau dans lequel la conductivité thermique est indépendante de la direction), la loi de Fourier est donnée sous la forme

$$\mathbf{q}(M,t) = -k\nabla u(M,t), \tag{1.1.1}$$

où le gradient de température ∇u est un vecteur normal à la surface isotherme, le vecteur de flux de chaleur $\mathbf{q}(M,t)$ représente le flux de chaleur par unité de temps, par unité de surface de la surface isotherme dans le sens de la température décroissante, et k est appelé la conductivité thermique du matériau qui est une quantité scalaire positive. Dans un système de coordonnées cartésiennes, par exemple, l'équation (1.1.1) s'écrit

$$\mathbf{q}(x,y,z,t) = -k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}\right),$$

où **i**,**j** et **k** sont les vecteurs de direction unitaire le long des directions x, y et z, respectivement.

1.1.2 Équations de la conduction thermique

Nous dérivons maintenant l'équation différentielle de la conduction thermique pour un solide stationnaire, homogéne et isotrope avec génération de chaleur dans le corps. La génération de chaleur peut être due à des sources peu claires, électriques, chimiques, gamma ou autres qui peuvent être une fonction du temps et/ou de la position. Le taux de génération de la chaleur dans le milieu est généralement spécifiée comme génération de chaleur par unité de temps, par unité de volume, est désigné par le symbole $g(M,t)$.
Considérons un élément de volume arbitraire V de la surface limite S dans un domaine de conduction thermique Ω et un processus de conduction thermique dans une période de temps arbitraire $[0,T]$.
La première loi de la thermodynamique stipule que

$$\begin{pmatrix} \text{la chaleur} \\ \text{entrant par S} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{production d'énergie} \\ \text{en V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{changement de stockage} \\ \text{d'énergie en V} \end{pmatrix}$$

Divers termes de cette équation sont évalués comme suit.

—

$$\begin{aligned} \text{Premier terme du côté gauche} = \int_0^T \iint_S \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}dSdt &= -\int_0^T \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{q}dVdt \\ &= k\int_0^T \iiint_V \Delta u dVdt, \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

—

$$\text{Deuxième terme du côté gauche} = \int_0^T \iiint_V g(M,t)dVdt, \tag{1.1.3}$$

—

$$\text{Terme dans le côté droit} = \int_0^T \iiint_V \rho c \frac{\partial u(M,t)}{\partial t} dVdt. \tag{1.1.4}$$

Ici **n** est le vecteur unitaire normal orienté vers l'extérieur à l'élément de surface dS, et ρ et c sont respectivement la densité, et la chaleur spécifique du matériau. Notions également

que nous utilisons le théorème de divergence pour convertir l'intégrale de surface en une intégrale de volume.
En les remplaçant dans l'équation du bilan énergétique, on obtient

$$\int_0^T \iiint_V \left[k\Delta u + g(M,t) - \rho c \frac{\partial u(M,t)}{\partial t} \right] dV dt = 0.$$

Par la continuité de l'intégrale et le théorème de localisation, on obtient

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u + g(M,t), \quad M \in \Omega, \quad t > 0$$

où

$$u_t = a^2 \Delta u + f, \tag{1.1.5}$$

avec $a^2 = k/(\rho c), f = g/(\rho c)$.
L'équation (1.1.5) est appelée équation tridimensionnelle de conduction thermique avec génération de chaleur. Elle est du seconde ordre, linéaire et non homogène.
Pour un milieu à conductivité thermique uniforme et sans génération de chaleur, l'équation (1.1.5) devient

$$u_t = a^2 \Delta u.$$

C'est ce qu'on appelle l'équation de conduction thermique tridimensionnelle. Elle est de second ordre, linéaire et homogène.
Ici, la diffusivité thermique a^2 est une propriété d'état du milieu et a pour dimension L^2/T.
L'importance physique de la diffusivité thermique est associée à la vitesse de propagation de la chaleur dans le solide lors des changements de température sur temps. La vitesse de propagation de la chaleur dans le milieu est proportionnelle à la diffusivité thermique.

Remarque 1.1.1. Pour la conduction thermique dans les plans, nous avons l'équation de conduction thermique bidimensionnelle $u_t = a^2 \Delta u$ et $u_t = a^2 \Delta u + f(x,y,t)$. Pour la conduction thermique dans les tiges, nous avons les équations de conduction thermique unidimensionnelles $u_t = a^2 u_{xx}$ et $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$. Ce sont des cas particuliers de l'équation de conduction thermique tridimensionnelle.

Remarque 1.1.2. De nombreux autres problèmes physiques conduisent également à des équations de conduction thermique. En général, l'équation de conduction thermique décrit la diffusion. La variable dépendante u n'est pas nécessairement la température et elle peut représenter d'autres grandeurs physiques.

1.2 Problèmes mixtes unidimensionnels

1.2.1 Condition aux limites du premier type

Trouver la solution de l'EDP

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad (0,l)\times(0,+\infty), \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Solution

Pour le cas $f(x,t) = 0$, la solution de l'EDP (1.2.1) est

$$\begin{cases} u = W_\varphi(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k e^{-(\frac{k\pi a}{l})^2 t} \sin\frac{k\pi x}{l}, \\ b_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx. \end{cases} \tag{1.2.2}$$

Par conséquent, la solution de l'EDP (1.2.1) pour le cas $\varphi(x) = 0$ serait

$$\begin{aligned} u &= \int_0^t W_{f_\tau}(x,t-\tau)d\tau = \int_0^t \sum_{k=1}^{+\infty} b_k e^{-(\frac{k\pi a}{l})^2(t-\tau)} \sin\frac{k\pi x}{l}d\tau \\ &= \int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

où

$$G(x,\xi,t-\tau) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{l}e^{-(\frac{k\pi a}{l})^2(t-\tau)}\sin\frac{k\pi\xi}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}$$

est appelée la fonction de Green du problème mixte de l'équation unidimensionnelle de la conduction de la chaleur sous des conditions aux limites de première espèce.
Quand $f(x,t) = \delta(x-x_0, t-t_0)$, alors

$$u = \int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\delta(\xi-x_0,\tau-t_0)d\xi d\tau = G(x,x_0,t-t_0)$$

$G(x, x_0, t-t_0)$ est donc la distribution de température dans un barreau de conduction thermique qui est due à un terme source(le terme non homogène $f(x,t)$ dans l'équation) de l'unité δ-fonction $\delta(x-x_0, t-t_0)$ ou la distribution de température provoquée par une source ponctuelle unitaire à l'instant t_0 et au point spatial x_0. Donc, $u = G(x, \xi, t-\tau)$ satisfait

$$\begin{cases} G_t = a^2 G_{xx} + \delta(x-\xi, t-\tau), \quad 0 < x < l, 0 < \tau < t < +\infty, \\ G|_{x=0} = G|_{x=l} = 0, \\ G|_{t=\tau} = 0. \end{cases} \tag{1.2.4}$$

La solution de L'EDP (1.2.1) est, (par le principe de superposition), la somme des Éqs.(1.2.2) et (1.2.3).

1.3 Existence,unicité et stabilité

1.3.1 Existence

Nous avons obtenu la solution de (1.2.1) en utilisant la méthode de séparation des variables ou (la méthode de Fourier,)

$$\begin{cases} u = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k e^{-(\frac{k\pi a}{l})^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l}, \\ b_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \end{cases} \tag{1.3.1}$$

Pour prouver que la solution en série (1.3.1) satisfait l'EDP (1.2.1) de sorte qu'elle est la solution classique de l'EDP (1.2.1), nous devons montrer la convergence de la série (1.3.1) et la convergence uniforme de la série résultante après avoir pris la dérivée par rapport à t et la dérivée seconde par rapport à x, terme à terme. Soit le domaine :

$$D = \{0 \leq x \leq l; \quad 0 \leq t \leq T\}$$

(T est une constante positive arbitraire) et $u_k(x,t)$ est le terme général de la série (1.3.1).
On a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\partial u_k}{\partial t} = \sum_{k=1}^{+\infty} -\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 b_k e^{-(\frac{k\pi a}{l})^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l}, \tag{1.3.2}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 b_k e^{-(\frac{k\pi a}{l})^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l}. \tag{1.3.3}$$

Pour tout entier naturel k,

$$\left|\sin \frac{k\pi x}{l}\right| \leq 1, \quad |b_k| \leq \frac{2}{l}\int_0^1 |\varphi(x)|dx = constant,$$

et pour tout nombre naturel fixé N, $\lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} \frac{k^N}{e^{k^2}} = 0$, il existe une constante C telle que

$$|u_k(x,t)| \leq \frac{C}{k^2}, \quad \left|\frac{\partial u_k}{\partial x}\right| \leq \frac{c}{k^2}, \quad \left|\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}\right| \leq \frac{c}{k^2}.$$

$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{c}{k^2}$ est également convergente. Par conséquent, les séries (1.3.1), (1.3.2) et (1.3.3) sont toutes uniformément convergentes, nous pouvons donc prendre les dérivées des séries (1.3.1) terme à terme. Ainsi la solution (1.3.1) est vérifiée.

Remarque 1.3.1. La convergence uniforme d'une série de fonction n'est pas suffisante pour la différenciation terme à terme de la série. Elle est cependant assurée par la convergence uniforme de la série elle-même et de toutes les séries issues de la différenciation terme à terme.

1.3.2 Unicité

La preuve de l'unicité et de la stabilité est basée sur le phénomène physique important suivant :

Considérons la conduction thermique unidimensionnelle dans une tige sans aucune source de chaleur interne. Soit M la température maximale des deux extrémités et une distribution initiale. La température est alors inférieure ou égale à M en tout point du la tige et à tout instant de temps. Cela peut être physiquement compris et peut également être prouvé mathématiquement.

Théorème 1.3.1. *[1]. Supposons que $u(x,t)$ est continue dans le domaine*

$$D : \{0 \leq x \leq l; \quad 0 \leq t \leq T\},$$

(T est une constante positive quelconque, et vérifie $u_t = a^2 u_{xx}$ dans D. $u(x,t)$ ne peut alors prendre sa valeur maximale ou minimale qu'au bord

$$\Gamma : \{x = 0, x = l, t = 0\}.$$

C'est ce qu'on appelle le principe du maximum de la conduction de la chaleur.

Preuve. [1]. Sans perte de généralité, on considère uniquement le cas de la valeur maximale. Il faut alors partir de la condition donnée pour arriver à

$$\max_D u(x,t) = \max_\Gamma u(x,t) \tag{1.3.4}$$

et $M = \max_D u(x,t), \overline{M} = \max_\Gamma u(x,t)$. Supposer $M > \overline{M}$. Il existerait un point (x_0, t_0) à l'intérieur de D tel que

$$\max_D u(x,t) = u(x_0,t_0) = M > \overline{M}.$$

Définir une nouvelle fonction $v(x,t)$ par

$$v(x,t) = u(x,t) + \frac{M-\overline{M}}{4l^2}(x-x_0)^2, \quad (x,t) \in D.$$

Alors

$$v_t - a^2 v_{xx} = u_t - a^2 u_{xx} - a^2 \frac{M-\overline{M}}{2l^2} = -a^2 \frac{M-\overline{M}}{2l^2} < 0, \tag{1.3.5}$$

$$v(x_0,t_0) = u(x_0,t_0) = M. \tag{1.3.6}$$

Aussi, sur la frontière Γ,

$$v(x,t) < \overline{M} + \frac{M-\overline{M}}{4} = \frac{M}{4} + \frac{3\overline{M}}{4} = \theta M, \tag{1.3.7}$$

où $0 < \theta < 1$. lÉq. (1.3.6) et (1.3.7) montrent que $v(x,t)$ ne prend pas sa valeur maximale sur Γ. Soit (x_1,t_1) le point à l'intérieur de D, où $v(x,t)$ prend sa valeur maximale. Au point (x_1,t_1),on a $v_{xx} \leq 0$,$v_t \geq 0$ ($v_t = 0$ si $t_1 < T$, $v_t \geq 0$ si $t_1 = T$) tel que $v_t - a^2 v_{xx} \geq 0$. Ceci contredit l'Eq.(1.3.5) donc on arrive à l'éq.(1.3.4).

L'unicité découle du principe extrême de la conduction thermique. Soit u_1 et u_2 deux solutions de l'EDP (1.2.1). La fonction w définie par $u_1 - u_2$ satisfait

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx}, \quad (0,l) \times (0,+\infty) \\ w(0,t) = w(l,t) = 0, \\ w(x,0) = 0. \end{cases} \tag{1.3.8}$$

Par le principe extremum de conduction thermique, $w(x,t) = 0$ donc $u_1 = u_2$. □

1.3.3 La stabilité

Considérons toute petite variation de $\varphi(x)$ dans $0 \leq x \leq l$ de $\varphi_1(x)$ à $\varphi_2(x)$

$$\|u_1(x,0) - u_2(x,0)\| = \|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\| < \epsilon,$$

où ϵ est une petite constante, $\|\cdot\|$est la norme au sens de l'approximation uniforme. Par le principe maximum de la conduction thermique,

$$\|u_1(x,t) - u_2(x,t) \leq \max_{0\leq x\leq l} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \epsilon,$$

où $u_1(x,t)$ et $u_2(x,t)$ sont les deux solutions de l'EDP (1.2.1) correspondant respectivement à $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$. Par conséquent, la solution de l'EDP (1.2.1) est stable ce qui montre que le problème (1.2.1) est bien posé.

Chapitre 2

Problème inverse de conduction thermique (PICT)

2.1 Motivation physique

Beaucoup de phénomènes naturels sont modélisés par des équations aux dérivées partielles. Nous pouvons citer par exemple les prévisions météorologiques (où interviennent un grand nombre de paramètres), les secousses sismiques, les mouvements des océans, des disciplines scientifiques telles l'économie, la finance, les sciences médicales.

Les équations aux dérivées partielles interviennent aussi dans les problèmes physiques en électromagnétisme (équations de Maxwell), en mécanique des fluides (équation de Navier-Stokes), en mécanique quantique pour ne citer que ceux là.

Les problèmes inverses de la conduction thermique (IHCP) : (Inverse Heat Conduction Problem) surviennent dans de nombreuses situations physiques où une partie de la frontière d'un corps (chauffè/ refroidi) est inaccessible à la mesure [1]. Dans ce cas l'information manquante est complétée a partir du bord où même à l'intérieur du corps lui-même. On peut citer à titre d'exemple, la détermination précise du "Pic" de température à l'intérieur d'un canon au moment du tire [6], l'analyse de sécurité d'élément de réacteurs nucléaires où la mesure de la température au niveau de la paroi interne d'un cylindre creux est utilisée pour trouver la température et le flux de chaleur non spécifiés/indisponibles au niveau de la paroi externe qui se refroidit brusquement [4].

La détermination de la température et du flux de chaleur à la surface d'un panneau de particules, sur lequel une couche fine de revêtement de laque est appliquée, [2] Toutes ces applications pratiques peuvent être modélisées mathématiquement par un problème inverse de la conduction thermique [5].

2.2 Position du problème

Trouver $u(x,t)$ pour $(x,t) \in [0,L] \times [0,2\pi]$ à partir d'une température $u(L,t) = g(t)$ et un flux $u_x(L,t) = h(t)$ données vérifiant le problème suivant :

$$(P) \qquad \begin{cases} u_t(x,t) = & u_{xx}(x,t) + F(x,t,u(x,t)), \qquad 0 < x < L, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \\ u(L,t) = & g(t), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi, \\ u_x(L,t) = & h(t), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi, \end{cases}$$

où

$$\|g^{\epsilon} - g\| + \|h^{\epsilon} - h\| \leq \epsilon, \tag{2.2.1}$$

et $\|.\|$ est la norme $L^2(0,2\pi)$ et $\epsilon > 0$ est un réel positif qui représente le niveau de bruit.

Soit $< \cdot, \cdot >$ le produit scalaire dans $L^2(0,2\pi)$, considérons la série de Fourier donnée par

$$f(t) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} < f(t), e^{-int} > e^{int},$$

où

$$< f(t), e^{-int} >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Il est bien connu que la série de Fourier de f converge dans $L^2(0,2\pi)$ vers f.

Cette convergence ponctuelle est assurée si f est continue dans $[0,2\pi]$ et $f(0) = f(2\pi)$.

si cette dernière condition n'est pas vérifiée, on considère l'extension f^* de f définie par

$$\begin{cases} f^*(t) = f(t), \quad \text{pour} \quad t \in [0,2\pi] \\ f^*(2\pi) = f^*(0), \\ f^*(t+2\pi) = f^*(t), \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.2.2}$$

avec cette définition, la valeur de l'intégrale ne dépend pas de l'intervalle d'intégration, puisque

$$\int_0^{2\pi} f(t)dt = \int_0^{2\pi} f^*(t)dt = \int_0^{2\pi+a} f^*(t)dt \qquad \text{pour tout} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Soit
$$\|f\|^2 = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} | < f(t), e^{-int} > |^2 \tag{2.2.3}$$
La norme de f dans $L^2(0, 2\pi)$.

La valeur principale de $\sqrt{in}$ est donnée par

$$\sqrt{in} = \begin{cases} (1+i)\sqrt{|n|/2}, & n \geq 0 \\ (1-i)\sqrt{|n|/2}, & n < 0. \end{cases} \tag{2.2.4}$$

2.3 Méthode de résolution

Cherchons la solution du problème (P) sous-forme d'une série de fourier, en posant

$$u(x,t) \backsimeq u^*(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n(x)e^{int} \tag{2.3.1}$$

avec u^* est l'extension de u définie comme suit

$$u^*(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & \text{si} \quad t \in [0, 2\pi] \\ u^*(x,0) = u^*(x,2\pi) & \text{si} \quad t = 0, t = 2\pi \\ u^*(x,t+2\pi), & \text{si} \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.3.2}$$

et $u_n(x)$ est le coefficient de Fourier (exponontiel) donné par

$$u_n(x) =< u(x,t), e^{-int} >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x,t)e^{-int}dt \tag{2.3.3}$$

Remarque 2.3.1. $\int_0^{2\pi} u(x,t)dt = \int_0^{2\pi} u^*(x,t)dt = \int_0^{2\pi+a} u^*(x,t)dt$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, car u^* est une fonction 2π périodique. On peut montrer que $u^*(x,.)$ converge ponctuellement dans $L^2(0,2\pi)$ vers $u(x,.)$ dès que $u(x,.)$ est continue. Par cette remarque, (cet argument) et à partir de là nous identifions u^* avec u.

On injecte l'expression de $u(x,t)$ donnée par (2.3.1) dans le problème (P), on obtient.

$$\begin{cases} \sum_{n\in\mathbb{Z}} inu_n(x)e^{int} = & \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{d^2u_n(x)}{dx^2}e^{int} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_n(u)(x)e^{int} \\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n(L)e^{int} = & \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n e^{int} =< g(t), e^{-int} >, \\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{du_n(L)}{dx}e^{int} = & \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n e^{int} =< h(t), e^{-int} >, \end{cases} \tag{2.3.4}$$

$$et \quad F_n(u)(x) =< F(x,t,u(x,t), e^{-int} >= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x,t,u(x,t)e^{-int}dt. \tag{2.3.5}$$

Puisque $(e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ forme une base de $L^2(0,2\pi)$ et par un argument d'orthogonalité, on obtient

$$\begin{cases} -\frac{d^2u_n(x)}{dx^2} + inu_n(x) = F_n(u)(x), \\ u_n(L) = g_n, \\ \frac{du_n(L)}{dx} = h_n. \end{cases} \tag{2.3.6}$$

• Pour $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, multiplions la première équation dans (2.3.6) par $\frac{\sinh(z-x)\sqrt{in}}{\sqrt{in}}$ et en intégrant les deux côtés de l'équation de x à L, on obtient :

$$\underbrace{\int_x^L -\frac{d^2u_n(z)}{dx^2(z)}\frac{\sinh(z-x)\sqrt{in}}{\sqrt{in}}dz}_{T_1} + \underbrace{\int_x^L \sqrt{in}u_n(z)\frac{\sinh(z-x)\sqrt{in}}{\sqrt{in}}dz}_{T_2}$$
$$= \underbrace{\int_x^L F_n(u)(z)\frac{\sinh(z-x)\sqrt{in}}{\sqrt{in}}dz}_{T_3}. \tag{2.3.7}$$

Commençons par T_1 :

$$T_1 = \int_x^L -\frac{d^2u_n(z)}{dx^2(z)}\frac{\sinh((z-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}}dz,$$

une première intégration par parties donne.

$$\begin{aligned} T_1 &= -\frac{du_n(z)}{dz}\frac{\sinh((z-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}}\Big|_x^L - \int_x^L -\frac{du_n(z)}{dz}\cosh((z-x)\sqrt{in})dz \\ &= -\frac{du_n(L)}{dz}\frac{\sinh((L-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}} + u_n(z)\cosh((z-x)\sqrt{in})\ \Big|_x^L \\ &- \int_x^L u_n(z)\sqrt{in}\sinh((z-x)\sqrt{in})dz, \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

par une deuxième intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned} T_1 &= -u_n'(L)\frac{\sinh(L-x)\sqrt{in}}{\sqrt{in}} + u_n(L)\cosh((L-x)\sqrt{in}) \\ &- u_n(x) - \sqrt{in}\int_x^L u_n(z)\sinh((z-x)\sqrt{in})dz. \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

D'après (2.3.8) et (2.3.9) on trouve

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 &= u_n(L)\cosh((L-x)\sqrt{in}) - u_n'(L)\frac{\sinh((L-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}} - u_n(x) \\ &= \int_x^L F_n(u)(z)\frac{\sinh(z-x)\sqrt{in}}{\sqrt{in}}dz \end{aligned}$$

Donc, on tire $u_n(x)$, on obtient :

$$\begin{aligned} u_n(x) &= u_n(L)\cosh((L-x)\sqrt{in}) - u_n'(L)\frac{\sinh((L-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}} \\ &- \int_x^L F_n(u)(z)\frac{\sinh(z-x)\sqrt{in}}{\sqrt{in}}dz \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

• Pour $n = 0$, Multiplions l'équation $-u_n''(x) + inu_n(x) = F_n(u)(x)$ par $(z-x)$ et en intégrant par rapport à z de x à L, on obtien :

$$\int_x^L (z-x)u_0''(z)dz = \int_x^L (z-x)F_0(u)(z)dz,$$

une intégration par partie donne

$$\begin{aligned}(z-x)u_0'(z)\mid_x^L - \int_x^L u_0'(z)dz &= \int_x^L (z-x)F_0(u)(z)dz \\ &\Updownarrow \\ (L-x)u_0'(L) - u_0(L) + u_0(x) &= \int_x^L (z-x)F_0(u)(z)dz,\end{aligned}$$

donc

$$u_0(x) = u_0(L) - (L-x)u_0'(L) + \int_x^L (z-x)F_0(u)(z)dz$$

Notons par

$$\tilde{F}(g_0, h_0, v)(x) := g_0 - (L-x)h_0 + \int_x^L (z-x)F_0(v)(z)dz. \tag{2.3.11}$$

En combinant cette dernière relation (quand $n=0$) avec la solution donnant $u_n(x)$, dans le cas $n \neq 0$, on obtient la solution du problème :

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\left[\cosh((L-x)\sqrt{in})g_n - \frac{\sinh((L-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}}h_n\right. \\ &\quad \left. - \int_x^L \frac{\sinh((z-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}}F_n(u)(z)dz\right]e^{int} + \widetilde{F}(g_0,h_0,u)(x).\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

Remarque 2.3.2. On remarque que le terme $\cosh((L-x)\sqrt{in})$ vérifie :

$$\begin{aligned}\left|\cosh((L-x)\sqrt{in})\right| &= \frac{1}{2}\left|e^{\sqrt{in}(L-x)} + e^{-\sqrt{in}(L-x)}\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\left[e^{\sqrt{\frac{|n|}{2}}(L-x)} + e^{-\sqrt{\frac{|n|}{2}}(L-x)}\right] \\ &\leq e^{\sqrt{\frac{|n|}{2}}(L-x)},\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

et

$$|\cosh(L-x)\sqrt{in}| \geq \frac{e^{\sqrt{\frac{|n|}{2}}(L-x)} - e^{-\sqrt{\frac{|n|}{2}}(L-x)}}{2} \geq \frac{e^{\sqrt{\frac{|n|}{2}}(L-x)} - 1}{2}, \tag{2.3.14}$$

de même

$$\frac{e^{\sqrt{\frac{|n|}{2}}(z-x)}-1}{2\sqrt{|\, n\,|}} \leq \left|\frac{\sinh((z-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}}\right| \leq \frac{e^{\sqrt{\frac{|n|}{2}}(z-x)}}{\sqrt{|\, n\,|}} \qquad \forall 0 \leq n \leq z \leq L. \tag{2.3.15}$$

Alors les trois fonctions dans l'expression de la solution $A_1 = \cosh((L-x)\sqrt{in})$, $A_2 = \dfrac{\sinh((L-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}}$ et $A_3 = \dfrac{\sinh((z-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}}$ sont non bornées comme fonctions de la variable n pour tout $x \in [0,\ L\,[$ (Quand $L = x$, les deux premières fonctions sont bornées), donc une petite erreur peut provoquer une très grande erreur dans la solution pour $x \in$ $x \in [0,\ L\,[$.

L'idée naturelle pour stabiliser le problème consiste à éliminer les hautes fréquences, ou bien de remplacer ces fonctions par d'autres bornées à partir d'une approximation bien choisie.

• **Première idée**

On remplace via un paramètre $\epsilon > 0$, A_1, A_2 et A_3 respectivement par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} A_1^{\epsilon} &= \cosh^{\gamma(\epsilon)}((L-x)\sqrt{in}) \\ A_2^{\epsilon} &= \frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}((L-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}} \\ A_3^{\epsilon} &= \frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}((z-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}} \end{aligned} \tag{2.3.16}$$

Remarque 2.3.3. On peut remarquer les points suivants

$-i-$ Si $\gamma = \gamma(\epsilon) > 0$ est fixé, le terme

$$\cosh^{\gamma(\epsilon)}((L-x)\sqrt{in}) \quad \text{et} \quad \frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}((z-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}}$$

sont bornés, comme fonctions de la variable $n \in \mathbb{Z}\setminus \{0\}$.

$-ii-$ Si le parmètre $\gamma > 0$ est petit, alors pour n assez petit les fonctions

$$\cosh^{\gamma(\epsilon)}((L-x)\sqrt{in}) \quad \text{et} \quad \frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}((z-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}},$$

sont proches de

$$\cosh^{\gamma(\epsilon)}((L-x)\sqrt{in}) \quad \text{et} \quad \frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}((z-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}}$$

respectivement. (dans un sens bien déterminer)

$-iii-$ La propriété (ii) donne (mesure) le degré d'approximation entre les fonctions A_1, A_2, A_3 et les fonction A_1^ϵ, A_2^ϵ et A_3^ϵ par raport à l'écriture en fréquences.

$-vi-$ Le point (i) décrit le degré de dépendance continue, quand les termes A_1^ϵ, A_2^ϵ, A_3^ϵ sont bornés. Dans ce cas la solution dépend d'une manière continue par raport aux données.

2.4 Première Méthode de régularisation

D'après (2.3.12) et (2.3.16) on définit la solution régularisée comme suit

$$\begin{aligned} U^\epsilon(x,t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\Bigg[\cosh^{\gamma(\epsilon)}((L-x)\sqrt{in})g_n^\epsilon - \frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}((L-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}}h_n^\epsilon \\ &- \int_x^L \frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}((z-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}}F_n(U^\epsilon)(z)dz\Bigg]e^{int} + \widetilde{F}(g_0^\epsilon, h_0^\epsilon, U^\epsilon)(x), \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

où

$$\cosh^{\gamma(\epsilon)}((L-x)\sqrt{in}) := \cosh((L-x)\sqrt{in}) + \sqrt{in}\widetilde{P}^{\gamma(\epsilon)}(x,L,n), \tag{2.4.2}$$

$$\sinh^{\gamma(\epsilon)}((L-x)\sqrt{in}) := \sinh((z-x)\sqrt{in}) + \sqrt{in}\widetilde{P}^{\gamma(\epsilon)}(x,z,n) \tag{2.4.3}$$

et

$$\widetilde{P}^{\gamma(\epsilon)}(x,z,n) = \frac{\left[R^{\gamma(\epsilon)}(L,n)-1\right]e^{\sqrt{in}(z-x)}}{2\sqrt{in}} \tag{2.4.4}$$

Définition 2.4.1. Le caractère bien posé de la solution régularisée dépend de la fonction $R^{\gamma(\epsilon)}(L,n)$ appellé "fonction filtre" et aussi du paramètre de régularisation $\gamma(\epsilon) > 0$.
La fonction filtre doit vérifier les deux conditions suivantes.

C.1 :

$$\left|R^{\gamma(\epsilon)}(L,n)\right| e^{\sqrt{\frac{|n|}{2}y}} \leq [\gamma(\epsilon)]^{-y/L}, y \in [0,L] \tag{2.4.5}$$

C.2 :

$$\left|R^{\gamma(\epsilon)}(L,n) - 1\right| e^{\sqrt{-\frac{|n|}{2}y}} \leq [\gamma(\epsilon)]^{y/L} \tag{2.4.6}$$

Pour mieux expliquer ces deux conditions, considérons les exemples suivants :

Exemple 2.4.1.

$$R_1^{\gamma(\epsilon)}(L,n) = \frac{e^{-\sqrt{|n|/2}L}}{\gamma(\epsilon) + e^{-\sqrt{|n|/2}L}} \tag{2.4.7}$$

Premiérement en déduit , l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
\left|R_1^{\gamma(\epsilon)}(L,n)\right| e^{\sqrt{|n|/2}y} &= \frac{e^{-\sqrt{|n|/2}L}e^{\sqrt{|n|/2}y}}{\gamma(\epsilon) + e^{-\sqrt{|n|/2}L}} \\
&= \frac{e^{-\sqrt{|n|/2}(L-y)}}{\left[\gamma(\epsilon) + e^{-\sqrt{|n|/2}L}\right]^{(L-y)/L}\left[\gamma(\epsilon) + e^{-\sqrt{|n|/2}L}\right]^{y/L}} \\
&\leq \frac{1}{(\gamma(\epsilon) + e^{-\sqrt{|n|/2}L})^{y/L}} \\
&\leq \left[\frac{1}{\gamma(\epsilon)}\right]^{y/L} \\
&= [\gamma(\epsilon)]^{-y/L}
\end{aligned} \tag{2.4.8}$$

Ce qui montre que **(C.1)** est vérifiée.

Pour montrer **(C.2)**, on considère la fonction
$X : [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :

$$\begin{aligned}
X(y) &:= \gamma(\epsilon)^{-y/L}e^{-\sqrt{|n|/2}y} \\
&= e^{-\sqrt{|n|/2}y}e^{-\ln\left(\gamma(\epsilon)^{y/L}\right)} \\
&= e^{-\sqrt{|n|/2}y}e^{-y\ln(\gamma(\epsilon))^{1/L}} \\
&= e^{y\left(-\sqrt{|n|/2}-\ln(\gamma(\epsilon)^{1/L})\right)} \\
&= e^{y\Gamma},
\end{aligned} \tag{2.4.9}$$

où

$$\Gamma := -\sqrt{|n|/2} - \ln[\gamma(\epsilon)]^{1/L}.$$

Remarque 2.4.1. — On remarque que, si $\Gamma > 0$, la fonction X est croissante est

$$\sup = \max_{y\in[0,L]} X(y) = X(L) = \frac{e^{-\sqrt{|n|/2}L}}{\gamma(\epsilon)},$$

— et si $\Gamma \leq 0$, La fonction X est décroissante et

$$\max_{y\in[0,L]} X(y) = X(0) = 1.$$

Dans les deux cas , on obtient

$$\begin{aligned} X(y) &:= \gamma(\epsilon)^{-y/L} e^{-\sqrt{|n|/2}y} \\ &\leq \max_{y\in[0,L]} X(y) \\ &\leq 1 + \frac{e^{-\sqrt{|n|/2}L}}{\gamma(\epsilon)}, \end{aligned} \tag{2.4.10}$$

en utilisant (2.4.7) et (2.4.10), on obtient

$$\begin{aligned} \left| R_1^{\gamma(\epsilon)}(L,n) - 1 \right| e^{-\sqrt{|n|/2}y} &= \gamma(\epsilon) \frac{e^{-\sqrt{|n|/2}y}}{\gamma(\epsilon) + e^{-\sqrt{|n|/2}L}} \\ &\leq \frac{e^{-\sqrt{|n|/2}y}}{\gamma(\epsilon)^{-y/L} e^{-\sqrt{|n|/2}y}} \\ &= \gamma(\epsilon)^{y/L}. \end{aligned}$$

Exemple 2.4.2. Soit $R_2^{\gamma(\epsilon)}$ définie comme suit :

$$R_2^{\gamma(\epsilon)}(L,n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |n| \leq N_\epsilon, \\ 0 & \text{si} \quad |n| > N_\epsilon, \end{cases} \tag{2.4.11}$$

avec $N_\epsilon \longrightarrow \infty$ quand $\epsilon \to 0$.

$R_2^{\gamma(\epsilon)}$ représente une méthode de trancature sur le spectre.(i.e.élimination des hautes fréquences). Il suit alors :

$$\begin{aligned}\left|R_2^{\gamma(\epsilon)}(L,n)\right| e^{\sqrt{|n|/2}y} &= e^{\sqrt{|N_\epsilon|/2}y}\\ \left|R_2^{\gamma(\epsilon)}(L,n)-1\right| e^{-\sqrt{|n|/2}y} &= e^{-\sqrt{|N_\epsilon|/2}y},\end{aligned}$$

ce qui montre que $R_2^{\gamma(\epsilon)}$ vérrifie les relations **(C.1)** et **(C.2)** avec $\gamma(\epsilon) = e^{-L\sqrt{N_\epsilon/2}}$

Remarque 2.4.2. L'idée globale consiste à remplacer une quantité non bornée par une autre bornée, dépendante d'un petit paramètre (ici $\gamma(\epsilon)$) qui tend vers zéro quand $\epsilon \longrightarrow 0$ et par la suite avoir la relation suivante.
A partir de la condition **(C.2)**, on a

$$\lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\left|R^{\gamma(\epsilon)}(L,n)-1\right| e^{-\sqrt{|n|/2}y} \leq \lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\gamma(\epsilon)^{y/L} = 0,$$

ce qui implique que

$$\lim_{\epsilon\longrightarrow 0} R^{\gamma(\epsilon)}(L,n) = 1 \tag{2.4.12}$$

2.5 Espaces fonctionnel et Notations

Soit B un espace de Hilbert, on note par $L^\infty(0,L,B)$ l'espace défini par

$$L^\infty(0,L,B) = \left\{ f : [0,L] \longrightarrow B \setminus \sup_{0\leq z\leq L} \|f(z)\|_B < \infty \right\},$$

avec la norme

$$\|f\|_{L^\infty(0,L,B)} = \sup_{0\leq z\leq L} \|f(z)\|_B.$$

Pour $r \geq 0$ et δ, considérons les espaces.

$$G_\delta^r(0,2\pi) = \left\{ \theta \in L^2(0,2\pi) : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{2r} e^{\sqrt{2|n|\delta}} \left| < \theta(t), e^{-int} > \right|^2 < \infty \right\}, \tag{2.5.1}$$

$$V^r(0,2\pi) = \left\{ \theta \in L^2(0,2\pi) : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{2r} \left| < \theta(t), e^{-int} > \right|^2 < \infty \right\}, \tag{2.5.2}$$

c'est-à-dire $G_0^r = V^r$.

Avec les normes respectives.

$$\|\theta\|_{G^r_\delta(0,2\pi)} = \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{2r} e^{\sqrt{2|n|\delta}} |<\theta(t), e^{-int}>|^2} \tag{2.5.3}$$

$$\|\theta\|_{V^r(0,2\pi)} = \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{2r} |<\theta(t), e^{-int}>|^2}. \tag{2.5.4}$$

De plus $V^0(0,2\pi) = L^2(0,2\pi)$.

2.6 Estimations d'erreurs

On suppose premièrement que $F : [0,L] \times [0,2\pi] \times L^2(0,2\pi) \longrightarrow L^2(0,2\pi)$ est une fonction lipschitzienne, c'est-à-dire $\exists K_F \geq 0$ telle que

$$\|F(x,.,u(x,.)) - F(x,.,v(x,.))\| \leq K_F \|u(x,.) - v(x,.)\|, \tag{2.6.1}$$

$$\forall x \in [0,L], \forall u,v \in C\Big([0,L]; L^2(0,2\pi)\Big).$$

Maintenant, on donne un théorème pour l'estimation d'erreur entre la solution exacte et la solution régularisée.

Théorème 2.6.1. *On choisit le paramètre de régularisation $\gamma(\epsilon)$, telle que $0 < \gamma(\epsilon) < e^{-L}$ et*

$$\begin{cases} \lim\limits_{\epsilon\longrightarrow 0} \gamma(\epsilon) = 0 \\ \lim\limits_{\epsilon\longrightarrow 0} \dfrac{\epsilon}{\gamma(\epsilon)} \quad \text{est un réel non négatif.} \end{cases} \tag{2.6.2}$$

Alors, le problème régularisé admet une unique solution donnée par $U^\epsilon \in C\Big([0,L]; L^2(0,2\pi)\Big)$.

Soit de plus $R^{\gamma(\epsilon)}$ vérifiant (2.4.5) *et* (2.4.6), *alors*

(a) *On suppose que le problème (P) admet une solution vérifiant la condition*

$$\|u\|_{L^\infty(0,L,G^0_L(0,2\pi))} + \|u_x\|_{L^\infty(0,L,G^0_L(0,2\pi))} \leq I_1, \tag{2.6.3}$$

où I_1 est une constante positive donnée. Donc

$$\|U^\epsilon(x,.) - u(x,.)\| \leq E_1[\gamma(\epsilon)]^{x/L}, \quad x \in [0,L] \tag{2.6.4}$$

où

$$E_1 \geq \sqrt{3}\frac{\epsilon}{\gamma(\epsilon)} \exp\left(\frac{3\mathbb{K}_F^2 L^2}{2}\right) + \sqrt{2\pi} I_1 exp\left(\mathbb{K}_F^2 L^2\right). \tag{2.6.5}$$

(b) *Supposons de plus qu'il existe* $r > 0$ *tel que*

$$\left|R^{\gamma(\epsilon)}(L,n) - 1\right| |n|^{-r} e^{-\sqrt{|n|/2}y} \leq \widetilde{M}(\epsilon, r)[\gamma(\epsilon)]^{y/L} \quad \forall n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \forall y \in [0, L] \tag{2.6.6}$$

où $\widetilde{M}(\epsilon, r) \longrightarrow 0$ *quand* $\epsilon \longrightarrow 0$.

On suppose aussi que la solution du problème (P) *vérifie la condition suivante*

$$\|u\|_{L^\infty(0,L,G_L^r(0,2\pi))} + \|u_x\|_{L^\infty(0,L,G_L^r(0,2\pi))} \leq I_2, \tag{2.6.7}$$

pour une constante positive I_2*. Alors*

$$\|U^\epsilon(x,.) - u(x,.)\| \leq E_2[\gamma(\epsilon)]^{x/L}, \quad x \in [0, L] \tag{2.6.8}$$

où

$$E_2 \geq \sqrt{3}\frac{\epsilon}{\gamma(\epsilon)} \exp\left(\frac{3\mathbb{K}_F^2 L^2}{2}\right) + \sqrt{2\pi}\widetilde{M}(\epsilon, r) I_2 \exp\left(\mathbb{K}_F^2 L^2\right). \tag{2.6.9}$$

Remarque 2.6.1. Sous l'hypothèse (2.6.3), l'estimation (2.6.4) via (2.6.5) ne donne pas la dépendance continue de la solution par rapport aux données en $x = 0$. Cependant on doit supposer plus de condition (condition plus forte) sur la solution u, comme celle de (2.6.7) pour obtenir l'estimation d'erreur (2.6.8) via (2.6.9) en $x = 0$.

Pour obtenir l'approimation de la solution en $x = 0$, avec l'hypothèse (2.6.3), on choisit $x_\epsilon \in (0, L)$ telle que $\lim\limits_{\epsilon \longrightarrow 0} x_\epsilon = 0$ ensuite on a :

$$\begin{aligned}
\|U^\epsilon(x_\epsilon,.) - u(0,.)\| &\leq \|U^\epsilon(x_\epsilon,.) - u(x_\epsilon,.)\| + \|u(x^\epsilon,.) - u(0,.)\| \\
&\leq E_1[\gamma(\epsilon)]^{x_\epsilon/L} + x_\epsilon E_3,
\end{aligned} \tag{2.6.10}$$

où $E_3 = \sup\limits_{0 \leq x \leq L} \|u_x(x,.)\|$.

On peut montrer que pour tout $\gamma(\epsilon) > 0$, il existe x_ϵ unique $(x_\epsilon \in (0, L))$ tell que $\lim\limits_{\epsilon \longrightarrow 0} x_\epsilon = 0$ et $x_\epsilon = [\gamma(\epsilon)]^{x_\epsilon/L}$. Ceci implique que $\dfrac{\ln x_\epsilon}{x_\epsilon} = \dfrac{\ln x_\epsilon}{x_L}$, en utilisant l'inégalité $\ln(x) > \dfrac{-1}{x}$

pour tout $x > 0$, on obtient alors $x_\epsilon < \sqrt{\frac{L}{\ln(\frac{1}{\gamma(\epsilon)})}}$, ce qui donne

$$\|U^\epsilon(x_\epsilon,.) - u(0,.)\| \leq (E_1 + E_3)\sqrt{\frac{L}{\ln(\frac{1}{\gamma(\epsilon)})}} \tag{2.6.11}$$

Dans le but d'obtenir des estimations d'erreurs sous des hypothèses plus faibles par rapport aux conditions données dans (2.6.3) et (2.6.7), on développe une deuxième méthode de régularisation donnée par l'équation intégrale suivante :

2.7 Deuxième méthode de régularisation

$$\begin{aligned} U^\epsilon(x,t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left[\cosh^{\gamma(\epsilon)}\left((L-x)\sqrt{in}\right) g_n^\epsilon - \frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}((L-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}} h_n^\epsilon\right] e^{int} \\ &- \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left[\int_x^L \frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}((z-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}} F_n(U^\epsilon)(z)dz\right. \\ &+ \left.\int_0^x \widetilde{P}^{\gamma(\epsilon)}(x,z,n) F_n(U^\epsilon)(z)dz\right] e^{int} + \widetilde{F}(g_0^\epsilon, h_0^\epsilon, U^\epsilon)(x). \end{aligned} \tag{2.7.1}$$

Contrairement aux conditions (2.6.3) et (2.6.7), on va supposé que

$$\|u(0,\cdot)\| + \|u_x(0,\cdot)\| \leq \mathcal{I}_3, \tag{2.7.2}$$

$$\|u(0,\cdot)\|_{V^r(0,2\pi)} + \|u_x(0,\cdot)_{V^r(0,2\pi)}\| \leq \mathcal{I}_4, \quad r > 0, \tag{2.7.3}$$

Pour une constante positive donnée $\mathcal{I}_3$ et $\mathcal{I}_4$. Alors on obtient l'estimation d'erreur entre la solution exacte u et la solution régularisée U^ϵ.

Théorème 2.7.1. *Soit $\gamma(\epsilon)$ comme dans le théorème* (2.6.1) *et on suppose que $L\mathbb{K}_{\mathbb{F}} < 1$. Alors l'équation intégrale* (2.6.11) *admet une solution unique $U^\epsilon \in C([0,L]; L^2(0.2\pi))$. Soit $R^{\gamma(\epsilon)}$ vérifiant les conditions* (2.4.5) *et* (2.4.6)

— *(a) supposons que le problème (P) admet une solution u. Alors, sous la condition* (2.7.2) *on a*

$$\|U^{\epsilon}(x,\cdot)-u(x,\cdot)\| \leq E_4(\tilde{\alpha})\sqrt{\mathcal{I}_3^2+4\left(\frac{\epsilon}{\gamma(\epsilon)}\right)^2}\gamma(\epsilon)^{x/L}, \quad x\in[0,L], \tag{2.7.4}$$

où $\tilde{\alpha}\in\left(0,\frac{1}{\mathbb{K}_F^2L^2}-1\right)$, *et*

$$E_4(\tilde{\alpha}) := \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\tilde{\alpha}}}{1-(1+\tilde{\alpha})\mathbb{K}_F^2L^2}} \tag{2.7.5}$$

— *(b) Supposons qu'il existe* $r>0$ *telle que* (2.6.6) *est vérifie. On suppose de plus que le problème* (P) *admet une solution* u *vérifiant* (2.7.3). *Alors*

$$\|U^{\epsilon}(x,\cdot)-u(x,\cdot)\| \leq E_4(\tilde{\alpha})\sqrt{2\pi\widetilde{M}^2(\epsilon,r)\mathcal{I}_4^2+4\left(\frac{\epsilon}{\gamma(\epsilon)}\right)^2}\gamma(\epsilon)^{x/L},\ x\in[0,L] \tag{2.7.6}$$

Remarque 2.7.1. Sous l'hypothèse (2.7.2), l'estimation (2.7.4) n'assure pas la dépendance continue de la solution en $x=0$. Cependant, nous somme besoin des hypothèses plus fortes sur u comme dans (2.7.3), pour obtenir l'estimation d'erreur (2.7.6) en $x=0$.
de la même manière comme dans la remarque (2.6.1), il existe $x_\epsilon \in]0,L[$ telle que $\lim\limits_{\epsilon\longrightarrow 0} x_\epsilon = 0$ et

$$\|U^{\epsilon}(x,\cdot)-u(0,\cdot)\| \leq (E_3+E_4(\tilde{\alpha}))\sqrt{\frac{L}{\ln(\frac{1}{\gamma(\epsilon)})}}. \tag{2.7.7}$$

Remarque 2.7.2. Pour la méthode de trancature spectrale donnée par (2.4.11), la condition (2.6.6), est vérifiée avec $\widetilde{M}(\epsilon,r)=N_\epsilon^{-r}$ et $\gamma(\epsilon)=e^{-L\sqrt{N_\epsilon/2}}$.
Premierement, on a les lemmes suivants qui seront utiles dans la démonstration des théorèmes (2.6.1) et (2.7.1).

Lemme 2.7.1. *Pour* $0<\gamma(\epsilon)<e^{-L}$ *on a*

$$\gamma(\epsilon)^{\frac{x-L}{L}} \geq 1, \quad 0\leq x\leq L, \tag{2.7.8}$$

$$x \leq \gamma(\epsilon)^{\frac{-x}{L}}, \quad 0\leq x\leq L. \tag{2.7.9}$$

la preuve est omise.

Lemme 2.7.2. *Pour* $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ *et* $0 < \gamma(\epsilon) < e^{-L}$, *on a les inégalités suivantes :*

$$\left|\widetilde{p}^{\gamma(\epsilon)}(x,z,n)\right| \leq \gamma(\epsilon)^{\frac{x-z}{L}}, \quad 0 \leq z \leq x \leq L, \tag{2.7.10}$$

$$\left|\cosh^{\gamma(\epsilon)}((L-x)\sqrt{in})\right| \leq \gamma(\epsilon)^{\frac{x-L}{L}}, \quad x \in [0,L] \tag{2.7.11}$$

$$\left|\frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}((z-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}}\right| \leq \gamma(\epsilon)^{\frac{x-z}{L}}, \quad 0 \leq x \leq z \leq L. \tag{2.7.12}$$

Preuve. D'après (2.4.4) et (2.4.6), on obtient (2.7.10) comme suit :

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{p}^{\gamma(\epsilon)}(x,z,n)\right| &= \left|\frac{(1-R^{\gamma(\epsilon)}(L,n))e^{\sqrt{in}(z-x)}}{2\sqrt{in}}\right| &(2.7.13)\\ &\leq \frac{\gamma(\epsilon)^{\frac{x-z}{L}}}{2\sqrt{in}} \leq \gamma(\epsilon)^{\frac{x-z}{L}}, \quad 0 \leq z \leq x \leq L. &(2.7.14)\end{aligned}$$

D'après (2.4.2),(2.4.4),(2.4.5)et (2.7.8), on obtient (2.7.11) comme suit :

$$\begin{aligned}\left|\cosh^{\gamma(\epsilon)}((L-x)\sqrt{in})\right| &\leq \frac{1}{2}\left|R^{\gamma(\epsilon)}(L,n)e^{\sqrt{in}(L-x)}\right| + \frac{1}{2}\left|e^{-\sqrt{in}(L-x)}\right|\\ &\leq \frac{1}{2}\gamma(\epsilon)^{\frac{x-L}{L}} + \frac{1}{2}e^{-\sqrt{\frac{|n|}{2}}(L-x)}\\ &\leq \gamma(\epsilon)^{\frac{x-L}{L}}.\end{aligned}$$

D'après (2.4.3),(2.4.5) et (2.7.8), on obtient (2.7.12) comme suit :

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}((z-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}}\right| &\leq \frac{\left|(R^{\gamma(\epsilon)}(L,n))e^{\sqrt{in}(z-x)}\right|}{2\sqrt{|n|}} + \left|\frac{e^{-\sqrt{in}(z-x)}}{2\sqrt{|n|}}\right|\\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{|n|}}\gamma(\epsilon)^{\frac{x-z}{L}} + \frac{1}{2\sqrt{|n|}}e^{-\sqrt{\frac{|n|}{2}}(z-x)} &(2.7.15)\\ &\leq \gamma(\epsilon)^{\frac{x-z}{L}}, \quad 0 \leq x \leq z \leq L.\end{aligned}$$

□

Lemme 2.7.3. *Pour* $0 < \gamma(\epsilon) < e^{-L}$, *et pour tout* $x \in [0,L]$ *on a l'estimation suivante*

— *Pour* $n = 0$

$$\left|\widetilde{F}(g_1,h_1,w_1)(x) - \widetilde{F}(g_2,h_2,w_2)(x)\right| \leq \gamma(\epsilon)^{\frac{x-L}{L}}(|g_1-g_2|+|h_1-h_2|) + \int_x^L \gamma(\epsilon)^{\frac{x-L}{L}}\left|F_0(w_1)(z) - F_0(w_2)(z)\right| dz, \tag{2.7.16}$$

— *et pour* $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

$$\begin{aligned}2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}&\left|\int_x^L \frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}((z-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}}[F_n(w_1)(z)-F_n(w_2)(z)]dz\right|^2 \\ &+2\pi\left|\widetilde{F}(g_0,h_0,w_1)(x)-\widetilde{F}(g_0,h_0,w_2)(x)\right|^2 \\ &\leq \mathbb{K}_F^2(L-x)\int_x^L\gamma(\epsilon)^{\frac{2(x-z)}{L}}\|w_1(z,.)-w_2(z,.)\|^2dz, x\in[0,L]\end{aligned} \tag{2.7.17}$$

Preuve. En utilisant (2.3.11) et le lemme (2.7.1), on déduit que

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{F}(g_1,h_1,w_1)(x) - \widetilde{F}(g_2,h_2,w_2)(x)\right| &= |(g_1-g_2)-(L-x)(h_1-h_2)| \\ &+ \left|\int_x^L (z-x)(F_0(w_1)(z)-F_0(w_2)(z))dz\right| \\ &\leq \gamma(\epsilon)^{\frac{x-L}{L}}[|g_1-g_2|+|h_1-h_2|] \\ &+ \int_x^L \gamma(\epsilon)^{\frac{x-z}{L}}\left|F_0(w_1)(z)-F_0(w_2)(z)\right|dz.\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant (2.6.1),(2.7.12),(2.7.16) et l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\begin{aligned}2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}&\left|\int_x^L \frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}((z-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}}(F_n(w_1)(z)-F_n(w_2)(z))dz\right|^2 \\ &+2\pi\left|\widetilde{F}(g_0,h_0,w_1)(x)-\widetilde{F}(g_0,h_0,w_2)(x)\right|^2 \\ \leq 2\pi(L-x)\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}&\int_x^L\left|\frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}((z-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}}\right|^2\left|F_n(w_1)(z)-F_n(w_2)\right|^2dz \\ &+2\pi(L-x)\int_x^L\gamma(\epsilon)^{\frac{2(x-z)}{L}}\left|F_0(w_1)(z)-F_0(w_2)\right|^2dz \\ &\leq (L-x)\int_x^L\gamma(\epsilon)^{\frac{2(x-z)}{L}}\|F(z,.,w_1(z,.))-F(z,.,w_2(z,.))\|^2dz \\ &\leq \mathbb{K}_F^2(L-x)\int_x^L\gamma(\epsilon)^{\frac{2(x-z)}{L}}\|w_1(z,.)-w_2(z,.)\|^2dz.\end{aligned}$$

□

Lemme 2.7.4. *Pour* $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *, on a*

$$u_n(x) - \frac{u_n'(x)}{\sqrt{in}} = e^{\sqrt{in}(L-x)}(g_n - \frac{h_n}{\sqrt{in}}) - \int_x^L \frac{e^{\sqrt{in}(z-x)}}{\sqrt{in}} F_n(u)(z)dz, x \in [0, L] \quad (2.7.18)$$

Preuve. En dérivant (2.3.10) par rapport à x on obtient :

$$\begin{aligned} -\frac{u_n'(x)}{\sqrt{in}} &= \sinh((L-x)\sqrt{in})g_n - \frac{\cosh((L-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}} h_n \\ &- \int_x^L \frac{\cosh[(z-x)\sqrt{in}]}{\sqrt{in}} F_n(x)(z)dz, \end{aligned} \quad (2.7.19)$$

puis, par sommation de (2.7.19) avec (2.3.12) on arrive au résultat. □

CHAPITRE 3

Preuve des théorèmes sur l'estimations d'erreurs

3.1 Preuve du théorème (2.6.1)

La démonstration est composée de **deux étapes**

3.1.1 Etape 1 (Existence et unicité)

L'existence et l'unicité de la solution $U^{\epsilon} \in C([0,L];L^2(0,2\pi))$ de l'équation intégrale (2.7.1).
Soit $w \in C([0,L];L^2(0,2\pi))$, on considére la fonction suivante :

$$\begin{aligned} \widetilde{J}(x,t,w(x,t)) \quad := & \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left[\cosh^{\gamma(\epsilon)}((L-x)\sqrt{in})g_n^{\epsilon} - \frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}((L-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}}\right] e^{int} \\ - & \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left[\int_x^L \frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}((z-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}} F_n(w)(z)dz\right] e^{int} \\ + & \tilde{F}(g_0^{\epsilon}, h_0^{\epsilon}, u_0^{\epsilon})(x), \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

L'objectif maintenant est l'application du théorème de point fixe de Banach. Donc, on doit montrer qu'il existe une constante m_0 telle que l'application $\widetilde{J}^{m_0} \equiv \underbrace{\widetilde{J}\circ\widetilde{J}\circ\widetilde{J}\circ ....\circ\widetilde{J}}_{m_0 \text{fois}}$ soit une contraction. En effet, pour des raisons de simplicité notons $w_i(x,.) = w_i$, $i = 1,2$. On va montrer que pour tout $w_1, w_2 \in C([0,L];L^2(0,2\pi))$ et $m \geq 1$, on a

$$\left\| \widetilde{J}^m(x,.,w_1) - \widetilde{J}^m(x,.,w_2) \right\|^2 \leq \frac{(L\mathbb{K}_F^2)^m}{\gamma^{2m}(\epsilon)} \frac{(L-x)^m}{m!} \left| \|w_1 - w_2\| \right|^2, \qquad (3.1.2)$$

où $|\|.\||$ est la norme sup dans $C([0,L];L^2(0,2\pi))$.
Par recurrence sur m, on a (si $m = 1$ et par la relation (2.7.17))

$$\begin{aligned} \left\| \widetilde{J}(x,.,w_1) - \widetilde{J}(x,.,w_2) \right\|^2 &\leq \mathbb{K}_F^2 (L-x) \int_x^L \gamma(\epsilon)^{\frac{2(x-z)}{L}} \|w_1(z,.) - w_2(z,.)\|^2 dz \\ &\leq \frac{L\mathbb{K}_F^2}{\gamma^2(\epsilon)} (L-x) \left| \|w_1 - w_2\| \right|^2. \qquad (3.1.3) \end{aligned}$$

Ainsi, (3.1.2) est vérifiée pour $m = 1$. Ensuite, en supposant que (3.1.2) est vérifiée pour $m = p$, nous prouvons qu'elle est également vérifiée pour $m = p+1$. Nous avons

$$\begin{aligned} \left\| \widetilde{\mathcal{J}}^{p+1}(x,\cdot,w_1) - \widetilde{\mathcal{J}}^{p+1}(x,\cdot,w_2) \right\|^2 &\leq \frac{\mathbb{K}_F^2 L}{\gamma^2(\epsilon)} \int_x^L \|\widetilde{\mathcal{J}}^p(z,\cdot,w_1(z,\cdot)) - \mathcal{J}^p(z,\cdot,w_2(z,\cdot))\|^2 dz \\ &\leq \frac{\mathbb{K}_F^2 L}{\gamma^2(\epsilon)} \int_x^L \left(\frac{\mathbb{K}_F^2 L}{\gamma^2(\epsilon)} \right)^p \frac{(L-z)^p}{p!} |\|w_1 - w_2\||^2 dz \\ &\leq \left(\frac{\mathbb{K}_F^2 L}{\gamma^2(\epsilon)} \right)^{p+1} \frac{(L-x)^{p+1}}{(p+1)!} |\|w_1 - w_2\||^2. \qquad (3.1.4) \end{aligned}$$

Donc, par le principe d'induction, on obtient (3.1.2).
Nous considérons $\widetilde{\mathcal{J}} : C([0,L];L^2(0,2\pi)) \longrightarrow C([0,L];L^2(0,2\pi))$ défini par (3.1.1) et satisfaisant (3.1.2). Puisque

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \sqrt{\left(\frac{\mathbb{K}_F^2 L}{\gamma^2(\epsilon)} \right)^m \frac{(L-x)^m}{m!}} = 0, \quad x \in [0,L],$$

il existe un nombre entier positif m_0 tel que $\sqrt{\left(\frac{\mathbb{K}_F^2 L}{\gamma^2(\epsilon)} \right)^{m_0} \frac{(L-x)^{m_0}}{m_0!}} < 1$. Cela signifie que $\tilde{\mathcal{J}}^{m_0}$ est une contraction. Il s'ensuit que l'équation $\tilde{\mathcal{J}}^{m_0}(w) = w$ a une solution unique $u^\epsilon \in C([0,L];L^2(0,2\pi))$. Nous prétendons que $\tilde{\mathcal{J}}(U^\epsilon) = U^\epsilon$. En fait, nous avons $\tilde{\mathcal{J}}^{m_0}(\tilde{\mathcal{J}}(U^\epsilon)) = \tilde{\mathcal{J}}(U^\epsilon)$ à cause de $\tilde{\mathcal{J}}(\tilde{\mathcal{J}}^{m_0}(U^\epsilon)) = \tilde{\mathcal{J}}(U^\epsilon)$. Alors, l'unicité du point fixe de $\tilde{\mathcal{J}}^{m_0}$ mène à $\tilde{\mathcal{J}}(v^\epsilon) = v^\epsilon$, c'est-à-dire l'équation $\tilde{\mathcal{J}}(w) = w$ a une solution unique $U^\epsilon \in C([0,L];L^2(0,2\pi))$. Enfin, de (2.4.1) et (3.1.2) il découle alors la conclusion souhaitée que l'équation intégrale (2.4.1) a une solution unique $U^\epsilon \in C([0,L];L^2(0,2\pi))$.

3.1.2 Étape 2(Estimation d'erreur)

Estimer les erreurs (2.6.4) et (2.6.8) entre la première solution régularisée U^ϵ et la solution exacte u.

•Preuve de la partie (a)

En utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$\|U^\epsilon(x,\cdot)-u(x,\cdot)\| \le \|U^\epsilon(x,\cdot)-v^\epsilon(x,\cdot)\| + \|v^\epsilon(x,\cdot)-u(x,\cdot)\| = |\widetilde{\mathcal{A}_1}(x)| + |\widetilde{\mathcal{A}_2}(x)|, \tag{3.1.5}$$

où $\widetilde{\mathcal{A}_1} = U^\epsilon(x,\cdot)-v^\epsilon(x,\cdot)$, $\widetilde{\mathcal{A}_2} = v^\epsilon(x,\cdot)-u(x,\cdot)$ et v^ϵ est défini par

$$\begin{aligned} v^\epsilon(x,t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left[\cosh^{\gamma(\epsilon)}\left((L-x)\sqrt{in}\right) g_n - \frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}\left((L-x)\sqrt{in}\right)}{\sqrt{in}} h_n\right] e^{int} \\ &- \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left[\int_x^L \frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}((z-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}} F_n(v^\epsilon)(z)dz\right] e^{int} + \widetilde{F}(g_0,h_0,v^\epsilon)(x). \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

D'après la preuve de **l'étape 1**, nous savons que l'équation intégrale non linéaire (3.1.6) a une solution unique $v^\epsilon \in C([0,L];L^2(0,2\pi))$. Nous estimons d'abord le terme $\widetilde{A}_1$. Pour $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, en combinant (2.4.1) avec (3.1.6), on obtient

$$\begin{aligned} |\widetilde{\mathcal{A}_1}(x)| &= 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |u_n^\epsilon(x)-v_n^\epsilon|^2 + 2\pi|\widetilde{F}(g_0^\epsilon,h_0^\epsilon,u^\epsilon)(x) - \widetilde{F}(g_0,h_0,v^\epsilon)(x)|^2 \\ &\le 6\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left[|\cosh^{\gamma(\epsilon)}((L-x)\sqrt{in})|^2|g_n^\epsilon-g_n|^2 + \left|\frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}((L-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}}\right|^2 |h_n^\epsilon-h_n|^2\right] \\ &+ 6\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left|\int_x^L \frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}((z-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}} (F_n(u^\epsilon))(z) - (F_n(v^\epsilon))(z)\right|^2 \\ &+ 2\pi|\widetilde{F}(g_0^\epsilon,h_0^\epsilon,u^\epsilon)(x) - \widetilde{F}(g_0,h_0,v^\epsilon)(x)|^2, \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

où nous avons utilisé l'inégalité $(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)$.

Nous appliquons maintenant les lemmes (2.7.2) et (2.7.3) pour obtenir

$$\begin{aligned}
|\widetilde{\mathcal{A}_1}(x)|^2 &\leq 6\pi\gamma(\epsilon)^{\frac{2x-2L}{L}}\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}|g_n^\epsilon-g_n|^2+|g_0^\epsilon-g_0|^2+\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}|h_n^\epsilon-h_n|^2+|h_0^\epsilon-h_0|^2\right] \\
&+ 6\pi L\gamma(\epsilon)^{\frac{2x}{L}}\int_x^L|\gamma(\epsilon)|^{\frac{-2z}{L}}(\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}|F_n(u^\epsilon)(z)-F_n(v^\epsilon)(z)|^2+|F_0(u^\epsilon)(z)-F_0(v^\epsilon)(z)|^2)dz \\
&\leq 3\gamma(\epsilon)^{\frac{2x-2L}{L}}\left(\|g^\epsilon-g\|^2+\|h^\epsilon-h\|^2\right)+3\mathbb{K}_F^2L\gamma(\epsilon)^{\frac{2x}{L}}\int_x^L\gamma(\epsilon)^{\frac{-2z}{L}}\|u^\epsilon(z.\cdot)-v^\epsilon(z.\cdot)\|^2dz.
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Multiplions par $\gamma(\epsilon)^{\frac{-2x}{L}}$ les deux côtés et en utilisant l'inégalité de Gronwall, nous obtenons

$$\gamma(\epsilon)^{\frac{-2x}{L}}|\widetilde{\mathcal{A}_1}(x)|^2\leq 3\left(\frac{\epsilon}{\gamma(\epsilon)}\right)^2+3\mathbb{K}_F^2L\int_x^L\gamma(\epsilon)^{\frac{-2z}{L}}\widetilde{\mathcal{A}_1}(z)|^2dz,$$

puis l'application de l'inégalité de Gronwall donne

$$\gamma(\epsilon)^{\frac{-2x}{L}}|\widetilde{\mathcal{A}_1}(x)|^2\leq 3\left(\frac{\epsilon}{\gamma(\epsilon)}\right)^2\exp(3\mathbb{K}_F^2L(L-x)),$$

par conséquent, nous obtenons

$$\|u^\epsilon(x,\cdot)-v^\epsilon(x,\cdot)\|\leq\sqrt{3}\left(\frac{\epsilon}{\gamma(\epsilon)}\right)\exp\left(\frac{3\mathbb{K}_F^2L(L-x)}{2}\right)\gamma(\epsilon)^{\frac{x}{L}}. \tag{3.1.9}$$

Ensuite, nous estimons $|\widetilde{\mathcal{A}_2}(x)|$. D'après (2.3.12), (2.4.2), (2.4.3), (2.4.4) et (2.7.18), nous avons $\forall n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$$\begin{aligned}
u_n(x) &= \cosh^{\gamma(\epsilon)}\left((L-x)\sqrt{in}\right)g_n-\frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}((L-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}}h_n \\
&- \int_x^L\frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}((z-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}}F_n(u)(z)dz \\
&+ \frac{1}{2}(1-R^{\gamma(\epsilon)}(L,n))\left[e^{\sqrt{in}(L-x)}\left(g_n-\frac{h_n}{\sqrt{in}}\right)-\int_x^L\frac{e^{\sqrt{in}(z-x)}}{\sqrt{in}}F_n(u)(z)dz\right] \\
&= \cosh^{\gamma(\epsilon)}\left((L-x)\sqrt{in}\right)g_n-\frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}\left((L-x)\sqrt{in}\right)}{\sqrt{in}}h_n \\
&+ \frac{1}{2}(1-R^{\gamma(\epsilon)}(L,n))\left[u_n(x)-\frac{u_n'(x)}{\sqrt{in}}\right]-\int_x^L\frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}((z-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}}F_n(u)(z)dz.
\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

La combinaison de (3.1.6) et (3.1.10) donne

$$v_n^\epsilon(x) - u_n(x) = \psi_n(x) - \int_x^L \frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}((z-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}}(F_n(v^\epsilon)(z) - F_n(u)(z))dz, \quad \forall n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \tag{3.1.11}$$

où

$$\psi_n(x) = \frac{1}{2}(R^{\gamma(\epsilon)}(L,n)-1)e^{-\sqrt{inx}}\left[e^{\sqrt{inx}}u_n(x) - e^{\sqrt{inx}}\frac{u_n'(x)}{\sqrt{in}}\right], \quad \forall n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}. \tag{3.1.12}$$

Le terme $\widetilde{\mathcal{A}_2}$ peut être estimé comme suit :

$$\begin{aligned} |\widetilde{\mathcal{A}_2}(x)|^2 &= 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |v_n^\epsilon(x) - u_n(x)|^2 + 2\pi|\widetilde{F}(g_0,h_0,v^\epsilon) - \widetilde{F}(g_0,h_0,u)|^2 \\ &\leq \widetilde{J}_1(x) + \widetilde{J}_2(x), \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

où

$$\widetilde{J}_1(x) = 4\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left|\frac{1}{2}(R^{\gamma(\epsilon)}(L,n)-1)e^{-\sqrt{inx}}\right|^2 \left[e^{\sqrt{inx}}u_n(x) - e^{\sqrt{inx}}\frac{u_n'(x)}{\sqrt{in}}\right]^2, \tag{3.1.14}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{J}_2(x) &= 4\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left|\int_x^L \frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}((z-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}}(F_n(v^\epsilon)(z) - F_n(u)(z))dz\right|^2 \\ &+ 2\pi|\widetilde{F}(g_0,h_0,v^\epsilon) - \widetilde{F}(g_0,h_0,u)|^2. \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

En utilisant (2.4.6) nous avons

$$\begin{aligned} \widetilde{J}_1(x) &\leq 2\pi\gamma(\epsilon)^{\frac{2x}{L}}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} e^{\sqrt{2|n|}L}|u_n(x)|^2 + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} e^{\sqrt{2|n|}L}\frac{|u_n'(x)|^2}{|n|}\right) \\ &\leq 2\pi\gamma(\epsilon)^{\frac{2x}{L}}\left[\|u\|^2_{L^\infty(0,L;G_L^0(0,2\pi))} + \|u_x\|^2_{L^\infty(0,L;G_L^0(0,2\pi))}\right] \\ &\leq 2\pi\gamma(\epsilon)^{\frac{2x}{L}}\mathcal{I}_1^2 \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

Il résulte de (2.7.17) que

$$\widetilde{J}_2(x) \leq 2\mathbb{K}_F^2(L-x)\gamma(\epsilon)^{\frac{2x}{L}}\int_x^L \gamma(\epsilon)^{\frac{-2z}{L}}\|v^\epsilon(z,\cdot) - u(z,\cdot)\|^2 dz. \tag{3.1.17}$$

En utilisant (3.1.16) et (3.1.17) dans (3.1.13) on obtient

$$|\widetilde{\mathcal{A}_2}(x)|^2 \leq 2\pi\gamma(\epsilon)^{\frac{2x}{L}}\mathcal{I}_1^2 + 2\mathbb{K}_F^2 L\gamma(\epsilon)^{\frac{2x}{L}}\int_x^L \gamma(\epsilon)^{\frac{-2z}{L}}|\widetilde{\mathcal{A}_2}(z)|^2 dz. \tag{3.1.18}$$

En multipliant par $\gamma(\epsilon)^{\frac{-2x}{L}}$ les deux côtés et en utilisant l'inégalité de Gronwall on obtient

$$\|v^\epsilon(x,\cdot) - u(x,\cdot)\| \leq \sqrt{2\pi}\mathcal{I}_1 exp\left(\mathbb{K}_F^2 L(L-x)\right)\gamma(\epsilon)^{\frac{x}{L}}. \tag{3.1.19}$$

En combinant (3.1.5), (3.1.9) et (3.1.19), on en déduit que

$$\|u^\epsilon(x,\cdot) - u(x,\cdot)\| \leq \left[\frac{\sqrt{3}\epsilon}{\gamma(\epsilon)}e^{\frac{3\mathbb{K}_F^2 L(L-x)}{2}} + \sqrt{2\pi}\mathcal{I}_1 e^{\mathbb{K}_F^2 L(L-x)}\right]\gamma(\epsilon)^{\frac{x}{L}}, \tag{3.1.20}$$

ce qui complète la preuve de **la partie (a)** du théorème (2.6.1).

•**Preuve de la partie (b)**

Cette partie sera prouvée de la même manière que la **partie(a)**. Réécrivons (3.1.12) comme suit

$$\psi_n(x) = \frac{1}{2}(R^{\gamma(\epsilon)}(L,n) - 1)n^{-r}e^{-\sqrt{inx}}\left[n^r e^{\sqrt{inx}}u_n(x) - n^r e^{\sqrt{inx}}\frac{u_n'(x)}{\sqrt{in}}\right], \quad r > 0,$$

l'utilisation de (2.6.6) donne

$$\left|\frac{1}{2}(R^{\gamma(\epsilon)}(L,n) - 1)\right||n|^{-r}|e^{-\sqrt{inx}}| \leq \frac{1}{2}\widetilde{M}(\epsilon,r)\gamma(\epsilon)^{\frac{x}{L}}, \quad n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \tag{3.1.21}$$

Comme dans (3.1.16), on obtient

$$\begin{aligned}
\widetilde{J}_1(x) &\leq 2\pi\widetilde{M}^2(\epsilon,r)\gamma(\epsilon)^{\frac{2x}{L}}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}|n|^{2r}e^{\sqrt{2|n|}L}|u_n(x)|^2 + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}|n|^{2r}e^{\sqrt{2|n|}L}\frac{|u_n'(x)|^2}{|n|}\right)\\
&\leq 2\pi\widetilde{M}^2(\epsilon,r)\gamma(\epsilon)^{\frac{2x}{L}}\left[\|u\|^2_{L^\infty(0,L;G_L^0(0,2\pi))} + \|u_x\|^2_{L^\infty(0,L;G_L^0(0,2\pi))}\right]\\
&\leq 2\pi\widetilde{M}^2(\epsilon,r)\gamma(\epsilon)^{\frac{2x}{L}}\mathcal{I}_2^2.
\end{aligned} \tag{3.1.22}$$

En combinant (3.1.17) et (3.1.22) on obtient

$$\gamma(\epsilon)^{\frac{-2x}{L}}|\widetilde{\mathcal{A}_2}(x)|^2 \leq \widetilde{M}^2(\epsilon,r)\mathcal{I}_2^2 + 2\mathbb{K}_F^2 L\int_x^L \gamma(\epsilon)^{\frac{-2z}{L}}\widetilde{\mathcal{A}_2}(x)|^2 dz.$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall, on en déduit que

$$\|v^{\epsilon}(x,\cdot)-u(x,\cdot)\| \leq \sqrt{2\pi}\widetilde{M}(\epsilon,r)\mathcal{I}_2 \exp\left(\mathbb{K}_F^2 L(L-x)\right)\gamma(\epsilon)^{\frac{x}{L}}. \tag{3.1.23}$$

En combinant (3.1.5), (3.1.9) et (3.1.23), on en déduit que

$$\|u^{\epsilon}(x,\cdot)-u(x,\cdot)\| \leq \left[\frac{\sqrt{3}\epsilon}{\gamma(\epsilon)} e^{\frac{3\mathbb{K}_F^2 L(L-x)}{2}} + \sqrt{2\pi}\widetilde{M}(\epsilon,r)\mathcal{I}_2 e^{\mathbb{K}_F^2 L(L-x)}\right]\gamma(\epsilon)^{\frac{x}{L}}, \tag{3.1.24}$$

ce qui achève la preuve de la **partie (b)** du théorème (2.6.1).

3.2 Preuve du théorème (2.7.1)

La preuve du théorème (2.7.1) est composée de **deux étapes**.

3.2.1 Étape 1 (existence et unicité)

L'existence et l'unicité de la solution $U^{\epsilon} \in C([0,L];L^2(0,2\pi))$. Pour tout $w \in C([0,L];L^2(0,2\pi))$ on définit

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{G}}(x,t,w(x,t)) \quad := \quad & \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left[\cosh^{\gamma(\epsilon)}\left((L-x)\sqrt{in}\right) g_n^{\epsilon} - \frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}((L-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}} h_n^{\epsilon}\right] e^{int} \\
- \quad & \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left[\int_x^L \frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}((z-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}} F_n(U^{\epsilon})(z)dz\right. \\
+ \quad & \left.\int_0^x \widetilde{P}^{\gamma(\epsilon)}(x,z,n)F_n(U^{\epsilon})(z)dz\right] e^{int} + \widetilde{F}(g_0^{\epsilon},h_0^{\epsilon},w)(x).
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

La preuve de cette étape est non triviale et elle est différente de la preuve de **l'étape 1** du théorème (2.6.1). Il faut prouver que $\widetilde{\mathcal{G}}$ est une application de contraction en utilisant une nouvelle norme.

Définissons la norme suivante sur $C([0,L];L^2(0,2\pi))$:

$$\|f\|_1 = \sup_{0\leq x\leq L}\left\{\gamma(\epsilon)^{-\frac{x}{L}}\|f(x,\cdot)\|\right\}, \quad \forall f \in C([0,L];L^2(0,2\pi)). \tag{3.2.2}$$

Il est facile de montrer que $\|.\|_1$ est une norme sur $C([0,L];L^2(0,2\pi))$. Nous prétendons que pour chaque $w_1, w_2 \in C([0,L]; L^2(0,2\pi))$, nous avons

$$\|\widetilde{\mathcal{G}}(w_1) - \widetilde{\mathcal{G}}(w_2)\|_1 \leq \mathbb{K}_F L \|w_1 - w_2\|_1. \tag{3.2.3}$$

D'abord, de(2.7.17) nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left| \int_x^L \frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}((z-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}} (F_n(w_1)(z) - F_n(w_2)(z)) dz \right|^2 \\ + |\widetilde{F}(g_0^\epsilon, h_0^\epsilon, w_1)(x) - \widetilde{F}(g_0^\epsilon, h_0^\epsilon, w_2)(x)|^2 \\ \leq \frac{1}{2\pi} \mathbb{K}_F^2 (L-x)^2 \gamma(\epsilon)^{\frac{2x}{L}} \|w_1 - w_2\|_1^2, \quad x \in [0,L].\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Deuxièmement, en utilisant (2.7.10), comme dans la preuve du lemme (2.7.3), nous avons

$$\begin{aligned}&\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left| \int_0^x \widetilde{P}^{\gamma(\epsilon)}(x,z,n) (F_n(w_1)(z) - F_n(w_2)(z)) dz \right|^2 \\ &\leq x\gamma(\epsilon)^{\frac{2x}{L}} \int_0^x \gamma(\epsilon)^{\frac{-2z}{L}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |F_n(w_1)(z) - F_n(w_2)(z)|^2 dz \\ &\leq \frac{1}{2\pi} x \mathbb{K}_F^2 \gamma(\epsilon)^{\frac{2x}{L}} \int_x^L \gamma(\epsilon)^{\frac{-2z}{L}} \|w_1(z,\cdot) - w_2(z,\cdot)\|^2 dz \\ &\leq \frac{1}{2\pi} x^2 \mathbb{K}_F^2 \gamma(\epsilon)^{\frac{2x}{L}} \|w_1 - w_2\|_1^2.\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Puis, pour $0 < x < L$, en utilisant l'inégalité $(a_1 + a_2)^2 \leq (1+\tilde{\alpha})a_1^2 + \left(1 + \frac{1}{\tilde{\alpha}}\right) a_2^2$, pour tout nombre réel $a_1, a_2, \tilde{\alpha} > 0$ avec (2.2.3), nous concluons que

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\mathcal{G}}(x,\cdot,w_1(x,\cdot)) - \widetilde{\mathcal{G}}(x,\cdot,w_2(x,\cdot))\|^2 &\leq \gamma(\epsilon)^{\frac{2x}{L}} \mathbb{K}_F^2 (1+\tilde{\alpha}) x^2 \|w_1 - w_2\|_1^2 \\ &+ \gamma(\epsilon)^{\frac{2x}{L}} \mathbb{K}_F^2 \left(1 + \frac{1}{\tilde{\alpha}}\right) (L-x)^2 \|w_1 - w_2\|_1^2.\end{aligned}$$

En choisissant $\tilde{\alpha} = \dfrac{L-x}{x}$ on obtient

$$\gamma(\epsilon)^{-\frac{2x}{L}} \|\widetilde{\mathcal{G}}(x,\cdot,w_1(x,\cdot)) - \widetilde{\mathcal{G}}(x,\cdot,w_2(x,\cdot))\|^2 \leq \mathbb{K}_F^2 L^2 \|w_1 - w_2\|_1^2, \quad \forall x \in [0,L]. \tag{3.2.6}$$

d'un côté en posant, $x = L$ dans (3.2.5), nous obtenons

$$\gamma(\epsilon)^{-2} \|\widetilde{\mathcal{G}}(L,\cdot,w_1(L,\cdot)) - \widetilde{\mathcal{G}}(L,\cdot,w_2(L,\cdot))\|^2 \leq \mathbb{K}_F^2 L^2 \|w_1 - w_2\|_1^2, \tag{3.2.7}$$

et remplaçons $x = 0$ dans (3.2.4), nous avons

$$\|\widetilde{\mathcal{G}}(0,\cdot,w_1(0,\cdot)) - \widetilde{\mathcal{G}}(0,\cdot,w_2(0,\cdot))\|^2 \leq \mathbb{K}_F^2 L^2 \|w_1 - w_2\|_1^2, \tag{3.2.8}$$

en combinant (3.2.6)-(3.2.8), on obtient

$$\gamma(\epsilon)^{-\frac{x}{L}} \|\widetilde{\mathcal{G}}(x,\cdot,w_1(x,\cdot)) - \widetilde{\mathcal{G}}(x,\cdot,w_2(x,\cdot))\| \leq \mathbb{K}_F L \|w_1 - w_2\|_1, \forall x \in [0,L], \tag{3.2.9}$$

ce qui conduit à (3.2.3). Puisque $\mathbb{K}_F L < 1$ cela signifie que $\widetilde{\mathcal{G}}$ est une contraction. Il s'ensuit que l'équation $\widetilde{\mathcal{G}}(w) = w$ a une solution unique $w \in C([0,L]; L^2(0,2\pi))$ et cela complète la preuve de **l'étape 1**.

3.2.2 Étape 2(Estimation d'erreur)

Estimation d'erreur $\|U^\epsilon - u\|_1$ dans la norme (3.2.2).

•**Preuve de la partie (a)**

Considérons la fonction

$$\widetilde{\mathcal{W}}(x,t) = \gamma(\epsilon)^{-\frac{x}{L}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} [U_n^\epsilon(x) - u_n(x)] e^{int}. \tag{3.2.10}$$

Trouvons une borne supérieure pour $\|\widetilde{\mathcal{W}}\|_1 = \sup_{x\in[0,L]} \|\widetilde{\mathcal{W}}(x,\cdot)\|$. La norme existe car les deux fonctions U^ϵ et u appartiennent à $C([0,L]; L^2(0,2\pi))$. Nous observons d'abord que

$$\|\widetilde{\mathcal{W}}(x,\cdot)\|^2 = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\widetilde{\mathcal{W}}_n(x)|^2 + 2\pi\gamma(\epsilon)^{-\frac{2x}{L}} |\widetilde{F}(g_0^\epsilon, h_0^\epsilon, U^\epsilon)(x) - \widetilde{F}(g_0, h_0, u)(x)|^2. \tag{3.2.11}$$

Posons $x = 0$ dans la relation (2.7.18) on obtient

$$u_n(0) - \frac{u_n'(0)}{\sqrt{in}} = e^{\sqrt{in}L}\left(g_n - \frac{h_n}{\sqrt{in}}\right) - \int_0^L \frac{e^{\sqrt{in}z}}{\sqrt{in}} F_n(u)(z)dz, \qquad n \in \mathbb{Z}\setminus\{\|0\},$$

ce qui implique que

$$e^{-\sqrt{in}L}\left(u_n(0) - \frac{u_n'(0)}{\sqrt{in}}\right) + \int_0^x \frac{e^{\sqrt{in}(z-L)}}{\sqrt{in}} F_n(u)(z)dz \;=\; g_n - \frac{h_n}{\sqrt{in}} - \int_x^L \frac{e^{\sqrt{in}(z-L)}}{\sqrt{in}} F_n(u)(z)dz, \quad n \in \mathbb{Z}\setminus\{\|0\}, \tag{3.2.12}$$

De (2.4.4), (3.1.10) et (3.2.12), on déduit que

$$\begin{aligned}
u_n(x) &= \cosh^{\gamma(\epsilon)}\left((L-x)\sqrt{in}\right)g_n - \frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}((L-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}}h_n \\
&- \int_x^L \frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}((z-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}}F_n(u)(z)dz \\
&+ \frac{1}{2}\left(1-R^{\gamma(\epsilon)}(L,n)\right)e^{\sqrt{in}(L-x)}\left[e^{\sqrt{in}L}\left(u_n(0)-\frac{u_n'(0)}{\sqrt{in}}\right)+\int_0^x \frac{e^{\sqrt{in}(z-L)}}{\sqrt{in}}F_n(u)(z)dz\right] \\
&= \cosh^{\gamma(\epsilon)}\left((L-x)\sqrt{in}\right)g_n - \frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}((L-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}}h_n \\
&- \int_x^L \frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}((L-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}}F_n(u)(z)dz \\
&= \frac{1}{2}\left(1-R^{\gamma(\epsilon)}(L,n)\right)e^{-\sqrt{in}x}\left(u_n(0)-\frac{u_n'(0)}{\sqrt{in}}\right) - \int_0^x \widetilde{P}^{\gamma(\epsilon)}(x,z,n)F_n(u)(z)dz \quad (3.2.13)
\end{aligned}$$

D'après (2.7.1), (3.2.10) et (3.2.13), on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{W}}_n(x) &= \gamma(\epsilon)^{-\frac{x}{L}}[U_n^\epsilon(x)-u_n(x)] \\
&= \gamma(\epsilon)^{-\frac{x}{L}}\left[\Phi_n(x)+\cosh^{\gamma(\epsilon)}\left((z-x)\sqrt{in}\right)(g_n^\epsilon-g_n) - \frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}\left((L-x)\sqrt{in}\right)(h_n^\epsilon-h_n)}{\sqrt{in}}\right] \\
&- \gamma(\epsilon)^{-\frac{x}{L}}\left[\int_x^L \frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}((z-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}}(F_n(U^\epsilon)(z)-F_n(u)(z))dz\right] \\
&- \gamma(\epsilon)^{-\frac{x}{L}}\left[\int_0^x \widetilde{P}^{\gamma(\epsilon)}(x,z,n)(F_n(U^\epsilon)(z)-F_n(u)(z))dz\right], \quad (3.2.14)
\end{aligned}$$

où

$$\Phi_n(x) := \frac{1}{2}\left(R^{\gamma(\epsilon)}(L,n)-1\right)e^{-\sqrt{in}x}\left(u_n(0)-\frac{u_n'(0)}{\sqrt{in}}\right), \qquad n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},$$

alors

$$\begin{aligned}
\left|\widetilde{\mathcal{W}}_n(x)\right| &= \gamma(\epsilon)^{-\frac{x}{L}}\left|U_n^{\epsilon}(x)-u_n(x)\right| \\
&\leq \gamma(\epsilon)^{-\frac{x}{L}}\left[\left|\Phi_n(x)\right|+\left|\cosh^{\gamma(\epsilon)}\left((z-x)\sqrt{in}\right)\right|\left|g_n^{\epsilon}-g_n\right|\right. \\
&+ \left|\frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}\left((L-x)\sqrt{in}\right)}{\sqrt{in}}\right|\left|h_n^{\epsilon}-h_n\right| \\
&+ \int_x^L\left|\frac{\sinh^{\gamma(\epsilon)}((z-x)\sqrt{in})}{\sqrt{in}}\right|\left|(F_n(U^{\epsilon})(z)-F_n(u)(z))dz\right| \\
&+ \left.\int_0^x\left|\widetilde{P}^{\gamma(\epsilon)}(x,z,n)(F_n(U^{\epsilon})(z)-F_n(u))(z)dz\right|\right],\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\,. \qquad (3.2.15)
\end{aligned}$$

D'après le lemme (2.7.2), on obtient

$$\begin{aligned}
|\widetilde{\mathcal{W}}_n(x)| &\leq \frac{1}{2}\left[|u_n(0)|+|u_n'(0)|\right]+\gamma(\epsilon)^{-1}\left[|g_n^{\epsilon}-g_n|+|h_n^{\epsilon}-h_n|\right] \\
&+ \int_0^L\gamma(\epsilon)^{-\frac{z}{L}}|F_n(U^{\epsilon})(z)-F_n(u)(z)|dz, \qquad n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\,. \qquad (3.2.16)
\end{aligned}$$

De l'inégalité

$$(a_1+a_2+a_3)^2\leq 2\left(1+\frac{1}{\tilde{\alpha}}\right)a_1^2+2\left(1+\frac{1}{\tilde{\alpha}}\right)a_2^2+(1+\tilde{\alpha})a_3^2, \qquad (3.2.17)$$

et pour tout nombre réel a_j, $(j=1,2,3)$ et $\tilde{\alpha}>0$ et grâce à l'inégalité de Hölder, on en déduit que

$$\begin{aligned}
2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}|\widetilde{\mathcal{W}}_n(x)|^2 &\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left[2\pi\left(1+\frac{1}{\tilde{\alpha}}\right)\left[|u_n(0)|^2+|u_n'(0)|^2\right]\right] \qquad (3.2.18)\\
&+ \left[8\pi\left(1+\frac{1}{\tilde{\alpha}}\right)\gamma(\epsilon)^{-2}\left(|g_n^{\epsilon}-g_n|^2+|h_n^{\epsilon}-h_n|^2\right)\right] \\
&+ \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left[2\pi(1+\tilde{\alpha})L\int_0^L\gamma(\epsilon)^{-\frac{2z}{L}}|F_n(U^{\epsilon})(z)-F_n(u)(z)|^2dz\right].
\end{aligned}$$

En utilisant à nouveau (3.2.17) dans (2.7.16), et l'inégalité de Hölder on obtient

$$\begin{aligned}
2\pi\gamma(\epsilon)^{-\frac{2x}{L}}|\widetilde{F}(g_0^{\epsilon},h_0^{\epsilon},U^{\epsilon})(x)-\widetilde{F}(g_0^{\epsilon},h_0^{\epsilon},u)(x)|^2 &\leq 4\pi\left(1+\frac{1}{\tilde{\alpha}}\right)\gamma(\epsilon)^{-2}\left(|g_0^{\epsilon}-g_0|^2+|h_0^{\epsilon}-h_0|^2\right) \qquad (3.2.19)\\
&+ 2\pi(1+\tilde{\alpha})L\int_x^L\gamma(\epsilon)^{-\frac{2z}{L}}|F_0(U^{\epsilon})(z)-F_0(u)(z)|^2dz.
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant combiner les résultats de (2.2.1), (2.6.1), (3.2.10), (3.2.11), (3.2.18) et (3.2.19), pour obtenir

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\mathcal{W}}(x,\cdot)\|^2 &\leq 4\left(1+\frac{1}{\tilde{\alpha}}\right)\left(\frac{\epsilon}{\gamma(\epsilon)}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{\tilde{\alpha}}\right)\left[\|u(0,\cdot)\|^2 + \|u_x(0,\cdot)\|^2\right] \\ &+ (1+\tilde{\alpha})\mathbb{K}_F^2 L \int_0^L \|\widetilde{\mathcal{W}}(z,\cdot)\|^2 dz \\ &\leq 4\left(1+\frac{1}{\tilde{\alpha}}\right)\left(\frac{\epsilon}{\gamma(\epsilon)}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{\tilde{\alpha}}\right)\mathcal{I}_3^2 + (1+\tilde{\alpha})\mathbb{K}_F^2 L^2 \|\widetilde{\mathcal{W}}\|_1^2, x \in [0,L]. \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

Cette dernière inégalité est vraie pour tout $x \in [0,L]$ et le membre de droite de (3.2.20) est indépendant de x donc, on obtient

$$\|\widetilde{\mathcal{W}}\|_1^2 \leq 4\left(1+\frac{1}{\tilde{\alpha}}\right)\gamma(\epsilon)^{-2}\epsilon^2 + \left(1+\frac{1}{\tilde{\alpha}}\right)\mathcal{I}_3^2 + (1+\tilde{\alpha})\mathbb{K}_F^2 L^2 \|\widetilde{\mathcal{W}}\|_1^2.$$

Alors,

$$\left(1-(1+\tilde{\alpha})\mathbb{K}_F^2 L^2\right)\|\widetilde{\mathcal{W}}\|_1^2 \leq 4\left(1+\frac{1}{\tilde{\alpha}}\right)\gamma(\epsilon)^{-2}\epsilon^2 + \left(1+\frac{1}{\tilde{\alpha}}\right)\mathcal{I}_3^2 = \left(1+\frac{1}{\tilde{\alpha}}\right)\left(\mathcal{I}_3^2 + 4\gamma(\epsilon)^{-2}\epsilon^2\right)$$

Puisque $\tilde{\alpha} \in \left(0, \frac{1}{\mathbb{K}_F^2 L^2} - 1\right)$ il s'ensuit que la parenthèse de gauche est positive. Ceci implique que

$$\gamma(\epsilon)^{-\frac{2x}{L}}\|U_n^\epsilon(x) - u_n(x)\|^2 \leq \widetilde{\mathcal{W}}\|_1^2 \leq \frac{\left(1+\frac{1}{\tilde{\alpha}}\right)\left(\mathcal{I}_3^2 + 4\gamma(\epsilon)^{-2}\epsilon^2\right)}{\left(1-(1+\tilde{\alpha})\mathbb{K}_F^2 L^2\right)}$$

Ainsi (2.7.4) tient.

•Preuve de la partie(b)

D'abord, nous réécrivons Φ_n comme

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{2}\left(R^{\gamma(\epsilon)}(L,n) - 1\right) n^{-r} e^{-\sqrt{in}x}\left(n^r u_n(0) - n^r \frac{u_n'(0)}{\sqrt{in}}\right), \qquad n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\},$$

En utilisant (3.1.21), comme dans (3.2.16), on obtient

$$\begin{aligned} |\widetilde{\mathcal{W}}_n(x)| &\leq \frac{1}{2}\widetilde{M}(\epsilon,r)|n|^r\left[|u_n(0)| + |u_n'(0)|\right] + \gamma(\epsilon)^{-1}\left[|g_n^\epsilon - g_n| + |h_n^\epsilon - h_n|\right] \\ &+ \int_0^L \gamma(\epsilon)^{-\frac{z}{L}}|F_n(U^\epsilon)(z) - F_n(u)(z)|dz, \qquad n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité(3.2.17), comme dans (3.2.18), on obtient

$$\begin{aligned}2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}} |\widetilde{\mathcal{W}}_n(x)|^2 &\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}} \left[2\pi\left(1+\frac{1}{\tilde{\alpha}}\right)\widetilde{M}^2(\epsilon,r)\left[|n|^{2r}|u_n(0)|^2+|n|^{2r}|u_n'(0)|^2\right]\right] \\ &+ \sum_{n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}} \left[8\pi\left(1+\frac{1}{\tilde{\alpha}}\right)\gamma(\epsilon)^{-2}\left(|g_n^\epsilon-g_n|^2+|h_n^\epsilon-h_n|^2\right)\right] \\ &+ \sum_{n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}} \left[2\pi(1+\tilde{\alpha})L\int_0^L \gamma(\epsilon)^{-\frac{2z}{L}}|F_n(U^\epsilon)(z)-F_n(u)(z)|^2dz\right].\end{aligned}$$

Enfin, comme dans (3.2.19), on obtient

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\mathcal{W}}(x,\cdot)\|^2 &\leq 2\pi\left(1+\frac{1}{\tilde{\alpha}}\right)\widetilde{M}^2(\epsilon,r)\left[\|u(0,\cdot)\|^2_{V^r(0,2\pi)}+\|u_x(0,\cdot)\|^2_{V^r(0,2\pi)}\right] \\ &+ 4\left(1+\frac{1}{\tilde{\alpha}}\right)\left(\frac{\epsilon}{\gamma(\epsilon)}\right)^2+(1+\tilde{\alpha})\mathbb{K}_F^2L\int_0^L\|\widetilde{\mathcal{W}}(z,\cdot)\|^2dz \\ &\leq 2\pi\left(1+\frac{1}{\tilde{\alpha}}\right)\widetilde{M}^2(\epsilon,r)\mathcal{I}_4^2+4\left(1+\frac{1}{\tilde{\alpha}}\right)\left(\frac{\epsilon}{\gamma(\epsilon)}\right)^2+(1+\tilde{\alpha})\mathbb{K}_F^2L^2\|\widetilde{\mathcal{W}}\|_1^2.\end{aligned}$$

on obtient

$$\|\widetilde{\mathcal{W}}\|_1^2 \leq 2\pi\left(1+\frac{1}{\tilde{\alpha}}\right)\widetilde{M}^2(\epsilon,r)\mathcal{I}_4^2+4\left(1+\frac{1}{\tilde{\alpha}}\right)\left(\frac{\epsilon}{\gamma(\epsilon)}\right)^2+(1+\tilde{\alpha})\mathbb{K}_F^2L^2\|\widetilde{\mathcal{W}}\|_1^2.$$

Enfin, on obtient

$$\gamma(\epsilon)^{-\frac{2x}{L}}\|U^\epsilon(x,\cdot)-u(x,\cdot)\|^2 \leq \|\widetilde{\mathcal{W}}\|_1^2 \leq \frac{2\pi\left(1+\frac{1}{\tilde{\alpha}}\right)\widetilde{M}^2(\epsilon,r)\mathcal{I}_4^2+4\left(1+\frac{1}{\tilde{\alpha}}\right)\gamma(\epsilon)^{-2}\epsilon^2}{1-(1+\tilde{\alpha})\mathbb{K}_F^2L^2}$$

Par conséquent, l'inégalité (2.7.6) est vérifiée. Ceci conclut la preuve du théorème (2.7.1).

Conclusion et perspectives

Dans cet mémoire on a étudié un problème mal-posé gouverné par une équation de la Conduction Thermique inverse semi-linéaire. on a montré que le problème est mal-posé au sens d'hadamard, puis on a proposé deux méthodes de règularisation, La première basèe sur un choix approprié d'une fonction **filtre** et la méthode consiste à éliminer les hautes fréquences en utilisant une technique de troncature spectrale.

Comme perspectives

−**i**− Étude numérique des deux méthodes de régularisation

−**ii**− Étude comparative théorique entre, les deux méthodes

−**iii**− proposition d'une Méthode hybride qui combine deux méthodes de régularisation afin d'amélioer l'emplification d'erreur.

Bibliographie

[1] J.V. Beck, B. Blackwell and C.R. St. Clair Jr. *Inverse Heat Conduction : Ill-Posed Problems*, Wiley-Interscience, New York.(1985)

[2] F. Berntsson *Sequential solution of the sideways heat equation by windowing of the data*, Inverse Problems Eng. 11,(2003), 91–103.

[3] O.R. Burgaff *An exact solution of the inverse problem in heat conduction theory and application*, J. Heat Transfer 86C,(1964), 373-382.

[4] L. Garifo, V.E. Schrock and E. Spedicato *On the solution of the inverse heat conduction problem by finite differences*, Energia Nucleare 22, (1975), 452–464.

[5] N.H. Tuana, D. Lesnic, T.Q. Viet, V.V. Aud *Regularization of the semilinear sideways heat equation*, IMA Journal of Applied Mathematics, 84 (2),(2019), pp. 258–291.

[6] T.I. Seidman and L. Elden *An optimal filtering method for the sideways heat equation, Inverse Problems* 6,(1990), 681–696.