République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par :

Melle. Kardoussi Chorouk

Intitulé

Sur les systèmes différentiels à coefficients périodiques

Dirigé par : Prof. Badi Sabrina

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr.Mellal Romaissa**	**MCB**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr.Badi Sabrina**	**Prof**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr.Menaceur Amor**	**MCA**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2023

Résumé

Dans ce mémoire nous nous intéressons à l'étude des systèmes linéaires à coefficients périodiques de la forme :

$$\dot{x} = A(t)x, x \in \mathbb{R}^n.$$

où

$$A(t+T) = A(t).$$

Nous définissons quelques concepts initiaux liés aux systèmes différentiels à coefficients périodiques qui nous montrent l'existence de solutions périodiques grâce à deux théories importantes, et nous permettent de convertir ces systèmes différentiels périodiques en systèmes différentiels constants grâce à une transformation spécifique.

Mots-clés : *Les systèmes linéaires à coefficients périodiques, les multiplicateurs caractéristiques, les solutions périodiques, les exposants caractéristiques.*

Abstract

In this work, we are interested in studying the differential equation with periodic coefficients of the form :

$$\dot{x} = A(t)x, x \in \mathbb{R}^n.$$

where

$$A(t + T) = A(t).$$

We will define some initial concepts related to differential systems with periodic coefficients, which show us the existence of periodic solutions thanks to two important theories, Which allow us to convert these periodic systems into fixed systems thanks to a simple transformation.

Keywords : Linear systems with periodic coefficients, characteristic multipliers, periodic solutions, characteristic exponents.

ملخص

في هذه المذكرة نهتم بدراسة المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الدورية من الشكل:

$$x` = \mathrm{A}(\mathrm{t})x,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

حيث :

$$\mathrm{A}(\mathrm{t} + \mathrm{T}) = \mathrm{A}(\mathrm{t}).$$

سوف نحدد بعض المفاهيم الأولية المتعلقة بالأنظمة التفاضلية ذات المعاملات الدورية التي تبين لنا وجود حلول دورية بفضل نظريتين مهمتين و تسمح لنا بتحويل هذه الجمل التفاضلية الدورية إلى جمل تفاضلية ثابتة بفضل تحويل معين.

الكلمات المفتاحية :

الأنظمة الخطية ذات المعاملات الدورية, المضاعفات المميزة, حلول دورية, الأسس المميزة.

Remerciements

Avant tout je remercie*"Allah"* le tout puissant qui m'a donné la volonté, le courage, la force et la patience pour réaliser ce travail.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude envers mon Encadreur *Mme.* ***Badi Sabrina*** directrice de ce mémoire de fin d'étude master 2 en mathématique, pour sa disponibilité la confiance qu'elle m'a accordé, et ses précieux conseils qui m'ont permis de mener à bien ce travail.

Merci beaucoup.

- Je tiens également à remercier *Mme.**Mellal Romaissa*** qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette mémoire, ainsi que je remercie *Mr.* ***Menaceur Amor***, d'avoir accepté d'être Co-encadreur.

- Je remercie chaleureusement tous les membres de la composante administrative du département de mathématiques **(Univ. Guelma)** pour toute l'aide qui m'a été accordée.

- Une grande reconnaissance et un grand remerciement à tous mes enseignants qui ont participé à ma formation.

- Je tiens également à remercier *Mr.* ***Benrabah Abderafik*** et *Mr.* ***Bousstila Nadjib*** qui m'ont aidé beaucoup par leur soutien scientifique.

- Je remercie aussi ma famille, mes amis. Enfin, un grand merci à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de cette mémoire.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail.

A ma mère et à mon père en guise de remerciement et de reconnaissance pour toute la confiance, le soutien et l'aide qu'ils m'ont apporté tout en m'encourageant pour empreinter la voie de la réussite.

A toutes mes sœurs et tous mes professeurs qui ont eu la générosité de partager leur savoir et de nous l'inculquer sans relâche et mes amis : Safa,Chahra,Amira.

A tous ce bon monde et tous ceux que j'aime du font de mon cœur, je dis grand merci.

Table des matières

Introduction

La théorie des systèmes dynamiques désigne couramment la branche des mathématiques qui s'efforce d'étudier les propriétés d'un système dynamique.
Cette recherche active se développe à la frontière de la topologie, de l'analyse, de la géométrie, de la théorie de la mesure et des probabilités. Pour plus de détails, voir [1], [6]
Les équations différentielles sont apparues à la fin du 17-ième siècle avec l'invention du calcul différentiel par newton et leibnitz.
L'importance des équations différentielles réside dans l'interprétation des phénomènes scientifiques physiques et chimiques. La raison en est que nous pouvons écrire des équations avec de nombreuses variables en fonction de dérivées telles que la vitesse et l'emplacement de différents corps.
la théorie de floquet est l'étude des systèmes différentiels ordinaires sous la forme :

$$\dot{x} = A(t)x, x \in \mathbb{R}^n.$$

où

$$A(t+T) = A(t).$$

Le théorème démontré par Gaston Floquet prouve : si $A(t)$ est une matrice périodique de période minimale T et $X(t)$ le système fondamentale de solution associé à l'équation $\dot{x} = A(t)x$ permet de transformer un système différentiel à coefficients périodiques à un système différentiel à coefficients constants par une simple transformation.
La théorie de floquet [2] est très importante dans l'étude des systèmes différentiels périodiques grâce à la notion des multiplicateurs caractéristiques et les exposants caractéristiques elle permet de montrer l'existence d'une solution périodique pour une certaine valeur du multiplicateur.

On a besoin de connaître toutes les solutions pour trouver la transformation qui réduit le système périodique à un système à coefficients constants.
Dans ce mémoire nous nous intéressons à l'étude des systèmes linéaires à coefficients périodiques de la forme :

$$\dot{x} = A(t)x, x \in \mathbb{R}^n.$$

où

$$A(t+T) = A(t).$$

Nous définissons quelques concepts initiaux liés aux systèmes différentiels à coefficients périodiques qui nous montrent l'existence de solutions périodiques grâce à deux théories importantes, et nous permettent de convertir ces systèmes différentiels périodiques en systèmes différentiels constants grâce à une transformation spécifique.
Ce mémoire contient 5 chapitres :

- Le premier chapitre : Il se compose d'un ensemble de concepts de base importants pour comprendre ce sujet.
- Le deuxième chapitre : Étudie les systèmes différentiels linéaires non autonomes.
- Le troisième chapitre : Étudie les systèmes différentiels linéaires autonomes et illustre la méthode de résolution.
- Le quatrième chapitre : Est consacré à l'étude des systèmes différentiels à coefficients périodiques, nous introduisons le théorème de Floquet et celui de Lyapunov, nous définissons la notion de multiplicateur et nous présentons sa relation avec l'existence des solutions périodiques.
- Le dernier chapitre : Illustre quelques exemples concernant le calcul des multiplicateurs de Floquet.

CHAPITRE 1

Notions préliminaires et généralités

1.1 Systèmes différentiels

Définition

Un système d'équations différentielles ordinaire :

$$F_k(t, y_1, y_1', ..., y_1^{(k_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(k_2)}, ..., y_n, y_n', ..., y_n^{(k_n)}) = 0 \tag{1.1.1}$$

résolu par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé $y^{(K_1)}, y^{(K_2)}, ..., y^{(K_n)}$, s'appelle système canonique, il s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} y_1^{(k_1)} = f_1(t, y_1, y_1', ..., y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(k_2-1)}, ..., y_n, ..., y_n^{(k_n-1)}) \\ y_2^{(k_2)} = f_2(t, y_1, y_1', ..., y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(k_2-1)}, ..., y_n, ..., y_n^{(k_n-1)}) \\ . \\ . \\ . \\ y_n^{(k_n)} = f_n(t, y_1, y_1', ..., y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(k_2-1)}, ..., y_n, ..., y_n^{(k_n-1)}) \end{cases} \tag{1.1.2}$$

On appelle ordre du système (1.1.2) le nombre $P = k_1 + k_2 + ... + k_n$.

Exemple

Ramenons à la forme canonique le système d'équations :

$$\begin{cases} y_2 y_1' - \ln(y_1'' - y_1) = 0, ...(a) \\ e^{y_2'} - y_1 - y_2 = 0............(b) \end{cases}$$

En effet :
de (a) : $y_1'' = y_1 + e^{y_2 y_1'}$,
de (b) : $y_2' = \ln(y_1 + y_2)$.
Donc le système canonique est :

$$\begin{cases} y_1'' = y_1 + e^{y_2 y_1'}, \\ y_2' = \ln(y_1 + y_2). \end{cases}$$

Ce système est d'ordre 3 : $P = K_1 + K_2 = 2 + 1 = 3$.

Définition

Un système d'équations différentielles du 1^{er} ordre :

$$\frac{dy_k}{dt} = f_k(t, y_1, y_2, ..., y_n), t \in \mathbb{R}, k = \overline{1, n} \tag{1.1.3}$$

où t la variable indépendante et $y_1, y_2, ..., y_n$ sont des fonctions inconnues de t s'appelle système normale. L'ordre du système (1.1.3) est n.

Remarques

1) On dit que deux systèmes sont équivalents s'ils possèdent les mêmes solutions.

2) Tout système canonique (1.1.2) peut se ramener au système normale (1.1.3) (équivalent) et l'ordre de ces deux systèmes sera le même.

Exemple

Ecrire sous la forme normale le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'' + 2y = 0, \\ ty' - x = 0. \end{cases}$$

En effet, ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} x'' = -2y, \\ y' = \dfrac{x}{t}. \end{cases}$$

L'ordre de ce système est : $2 + 1 = 3$.

D'autre part, posons :

$$\begin{cases} y_1 = x, \\ y_2 = x', \\ y_3 = y. \end{cases}$$

On obtient le système normale équivalent qui est :

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -2y_3, \\ y_3' = \dfrac{y_1}{t}. \end{cases}$$

Ce système est aussi d'ordre 3.

Remarque

Toute équation différentielle et tout système canonique peut se transformer à la forme normale.

Définition

Le système

$$\dot{x} = f(t, x)$$

où

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

est dit non autonome lorsque la variable indépendante t apparait explicitement dans l'expression de f, dans le cas contraire il est dit autonome.

1.1.1 Théorème (Existence)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Si $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue alors pour tout $(t_0, x_0) \in U$, le problème

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.1.4}$$

admet au moins une solution.

Définition

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f = f(t,x) : U \to \mathbb{R}^n$.

f est localement lipschitzienne en x, si pour tout fermé et borné (compact) K dans U, il existe une constante $L > 0$ telle que

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$$

pour tout (t, x_1) et (t, x_2) dans K.

1.1.2 Théorème (Unicité) [5]

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f = f(t,x)$:$U \to \mathbb{R}^n$ est continue et localement lipschitzienne en x, alors pour tout $(t_0, x_0) \in U$, le problème (1.1.4) admet une solution unique.

CHAPITRE 2

Systèmes différentiels linéaires non autonomes

Définition

Un système différentiel non autonome est dit linéaire s'il est de la forme :

$$\dot{x} = A(t)x + B(t) \tag{2.0.1}$$

telle que $A(t) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une matrice carrée d'ordre n et $t \in \mathbb{R}$.

• Si $B(t) \neq 0$, le système (1.2.1) est dit linéaire non autonome non homogène.

• Si $B(t) = 0$, le système (1.2.1) est dit linéaire non autonome homogène.

2.1 Théorème (Existence et unicité de la solution)

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t), ...(P) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

où $A(t)$ et $B(t)$ sont continues sur un intervalle $\mathbf{I}$ de $\mathbb{R}$. Alors pour tout $t_0 \in \mathbf{I}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, le problème (P) admet une unique solution $x(t)$ dans $\mathbf{I}$.

2.2 Notion de matrice fondamentale

Définition

Si $\phi(t)$ est une matrice carrée ayant pour tout $t \in \mathbf{I}$ un déterminant non nulle et si $\phi(t)$ est solution de $\dot{x} = A(t)x$ (ie $\dot{\phi}(t) = A(t)\phi(t)$), alors $\phi(t)$ est appelée matrice fondamentale du système $\dot{x} = A(t)x$.

Exemple

Soit le système :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} x, t \in \mathbb{R}^*$$

Vérifions que :

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{pmatrix}$$

est bien une matrice fondamentale pour ce système.

En effet :
On a : $\dot{\phi}(t) = \begin{pmatrix} 2t & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, d'autre part

$$A(t)\phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où

$$\dot{\phi}(t) = A(t)\phi(t).$$

De plus

$$det(\phi(t)) = -t^2 \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}^*$$

Donc $\phi(t)$ est une matrice fondamentale pour le système précédent.

Définition

Considérons une matrice fondamentale de $\dot{x} = A(t)x$:
$\phi(t) = [\phi_1(t), \phi_2(t), ..., \phi_n(t)]$, alors

$$w(t) = det(\phi(t)) = det[\phi_1(t), \phi_2(t), ..., \phi_n(t)]$$

est appelé le wronskien de la matrice fondamentale $\phi(t)$. Le wronskien satisfait une simple équation différentielle d'ordre 1.

2.3 Théorème de Liouville

Considérons le système :

$$\dot{x} = A(t)x$$

où $A(t) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une matrice carrée d'ordre n et soit $\phi(t)$ une matrice fondamentale de ce système, alors :

$$w(t) = det(\phi(t))$$

satisfait l'équation différentielle :

$$\dot{w} = (trace(A(t)))w(t).......(*).$$

Par conséquent :

$$w(t) = det(\phi(t)) = e^{\int trace(A(t)dt)}.$$

Preuve [4]

L'équation $(*)$ est équivalente à :

$$\frac{dw(t)}{dt}\frac{1}{w(t)} = trace(A(t)) \Longrightarrow \int \frac{dw(t)}{w(t)} = \int traceA(t)dt$$

$$\Longrightarrow \ln(w(t)) = \int traceA(t)dt$$

$$\Longrightarrow w(t) = \exp(\int traceA(t)dt) = det(\phi(t)).$$

D'où le résultat.

Remarque

On voit qu'on peut toujours calculer le déterminant de la matrice fondamentale même lorsque la matrice fondamentale n'est pas connue.

2.4 Méthode de résolution

a) Solution générale du système linéaire homogène

Théorème [4]

Soit $\phi(t)$ une matrice fondamentale du système linéaire homogène

$$\dot{x} = A(t)x \tag{2.4.1}$$

La solution générale de (1.2.2) est $x(t) = \phi(t)C$ où C est un vecteur constant. Si on considère de plus la condition initiale $x(t_0) = x_0$. L'unique solution de (1.2.2) vérifiant $x(t_0) = x_0$ est :

$$x(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)x_0.$$

b) Solution générale du système linéaire non homogène

Considérons le système

$$\dot{x} = A(t)x + B(t) \tag{2.4.2}$$

avec $A(t)$ et $B(t)$ sont continues sur $\mathbf{I}$ de $\mathbb{R}$, la solution générale de(1.2.3) est donnée par :

$$x(t) = \phi(t)C + \phi(t)\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)B(s)ds,$$

où $\phi(t)$ est une matrice fondamentale du système homogène associé :

$$\dot{x} = A(t)x$$

et C un vecteur constant.

Si on considère de plus la condition initiale $x(t_0) = x_0$, l'unique solution de (1.2.3) sera :

$$x(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)x_0 + \phi(t)\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)B(s)ds.$$

Preuve

La solution générale du système (1.2.3) est :

$$x(t) = x_{GH}(t) + x_p(t),$$

où $x_{GH}(t) = \phi(t)C$ est la solution générale du système homogène associé :

$$\dot{x} = A(t)x,$$

et $x_p(t)$ est la solution particulière du système

$$\dot{x} = A(t)x + B(t),$$

qu'on trouve par variation de la constante.

Substituons $x_p(t) = \phi(t)C(t)$ dans (1.2.3), on obtient :

$$\dot{\phi}(t)C(t) + \phi(t)\dot{C}(t) = A(t)x_p(t) + B(t)$$

$$= A(t)\phi(t)C(t) + B(t)$$

$$\Rightarrow \dot{\phi}(t)C(t) + \phi(t)\dot{C}(t) = A(t)\phi(t)C(t) + B(t)$$

$$\Rightarrow \dot{\phi}(t)C(t) + \phi(t)\dot{C}(t) = \dot{\phi}(t)C(t) + B(t)$$

$$\Rightarrow C(t) = \int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)B(s)ds$$

$$\Rightarrow x_p(t) = \phi(t)\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)B(s)ds.$$

Donc :
$x(t) = \phi(t)C + \phi(t)\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)B(s)ds, C =$ vect constant.

CHAPITRE 3

Systèmes différentiels linéaires autonomes

Définition

On appelle système différentiel linéaire autonome le système

$$\dot{x} = Ax + B \tag{3.0.1}$$

telle que $A : \mathbb{R}^n \longleftrightarrow \mathbb{R}^n$ est une matrice constante et B un vecteur constant.

• Si $B \neq 0$, le système (1.3.1) est dit linéaire autonome non homogène.

• Si $B = 0$, le système (1.3.1) est dit linéaire autonome homogène.

Définition

On appelle exponentielle de la matrice $A(n \times n)$, la série $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}$ et on note e^A ou $\exp A$.

• Soit le système

$$\dot{x} = Ax, A \in M_n(\mathbb{R}). \tag{3.0.2}$$

$\phi(t) = e^{At}$ est une matrice fondamentale de (1.3.2) vérifiant $\phi(0) = \mathbf{I}$.

On a $e^{At} = \sum\limits_{\geq 0} \frac{A^n t^n}{n!}$. Cherchons les solutions de (1.3.2) sous la forme

$$x = e^{\lambda t} w, \tag{3.0.3}$$

où w est un vecteur non nul.

En substituant (1.3.3) dans (1.3.2), on trouve :

$$\lambda e^{\lambda t} w = A e^{\lambda t} w \Longrightarrow e^{\lambda t}(A - \lambda I) w = 0$$

$\Longrightarrow \lambda$ est une valeur propre de A.

Théorème [4]

Le système (1.3.2) admet une solution (non identiquement nulle) $x = e^{\lambda t} w$ si et seulement si λ est une valeur propre de A et w le vecteur propre correspondant.

3.1 Méthode de résolution

a) Résolution d'un système différentiel linéaire autonome homogène :

Soit le système

$$\dot{x} = Ax, A \in M_n(\mathbb{R}).$$

• 1^{er} cas : Les valeurs propres de A sont réelles et distinctes.

Théorème [4]

Soit $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de A réelles et distinctes et $w_1, w_2, ..., w_n$ les vecteurs propres correspondants, alors une matrice fondamentale est donnée par :

$$\phi(t) = [e^{\lambda_1 t} w_1, ..., e^{\lambda_n t} w_n],$$

et la solution générale de (1.3.2) est :

$$x(t) = \phi(t) C$$

où C est un vecteur constant.

Si on rajoute la condition initiale $x(t_0) = x_0$, alors l'unique solution du problème sera :

$$x(t) = \phi(t)\phi(t_0)^{-1}x_0.$$

Exemple

Résolvons le système :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} x(t),$$

où

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

En effet :

Les valeurs propres de la matrice A sont : $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ (réelles distinctes).

Les vecteurs propres correspondant sont respectivement : $w_1 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$,

$w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'où :

$$\phi(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2}e^{-t} & e^{2t} \\ e^{-t} & e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} & 0 \\ e^{-t} & e^{t} \end{pmatrix}.$$

Donc la solution générale de système est :

$$x(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} & e^{2t} \\ 2e^{-t} & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

où $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ = vecteur constant.

- <u>2-ième Cas :</u> Les valeurs propres de A sont réelles multiples.

Soit λ une valeur propre de A de multiplicité $K \leq n$, alors pour chaque $K = \overline{1; n}$, chaque solution non nulle w de $(A - \lambda I)^k w = 0$ s'appelle vecteur propre généralisé de A.

Théorème [4]

Soit A une matrice réelle d'ordre n qui possède des valeurs propres réelles $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ répétées selon leurs multiplicités, alors il existe une base de vecteurs propres généralisés $(w_1, w_2, ..., w_n)$ et une matrice inversible $P = [w_1, w_2, ..., w_n]$ telle que $A = S + N$ où

$$P^{-1}SP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & . & & \\ & & . & \\ & & & . \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

et $N = A - S$ est une matrice nilpotente d'ordre $K \leq n$ (avec S et N commutative : SN =NS).

Corollaire

Sous les hypothèses du théorème ci-dessus, le problème :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

possède une solution de la forme :

$$x(t) = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & . & & \\ & & . & \\ & & & . \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} P^{-1}[I + Nt + ... + \frac{N^{K-1}}{(k-1)!}t^{k-1}]x_0.$$

Exemple

Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a :
les valeurs propres de A sont : $\lambda = 2$(double).

Les vecteurs propres de A sont respectivement : $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,
$w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On a :$P^{-1} = \dfrac{1}{det(P)}(comP)^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Maintenant de :

$$P^{-1}SP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow S = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

on obtient : $N = A - S = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Alors $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

La solution du problème est alors :
$x(t) = P \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} P^{-1}[I + Nt + 0 + ... + 0]x_0$
,où $x_0 = \begin{pmatrix} x_{0_1} \\ x_{0_2} \end{pmatrix}$ = vecteur constant.

• <u>3-ième cas :</u> Les valeurs propres de A sont complexes distinctes.

Théorème [4]

Si la matrice $A(2n \times 2n)$ possède $2n$ valeurs propres complexes distinctes $\lambda_j = a_j + ib_j, \overline{\lambda_j} = a_j - ib_j, j = \overline{1;n}$ dont les vecteurs propres correspondants $w_j = u_j + iv_j, \overline{w_j} = u_j - iv_j$ alors $u_1v_1, u_2v_2, ..., u_nv_n$ est une base de $\mathbb{R}^{2n}$; la matrice $P = [v_1u_1, v_2u_2, ..., v_nu_n]$ est inversible et vérifie :

$$P^{-1}AP = diag \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}, j = \overline{1;n}.$$

Cette matrice diagonale est une matrice réelle avec des blocs 2×2 le long de la matrice diagonale.

Remarque

Notons que si à la place de la matrice P , nous utilisons la matrice inversible $Q = [u_1v_1, u_2v_2, ..., u_nv_n]$ alors Q vérifie :

$$Q^{-1}AQ = diag \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}, j = \overline{1;n}.$$

Corollaire

Sous les hypothèses du théorème ci dessus, la solution du problème :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

est donnée par :

$$x(t) = Pdiag \left[e^{a_jt} \begin{pmatrix} \cos(b_jt) & -\sin(b_jt) \\ \sin(b_jt) & \cos(b_jt) \end{pmatrix} \right] P^{-1}x_0.$$

Exemple

Soit le système :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(t).$$

Les valeurs propres de la matrice A sont : $\lambda_1 = 1+i$, $\overline{\lambda}_1 = 1-i$.

Les vecteurs propres de A sont respectivement :

$$w_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

d'où la solution générale de ce système est :

$$x(t) = P \left(e^t \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \right) P^{-1}C$$

$$= \begin{pmatrix} e^t \cos t & e^t \sin t \\ -e^t \sin t & e^t \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

Sachant que : $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

- <u>4-ième Cas :</u> Les valeurs propres de A sont complexes multiples.

Théorème [4]

Soit A une matrice réelle $(2n \times 2n)$ avec des valeurs propres complexes multiples $\lambda_j = a_j + ib_j$ et $\overline{\lambda}_j = a_j - ib_j, j = \overline{1;n}$.

Il existe une base de vecteur propre généralisé : $w_j = u_j + iv_j$ et $\overline{w_j} = u_j - iv_j, j = \overline{1;n}$ de $\mathbb{R}^{2n}$: $[u_1v_1, u_2v_2, ..., u_nv_n]$. Pour une telle base, la matrice $P = [v_1u_1, v_2u_2, ..., v_nu_n]$ est inversible et vérifie : $A = S+N$,

$$P^{-1}AP = diag \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \text{ et } N \text{ est nilpotente d'ordre } K \leq 2n.$$

Corollaire

Sous les hyphotèses du théorème précédent, la solution du problème

$$\begin{cases} x(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$, est donnée par :

$$x(t) = Pdiag\left[e^{a_j t} \begin{pmatrix} \cos(b_j t) & -\sin(b_j t) \\ \sin(b_j t) & \cos(b_j t) \end{pmatrix} \right] P^{-1}[I + Nt + ... \frac{N^{k-1}}{(K-1)!} t^{k-1}]x_0.$$

• <u>5-ième Cas :</u> Les valeurs propres de A sont réelles et complexes distinctes.

Théorème [4]

Si A admet de valeurs propres réelles distinctes λ_j dont les vecteurs propres $v_j, j = \overline{1;k}$ et elle possède aussi des valeurs propres complexes distinctes $\lambda_j = a_j + ib_j$ et $\overline{\lambda}_j = a_j - ib_j$ dont les vecteurs propres associés sont $w_j = u_j + iv_j$ et $\overline{w_j} = u_j - iv_j$, alors :

$$P = [v_1, v_2, ...v_k, v_1 u_1, v_n u_n]$$

et

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & 0 \\ & . & & & & & & & \\ & & . & & & & & & \\ & & & . & & & & & \\ & & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & & \beta_{k+1} & & & \\ & & & & & & . & & \\ & & & & & & & . & \\ & & & & & & & & . \\ 0 & & & & & & & & \beta_n \end{pmatrix}$$

où le bloc : $\beta_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}$ et $j = \overline{k+1; n}$.

Alors la solution générale du système est donnée par :

$$x(t) = PMP^{-1}C,$$

où C est un vecteur constant

avec :

$$M = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & & 0 \\ & \cdot & & & & \\ & & e^{\lambda_k t} & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & e^{a_{k+1}t}\begin{pmatrix} \cos(b_{k+1}t) & -\sin(b_{k+1}t) \\ \sin(b_{k+1}t) & \cos(b_{k+1}t) \end{pmatrix} & \\ 0 & & & & & e^{a_n t}\begin{pmatrix} \cos(b_n t) & -\sin(b_n t) \\ \sin(b_n t) & \cos(b_n t) \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Chapitre 4

Théorie de Floquet

La forme générale des systèmes linéaires à coefficients périodiques qu'on va étudier dans ce chapitre est la suivante :

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x,$$

où

$$A(t+T) = A(t),$$

c'est à dire que $A(t)$ est une matrice carrée, tous ses éléments sont périodiques.

Remarque

les systèmes de type (2.0.1) peuvent avoir des solutions non périodiques. Montrons ceci à travers cet exemple.

Exemple

Considérons le système :

$$\frac{dx}{dt} = (1+\cos(t))x, x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$$

où

$$A(t) = 1+\cos(t).$$

On a :

$$A(t+T) = A(t+2\pi) = 1+\cos(t+2\pi) = 1+\cos(t) = A(t),$$

donc $A(t)$ est périodique de période $T = 2\pi$.
D'autre part :

$$\dot{x} = (1+\cos t)x \Rightarrow \frac{dx}{dt} = (1+\cos(t))x \Rightarrow \frac{dx}{x} = (1+\cos(t))dt$$

$$\Rightarrow \ln(x) = t+\sin(t)+C \Rightarrow x(t) = Ce^{t+\sin(t)}, C = constante.$$

Remarquons que :

$$x(t+2\pi) = Ce^{t+2\pi+\sin(t+2\pi)} = Ce^{t+2\pi+\sin(t)} = Ce^{t+\sin(t)}e^{2\pi} = x(t)e^{2\pi},$$

d'où $x(t+2\pi) \neq x(t)$.

Ce qui signifie que $x(t)$ n'est pas une solution périodique.

Théorème

Soit $\phi(t)$ une matrice fondamentale de (2.0.1), alors $\phi(t+T)$ l'est aussi, et il existe une matrice constante C inversible telle que :

$$\phi(t+T) = \phi(t)C$$

Preuve

Soit $\phi(t) = (\phi^1, ..., \phi^n)$ une matrice fondamentale de (2.0.1) où $\phi^{(i)}, i = 1, ..., n$ sont n vecteurs solutions linéairement indépendants.

On a :

$$\frac{\phi(t)}{dt} = A(t)\phi(t),$$

et

$$\frac{\phi(t+T)}{dt} = A(t+T)\phi(t+T) = A(t)\phi(t+T).$$

$\Rightarrow \phi(t+T)$ est aussi une matrice fondamentale (2.0.1).
D'autre part, on sait qu'on peut écrire :

$$\begin{cases} \phi^{(1)}(t+T) = C_{11}\phi^{(1)}(t) + ... + C_{n1}\phi^{(n)}(t) \\ . \\ . \\ . \\ \phi^{(n)}(t+T) = C_{1n}\phi^{(1)}(t) + ... + C_{nn}\phi^{(n)}(t) \end{cases}$$

d'où

$$\phi(t+T) = (\phi^{(1)}(t+T), ..., \phi^{(n)}(t+T)) = (\phi^{(1)}(t), ..., \phi^{(n)}(t)) \begin{pmatrix} C_{11} & . & . & . & C_{1n} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ C_{n1} & . & . & . & C_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \phi(t+T) = \phi(t)C. \tag{4.0.1}$$

D'où

$$C = \phi^{-1}(t)\phi(t+T).$$

Pour $t = 0$, on obtient :

$$C = \phi^{-1}(0)\phi(T).$$

Si on suppose que $\phi(t)$ est telle que $\phi(0) = I$ et on note : $\phi(t) = \phi(t,0)$, on aura : $\phi^{-1}(0) = I$ et

$$C = \phi(T) = \phi(T,0) \tag{4.0.2}$$

par suite (2.0.2) devient :

$$\phi(t+T,0) = \phi(t,0)\phi(T,0) \tag{4.0.3}$$

La matrice inversible C définie par (2.0.3) s'appelle matrice principale ou matrice de monodromie du système (2.0.1).

Définition

Les valeurs propres de la matrice de monodromie C définie par (2.0.3) sont appelées les multiplicateurs caractéristiques du système (2.0.1).

Proposition [2]

Les multiplicateurs caractéristiques ne dépendent pas du choix de la matrice fondamentale mais dépendent du système (2.0.1).

Preuve

Étant $\phi(t)$ une matrice fondamentale, Soit $\widetilde{\phi}(t)$ une autre matrice fondamentale $\Rightarrow \exists$ une matrice $\widetilde{C}$:

$$\widetilde{\phi}(t+T) = \widetilde{\phi}(t)\widetilde{C}.$$

D'autre part, il existe une matrice constante inversible B telle que :

$$\widetilde{\phi}(t) = \phi(t)B$$

d'où

$$\widetilde{\phi}(t+T) = \phi(t)B\widetilde{C}$$

et

$$\widetilde{\phi}(t+T) = \phi(t+T)B \Rightarrow \widetilde{\phi}(t+T) = \phi(t)CB$$

$$\Rightarrow B\widetilde{C} = CB$$

$$\Rightarrow \widetilde{C} = B^{-1}CB$$

$\Rightarrow$ $\widetilde{C}$ est semblable à C (donc ils ont les mêmes valeurs propres). Donc $\widetilde{C}$ et C ont les mêmes multiplicateurs caractéristiques.

D'où le spectre de toutes ces matrices de monodromies correspondant à des matrice fondamentales différentes est invariant.

Exemple

Soit le système linéaire périodique :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & h(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Où $h(t) = \dfrac{(\cos t + \sin t)}{(2 + \sin t - \cos t)}$.

Déterminons les multiplicateurs caractéristiques pour ce système.

En effet :

Ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = h(t)x_2 \end{cases}$$

Remarquons que $A(t)$ est bien périodique de période 2π.

De la deuxième équation :

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = h(t)x_2 \Rightarrow \frac{dx_2(t)}{x_2} = h(t)dt$$

$$\Rightarrow \ln|x_2(t)| = \int h(t)dt$$

$$\Rightarrow \ln|x_2(t)| = \ln(2 + \sin t - \cos t) + c$$

$$\Rightarrow x_2(t) = (2 + \sin t - \cos t)e^c$$

$$\Rightarrow x_2(t) = b(2 + \sin t - \cos t)$$

,Où $b = e^c$ est une constante.

On remplace $x_2(t)$ par sa valeur dans la 1^{er} équation : $\dot{x}_1 - x_1 = x_2$, dont la solution générale est : $x_1 = x_{GH} + x_p$.

- calcul de la solution homogène x_{GH} de l'équation $\dot{x}_1 - x_1 = 0$

$$\dot{x}_1 - x_1 = 0 \Rightarrow \frac{dx_1}{dt} = x_1$$

$$\Rightarrow \frac{dx_1}{x_1} = dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx_1}{x} = \int dt$$

$$\Rightarrow ln|x_1| = t + c$$

$$\Rightarrow x_{GH} = ce^t, c = constante.$$

- calcul de la solution particulière x_p par variation de constante :

On pose : $x_p = c(t)e^t$ dans l'équation $\dot{x}_1 - x_1 = x_2$ on trouve :

$$x_p(t) = -b(2 + \sin t),$$

d'où la solution générale du système est :

$$x_1 = ce^t - b(2 + \sin t), c = cte$$

Par conséquent :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ce^t - b(2 + \sin t) \\ b(2 + \sin t - \cos t) \end{pmatrix}. \quad (4.0.4)$$

Cherchons une matrice fondamentale $\phi(t)$: posons dans(2.0.5) :

$$c = 0, b = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - \sin t \\ 2 + \sin t - \cos t \end{pmatrix}, 1^{er} \text{ vecteur solution.}$$

Maintenant on considère :

$$c = 1, b = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \text{2-ième vecteur solution.}$$

Alors la matrice $\phi(t) = (\phi^{(1)}(t), \phi^{(2)}(t))$

$$= \begin{pmatrix} -2 - \sin t & e^t \\ 2 + \sin t - \cos t & 0 \end{pmatrix}$$

est bien une matrice fondamentale.

D'aprés la définition la matrice de monodromie, C est définie par :

$$C = \phi^{-1}(0)\phi(2\pi) \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi} \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de C vérifient :

$$det(C - I\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & e^{2\pi} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(e^{2\pi}-\lambda)=0.$$

Donc les multiplicateurs caractéristiques sont :

$$\Leftrightarrow \lambda = 1 \, ou \, \lambda = e^{2\pi}.$$

Remarque

Puisque la matrice C est inversible elle n'admet pas zéro comme valeur propre.

Théorème

Si λ un multiplicateur caractéristique de (2.0.1), alors il existe une solution non triviale $\varphi(t)$ de (2.0.1) telle que :

$$\varphi(t+T)=\lambda\varphi(t)$$

pour tout t.

Inversement

Si pour une solution non triviale φ de (2.0.1) on a :

$$\varphi(T)=\lambda\varphi(0),$$

alors λ est un multiplicateur caractéristique, et de plus $\varphi(0)$ est le vecteur propre correspondant.

Preuve

Soit λ un multiplicateur caractéristique et $S \neq 0$ le vecteur propre correspondant. Considérons la solution $\varphi(t)$ de (2.0.1) qui prend la valeur S pour $t = 0$: $\varphi(0) = S$.
On a :

$$\varphi(t) = \phi(t,0)S$$

et

$$\begin{aligned}\varphi(t+T) &= \phi(t+T,0)S \\ &= \phi(t,0)CS \\ &= \phi(t,0)\lambda S \\ &= \lambda\phi(t,0) \\ &= \lambda\varphi(t)\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Inversement

Supposons qu'on a : $\varphi(T) = \lambda\varphi(0)$ pour une solution non triviale $\varphi(t)$.
Comme :

$$\varphi(T) = \phi(T,0)\varphi(0)$$

ceci signifie que :

$$\phi(T,0)\varphi(0) = \lambda\varphi(0),$$

c'est à dire :

$$C\varphi(0) = \lambda\varphi(0)$$

$$\Rightarrow (C - \lambda I)\varphi(0) = 0$$

$$\Rightarrow det(C - \lambda I) = 0$$

$\Rightarrow \lambda$ est un multiplicateur caractéristique et $\varphi(0)$ est bien le vecteur propre correspondant. Ce qui achève la démonstration.

Corollaire

Le système (2.0.1) possède une solution $T - priodique$ (resp . $2T$ Périodique) si et seulement si le nombre 1 (resp . (-1)) est un multiplicateur caractéristique.

Preuve

Si 1 est un multiplicateur caractéristique $\Rightarrow \exists V \neq 0$ telle que : $CV = V$, c'est à dire $\phi(T, 0)V = V$.
Soit la solution $\varphi(t)$ telle que $\varphi(0) = V$
on a :

$$\varphi(t) = \phi(t)V$$

$$\Rightarrow \varphi(t + T) = \phi(t)CV$$

$$= \phi(t)V$$

$$= \varphi(t)$$

donc $\varphi(t)$ est T-périodique.

De même :

Si (-1) est un multiplicateur caractéristique on a :

$$\exists V \neq 0 \; telle \; que \; : CV = -V \Rightarrow \phi(T,0)V = -V.$$

Soit la solution $\varphi(t)$ telle que $\varphi(0) = V$,
on a :

$$\varphi(t) = \phi(t)V$$

d'où :

$$\begin{aligned} \varphi(t+2T) = \varphi(t+T+T) &= \phi(t+T)CV \\ &= -\phi(t+T)V \\ &= -\phi(t)CV \\ &= -\phi(t)(-V) \\ &= \phi(t)V \\ &= \varphi(t). \end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi(t)$ est 2T-périodique.

Réciproquement :

Si $\varphi^1(t)$ est une solution T-périodique non nulle, alors :

$$\varphi^1(t+T) = \varphi^1(t)$$

d'où

$$\varphi^1(T) = \varphi^1(0)$$

ceci implique

$$C\varphi^1(0) = \varphi^1(0)$$

donc 1 est un multiplicateur caractéristique car $\varphi^1(0) \neq 0$.

De même :

Si $\varphi^2(t)$ est une solution 2T-périodique non nulle,
on a

$$\varphi^2(2T) = C^2\varphi^2(0) = \varphi^2(0)$$

avec $\varphi^2(0) \neq 0$

$$\Rightarrow (C^2 - I)\varphi^2(0) = 0$$

$$\Rightarrow 1 \; est \; une \; valeur \; propre \; de \; C^2, (\varphi^2(0) \neq 0)$$

$$\Rightarrow (C^2\varphi^2(0) = (C+I)(C-I)\varphi^2(0) = 0, (\varphi^2(0) \neq 0)$$

$$\Rightarrow det(C+I)det(C-I) = 0$$

Si (-1) n'est pas un multiplicateur caractéristique alors :

$$det(C+I) \neq 0$$

d'où

$$det(C-I) = 0$$

$\Rightarrow 1 \; est \; un \; multiplicateur \; caractristique \; c'est \; dire$

$$C\varphi^2(0) = \varphi^2(0)$$

donc $\varphi^2(t)$ est T-périodique, ce qui contredit le fait que $\varphi^2(t)$ est 2T-périodique (2T est le période minimale), on conclut que $det(C-I)\neq 0$ ce qui implique que $det(C+I)=0$, $\Rightarrow (-1)$ est un multiplicateur caractéristique.

Corollaire

Si le système (2.0.1) possède k solutions linéairement indépendantes T-périodique (resp . 2T-périodique), alors la multiplicité du multiplicateur caractéristique $1(resp.(-1))$ est au moins égale à k dans le polynôme caractéristique de la matrice de monodromie.

Exemple

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -\sin(2t)x_1 + (\cos(2t)-1)x_2 \\ \dot{x_2} = (\cos(2t)-1)x_1 + \sin(2t)x_2 \end{cases}$$

2π-périodique.
une matrice fondamentale est définie par :

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} e^t(\cos(t)-\sin(t)) & e^{-t}(\cos(t)+\sin(t)) \\ e^t(\cos(t)+\sin(t)) & e^{-t}(-\cos(t)+\sin(t)) \end{pmatrix}$$

Trouvons la matrice de monodromie et les multiplicateurs caractéristiques.
En effet :

on a : $\phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

d'où : $\phi^{-1}(0) = \dfrac{1}{det(\phi(0))}[com\phi(0)]^t = \dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$\phi(2\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Donc la matrice de monodromie est :

$$C = \phi^{-1}(0)\phi(2\pi) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de C sont : $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ qui représentent les multiplicateurs caractéristiques. De ce résultat et d'aprés le corollaire précédent, on obtient deux solutions périodiques pour ce système.

4.1 Théorème de Floquet

Théorème (Floquet 1883 **[2])**

La matrice fondamentale $\phi(t,0)$ du système (2.0.1) peut s'écrire sous la forme :

$$\phi(t,0) = P(t)e^{Bt}$$

où P est une matrice T-périodique :

$$P(t+T) = P(t)\ et\ P(0) = I$$

et B est une matrice constante.

Preuve

Soit B une matrice qui satisfait :

$$e^{Bt} = C = \phi(T,0).$$

On peut écrire :

$$\phi(t,0) = \phi(t,0)e^{-Bt}e^{Bt}.$$

Soit

$$P(t) = \phi(t,0)e^{-Bt},$$

on a :

$$P(t+T) = \phi(t+T,0)e^{-B(t+T)}$$

$$= \phi(t,0)\phi(T,0)e^{-Bt}e^{BT}$$

$$= \phi(t,0)e^{BT}e^{-Bt}e^{-BT}$$

$$= \phi(t,0)e^{-Bt}$$

$$= P(t).$$

D'où le résultat.

Définition

Les valeurs propres de la matrice B définie par :

$$e^{Bt} = C = \phi(T,0),$$

sont appelées les exposants caractéristiques du système

$$\dot{x} = A(t)x, A(t+T) = A(t).$$

Il est clair que :

(μ est un exposant caractéristique) $\Longleftrightarrow$ ($\lambda = e^{\mu T}$ est un multiplicateur).

Notons que les exposants caractéristiques ne sont pas uniques. C'est à dire : Si u_j est un exposant caractéristique alors $u_j + i\dfrac{2\pi k}{T}$ avec $k \in \mathbb{N}$ l'est aussi.

Remarque

A chaque exposant caractéristique μ , il lui correspond une solution $\varphi(t)$ du système (2.0.1) de la forme :

$$\varphi(t) = \exp(\mu t)P(t),$$

où $P(t+T) = P(t)$.

En effet : Soit S le vecteur propre associé à μ : $BS = \mu S$ est soit la solution $\varphi(t)$ telle que : $\varphi(0) = S$; on a

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= P(t)e^{Bt}S \\ &= P(t)e^{\mu t}S \\ &= e^{\mu t}P(t)S \\ & e^{\mu t}P(t) \end{aligned}$$

où $P(t+T) = P(t)$.

Exemple

Revenons à l'exemple, où on a calculé les multiplicateurs du système considéré et on a trouvé :

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = e^{2\pi}.$$

Dans ce cas les exposants caractéristiques correspondants sont :

$$\mu_1 = 0, \mu_2 = 1.$$

4.2 Théorème de Lyapunov

Théorème (Lyapunov 1892 **[3],[7])**

Si $A(t)$ est réelle, alors il existe une matrice T-périodique P qui satisfait : $P(0) = I$ telle que la transformation

$$x = P(t)z$$

transforme le système

$$\dot{x} = A(t)x$$

en un système linéaire homogène à coefficients constants.

Preuve

Posons :

$$P(t) = \phi(t, 0)e^{-Bt}, \ (\dot{\phi} = A\phi).$$

Substituons $x = P(t)z$ dans $\dot{x} = A(t)x$ on trouve :

$$\dot{P}z + P\dot{z} = APz \Rightarrow \dot{z} = P^{-1}[AP - \dot{P}]z$$

où

$$P^{-1}[AP - \dot{P}] = e^{Bt}\phi^{-1}[A\phi e^{-Bt} - \dot{\phi}e^{-Bt} + \phi B e^{-Bt}]$$

$$= e^{Bt}\phi^{-1}\phi B e^{-Bt}$$

$$= B,$$

d'où on a :

$$\dot{z} = Bz$$

avec B donnée par :

$$e^{BT} = C = \phi(T,0).$$

Nous avons défini les exposants caractéristiques du système (2.0.1) :

$$\dot{x} = A(t)x,$$

comme les valeurs propres de la matrice B du système :

$$\dot{z} = Bz.$$

Si nous considérons ce système comme un système périodique de période T, alors sa matrice de monodromie est e^{BT}. Donc le système :

$$\dot{z} = Bz$$

considéré comme un système à coefficients périodiques a les mêmes multiplicateurs caractéristiques que le système (2.0.1) :

$$\dot{x} = A(t)x,$$

ceci est un cas particulier d'une propriété générale qui est la suivante :

Si nous transformons le système (2.0.1) en un autre système par une transformation périodique, alors les multiplicateurs de ce nouveau système seront les mêmes que ce du système (2.0.1).

Proposition

Soit $S(t)$ une matrice périodique, $S(t+T) = S(t)$ telle que $S^{-1}(t)$ existe, alors : $S^{-1}(t)$ est aussi périodique.

Preuve

Supposons que :

$$S^{-1}(t+T) = S^{-1}(t)$$

multiplions par $S(t+T)$, on obtient :

$$S(t+T)S^{-1}(t+T) = S(t+T)S^{-1}(t) \Longleftrightarrow I = S(t+T)S^{-1}(t)$$

$$\Longleftrightarrow S(t)S^{-1}(t) = I$$

d'où : $S^{-1}(t)$ est périodique.

Théorème

Soit $S(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ une matrice T-périodique. La transformation

$$x = S(t)z$$

transforme le système $\dot{x} = A(t)x$.........................$(*)$
où

$$A(t+T) = A(t)$$

en un système linéaire homogène à coefficients périodiques dont les multiplicateurs caractéristiques coïncident avec ceux du système $(*)$.

Preuve

Mettons $x = S(t)z$ dans $(*)$, on obtient :

$$\dot{S}(t)z + S(t)\dot{z} = A(t)S(t)z$$

$z(t)$ satisfait donc le système :

$$\dot{z} = \underbrace{S^{-1}(t)[A(t)S(t) - \dot{S}(t)]}z\text{.........................}(**)$$

cette matrice est continue et T-périodique.
Soit $\phi(t,0)$ la matrice fondamentale de $(*)$ telle que $\phi(0,0) = I$, alors :

$$\psi(t) = S^{-1}(t)\phi(t,0)$$

est aussi une matrice fondamentale de $(**)$. Les multiplicateurs caractéristiques de $(**)$ sont les valeurs propres de : $\psi^{-1}(0)\psi(T)$ mais :

$$\psi^{-1}(0)\psi(T) = \phi^{-1}(0,0)S(0)S^{-1}(T)\phi(T,0)$$

$$= IS(0)S^{-1}(0)C$$

$$= IC$$

$$= C.$$

CHAPITRE 5

Applications

5.1 Exemple 1

Cherchons les multiplicateurs charactéristiques pour le système suivant :

$$y' = \begin{bmatrix} 1 + \dfrac{\cos(t)}{2+\sin(t)} & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} y.$$

En premier, on résout ce système. Soit l'équation différentielle d'ordre un :

$$y_1' = \left(1 + \frac{\cos(t)}{2+\sin(t)} \right) y_1$$

Sa solution générale est :

$$y_1 = c_1(t)e^t(2+\sin(t))$$

Posons maintenant $y_1(t)$ dans l'équation différentielle :

$$y_2' = y_1 - y_2$$

Après résolution, on trouve :

$$y_2 = c_1(t)e^t \left(1 + \frac{2\sin(t) - \cos(t)}{5} \right) + c_2(t)e^{-t}$$

d'où

$$y(t) = \left[\begin{array}{c} e^t(2+\sin(t)) \\ e^t\left(1+\dfrac{2\sin(t)-\cos(t)}{5}\right) \end{array} \right].$$

et

$$z(t) = \left[\begin{array}{c} 0 \\ e^{-t} \end{array} \right]$$

Il s'ensuit qu'une matrice fondamentale est :

$$\phi(t) = \left[\begin{array}{cc} e^t(2+\sin(t)) & 0 \\ e^t\left(1+\dfrac{2\sin(t)-\cos(t)}{5}\right) & e^{-t} \end{array} \right].$$

Ainsi

$$C = \phi^{-1}(0)\phi(2\pi) = \left[\begin{array}{cc} \dfrac{1}{2} & 0 \\ -\dfrac{1}{2}(\dfrac{4}{5}) & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 2e^{2\pi} & 0 \\ (\dfrac{4}{5})e^{2\pi} & e^{-2\pi} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} e^{2\pi} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi} \end{array} \right]$$

Les multiplicateurs charactéristiques sont : $\mu_1 = e^{2\pi}$ et $\mu_2 = e^{-2\pi}$.

5.2 Exemple 2

On peut vérifier que :

$$y(t) = \left[\begin{array}{c} e^t(2+\sin(t)) \\ e^t\left(1+\dfrac{2\sin(t)-\cos(t)}{5}\right) \end{array} \right]$$

est une solution pour le système :

$$y'(t) = \left[\begin{array}{cc} 1+\dfrac{\cos(t)}{2+\sin(t)} & 0 \\ 1 & -1 \end{array} \right] y. \tag{5.2.1}$$

Remarquons que :

$$y(t+2\pi) = \begin{bmatrix} e^{t+2\pi}(2+\sin(t)) \\ e^{t+2\pi}\left(1+\dfrac{2\sin(t)-\cos(t)}{5}\right) \end{bmatrix} = e^{2\pi}y(t).$$

d'où $e^{2\pi}$ est un multiplicateur charactéristique.

5.3 Exemple 3

Soit le système :

$$\begin{cases} x_1' = \left(1+\dfrac{\cos(t)}{2+\sin(t)}\right)x_1 \\ x_2' = x_1 - x_2 \end{cases} \tag{5.3.1}$$

On peut facilement résoudre ce système, on trouve :

$$\begin{cases} x_1 = c_1e^t(2+\sin(t)) \\ x_2 = c_1e^t\left(2+\dfrac{1}{2}\sin(t)-\dfrac{1}{2}\cos(t)\right)+c_2e^{-t} \end{cases} \tag{5.3.2}$$

On peut l'écrire comme suit :

$$x(t) = c_1e^t\begin{bmatrix} 2+\sin(t) \\ 2+\dfrac{1}{2}\sin(t)-\dfrac{1}{2}\cos(t) \end{bmatrix} + c_2e^{-t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{5.3.3}$$

Une matrice fondamentale est donnée par :

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} e^t(2+\sin(t)) & 0 \\ e^t(2+\dfrac{1}{2}\sin(t)-\dfrac{1}{2}\cos(t)) & e^{-t} \end{bmatrix} \tag{5.3.4}$$

d'où :

$$C = \phi^{-1}(0)\phi(2\pi) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \dfrac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2e^{2\pi} & 0 \\ \dfrac{3}{2}e^{2\pi} & e^{-2\pi} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2e^{2\pi} & 0 \\ \dfrac{3}{2}e^{2\pi} & e^{-2\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2\pi} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi} \end{bmatrix}$$

donc $e^{2\pi}$, $e^{-2\pi}$ sont deux multiplicateurs charactéristiques.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié les systèmes différentiels ordinaires périodiques, connu sous le nom de la théorie de Floquet qui est consacrée à l'étude des systèmes différentiels à coefficients périodiques, d'autre part, la notion du multiplicateur caractéristique permet de montrer l'existence de solutions périodiques pour une certaine valeur du multiplicateur.

D'aprés cette étude, nous remarquons que :
1) L'ensemble des multiplicateurs caractéristiques est un ensemble invariant d'un système linéaire homogène à coefficients périodiques dans le sens que cet ensemble est invariant par une transformation périodique.
2) Les propriétés de cet ensemble détermine le comportement des solutions et l'existence d'une solution périodique.
3) Pour déterminer les multiplicateurs caractéristiques, on a besoin d'une matrice fondamentale, c'est à dire on a besoin de connaitre toutes les solutions, ceci qui n'est pas facile.

D'autre part, la théorie de Lyapunov permet de transformer un systèmes différentiels à coefficients périodiques à un systèmes différentiels à coefficients constants, mais pour trouver la transformation qui réduit le système à coefficients périodiques, ce n'est pas facile non plus, cependant on peut appliquer une méthode qui donne des approximations des multiplicateurs caractéristiques.

Bibliographie

[1] H. Cartan , *Cours de calcul différentiel, Hermann* , Paris, **(1967)**.

[2] G. Floquet : *Sur les équations différentielles linéairs à coefficients périodiques, Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, Volume 12 **(1883)**, pages 47-88.

[3] A. Liapounov : *The general problem of the stability of motion , CRC Press* ,**(1992)**.

[4] A. Makhlouf : *Cours de Systèmes Dynamiques*, année **(2004)**.

[5] J.P. Raymond , *Système différentiels, Université Paul Sabatier " Résumé de la* 1^{er} *partie de cours du module B4, Analyse et approximation des prollèmes différentiels de la maitrise de mathématique"*.

[6] R. Roussarie et jean Roux , *Des équations différentielles aux systémes dynamiques, EDP Sciences*, **(2012)**.

[7] M. Viana, *Lectures on Exponent, Combridge university press*, Combridge, **(2013)**.