République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par :

M^{elle} CHIHAOUI Amira

Intitulé

Inégalités de type Newton-Cotes à trois points

Dirigé par :

MERAD Meriem

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. LAKHAL Fahim	Prof	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. MERAD Meriem	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. LARIBI Naima	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2023

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيم

(اقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ * خَلَقَ الْإِنسَانَ مِنْ عَلَقٍ * اقْرَأْ وَرَبُّكَ الْأَكْرَمُ * الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ * عَلَّمَ الْإِنسَانَ مَا لَمْ يَعْلَم *).

[سورة العلق 1-5]

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيم

(يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ ۚ وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ ۚ).

[سورة المجادلة 11]

قال رَسُولُ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ

« مَنْ سَلَكَ طَرِيقًا يَطْلُبُ فِيهِ عِلْمًا، سَلَكَ اللَّهُ بِهِ طَرِيقًا مِنْ طُرُقِ الْجَنَّةِ، وَإِنَّ الْمَلَائِكَةَ لَتَضَعُ أَجْنِحَتَهَا رِضًا لِطَالِبِ الْعِلْمِ، وَإِنَّ الْعَالِمَ لَيَسْتَغْفِرُ لَهُ مَنْ فِي السَّمَاوَاتِ، وَمَنْ فِي الْأَرْضِ، وَالْحِيتَانُ فِي جَوْفِ الْمَاءِ، وَإِنَّ فَضْلَ الْعَالِمِ عَلَى الْعَابِدِ، كَفَضْلِ الْقَمَرِ لَيْلَةَ الْبَدْرِ عَلَى سَائِرِ الْكَوَاكِبِ، وَإِنَّ الْعُلَمَاءَ وَرَثَةُ الْأَنْبِيَاءِ، وَإِنَّ الْأَنْبِيَاءَ لَمْ يُوَرِّثُوا دِينَارًا وَلَا دِرْهَمًا، وَرَّثُوا الْعِلْمَ، فَمَنْ أَخَذَهُ أَخَذَ بِحَظٍّ وَافِرٍ ».

اللَّهمَّ إنِّي أسألُكَ عِلمًا نافعًا، وقلبًا خاشعًا، ورزقًا مباركًا، وعملاً زاكيًا مُتقبَّلًا.

ربنا إفتح لنا أبواب رحمتك، وسهل لنا ما رزقتنا.

اللهمّ كما انعمت فَزِدْ وكما زدت فبارك وكما باركت فتمّ وكما أتممت فثبت.

Remerciements

Au nom de Dieu, le plus gracieux, le plus miséricordieux.
Qui m'a donné la force, le courage, et la détermination Nécessaire pour terminer ce travail.
La rédaction de ce mémoire et cette soutenance marque la fin d'une aventure à plusieurs facettes : aventure dans le monde de la recherche, qui ne devrait pas en rester là, aventure humaine, aventure familiale. Différentes personnes m'ont accompagnée tout au long de ce parcours

Au début, je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères
Mon Enseignante Et Encadreur
Et J'exprime toute ma gratitude à ***Madame Merad Meriem***
Docteur à l'université, 08 Mai 1945 Guelma.
Qui a accepté de m'encadrer
Pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée
J´ai eu l'honneur d'être parmi vos élèves et de bénéficier de votre riche enseignement.

Aux membres du jury
Pr. LAKHAL Fahim *Mes sincères remerciements Pour avoir accepté de présider le jury, vous nous offrez le grand honneur et le grand plaisir.*
A notre maître et Examinateur de jury. Madame Docteur LARIBI Naima*, Vous nous avez fait un grand honneur en acceptant de siéger parmi les membres de jury de cette mémoire.*

Mes sincères remercîments à tous les enseignants du département de Mathématique Guelma.
Mes remerciement à Monsieur ***«Meftah Badr Eddine»,***
À Monsieur ***« Azouza Nour Eddine »,***
Et aussi à ma camarade ***«Allel Nouha».***

Mes Parents, Mes sœurs, Mes camarades, Ma famille et tous ceux qui m'ont soutenu, aidé et contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Je commence mes dédicaces au nom de Dieu et puis de son prophète Mohamed.

Louange à Dieu tout puissant, qui m'a permis de voir ce jour tant attendu.

Par ces quelques modestes mots je souhaite témoigner ma reconnaissance à tous ceux qui m'ont aidé à lancer ce travail.

Je tiens à dédier ce modeste travail.

Aux êtres les plus chers à mes yeux qui m'ont soutenu durant toutes mes études,

A l'homme à qui je dois ma vie, ma réussite et tout mon respect.

A mon très cher père «AISSA CHIHAOUI» (AZZEDINE).

De tous les pères, tu es le meilleur. Grâce à toi papa j'ai appris le sens du travail et de la responsabilité. Tes conseils ont toujours guidé mes pas vers la réussite.

Vous êtes et vous resterez pour moi ma référence, et la lumière qui illumine mon chemin.

Et j'espère que vous y trouverez le fruit vos efforts et le témoignage de ma grande fierté de vous avoir comme père.

Je te dois ce que je suis aujourd'hui et ce que je serai demain et je ferai toujours de mon mieux pour rester ta fierté et ne jamais te décevoir.

A mon adorable mère «Abla AMARi»

Tu m'as comblé avec ta tendresse et affection tout au long de mon parcours. Tu n'as cessé de me soutenir et de m'encourager durant toutes les années de mes études. Ta prière et ta bénédiction m'ont été d'un grand secours pour mener à bien mes études et tout au long de ma vie.

En ce jour mémorable, pour moi ainsi que pour toi, reçoit ce travail en signe de ma vive reconnaissance et ma profonde estime. Puisse le tout puissant te donner santé, bonheur et longue vie afin que je puisse te combler à mon tour.

J'espère ne jamais te décevoir, ni trahir ta confiance et tes sacrifices.

A mes belles-sœurs «Aya» et «Alaa»

Aucune dédicace ne peut exprimer mon amour et ma gratitude, Vous êtes les sœurs qui assurez ses rôles comme il faut, Vous êtes été à mes côtés pendant toutes les étapes de ce travail je vous suis très reconnaissante. Je vous dis merci.

A mes chers frères «Taki Eddine» et «Yahia»

Merci d'avoir me soutenu et merci pour tous les bons moments que nous avons passés ensemble. Que Dieu nous rassemble pour toujours.

À mon cher mari «Abderrahmane»

Pour la patience et le soutien dont il a fait preuve pendant toute la durée de ce travail et à qui je voudrais exprimer mes affections et mes gratitudes. Merci infiniment. Que dieu vous garde pour moi.

À ma belle «Nouna»

Pour l'amour et l'affection qui nous unissent.

Je te dis merci. Je prie Dieu le tout puissant de préserver notre attachement mutuel, et d'exaucer tous nos rêves.

À ma belle «Tina»

Pour l'amour et l'affection qui nous unissent.

Je trouve en toi les conseils de la sœur et soutien de l'amie.

Tu comptes énormément pour moi. Merci pour vos aides, et vos supports. Je te dédie ce travail avec mes vœux de réussite, de prospérité et de bonheur.

À ma belle «sari»

Pour l'amour et l'affection qui nous unissent.

Merci pour vos aides et vos supports dans les moments difficiles.

Tu comptes énormément pour moi.

Je prie Dieu le tout puissant de préserver notre attachement mutuel,

À mes chères, Narimane, Hadil, Malek, Khawla, Fatima, Dounia, Amani, Meriem et Imen.

Pour leurs soutiens moraux et vos conseils précieux tout au long de mes études. Vous êtes pour moi des sœurs et des amies sur qui je peux compter. En témoignage de l'amitié qui nous unit et des souvenirs de tous les moments que nous avons passés ensemble.

À toute personne qui a participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail,

Spécialement Mme ***« Dr Merad Meriem»,***

À tous mes amis et mes collègues, A toute ma famille et tous ceux qui me sont chers, Il me serait difficile de vous citer tous, vous êtes dans mon cœur,

A vous les lecteurs de ces lignes.

ملخص

في هذه المذكرة، سوف ندرس المتباينة العامة من نوع نيوتن-كوتس المفتوحة، والتي تتضمن ثلاث نقاط، حيث وجدنا متباينة سيمسون الشهيرة في حالة أخذنا $x=a$، لذلك نقدم ثلاثة أجزاء.

في الجزء الأول، نذكر بعض الدوال والمساواة التكاملية التي ستستعمل لاحقًا.

في الجزء الثاني، نعرض بعض النتائج المعروفة حول المتراجحات التكاملية من نوع نيوتن كوتس عند نقطة واحدة، نقطتين وثلاث نقاط كلاسيكية وكسرية.

بينما خصصنا الجزء الأخير بالكامل لمتباينة كسرية جديدة من نوع نيوتن كوتس في الإطار العام، حيث تقدم هذه النتائج الجديدة للنشر.

الكلمات المفتاحية: متباينة نيوتن كوتس، متباينة نقطة المنتصف، متباينة شبه المنحرفة، متباينة سيمسون، تكامل ريمان-ليوفيل الجزئي.

Abstract

In this memory, we will study the integral inequality generalized of Newton-Cotes open involving three points, which we find the famous inequality of Simpson in the case we take x=a, for this we provide three parts. In the first part we recall some classes of integral functions and identities that will be used later.

Then in the second part we quoted some results already known in the literature on integral inequalities of the Newton-Cotes type at one, two and three points classical and fractional.

While the last part will be entirely devoted to new fractional inequalities type of Newton-Cotes in the general framework, of which these new results are submitted for possible publication.

Keywords: Newton-Cotes inequality, Midpoint inequality, Trapezium inequality, Simpson inequality, fractional integral Reimann-Liouville.

Résumé

Dans ce mémoire, nous allons étudier les inégalités intégrales de Newton-Cotes ouvertes généralisés faisant intervenir trois points, dont on retrouve la fameuse inégalité de Simpson dans le cas où on prend la variable x=a, pour cela on prévoit trois parties.
Dans la première partie nous rappelons quelques classes des fonctions et identités intégrales qui seront utilisées par la suite. Puis dans la deuxième partie nous citons certains résultats déjà connus dans la littérature sur les inégalités intégrales de type Newton-Cotes à un, deux et trois points classiques et fractionnaires. Tandis que la dernière partie sera entièrement consacré aux nouvelles inégalités fractionnaires de type Newton-Cotes dans le cadre général, dont ces nouveaux résultats sont soumis pour une éventuelle publication.

Mots clés : Inégalité de Newton-Cotes, Inégalité de point milieu, Inégalité de trapèze, Inégalité de Simpson, intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

Table des matières

Introduction

Les inégalités jouent un rôle important dans divers branches de mathématiques moderne telles que la théorie des espaces de Hilbert, la théorie des probabilités et des statistiques, l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'analyse numérique, la théorie qualitative des équations différentielles et des équations aux différences, etc. Cette dernière représente un outil puissant et indispensable.

Le fondement mathématique de cette théorie a été établi en partie au cours du $18^{ème}$ et $19^{ème}$ siècle par des éminents mathématiciens tels que : Gauss, Cauchy, Čebyšev dans les années qui suivirent le sujet attira de nombreux mathématiciens : Poincaré, Lyapunov, Gronwall, Hölder, Hadamard, Pólya, Bellman et Ostrowski. La littéraire dans ce contexte est vaste et variées parmi les ouvrages dont on peut trouver une très bonne description de l'évolution historique des inégalités on peut consulter, Mitrinović, Pečarić et Fink [8, 9, 10].

Cette théorie ne cesse d'évoluer dans plusieurs directions et par différentes manières. Des nouvelles inégalités ont été établies, des généralisations, des raffinements, extensions ainsi que des variantes sur plusieurs axes unidimensionnels, multidimensionnels, fractionnaires et discrets.

L'objectif de ce travail est de faire une petite synthèse concernant les inégalités intégrales de type Newton-Cotes faisant intervenir trois points et d'établir de nouvelles généralisations de ce type d'inégalités intégrales.

Ce mémoire est structuré comme suit :

Dans le premier chapitre nous rappelons quelques classes de fonctions ainsi que quelques identités et inégalités intégrales utiles pour notre étude.

Dans le second chapitre nous citerons certains résultats concernant les inégalités intégrales de type Newton-Cotes à un, deux et trois points connus dans la littérature.

Tandis que le dernier chapitre sera entièrement consacré aux nouvelles inégalités fractionnaires de type Newton-Cotes dans le cadre général dont ces nouveaux résultats sont soumis pour une éventuelle publication.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques type de convexité ainsi que quelques identités de fonctions, concernant la convexité on peut consulter [12].

1.1 Convexité classique

Dans tout ce qui va suivre nous désignons par $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

Définition 1.1 ([12]) *Un ensemble $I \subseteq \mathbb{R}$ est dit convexe si pour tout $x, y \in I$ et pour tout $t \in [0, 1]$, nous avons*

$$tx + (1-t)\,y \in I.$$

Définition 1.2 ([12]) *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe, si*

$$f\,(tx + (1-t)\,y) \le tf\,(x) + (1-t)\,f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0, 1]$.

Définition 1.3 ([2]) *Une fonction positive $f : I \subset [0, \infty[\to \mathbb{R}$ est dite s-convexe au second sens pour un certain nombre fixé $s \in]0, 1]$, si pour tout $x, y \in I$ et $t \in [0, 1]$, on a*

$$f(tx + (1-t)y) \le t^s f(x) + (1-t)^s f(y).$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$.

1.2 Quelques fonctions spéciales

1.2.1 Fonction gamma

Définition 1.4 **([5])** *Pour tout nombre complexe z tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$, on définit la fonction suivante, appelée fonction gamma comme suit*

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Remarque 1.1 *Pour $z \in \mathbb{N}$, on a $\Gamma(z+1) = (z)! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (z)$.*

1.2.2 Fonction bêta

Définition 1.5 **([5])** *Pour tout $x, y \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{Z}_-\}$ tels que $\mathrm{Re}\,(x) > 0$ et $\mathrm{Re}\,(y) > 0$. La fonction bêta est définie par*

$$B\,(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt = \tfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

où $\Gamma(.)$ est la fonction gamma d'Euler .

1.2.3 Fonction bêta incomplète

Définition 1.6 **([5])** *Pour tout $x, y \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{Z}_-\}$ tels que $\mathrm{Re}\,(x) > 0$ et $\mathrm{Re}\,(y) > 0$. La fonction bêta incomplète est définie par :*

$$B_a\,(x,y) = \int\limits_0^a t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt,$$

avec $a < 1$.

1.2.4 Fonction hypergéométrique de Gauss

Définition 1.7 ([5]) *La fonction hypergéométrique est définie pour* a, b, c *des nombres complexes et* $\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0$ *et* $|z| < 1$, *comme suit :*

$$ {}_2F_1(a, b, c; z) = \tfrac{1}{B(b, c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a}\, dt, $$

avec $B(.,.)$ *est la fonction bêta .*

1.3 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.8 ([5]) *Soit* $f \in L^1[a, b]$. *Les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville* $I_{a^+}^{\alpha} f$ *et* $I_{b^-}^{\alpha} f$ *d'ordre* $\alpha > 0$ *avec* $a \geq 0$ *sont définies par :*

$$ \begin{aligned} I_{a^+}^{\alpha} f(x) &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \qquad x > a, \\ I_{b^-}^{\alpha} f(x) &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \qquad b > x, \end{aligned} $$

respectivement, où $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ *la fonction gamma d'Euler .*

1.4 Quelques inégalités et identités intégrales importantes

Inégalité de Hölder et inégalité des moyennes d'ordre q

Théorème 1.1 ([8]) *Soit $p > 0$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si f et g sont deux fonctions réelles définies sur $[a, b]$ et si $|f|^p$ et $|g|^q$ sont des fonctions intégrables sur $[a, b]$, alors*

$$\int_a^b |f(x) g(x)| \, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

La version intégrale de l'inégalité des moyennes d'ordre q qui représente une variante de l'inégalité de Hölder est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.2 ([3]) *Soit $q \geq 1$. Si $|f|$ et $|g|^q$ sont intégrables sur $[a, b]$, alors*

$$\int_a^b |f(x) g(x)| \, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| \, dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)| \, |g(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Quelques identités intégrales

Lemme 1.1 ([6]) *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction absolument continue sur I° telle que $f' \in L^1[a, b]$, où $a, b \in I^\circ$ et $a < b$, alors l'égalité suivante est satisfaite :*

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \\ = \; & (b-a) \left(\int_0^{\frac{1}{2}} t f'(ta + (1-t) b) \, dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1) f'(ta + (1-t) b) \, dt \right). \end{aligned}$$

Lemme 1.2 ([4]) *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction absolument continue sur I° telle que $f' \in L^1[a, b]$, où $a, b \in I^\circ$ et $a < b$, alors l'égalité suivante est satisfaite :*

$$\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx = \tfrac{b-a}{2} \int_0^1 (1-2t) f'(ta + (1-t) b) \, dt.$$

Lemme 1.3 ([1]) *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction absolument continue sur I° telle que $f' \in L^1[a,b]$, où $a,b \in I^{\circ}$ et $a < b$, alors l'égalité suivante est satisfaite :*

$$\tfrac{f(x)+f(a+b-x)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \tfrac{1}{b-a}\int_a^b K(x,t)\,f'(t)\,dt,$$

où

$$K(x,t) = \begin{cases} t-a \ \ si\ t \in [a,x] \\ t-\frac{a+b}{2} \ \ si\ t \in\,]x, a+b-x] \\ t-b \ \ si\ t \in\,]a+b-x, b]\,. \end{cases}$$

Lemme 1.4 ([13]) *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction absolument continue sur I° telle que $f' \in L^1[a,b]$, où $a,b \in I^{\circ}$ et $a < b$, alors l'égalité suivante est satisfaite :*

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{6}\left(f(a) + 4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\ = \ & \tfrac{b-a}{2}\int_0^1 \left[\left(\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3}\right) f'\left(\tfrac{1+t}{2}b + \tfrac{1-t}{2}a\right) + \left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t}{2}\right) f'\left(\tfrac{1+t}{2}a + \tfrac{1-t}{2}b\right)\right] dt. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Lemme 1.5 ([15]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur $[a,b]$ avec $a < b$. Si $f' \in L^1[a,b]$, alors pour tout $\alpha > 0$ l'égalité suivante pour les intégrales fractionnaires est vraie :*

$$\begin{aligned} & \tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left(I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+} f(b) + I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-} f(a)\right) - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \\ = \ & \tfrac{b-a}{4}\left(\int_0^1 t^{\alpha} f'\left(\tfrac{t}{2}a + \tfrac{2-t}{2}b\right) dt - \int_0^1 t^{\alpha} f'\left(\tfrac{2-t}{2}a + \tfrac{t}{2}b\right) dt\right). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Lemme 1.6 ([14]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur $[a,b]$ avec $a < b$. Si $f' \in L^1[a,b]$, alors pour tout $\alpha > 0$ l'égalité suivante pour les intégrales fractionnaires est vraie :*

$$\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left(I^{\alpha}_{a^+} f(b) + I^{\alpha}_{b^-} f(a)\right) = \tfrac{b-a}{2}\int_0^1 \left((1-t)^{\alpha} - t^{\alpha}\right) f'\left(1a + (1-t)\,b\right) dt.$$

Chapitre 2

Quelques inégalités intégrales de type Newton-Cotes

Dans ce chapitre nous citerons quelques inégalités intégrales de type Newton-Cotes faisant intervenir au plus trois points.

2.1 Inégalités intégrales de type Newton-Cotes classiques

2.1.1 Inégalités intégrales de type point milieu

Dans [6], on s'appuyant sur le Lemme 1.1, Kirmaci discuta les inégalités de point milieu suivantes :

Théorème 2.1 *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur I°, telle que $f' \in L^1[a,b]$, où $a, b \in I^\circ$ et $a < b$. Si $|f'|$ est convexe sur $[a,b]$, alors*

$$\left| \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \right| \leq \tfrac{b-a}{8} \left(|f'(a)| + |f'(b)| \right).$$

Théorème 2.2 *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur I°, telle que $f' \in L^1[a,b]$, où $a, b \in I^{\circ}$ et $a < b$. Si $|f'|^{p/(p-1)}$ est convexe sur $[a,b]$ où $p > 1$, alors*

$$\begin{aligned} &\left| \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \right| \\ \leq\ & \tfrac{b-a}{16} \left(\tfrac{4}{p+1}\right)^{1/p} \Bigg(\left(|f'(a)|^{p/(p-1)} + 3|f'(b)|^{p/(p-1)} \right)^{(p-1)/p} \\ &+ \left(3|f'(a)|^{p/(p-1)} + |f'(b)|^{p/(p-1)} \right)^{(p-1)/p} \Bigg). \end{aligned}$$

Théorème 2.3 *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur I°, telle que $f' \in L^1[a,b]$, où $a, b \in I^{\circ}$ et $a < b$. Si $|f'|^{p/(p-1)}$ est convexe sur $[a,b]$ où $p > 1$, alors*

$$\left| \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \right| \leq \tfrac{b-a}{16} \left(\tfrac{4}{p+1}\right)^{1/p} \left(|f'(a)| + |f'(b)| \right).$$

2.1.2 Inégalités intégrales de type trapèzes

A partir du Lemme 1.2, Dragomir et Agarwal [4], ont établi les inégalités des trapèzes suivantes :

Théorème 2.4 *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur I°, telle que $f' \in L^1[a,b]$, où $a, b \in I^{\circ}$ et $a < b$. Si $|f'|$ est convexe sur $[a,b]$, alors*

$$\left| \tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \tfrac{(b-a)(|f'(a)|+|f'(b)|)}{8} \tag{2.1}$$

Théorème 2.5 *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur I°, telle que $f' \in L^1[a,b]$, où $a, b \in I^{\circ}$ et $a < b$. Si $|f'|^{p/(p-1)}$ est convexe sur $[a,b]$ où $p \geq 1$, alors*

$$\left| \tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \tfrac{b-a}{2(p+1)^{1/p}} \left(\tfrac{|f'(a)|^{p/(p-1)}+|f'(b)|^{p/(p-1)}}{2} \right)^{(p-1)/p}. \tag{2.2}$$

Pearce et Pečarić [11], on établi une variante du Théorème 2.5

Théorème 2.6 *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur I°, telle que $f' \in L^{1}[a,b]$, où $a, b \in I^{\circ}$ et $a < b$. Si $|f'|^{q}$ est convexe sur $[a,b]$ où $q \geq 1$, alors*

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} f(x)\, dx \right| \leq \frac{b-a}{4} \left(\frac{|f'(a)|^{q} + |f'(b)|^{q}}{2} \right)^{1/q}. \tag{2.3}$$

2.1.3 Inégalités de type trapèzes ouvert dite compagnon d'Ostrowski

Alomari et al. [1], ont étudie les inégalités suivantes

Théorème 2.7 *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application absolument continue sur I°, telle que $f' \in L^{1}[a,b]$, où $a, b \in I^{\circ}$ et $a < b$. Si $|f'|$ est convexe sur $[a,b]$, alors pour tout $x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ on a l'inégalité suivante :*

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x)+f(a+b-x)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} f(t)\, dt \right| \\ \leq\ & \frac{(x-a)^{2}}{6(b-a)} \left(|f'(a)| + |f'(b)| \right) + \frac{8(x-a)^{2} + 3(a+b-2x)^{2}}{24(b-a)} \left(|f'(x)| + |f'(a+b-x)| \right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Théorème 2.8 *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application absolument continue sur I°, telle que $f' \in L^{1}[a,b]$, où $a, b \in I^{\circ}$ et $a < b$. Si $|f'|^{q}$ est convexe sur $[a,b]$, alors pour tout $x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ et $q > 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ l'inégalité suivante est satisfaite :*

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x)+f(a+b-x)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} f(t)\, dt \right| \\ \leq\ & \frac{1}{2^{1/q}(b-a)(p+1)^{1/p}} \Big((x-a)^{2} \left(|f'(a)|^{q} + |f'(x)|^{q} \right)^{1/q} \\ & + \frac{(a+b-2x)^{2}}{2} \left(|f'(x)|^{q} + |f'(a+b-x)|^{q} \right)^{1/q} \\ & + (x-a)^{2} \left(|f'(a+b-x)|^{q} + |f'(b)|^{q} \right)^{1/q} \Big). \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.1.4 Inégalités intégrales de type Simpson

Sarikaya et al. [13], ont prouvé les inégalités de type Simpson suivantes pour les fonctions dont les dérivées premières sont convexes.

Théorème 2.9 *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur I°, telle que $f' \in L^1[a,b]$ où $a, b \in I^{\circ}$ et $a < b$, telle que $f' \in L^1[a,b]$. Si $|f'|$ est convexe sur $[a,b]$, alors l'inégalité suivante est vraie :*

$$\left|\frac{1}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{5(b-a)}{72}\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right). \tag{2.6}$$

Théorème 2.10 *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur I°, telle que $f' \in L^1[a,b]$, où $a, b \in I^{\circ}$ et $a < b$. Si $|f'|^q$ est convexe sur $[a,b]$ où $q > 1$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, alors l'inégalité suivante est vraie :*

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \qquad (2.7)\\ \leq\ & \frac{b-a}{12}\left(\frac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{3|f'(b)|^q+|f'(a)|^q}{4}\right)^{1/q}+\left(\frac{|f'(b)|^q+3|f'(a)|^q}{4}\right)^{1/q}\right). \end{aligned}$$

Théorème 2.11 *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur I°, telle que $f' \in L^1[a,b]$ où $a, b \in I^{\circ}$ et $a < b$. Si $|f'|^q$ est convexe sur $[a,b]$ où $q > 1$, alors l'inégalité suivante est vraie :*

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \qquad (2.8)\\ \leq\ & \frac{5(b-a)}{72}\left(\left(\frac{61|f'(b)|^q+29|f'(a)|^q}{90}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{61|f'(a)|^q+29|f'(b)|^q}{90}\right)^{\frac{1}{q}}\right). \end{aligned}$$

2.2 Inégalités intégrales de type Newton-Cotes fractionnaires

Dans cette section nous allons voir certaines inégalités intégrales faisant intervenir l'opérateur intégral de Riemann-Liouville.

2.2.1 Inégalités intégrales fractionnaires de type point milieu

Dans [15], Sarikaya et al. ont démontré les inégalités intégrales fractionnaires de type point milieu suivantes :

Théorème 2.12 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur $[a,b]$ avec $a < b$, telle que $f' \in L^1[a,b]$. Si $|f'|^q$ est convexe sur $[a,b]$ où $q \geq 1$, alors l'inégalité fractionnaire suivante est valable :*

$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}f(b)+I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}f(a)\right]-f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| \\ \leq\ & \tfrac{b-a}{4(\alpha+1)}\left(\tfrac{1}{2(\alpha+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\left((\alpha+1)\left|f'(a)\right|^q+(\alpha+3)\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\ &\left.+\left((\alpha+3)\left|f'(a)\right|^q+(\alpha+1)\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Théorème 2.13 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur $[a,b]$ avec $a < b$, telle que $f' \in L^1[a,b]$. Si $|f'|^q$ est convexe sur $[a,b]$ où $q > 1$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, alors l'inégalité fractionnaire suivante est valable :*

$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}f(b)+I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}f(a)\right]-f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| \\ \leq\ & \tfrac{b-a}{4}\left(\tfrac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\tfrac{|f'(a)|^q+3|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{3|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\ \leq\ & \tfrac{b-a}{4}\left(\tfrac{4}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right). \end{aligned}$$

2.2.2 Inégalités intégrales fractionnaires de type trapèzes

Dans [14], Sarikaya et al. ont établi l'inégalité intégrale fractionnaire de type trapèze suivante :

Théorème 2.14 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur $[a,b]$ avec $a < b$, telle que $f' \in L^1 [a,b]$. Si $|f'|$ est convexe sur $[a,b]$. Alors l'inégalité fractionnaire suivante est valable :*

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}} \left[I_{a^+}^{\alpha} f(b) + I_{b^-}^{\alpha} f(a) \right] \right| \leq \frac{b-a}{2(\alpha+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha}}\right) \left(|f'(a)| + |f'(b)| \right).$$

Chapitre 3

Inégalités intégrales de type Newton-Cotes à trois points

Nous notons que ces résultats sont nouveaux et sont soumis pour une éventuelle publication. les résultats suivant reposent essentiellement sur le lemme suivant :

Lemme 3.1 *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I°, telle que $f' \in L^1[a,b]$, où $a,\ b \in I^{\circ}$ et $a < b$. Pour tout nombre réel $\lambda \in [0,1]$ et $x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ l'égalité suivante est satisfaite :*

$$
\begin{aligned}
&F^{\alpha}_{(a,x,b;\lambda)} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left(I^{\alpha}_{x^-}f(a) + I^{\alpha}_{x^+}f(\tfrac{a+b}{2}) + I^{\alpha}_{(a+b-x)^-}f(\tfrac{a+b}{2}) + I^{\alpha}_{(a+b-x)^+}f(b)\right)\\
= \;& \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 t^{\alpha} f'\left((1-t)\,a + tx\right) dt\\
&-\tfrac{(a+b-2x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(b-a)}\int_0^1 \left((1-t)^{\alpha} - (1-\lambda)\right) f'\left((1-t)\,x + t\tfrac{a+b}{2}\right) dt\\
&+\tfrac{(a+b-2x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(b-a)}\int_0^1 \left(t^{\alpha} - (1-\lambda)\right) f'\left((1-t)\,\tfrac{a+b}{2} + t\,(a+b-x)\right) dt\\
&-\tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 (1-t)^{\alpha} f'\left((1-t)\,(a+b-x) + tb\right) dt,
\end{aligned}
$$

où

$$\begin{aligned} F^{\alpha}_{(a,x,b;\lambda)} &= \tfrac{\lambda(a+b-2x)^{\alpha}+2^{\alpha}(x-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}(b-a)} f(x) + \tfrac{(1-\lambda)(a+b-2x)^{\alpha}}{2^{\alpha-1}(b-a)} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \\ &\quad + \tfrac{\lambda(a+b-2x)^{\alpha}+2^{\alpha}(x-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}(b-a)} f(a+b-x). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Preuve. Soit

$$I = \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} I_1 - \tfrac{(a+b-2x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(b-a)} I_2 + \tfrac{(a+b-2x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(b-a)} I_3 - \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} I_4, \tag{3.2}$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 t^{\alpha} f'((1-t)a + tx)\,dt, \\ I_2 &= \int_0^1 \left((1-t)^{\alpha} - (1-\lambda)\right) f'\left((1-t)x + t\tfrac{a+b}{2}\right) dt, \\ I_3 &= \int_0^1 \left(t^{\alpha} - (1-\lambda)\right) f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2} + t(a+b-x)\right) dt, \\ I_4 &= \int_0^1 (1-t)^{\alpha} f'((1-t)(a+b-x) + tb)\,dt. \end{aligned}$$

En intégrant par parties I_1, on a

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 t^{\alpha} f'((1-t)a + tx)\,dt \qquad (3.3) \\ &= \tfrac{1}{x-a} t^{\alpha} f((1-t)a + tx)\Big|_0^1 - \tfrac{\alpha}{x-a} \int_0^1 t^{\alpha-1} f((1-t)a + tx)\,dt \\ &= \tfrac{1}{x-a} f(x) - \tfrac{\alpha}{(x-a)^{\alpha+1}} \int_a^x (u-a)^{\alpha-1} f(u)\,du \\ &= \tfrac{1}{x-a} f(x) - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(x-a)^{\alpha+1}} I^{\alpha}_{x^-} f(a). \end{aligned}$$

D'une façon similaire, on obtient

$$I_2 = -\tfrac{2(1-\lambda)}{a+b-2x} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{2\lambda}{a+b-2x} f(x) + \tfrac{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{(a+b-2x)^{\alpha+1}} I_{x^+}^{\alpha} f(\tfrac{a+b}{2}), \tag{3.4}$$

$$I_3 = \tfrac{2\lambda}{a+b-2x} f(a+b-x) + \tfrac{2(1-\lambda)}{a+b-2x} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{(a+b-2x)^{\alpha+1}} I_{(a+b-x)^-}^{\alpha} f(\tfrac{a+b}{2}) \tag{3.5}$$

et

$$I_4 = -\tfrac{1}{x-a} f(a+b-x) + \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(x-a)^{\alpha+1}} I_{(a+b-x)^+}^{\alpha} f(b). \tag{3.6}$$

En substituant (3.3)-(3.6) dans (3.2) nous obtenons le résultat souhaité. ■

Théorème 3.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ telle que $f' \in L^1[a,b]$ avec $0 \leq a < b$. si $|f'|$ est s-convexe au second sens pour des certains nombres $s \in]0,1]$ et $\lambda \in [0,1]$ fixés, alors nous avons*

$$\begin{aligned}
&\left| F_{(a,x,b;\lambda)}^{\alpha} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left(I_{x^-}^{\alpha} f(a) + I_{x^+}^{\alpha} f(\tfrac{a+b}{2}) + I_{(a+b-x)^-}^{\alpha} f(\tfrac{a+b}{2}) + I_{(a+b-x)^+}^{\alpha} f(b)\right)\right| \\
\leq\ & \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left(B(s+1,\alpha+1)\left(|f'(a)| + |f'(b)|\right) + \tfrac{1}{\alpha+s+1}\left(|f'(x)| + |f'(a+b-x)|\right)\right) \\
&+ \tfrac{2(a+b-2x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+s}(b-a)(s+1)}\left(\tfrac{(\alpha+s+1)\lambda + 2\alpha(1-\lambda)^{1+\frac{s+1}{\alpha}} - \alpha}{2^{2-s}(\alpha+s+1)} + \tfrac{(1-\lambda)\left(1-2\left(1-(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{s+1}\right)}{s+1}\right. \\
&\left. + B_{1-(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}(s+1,\alpha+1) - B_{(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}(\alpha+1,s+1)\right)\left(|f'(x)| + |f'(a+b-x)|\right),
\end{aligned}$$

où $B(.,.)$ et $B_u(.,.)$ sont respectivement la fonction bêta et la fonction bêta incomplète.

Preuve. En utilisant le Lemme 3.1, les propriétés du module et la s-convexité au second sens de $|f'|$, on a

$$\begin{aligned}
&\left| F_{(a,x,b;\lambda)}^{\alpha} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left(I_{x^-}^{\alpha} f(a) + I_{x^+}^{\alpha} f(\tfrac{a+b}{2}) + I_{(a+b-x)^-}^{\alpha} f(\tfrac{a+b}{2}) + I_{(a+b-x)^+}^{\alpha} f(b)\right)\right| \\
\leq\ & \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 t^{\alpha}\left|f'((1-t)a+tx)\right| dt \\
&+ \tfrac{(a+b-2x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(b-a)}\int_0^1 \left|(1-t)^{\alpha} - (1-\lambda)\right|\left|f'\left((1-t)x + t\tfrac{a+b}{2}\right)\right| dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\tfrac{(a+b-2x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(b-a)}\int\limits_0^1 \left|t^{\alpha}-(1-\lambda)\right|\left|f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+t\left(a+b-x\right)\right)\right|dt \\
& +\tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\int\limits_0^1 (1-t)^{\alpha}\left|f'\left((1-t)\left(a+b-x\right)+tb\right)\right|dt \\
= \; & \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\int\limits_0^1 t^{\alpha}\left|f'\left((1-t)a+tx\right)\right|dt \\
& +\tfrac{(a+b-2x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(b-a)}\int\limits_0^{1-(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}} \left((1-t)^{\alpha}-(1-\lambda)\right)\left|f'\left((1-t)x+t\tfrac{a+b}{2}\right)\right|dt \\
& +\tfrac{(a+b-2x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(b-a)}\int\limits_{1-(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}^{1} \left((1-\lambda)-(1-t)^{\alpha}\right)\left|f'\left((1-t)x+t\tfrac{a+b}{2}\right)\right|dt \\
& +\tfrac{(a+b-2x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(b-a)}\int\limits_0^{(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}} \left((1-\lambda)-t^{\alpha}\right)\left|f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+t\left(a+b-x\right)\right)\right|dt \\
& +\tfrac{(a+b-2x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(b-a)}\int\limits_{(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}^{1} \left(t^{\alpha}-(1-\lambda)\right)\left|f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+t\left(a+b-x\right)\right)\right|dt \\
& +\tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\int\limits_0^1 (1-t)^{\alpha}\left|f'\left((1-t)\left(a+b-x\right)+tb\right)\right|dt \\
\leq \; & \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\int\limits_0^1 t^{\alpha}\left((1-t)^{s}\left|f'(a)\right|+t^{s}\left|f'(x)\right|\right)dt \\
& +\tfrac{(a+b-2x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(b-a)}\int\limits_0^{1-(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}} \left((1-t)^{\alpha}-(1-\lambda)\right)\left((1-t)^{s}\left|f'(x)\right|+t^{s}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right)dt \\
& +\tfrac{(a+b-2x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(b-a)}\int\limits_{1-(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}^{1} \left((1-\lambda)-(1-t)^{\alpha}\right)\left((1-t)^{s}\left|f'(x)\right|+t^{s}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right)dt \\
& +\tfrac{(a+b-2x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(b-a)}\int\limits_0^{(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}} \left((1-\lambda)-t^{\alpha}\right)\left((1-t)^{s}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|+t^{s}\left|f'\left(a+b-x\right)\right|\right)dt
\end{aligned}
$$

$$+\frac{(a+b-2x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(b-a)}\int\limits_{(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}^{1}\left(t^{\alpha}-(1-\lambda)\right)\left((1-t)^{s}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|+t^{s}\left|f'(a+b-x)\right|\right)dt$$

$$+\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\int\limits_{0}^{1}(1-t)^{\alpha}\left((1-t)^{s}\left|f'(a+b-x)\right|+t^{s}\left|f'(b)\right|\right)dt$$

$$=\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left(B(s+1,\alpha+1)\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right)+\tfrac{1}{\alpha+s+1}\left(|f'(x)|+|f'(a+b-x)|\right)\right)$$
$$+\frac{(a+b-2x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(b-a)}\left(\frac{(\alpha+s+1)\lambda+2\alpha(1-\lambda)^{1+\frac{s+1}{\alpha}}-\alpha}{(s+1)(\alpha+s+1)}\left(|f'(x)|+|f'(a+b-x)|\right)\right.$$
$$+2\left(B_{1-(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}(s+1,\alpha+1)-B_{(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}(\alpha+1,s+1)\right.$$
$$\left.\left.+\frac{(1-\lambda)\left(1-2\left(1-(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{s+1}\right)}{s+1}\right)\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right),\tag{3.7}$$

où nous avons utilisé les faits que

$$\int\limits_{0}^{1}t^{\alpha}(1-t)^{s}\,dt=\int\limits_{0}^{1}(1-t)^{\alpha}t^{s}dt=B(s+1,\alpha+1),\tag{3.8}$$

$$\int\limits_{0}^{1}t^{\alpha+s}dt=\int\limits_{0}^{1}(1-t)^{\alpha+s}\,dt=\tfrac{1}{\alpha+s+1},\tag{3.9}$$

$$\int\limits_{0}^{1-(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}\left((1-t)^{\alpha}-(1-\lambda)\right)(1-t)^{s}\,dt=\int\limits_{(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}^{1}\left(t^{\alpha}-(1-\lambda)\right)t^{s}dt$$
$$=\frac{(\alpha+s+1)\lambda+\alpha(1-\lambda)^{1+\frac{s+1}{\alpha}}-\alpha}{(s+1)(\alpha+s+1)},\tag{3.10}$$

$$\int\limits_{0}^{1-(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}\left((1-t)^{\alpha}-(1-\lambda)\right)t^{s}dt=\int\limits_{(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}^{1}\left(t^{\alpha}-(1-\lambda)\right)(1-t)^{s}\,dt$$
$$=B_{1-(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}(s+1,\alpha+1)-\frac{(1-\lambda)\left(1-(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{s+1}}{s+1},\tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{1-(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}^{1} \left((1-\lambda)-(1-t)^{\alpha}\right)(1-t)^{s}\,dt = \int_{0}^{(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}} \left((1-\lambda)-t^{\alpha}\right)t^{s}dt \\
= \;& \tfrac{\alpha}{(s+1)(\alpha+s+1)}\,(1-\lambda)^{1+\frac{s+1}{\alpha}} \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_{1-(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}^{1} \left((1-\lambda)-(1-t)^{\alpha}\right)t^{s}dt = \int_{0}^{(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}} \left((1-\lambda)-t^{\alpha}\right)(1-t)^{s}\,dt \\
= \;& \frac{(1-\lambda)\left(1-\left(1-(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{s+1}\right)}{s+1} - B_{(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}\,(\alpha+1,s+1)\,. \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

D'après (3.7) et la s-convexité de $|f'|$ i.e. $\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{2^{1-s}}{s+1}\left(|f'(x)|+|f'(a+b-x)|\right)$, on aura

$$\begin{aligned}
&\left|F^{\alpha}_{(a,x,b;\lambda)} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left(I^{\alpha}_{x^-}f(a) + I^{\alpha}_{x^+}f(\tfrac{a+b}{2}) + I^{\alpha}_{(a+b-x)^-}f(\tfrac{a+b}{2}) + I^{\alpha}_{(a+b-x)^+}f(b)\right)\right| \\
\leq \;& \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left(B(s+1,\alpha+1)\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right) + \tfrac{1}{\alpha+s+1}\left(|f'(x)|+|f'(a+b-x)|\right)\right) \\
&+\tfrac{2(a+b-2x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+s}(b-a)(s+1)}\left(\frac{(\alpha+s+1)\lambda+2\alpha(1-\lambda)^{1+\frac{s+1}{\alpha}}-\alpha}{2^{2-s}(\alpha+s+1)} + \frac{(1-\lambda)\left(1-2\left(1-(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{s+1}\right)}{s+1}\right. \\
&\left.+\,B_{1-(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}(s+1,\alpha+1) - B_{(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}(\alpha+1,s+1)\right)\left(|f'(x)|+|f'(a+b-x)|\right),
\end{aligned}$$

qui est le résultat recherché. La preuve est ainsi achevée. ■

Corollaire 3.1 *Dans le Théorème 3.1, si on prend $s=1$, on obtient*

$$\begin{aligned}
&\left|F^{\alpha}_{(a,x,b;\lambda)} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left(I^{\alpha}_{x^-}f(a) + I^{\alpha}_{x^+}f(\tfrac{a+b}{2}) + I^{\alpha}_{(a+b-x)^-}f(\tfrac{a+b}{2}) + I^{\alpha}_{(a+b-x)^+}f(b)\right)\right| \\
\leq \;& \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(\alpha+2)(b-a)}\left(|f'(a)|+(\alpha+1)|f'(x)|+(\alpha+1)|f'(a+b-x)|+|f'(b)|\right) \\
&+\tfrac{(a+b-2x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(b-a)}\left(\lambda-\tfrac{\alpha}{\alpha+1}+\tfrac{2\alpha}{\alpha+1}(1-\lambda)^{1+\frac{1}{\alpha}}\right)\left(|f'(x)|+|f'(a+b-x)|\right).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.2 *Dans le Théorème 3.1, si on prend $\alpha = 1$, on obtient*

$$\left| \frac{(\lambda(a+b-2x)+2(x-a))f(x)+2(1-\lambda)(a+b-2x)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+(\lambda(a+b-2x)+2(x-a))f(a+b-x)}{2(b-a)} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \right|$$
$$\leq \frac{(x-a)^2}{(s+1)(s+2)(b-a)} \left(|f'(a)| + (s+1)|f'(x)| + (s+1)|f'(a+b-x)| + |f'(b)|\right)$$
$$+\frac{(a+b-2x)^2}{2^s(b-a)(s+1)} \left(\frac{2^{s-2}(s+2)\lambda+2^{s-1}(1-\lambda)^{s+2}-2\lambda^{s+2}-2^{s-2}}{s+2} + \frac{(s+1)-(s+2)\lambda+2(s+2)\lambda^{s+2}}{(s+1)(s+2)}\right)$$
$$\times \left(|f'(x)| + |f'(a+b-x)|\right).$$

Corollaire 3.3 *Dans le Théorème 3.1, si on prend $\alpha = s = 1$, on obtient*

$$\left| \frac{(\lambda(a+b-2x)+2(x-a))f(x)+2(1-\lambda)(a+b-2x)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+(\lambda(a+b-2x)+2(x-a))f(a+b-x)}{2(b-a)} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \right|$$
$$\leq \frac{(x-a)^2}{6(b-a)} \left(|f'(a)| + 2|f'(x)| + 2|f'(a+b-x)| + |f'(b)|\right)$$
$$+\frac{\left(1-2\lambda+2\lambda^2\right)(a+b-2x)^2}{8(b-a)} \left(|f'(x)| + |f'(a+b-x)|\right).$$

Remarque 3.1 *Pour $\lambda = 1$, le Corollaire 3.3 sera réduit au Théorème 5 de* [1].

Corollaire 3.4 *Dans le Corollaire 3.3, si on choisit $x = a$ on obtient*

$$\left| \frac{\lambda f(a)+\lambda f(b)}{2} + (1-\lambda) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \right| \leq \frac{\left(1-2\lambda+2\lambda^2\right)(b-a)}{8} \left(|f'(a)| + |f'(b)|\right).$$

Remarque 3.2 *Dans le Corollaire 3.4, si l'on prend*

1/ $\lambda = 0$, on récapture le Théorème 2.2 de [6].

2/ $\lambda = \frac{1}{3}$, on retrouve le Théorème 5 de [13].

3/ $\lambda = 1$, on obtient le Théorème 2.2 de [4].

Théorème 3.2 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ telle que $f' \in L^1[a,b]$ avec $0 \leq a < b$. si $|f'|^q$ est s-convexe au second sens pour des certains nombres*

$s \in]0,1]$ *et* $\lambda \in [0,1]$ *fixés, et* $q > 1$ *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Alors nous avons*

$$\begin{aligned}
& \left| F^{\alpha}_{(a,x,b;\lambda)} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a} \left(I^{\alpha}_{x^-} f(a) + I^{\alpha}_{x^+} f(\tfrac{a+b}{2}) + I^{\alpha}_{(a+b-x)^-} f(\tfrac{a+b}{2}) + I^{\alpha}_{(a+b-x)^+} f(b) \right) \right| \\
\leq \ & \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \left(\tfrac{1}{\alpha p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\left(\tfrac{|f'(a)|^q + |f'(x)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\tfrac{|f'(a+b-x)|^q + |f'(b)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
& + \tfrac{(a+b-2x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(b-a)} \left(\tfrac{(1-\lambda)^{p+\frac{1}{\alpha}}}{\alpha} B\left(\tfrac{1}{\alpha}, p+1 \right) + \tfrac{\lambda^{p+1}}{\alpha(p+1)} . {}_2F_1 \left(1 - \tfrac{1}{\alpha}, 1, p+2, \lambda \right) \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\left(\tfrac{|f'(x)|^q + \left| f'\left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\tfrac{\left| f'\left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q + |f'(a+b-x)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \right),
\end{aligned}$$

où $B(.,.)$ *et* ${}_2F_1(.,.,.,.)$ *représentent respectivement la fonction bêta et la fonction hypergéométrique.*

Preuve. D'après le Lemme 3.1, les propriétés du module, l'inégalité de Hölder et la s-convexité au second sens de $|f'|^q$, nous avons

$$\begin{aligned}
& \left| F^{\alpha}_{(a,x,b;\lambda)} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a} \left(I^{\alpha}_{x^-} f(a) + I^{\alpha}_{x^+} f(\tfrac{a+b}{2}) + I^{\alpha}_{(a+b-x)^-} f(\tfrac{a+b}{2}) + I^{\alpha}_{(a+b-x)^+} f(b) \right) \right| \\
\leq \ & \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \left(\int_0^1 t^{\alpha p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'((1-t)a + tx)|^q \, dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \tfrac{(a+b-2x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(b-a)} \left(\int_0^1 |(1-t)^{\alpha} - (1-\lambda)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f'\left((1-t)x + t\tfrac{a+b}{2} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \tfrac{(a+b-2x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(b-a)} \left(\int_0^1 |t^{\alpha} - (1-\lambda)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2} + t(a+b-x) \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \left(\int_0^1 (1-t)^{\alpha p} \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'((1-t)(a+b-x) + tb)|^q \, dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq \ & \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \left(\int_0^1 t^{\alpha p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left((1-t)^s |f'(a)|^q + t^s |f'(x)|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \tfrac{(a+b-2x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(b-a)} \left(\int_0^{1-(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}} ((1-t)^{\alpha} - (1-\lambda))^p \, dt + \int_{1-(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}^1 ((1-\lambda) - (1-t)^{\alpha})^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\int_0^1 \left((1-t)^s |f'(x)|^q + t^s \left| f'\left(\tfrac{a+b}{2} \right) \right|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\tfrac{(a+b-2x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(b-a)}\left(\int\limits_0^{(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}((1-\lambda)-t^{\alpha})^p\,dt+\int\limits_{(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}^{1}(t^{\alpha}-(1-\lambda))^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times\left(\int\limits_0^1\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q+t^s\left|f'(a+b-x)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int\limits_0^1(1-t)^{\alpha p}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_0^1\left((1-t)^s\left|f'(a+b-x)\right|^q+t^s\left|f'(b)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
= \;& \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\tfrac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\tfrac{|f'(a)|^q+|f'(x)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{|f'(a+b-x)|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
& +\tfrac{(a+b-2x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(b-a)}\left(\int\limits_0^{(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}((1-\lambda)-t^{\alpha})^p\,dt+\int\limits_{(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}^{1}(t^{\alpha}-(1-\lambda))^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times\left(\left(\tfrac{|f'(x)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(a+b-x)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
= \;& \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\tfrac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\tfrac{|f'(a)|^q+|f'(x)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{|f'(a+b-x)|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
& +\tfrac{(a+b-2x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(b-a)}\left(\tfrac{(1-\lambda)^{p+\frac{1}{\alpha}}}{\alpha}B\left(\tfrac{1}{\alpha},p+1\right)+\tfrac{\lambda^{p+1}}{\alpha(p+1)}\cdot{}_2F_1\left(1-\tfrac{1}{\alpha},1,p+2,\lambda\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times\left(\left(\tfrac{|f'(x)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(a+b-x)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right),
\end{aligned}
$$

nous avons

$$
\begin{aligned}
& \int\limits_0^{(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}((1-\lambda)-t^{\alpha})^p\,dt+\int\limits_{(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}^{1}(t^{\alpha}-(1-\lambda))^p\,dt \\
= \;& \tfrac{1}{\alpha}\int\limits_0^{1-\lambda}((1-\lambda)-u)^p\,u^{\frac{1}{\alpha}-1}du+\tfrac{1}{\alpha}\int\limits_{1-\lambda}^{1}(u-(1-\lambda))^p\,u^{\frac{1}{\alpha}-1}du \\
= \;& \tfrac{(1-\lambda)^{p+\frac{1}{\alpha}}}{\alpha}\int\limits_0^1 x^{\frac{1}{\alpha}-1}(1-x)^p\,dx+\tfrac{1}{\alpha}\int\limits_0^{\lambda}(\lambda-y)^p(1-y)^{\frac{1}{\alpha}-1}\,dy \\
= \;& \tfrac{(1-\lambda)^{p+\frac{1}{\alpha}}}{\alpha}\int\limits_0^1 x^{\frac{1}{\alpha}-1}(1-x)^p\,dx+\tfrac{\lambda^{p+1}}{\alpha}\int\limits_0^1(1-x)^p(1-\lambda x)^{\frac{1}{\alpha}-1}\,dx \\
= \;& \tfrac{(1-\lambda)^{p+\frac{1}{\alpha}}}{\alpha}B\left(\tfrac{1}{\alpha},p+1\right)+\tfrac{\lambda^{p+1}}{\alpha(p+1)}\cdot{}_2F_1\left(1-\tfrac{1}{\alpha},1,p+2,\lambda\right).
\end{aligned}
$$

Ce qui achève le résultat. ■

Corollaire 3.5 *Dans le Théorème 3.2, si on prend $\alpha = s = 1$, on obtient*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(\lambda(a+b-2x)+2(x-a))f(x)+2(1-\lambda)(a+b-2x)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+(\lambda(a+b-2x)+2(x-a))f(a+b-x)}{2(b-a)} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(x)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|f'(a+b-x)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
&+\frac{(a+b-2x)^2}{4(b-a)}\left(\frac{(1-\lambda)^{p+1}+\lambda^{p+1}}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{|f'(x)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(a+b-x)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.6 *Dans le Corollaire 3.5, si on choisit $x = a$, on obtient*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\lambda f(a)+\lambda f(b)}{2} + (1-\lambda) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{4}\left(\frac{(1-\lambda)^{p+1}+\lambda^{p+1}}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.7 *Dans le Corollaire 3.6, si on prend $\lambda = 0$, on obtient l'inégalité du point milieu suivante*

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.8 *Dans le Corollaire 3.6, si on prend $\lambda = \frac{1}{3}$, on obtient l'inégalité de Simpson suivante :*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)}{4}\left(\frac{2^{p+1}+1}{3^{p+1}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.9 *Dans le Corollaire 3.6, si on prend $\lambda = 1$, on obtient l'inégalité de trapèze suivante :*

$$\begin{aligned}
&\left| \tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(u)\,du \right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left(\left(\tfrac{|f'(a)|^q + \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\tfrac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.10 *Dans le Corollaire 3.5, si on choisit $x = \frac{a+b}{2}$, on obtient l'inégalité de point milieu suivante*

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(u)\,du \right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4} \left(\tfrac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\left(\tfrac{|f'(a)|^q + \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\tfrac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right)
\end{aligned}$$

Corollaire 3.11 *Dans le Corollaire 3.5, si on prend $\lambda = 1$, on obtient*

$$\begin{aligned}
&\left| \tfrac{f(x)+f(a+b-x)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(u)\,du \right| \\
\leq\ & \tfrac{(x-a)^2}{b-a} \left(\tfrac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\left(\tfrac{|f'(a)|^q + |f'(x)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\tfrac{|f'(a+b-x)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
&+ \tfrac{(a+b-2x)^2}{4(b-a)} \left(\tfrac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\left(\tfrac{|f'(x)|^q + \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\tfrac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + |f'(a+b-x)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right).
\end{aligned}$$

Théorème 3.3 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ telle que $f' \in L^1[a,b]$ avec $0 \leq a < b$. Si $|f'|^q$ est s-convexe au second sens pour un certain nombre $s \in]0,1]$ fixé, et $q > 1$, alors nous avons*

$$\begin{aligned}
&\left| F^{\alpha}_{(a,x,b;\lambda)} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a} \left(I^{\alpha}_{x^-} f(a) + I^{\alpha}_{x^+} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + I^{\alpha}_{(a+b-x)^-} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + I^{\alpha}_{(a+b-x)^+} f(b) \right) \right| \\
\leq\ & \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \left(\tfrac{1}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left(B(\alpha+1, s+1) |f'(a)|^q + \tfrac{1}{\alpha+s+1} |f'(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\left. + \left(\tfrac{1}{\alpha+s+1} |f'(a+b-x)|^q + B(\alpha+1, s+1) |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right)
\end{aligned}$$

$$+\frac{(a+b-2x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(b-a)}\left(\frac{\lambda+\alpha\left(\lambda-1+2(1-\lambda)^{1+\frac{1}{\alpha}}\right)}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$
$$\times\left(\Omega_2\left(s,\lambda,\alpha\right)\left|f'\left(x\right)\right|^q+\Omega_1\left(s,\lambda,\alpha\right)\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\left.+\left(\Omega_1\left(s,\lambda,\alpha\right)\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q+\Omega_2\left(s,\lambda,\alpha\right)\left|f'\left(a+b-x\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right),$$

où

$$\xi\left(s,\alpha,\lambda\right)=B_{1-(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}\left(s+1,\alpha+1\right)-B_{(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\alpha+1,s+1\right),$$

$$\Omega_1\left(s,\lambda,\alpha\right)=\frac{(s+1)\xi(s,\alpha,\lambda)+(1-\lambda)\left(1-2\left(1-(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{s+1}\right)}{s+1}$$

et

$$\Omega_2\left(s,\lambda,\alpha\right)=\frac{(\alpha+s+1)\lambda+2\alpha(1-\lambda)^{1+\frac{s+1}{\alpha}}-\alpha}{(s+1)(\alpha+s+1)}.$$

Preuve. D'après le Lemme 3.1, les propriétés du module, l'inégalité des moyennes d'ordre q, et de la s-convexité au second sens de $|f'|^q$, nous avons

$$\left|F^{\alpha}_{(a,x,b;\lambda)}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left(I^{\alpha}_{x^-}f(a)+I^{\alpha}_{x^+}f(\tfrac{a+b}{2})+I^{\alpha}_{(a+b-x)^-}f(\tfrac{a+b}{2})+I^{\alpha}_{(a+b-x)^+}f(b)\right)\right|$$
$$\leq\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1 t^{\alpha}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t^{\alpha}\left|f'\left(\left(1-t\right)a+tx\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\frac{(a+b-2x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(b-a)}\left(\int_0^1\left|(1-t)^{\alpha}-(1-\lambda)\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}$$
$$\times\left(\int_0^1\left|(1-t)^{\alpha}-(1-\lambda)\right|\left|f'\left(\left(1-t\right)x+t\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\frac{(a+b-2x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(b-a)}\left(\int_0^1\left|t^{\alpha}-(1-\lambda)\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}$$
$$\times\left(\int_0^1\left|t^{\alpha}-(1-\lambda)\right|\left|f'\left(\left(1-t\right)\tfrac{a+b}{2}+t\left(a+b-x\right)\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1\left(1-t\right)^{\alpha}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left(1-t\right)^{\alpha}\left|f'\left(\left(1-t\right)\left(a+b-x\right)+tb\right)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1 t^{\alpha}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t^{\alpha}\left(\left(1-t\right)^s\left|f'\left(a\right)\right|^q+t^s\left|f'\left(x\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$
\begin{aligned}
&+\tfrac{(a+b-2x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(b-a)}\left(\int\limits_0^{1-(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}\left((1-t)^{\alpha}-(1-\lambda)\right)dt+\int\limits_{1-(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}^{1}\left((1-\lambda)-(1-t)^{\alpha}\right)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\\
&\times\left(\int\limits_0^{1-(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}\left((1-t)^{\alpha}-(1-\lambda)\right)\left((1-t)^{s}\left|f'(x)\right|^{q}+t^{s}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^{q}\right)dt\right.\\
&\left.+\int\limits_{1-(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}^{1}\left((1-\lambda)-(1-t)^{\alpha}\right)\left((1-t)^{s}\left|f'(x)\right|^{q}+t^{s}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^{q}\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\tfrac{(a+b-2x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(b-a)}\left(\int\limits_0^{(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}\left((1-\lambda)-t^{\alpha}\right)dt+\int\limits_{(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}^{1}\left(t^{\alpha}-(1-\lambda)\right)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\\
&\times\left(\int\limits_0^{(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}\left((1-\lambda)-t^{\alpha}\right)\left((1-t)^{s}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^{q}+t^{s}\left|f'(a+b-x)\right|^{q}\right)dt\right.\\
&\left.+\int\limits_{(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}^{1}\left(t^{\alpha}-(1-\lambda)\right)\left((1-t)^{s}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^{q}+t^{s}\left|f'(a+b-x)\right|^{q}\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int\limits_0^1(1-t)^{\alpha}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\\
&\times\left(\int\limits_0^1(1-t)^{\alpha}\left((1-t)^{s}\left|f'(a+b-x)\right|^{q}+t^{s}\left|f'(b)\right|^{q}\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
=\;&\tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int\limits_0^1(1-t)^{\alpha}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left(\left|f'(a)\right|^{q}\int\limits_0^1t^{\alpha}(1-t)^{s}dt+\left|f'(x)\right|^{q}\int\limits_0^1t^{\alpha+s}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left(\left|f'(a+b-x)\right|^{q}\int\limits_0^1(1-t)^{\alpha+s}dt+\left|f'(b)\right|^{q}\int\limits_0^1(1-t)^{\alpha}t^{s}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right)\\
&+\tfrac{(a+b-2x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(b-a)}\left(\int\limits_0^{(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}\left((1-\lambda)-t^{\alpha}\right)dt+\int\limits_{(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}^{1}\left(t^{\alpha}-(1-\lambda)\right)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\\
&\times\left(\left(\left(\int\limits_0^{1-(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}\left((1-t)^{\alpha}-(1-\lambda)\right)(1-t)^{s}dt\right.\right.\right.\\
&\left.+\int\limits_{1-(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}^{1}\left((1-\lambda)-(1-t)^{\alpha}\right)(1-t)^{s}dt\right)\left|f'(x)\right|^{q}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\int_0^{1-(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}\left((1-t)^\alpha-(1-\lambda)\right)t^s dt\right.\\
&\left.+\int_{1-(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}^1\left((1-\lambda)-(1-t)^\alpha\right)t^s dt\right)\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\Bigg)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\left(\int_0^{(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}\left((1-\lambda)-t^\alpha\right)(1-t)^s dt+\int_{(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}^1\left(t^\alpha-(1-\lambda)\right)(1-t)^s dt\right)\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right.\\
&\left.+\left(\int_0^{(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}\left((1-\lambda)-t^\alpha\right)t^s dt+\int_{(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}^1\left(t^\alpha-(1-\lambda)\right)t^s dt\right)\left|f'(a+b-x)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg)\\
=\;&\tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\tfrac{1}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left(B(\alpha+1,s+1)\left|f'(a)\right|^q+\tfrac{1}{\alpha+s+1}\left|f'(x)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left(\tfrac{1}{\alpha+s+1}\left|f'(a+b-x)\right|^q+B(\alpha+1,s+1)\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right)\\
&+\tfrac{(a+b-2x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(b-a)}\left(\tfrac{\lambda+\alpha\left(\lambda-1+2(1-\lambda)^{1+\frac{1}{\alpha}}\right)}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\\
&\times\left(\left(\Omega_2(s,\lambda,\alpha)\left|f'(x)\right|^q+\Omega_1(s,\lambda,\alpha)\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left(\Omega_1(s,\lambda,\alpha)\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q+\Omega_2(s,\lambda,\alpha)\left|f'(a+b-x)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right),
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé (3.8)-(3.13). La preuve est achevée. ■

Corollaire 3.12 *Dans le Théorème 3.3, si on prend $s=1$, on obtient*

$$
\begin{aligned}
&\left|F^{\alpha}_{(a,x,b;\lambda)}-\tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left(I^{\alpha}_{x^-}f(a)+I^{\alpha}_{x^+}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+I^{\alpha}_{(a+b-x)^-}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+I^{\alpha}_{(a+b-x)^+}f(b)\right)\right|\\
\leq\;&\tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\tfrac{1}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left(\tfrac{|f'(a)|^q+(\alpha+1)|f'(x)|^q}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{(\alpha+1)|f'(a+b-x)|^q+|f'(b)|^q}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\\
&+\tfrac{(a+b-2x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(b-a)}\left(\tfrac{\lambda+\alpha\left(\lambda-1+2(1-\lambda)^{1+\frac{1}{\alpha}}\right)}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\\
&\times\left(\left(\Omega_2(1,\lambda,\alpha)\left|f'(x)\right|^q+\Omega_1(1,\lambda,\alpha)\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left(\Omega_1(1,\lambda,\alpha)\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q+\Omega_2(1,\lambda,\alpha)\left|f'(a+b-x)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right),
\end{aligned}
$$

où

$$\Omega_1(1,\lambda,\alpha)=\frac{2-(\alpha+1)(\alpha+2)(1-\lambda)+\left(4\alpha^2+8\alpha\right)(1-\lambda)^{1+\frac{1}{\alpha}}+\left(-2\alpha^2-2\alpha\right)(1-\lambda)^{1+\frac{2}{\alpha}}}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}$$

et

$$\Omega_2(1,\lambda,\alpha)=\frac{(\alpha+2)\lambda+2\alpha(1-\lambda)^{1+\frac{2}{\alpha}}-\alpha}{2(\alpha+2)}.$$

Corollaire 3.13 *Dans le Théorème 3.3, si l'on prend $\alpha=1$, on obtient*

$$\begin{aligned}
&\left|\digamma^{1}_{(a,x,b;\lambda)}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|\\
\leq\ &\frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left(\frac{|f'(a)|^q+(s+1)|f'(x)|^q}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{(s+1)|f'(a+b-x)|^q+|f'(b)|^q}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\\
&+\frac{(a+b-2x)^2}{2^2(b-a)}\left(\frac{2\lambda^2-2\lambda+1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left(\Omega_2(s,\lambda,1)|f'(x)|^q+\Omega_1(s,\lambda,1)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left(\Omega_1(s,\lambda,1)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\Omega_2(s,\lambda,1)|f'(a+b-x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right),
\end{aligned}$$

où

$$\digamma^{1}_{(a,x,b;\lambda)}=\frac{\lambda(a+b-2x)+2(x-a)}{2(b-a)}f(x)+\frac{(1-\lambda)(a+b-2x)}{(b-a)}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{\lambda(a+b-2x)+2(x-a)}{2(b-a)}f(a+b-x),$$

$$\Omega_1(s,\lambda,1)=\frac{\left(2s^2+6s+2\right)\lambda^{s+1}-\left(2s^2+4s\right)\lambda^{s+2}-(s+1)+(1-\lambda)}{(s+1)}\ \text{ et }\ \Omega_2(s,\lambda,1)=\frac{(s+2)\lambda+2(1-\lambda)^{s+2}-1}{(s+1)(s+2)}.$$

Corollaire 3.14 *Dans le Théorème 3.3, si on prend $\alpha=s=1$, on obtient*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(\lambda(a+b-2x)+2(x-a))f(x)+2(1-\lambda)(a+b-2x)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+(\lambda(a+b-2x)+2(x-a))f(a+b-x)}{2(b-a)}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|\\
\leq\ &\frac{(x-a)^2}{2(b-a)}\left(\left(\frac{|f'(a)|^q+2|f'(x)|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{2|f'(a+b-x)|^q+|f'(b)|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\\
&+\frac{\left(2\lambda^2-2\lambda+1\right)(a+b-2x)^2}{8(b-a)}\left(\left(\frac{\left(-2\lambda^3+6\lambda^2-3\lambda+1\right)|f'(x)|^q+\left(2\lambda^3-3\lambda+2\right)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{3\left(2\lambda^2-2\lambda+1\right)}\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.\times\left(\frac{\left(2\lambda^3-3\lambda+2\right)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\left(-2\lambda^3+6\lambda^2-3\lambda+1\right)|f'(a+b-x)|^q}{3\left(2\lambda^2-2\lambda+1\right)}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.15 *Dans le Corollaire 3.14, si l'on choisit $x = a$, on obtient*

$$\left|\frac{\lambda f(a)+\lambda f(b)}{2}+(1-\lambda) f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|$$
$$\leq \frac{\left(2\lambda^2-2\lambda+1\right)(b-a)}{8}\left(\left(\frac{\left(-2\lambda^3+6\lambda^2-3\lambda+1\right)|f'(a)|^q+\left(2\lambda^3-3\lambda+2\right)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{3\left(2\lambda^2-2\lambda+1\right)}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\left(2\lambda^3-3\lambda+2\right)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\left(-2\lambda^3+6\lambda^2-3\lambda+1\right)|f'(b)|^q}{3\left(2\lambda^2-2\lambda+1\right)}\right)^{\frac{1}{q}}\right).$$

Corollaire 3.16 *Dans le Corollaire 3.15, si l'on prend $\lambda = 0$, on obtient l'inégalité de point milieu suivante*

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \leq \frac{b-a}{8}\left(\left(\frac{|f'(a)|^q+2\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{2\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}}\right).$$

Corollaire 3.17 *Dans le Corollaire 3.15, si l'on prend $\lambda = \frac{1}{3}$, on obtient l'inégalité de Simpson suivante*

$$\left|\frac{1}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|$$
$$\leq \frac{5(b-a)}{72}\left(\left(\frac{16|f'(a)|^q+29\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{45}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{29\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+16|f'(b)|^q}{45}\right)^{\frac{1}{q}}\right).$$

Corollaire 3.18 *Dans le Corollaire 3.15, si l'on prend $\lambda = 1$, on obtient l'inégalité de trapèze suivante*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \leq \frac{b-a}{8}\left(\left(\frac{2|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+2|f'(b)|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}}\right).$$

Corollaire 3.19 *Dans le Corollaire 3.14, si l'on choisit* $x = \frac{a+b}{2}$, *on obtient l'inégalité de point milieu suivante*

$$\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(u)\,du \right| \leq \tfrac{b-a}{8}\left(\left(\tfrac{|f'(a)|^q + 2\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{3} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\tfrac{2\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + |f'(b)|^q}{3} \right)^{\frac{1}{q}} \right).$$

Corollaire 3.20 *Dans le Corollaire 3.14, si l'on prend* $\lambda = 1$, *on obtient*

$$\begin{aligned} &\left| \tfrac{f(x)+f(a+b-x)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(u)\,du \right| \\ \leq\ & \tfrac{(x-a)^2}{2(b-a)}\left(\left(\tfrac{|f'(a)|^q + 2|f'(x)|^q}{3} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\tfrac{2|f'(a+b-x)|^q + |f'(b)|^q}{3} \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\ & + \tfrac{(a+b-2x)^2}{8(b-a)}\left(\left(\tfrac{2|f'(x)|^q + \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{3} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\tfrac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + 2|f'(a+b-x)|^q}{3} \right)^{\frac{1}{q}} \right). \end{aligned}$$

Conclusion

La problématique de ce mémoire était d'étudier une inégalité intégrale générale de type Newton-Cotes impliquant au plus trois points via les opérateurs intégraux de Riemann-Liouville.

Dans la première partie, nous nous sommes intéressés à rappeler quelques classes de fonctions ainsi que quelques identités et inégalités intégrales.

Dans la seconde partie nous avons énoncé sans démonstration certaines inégalités de type Newton-Cotes à un, deux et trois points dans le cadre classiques et fractionnaires. Nous n'avons répertorié que les plus connus d'entre elles.

Dans la troisième partie nous avons discuté des nouveaux résultats concernant les inégalités de type Newton-Cotes impliquant au plus trois points via l'opérateur intégral de Riemann-Liouville. Ces résultats sont nouveaux et généralisent plusieurs autres types d'inégalités intégrales classiques et fractionnaires.

Bibliographie

[1] M. W. Alomari, M. E. Özdemir and H. Kavurmac, On companion of Ostrowski inequality for mappings whose first derivatives absolute value are convex with applications. Miskolc Math. Notes 13 (2012), no. 2, 233–248

[2] W. W. Breckner, Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer Funktionen in topologischen linearen Räumen. (German) Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 23 (1978), no. 37, 13–20.

[3] P. S. Bullen, D. S. Mitrinović and P. M. Vasić, Means and their inequalities. Translated and revised from the Serbo-Croatian. Mathematics and its Applications (East European Series), 31. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1988.

[4] S. S. Dragomir and R. P. Agarwal, Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula. Appl. Math. Lett. 11 (1998), no. 5, 91–95.

[5] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[6] U. S. Kirmaci, Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula. Appl. Math. Comput. 147 (2004), no. 1, 137–146.

[7] M. Merad, B. Meftah and A. Chihaoui, Generalized Newton-Cotes inequalities involving three points via the Riemann-Liouville integral operator. Submited.

[8] D. S. Mitrinović, Analytic inequalities. In cooperation with P. M. Vasić. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 165 Springer-Verlag, New York-Berlin 1970.

[9] D. S. Mitrinović, J. E. Pecarić and A. M. Fink, Classical and new inequalities in analysis. Mathematics and its Applications, 61. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

[10] D. S. Mitrinović, J. E. Pecarić and A. M. Fink, Inequalities for functions and their integrals and derivatives, Kluwer Academic, Dordrecht, 1994.

[11] C. E. M. Pearce and J. Pečarić, Inequalities for differentiable mappings with application to special means and quadrature formulæ. Appl. Math. Lett. 13 (2000), no. 2, 51–55.

[12] J. E. Pečarić, F. Proschan and Y. L. Tong, Convex functions, partial orderings, and statistical applications. Mathematics in Science and Engineering, 187. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992.

[13] M. Z. Sarikaya, E. Set and M. E. Özdemir, On new inequalities of Simpson's type for convex functions, RGMIA Res. Rep. Coll. 13 (2) (2010) Article2.

[14] M. Z. Sarikaya, E. Set, H. Yaldiz and N. Başak, Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities. Mathematical and Computer Modelling, 57 (2013),no. 9-10, 2403-2407.

[15] M. Z. Sarikaya and H. Yildirim, On Hermite-Hadamard type inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals. Miskolc Math. Notes 17 (2016), no. 2, 1049–1059.