République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par : **Hameri Roumayssa**

Intitulé

Inégalité d'Hermite-Hadamard pour Différents types de Convexité

Dirigé par : Aissaoui Fatima

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr. Laribi Naima**	**MCA**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr. Aissaoui Fatima**	**MCA**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr. Lakhal Fahim**	**PROF**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2023

Remerciments

*En premier lieu, nous tenons à remercier notre **DIEU**, notre créateur pour nous avoir donné la force pour accomplir ce travail.*

*C'est avec un grand plaisir que je saisie l'occasion offerte par l'achèvement de ma mémoire de Master pour remercier vivement en premier lieu, Madame **Aissaoui Fatima**, Maitre de conférence à l'Université de Gualma d'avoir dirigé ce travail avec beaucoup d'attention, de patience et d'intérêt, et qui m'a fait bénéficier durant cette année de ses conseils et de sa très grande compétence.*

*Mes sincères remerciements vont aussi à Madame **Laribi Naima**, Maitre de conférence à l'Université de Guelma pour avoir accepté de juger ce travail et d'en présider le jury de soutenance.*

*Mes meilleurs remerciements vont aussi à **Lakhal Fahim,** Professeur à l'Université de Guelma pour avoir accepté de faire partie du jury. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma haute gratitude.*

*Je ne saurais oublier d'exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur **Mefteh Badreddine** Maitre de conférence à l'Université de Guelma pour son aide si précieux.*

A toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Merci pour tout.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mes parents

Mon père, *j'espère qu'il est fier de trouver ici le résultat d'années de sacrifices pour m'aider à avancer dans la vie. Merci pour les valeurs nobles, l'amour, l'éducation et le soutient permanent venu de vous.*

Ma mère, *qui ne cesse jamais de m'offrir, son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie.*

Mes frères *et* ***sœurs*** *qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.*

A mon mari et sa famille respectueuse.

Ma grande familles ***Hameri*** *et* ***Azzouz*** *qui m'ont toujours poussé et m'encouragé.*

Mes amies pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire.

Abstract

In this memory, we will focus on the study of inequality of the Hermite-Hadamard for standard difference of convexity.

In the first chapter, we recall some definitions of classical convexity, as well as some classes of functions.

In the second chapter, we discuss some classical Hermite-Hadamard types of inequalities.

While the last chapter will be entierly devoted some fractional Hermite-Hadamard inequalities.

Keywords : Hermite-Hadamard inequality, Hölder inequality, convex and s-convex functions, Riemann-Liouville integral.

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous concentrerons sur l'étude des inégalités d'Hermite-Hadamard pour différents types de convexité.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions de la convexité classique ainsi que quelques identités intégrales que nous utiliserons ci-dessous.

Dans le deuxième chapitre, nous citons certains résultats déjà connus dans la littérature.

Tandis que le dernier chapitre sera entièrement consacré aux inégalités intégrales fractionnaires de type Hermite-Hadamard pour différents types de convexité.

Mots clés : inégalité d'Hermite-Hadamard, inégalités de Hölder, fonctions convexes et s-convexes, intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.

ملخص

في هذه الاطروحة سوف نركز على دراسة عدم المساواة التكاملية من نوع هرميت هدامار من اجل بعض أنواع التحدب.

في الفصل الأول، نذكَر ببعض تعريفات التحدب الكلاسيكي، وكذلك بعض المساواة التكاملية التي سنستعملها لاحقا، بالإضافة الى التذكر بالتكاملات الكسرية لريمان ليوفيل.

في الفصل الثاني، سنذكَر ببعض النتائج المعروفة في الادب حول عدم المساواة التكاملية من نوع هرميت هدامار.

في حين ان الفصل الأخير سيخصص بالكامل لعدم المساواة التكاملية من نوع هرميت هدمار الكسرية.

كلمات مفتاحية

عدم المساواة من نوع هرميت هدامار، عدم مساواة هولدر، الدوال المحدبة، تكامل ريمان ليوفيل.

Table des matières

Introduction

La théorie des inégalités a émergé comme un domaine intéressant à explorer ces dernières années, celle-ci constitue également un important sujet de recherche où plusieurs situations mathématiques font appels à ces inégalités. En revanche les inégalités intégrales ont connues un grand développement et de nouvelles techniques voire de nouvelles méthodes sont apparues, ce qui a contribué à la résolution de nombreux problèmes importants en théorie de l'approximation et en analyse numérique où l'estimation des erreurs est exigée. Par ailleurs l'importance de ces inégalités intégrales intervient en grande partie dans la théorie de probabilité, l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'analyse numérique, etc...

Une inégalité très intéressante qui est largement étudiée dans la littérature est due à Hermite et Hadamard qui l'ont découverte indépendamment (découverte par Charles Hermite en 1883 et prouvée par Jaques Hadamard en 1893). Maintenant elle est connue comme l'inégalité d'Hermite-Hadamard, on peut dire qu'elle est le premier résultat fondamental pour les fonctions convexes avec une interprétation géométrique naturelle et de nombreuses applications. Elle nous génère une estimation de la valeur moyenne de la fonction convexe sur un intervalle borné. Ce célèbre résultat est défini comme suit :

$$f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \leq \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \tfrac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Ces dernières années, de nombreux chercheurs ont accordé beaucoup d'attention à la théorie de la convexité en raison de sa grande utilité dans divers domaines des sciences pures et appliquées. La théorie des fonctions convexes et les inégalités sont étroitement liées. Le concept des fonctions convexes à effectivement trouvé une place importante dans une abondante littérature à été développée sur ce sujet et pour d'amples détails on peut consulter Mitrionović, Pečarić et Fink [14].

Beaucoup de mathématiciens ont consacré leurs efforts à généraliser et raffiner cette inégalité et l'étendre à différentes classes de fonctions : fonction convexe, fonction s-convexes, fonction p-convexes, etc...et l'appliquer à des moyens spéciaux.

En guise d'introuduction, nous allons discuter un autre concept sur le calcul fractionnaire, ce dernier n'est qu'une généralisation du calcul differentiel d'ordre entièr α d'une fonction $f(x)$ par rapport à la variable x à des valeurs non entièr de α.

L'objectif de ce mémoire est de traiter d'une part les inégalités d'Hermite-Hadamard pour différents types de fonctions dont les dérivées premières jouissent d'un certain type de convexité, d'autre part en va essayer de voir des généralisations de ce type d'inégalité en utilisant l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.

Dans ce mémoire, nous allons proposer une introduction et trois chapitres :

Dans le premier chapitre nous rappelons quelques notions préliminaires concernant certains types de convexité classique, une esquisse concernant le calcule fractionnaire ainsi que quelques identités intégrales et inégalités utiles pour notre étude.

Dans le deuxième chapitre nous présentons les notions de bases des inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard dont les fonctions sont convexes et s-convexe, suivi de quelques applications à des valeurs moyennes.

Enfin, notre dernier chapitre est consacré aux inégalités intégrales de type Hermite -Hadamard pour l'intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville pour certain type de convexité.

On termine ce mémoire par une petite bibliographie.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre se compose de deux parties :

Dans la première partie nous rappelons quelques types de convexité classique, certaines classes de fonctions et quelques inégalités célèbres.

Dans la deuxième partie, en terminant ce chapitre nous allons aborder l'intégration fractionnaire, en présentent quelques notions préliminaires qui seront par la suite utilisées dans les démonstrations.

Dans tout ce qui va suivre nous désignons par $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

1.1 Convexité classique

Définition 1.1 ([2]) *Un ensemble I est dit convexe, si pour tout $x, y \in I$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$ on a :*

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in I.$$

Définition 1.2 ([14]) *Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si :*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \tag{1.1}$$

pour tout $x, y \in I$ et tout $\lambda \in [0, 1]$.

Définition 1.3 ([9]) *Une fonction positive $f : I \subset [0, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite s-convexe au second sens si pour tout $x, y \in [0, \infty[$ on a :*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda^s f(x) + (1 - \lambda)^s f(y) \tag{1.2}$$

où $s \in (0, 1]$ avec $\lambda \in [0, 1]$.

1.2 Quelques classes de fonctions

Définition 1.4 ([7]) *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, f est dite bornée sur $[a, b]$ s'il existe $-\infty < m < M < +\infty$ telle que pour tout $x \in [a, b]$ on a :*

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Définition 1.5 *Soient $\Omega = (a, b)$ un intervalle de $\mathbb{R}$. $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $1 \leq p \leq +\infty$.*

- *Pour $1 \leq p \leq \infty$ l'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace des fonction f telle que f est mesurable et*
$$\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \leq +\infty.$$
- *Pour $f \in L^p(\Omega)$ est l'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme $\| \, .\|_p$ on note :*
$$\| \, f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$
est un espace de Banach.

1.3 Inégalité de type Hermite-Hadamard

Nous rappelons la célèbre inégalité dite d'Hermite-Hadamard pour les fonctions convexes puis nous exposerons une généralisation qui concerne les fonctions s-convexes.

Théorème 1.1 ([8]) *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, une fonction convexe, alors l'inégalité d'Hermite-Hadamard est définie comme suit :*

$$f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \leq \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \tfrac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{1.3}$$

Théorème 1.2 ([4]) *Supposons que $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$ est une fonction s-convexe au second sens, où $s \in (0, 1]$ et $a, b \in [0, \infty[$ tel que $a < b$. Si $f \in L^1([a, b])$ on a*

$$2^{s-1} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \leq \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \tfrac{f(a)+f(b)}{s+1}. \tag{1.4}$$

1.4 Inégalité de Hölder et sa variante

Théorème 1.3 ([10]) *Soient f et g sont deux fonctions réelles définies sur $[a, b]$ où $a < b$, telle que $|f|^{\,p}$ et $|g|^{\,q}$ sont des fonctions intégrable sur $[a, b]$ respectivement où $p, q > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.5}$$

Théorème 1.4 ([6]) *Soient $|f|^p$ et $|g|^q$ deux fonctions intégrables sur $[a, b]$, où $a < b$ et $q \geq 1$, alors on a :*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.6}$$

1.5 Les Moyens spéciaux

Définition 1.6 ([2]) *Nous considérons les moyennes des nombres réelles arbitraires $\alpha, \beta, \alpha \neq \beta$ suivants :*

– *La moyenne arithmétique*

$$A(\alpha, \beta) = \tfrac{\alpha+\beta}{2},\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

– *La moyenne géométrique*

$$G(\alpha, \beta) = \sqrt{\alpha\beta}.$$

– *La moyenne logarithmique*

$$\overline{L}(\alpha, \beta) = \tfrac{\beta-\alpha}{\ln|\beta| - \ln|\alpha|}\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

– *La moyenne identique*

$$I(\alpha, \beta) = \tfrac{1}{e}\left(\tfrac{\beta^{\beta}}{\alpha^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}.$$

– *La moyenne logarithmique généralisée*

$$L_n(\alpha, \beta) = \left[\tfrac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{(n+1)(\beta-\alpha)}\right]^{\frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1,\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta.$$

– *La moyenne harmonique*

$$H\left(\alpha, \beta\right) = \frac{2}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}},\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

1.6 Généralités sur la théorie fractionnaire

Dans cette section nous rappelons deux fonctions spéciales dites aussi fonctions d'Euler. Nous donnons ici les définitions des fonctions Gamma et Bêta. Ces fonctions jouent un rôle important dans l'intégration d'ordre arbitraire.

Nous présentons aussi l'approche de l'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville.

1.6.1 Fonction Gamma

La fonction Gamma (ou intégrale d'Euler) est une fonction spéciale de base dans le calcul fractionnaire, elle généralise la fonction factorielle $n!$.

Définition 1.7 ([3]) *La fonction Gamma est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma : \alpha \longrightarrow \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt \tag{1.7}$$

tel que $\alpha > 0$.

Remarque 1.1 *En intégrant par partie, on peut voir que*

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha), \mathrm{Re}(\alpha) > 0.$$

En particulier $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n + 1) = n!.$$

$$\Gamma(1) = 1 \ \ et \ \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(n + \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1\times 3\times 5\times \ldots \times(2n-1)}{2^n}\sqrt{\Pi}.$$

1.6.2 Fonction Bêta

Parmi les fonctions de base du calcul fractionnaire on trouve la fonction Bêta. Cette fonction joue un rôle très important, spécialement dans certaines combinaisons avec la fonction Gamma.

Définition 1.8 ([11]) *La fonction Bêta est définie par :*

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1 - t)^{q-1} dt \tag{1.8}$$

tels que $\mathrm{Re}(p) > 0$, $\mathrm{Re}(q) > 0$.

Remarque 1.2 *La fonction Bêta possède l'identité suivante :*

$$B(p,q) = B\left(q,p\right), \; B(p,1) = \tfrac{1}{p}.$$

et

$$B(p+1,q+1) = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt.$$

Remarque 1.3 *La relation entre la fonction Gamma et la fonction Bêta est la suivante :*

$$B(p,q) = \tfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \text{ où } \mathrm{Re}(p) > 0 \text{ et } \mathrm{Re}(q) > 0. \tag{1.9}$$

1.6.3 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.9 ([12]) *Soit $f \in L^1([a,b])$, pour tout $t \in [a,b]$, on définit l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite (resp. à gauche) d'ordre $\alpha > 0$ notées $I_{a^+}^{\alpha} f$ $\left(\text{ resp. } I_{b-}^{\alpha}\right)$ est définie par :*

$$\begin{aligned}
(I_{a^+}^{\alpha} f)(x) &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, x > a, \qquad (1.10)\\
(I_{b-}^{\alpha} f)(x) &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, x < b,
\end{aligned}$$

où $\Gamma(\alpha)$ désigne la fonction Gamma.

Cas particulier

$$I_{a+}^{0} f\left(x\right) = I_{b-}^{0} f\left(x\right) = f\left(x\right),$$

i.e : I_{a+}^{0} est l'opérateur identité.

1.6.4 Les propriétés de l'intégrale fractionnaire de Riemann - Liouville

Proposition 1.1 *Pour $f \in L^1([a,b])$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ l'intégrale fractionnaire de Riemann -Liouville possède la propriété suivante :*

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha}(I_{a+}^{\beta}f)(x) &= I_{a+}^{\beta}(I_{a+}^{\alpha}f)(x) = I_{a+}^{\alpha+\beta}f(x), \\ I_{b-}^{\alpha}(I_{b-}^{\beta}f)(x) &= I_{b-}^{\beta}(I_{b-}^{\alpha}f)(x) = I_{b-}^{\alpha+\beta}f(x). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Dans le cas où $\alpha = 1$, l'intégrale fractionnaire sera réduite à l'intégrale classique

$$I_a^1 f(x) = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_a^x (x-t)^{1-1} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt. \tag{1.12}$$

Chapitre 2

Inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard pour différents type de convexité

Dans ce chapitre nous allons citer quelque résultat [4, 12] avec prouves concernant cette inégalité d'Hermite-Hadamard pour la classe des fonctions convexes.

2.1 Inégalités de type Hermite-Hadamard pour les fonctions convexes

Les premiers résultats de cette section s'appuient sur l'identité donnée par le lemme suivant :

Lemme 2.1 **(**[13]**)** *Soit* $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, une application différentiable sur* I°*,* $a, b \in I$*,* *avec $a < b$. Si $f' \in L[a,b]$, alors l'identité suivante à lieu*

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \\ = \quad & (b-a)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} tf'(ta+(1-t)b)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1)\,f'(ta+(1-t)b)dt\right]. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Preuve. Posons

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}} tf'(ta+(1-t)b)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1)\,f'(ta+(1-t)b)dt. \tag{2.2}$$

L'intégration par parties de la première intégrale donne

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} tf'(ta+(1-t)b)dt &= \tfrac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}t\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \tfrac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}dt \\ &= \tfrac{1}{a-b}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx. \end{aligned} \tag{2.3}$$

De la deuxième intégrale, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1)\,f'(ta+(1-t)b)dt &= \tfrac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}\,(t-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 \tfrac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}dt \\ &= \tfrac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx. \end{aligned} \tag{2.4}$$

En remplaçant (2.3) et (2.4) dans (2.2), alors

$$J = \tfrac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx - \tfrac{1}{b-a}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right).$$

où nous avons utilisé le changement de la variable $x = t + (1-t)b$, $t \in [0,1]$, puis nous avons multiplié le résultat obtenu par $(b-a)$. La preuve est ainsi achevée. ■

Théorème 2.1 ([13]) *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application différentiable sur I° telle que $f' \in L([a,b])$, où $a, b \in I$ avec $a < b$. Si $|f'|$ est convexe sur $[a,b]$, alors l'inégalité* *suivante à lieu*

$$\left|\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| \leq \tfrac{(b-a)(|f'(a)|+|f'(b)|)}{8}. \tag{2.5}$$

Preuve. D'après le lemme 2.1, la convexité de $|f'|$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| \\
\leq\ & \left|(b-a)\times\left[\int_0^{\frac{1}{2}} tf'(ta+(1-t)b)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1)\, f'(ta+(1-t)b)dt\right]\right| \\
\leq\ & (b-a)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \mid t \mid\mid f'(ta+(1-t)b)\mid dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \mid t-1 \mid\mid f'(ta+(1-t)b)\mid dt\right] \\
\leq\ & (\ b-a)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} (t^2 \mid f'(a)\mid + (1-t)t \mid f'(b)\mid)dt\right. \\
& \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 ((1-t)\, t \mid f'(a)\mid + (1-t)^2 \mid f'(b)\mid)dt\right] \\
\leq\ & (b-a)\left(\frac{1}{8}\mid f'(a)\mid + \frac{1}{8}\mid f'(b)\mid\right) dt \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)(|f'(a)|+|f'(b)|)}{8}.
\end{aligned}$$

où on a utilisé

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^2 dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^2\, dt = \tfrac{1}{24},$$

et

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)\, tdt = \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)\, tdt = \tfrac{1}{12}.$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Théorème 2.2 ([13]) *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application différentiable sur I° telle que $f' \in L([a,b])$, où $a, b \in I$ avec $a < b$, et soit $p > 1$. Si $|f'|^{\frac{p}{p-1}}$ convexe sur $[a,b]$, alors l'inégalité suivante à lieu*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \tfrac{f(a)+f(b)}{2}\right| \qquad (2.6) \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{16}\left(\tfrac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[(|f'(a)|^{\frac{p}{(p-1)}} + 3|f'(b)|)^{\frac{(p-1)}{p}} + (3|f'(a)|^{\frac{p}{(p-1)}} + |f'(b)|^{\frac{p}{(p-1)}})^{\frac{(p-1)}{p}}\right].
\end{aligned}$$

Preuve. D'après le lemme 2.1 et des propriétés de la valeur absolue et l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \tfrac{f(a)+f(b)}{2}\right| \qquad (2.7)\\
\leq\ &(b-a)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t\left|f'(ta+(1-t)b)\right| dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 |t-1| \mid f'(ta+(1-t)b) \mid dt\right]\\
\leq\ &(b-a)\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \mid f'(ta+(1-t)b) \mid^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 |t-1|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \mid f'(ta+(1-t)b) \mid^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right].
\end{aligned}$$

où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. D'après la convexité de $|f'|^q$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} |f'(ta+(1-t)b)|^q dt &\leq \int_0^{\frac{1}{2}} [t|f'(a)|^q + (1-t)|f'(b)|^q]dt \\
&= \tfrac{|f'(a)|^q+3|f'(b)|^q}{8},
\end{aligned} \qquad (2.8)$$

où nous avons utilisé

$$\int_0^{\frac{1}{2}} tdt = \tfrac{1}{8} \text{ et } \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)dt = \tfrac{3}{8},$$

aussi on a

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q\, dt &\leq \int_{\frac{1}{2}}^1 [t|f'(a)|^q + (1-t)|f'(b)|^q]dt \\
&= \tfrac{3|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{8}.
\end{aligned} \qquad (2.9)$$

on a utilisé

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^p dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 |t-1|^p\, dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^p dt = \tfrac{1}{(p+1)2^{P+1}}. \qquad (2.10)$$

Une combinaison de (2.7)-(2.10), donne

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \tfrac{f(a)+f(b)}{2}\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{p}}\left(\left(\tfrac{|f'(a)|^q+3|f'(b)|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{3|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
=\ & \tfrac{b-a}{4}\left(\tfrac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\tfrac{|f'(a)|^q+3|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{3|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}$$

La preuve est terminée. ■

Théorème 2.3 ([13]) *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application différentiable sur I° telle que $f' \in L([a,b])$, où $a, b \in I$ avec $a < b$ et soit $p > 1$. Si $|f'|^{\frac{p}{(p-1)}}$ est convexe sur $[a,b]$, alors on a :*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| \qquad (2.11)\\
\leq\ & \tfrac{(b-a)}{4}\left(\tfrac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left(|f'(a)|^{\frac{p}{p-1}}+3|f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}+\left(3|f'(a)|^{\frac{p}{p-1}}+|f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right\} \\
\leq\ & \left(\tfrac{b-a}{4}\right)\left(\tfrac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right].
\end{aligned}$$

Preuve. D'après l'équation 2.6 on a :

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| \qquad (2.12)\\
\leq\ & \left(\tfrac{b-a}{16}\right)\left(\tfrac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[(|f'(a)|^{\frac{p}{(p-1)}}+3|f'(b)|)^{\frac{(p-1)}{p}}+(3|f'(a)|^{\frac{p}{(p-1)}}+|f'(b)|^{\frac{p}{(p-1)}})^{\frac{(p-1)}{p}}\right].
\end{aligned}$$

et $q = \frac{p}{p-1}$. Soit $a_1 = |f'(a)|^q; b_1 = 3|f'(b)|^q; a_2 = 3|f'(a)|^q; b_2 = |f'(b)|^q$. $0 \leq \frac{p-1}{p} \leq 1$, pour $p > 1$. En utilisant l'inégalité algébrique suivante :

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^s \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^s + \sum_{k=1}^{n} b_k^s.$$

Pour $0 \leq s \leq 1, a_{1,}a_{2,\ldots\ldots,}a_n \geq 0, b_{1,}b_{2,\ldots\ldots,}b_n \geq 0$, on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \right| \\ \leq & \left(\tfrac{b-a}{16}\right) \left(\frac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} 4(|f'(a) + |f'(b)|) \\ \leq & \left(\tfrac{b-a}{4}\right) \left(\frac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} (|f'(a) + |f'(b)|). \end{aligned}$$

La preuve est terminée. $\blacksquare$

Théorème 2.4 ([13]) *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction différentiable sur I° telle que $f' \in L([a,b])$, où $a, b \in I$ avec $a < b$ et $q \geq 1$. Si $|f'|^q$ est convexe sur $[a,b]$, alors*

$$\left| \tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \tfrac{b-a}{4} \left[\tfrac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right]^{\frac{1}{q}}.$$

Preuve. Supposons que

$$f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = \tfrac{1}{b-a} \int_a^b S(x) f'(x)dx, \tag{2.13}$$

où

$$S(x) = \begin{cases} x - a, \; x \in [a, \frac{a+b}{2}], \\ x - b, \; x \in [\frac{a+b}{2}, b]. \end{cases}$$

En appliquant la valeur absolue à l'identité de l'égalité (2.13) et l'inégalité de moyenne d'ordre q, puis en utilisant la convexité $|f'|^q$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
& \left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right| \\
= & \left| \tfrac{1}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)\, f'(x)dx + \tfrac{1}{b-a}\int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)\, f'(x)dx \right| \\
\leq & \tfrac{1}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)\, |f'(x)|\, dx + \tfrac{1}{b-a}\int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)\, |f'(x)|\, dx \\
\leq & \tfrac{1}{b-a}\left(\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)\, dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)\, |f'(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
& +\tfrac{1}{b-a}\left(\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)\, dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)\, |f'(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
\leq & \tfrac{1}{b-a}\left(\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{b-a}{2}\right)^2\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\tfrac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\tfrac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
= & \tfrac{2}{b-a}\left(\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{b-a}{2}\right)^2\right)\left(\tfrac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right) \\
= & \tfrac{b-a}{4}\left(\tfrac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right).
\end{aligned}
$$

La preuve est terminée. ■

2.2 Inégalités de type Hermite-Hadamard pour les fonctions s-convexes au second sens

Lemme 2.2 ([1]) *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application différentiable sur I°. Si $f' \in L([a,b])$ où $a < b \in I$ tels que $a < b$, alors l'identité suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned} & f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad (2.14) \\ = \ & \tfrac{b-a}{4}\left(\int_0^1 tf'(t\tfrac{a+b}{2} + (1-t)a)dt + \int_0^1 (1-t)f'(tb + (1-t)\tfrac{a+b}{2})dt\right). \end{aligned}$$

Preuve. On noter que

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 tf'(t\tfrac{a+b}{2} + (1-t)a)dt + \int_0^1 (1-t)f'(tb + (1-t)\tfrac{a+b}{2})dt \\ &= J_1 + J_2. \end{aligned}$$

En intégrant par parties J_1, on obtient

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^1 tf'(t\tfrac{a+b}{2} + (1-t)a)dt \qquad (2.15) \\ &= \tfrac{2}{b-a}tf(t\tfrac{a+b}{2} + (1-t)a)\Big|_{t=0}^{t=1} - \tfrac{2}{b-a}\int_0^1 f(t\tfrac{a+b}{2} + (1-t)a)dt \\ &= \tfrac{2}{b-a}f(\tfrac{a+b}{2}) - \tfrac{2}{b-a}\int_0^1 f(t\tfrac{a+b}{2} + (1-t)a)dt. \end{aligned}$$

En adoptant le changement de variable $x = t\frac{a+b}{2} + (1-t)a$, (2.15) donne

$$J_1 = \tfrac{2}{b-a} f(\tfrac{a+b}{2}) - \tfrac{4}{(b-a)^2} \int\limits_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx. \tag{2.16}$$

D'une manière analogue, on obtient

$$J_2 = \tfrac{2}{b-a} f(\tfrac{a+b}{2}) - \tfrac{4}{(b-a)^2} \int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)dx. \tag{2.17}$$

En additionnant les équations (2.16) et (2.17), puis en multipliant le résultat obtenu par $\frac{(b-a)^2}{4}$, la preuve est terminée. ■

Théorème 2.5 ([1]) *Soit $f : I \subset [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, une application différentiable à I°, telle que $f' \in L([a, b])$, où $a, b \in I$ avec $a < b$. Si $|f'|$ est s-convexe sur $[a, b]$, pour un certain nombre fixé $s \in (0, 1]$, alors on a*

$$f(\tfrac{a+b}{2}) - \tfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x) \tag{2.18}$$

$$\leq \tfrac{b-a}{4(s+1)(s+2)} \left(|f'(a)| + 2(s+1)\left|f'(\tfrac{a+b}{2})\right| + |f'(b)|\right)$$

$$\leq \tfrac{(2^{2-s}+1)(b-a)}{4(s+1)(s+2)} \left[|f'(a)| + |f'(b)|\right]. \tag{2.19}$$

Preuve. D'après le Lemme 2.2, est la s-convexité de $|f'|$ on a

$$\begin{aligned}
&\left| f(\tfrac{a+b}{2}) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right| && (2.20)\\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}[\int_0^1 t\left|f'(t\tfrac{a+b}{2} + (1-t)a)\right| dt + \int_0^1 |t-1| \left|f'(tb+(1-t)\tfrac{a+b}{2})\right| dt] \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}\int_0^1 t[t^s\left|f'(\tfrac{a+b}{2})\right| + (1-t)^s|f'(a)|]dt \\
& + \tfrac{b-a}{4}\int_0^1 (1-t)[t^s|f'(b)| + (1-t)^s\left|f'(\tfrac{a+b}{2})\right|]dt \\
=\ & \tfrac{b-a}{4}\left(\tfrac{1}{s+2}\left|f'(\tfrac{a+b}{2})\right| + \tfrac{1}{(s+1)(s+2)}|f'(a)|\right) \\
& + \tfrac{b-a}{4}\left(\tfrac{1}{(s+1)(s+2)}|f'(b)| + \tfrac{1}{s+2}\left|f'(\tfrac{a+b}{2})\right|\right) \\
=\ & \tfrac{b-a}{4(s+1)(s+2)}\left(|f'(a)| + 2(s+1)\left|f'(\tfrac{a+b}{2})\right| + |f'(b)|\right).
\end{aligned}$$

où on a utilisé

$$\int_0^1 (1-t)t^s dt = \int_0^1 (1-t)^s dt = \tfrac{1}{(s+1)(s+2)},$$

et

$$\int_0^1 t^{s+1}dt = \int_0^1 (1-t)^{s+1}dt = \tfrac{1}{(s+2)}.$$

Ainsi, nous avons prouvé l'inégalité (2.18). Concernant l'inégalité (2.19), il suffit d'appliquer la s-convexité de $|f'|$ sur $[a,b]$ à l'inégalité (2.20), c'est-à-dire.

$$\left|f'(\tfrac{a+b}{2})\right| \leq 2^{s-1}\tfrac{|f'(a)|+|f'(b)|}{s+1}. \tag{2.21}$$

D'où, on obtient

$$
\begin{aligned}
& \left| f(\tfrac{a+b}{2}) - \tfrac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)dx \right| \\
\leq \; & \tfrac{(b-a)}{4(s+1)(s+2)} \left(|f'(a)| + 2(s+1) \left| f'(\tfrac{a+b}{2}) \right| + |f'(b)| \right) \\
\leq \; & \tfrac{(b-a)}{4(s+1)(s+2)} \left(|f'(a)| + 2(s+1) 2^{1-s} \tfrac{|f'(a)|+|f'(b)|}{s+1} + |f'(b)| \right) \\
= \; & \tfrac{(2^{2-s}+1)(b-a)}{4(s+1)(s+2)} \left(|f'(a)| + |f'(b)| \right).
\end{aligned}
$$

La preuve est ainsi terminée. ■

Théorème 2.6 ([1]) *Soit $f : I \subset [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, une application différentiable sur I°, telle que $f' \in L([a,b])$, où $a, b \in I$ avec $a < b$. Si $|f'|^q$ est s-convexe au second sens sur $[a,b]$, pour un certain nombre fixé $s \in (0,1]$ et $q \geq 1$, alors l'inégalité suivante à lieu*

$$
\begin{aligned}
& \left| f(\tfrac{a+b}{2}) - \tfrac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)dx \right| \qquad (2.22) \\
\leq \; & \tfrac{b-a}{8} \left(\tfrac{2}{(s+1)(s+2)} \right)^{\frac{1}{q}} \left\{ \left((2^{1-s}+1) |f'(a)|^q + 2^{1-s} |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \left((2^{1-s}+1) |f'(b)|^q + 2^{1-s} |f'(a)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}.
\end{aligned}
$$

Preuve. D'après le Lemme 2.2, et la propriété de la valeur absolue puis l'inégalité des moyennes d'ordre q, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|f(\tfrac{a+b}{2})-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \qquad (2.23)\\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}\left(\int_0^1 t\left|f'(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)a)\right|dt+\int_0^1(1-t)\left|f'(tb+(1-t)\tfrac{a+b}{2})\right|dt\right)\\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}\left(\left(\int_0^1 tdt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t\left|f'(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)a)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left(\int_0^1(1-t)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1(1-t)\left|f'(tb+(1-t)\tfrac{a+b}{2})\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right)\\
=\ & \tfrac{b-a}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left(\int_0^1 t\left|f'(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)a)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left(\int_0^1(1-t)\left|f'(tb+(1-t)\tfrac{a+b}{2})\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}$$

On a utilisé

$$\int_0^1 tdt=\int_0^1(1-t)dt=\frac{1}{2},$$

Comme $|f'|^q$ est s-convexe, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 t\left|f'(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)a)\right|^q dt \qquad (2.24)\\
\leq\ & \int_0^1 [t^{s+1}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q+t\,(1-t)^s\,|f'(a)|^q\,dt\\
=\ & \tfrac{1}{(s+2)}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q+\tfrac{1}{(s+1)(s+2)}\,|f'(a)|^q,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (1-t)\left|f'(tb+(1-t)\tfrac{a+b}{2})\right|^q dt \qquad (2.25)\\
\leq\ & \int_0^1 (1-t)\,t^s\left|f'(b)\right|^q+(1-t)^{s+1}\left|f'(\tfrac{a+b}{2})\right|^q dt\\
=\ & \tfrac{1}{(s+1)(s+2)}\left|f'(b)\right|^q+\tfrac{1}{(s+2)}\left|f'(\tfrac{a+b}{2})\right|^q,
\end{aligned}$$

En substituant (2.24) et (2.25) dans (2.23), on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|f(\tfrac{a+b}{2})-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \qquad (2.26)\\
\leq\ & \tfrac{b-a}{8}\left(\tfrac{2}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\left\{\left((s+1)\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q+\left|f'(a)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left(\left|f'(b)\right|^q+(s+1)\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\},
\end{aligned}$$

Puisque $|f'|^q$ est s-convexe sur $[a,b]$, on a

$$\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\leq 2^{1-s}\tfrac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{s+1}, \qquad (2.27)$$

En combinant (2.26) et (2.27), on trouve

$$\begin{aligned}
&\left|f(\tfrac{a+b}{2})-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\\
\leq\ & \tfrac{b-a}{8}\left(\tfrac{2}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\left\{\left((2^{1-s}+1)\left|f'(a)\right|^q+2^{1-s}\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left((2^{1-s}+1)\left|f'(b)\right|^q+2^{1-s}\left|f'(a)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.
\end{aligned}$$

Qui est le résultat souhaité. ■

Un autre type d'inégalité d'Hermite-Hadamard pour les fonctions s-convexes au second sens

Lemme 2.3 ([8]) *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction différentiable sur I°, où $a, b \in I$ avec $a < b$. Si $f' \in L[a,b]$, alors l'identité suivante à lieu*

$$\begin{aligned} & \tfrac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du \qquad (2.28) \\ = {} & \tfrac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 (t-1)f'(tx+(1-t)a)dt + \tfrac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)f'(tx+(1-t)b)dt. \end{aligned}$$

Preuve. On note que

$$\begin{aligned} J &= \tfrac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 (t-1)f'(tx+(1-t)a)dt + \tfrac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)f'(tx+(1-t)b)dt \\ &= J_1 + J_2. \end{aligned}$$

En intégrant par partie J_1 avec le changement de variable $x = tx + (1-t)a$, on trouve

$$\begin{aligned} J_1 &= \tfrac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 (t-1)f'(tx+(1-t)a)dt \qquad (2.29) \\ &= \tfrac{(x-a)^2}{b-a}\left[(t-1)\tfrac{f(tx+(1-t)a)}{x-a}\Big|_0^1 - \int_0^1 \tfrac{f(tx+(1-t)a)}{x-a}dt\right] \\ &= \tfrac{(x-a)^2}{b-a}\left[\tfrac{f(a)}{x-a} - \tfrac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(u)du\right], \end{aligned}$$

D'une manière analogue, on obtient

$$\begin{aligned} J_2 &= \tfrac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)f'(tx+(1-t)b)dt \qquad (2.30) \\ &= \tfrac{(b-x)^2}{b-a}\left[(1-t)\tfrac{f(tx+(1-t)b)}{x-b}\Big|_0^1 + \int_0^1 \tfrac{f(tx+(1-t)b)}{x-b}dt\right] \\ &= \tfrac{(b-x)^2}{b-a}\left[-\tfrac{f(b)}{x-a} - \tfrac{1}{(x-b)^2}\int_b^x f(u)du\right], \end{aligned}$$

En additionnant les équations (2.29) et (2.30), donc

$$\begin{aligned} J &= \tfrac{(x-a)^2}{b-a}\left[\tfrac{f(a)}{x-a} - \tfrac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(u)du\right] \\ &\quad + \tfrac{(b-x)^2}{b-a}\left[-\tfrac{f(b)}{x-a} - \tfrac{1}{(x-b)^2}\int_b^x f(u)du\right] \\ &= \tfrac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du. \end{aligned}$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Théorème 2.7 ([8]) *Soit $f : I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$, une fonction différentiable sur I° tel que $f' \in L[a,b]$, où $a,b \in I$ avec $a < b < \infty$. Si $|f'|$ est s-convexe sur $[a,b]$ pour $s \in (0.1]$, alors*

$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \\ &\leq \tfrac{1}{(s+1)(s+2)}|f'(x)|\left[\tfrac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}\right] + \tfrac{1}{(s+2)}\left[\tfrac{(x-a)^2}{b-a}|f'(a)| + \tfrac{(b-x)^2}{b-a}|f'(b)|\right]. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Preuve. D'après le lemme 2.2, la propriété de la valeur absolue et la s-convexité de $|f'|$, on a

$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \\ &= \left|\tfrac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 (t-1)f'(tx+(1-t)a)dt + \tfrac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)f'(tx+(1-t)b)dt\right| \\ &\leq \tfrac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 (t-1)\left|f'(tx+(1-t)a)\right|dt + \tfrac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)|f'(tx+(1-t)b)|dt \\ &\leq \tfrac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)[t^s|f'(x)| + (1-t)^s|f'(a)|]dt \\ &\quad + \tfrac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)[t^s|f'(x)| + (1-t)^s|f'(b)|]dt \\ &= \tfrac{1}{(s+1)(s+2)}|f'(x)|\left[\tfrac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}\right] + \tfrac{1}{(s+2)}\left[\tfrac{(x-a)^2}{b-a}|f'(a)| + \tfrac{(b-x)^2}{b-a}|f'(b)\right], \end{aligned}$$

où on a utilisé

$$\int_0^1 (1-t)t^s dt = \tfrac{1}{(s+1)(s+2)},$$

et

$$\int_0^1 (1-t)^{s+1} dt = \tfrac{1}{(s+2)}.$$

La preuve est terminée. ■

Théorème 2.8 ([8]) *Soit $f : I \subset [0.\infty) \to \mathbb{R}$, une fonction différentiable sur I° tel que $f' \in [a,b]$, où $a,b \in I$ avec $a < b < \infty$. Si $|f'|^q$ est s-convexe sur $[a,b]$ pour un nombre $s \in (0.1]$ fixé, $q > 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors l'inégalité suivante à lieu*

$$\begin{aligned} & \left| \tfrac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(u)du \right| \qquad (2.32) \\ \leq \; & \tfrac{(x-a)^2}{b-a} \left(\tfrac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left[\tfrac{|f'(x)|^q+|f'(a)|^q}{s+1}\right]^{\frac{1}{q}} + \tfrac{(b-x)^2}{b-a} \left(\tfrac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left[\tfrac{|f'(x)|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right]^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Preuve. D'après le lemme 2.2 et la propriété de la valeur absolue et l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} & \left| \tfrac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(u)du \right| \qquad (2.33) \\ \leq \; & \tfrac{(x-a)^2}{b-a} \int_0^1 (1-t)|f'(tx+(1-t)a)|dt + \tfrac{(b-x)^2}{b-a} \int_0^1 (1-t)|f'(tx+(1-t)b)|dt \\ \leq \; & \tfrac{(x-a)^2}{b-a} \left(\int_0^1 (1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(tx+(1-t)a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \tfrac{(b-x)^2}{b-a} \left(\int_0^1 (1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(tx+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

On a utilisé

$$\int_0^1 (1-t)^p = \tfrac{1}{p+1},$$

Comme $|f'|^q$ est s-convexe

$$\int_0^1 |f'(tx+(1-t)a)|^q dt \leq \tfrac{|f'(x)|^q+|f'(a)|^q}{s+1}, \tag{2.34}$$

et

$$\int_0^1 |f'(tx+(1-t)b)|^q dt \leq \tfrac{|f'(x)|^q+|f'(b)|^q}{s+1}. \tag{2.35}$$

En combinant (2.33) - (2.35), on trouve

$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \\ \leq\; & \tfrac{(x-a)^2}{b-a}\left(\tfrac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\tfrac{|f'(x)|^q+|f'(a)|^q}{s+1}\right]^{\frac{1}{q}} + \tfrac{(b-x)^2}{b-a}\left(\tfrac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\tfrac{|f'(x)|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right]^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

La preuve est terminée. ■

2.3 Applications à des moyens spéciaux

Proposition 2.1 ([5]) *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Alors l'inégalité suivante à lieu*

$$|L_n^n(a,b) - A^n(a,b)| \leq \tfrac{n(b-a)}{4} A(|a|^{n-1}, |b|^{n-1}). \tag{2.36}$$

Preuve. La preuve est immédiate à partir du théorème 2.1 pour $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$.

■

Proposition 2.2 ([5]) *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Alors pour tout $p > 1$, l'inégalité suivante à lieu*

$$\begin{aligned} &|L_n^n(a,b) - A^n(a,b)| \qquad (2.37) \\ \leq\; & \tfrac{n(b-a)}{16}\left(\tfrac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(|a|^{\frac{((n-1)p)}{(p-1)}} + 3|b|\right)^{\frac{((n-1)p)}{(p-1)}}\right)^{\frac{(p-1)}{p}} + \left(3|a|^{\frac{((n-1)p)}{(p-1)}} + |b|^{\frac{((n-1)p)}{(p-1)}}\right)^{\frac{(p-1)}{p}}\right]. \end{aligned}$$

Preuve. La preuve est immédiate à partir du théorème 2.2 pour $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$.

■

Proposition 2.3 ([5]) *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Alors pour tout $p > 1$, l'inégalité suivante à lieu*

$$|L_n^n(a,b) - A^n(a,b)| \leq n\left(\tfrac{b-a}{2}\right)\left(\tfrac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} A\left(|a|^{(n-1)}, |b|^{(n-1)}\right). \tag{2.38}$$

Preuve. La preuve est immédiate à partir du théorème 2.3 pour $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$.

■

Proposition 2.4 ([5]) *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $0 \notin [a,b]$. Alors l'inégalité suivante à lieu*

$$|\overline{L}^{-1}(a,b) - A^{-1}(a,b)| \leq \tfrac{(b-a)}{4} A(|a|^{-2}, |b|^{-2}). \tag{2.39}$$

Preuve. La preuve est immédiate à partir du théorème 2.1 pour $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [a,b]$.

■

Proposition 2.5 ([5]) *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $0 \notin [a,b]$. Alors pour $p > 1$ l'inégalité suivante à lieu*

$$\begin{aligned} & |\overline{L}^{-1}(a,b) - A^{-1}(a,b)| \\ \leq \; & \tfrac{b-a}{16}\left(\tfrac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(|a|^{\frac{(-2p)}{(p-1)}} + 3|b|\right)^{\frac{(-2p)}{(p-1)}}\Big)^{\frac{(p-1)}{p}} + \left(3|a|^{\frac{(-2p)}{(p-1)}} + |b|^{\frac{(-2p)}{(p-1)}}\right)^{\frac{(p-1)}{p}} \right]. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Preuve. La preuve est immédiate à partir du théorème 2.2 pour $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [a,b]$.

■

Proposition 2.6 ([5]) *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $0 \notin [a,b]$. Alors pour $p > 1$ l'inégalité suivante à lieu*

$$|\overline{L}^{-1}(a,b) - A^{-1}(a,b)| \leq \left(\tfrac{b-a}{2}\right)\left(\tfrac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} A\left(|a|^{-2}, |b|^{-2}\right). \tag{2.41}$$

Preuve. La preuve est immédiate à partir du théorème 2.3 pour $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [a,b]$.

■

Chapitre 3

Inégalités de type Hermite-Hadamard pour les intégrales fractionnaires

Dans ce chapitre, on va rappeler certaines inégalités d'Hermite-Hadamard pour l'intégrale fractionnaire.

3.1 Inégalités d'Hermite-Hadamard pour les intégrales fractionnaires

Les inégalités d'Hermite-Hadamard peuvent être représentées sous les formes intégrales fractionnaires comme suit :

Théorème 3.1 *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction positive avec $0 \leq a < b$ et $f \in L^1 [a, b]$. Si f une fonction convexe sur $[a, b]$. Alors on a les inégalités suivantes pour les intégrales fractionnaires sont vérifiée :*

$$f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \leq \tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}} \left[I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+} f(b) + I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)-} f(a) \right] \leq \tfrac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{3.1}$$

où $\Gamma(\alpha) = \int_0^\alpha t^{\alpha-1} \exp(-t)\, dt$ *et* $\alpha > 0$.

Preuve. Comme f est une fonction convexe sur $[a,b]$, on a pour $x, y \in [a,b]$ avec $\lambda = \frac{1}{2}$

$$f\left(\tfrac{x+y}{2}\right) \leq \tfrac{f(x)+f(y)}{2}. \tag{3.2}$$

On posant

$$x = \tfrac{t}{2}a + \tfrac{2-t}{2}b,$$

et

$$y = \tfrac{2-t}{2}a + \tfrac{t}{2}b,$$

on obtient

$$2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \leq f\left(\tfrac{t}{2}a + \tfrac{2-t}{2}b\right) + f\left(\tfrac{2-t}{2}a + \tfrac{t}{2}b\right). \tag{3.3}$$

En multipliant les deux côtés de (3.3) par $t^{\alpha-1}$, puis en intégrant l'inégalité résultante par rapport à t sur $[0,1]$. Alors

$$\begin{aligned}
2\int_0^1 f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) t^{\alpha-1} dt &\leq \int_0^1 t^{\alpha-1} f\left(\tfrac{t}{2}a + \tfrac{2-t}{2}b\right) dt + \int_0^1 t^{\alpha-1} f\left(\tfrac{t}{2}a + \tfrac{2-t}{2}b\right) dt \\
\tfrac{2}{\alpha} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) &\leq \int_0^1 t^{\alpha-1} f\left(\tfrac{t}{2}a + \tfrac{2-t}{2}b\right) dt + \int_0^1 t^{\alpha-1} f\left(\tfrac{t}{2}a + \tfrac{2-t}{2}b\right) dt \\
&= \int_b^{\frac{a+b}{2}} \left(\tfrac{2}{b-a}(b-u)\right)^{\alpha-1} f(u)\, \tfrac{2du}{a-b} \\
&\quad + \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\tfrac{2}{b-a}(v-a)\right)^{\alpha-1} f(v)\, \tfrac{2dv}{b-a} \\
&= \tfrac{2^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[I^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+} f(b) + I^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)-} f(a) \right].
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \leq \tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[I^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+} f(b) + I^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)-} f(a) \right].$$

D'ou la première inégalité de (3.1) est démontrée. Pour la preuve de la deuxième inégalité dans (3.2) on note d'abord que si f est une fonction convexe, alors pour à $t \in [0,1]$, on a :

$$f\left(\tfrac{t}{2}a+\tfrac{2-t}{2}b\right)\leq \tfrac{t}{2}f\left(a\right)+\tfrac{2-t}{2}f\left(b\right), \tag{3.4}$$

et

$$f\left(\tfrac{2-t}{2}a+\tfrac{t}{2}b\right)\leq \tfrac{2-t}{2}f\left(a\right)+\tfrac{t}{2}f\left(b\right). \tag{3.5}$$

En additionnant (3.4) et (3.5), on obtient :

$$\begin{aligned} & f\left(\tfrac{t}{2}a+\tfrac{2-t}{2}b\right)+\quad f\left(\tfrac{2-t}{2}a+\tfrac{t}{2}b\right) \\ \leq\ & \tfrac{t}{2}f\left(a\right)+\tfrac{2-t}{2}f\left(b\right)+\tfrac{2-t}{2}f\left(a\right)+\tfrac{t}{2}f\left(b\right). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Puis en multipliant les deux côtés de (3.6) par $t^{\alpha-1}$, puis en intégrant l'inégalité résultante par rapport à t sur $[0,1]$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 t^{\alpha-1}\ f\left(\tfrac{t}{2}a+\tfrac{2-t}{2}b\right)dt+\int_0^1 t^{\alpha-1}f\left(\tfrac{2-t}{2}a+\tfrac{t}{2}b\right)dt \\ \leq\ & \left[f\left(a\right)+f\left(b\right)\right]\int_0^1 t^{\alpha-1}dt. \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\tfrac{2^\alpha\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha}\left[I^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+}\ f\left(b\right)+I^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)-}\ f\left(a\right)\right]\leq \tfrac{f(a)+f(b)}{\alpha}.$$

La preuve est terminée. ∎

Remarque 3.1 *Si on écrit l'inégalité du théorème* 1.1 *avec* $\alpha=1$, *on obtient le résultat désirée.*

3.2 Inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard fractionnaires pour les fonctions convexes

Nous avons besoin du lemme suivant. En utilisant ce dernier, nous donnons quelques inégalités intégrales liées au côté gauche des inégalités de type Hermite-Hadamard pour les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville.

Lemme 3.1 *Soit la fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, une application différentiable sur (a, b) pour $a < b$. Si $f' \in L[a, b]$, alors on a l'identité suivante pour les intégrales fractionnaires*

$$\begin{aligned} & \tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}} \left[I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+} f(b) + I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)-} f(a) \right] - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \\ = & \tfrac{b-a}{4} \left\{ \int_0^1 t^{\alpha} f'\left(\tfrac{t}{2}a + \tfrac{2-t}{2}b\right) dt - \int_0^1 t^{\alpha} f'\left(\tfrac{2-t}{2}a + \tfrac{t}{2}b\right) dt \right\}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

avec $\alpha > 0$ et Γ la fonction Gamma d'Euler.

Preuve. Il suffit de noter que

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 t^{\alpha} f'\left(\tfrac{t}{2}a + \tfrac{2-t}{2}b\right) dt - \int_0^1 t^{\alpha} f'\left(\tfrac{2-t}{2}a + \tfrac{t}{2}b\right) dt \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{3.8}$$

En intégrant par parties I_1, on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 t^{\alpha} f'\left(\tfrac{t}{2}a + \tfrac{2-t}{2}b\right) dt \\ &= t^{\alpha} \tfrac{2}{a-b} f\left(\tfrac{t}{2}a + \tfrac{2-t}{2}b\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \alpha t^{\alpha-1} f\left(\tfrac{t}{2}a + \tfrac{2-t}{2}b\right) \tfrac{2}{a-b} dt \\ &= -\tfrac{2}{a-b} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \int_0^1 \alpha t^{\alpha-1} f\left(\tfrac{t}{2}a + \tfrac{2-t}{2}b\right) \tfrac{2}{a-b} dt. \end{aligned}$$

En adoptant le changement de variable $x = \frac{t}{2}a + \frac{2-t}{2}b$, (3.8), donne

$$\begin{aligned} I_1 &= -\tfrac{2}{b-a} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{2\alpha}{a-b} \int_b^{\frac{a+b}{2}} \left(\tfrac{2}{b-a}(b-x)\right)^{\alpha-1} \tfrac{2}{a-b} f(x)\, dx \\ &= -\tfrac{2}{b-a} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + \tfrac{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}} I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)-} f(b). \end{aligned} \tag{3.9}$$

De même en intégrant I_2 par intégration par parties et par le changement $y = \frac{2-t}{2}a + \frac{t}{2}b$, on obtient

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 t^\alpha f'\left(\tfrac{2-t}{2}a + \tfrac{t}{2}b\right) dt \qquad (3.10) \\ &= t^\alpha \tfrac{2}{b-a}\ f\left(\tfrac{2-t}{2}a + \tfrac{t}{2}b\right)\Big|_0^1 - \tfrac{2\alpha}{b-a} \int_0^1 t^{\alpha-1} f\left(\tfrac{2-t}{2}a + \tfrac{t}{2}b\right) dt \\ &= \tfrac{2}{b-a}\ f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{2\alpha}{b-a} \int_0^1 t^{\alpha-1} f\left(\tfrac{2-t}{2}a + \tfrac{t}{2}b\right) dt \\ &= \tfrac{2}{b-a}\ f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{2\alpha}{b-a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\tfrac{2}{b-a}(y-a)\right)^{\alpha-1} f(y)\, \tfrac{2}{b-a} dy \\ &= \tfrac{2}{b-a}\ f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}} I^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+}\ f(a). \end{aligned}$$

En utilisant (3.9) et (3.10), on obtient

$$\begin{aligned} & I_1 - I_2 \\ = & -\tfrac{2}{b-a}\ f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + \tfrac{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}} I^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)-}\ f(b) \\ & -\left(\tfrac{2}{b-a}\quad f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}} I^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+}\ f(a)\right) \\ = & -\tfrac{4}{b-a}\ f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + \tfrac{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}} \left[I^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+}\ f(b) + I^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)-}\ f(a)\right]. \end{aligned}$$

Ainsi, en multipliant le résultat par $\frac{b-a}{4}$, on aboutit à l'identité désirée. ■

Corollaire 3.1 *Si dans le lemme 3.1, pour $\alpha = 1$, alors l'égalité* (3.8) *devient l'égalité suivante*

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \qquad \textit{(3.11)} \\ = & \tfrac{b-a}{4} \left\{ \int_0^1 t f'\left(\tfrac{t}{2}a + \tfrac{2-t}{2}b\right) dt - \int_0^1 t f'\left(\tfrac{2-t}{2}a + \tfrac{t}{2}b\right) dt \right\}. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 3.1, nous pouvons obtenir l'inégalité intégrale fractionnaire suivante :

Théorème 3.2 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, une application différentiable sur (a,b) avec $a < b$. Si $|f'|^q$ est convexe sur $[a,b]$ pour $q \geq 1$, Alors on a l'égalité suivante pour les intégrales fractionnaires*

$$\begin{aligned} & \left| \tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}} \left[I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+} \; f(b) + I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)-} \; f(a) \right] - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \right| \\ \leq \; & \tfrac{b-a}{4(\alpha+1)} \left(\tfrac{1}{2(\alpha+2)} \right)^{\frac{1}{q}} \Big\{ \left((\alpha+1) \left| f'(a) \right|^q + (\alpha+3) \left| f'(b) \right| \right)^q)^{\frac{1}{q}} \\ & + (\alpha+3) \left(\left| f'(a) \right|^q + (\alpha+1) \left| f'(b) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \Big\}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

avec $\alpha > 0$ et Γ la fonction Gamma d'Euler.

Preuve. En appliquant la valeur absolue aux deux membres de l'identité du lemme 3.1, on trouve

$$\begin{aligned} & \left| \tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}} \left[I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+} \; f(b) + I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)-} \; f(a) \right] - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \right| \\ \leq \; & \tfrac{b-a}{4} \int_0^1 t^{\alpha} \left\{ \; \left| \; f'\left(\tfrac{t}{2}a + \tfrac{2-t}{2}b\right) \right| + \; \left| \; f'\left(\tfrac{2-t}{2}a + \tfrac{t}{2}b\right) \right| \right\} dt. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Si $q = 1$, puisque $|f'|$ est convexe, on a

$$\begin{aligned} & \left| \tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}} \left[I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+} \; f(b) + I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)-} \; f(a) \right] - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \right| \\ \leq \; & \tfrac{b-a}{4} \left(\left| \; f'(a) \right| + \; \left| \; f'(b) \right| \right) \int_0^1 t^{\alpha} dt \\ = \; & \tfrac{b-a}{4(\alpha+1)} \left(\left| \; f'(a) \right| + \; \left| \; f'(b) \right| \right). \end{aligned}$$

La preuve pour le cas $q = 1$ est complète.

Lorsque $q > 1$, l'inégalité de moyenne d'ordre q, (3.13), on a

$$\begin{aligned} & \left| \tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}} \left[I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+} \; f(b) + I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)-} \; f(a) \right] - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \right| \\ \leq \; & \tfrac{b-a}{4} \left\{ \left(\int_0^1 t^{\alpha} \left| \; f'\left(\tfrac{t}{2}a + \tfrac{2-t}{2}b\right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^1 t^{\alpha} \left| \; f'\left(\tfrac{2-t}{2}a + \tfrac{t}{2}b\right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

En utilisant la convexité de $|f'|^q$, de (3.14) on a :

$$
\begin{aligned}
& \left|\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+}\ f(b)+I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)-}\ f(a)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{4}\frac{1}{(\alpha+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^1\left[\frac{t^{\alpha+1}}{2}|f'(a)|^q+\frac{2t^{\alpha}-t^{\alpha+1}}{2}|f'(b)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\left(\int_0^1\left[\frac{2t^{\alpha}-t^{\alpha+1}}{2}|f'(a)|^q+\frac{t^{\alpha+1}}{2}|f'(b)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq\ & \frac{b-a}{4}\frac{1}{(\alpha+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{1}{2(\alpha+2)}|f'(a)|^q+\frac{(\alpha+3)}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}|f'(b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\left(\frac{(\alpha+3)}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}|f'(a)|^q+\frac{1}{2(\alpha+2)}|f'(b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
$$

Puis en multipliant le résultat obtenu par $(\alpha+1)$, qui est le résultat souhaité. ■

Théorème 3.3 *Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une application différentiable sur (a,b) avec $a<b$. Si $|f'|^q$ est convexe sur $[a,b]$ pour $q>1$. Alors on a l'égalité suivante pour les intégrales fractionnaires*

$$
\begin{aligned}
& \left|\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+}\ f(b)+I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)-}\ f(a)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \qquad (3.15) \\
\leq\ & \frac{(b-a)}{4}\left(\frac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\frac{|f'(a)|+3|f'(b)|}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{3|f'(a)|+|f'(b)|}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
=\ & \frac{(b-a)}{4}\left(\frac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right].
\end{aligned}
$$

avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$

Preuve. En appliquant la valeur absolue à l'identité de lemme 3.1 et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$
\begin{aligned}
& \left|\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+}\ f(b)+I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)-}\ f(a)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{4}\left(\int_0^1 t^{\alpha p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left(\int_0^1\left|f'\left(\frac{t}{2}a+\frac{2-t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_0^1\left|f'\left(\frac{2-t}{2}a+\frac{t}{2}b\right)\right|^q dt\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

En utilisant la convexité de $|f'|^q$, on obtient

$$
\begin{aligned}
& \left|\tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+}\ f(b)+I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)-}\ f(a)\right]-f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}\left(\tfrac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left[\tfrac{t}{2}\mid f'(a)|^q+\tfrac{2-t}{2}\mid f'(b)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\left(\int_0^1\left[\tfrac{2-t}{2}\mid f'(a)|^q+\tfrac{t}{2}\mid f'(b)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
=\ & \tfrac{b-a}{4}\left(\tfrac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\tfrac{\mid f'(a)|+3\mid f'(b)|}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{3\mid f'(a)|+\mid f'(b)|}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right].
\end{aligned}
$$

Soit $a_1 = |f'(a)|^q; b_1 = 3|f'(b)|^q; a_2 = 3|f'(a)|^q; b_2 = |f'(b)|^q, 0 \leq \frac{1}{q} \leq 1$, pour $q > 1$. En utilisant l'inégalité algébrique suivante :

$$
\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^s \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^s + \sum_{k=1}^{n} b_k^s.
$$

Pour $0 \leq s \leq 1, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n \geq 0, b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n \geq 0$, on obtien

$$
\begin{aligned}
& \left|\tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+}\ f(b)+I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)-}\ f(a)\right]-f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{16}\left(\tfrac{4}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(3\mid f'(a)|^q+\mid f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\mid f'(a)|^q+3\mid f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{16}\left(\tfrac{4}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(3^{\frac{1}{q}}+1\right)\left[\mid f'(a)|+\mid f'(b)|\right] \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{16}\left(\tfrac{4}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}} 4\left[\mid f'(a)|+\mid f'(b)|\right].
\end{aligned}
$$

La preuve est complète. ■

3.3 Inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard fractionnaires pour les fonctions s-convexes

Lemme 3.2 ([12]) *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction différentiable sur I°, où $a, b \in I$ avec $a < b$. Si $f' \in L[a, b]$, alors pour tout $x \in [a, b]$ et $\alpha > 0$ on a*

$$\begin{aligned}
& \tfrac{(x-a)^{\alpha} f(a)+(b-x)^{\alpha} f(b)}{b-a} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}[I_{x^-}^{\alpha} f(a) + I_{x^+}^{\alpha} f(b)] \\
= & \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 (t^{\alpha} - 1) f'(tx + (1-t)a) dt \\
& + \tfrac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 (1 - t^{\alpha}) f'(tx + (1-t)b) dt,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

où $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du$.

Preuve. Une intégration par partie, on trouve

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 (t^{\alpha} - 1) f'(tx + (1-t)a) dt \\
= & (t^{\alpha} - 1) \left. \tfrac{f(tx+(1-t)a}{x-a} \right|_0^1 - \int_0^1 \alpha t^{\alpha-1} \tfrac{f(tx+(1-t)a)}{x-a} dt \\
= & \tfrac{f(a)}{x-a} - \tfrac{\alpha}{x-a} \int_a^x \left(\tfrac{u-a}{x-a}\right)^{\alpha-1} \tfrac{f(u)}{x-a} du \\
= & \tfrac{f(a)}{x-a} - \tfrac{\alpha\Gamma(\alpha)}{(x-a)^{\alpha+1}} I_{x^-}^{\alpha} f(a).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

et

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 (1 - t^{\alpha}) f'(tx + (1-t)b) dt \\
= & (1 - t^{\alpha}) \tfrac{f(tx+(1-t)b}{x-b}|_0^1 - \int_0^1 \alpha t^{\alpha-1} \tfrac{f(tx+(1-t)b)}{x-b} dt \\
= & \tfrac{f(b)}{b-x} - \tfrac{\alpha}{b-x} \int_x^b (\tfrac{u-b}{x-b})^{\alpha-1} \tfrac{f(u)}{x-b} du \\
= & \tfrac{f(b)}{b-x} - \tfrac{\alpha\Gamma(\alpha)}{(b-x)^{\alpha+1}} I_{x^+}^{\alpha} f(b).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Multiplions les deux côtés de (3.17) et (3.18) par $\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}$ et $\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}$ respectivement, puis par addition, on obtient (3.16). La preuve est terminée. ■

Théorème 3.4 (12) *Soit $f : I \subset [0, \infty) \to \mathbb{R}$, une fonction différentiable sur I° tel que $f' \in L[a, b]$, où $a, b \in I$ avec $a < b$. Si $|f'|$ est s-convexe sur $[a, b]$ pour $s \in (0, 1]$ et $x \in [a, b]$ alors l'inégalité suivante pour l'intégrales fractionnaire avec $\alpha > 0$ à lieu*

$$\begin{aligned} & \left| \tfrac{(x-a)^\alpha f(a)+(b-x)^\alpha f(b)}{b-a} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a} [I_{x^-}^\alpha f(a) + I_{x^+}^\alpha f(b)] \right| \\ \leq\ & \tfrac{\alpha}{(s+1)(\alpha+s+1)} \left[\tfrac{(x-a)^{\alpha+1}+(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \right] |f'(x)| \\ & + \left[\tfrac{1}{s+1} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+2)} \right] \left[\tfrac{(x-a)^{\alpha+1}|f'(a)|+(b-x)^{\alpha+1}|f'(b)|}{b-a} \right], \end{aligned} \tag{3.19}$$

où Γ est la fonction Gamma d'Euler.

Preuve. D'après le lemme 3.2, la propriété de la valeur absolue et en utilisant la s-convexité de $|f'|$, on a

$$\begin{aligned} & \left| \tfrac{(x-a)^\alpha f(a)+(b-x)^\alpha f(b)}{b-a} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a} [I_{x^-}^\alpha f(a) + I_{x^+}^\alpha f(b)] \right| \\ \leq\ & \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 |t^\alpha - 1||f'(tx + (1-t)a)| dt \\ & + \tfrac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 |1 - t^\alpha||f'(tx + (1-t)b)| dt \\ \leq\ & \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 (1 - t^\alpha) \left[t^s |f'(x)| + (1-t)^s |f'(a)| \right] dt \\ & + \tfrac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 (1 - t^\alpha) \left[t^s |f'(x)| + (1-t)^s |f'(b)| \right] dt \\ =\ & \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \left\{ \int_0^1 (1 - t^\alpha) t^s \left| f'(x) \right| dt + \int_0^1 (1 - t^\alpha)(1-t)^s |f'(a)| dt \right\} \\ & + \tfrac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \left\{ \int_0^1 (1 - t^\alpha) t^s \left| f'(x) \right| dt + \int_0^1 (1 - t^\alpha)(1-t)^s |f'(b)| dt \right\} \\ =\ & \tfrac{\alpha}{(s+1)(\alpha+s+1)} \left[\tfrac{(x-a)^{\alpha+1}+(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \right] |f'(x)| \\ & + \left[\tfrac{1}{s+1} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+2)} \right] \left[\tfrac{(x-a)^{\alpha+1}|f'(a)|+(b-x)^{\alpha+1}|f'(b)|}{b-a} \right]. \end{aligned}$$

On a utilisé
$$\int_0^1 (1-t^\alpha)t^s dt = \tfrac{\alpha}{(s+1)(\alpha+s+1)},$$
et
$$\int_0^1 (1-t^\alpha)(1-t)^s dt = \left[\tfrac{1}{s+1} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+2)}\right].$$
La preuve est terminée. ■

Théorème 3.5 ([12])*Soit $f : I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$, une fonction différentiable sur I° tel que $f' \in L[a,b]$, où $a,b \in I$ avec $a<b$. Si $|f'|^q$ est s-convexe sur $[a,b]$ pour $s \in (0.1]$, $p,q>1$, $x \in [a,b]$, alors l'inégalité suivante pour les intégrales fractionnaires à lieu*
$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{(x-a)^\alpha f(a)+(b-x)^\alpha f(b)}{b-a} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[I_{x^-}^\alpha f(a) + I_{x^+}^\alpha f(b)\right]\right| \\ \leq\ & \left(\tfrac{\Gamma(1+p)\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})}{\Gamma(1+p+\frac{1}{\alpha})}\right)^{\frac{1}{p}} \left\{\tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\tfrac{|f'(x)|^q+|f'(a)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} + \tfrac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\tfrac{|f'(x)|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}, \end{aligned} \tag{3.20}$$
où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\alpha>1$ et Γ est la fonction Gamma d'Euler.

Preuve. D'après le lemme 3.2, propriété de la valeur absolue et en utilisant l'inégalité de Hölder, on a
$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{(x-a)^\alpha f(a)+(b-x)^\alpha f(b)}{b-a} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[I_{x^-}^\alpha f(a) + I_{x^+}^\alpha f(b)\right]\right| \\ \leq\ & \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 |t^\alpha-1||f'(tx+(1-t)a)|dt \\ &+\tfrac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 |1-t^\alpha||f'(tx+(1-t)b)|dt \\ \leq\ & \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left\{\left(\int_0^1 (1-t^\alpha)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(tx+(1-t)a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \\ &+\tfrac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\left\{\left(\int_0^1 (1-t^\alpha)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(tx+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}. \end{aligned}$$
Puisque $|f'|^q$ est s-convexe sur $[a,b]$, on trouve

$$\int_0^1 |f'(tx+(1-t)a)|^q \, dt \leq \frac{|f'(x)|^q+|f'(a)|^q}{s+1},$$

et

$$\int_0^1 |f'(tx+(1-t)b)|^q dt \leq \frac{|f'(x)|^q+|f'(b)|^q}{s+1},$$

On a utilisé

$$\int_0^1 (1-t^\alpha)^p dt = \frac{\Gamma(1+p)\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})}{\Gamma(1+p+\frac{1}{\alpha})}.$$

Finalement on trouve

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(x-a)^\alpha f(a)+(b-x)^\alpha f(b)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[I^\alpha_{x^-} f(a) + I^\alpha_{x^+} f(b)\right] \right| \\ \leq \; & \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\frac{\Gamma(1+p)\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})}{\Gamma(1+p+\frac{1}{\alpha})}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(x)|^q+|f'(a)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\frac{\Gamma(1+p)\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})}{\Gamma(1+p+\frac{1}{\alpha})}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(x)|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

La preuve est terminée. ■

Corollaire 3.2 *Dans le Théorème précédent, si on choisie $x = \frac{a+b}{2}$, on obtient l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned} & \left| (b-a)^{\alpha-1}\frac{f(a)+f(b)}{2^\alpha} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[I^\alpha_{\frac{a+b}{2}^-} f(a) + I^\alpha_{\frac{a+b}{2}^+} f(b)\right] \right| \qquad (3.21) \\ \leq \; & \left(\frac{\Gamma(1+p)\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})}{\Gamma(1+p+\frac{1}{\alpha})}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{(b-a)^\alpha}{2^{\alpha+1}} \left\{ \left(\frac{|f'(\frac{a+b}{2})|^q+|f'(a)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|f'(\frac{a+b}{2})|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} \right\}. \end{aligned}$$

Conclusion

La problématique de ce mémoire était d'une part, d'étudier certaines inégalités de type Hermite-Hadamard et de se familiariser avec certains outils nécessaires et utiles dans les démonstrations de ce genre de problème, et d'autre part d'essayer d'y voir des généralisations de ce type d'inégalité par les opérateurs intégraux fractionnaires de Riemann-Liouville.

Dans une première partie, nous avons rappelé certains types de convexité classique ainsi que certaines classes de fonctions.

Dans la seconde partie nous avons étudié les inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard et jouissant d'un certain type de convexité.

Et dans la troisième partie, nous avons discuté de nouvelles inégalités fractionnaires d'Hermite-Hadamard pour différents types de convexité.

Bibliographie

[1] M. W. Alomari, M. Darus and U. S. Kirmaci, Some inequalities of Hermite-Hadamard type for s-convex functions. Acta Math. Sci. Ser. B (Engl. Ed.) 31 (2011), no. 4, 1643–1652.

[2] H. Budak and E. Pehlivan, Weighted Ostrowski, trapezoid and midpoint type inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals. AIMS Math. 5 (2020), no. 3, 1960–1984.

[3] P. J. Davis, Leonhard Euler's integral : A historical profile of the gamma function. Amer. Math. Monthly 66 (1959), 849–869.

[4] S. S. Dragomir and S. Fitzpatrick, Hadamard's inequality for s-convex functions in the first sense and applications. Demonstratio Math. 31 (1998), no. 3, 633–642.

[5] S. S. Dragomir and R. P. Agarwal, Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula. Appl. Math. Lett. 11 (1998), no. 5, 91–95.

[6] S. S. Dragomir, P. Cerone, J. Roumeliotis and S. Wang, A weighted version of Ostrowski inequality for mappings of Hölder type and applications in numerical analysis. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.) 42(90) (1999), no. 4, 301–314.

[7] J. Hua, B.-Y. Xi and F. Qi, Inequalities of Hermite-Hadamard type involving an s-convex function with applications. Appl. Math. Comput. 246 (2014), 752–760.

[8] H. Kavurmaci, M. Avci and M. E. Özdemir, New inequalities of Hermite-Hadamard type via s-convex functions in the second sense with applications. Appl. Math. Comput. 217 (2011), no. 12, 5171–5176.

[9] B. Meftah, Some new Ostrowski's inequalities for functions whose nth derivatives are logarithmically convex. Ann. Math. Sil. 32 (2018), no. 1, 275–284.

[10] B. Meftah, New integral inequalities Through the φ-preinvexity. Iran. J. Math. Sci. Inform. 15 (2020), no. 1, 79-83.

[11] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić and A. M. Fink, Inequalities involving functions and their integrals and derivatives. Mathematics and its Applications (East European Series), 53. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991.

[12] M. E. Özdemir, M. Gürbüz and H. Kavurmacı, Hermite-Hadamard-type inequalities for (g, φ_h)-convex dominated functions. J. Inequal. Appl. 2013, 2013 :184, 7 pp.

[13] C. E. M. Pearce and J. Pečarić, Inequalities for differentiable mappings with application to special means and quadrature formulæ. Appl. Math. Lett. 13 (2000), no. 2, 51–55.

[14] E. Set, İ. İşcan, M. Z. Sarikaya and M. E. Özdemir, On new inequalities of Hermite-Hadamard-Fejér type for convex functions via fractional integrals. Appl. Math. Comput. 259 (2015), 875–881.