République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles Et analyse numérique**

Par :

Nada DOUAKHA

Intitulé

Solution positive d'un problème aux limites fractionnaire

Dirigé par : Dr Lilia ZENKOUFI

Devant le jury

PRESIDENT	Dr Ghania REBIAI	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr Lilia ZENKOUFI	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr Slimane BOUHADJAR	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2023

Remerciement

J’aimerais en premier lieu remercier mon dieu "**Allah**" qui m’a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier tous d’abord mon encadreur **Dr. Zenkoufi Lilia** pour m’avoir proposé le thème de ce mémoire et m’avoir dirigé tout au long de mon travail. Ses conseils et son encouragement m’ont été très précieux car ils ont guidé et stimulé mon travail.

Je remercie très vivement **Dr. Rebiai Ghania**, pour avoir accepté de juger ce travail et de présider le jury de soutenance.

Je remercie aussi vivement **Dr. Bouhadjar Slimane,** pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie également l'enseignante qui a supervisé ma formation (mon stage) pour les conseils qu'elle m'a donné, et pour m'avoir accordé beaucoup de son temps.

Je ne pouvais terminer sans remercier mes parents, mes frères et sœurs, mes amis et toute ma famille.

إهداء

بسم الله الرحمان الرحيم

(قل اعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله والمؤمنون.)

صدق الله العظيم

أهدي ثمرة جهدي الى جنة الله في أرضه.

أمي الغالية

إلى من أحمل اسمه بكل عز وافتخار.

أبي الغالي

إلى من تمنيت وجوده طول مسيرتي * أخي الغالي* رحمك الله وسقى قبرك برحمته وعفوه وغفرانه.

إلى الخير اللامحدود النور الذي ينير دربي* أخي الحبيب* الذي ساندني وأعانني في الحياة.

إلى المحبة التي لا تنفذ *أختاي المؤنسات* اللتان شجعتاني طوال مسيرتي.

إلى كل صديقات المشوار الدراسي اللاتي أكن لهن كل الحب والاحترام وأخص بالذكر: رؤى، روميساء، بسمة، إيمان.

إلى كل عائلتي الكريمة "صديقي" و "دواخة".

ملخص

الهدف من هذا العمل إثبات الوحدانية والإيجابية الحل لمشكلة القيمة الحدية الكسرية، باستخدام مبدأ التقلص لباناخ و نظرية جيو-كراسنوسالسكي داخل مخروط. النتائج المحصل عليها تم توضيحها بواسطة أمثلة. ننهي هذا العمل بقائمة من المراجع.

الكلمات المفتاحية: نظرية جيو-كراسنوسالسكي، مبدأ التقلص لباناخ، مسألة حدية، وحدانية الحل، إيجابية الحل.

Table des matières

Abstract

The objective of this work is to establish the uniqueness and positivity of the solution of a fractional boundary value problem, using the Banach contraction principle and the Guo-Krasnosel'skii theorem in a cone, the results obtained are illustrated by examples. We close this work by a bibliography.

Key words : Guo-Krasnosel'skii theorem, Banach contraction principle, Boundary value problems, Uniqueness of solution, Positivity of solution.

Résumé

L'objectif de ce travail est d'établir l'unicité et la positivité de la solution d'un problème aux limites fractionnaire, en utilisant le principe de contraction de Banach et le théorème de Guo-Krasnosel'skii dans un cône. Les résultats obtenus sont illustrés par des exemples. Nous clôturons ce travail par une bibliographie.

Mots clés : Théorème de Guo-Krasnosel'skii, Le principe de contraction de Banach, Problèmes aux limites, Unicité de la solution, Positivité de la solution.

introduction

Dans ce travail, nous s'intéressons à l'étude de l'unicité et la positivité de la solution d'un problème aux limites fractionnaire, en utilisant quelques théorèmes de point fixe tels que, le principe de contraction de Banach et le théorème de Guo-Krasnosel'skii dans un cône. L'étude de ces problèmes est d'actualité et plusieurs travaux et ouvrages sont consacrés à ce sujet.

Les équations différentielles fractionnaires constituent un domaine de recherche d'actualité. En effet, de nombreux articles sont apparus traitant les questions d'existence, d'unicité ainsi que la multiplicité des solutions positives de ce type d'équations.

La dérivation non entière consiste à généraliser la notion de la dérivée à des ordres non entièrs de dérivation (réels ou complexes). Différentes définitions de la dérivation non entière ont été établies, ces dernières ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont équivalentes pour plusieurs fonction.

Beaucoup de contributions ont montré l'importance des systèmes d'ordre fractionnaire et leur intérêt dans différentes disciplines tels que : l'électricité, la chimie, la biologie, l'économie,...et dans différentes applications, la modélisation, l'identification, la robotique et le traitement d'images...

Certains problèmes en physique moderne et en technologie sont généralement décrits par des problèmes aux limites engendrés par des équations différentielles linéaires ou non linéaires. Quand ces équations satisfont des conditions aux limites en plus d'une valeur, le problème résultant est un problème aux limites à plusieurs points, comme la terminologie l'indique, il s'agit des cas où les conditions aux limites sont imposées en deux, trois ou en m points du domaine. Le cas le plus compliqué est quand ces conditions sont vérifiées aux extrémités et à l'intérieur du domaine.

L'étude des problèmes fractionnaires est d'actualité et plusieurs méthodes sont appliquées pour la résolution de ces problèmes. Néanmoins les méthodes basées sur le principe du point fixe jouent un grand rôle.

En analyse, un théorème de point fixe est un résultat qui affirme qu'une fonction

f posséde au moins un point fixe, avec quelques conditions sur f. Un point fixe d'une fonction f qui est définie dans un espace métrique X vers lui même, est un élément $x \in X$ qui vérifie $f(x) = x$. Ces théorèmes présentent un outil très utile en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles.

Durant ces dernières années, les théorèmes du point fixe sont regardés comme de très puissants et importants outils dans l'étude des phénomènes non linéaires. Le plus simple théorème de point fixe connu est le théorème de Banach qui est appelé aussi théorème de contraction : "toute contraction d'un espace métrique complet vers lui même admet un unique point fixe."

En 1912, Brouwer a trouvé une généralisation du théorème de Banach, il affirme que : "une fonction continue de la boule unité fermée dans un espace euclidien de dimension n vers elle même doit avoir un point fixe". Ce résultat a été généralisé par plusieurs mathématiciens, la plus importante généralisation est obtenue par le mathématicien polonais Juliusz Schauder en 1930 : "toute application continue et compacte d'un sous ensemble fermé, borné et convexe d'un espace de Banach vers lui même admet un point fixe". Ce puissant théorème de point fixe intervient surtout dans la démonstration de l'existence de solutions d'une équation différentielle.

Tout au long de ces dernières années, plusieurs auteurs se sont concentrés sur la recherche des conditions qui garantissent l'existence de solutions positives des problèmes aux limites. Le théorème de Guo-Krasnosel'skii du point fixe a été utilisé comme un outil afin d'établir de telles conditions.

Pour plus de résultat sur l'existence des solutions des problèmes aux limites non linéaires, voir, [1, 3, 4, 8, 9, ...].

Nous passons maintenant à la description du plan de ce mémoire.

Le premier chapitre est consacré aux éléments de base du calcul fractionnaire et un rappel de quelques concepts préliminaires seront introduits comme la fonction Gamma et la fonction Bêta qui jouent un rôle important dans la théorie des équations différentielles fractionnaires. Deux approches (Riemann-Liouville et Caputo) généralisant les notions de dérivation sont ensuite considérées.

Le deuxième chapitre se compose notamment des rappels de quelques résultats théoriques, de quelques théorèmes importants sur la théorie du point fixe et des notions de base de l'analyse fonctionnelle qui seront utilisées dans la suite de ce travail.

Ces éléments d'analyse on été pris de quelques livres et articles choisis.

Dans le dernier chapitre, nous s'intéressons à l'étude de l'unicité et la positivité de la solution du problème aux limites fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha} u(t) + f(t, u(t)) = 0, \ 0 < \ t < 1, \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = ... = u^{(n-2)}(0) = 0, \ u(1) = \beta u(\eta), \end{cases} \tag{3.1}$$

où :

(i) $f \in C([0,1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\beta > 0$, $0 < \eta < 1$.

(ii) $D_{0^+}^{\alpha}$ est la dérivée d'ordre fractionnaire de type Riemann-Liouville de l'ordre $n - 1 < \alpha \leq n$, $n \geq 3$.

En utilisant le principe de contraction de Banach et le théorème de Guo-Krasnosel'skii dans un cône. Les résultats obtenus sont illustrés par des exemples.

Enfin, nous clôturons ce travail par **une bibliographie**.

Chapitre 1

Calcul fractionnaire

Résumé

Ce chapitre est une introduction aux éléments de base de la dérivation non entière. Nous avons repertorié quelques notions de cet outil mathématique, deux approches des dérivées fractionnaires sont introduites à savoir, l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo ainsi que leurs propriétés et quelques exemples de calcul.

1.1 Quelques fonctions importantes dans le calcul fractionnaire

Dans cette section, nous présentons les fonctions Gamma et Bêta, ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma est une fonction complexe, considérée également comme une fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes.

Définition 1.1 *Pour* $\alpha \in \mathbb{C}$ *tel que* $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, *on définit la fonction suivante :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt. \tag{1.1}$$

Exemple 1.1

1.

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$$

2.

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt,$$

posons que :

$$t = u^2,$$

donc,

$$dt = 2udu,$$

alors,

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u} e^{-u^2} 2udu = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du,$$

l'intégrale de Gauss est donnée par :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

D'oú,

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Proposition 1.1

1. *une propriété importante de la fonction Gamma est la relation de récurrence suivante :*

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha), \;\; \mathrm{Re}(\alpha) > 0. \tag{1.2}$$

(*Qu'on peut démontre par une intégration par parties.*)

2. *la fonction Gamma généralise la fonction factorielle est :*

$$\Gamma(n + 1) = n!, \;\; \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}, \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemple 1.2 *Nous voyons que :*

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \quad et \quad \Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha),$$

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2} + 1) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

1.1.2 La fonction Bêta

La fonction Bêta est aussi définie par une intégrale impropre.

Définition 1.2 *La fonction Bêta est une fonction définie par :*

$$B(p, q) = \int_0^1 \tau^{p-1}(1 - \tau)^{q-1} d\tau, \;\; \mathrm{Re}(p) > 0, \;\; \mathrm{Re}(q) > 0. \tag{1.4}$$

Proposition 1.2 *Le changement de variable* $u = 1 - \tau$ *permet de montrer que la fonction Bêta est symétrique.*

C'est-á-dire :

$$B(p, q) = B(q, p).$$

1.1.3 Liens entre la fonction Gamma et la fonction Bêta

Remarque 1.1 *La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma comme suit :*

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \ \ \mathrm{Re}(p) > 0, \ \ \mathrm{Re}(q) > 0. \tag{1.5}$$

Preuve. Nous avons évidement :

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = (\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx)(\int_0^{+\infty} e^{-y} y^{q-1} dy),$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x-y} x^{p-1} y^{q-1} dx dy.$$

On pose,

$$y = \mu - x.$$

Pour,

$$0 \leq x \leq \mu,$$

on a,

$$\frac{dy}{d\mu} = 1,$$

et

$$dxdy = dxd\mu,$$

nous obtenons,

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{\mu} e^{-\mu}x^{p-1}(\mu-x)^{q-1}dxd\mu,\\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\mu}(\int_0^{\mu} x^{p-1}(\mu-x)^{q-1}dx)d\mu,\end{aligned}$$

pour évaluer l'intégrale relative à dx, nous effectuons le changement de variable $x = t\mu$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int_0^{\mu} x^{p-1}(\mu-x)^{q-1}dx &= \int_0^{1}(t\mu)^{p-1}(\mu-t\mu)^{q-1}dt,\\ &= \mu^{p+q-1}\int_0^{+\infty} t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt = \mu^{p+q-1}B(p,q),\end{aligned}$$

par suite :

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= B(p,q)\int_0^{+\infty} e^{-\mu}\mu^{p+q-1}d\mu,\\ &= B(p,q)\Gamma(p+q).\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat désiré. ■

Exemple 1.3 *Nous calculons* $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$:

$$B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \pi.$$

1.1.4 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle [a,b]

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$. On considère l'intégrale :

$$I^{(1)}f(x) = \int_a^x f(t)dt, \tag{1.6}$$

$$I^{(2)}f(x) = \int_a^x dt\int_a^t f(u)du,$$

$$I^{(2)}f(x) = \int_a^x (x-t)f(t)dt, \tag{1.7}$$

plus généralement le $n^{iéme}$ itéré de l'opérateur I peut s'écrire :

$$\begin{aligned} I^{(n)}f(x) &= \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 ... \int_a^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n, \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{(n-1)}f(t)dt. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Pour tout entier n.

Cette formule est appelée formule de Cauchy et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $(n-1)! = \Gamma(n)$, Riemann rendu compte que le second membre de (1.8) pourrait avoir un sens même quand n prenant une valeur non entière, il était naturel de définir l'intégration fractionnaire comme suit :

Définition 1.3 *Si $f \in C[a,b]$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ l'intégrale :*

$$I_{a^+}^{(\alpha)}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)}f(t)dt, \tag{1.9}$$

telle que :

$$a \in \left]-\infty, +\infty\right[,$$

est appelée intégrale fractionnaire (à gauche) de Riemann-Liouville d'ordre α, et l'intégrale :

$$I_{b-}^{(\alpha)}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (x-t)^{(\alpha-1)}f(t)dt, \tag{1.10}$$

telle que : $b \in \left]-\infty\ ,+\infty\right[$ est appelée intégrale fractionnaire (à droite) de Riemann-Liouville d'ordre α.

Remarque 1.2 *Dans tout ce qui suit on va utiliser uniquement l'intégrale (à gauche).*

Proposition 1.3 *Pour $f \in C[a,b]$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville pos-*

sède la propriété suivante :

$$I_{a^+}^{(\alpha)}[I_{a^+}^{(\beta)}f(x)] = I_{a^+}^{(\alpha+\beta)}f(x) \textit{ pour } \mathrm{Re}(\alpha) > 0 \textit{ et } \mathrm{Re}(\beta) > 0. \tag{1.11}$$

Exemple 1.4 *Considérons la fonction :*

$$f(t) = (t-a)^m.$$

A l'aide de changement de variable :

$$\tau = a + x(t-a),$$

nous trouvons,

$$I_a^\alpha (t-a)^m = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-a)^m d\tau, \tag{1.12}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-a)^{\alpha-1}(1-x)^{\alpha-1}x^m(t-a)^{m+1}dx,$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+m} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1}x^m dx,$$

et d'après (1.4) *et la relation* (1.5), *nous trouvons :*

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+m}\beta(m+1,\alpha),$$

$$= \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+m+1)}(t-\alpha)^{\alpha+m},$$

$$= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)}(t-\alpha)^{\alpha+m}.$$

Nous voyons bien que c'est une généralisation du cas $\alpha = 1$, nous avons :

$$I_a^1(t-a)^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+2)}(t-a)^{m+1} = \frac{\Gamma(m+1)}{(m+1)\Gamma(m+1)}\ (t-a)^{m+1} = \frac{(t-a)^{m+1}}{m+1}.$$

1.2 Diverses approches de la dérivée fractionnaire

Différentes approches on été utilisées pour la dérivation fractionnaire, nous allons présenter les approches qui sont fréquemment utilisé dans les applications : l'approche de Grünwald-Letnikov, l'approche de Riemann-Liouville et de Caputo.

1.2.1 Approche de Grünwald-Letnikov

L'idée de cette approche est de généraliser la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraires.

La dérivée d'ordre 1 d'une fonction f au point x est définie par :

$$D^1 f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

Le calcul des dérivées de la fonction f donne la généralisation de cette formule à l'ordre p, où p est une nombre entier positif ou nul,

$$D^{(p)} f(t) = \lim_{h\to 0} h^{-p} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} f(t-kh),$$

avec,

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)...(p-k+1)}{k!}. \tag{1.13}$$

La généralisation de cette formule pour p un entier négatif :

$$(-1)^k \binom{p}{k} = \frac{-p(-p+1)...(-p+k-1)}{k!}, \tag{1.14}$$

en utilisant la fonction Gamma telle que :

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n),$$

et,

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

on aura,

$$^{G}D^{p}f(t) = \lim_{h\to 0} h^{-p} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p)} f(t-kh), \tag{1.15}$$

et,

$$^{G}D^{-p}f(t) = \lim_{h\to 0} h^{p} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k+p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(p)} f(t-kh), \tag{1.16}$$

si f est de classe C^n, alors en utilisant l'intégration par parties, on obtient :

$$^{G}D^{-p}f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k+p}}{\Gamma(k+p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n+p)} \int_a^t (t-\tau)^{n+p-1} f^{(n)}(\tau)d\tau, \tag{1.17}$$

aussi,

$$^{G}D^{p}f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau)d\tau. \tag{1.18}$$

1. La dérivée d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov

En générale la dérivée d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov n'est pas nulle ni constante.

Si $f(t) = c$ et p non entier positif, nous avons :

$$f^{(k)}(t) = 0 \text{ pour } k = 1, 2, ..., n,$$

$$
{}^{G}D^{p}f(t) = \frac{c}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)}
$$

$$
+\frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \tag{1.19}
$$

$$
= \frac{c}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p}.
$$

2. La dérivée de $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ au sens de Grünwald-Letnikov

Soit p non entier et $0 \leq n-1 < p < n$ avec $\alpha > n-1$, alors nous avons :

$$
f^{(k)}(a) = 0 \quad \text{pour } k = 0, 1, ..., n-1, \tag{1.20}
$$

et,

$$
f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(\tau-a)^{\alpha-n}, \tag{1.21}
$$

d'où,

$$
{}^{G}D^{p}f(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n} d\tau,
$$

nous faisons le changement de variable :

$$
\tau = a + s(t-a),
$$

nous trouvons,

$$
{}^{G}D^{p}f(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n} d\tau,
$$

$$
= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \int_{0}^{1} (1-s)^{n-p-1} s^{\alpha-n} ds,
$$

d'après (1.4), (1.5) et *la proposition* 1.2, nous obtenons :

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)B(n-p,\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p},$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p},$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}.$$

A titre d'exemple,

$$^{G}D^{\frac{1}{2}}t = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.5)}\sqrt{t} = \frac{\sqrt{t}}{\Gamma(1.5)}. \tag{1.22}$$

1.2.2 Approche de Riemann-Liouville

Définition 1.4 *Soit f une fonction intégrable sur $[a,t]$, alors la dérivée fractionnaire d'ordre p (avec $n-1 \leq p < n$) au sens de Riemann-Liouville est définie par :*

$$^{R}D^{p}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-p-1}f(\tau)d\tau, \tag{1.23}$$

$$= \frac{d^{n}}{dt^{n}}(I^{n-p}f(t)).$$

Remarque 1.3 *Si f est de classe C^{n}, alors en faisant des intégrations par parties et des dérivations répétées, on obtient :*

$$^{R}D^{p}f(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-p-1}f^{(n)}(\tau)d\tau =^{G} D^{p}f(t). \tag{1.24}$$

Dans ce cas l'approche de Grünwald-Letnikov et l'approche de Riemann-Liouville sont équivalentes.

1. La dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville

Comme premier exemple de dérivée non entier d'une fonction constante $f(t) = c$ au sens de Riemann-Liouville, nous avons :

$$^{R}D^{p}C = \frac{C}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p}. \tag{1.25}$$

2. La dérivée de $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ au sens de Riemann-Liouville

Comme deuxième exemple de dérivée d'une fonction $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ au sens de Riemann-Liouville, nous avons :

soit p non entier et $0 \leq n-1 < p < n$ et $\alpha > -1$, alors nous avons :

$$^{R}D^{p}(t-a)^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha} d\tau, \tag{1.26}$$

nous faisons le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$, nous aurons :

$$^{R}D^{p}(t-a)^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{n+\alpha-p} \int_0^1 (1-s)^{n-p-1} s^{\alpha} ds,$$

d'après (1.4), (1.5) et *la proposition* 1.2, nous obtenons :

$$= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1)B(n-p,\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)\Gamma(n-p)}(t-a)^{\alpha-p},$$

$$= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)\Gamma(n-p)\Gamma(n+\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p},$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}.$$

A titre d'exemple,

$$^{R}D^{0.5}t^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5). \tag{1.27}$$

Proposition 1.4 ***(Composition avec l'intégrale fractionnaire).***

L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire :

$$^{R}D^{p}(I^{p}f(t)) = f(t), \tag{1.28}$$

en général on a,

$$^{R}D^{p}(I^{q}f(t)) =^{R} D^{p-q}f(t), \tag{1.29}$$

et si,

$$p-q<0,\ \ ^{R}D^{p-q}f(t) \ = I^{q-p}f(t).$$

En général la dérivation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas :

$$^{R}D^{-p}({}^{R}_{a}D^{q}_{t}f(t)) =^{R} D^{q-p}f(t) - \sum_{k=1}^{m}[{}^{R}D^{q-k}_{t}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-k}}{\Gamma(p-k+1)}. \tag{1.30}$$

Avec, $m-1 \leq q < m$.

1.2.3 Approche de Caputo

La définition de la dérivation fractionnaire de type Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement de la théorie des dérivées et intégrales fractionnaires à cause de leurs applications dans les mathématiques pures (solutions des équations différentielles d'ordre entier, définition de nouvelles classes de fonction, sommation des séries, ...).

Dans l'approche de Caputo, celui-ci a introduit une autre formulation de la dérivée d'ordre fractionnaire.

(on introduit une dérivée fractionnaire qui est plus restrictive que celle de Riemann-Liouville).

Définition 1.5 *Soit* $p > 0$ *avec* $n - 1 < p < n$, $(n \in \mathbb{N}^*)$ *et* f *une fonction telle que :*

$$\frac{d^n}{dt^n} f \in L^1[a, b].$$

La dérivée fractionnaire d'ordre p *de* f *au sens de Caputo est définie par :*

$$^C D^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \tag{1.31}$$

$$= I^{n-p}(\frac{d^n}{dt^n} f\ (t)).$$

1. La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo

La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle :

$$^C D^p C = 0. \tag{1.32}$$

2. La dérivée de $f(t) = (t-a)^\alpha$ **au sens de Caputo**

Soit p un entier et $0 \leq n - 1 < p < n$ avec $\alpha > n - 1$, alors nous avons :

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)} (\tau - a)^{\alpha-n}, \tag{1.33}$$

d'où,

$$^C D^p f(t) \ = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^{\alpha-n} d\tau, \tag{1.34}$$

nous effectuons le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$, nous obtenons :

$$^C D^p f(t) \ = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} (t-a)^{\alpha-p} \int_0^1 (1-s)^{n-p-1} s^{\alpha-n} ds,$$

d'aprés (1.4), (1.5) et *la proposition* 1.2, nous trouvons :

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1) B(n-p, \alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} (t-a)^{\alpha-p},$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p},$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}.$$

1.3 Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville

- L'avantage principal de l'approche de Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier, c'est-à-dire, contient les valeurs limites des dérivées d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieur $x = a$.
- Une autre différence entre la définition de Riemann et celle de Caputo est que la dérivée d'une constante est nulle par Caputo (1.32) par contre par Riemann-Liouville elle est :

$$\frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}.$$

Chapitre 2

Étude de quelques théorèmes du point fixe et applications

Résumé

Le but de ce chapitre est l'étude de quelques théorèmes du point fixe tels que le théorème de Banach, de Brouwer-Schauder et de Guo-Krasnosel'skii dans un cône, ces théorèmes sont utilisés pour prouver l'unicité, l'existance et la positivité de la solution.

2.1 Rappel

Théorème 2.1 ***(Théorème de point fixe).***

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$.

Si $f(I) \subset I$ (I stable par f), alors f admet (au moins) un point fixe sur I.

C'est-à-dire : il existe (au moins) un réel x de I tel que : $f(x) = x$.

Théorème 2.2 ***(Théorème des valeurs intermédiaires).***

f une application continue sur l'intervalle I et soient a et b deux réels de I.

Avec $a < b$, pour tout rèel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Alors, il existe (au moins) un réel c dans $[a, b]$ tel que : $f(c) = \lambda$.

(Autrement dit : l'équation $f(x) = \lambda$ admet au moins une solution dans $[a, b]$).

Théorème 2.3 ***(Théorème des accroisements finis).***

Si f est une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe c de $]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Preuve du théoréme 2.1

Preuve. Considérons la fonction g définie sur $I = [a, b]$ par :

$$g(x) = f(x) - x.$$

Montrons que $0 \in g(I)$, nous avons :

$$g(a) = f(a) - a \in g(I), \tag{2.1}$$

$$g(b) = f(b) - b \in g(I), \tag{2.2}$$

où, comme $f(I) \subset I$, nous avons $f(a) \geq a$ et $f(b) \leq b$, c'est -à-dire $g(a) \geq 0$ et

$g(b) \leq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $x \in I$ tel que :

$$g(x) = 0, \tag{2.3}$$

c'est-à-dire :

$$f(x) = x.$$

■

Nous allons rappeler le théorème d'Arzéla-Ascoli qui concerne les compacts et qui constitue un outil fondamental de l'analyse fonctionnelle.

Définition 2.1 ***(uniformément borné).***

Une suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions continues sur un intervalle $I = [a, b]$ est uniformément bornée s'il existe un nombre M tel que :

$$|f_n(x)| \leq M, \ \forall x \in I, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Définition 2.2 ***(Équicontinuité).***

La suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue sur $[a, b]$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$, tel que :

$$\forall x, y \in [a, b], \quad |x - y| < \delta, \ \textit{alors} \ \ |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Théorème 2.4 [2] ***(Théorème d'Arzéla-Ascoli).***

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et supposons que X compact. Alors, une partie $\mathcal{F}$ incluse dans $C(X, Y)$ est relativement compacte (i.e, d'adhérence compact) pour la topologie de la convergence uniforme, si et seulement si ona les deux conditions suivantes :

- La famille $\mathcal{F}$ est équicontinue en tout point de X.

- La famille $\mathcal{F}$ est unifomément bornée sur X.

2.2 Théorèmes du point fixe

Les théorèmes de point fixe sont les outils mathématique de base qui aident à établir l'existence de solutions de divers genres d'équations. La méthode du point fixe consiste à transformer un problème donné en un problème de point fixe.

Étant donné un ensemble E et une application $f : E \longrightarrow E$.

Définition 2.3 *(Application contractante).*

Soit A une application de E dans E. On dit que A est contractante s'il existe un réel α strictement inférieur à 1 $(\alpha < 1)$ tel que :

$$\forall u, w \in E, \ \ \|A(u) - A(w)\|_E \leq \alpha \|u - w\|_E . \tag{2.6}$$

Définition 2.4 *(Application lipschitzienne).*

Soit E un espace vectoriel normé et f une application de E dans E. On dit que f est lipschitzienne sur E s'il existe une constante $L > 0$ telle que :

$$\forall u_1, u_2 \in E, \ \ \|f(u_1) - f(u_2)\|_E \leq L \|u_1 - u_2\|_E . \tag{2.7}$$

2.2.1 Théorème du point fixe de Banach

Ce théorème (connu aussi le théorème de l'application contractante) assure l'existence et l'unicité d'un point fixe pour toute application contractante sur un espace métrique complet.

Théorème 2.5 *Soient (E, d) un espace métrique complet et $f : E \longrightarrow E$ une application contractante, i.e; Lipschitzienne de rapport $k < 1$. Alors, f admet un unique point fixe $a \in E$.*

De plus, pour tout point initial $x_0 \in E$, la suite itérée $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$, avec $x_0 \in E$ quelconque et $x_{p+1} := f(x_p)$ converge vers a.

Preuve.

1. Existence :

Soit x_0 un point initial quelconque et (x_p) la suite itérée associée. Nous avons :

$$d(x_p, x_{p+1}) = d\left(f(x_{p-1}), f(x_p)\right), \quad p \geq 1, \tag{2.8}$$

puisque, f est une contraction, nous avons :

$$\leq kd\left(x_{p-1}, x_p\right),$$

$$\leq k^p d\left(x_0, x_1\right).$$

Nous allons prouver que (x_p) est une suite de Cauchy dans E. pour $p < q$, nous utilisons l'inégalité triangulaire :

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_{p+2}) + ... + d(x_{q-1}, x_q),$$

nous répétons cette inégalité, nous obtenons :

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &\leq \left(k^p + k^{p+1} + ... + k^{q-1}\right) d(x_0, x_1), \\ &\leq k^p \left(1 + k + ... + k^{q-p-1}\right) d(x_0, x_1), \\ &\leq k^p \left(\frac{1}{1-k}\right) d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Nous déduisons que (x_p) est une suite de Cauchy. Comme (E, d) est complet, la suite (x_p) converge vers un point limite $a \in E$.

Par ailleurs, puisque f est continue.

$$a = \lim_{p\to\infty} x_p = \lim_{p\to\infty} f(x_{p-1}) = f\left(\lim_{p\to\infty} x_{p-1}\right) = f(a). \tag{2.9}$$

Donc, a est un point fixe de f, $(\ i.e,\ f(a) = a)$.

2. Unicité :

Supposons qu'il existe $a, b \in E$, $a \neq b$, tels que $f(a) = a$ et $f(b) = b$.

f est $k - lipschitzienne$, alors nous pouvons écrire :

$$d(a,b) = d(f(a), f(b)) \leq kd(a,b), \tag{2.10}$$

ce qui implique que,

$$k \geq \frac{d(f(a), f(b))}{d(a,b)} = 1.$$

Alors, $k \geq 1$.

Contradition avec l'hypothése ($k < 1$). ■

Nous allons montrer que les hypothèses du théorème de point fixe de Banach sont essentielles.

Exemple 2.1 *Les exemples suivantes montrent que chacune des hypothèses du théorème est réellement nécessaire, si nous négligeons seulement une, alors le point fixe n'existe pas.*

(**1**) *X n'est pas stable par f :*

$f(x) = \sqrt{x^2+1}$ *sur* $X = [0,1]$.

X est fermé dans $\mathbb{R}$ est complet, car $\mathbb{R}$ est complet.

De plus,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1, \\ \sup_{x \in X} |f'(x)| &< 1 \Longrightarrow f \quad \textit{est contractante.} \end{aligned}$$

Mais, f n'a pas de point fixe car :

$$f([0,1]) = \left[1, \sqrt{2}\right],$$

i.e; X n'est pas stable par f.

(**2**) *f n'est pas contractante :*

$f(x) = \sqrt{x^2+1}$ *sur* $X = [0, +\infty[$.

$f : X \to X$ *et* X *est un fermé de* $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ *est complet donc* X *est complet.*

Mais,

$$\sup_{x \in X} \left| f'(x) \right| = 1.$$

$\Longrightarrow f$ *n'est pas contractante.*

2.2.2 Théorème du Point Fixe de Brouwer

Ce théorème est un résultat de topologie algébrique, il fait partie de la grande famille des théorèmes du point fixe, qui donne l'existence d'un point fixe (mais pas nécessairement l'unicité) pour une fonction continue sur une boule fermé dans un espace de dimension finie.

Théorème 2.6 *Soit* K *une partie non vide, compacte et convexe de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f : K \to K$ *une fonction continue. Il existe* $x \in K$ *tel que :* $f(x) = x$.

Le théorème de Brouwer prend donc dans le cas $n = 1$ la forme particulière suivante :

Théorème 2.7 *Si* $f : [a, b] \to [a, b]$ *est continue, alors il existe* $x \in [a, b]$ *tel que :* $f(x) = x$.

Preuve. Si f est continue de $[a, b]$ dans lui-même $([a, b])$, la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x \geq 0$ est continue, prend en a la valeur $f(a) - a \geq 0$ et en b la valeur $f(b) - b \leq 0$.

Alors, par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule en un point x_0, qui est un point fixe de f. ■

Remarque 2.1 1. *Les parties convexes et compactes de* $\mathbb{R}$ *sont les segments.*

2. *L'hypothèse " I fermé " n'est là que pour assurer que* $x_0 \in I$. *Si nous sait déjà, par ailleurs que* $x_0 \in I$ *(en pratique, nous avons parfois déjà calculé* ℓ *en résolvant l'équation* $f(x_0) = x_0$*), cette hypothése devient inutile.*

3. *Le théorème du point fixe ne s'applique pas si nous remplacons l'hypothèse "f contractante sur I " par l'hypothèse "f 1-lipschitzienne sur I ".*

Voici un ***contre-exemple*** *:*

Soit $f : I \to I$ *et* $I = [1, +\infty[$

telle que :

$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

Soient x *et* y *dans* I, *avec* $x < y$,

comme la fonction f *est croissante sur* $[1, +\infty[$, *nous avons :*

$$|f(y) - f(x)| \leq f(y) - f(x),$$

donc,

$$|f(y) - f(x)| \leq y - x + \frac{x - y}{xy},$$

alors,

$$|f(y) - f(x)| \leq y - x \leq |y - x|.$$

Ce qui prouve que f *est 1-lipschitzienne sur* I.

Cependant f *n'a pas de point fixe sur* I. *(L'équation* $f(x) = x$ *n'a pas de solution).*

2.2.3 Théorème du point fixe de Schauder

Ce théorème est plus topologique, il prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach.

Théorème 2.8 [9]*Soit* K *un sous ensemble non vide, convexe et complet dans un espace de Banach* E. *Alors toute application continue* $f : K \to K$ *possède un point fixe.*

Exemple 2.2 *Étude de la convergence de la suite définie par :*

$$\begin{cases} u_0 \in [-1, +\infty[, \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}, \end{cases}$$

nous utilisons les théorèmes suivantes :

Théorème 2.9 [6] *Soit g une fonction continue définie sur un intervalle I. On suppose de plus que l'intervalle I est stable par g.*

Théorème 2.10 *Si la suite récurrente (u_n) converge, c'est nécessairement vers un point fixe de g.*

Exemple 2.3 *Nous pouvons introduire l'application f définie sur $[-1, +\infty[$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{1 + x}.$$

Point fixe** de f **:

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{1 + x} = x \Leftrightarrow x \geq 0,$$

et,

$$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

nous montrons facilement que f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et croissante sur $[-1, +\infty[$, puis que :

$$f([-1, +\infty[) = [0, +\infty[\subset [-1, +\infty[.$$

Donc, l'intervalle $I = [-1, +\infty[$ est stable et la suite (u_n) est bien définie.

De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{1 + x}} \leq \frac{1}{2}.$$

d'après, l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,\ |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2} |b - a|.$$

Donc, f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur I, donc contractante sur I.

En outre :

$$f(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[\subset \mathbb{R}_+.$$

donc, $\mathbb{R}_+$ est stable par f.

D'après le théorème du point fixe, la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [-1, +\infty[, \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}. \end{cases}$$

converge donc vers λ.

Enfin, si $u_0 \in [-1, +\infty[$ alors $u_1 \in \mathbb{R}_+$ et d'après ce qui précède (u_n) converge encore vers λ.

2.2.4 Théorème de point fixe dans un cône

Dans l'ouvrage [4], D. Guo, V. Lakshmikantham a démontré le théorème de Guo-Krasnosel'skii qui est un des plus important outils concentrés sur la recherche des conditions qui garentissent l'existence de solutions positives des problèmes aux limites, il a été l'objet de plusieurs articles de recherche et possède des très nombreuses applications intéressantes en analyse non linéaire.

Théorème 2.11 ***(Guo-Krasnosel'skii).***

E un espace de Banach et $K \subset E$ un cône. Supposons que Ω_1, Ω_2 deux sous ensembles ouverts de E avec $0 \in \Omega_1$, $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$ et soit

$$\mathcal{A} : K \cap \left(\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1\right) \to K,$$

un opérateur complètement continu telles que :

(i) $\|\mathcal{A}u\| \leq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_1$ et $\|\mathcal{A}u\| \geq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_2$; ou

(ii) $\|\mathcal{A}u\| \geq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_1$ et $\|\mathcal{A}u\| \leq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_2$.

Alors, $\mathcal{A}$ admet un point fixe dans $K \cap \left(\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1\right)$.

Chapitre 3

Étude de l'unicité et la positivité de la solution d'un problème aux limites fractionnaire

Résumé

Dans ce chapitre, nous étudions l'unicité et la positivité de la solution d'un problème aux limites fractionnaire, en utilisant le principe de contraction de Banach et le théorème de Guo-Krasnosel'skii dans un cône. Les résultats obtenus sont illustrés par des exemples.

3.1 Présentation du problème

Dans ce chapitre, nous allons étudier le problème aux limites fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha} u(t) + f(t, u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = ... = u^{(n-2)}(0) = 0, \quad u(1) = \beta u(\eta), \end{cases} \tag{3.1}$$

où :

(i) $f \in C([0,1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\beta > 0$, $0 < \eta < 1$.

(ii) $D_{0^+}^{\alpha}$ est la dérivée d'ordre fractionnaire de type Riemann-Liouville d'ordre $n-1 < \alpha \leq n$, $n \geq 3$.

Dans la deuxième section, nous allons donner quelques documents préliminaires, nous allons présenter et démontrer la forme de la solution du problème. Dans la troisième section, nous donnons quelques propriétés de la fonction de Green associée, l'opérateur intégral et quelques définitions de base dont nous avons besoin. Dans la quatrième section, en utilisant le principe de contraction de Banach, nous présentons et nous prouvons les résultats d'unicité. Dans la cinquième section, sous certaines conditions sur la non-linéarité f et en utilisant le théorème de Guo-Krasnosel'skii du point fixe nous étudions l'existence d'au moins une solution positive du problème, nous allons démontrer aussi que l'opérateur intégral associée est complètement continu par utilisation du théorème d'Arzéla-Ascoli, la fonction de Green associée pour le problème est également utilisée. Les résultats obtenus sont illustrés par des exemples.

3.2 Préliminaires

Nous allons donner quelques préliminaires que nous allons utiliser par la suite.

Soit E l'espace de Banach des fonctions continues $\mathbb{C}[0,1]$, muni de la norme $\|u\|_E = \max_{t\in[0,1]} |u(t)|$.

Lemme 3.1 [5] *Soit* $\alpha, \beta \geq 0,\ f \in L^1[0,1]$, *alors :*

$$D_{0+}^{\alpha} I_{0+}^{\alpha} f(t) = f(t),$$

$$I_{0+}^{\alpha} I_{0+}^{\beta} f(t) = I_{0+}^{\alpha+\beta} f(t).$$

Lemme 3.2 [5] *Pour* $\alpha > 0$ *et* $u \in C[0,1] \cap L^1[0,1]$, *l'équation différentielle fractionnaire :*

$$D_{0+}^{\alpha} u(t) = 0,$$

admet la solution

$$u(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + ... + c_n t^{\alpha-n},$$

où, $c_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, ..., n$ *et* $n = [\alpha] + 1$.

Lemme 3.3 [6] *Supposons que* $u \in C[0,1] \cap L^1[0,1]$ *telle que :*

la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ *appartient à* $C[0,1] \cap L^1[0,1]$. *Alors,*

$$I_{0+}^{\alpha} D_{0+}^{\alpha} u(t) = u(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + \ldots + c_n t^{\alpha-n},$$

pour, $c_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n;\ n = [\alpha] + 1$.

Lemme 3.4 *Soit* $f \in C[0,1]$ *et* $\alpha > \beta \geq 0$. *Alors,*

$$D_{0+}^{\beta} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta-1} f(s) ds.$$

Preuve. D'après, le lemme 3.1.

Nous avons :

$$\begin{aligned}
D_{0+}^{\beta}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds &= D_{0+}^{\beta}\Gamma(\alpha)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds,\\
&= D_{0+}^{\beta}\Gamma(\alpha)I_{0+}^{\alpha}f(t),\\
&= \Gamma(\alpha)D_{0+}^{\beta}I_{0+}^{\alpha}f(t),\\
&= \Gamma(\alpha)D_{0+}^{\beta}I_{0+}^{\beta}I_{0+}^{\alpha-\beta}f(t),\\
&= \Gamma(\alpha)I_{0+}^{\alpha-\beta}f(t),\\
&= \Gamma(\alpha)\frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta-1}f(s)ds.
\end{aligned}$$

D'où, le résultat. ■

Commençons d'abord par la résolution du problème auxiliaire :

Lemme 3.5 [7] *Soit* $\beta\eta^{\alpha-1}\neq 1$ *et* $y\in L^1[0,1]$, *alors le problème :*

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha}u(t)+y(t)=0, \quad 0<t<1,\\ u(0)=u'(0)=u''(0)=...=u^{(n-2)}(0)=0, \quad u(1)=\beta u(\eta), \end{cases} \tag{3.2}$$

a une solution unique

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)\,y(s)\,ds+\frac{\beta t^{\alpha-1}}{1-\beta\eta^{\alpha-1}}\int_0^1 G(\eta,s)\,y(s)\,ds, \tag{3.3}$$

où :

$$G(t,s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases} t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}, & 0\leq s\leq t\leq 1,\\ t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}, & 0\leq t\leq s\leq 1. \end{cases} \tag{3.4}$$

Preuve. Nous avons :

$$u(t)=-I_{0+}^{\alpha}y(t)+C_1t^{\alpha-1}+C_2t^{\alpha-2}+....+C_nt^{\alpha-n},$$

de $u(0) = 0$, nous obtenons $C_n = 0$. Alors :

$$u(t) = -I_{0+}^{\alpha} y(t) + C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + ... + C_{n-1} t^{\alpha-n+1}, \tag{3.5}$$

nous avons,

$$u'(t) = -\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} y(s)\, ds + C_1 (\alpha-1) t^{\alpha-2} + ... + C_{n-1} (\alpha-n+1) t^{\alpha-n},$$

et de $u'(0) = 0$, nous obtenons $C_{n-1} = 0$. De même pour $u''(0) = ... = u^{(n-2)}(0) = 0$, nous trouvons $C_2 = ... = C_{n-2} = 0$. Donc :

$$u(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds + C_1 t^{\alpha-1},$$

de $u(1) = \beta u(\eta)$, nous déduisons que :

$$C_1 = \frac{1}{1-\beta\eta^{\alpha-1}} \left[I_{0+}^{\alpha} y(1) - \beta I_{0+}^{\alpha} y(\eta) \right],$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} u(t) = {} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left[-(t-s)^{\alpha-1} + t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} \right] y(s)\, ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds \\ & + \frac{t^{\alpha-1}\beta}{\Gamma(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-1})} \int_0^{\eta} \left[\eta^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} - (\eta-s)^{\alpha-1} \right] y(s)\, ds \\ & + \frac{t^{\alpha-1}\beta}{\Gamma(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-1})} \int_{\eta}^1 \eta^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds, \end{aligned}$$

Donc,

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\, y(s)\, ds + \frac{\beta t^{\alpha-1}}{1-\beta\eta^{\alpha-1}} \int_0^1 G(\eta,s)\, y(s)\, ds.$$

Ceci achève la démonstration. ■

3.3 Propriétés de la fonction de Green

Nous avons besoin de quelques propriétés de la fonction $G(t,s)$.

Lemme 3.6 *La fonction* $G(t,s)$ *défini par* (3.4) *satisfait les propriétés suivantes :*

(i) $G(t,s) \geq 0$ *et* $G(t,s) \in C([0,1] \times [0,1], \mathbb{R}_+)$.

(ii) *Si* $t, s \in [\tau, 1]$, $\tau > 0$, *puis*

$$\tau^{\alpha-1} G_1(s) \leq G(t,s) \leq \frac{1}{\tau} G_1(s),$$

où :

$$G_1(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} s (1-s)^{\alpha-1}.$$

Preuve. (i) La continuité de G est facilement vérifié.

Pour $0 \leq t \leq s \leq 1$, il est évident que :

$$G(t,s) = \frac{(1-s)^{\alpha-1} t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \geq 0.$$

Pour $0 \leq s \leq t \leq 1$, nous avons :

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[(1-s)^{\alpha-1} t^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1} \right] = \frac{(t-ts)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \geq 0.$$

(ii)

Si $0 \leq t \leq s \leq 1$, nous trouvons :

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (1-s)^{\alpha-1} t^{\alpha-1} \leq G_1(s).$$

Si $0 \leq s \leq t \leq 1$, nous avons :

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[(1-s)^{\alpha-1} t^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1} \right],$$

puis,

$$G(t,s) \leq \frac{1}{s} G_1(s), \quad \forall s,t \in [0,1].$$

Alors,

$$G(t,s) \leq \frac{1}{\tau} G_1(s), \quad \forall s \in [\tau,1], \quad t \in [0,1].$$

Maintenant, Si $0 \leq t \leq s \leq 1$,

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-1} \geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} s (1-s)^{\alpha-1},$$

puis,

$$G(t,s) \geq t^{\alpha-1} G_1(s), \quad \forall s,t \in [0,1].$$

Si $0 \leq s \leq t \leq 1$,

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[(1-s)^{\alpha-1} t^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1} \right] \geq 0,$$

et,

$$(1-s)^{\alpha-1} t^{\alpha-1} (1-s) - (t-s)^{\alpha-1} \geq 0,$$

$$G(t,s) \geq t^{\alpha-1} G_1(s), \quad \forall s,t \in [0,1].$$

Donc,

$$G(t,s) \geq \tau^{\alpha-1} G_1(s) \quad \text{pour } t,s \in [\tau,1].$$

La preuve est complète. ■

Lemme 3.7 *La fonction $G(t,s)$ défini par (3.4) est strictement croissante par rapport la première variable.*

Preuve. *Dans le cas $t \leq s$:*

$$G_1(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-1} \right].$$

Dans le cas $s \leq t$:

$$G_2(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} - (t-s)^{^{\alpha-1}} \right].$$

Il est facile de vérifier que $G_1(t,s)$ est strictement croissante sur $[0,s]$ et $G_2(t,s)$ est strictement croissante sur $[s,1]$.

Pour $t_1, t_2 \leq s$ et $t_1 < t_2$, nous avons $G_1(t_1,s) < G_1(t_2,s)$.

Pour $s \leq t_1, t_2$ et $t_1 < t_2$, nous avons $G_2(t_1,s) < G_2(t_2,s)$.

Alors, nous obtenons $G(t_1,s) < G(t_2,s)$.

Dans le cas $t_1 \leq s \leq t_2$ et $t_1 < t_2$, nous avons :

$$G_1(t_1,s) \leq G_1(s,s) = G_2(s,s) < G_2(t_2,s),$$

nous déduisons que

$$G_1(t_1,s) < G_2(t_2,s).$$

Si $G_1(t_1,s) < G_2(t_2,s)$, alors :

$$G_1(t_1,s) = G_1(s,s) = G_2(s,s) = G_2(t_2,s),$$

et d'après la monotonè de G_1 et G_2, nous avons $t_1 = s = t_2$, ce qui contradiction avec $t_1 < t_2$, ce implique que :

$$G(t_1,s) < G(t_2,s).$$

La preuve est complète. ■

Définition 3.1 *Définissons l'opérateur integral $T : E \longrightarrow E$ par :*

$$Tu(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s,u(s)) \, ds$$

$$+ \frac{\beta t^{\alpha-1}}{1-\beta\eta^{\alpha-1}} \int_0^1 G(\eta,s) f(s,u(s)) \, ds, \quad t \in [0,1]. \tag{3.6}$$

D'après le lemme 3.5, *la fonction* $u(t) \in E$ *est une solution du problème* (3.1) *si et seulement si, l'opérateur* T *a un point fixe dans* E ($Tu(t) = u(t)$).

Maintenant nous donnons quelques définitions de base.

Définition 3.2 *Soit* K *un ensemble qui appartient à l'espace vectoriel réel ou complexe. L'ensemble* K *est convexe, si pour tout* x *et* y *dans* K *et pour tout* t *dans l'intervalle* $]0,1[$, *le point* $(1-t)x + ty$ *est dans* K. *En d'autre terme, chaque point sur le segment de la droite joignant* x *et* y *est dans* K.

Définition 3.3 *Soit* E *un espace de Banach. Un sous ensemble convexe, fermé et non vide* $K \subset E$ *est un cône s'il vérifie les deux conditions suivantes :*

(i) $x \in K$ *et* $\lambda \geq 0 \Longrightarrow \lambda x \in K$.

(ii) $x \in K$ *et* $-x \in K \Longrightarrow x = 0$.

Définition 3.4 *Soient* E *un espace de Banach et* Ω *une partie de* E. *On dit que l'opérateur* $T : \Omega \longrightarrow E$ *est complètement continu s'il est continu et si pour toute partie bornée* B *de* Ω, $T(B)$ *est relativement compact dans* E.

3.4 Résultats d'unicité

Cette section est consacré à l'étude de l'unicité de la solution du problème aux limites fractionnaire (3.1), sous certaines propriétés de la fonction de Green associée.

Nous présentons et nous prouvons nos résultats d'unicité, en utilisant le principe de contraction de Banach.

Théorème 3.1 *Supposons qu'il existe une fonction positive* $k \in L^1([0,1], \mathbb{R}_+)$ *telle que :*

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq k(t)\,|u - v|, \tag{3.7}$$

$$\forall u, v \in \mathbb{R}, \quad t \in [0,1].$$

Et,

$$C = \frac{1}{\tau}\left(1 + \frac{\beta}{1-\beta\eta^{\alpha-1}}\right)\int_0^1 G_1\left(s\right) k(s) ds < 1, \quad \tau > 0.$$

Alors, le problème aux limites (3.1) *a une solution unique dans* E.

Preuve. Nous allons prouver que T est une contraction.

Soit $u, v \in \mathbb{R}$, alors :

$$\left|Tu\left(t\right) - Tv\left(t\right)\right| \leq \int_0^1 G\left(t,s\right)\left|f\left(s,u\left(s\right)\right) - f\left(s,v\left(s\right)\right)\right| ds$$

$$+\frac{\beta}{1-\beta\eta^{\alpha-1}}\int_0^1 G\left(\eta,s\right)\left|f\left(s,u\left(s\right)\right) - f\left(s,v\left(s\right)\right)\right| ds,$$

i.e,

$$\left|Tu\left(t\right) - Tv\left(t\right)\right| \leq$$

$$\frac{1}{\tau}\left(1 + \frac{\beta}{1-\beta\eta^{\alpha-1}}\right)\int_0^1 G_1\left(s\right) k\left(s\right)\left|u\left(s\right) - v\left(s\right)\right| ds,$$

alors,

$$\left|Tu\left(t\right) - Tv\left(t\right)\right| \leq \frac{1}{\tau}\left(1 + \frac{\beta}{1-\beta\eta^{\alpha-1}}\right)\left\|u - v\right\|_E \int_0^1 G_1\left(s\right) k\left(s\right) ds.$$

Passant à la norme, nous avons :

$$\left\|Tu - Tv\right\|_E \leq C\left\|u - v\right\|_E .$$

Alors, T est une contraction.

Donc, il admet un point fixe unique qui est la solution unique du problème aux limites (3.1) . ■

3.5 Exemple

Dans cette section, nous allons illustrer les résultats d'unicité obtenus par cet exemple.

Exemple 3.1 *Considérons le problème aux limites fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} D_{0+}^{\frac{5}{2}} u\left(t\right) + \frac{t^3}{4} u\left(t\right) = 0, \quad 0 < t < 1, \\ u\left(0\right) = u'\left(0\right) = 0 = \ldots = u^{(n-2)}\left(0\right), \quad u\left(1\right) = \beta u\left(\eta\right). \end{cases} \tag{P}$$

Soit,

$$\beta = \frac{1}{3}, \eta = \frac{1}{4},$$

et,

$$f\left(t, u\right) = \frac{t^3}{4} u\left(t\right),$$

choisissant,

$$k\left(t\right) = \frac{t^3}{4}, \ t \in \left[0, 1\right],$$

$k \in L^1([0,1], \mathbb{R}_+)$ *une fonction positive, et*

$$\begin{aligned} \left|f(t,u) - f(t,v)\right| &\leq \frac{t^3}{4} \left|u - v\right|, \\ &\leq k(t) \left|u - v\right|, \end{aligned}$$

$$\forall \ u, v \in \mathbb{R}, \ t \in \left[0, 1\right].$$

Et,

$$C = \frac{1}{\tau} \left(1 + \frac{\beta}{1 - \beta \eta^{\alpha - 1}}\right) \int_0^1 G_1\left(s\right) k\left(s\right) ds < 1.$$

Ainsi, d'après le théorème 3.1*, le problème aux limites* (P) *admet une unique solution dans* E.

3.6 Résultats de positivité

Dans cette section, en utilisant le théorème de Guo-Krasnosel'skii, nous démontrons que le problème aux limites (3.1) a au moins une solution positive.

Supposons que :

$(\mathbf{I}_1)$: $f(t,u) = a(t)f_1(u)$ oú $a \in C([0,1], \mathbb{R}_+)$ et $f_1 \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$.

$(\mathbf{I}_2)$: $\int_0^1 G_1(s)\, a(s) ds > 0$.

Définition 3.5 *La fonction* $u(t)$ *est appelée solution positive pour le problème aux limites fractionnaire* (3.1) *si* $u(t) \geq 0$, $\forall t \in [0,1]$.

Lemme 3.8 *Supposons que* $\beta\eta^{\alpha-1} \neq 1$, (I_1) *et* (I_2) *sont vérifiées et si* u *est une solution du problème aux limites* (3.1) *alors,* u *est positive et vérifie :*

$$\min_{t\in[\tau,1]} u(t) \geq \tau^{\alpha} \|u\|_E .$$

Preuve. Supposons que u est une solution du problème (3.1), alors pour tout $t \in [0,1]$, d'après les hypothèses $(I_1)-(I_2)$ et de la positivité de G, la fonction u est positive.

Et d'après le lemme 3.5 et 3.6, nous avons :

$$u(t) \leq \frac{1}{\tau}\left(1 + \frac{\beta}{1-\beta\eta^{\alpha-1}}\right)\int_0^1 G_1(s)\, a(s)\, f_1(u(s))\, ds,$$

alors,

$$\|u\|_E \leq \frac{1}{\tau}\left(1 + \frac{\beta}{1-\beta\eta^{\alpha-1}}\right)\int_0^1 G_1(s)\, a(s)\, f_1(u(s))\, ds,$$

ainsi,

$$\tau\left(1 + \frac{\beta}{1-\beta\eta^{\alpha-1}}\right)^{-1} \|u\|_E \leq \int_0^1 G_1(s)\, a(s)\, f_1(u(s))\, ds.$$

D'autre part, pour tout $t \in [\tau, 1]$, nous obtenons :

$$u(t) \geq \tau^{\alpha-1}\left(1 + \frac{\beta}{1-\beta\eta^{\alpha-1}}\right)\int_0^1 G_1(s)\, a(s)\, f_1(u(s))\, ds.$$

Par conséquent,

$$\min_{t\in[\tau,1]} u(t) \geq \tau^{\alpha} \|u\|_E .$$

Ceci achève la démonstration. ■

Définition 3.6 *Nous définissons le cône K par :*

$$K=\left\{u\in E,\ u(t)\geq 0,\ \min_{t\in[\tau,1]}u(t)\geq\tau^{\alpha}\left\|u\right\|_{E}\right\}.$$

K est un sous ensemble convexe fermé et non vide de E.

Lemme 3.9 *L'opérateur défini dans* (3.6) *est complèment continu et satisfait* $T(K)\subseteq K$.

Preuve. T est complètement continu.

1. T est continu.

D'après, la continuité de f et G, nous concluons que T est un opérateur continu.

2. Soit $B_r=\{u\in E,\ \|u\|_E\leq r\}$ un sous ensemble borné dans E, nous allons prouver que : $T(B_r)$ est relativement compact.

(i) $T(B_r)$ est uniformément borné.

Pour tout $u\in B_r$, comme f_1 et a sont continues alors, il existe une constante L telle que :

$$L=\max_{\substack{s\in[0,1]\\ \|u\|_E\leq r}}a(s)f_1(u).$$

Et d'après la définition 3.1 et les hypothèses $(I_1)-(I_2)$ et de la positivité de G. Et d'après le lemme 3.5 et 3.6, nous trouvons :

$$\begin{aligned}
|Tu(t)| &\leq \frac{1}{\tau}\left[\int_0^1 G_1(s)a(s)f_1(u(s))ds+\frac{\beta}{1-\beta\eta^{\alpha-1}}\int_0^1 G_1(s)a(s)f_1(u(s))ds\right],\\
&\leq \frac{1}{\tau}(1+\frac{\beta}{1-\beta\eta^{\alpha-1}})\int_0^1 G_1(s)a(s)f_1(u(s))ds,\\
&\leq \frac{L}{\tau}(1+\frac{\beta}{1-\beta\eta^{\alpha-1}})\int_0^1 G_1(s)ds.
\end{aligned}$$

Alors, $T(B_r)$ est uniformément borné.

(ii) $T(B_r)$ est équicontinu.

Soit $u \in B_r$, $t_1, t_2 \in [0,1]$, $t_1 < t_2$, nous avons :

$$\begin{aligned}
|Tu(t_2) - Tu(t_1)| \ \le \ & \int_0^1 |G(t_2,s) - G(t_1,s)|\, f(s,u(s))ds \\
& + \frac{\beta(t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1})}{1-\beta\eta^{\alpha-1}} \int_0^1 G(\eta,s)a(s)f(s,u(s))ds,
\end{aligned}$$

$$\le \int_0^1 |G(t_2,s) - G(t_1,s)|\, a(s)f_1(u(s))ds + \frac{\beta(t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1})}{1-\beta\eta^{\alpha-1}} \int_0^1 G(\eta,s)a(s)f_1(u(s))ds,$$

alors,

$$|Tu(t_2) - Tu(t_1)| \le L \left[\int_0^{t_1} |G(t_2,s) - G(t_1,s)|\, ds + \int_{t_1}^{t_2} |G(t_2,s) - G(t_1,s)|\, ds + \right.$$

$$\left. \int_{t_2}^1 |G(t_2,s) - G(t_1,s)|\, ds + \frac{\beta(t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1})}{1-\beta\eta^{\alpha-1}} \int_0^1 G(\eta,s)ds \right],$$

donc,

$$|Tu(t_2) - Tu(t_1)| \le L(t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1}) \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\int_0^{t_1} \left|(1-s)^{\alpha-1} - 1\right| ds + \int_{t_1}^{t_2} \left|(1-s)^{\alpha-1} - 1\right| ds + \right.$$

$$\left. \int_{t_2}^1 \left|(1-s)^{\alpha-1}\right| ds) + \frac{\beta}{1-\beta\eta^{\alpha-1}} \int_0^1 G(\eta,s)ds \right].$$

Et,

$$L = \max_{\substack{s\in[0,1] \\ \|u\|_E \le r}} a(s)f_1(u).$$

Alors, $|Tu(t_2) - Tu(t_1)| \underset{t_1 \to t_2}{\longrightarrow} 0.$

Donc, $T(B_r)$ est équicontinu.

D'après, le théorème d'Arzéla Ascoli, nous déduisons que T est un opérateur complètement continu.

Maintenant, nous montrons que $T(k) \subseteq k$.

Nous appliquons le lemme 3.5 et 3.6 et les hypothèses $(I_1) - (I_2)$ et de la positivité de G. Et d'après la définition 3.1, nous trouvons :

$$Tu(t) \leq \frac{1}{\tau}(1 + \frac{\beta}{1 - \beta\eta^{\alpha-1}})\int_0^1 G_1(s)a(s)f_1(u(s))ds,$$

alors,

$$\|Tu(t)\| \leq \frac{1}{\tau}(1 + \frac{\beta}{1 - \beta\eta^{\alpha-1}})\int_0^1 G_1(s)a(s)f_1(u(s))ds,$$

ainsi,

$$\tau(1 + \frac{\beta}{1 - \beta\eta^{\alpha-1}})^{-1} \ \|Tu(t)\| \leq \int_0^1 G_1(s)a(s)f_1(u(s))ds,$$

D'autre part, pour tout $t \in [\tau, 1]$, nous obtenons :

$$Tu(t) \geq \tau^{\alpha-1}(1 + \frac{\beta}{1 - \beta\eta^{\alpha-1}})\int_0^1 G_1(s)a(s)f_1(u(s))ds.$$

Alors,

$$\min_{t\in[\tau,1]} Tu(t) \geq \tau^{\alpha} \|Tu(t)\|_E .$$

Donc,

$$u \in k \Longrightarrow T(k) \subseteq k.$$

■

Pour établir l'existence d'au moins une solution positive du problème aux limites (3.1), nous emploierons le théorème 2.11 de Guo–Krasnosel'skii.

Le résultat principal de cette section est le suivant :

Théorème 3.2 *Supposons que* (I_1) *et* (I_2) *sont vérifiées,* $\beta\eta^{\alpha-1} \neq 1$, *et supposons que :*

$$f_0 = \lim_{|u|\to 0} \frac{f_1(u)}{|u|},$$

$$f_\infty = \lim_{|u|\to \infty} \frac{f_1(u)}{|u|}.$$

Alors, le problème (3.1) *a au moins une solution positive dans le cas :*

(i) $f_0 = 0$ *et* $f_\infty = \infty$ (*super-linéaire*), *ou*

(ii) $f_0 = \infty$ *et* $f_\infty = 0$ (*sous-linéaire*).

Preuve. Nous allons prouver que le probléme (3.1) a au moins une solution positive dans les deux cas super-linéaire et sous-linéaire. Pour cela nous utilisons le théorème 2.11.

(i) Le cas super-linéaire : nous supposons que $f_0 = 0, \; f_\infty = \infty$.

D'après le lemme 3.5, u est une solution du problème (3.1), si et seulement si u est un point fixe de l'opérateur T, où T est défini par (3.6).

Comme $f_0 = 0$ alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists \delta_1 > 0 \text{ telle que : } f_1(u) \leq \varepsilon |u|, \quad \text{pour} \quad |u| \leq \delta_1.$$

Soit Ω_1 un ouvert de E défini par :

$$\Omega_1 = \{u \in E / \, ||u|| < \delta_1\}.$$

Alors, pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_1$, nous avons :

$$Tu(t) \leq \frac{1}{\tau}\left(1 + \frac{\beta}{1 - \beta\eta^{\alpha-1}}\right)\int_0^1 G_1(s)\, a(s)\, f_1(u(s))\, ds,$$

donc,

$$\|Tu\|_E \leq \varepsilon \frac{1}{\tau}\|u\|_E\left(1 + \frac{\beta}{1 - \beta\eta^{\alpha-1}}\right)\int_0^1 G_1(s)\, a(s)\, ds,$$

choisissons $\varepsilon = \left[\frac{1}{\tau}\left(1+\frac{\beta}{1-\beta\eta^{\alpha-1}}\right)\int_0^1 G_1(s)\,a(s)\,ds\right]^{-1}$, nous obtenons :

$$\|Tu\|_E \leq \|u\|_E\,, \quad \forall u \in K \cap \partial\Omega_1.$$

Maintenant à partir de $f_\infty = \infty$.

$$\forall M > 0,\ \exists H > 0,\ \text{telle que : } f_1(u) \geq M\,|u|\,,\ \text{pour } |u| \geq H.$$

Soit,

$$H_1 = \max\left\{2\delta_1, \frac{1}{\tau^\alpha}H\right\}.$$

Notons par Ω_2 l'ensemble ouvert,

$$\Omega_2 = \{u \in E/\,\|u\| < H_1\}\,.$$

Soit $u \in K \cap \partial\Omega_2$, alors :

$$\min_{t\in[\tau,1]} u(t) \geq \tau^\alpha\,||u||_E\,,$$

$$= \tau^\alpha H_1 \geq H.$$

Alors, $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$.

Soit $u \in K \cap \partial\Omega_2$, alors :

$$Tu(t) \geq \tau^{\alpha-1}\left(1+\frac{\beta}{1-\beta\eta^{\alpha-1}}\right)\int_0^1 G_1(s)\,a(s)\,f_1(u(s))\,ds,$$

$$Tu(t) \geq \tau^{\alpha-1}\left(1+\frac{\beta}{1-\beta\eta^{\alpha-1}}\right)M\,\|u\|_E\int_0^1 G_1(s)\,a(s)\,ds,$$

choisissons, $M = \left[\tau^{\alpha-1}\left(1+\frac{\beta}{1-\beta\eta^{\alpha-1}}\right)\int_0^1 G_1(s)\,a(s)\,ds\right]^{-1}$, nous obtenons :

$$\|Tu\|_E \geq \|u\|_E\,, \forall u \in K \cap \partial\Omega_2.$$

D'après, la première partie du théorème 2.11, nous déduisons que T admet au moins un point fixe en $K \cap \left(\overline{\Omega_2} \diagdown \Omega_1\right)$, tel que : $H \leq ||u|| \leq H_1$.

Ceci complète le cas super-linéaire du théorème 3.2.

Maintenant, nous supposons que $f_0 = \infty$ et $f_\infty = 0$. En procédant comme ci-dessus et par la deuxième partie du théorème 2.11, nous prouvons le cas sous-linéaire.

(ii) Le cas sous-linéaire : nous supposons que $f_0 = \infty$ et $f_\infty = 0$.

Comme $f_0 = \infty$, nous avons :

$$\forall M' > 0,\ \exists \delta_1' > 0,\ \text{telle que : } f_1(u) \geq M' |u|,\ \text{pour } |u| \leq \delta_1'.$$

Soit,

$$\Omega_1' = \{u \in E / \|u\| < \delta_1'\}.$$

Pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_1'$, nous avons :

$$Tu(t) \geq \tau^{\alpha-1} \left(1 + \frac{\beta}{1 - \beta\eta^{\alpha-1}}\right) \int_0^1 G_1(s)\, a(s)\, f_1(u(s))\, ds,$$

donc,

$$Tu(t) \geq \tau^{\alpha-1} \|u\|_E \left(1 + \frac{\beta}{1 - \beta\eta^{\alpha-1}}\right) M' \int_0^1 G_1(s)\, a(s)\, ds,$$

nous choisissons, $M' = \left[\tau^{\alpha-1} \left(1 + \frac{\beta}{1-\beta\eta^{\alpha-1}}\right) \int_0^1 G_1(s)\, a(s)\, ds\right]^{-1}$, nous obtenons :

$$\|Tu\|_E \geq \|u\|_E,\ \forall u \in K \cap \partial\Omega_1'.$$

Puisque $f_\infty = 0$, alors

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists H' > 0\ \text{ telle que : } f_1(u) \leq \varepsilon' |u|,\ \text{ pour } |u| \geq H'.$$

$$H_2 = \max\left\{2\delta_1', \frac{1}{\tau^\alpha} H'\right\}.$$

Et,

$$\Omega_2' = \{u \in E / \|u\| < H_2\}.$$

Alors, $u \in K \cap \partial\Omega_2'$, implique que :

$$\min_{t\in[\tau,1]} u(t) \geq \tau^{\alpha} \|u\|_E,$$

$$= \tau^{\alpha} H_2 \geq H'.$$

Alors, $\overline{\Omega_1}' \subset \Omega_2'$.

Soit $u \in K \cap \partial\Omega_2'$, alors

$$Tu(t) \leq \frac{1}{\tau}\left(1 + \frac{\beta}{1-\beta\eta^{\alpha-1}}\right)\int_0^1 G_1(s)\, a(s)\, f_1(u(s))\, ds,$$

ainsi,

$$\|Tu\|_E \leq \varepsilon' \frac{1}{\tau}\|u\|_E \left(1 + \frac{\beta}{1-\beta\eta^{\alpha-1}}\right)\int_0^1 G_1(s)\, a(s)\, ds,$$

nous choisissons, $\varepsilon' = \left[\frac{1}{\tau}\left(1 + \frac{\beta}{1-\beta\eta^{\alpha-1}}\right)\int_0^1 G_1(s)\, a(s)\, ds\right]^{-1}$, nous obtenons :

$$\|Tu\|_E \leq \|u\|_E, \quad \forall u \in K \cap \partial\Omega_2'.$$

Nous utilisons la deuxième partie du théorème 2.11, T a un point fixe dans $K \cap \left(\overline{\Omega_2'} \setminus \Omega_1'\right)$.

Ceci achève le cas sous-linéaire du théorème 3.2, alors le problème aux limites (3.1) admet au moins une solution positive.

La démonstration du théorème 3.2 est terminé. ■

3.7 Exemple

Afin d'illustrer le résultat de positivité, nous étudions l'exemple suivant :

Exemple 3.2 *Considérons le problème aux limites suivant :*

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\frac{7}{2}} u(t) + t^2 u^2 e^{(1+u(t))} = 0, \quad 0 < t < 1. \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = 0, \quad u(1) = \beta u(\eta). \end{cases} \tag{J}$$

Posons,

$$\beta \eta^{\alpha-1} \neq 1, \ n = 4, \ \alpha = \frac{7}{2},$$

et

$$f(t, u) = t^2 \left(u^2 e^{(1+u(t))}\right) = a(t) f_1(u),$$

$a(t) = t^2 \in C([0, 1], \mathbb{R}_+)$, $f_1(u) = u^2 e^{(1+u(t))} \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. *Alors :*

$$f_0 = \lim_{|u| \to 0} \frac{f_1(u)}{|u|} = 0, \quad f_\infty = \lim_{|u| \to \infty} \frac{f_1(u)}{|u|} = \infty.$$

D'après, la première partie (i) *de théorème* 3.2, *le problème aux limites* (J) *a au moins une solution positive.*

Conclusion 3.1 *La théorie du point fixe est d'une importance capitale dans l'étude de l'existence de solutions pour les problèmes non linéaires. De cette théorie découlent plusieurs applications qui constituent un domaine très actif de la recherche, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles.*

Dans ce mémoire, nous présentons les résultats d'unicité et de positivité d'un problème aux limites fractionnaire, en utilisant quelques théorèmes du point fixe tels que, le principe de contraction de Banach et théorème du point fixe de Guo-Krasnosel'skii.

Actuellement il y a une grande variété de théorèmes du point fixe, ces théorèmes donnent certaines conditions sous les quelles une application $f : E \longrightarrow E$, *admet un point fixe dans* E.

Ces théorèmes sont très importants dans les mathémathiques car il y a plusieurs applications, par exemple pour trouver les racines d'un polynôme, ou pour montrer l'existence des solutions numériques des équations différentielles.

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal, M. Benchohra, S. Hamani, Servey on existence results for boundary value problems of nonlinear fractional equations and inclusions,Acta Appl. Math. 1095 (2010) 973-1033.

[2] H. Brézis, Analyse fonctionnelles, Théorie et applications. Masson, paris 1983.

[3] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer, Berlin, 1985.

[4] D.Guo,V.Lakshmikantham, Nonlinear problems in abstract cones, Academic Press, San Diego, 1988.

[5] Kilbas A., Srivastava H., Trujillo J., Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland mathematics Studies, vol. 204. Elsevier, Amsterdam (2006).

[6] V.Lakshmikantham, A. Vatsala, Basic theory of fractional differential equations, Nonlinear Analysis TMA 69 No 8 (2008) 2777-2682.

[7] Lilia ZENKOUFI, Existence of a Positive Solution for a Boundary Value Problem of some Nonlinear Fractional Differential Equation, Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 11 (2020) No. 2 499-514, doi : 10.22075/IJ-NAA.2020.4616.

[8] Lilia Zenkoufi, Existence and uniqueness solution for integral boundary value problem of fractional differential equation, New Trends in Mathematical Sciences BISKA, NTMSCI 10 Special Issue, No. 1, 90-94 (2022).

[9] E. Zeidler, Nonlinear functional analysis and its applications Fixed point theorem, Springer Verlag, New York Berlin Heiderberg, Tokyo 1985.