

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de 8 Mai 1945 – Guelma -

Faculté des Mathématiques, d'Informatique et des Sciences de la Matière

Département d'Informatique



**Mémoire de Fin d'études Master**

**Filière :** Informatique

**Option :** système informatique

**Thème :**

**Une représentation simpliciale pour les objets de surfaces maillées triangulées**

**Présenté par :** Benladjar Chaima

**Membres de jury:**

Nom	Qualité
Dr Bourssace Hassina	Président
Dr Dardar Salah	Encadreur
Dr Khebizi Ali	Examineur

**Juin 2023**

## Remerciement

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

*Avant tout, nous remercions dieu le tout puissant de nous avoir  
donné la santé et*

*la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.*

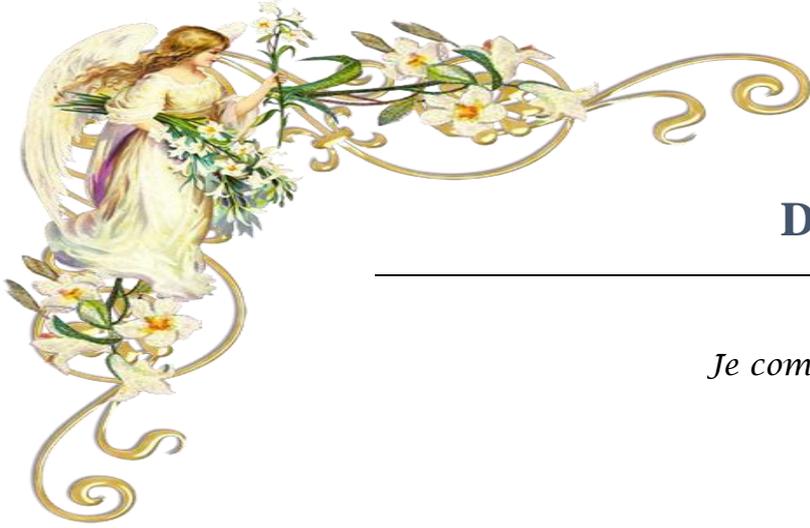
*Aussi, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu  
avoir le jour sans*

*l'aide et l'encadrement de Dr. Derdar Salah, nous le remercions  
pour la*

*qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa  
rigueur et sa*

*disponibilité durant notre préparation de ce projet de fin  
d'études.*

*Nous remercierons les membres de jury pour avoir accepté  
d'examiner notre  
projet.*



## Dédicace

---

*Je commence*

À ma mère *Samia* qui ne cesse jamais de m'encourager et qui était toujours à mes côtés à tout moment, à mon père *Sassi*, Que dieu tout puissant les garde pour moi,

À mes sœurs *Rima, Moufida, Kanza, Souria, Sara, Douaa, alia, djouhaina, et Djinan* et mes frères *mohamed el amine, omar, khalde, hafdh, monder, bilale, alilouet louai*, pour leur amour et leur Soutien  
inconditionnel.

Aux deux amoureux ma oncle *rechid* et ma tante *rachida*

A ma grande mère *Fatima*

À toute mes deux grandes familles : la famille *Ben lahdjer* et *Ben sassi*

À tous mes amies : *chaima et romaïssa, ibtissem, bouchra, kahina, khalida, halima, samia, Marwa, hizia* et la chère Qui est toujours dans mon esprit et ma mémoire *laïla*.

Et bien sur sans oublier mon époux *Karim* qui toujours m'a aidé soit moralement ou bien physiquement.

A mes collègues de ma promotion et à toute personne qui m'a aidé et soutenue de près et de loin de ce travail.

# Chaima benlh

# Résumé

La squelettisation est un sujet de recherche très animé en vision, analyse d'images et infographie, avec des applications dans de nombreux domaines, de l'ingénierie à la médecine en passant par le divertissement, les jeux et la simulation,...etc. Un nouveau modèle a été développé pour la représentation et la caractérisation des objets 2D en utilisant des concepts algébriques et structures de complexes. Dans ce travail, le modèle topologique de squelettisation conçu emploie le complexe simplicial pour représenter les données de maillage triangulé 2D. Ce modèle fonctionne avec un algorithme suivant trois étapes: construction d'un complexe simplicial initial, étiquetage les primitives du complexe (application de la fonction de distance) et réduction du complexe. Ce modèle est caractérisé par sa capacité de préserver les propriétés topologiques et géométriques des formes de manière simple et offre aussi une méthode solide pour représenter les données de triangulation des formes 2D, avec des résultats prometteurs. Les tests qui sont réalisés sur des exemples de formes 2D montrent la réussite et l'efficacité de cette approche.

**Mots clés:** maillage triangulé, complexe simplicial, concepts algébriques, étiquetage, processus de réduction.

# Abstract

Skeletonization is a research topic in vision, image analysis and computer graphics, with applications in many fields, from engineering to medicine, entertainment, games and simulation, etc. A new model has been developed for the representation and characterization of 2D objects using algebraic concepts and complex structures. In this work, the designed topological skeletonization model employs the simplicial complex to represent the 2D triangulated mesh data. This model works with an algorithm following three steps: construction of an initial simplicial complex, labeling the complex primitives (application of the distance function) and complex reduction. This model is characterized by its ability to preserve the topological and geometric properties of shapes in a simple way and also offers a robust method to represent the 2D shape triangulation data, with promising results. Tests carried out on examples of 2D shapes show the success and effectiveness of this approach.

**Key words:** triangulated mesh, simplicial complex, algebraic concepts, labeling, reduction process.

## ملخص

يعد بناء الهيكل موضوعًا ساخنًا للبحث في الرؤية وتحليل الصور ورسومات الكمبيوتر ، مع تطبيقات في العديد من المجالات ، من الهندسة إلى الطب والترفيه والألعاب والمحاكاة ، إلخ. تم تطوير نموذج جديد لتمثيل وتوصيف الكائنات ثنائية الأبعاد باستخدام المفاهيم الجبرية والهيكل المعقدة. في هذا العمل، نموذج الهيكل الطوبولوجي المصمم يستخدم المركب المبسط لتمثيل بيانات الشبكة المثلثة ثنائية الأبعاد. يعمل هذا النموذج مع خوارزمية باتباع ثلاث خطوات: إنشاء مركب مبسط أولي، وضع علامات بتسمية عناصر المركب (تطبيق دالة المسافة) واختزال المركب. يتميز هذا النموذج بقدرته على الحفاظ على الخصائص الطوبولوجية والهندسية للأشكال بطريقة بسيطة ويقدم أيضًا طريقة قوية لتمثيل بيانات التثليث للأشكال ثنائية الأبعاد ، مع نتائج واعدة. الاختبارات التي أجريت على أمثلة الأشكال ثنائية الأبعاد تظهر نجاح وفعالية هذا النهج .

الكلمات المفتاحية: الشبكة المثلثة ، المركب المبسط ، المفاهيم الجبرية ، الوسم ، عملية

الاختزال .

# Table des matières

Remerciement .....	ii
Dédicace .....	iii
Résumé .....	iv
Table des matières .....	vii
Liste des figures .....	ix
Introduction Générale .....	1

## Chapitre 1 : Etat de l'art

1. Introduction .....	4
2. Approches de squelettisation par axe médian .....	5
3. Approches par graphes squelettiques .....	5
4. Approches par structures topologiques .....	6
5. Conclusion .....	9

## Chapitre 2 : Concepts algébriques et géométriques

1. Introduction .....	11
2. Concepts géométriques .....	11
2.1. Distances .....	11
2.2. Transformée de distances .....	12
2.2.1. Distance euclidienne .....	12
2.2.2. Exemple de transformée de distance (euclidienne) .....	13
2.3. Axe médian (MA) .....	14
3. Concepts algébriques liés au complexe simplicial .....	14
3.1. Complexes simpliciaux .....	15

3.1.1. Chaînes, cycles et frontières .....	16
3.1.2. Groups d'homologie . .....	17
3.2. Construction du complexe simplicial à partir de graphe .....	17
3.3. Autres structures topologiques .....	18
4. Conclusion .....	18

### **Chapitre 3 : Modélisation squelettique**

1. Introduction .....	20
2. Modèle topologique . .....	20
2.1. Préparation les données de triangulation .....	20
2.2. Processus d'étiquetage .....	22
2.3. Réduction du complexe .....	24
3. Conclusion .....	26

### **Chapitre 4 : Implémentation et résultats expérimentaux**

1. Introduction .....	28
2. Environnements matériels et logiciels .....	28
2.1. Environnements matériels .....	28
2.2. Environnements logiciels .....	28
2.3. Langage de programmation .....	29
3. Implémentation .....	29
3.1. Implémentation de l'algorithme principal .....	29
3.2. Les principales classes .....	30
4. Résultats expérimentaux .....	31
5. Conclusion .....	36
Conclusion Générale .....	37
Bibliographie .....	38

# Liste des Figures

Figure 2.1. (a) Forme 2D (image binaire) de taille 14x16, (b) Carte de distance DT de même taille.....	13
Figure 2.2. Transformation par axe médian produit (a) axe médian linéaire, (b) axe médian linéaire avec des artefacts .....	14
Figure 2.3. De gauche à droite, un 0-simplexe (point), un 1-simplexe (ligne), un 2-simplexe (triangle plein) et un 3-simplexe (tétraèdre solide) .....	15
Figure 2.4. A gauche, le 2-simplexe $(p_0 p_1 p_2)$ et, à droite, sa frontière donnée par $\partial_2(p_0 p_1 p_2) = (p_1 p_2) + (p_0 p_2) + (p_0 p_1)$ .....	16
Figure 3.1. Exemple de triangulation d'un objet 2D.....	21
Figure 3.2. l'étiquetage initial des primitives de frontière .....	23
Figure 3.3. Etiquetage final de toutes les primitives .....	23
Figure 3.4. Réduction du complexe de premier niveau et label=1 .....	24
Figure 3.5. Réduction du complexe de premier niveau et label=2.....	24
Figure 3.6. Réduction du complexe de premier niveau et label=3.....	25
Figure 3.7. Réduction du complexe de deuxième niveau et uniquement label=1 (squelette topologique final) .....	25
Figure 4.1. : Fenêtre de démarrage d'Eclipse IDE (nouvelle version).....	29
Figure 4.2. Forme 2D synthétique .....	32
Figure 4.3. Visualisation du squelette topologique de la forme 2D synthétique .....	33
Figure 4.4. Forme 2D L de l'image <i>ELL</i> du site MESH ;;;.....	34
Figure 4.5. Visualisation du squelette topologique de la forme 2D <i>ELL</i> .....	35
Figure 4.6. Carte géographique <i>GREENLAND_OLD</i> du site MESH .....	36

## Introduction Générale

L'analyse topologique des données a connu une croissance significative ces dernières années, offrant de nouvelles perspectives pour comprendre la structure et les relations cachées au sein des ensembles de données complexes. L'une des approches les plus couramment utilisées dans ce domaine est le couplage de cet analyse et les techniques de squelettisation, qui permet de réduire les données à leur structure essentielle en conservant les caractéristiques topologiques importantes.

Ce travail présente une modélisation basée sur les concepts liés à la géométrie (squelette) et la topologie (représentation simpliciale). L'objectif de cette approche est de fournir un modèle de représentation des données de triangulation des objets discrets extraits de la forme basé sur un formalisme mathématique conduisant à représenter une classe des formes 2D, chacune avec une empreinte unique.

Le modèle topologique que nous avons développé, conduit à une représentation squelettique (complexe simplicial réduit) qui s'est révélé être un descripteur de forme puissant, intéressant et discriminant, capable de résister aux transformations affines et aux petits changements. Il nous a permis d'améliorer la représentation des formes 2D. Étant donné l'importance et la pertinence des informations topologiques pour caractériser les formes, ce modèle que nous avons conçu est particulièrement adapté pour capturer ces caractéristiques topologiques. L'objectif de notre travail est de développer un modèle topo-géométrique avec un algorithme robuste et efficace qui combine les caractéristiques géométriques et topologiques de la forme pour obtenir des squelettes topologiques précis. Pour cela, nous devons utiliser l'information topologique afin de créer une représentation succincte ou réduite (squelette 1D sous forme de complexe simplicial réduit 1D) qui est homotopiquement équivalente aux données d'entrée (triangulation des objets). Cette structure réduite de complexe peut être exploitée pour des futurs traitements topologiques (calcul des groupes d'homologie, de cohomologie et d'homotopie, ...).

Chaque approche présente ses avantages et ses inconvénients en termes de précision, de sensibilité au bruit et de complexité de traitement. Les méthodes basées sur les champs potentiels généralisés sont prometteuses pour les images bruitées, tandis que d'autres approches sont adaptées à des situations spécifiques [1]. Par définition, la squelettisation est un processus visant à réduire la dimension d'un objet tout en

préservant ses caractéristiques essentielles. Son objectif est de trouver un squelette qui représente l'essence de l'objet en capturant ses déformations et son allongement. En d'autres termes, la squelettisation permet d'obtenir une représentation plus concise de l'objet en utilisant un ensemble de lignes fines qui décrivent sa structure principale. Cela permet de réduire considérablement le volume d'informations à traiter, ce qui est particulièrement bénéfique dans le domaine de la reconnaissance de formes. Les squelettes sont des représentations compactes, abstraites et riches en informations, qui trouvent de nombreuses applications pratiques.

Il existe principalement quatre approches différentes pour calculer les squelettes des formes d'objets 2D (ou 'images binaires) délimités par leur aire ou contour. La première approche appelée "Grassfire" est une méthode itérative qui élimine les points non squelettiques en préservant la continuité et l'épaisseur du squelette. La deuxième est basée sur une transformation de distance qui associe à chaque point d'un objet la plus petite distance entre ce point et la frontière de l'objet, permettant ainsi de trouver les maxima locaux de la carte de distance pour obtenir les squelettes. La troisième est basée sur le diagramme de Voronoi qui utilise le graphe de Voronoi construit à partir des points de la frontière de l'objet pour déterminer le squelette. La dernière approche utilise les champs potentiels comme modèle aux objets en utilisant des fonctions de champ potentiel pour décrire les interactions entre les points de la frontière [1].

Ce mémoire est organisé en quatre chapitres. Le premier chapitre est destiné à consulter les approches ou les travaux liés aux approches de squelettisation, en se basant sur celles qui ont une relation avec les concepts et structures algébriques. Dans le deuxième chapitre, les concepts algébriques avec ceux de la géométrie sont illustrés. Le troisième chapitre présente l'approche de modélisation des formes 2D en utilisant les concepts cités précédemment. Le dernier chapitre est consacré à présenter l'implémentation de notre modèle ainsi que les différents résultats de tests appliqués sur des exemples de formes 2D.

# Chapitre 1

## **Etat de l'art**

## 1. Introduction

Les squelettes sont largement utilisés dans de nombreuses applications en analyse d'images, vision par ordinateur et notamment en infographie. Ils offrent une solution simple et représentation compacte des formes et peut préserver la topologie des objets. La squelettisation a exploré des nouveaux domaines tels que la reconnaissance optique de caractères, analyse et vectorisation des documents avec des documents et codage des images. Quant à l'analyse des documents, la squelettisation est appliquée en préservant les motifs existants dans le document.. En vision par ordinateur, il existe beaucoup d'approches de squelettisation adaptés aux formes 2D (ou images binaires) mais il y a peu d'approches qui utilisent les images en niveaux de gris ou en couleur [1].

Dans ce chapitre, on va présenter les approches de squelettisation en se concentrant principalement sur les formes 2D. Nous nous intéressons particulièrement aux travaux de squelettisation qui utilisent les structures topologiques (complexes cubiques, simpliciaux et cellulaires). A ce stade, plusieurs approches de squelettisation existent dans la littérature.

Par définition, le squelette est une représentation d'une forme très utilisée car il peut conserver les propriétés topologiques et géométriques de la forme avec moins d'espace mémoire. La notion de squelette est apparue pour l'étude des objets minces. Le squelette est généralement défini comme étant l'ensemble des lignes médianes dans un objet 2D/3D (analogues à une ossature de l'objet), c'est-à-dire l'ensemble des points équidistants de deux points de la frontière.

Les squelettes peuvent être utilisés pour les aspects importants d'un objet. En comparant aux données d'entrée originales, les squelettes exigent moins d'espace de stockage et ainsi peuvent être plus adaptables aux problèmes d'interprétation (ou rendering) [5].

Maintenant, nous donnons les propriétés suivantes doivent être remplies par un squelette :

- ✓ Homotopie : le squelette doit être homotopiquement équivalent à l'objet original.
- ✓ Finesse : le squelette doit avoir une dimension plus petite que l'objet original (un objet 3D est représenté par 1- ou 2-squelette).
- ✓ Centralisation : le squelette doit être localisé dans le centre de l'objet original.

✓ Reconstruction : l'objet original doit être reconstruit à partir du squelette (informations additionnelles sont exigées à chaque point du squelette) [5].

## 2. Approches de squelettisation par axe médian

Les principaux problèmes des approches par transformation par axe médian sont le manque de robustesse aux déformations locales, la complexité d'extraction du squelette, et la difficulté de coder des vecteurs caractéristiques. De plus en 3D, l'axe médian est plus complexe et peut contenir des segments de surfaces, qu'on l'appelle alors une surface médiane [7]. Les travaux de [2] et [3, 4] représentent respectivement des approches de squelettisation avec l'axe médian pour les objets 2D et avec la surface médiane pour les objets 3D.

Dans la littérature, plusieurs méthodes qui sont basées sur la géométrie computationnelle adoptent l'axe médian pour la représentation des formes [2, 7, 8]. D'après ces méthodes, le point incontournable d'employer l'axe médian est qu'il ne conduit pas à une représentation unique de la forme. Zhu et Yuille [9] présentent une méthode qui est basée sur une variante de l'axe médian.

Pour les objets 3D, la squelettisation consiste à calculer deux types de squelette 1D ou 2D. Un squelette 2D représente la surface médiane. Siddiqi et al. [10] ont proposé une représentation basée sur la médiane. Leur méthode emploie l'information géométrique associée à chaque nœud du graphe.

## 3. Approches par graphes squelettiques

Les approches basées sur les représentations par graphe permettent d'extraire des Informations intrinsèques à la forme générale des objets 2D et 3D, et peuvent donc être de puissants outils de recherche ou de comparaison des formes [6]. Une méthode pour la recherche et la comparaison des objets 3D est proposée dans [11]. La méthode encode l'information géométrique et topologique sous forme d'un graphe de squelette et utilise les techniques d'appariement de graphes qui appariant les squelettes et les comparent entre eux. Après les opérations de finesse et de regroupement, les points du squelette sont identifiés pour réaliser l'appariement de graphes, et ces points doivent être se convertir en un graphe acyclique direct (ou DAG).

D'autres approches d'extraction de graphes permettent d'obtenir des représentations de haut niveau, mais elles restent coûteuses et très sensibles aux bruits. L'approche [12] permet d'extraire un graphe basé sur des ensembles de niveaux

géodésiques. La représentation obtenue caractérise bien la forme des objets mais la construction du graphe est dépendante du choix d'un point source.

Les graphes de choc sont des variantes de l'axe médian, car ils capturent son évolution dans le temps et peuvent être considérés comme un axe médian enrichi par des informations additionnelles. Cependant, il peut se produire dans une représentation unique pour une large classe de formes et est généralement considéré comme un meilleur descripteur de forme avec des variantes numériques [7]. Les graphes de choc dans [8] permettent d'obtenir une description assez riche en utilisant l'orientation des arêtes des graphes obtenus par la transformation par axe médian. Ils sont utilisés en reconnaissance de forme 2D, et leur extension en 3D consiste à utiliser des graphes de choc extraits de vues 2D de l'objet 3D à décrire. Leur approche repose donc sur des extractions d'axes médians qui peuvent être initialement très bruités [6]. D'autres approches qui emploient les graphes de choc ont été détaillées dans [14]. Siddiqi et al. Introduit une approche de détection des chocs basée sur la théorie de singularité pour générer un modèle de squelette. Ils comparent les formes basées sur le graphe de choc en considérant l'arbre comme une structure et en employant l'isomorphisme des sous-graphes [15] ou par trouver le clique maximal d'association entre graphes [16]. Ils choisissent l'ancien choc comme le nœud racine qui n'est pas toujours le plus logique. Sebastian et al. [17] simplifient la reconnaissance des formes à travers les graphes de choc en partitionnant l'espace des formes ou ils regroupent toutes les formes de la même topologie du graphe de choc dans une classe d'équivalence. Par la suite, ils discrétisent l'espace de déformation par décrire toutes les déformations avec les mêmes transitions pour être équivalentes.

#### **4. Approches par structures topologiques**

Les invariants topologiques sont extrêmement utiles dans de nombreuses applications liées à l'imagerie numérique et à la modélisation géométrique. L'homologie et l'homotopie avec ses groupes forment un exemple de ces invariants, qui n'ont pas encore été pleinement explorés dans le domaine de l'imagerie numérique. Plusieurs de squelettisation qui utilisent les concepts de la topologie algébrique. Les structures de complexe sont mieux adoptées pour représenter et caractériser les objets 2D et 3D. Plusieurs approches de squelettisation existent en littérature qui utilisent ces structures. Dans [33], un nouvel algorithme de squelettisation préservant la topologie qui supprime les cellules simples d'un complexe de cellules donné. Le test des cellules simples est

basé sur des tables d'acyclicité produites automatiquement à l'avance avec des calculs d'homologie. Dans [34], Un nouveau type de squelette pour les volumes binaires appelé le squelette cellulaire. Ce squelette n'est pas un sous-ensemble de voxels d'un volume ni un sous-complexe d'un complexe cubique : c'est un complexe en chaîne avec une réduction du complexe d'origine.

A partir du volume binaire on construit un complexe cubique qui le représente. Ensuite, le complexe est réduit en utilisant les effondrements élémentaires, qui préserve les caractéristiques géométriques importantes. La dernière étape réduit le nombre de cellules en utilisant la théorie discrète de Morse en préservant l'information topologique et géométrique du complexe d'origine. Dans [35], Les objets sont des sous-ensembles d'une grille cubique de dimensions 2 ou 3 qui forment un complexe cubiques, c'est-à-dire des ensembles d'éléments ( points, segments, carrés, cubes...) . dans ce travail trois idées sont combinées: l'axe  $\lambda$ -médial, squelettisation parallèle directionnel et squelettisation guidé avec également une séquence d'opérations d'effondrement à partir de laquelle s une structure de graphe acyclique appelée graphe de flux est créée. Dans [36], une nouvelle approche volumétrique de la réparation de la topologie d'un objet de solide qui consiste à convertir un solide d'entrée en une grille de volume et affine le modèle volumétrique en un squelette de sorte que la tâche de détection des tunnels ou cavités est réduite à l'identification des cycles sur le squelette. le squelette sera ensuite modifié par supprimer quelques cycles en utilisant des opérations morphologiques qui préservent la topologie. Dans [37], une théorie de squelettisation dans les images binaires numériques 2D modélisées par des complexes cellulaires construits à partir de pavages plans polygonaux (appelés aussi espaces d'Alexandroff topologiques) est introduite.

#### **Pour la structure simpliciale:**

Un modèle topologique appelé AM-modèle basé sur un complexe simplicial est conçu dans [18]. Ce modèle est destiné pour extraire des informations topologiques d'images numériques par déterminer une homotopie à chaînes concrète et fournir, en particulier, des générateurs d'homotopie et des cycles représentatifs de ces générateurs et pour stocker les mêmes informations avec moins d'espace mémoire. A travers des complexes simpliciaux, un nouvel algorithme itératif a été proposé dans [19] pour calculer l'homologie des formes arbitraires discrètes. Il montre comment l'homologie simpliciale d'une forme peut être efficacement exprimée en termes de l'homologie de ses sous-composantes. Pour ça on dit que l'homologie d'un espace topologique signifie

l'homologie de ses sous- composantes. Des groupes d'homologie simpliciale des images numériques 2D sont calculés dans [20]. Dans [21], un algorithme qui calcule l'homologie simpliciale d'un objet de dimension arbitraire : nombres de Betti, coefficients de torsion et générateurs est présenté.

#### **Pour la structure cubique:**

Dans [28], une méthode est présentée pour réparer localement un complexe cubique (intégré dans  $\mathbb{R}^3$ ) associé à une image binaire 3D, pour obtenir un complexe polyèdre homotopie équivalent à ce complexe cubique. Une autre méthode basée sur la structure du complexe cubique pour calculer le nombre d'Euler d'un objet est donnée dans [29]. Une méthode de topologie combinatoire est introduite pour calculer l'homologie cubique (le nombre de composants connexes et de trous dans une image donnée) avec des méthodes de segmentation rapide pour extraire les objets [30].

Dans [31], un algorithme d'amincissement parallèle est proposé pour fournir un résultat mince sur un espace cubique discret 3D, avec des sous-étapes directionnelles basées sur l'opération de réduction, qui garantit la préservation de la topologie. Dans [32], un complexe cubique est construit à partir d'une image de volume binaire qui selon le principe de 6- ou 26-connexion. Le complexe est réduit suivant la méthode de réduction, qui préserve des caractéristiques géométriques importantes.

#### **Pour la structure cellulaire:**

Beaucoup d'approches liées à ce type de complexe sont proposées en littérature. Dans [22], une subdivision initiale formée de cellules pour des surfaces fermées 2D, représentée par une carte généralisée est utilisée pour construire un complexe cellulaire destiné au calcul de l'homologie. Un algorithme de la squelettisation opérant sur des objets représentés par des complexes cellulaires est proposé dans [23]. Cet algorithme d'amincissement qui préserve la simplicité donne des squelettes stables et contrôlables capable de capter les caractéristiques globales de la forme. Dans [24], des cartes généralisées sont utilisées pour calculer une décomposition cellulaire d'une surface fermée, pour construire un complexe cellulaire destiné au calcul de l'homologie. Dans [25], un algorithme donné pour calculer des générateurs d'homologie d'objets orientables subdivisés en 3D. Il commence par une subdivision initiale, représentée par une carte généralisée où chaque cellule est une boule topologique, le nombre de cellules est réduit grâce à des opérations de simplification (suppression des cellules), tout en

préservant l'homologie pour obtenir une représentation minimale homologue à l'objet initial.

Un autre algorithme d'amincissement préservant la topologie, basé sur la suppression des cellules simples d'un complexe cellulaire est proposé dans [26]. Cet algorithme permet, de réduire un complexe simplicial général non structuré. Même idée est dans [23] où un algorithme d'amincissement, fonctionne sur des complexes cellulaires, qui préservent la simplicité d'amincissement, et génère des squelettes qui capturent de manière plus robuste les caractéristiques de la forme globale.

Dans [27], une structure du complexe cellulaire est construit avec des collections de blocs cubiques (un bloc de dimension  $q$ , pour  $q=0\dots d$ , où  $d$  est la dimension du complexe). Un bloc cubique est considéré comme une cellule dans chaque collection du complexe cellulaire. Un bloc cubique en dimension 2 représente géométriquement un bloc de pixels (bloc cubique en dimension 3 représente un bloc de voxels).

## 5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exploré les différentes approches de squelettisation utilisées pour réduire la dimension des objets tout en préservant leurs caractéristiques topologiques et géométriques. Nous avons examiné plusieurs approches de squelettisation qui emploient différentes représentations (axe médian, graphe squelettiques et structures topologiques) et aussi qui offrent ses propres avantages et limitations. Dans le prochain chapitre, nous allons entamer plus en détails les concepts de la topologie liés au complexe simplicial.

## Chapitre 2

# **Concepts algébriques et géométriques**

### 1. Introduction

Lorsque nous examinons des objets et des formes dans l'espace, nous sommes souvent confrontés à la complexité de leur représentation. Les objets peuvent être composés de nombreuses parties, avec des relations complexes entre elles. Pour simplifier cette représentation tout en préservant les caractéristiques essentielles, les squelettes ont été introduits comme une méthode efficace.

L'utilisation de complexes simpliciaux, qui sont des structures combinatoires semblables à des espaces topologiques, permet d'explorer les propriétés des réseaux de manière plus complète. Les invariants topologiques et algébriques définis pour les complexes simpliciaux fournissent des mesures spécifiques des réseaux [38]. Dans ce chapitre, nous explorerons en profondeur les complexes simpliciaux. Nous discuterons des techniques avancées pour générer ces complexes simpliciaux à partir de maillages triangulaires.

### 2. Concepts géométriques

Les notions de distance et de norme sont généralement définies en algèbre dans l'espace continu. Nous présentons dans cette section les axiomes et notions utiles pour travailler dans l'espace discret.

#### 2.1. Distances

La notion de distance joue un rôle central en analyse d'image et description de formes. La distance la plus naturellement utilisée est la distance euclidienne, définie pour deux points  $p = (p_1, \dots, p_n)$  et  $q = (q_1, \dots, q_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  par

$$d_E(p, q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + \dots + (q_n - p_n)^2} \dots\dots\dots (2.1)$$

qui est à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Les distances à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Q}$  ou  $\mathbb{Z}$  sont appelées respectivement distances réelles, rationnelles ou discrètes. La notion de distance en elle-même est définie par l'axiome suivante :

**Définition de la distance :** Soit  $E$  un ensemble non vide et  $F$  un sous-groupe de  $\mathbb{R}$ . Une distance sur  $E$  à valeurs dans  $F$ , notée  $(d, E, F)$ , est une application  $d : E \times E \rightarrow F$  vérifiant :

$$(positive) \forall p, q \in E, d(p, q) > 0 ; \dots\dots\dots(2.2)$$

$$(définie) \forall p, q \in E, d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q ; \dots\dots\dots(2.3)$$

$$(symétrique) \forall p, q \in E, d(p, q) = d(q, p) ; \dots\dots\dots(2.4)$$

$$(triangulaire) \forall p, q, r \in E, d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q). \dots\dots\dots(2.5)$$

Classiquement, une distance  $d$  non définie (2.3), ne vérifiant que  $d(p, q) = 0 \leftarrow p = q$  pour tout  $p, q \in E$ , est appelée un écart. On peut être également amené à considérer des distances ne vérifiant pas la symétrie (2.4). Une distance peut appeler une « métrique » ou un écart sachant que un écart est une « semi-métrique » ne vérifiant pas l'inégalité triangulaire (2.5) [26].

## 2.2. Transformée de distances

Étant donnée une distance  $d$  et une image binaire contenant une forme  $X$ , on appelle *une carte de distance (ou distance map)* pour  $d$ , ou encore *transformée de distance*, et on note  $DT$ , une copie de l'image originale dans laquelle chaque point de  $X$  est étiqueté à sa distance à  $X$  avec la formule (2.1). Le calcul de  $DT$  est appelé *transformation ou transformée de distance*.

Les distances de chanfrein sont spécialement conçues pour que la transformation soit efficace. La distance euclidienne a fait l'objet de nombreux algorithmes de transformation et ce n'est que récemment qu'est apparu un algorithme aussi efficace [26].

### 2.2.1. Distance euclidienne

Historiquement, les premiers algorithmes de transformation de distance euclidienne étaient basés sur une analogie avec l'algorithme en distance de chanfrein ou encore sur une mise à jour locale. Or, ces approches ne produisaient pas un étiquetage exact. Pour avoir des algorithmes corrects, il a fallu revoir le processus et la plupart des techniques ultérieures utilisent des algorithmes séparables, c'est-à-dire des processus qui effectuent des calculs sur les lignes, puis sur les colonnes, (puis sur les rangées en dimension 3, etc) de l'image de manière indépendante. Pour représenter la distance de manière exacte, nous utilisons le carré de cette dernière.

Selon l'énoncé de la transformée de distance euclidienne en dimension 2, supposons une forme discrète  $X$  contenue dans une image de taille  $n \times n$ . Nous cherchons à calculer la carte ou l'image de distance  $H = \{h(i, j)\}$  contenant le carré de la transformée en distance. De manière très simple, nous avons :

$$h(i, j) = \min \{ (i - x)^2 + (j - y)^2 : 0 \leq x, y < n \text{ et } (x, y) \in \overline{X} \} \dots\dots\dots (2.6)$$

Cette écriture peut se décomposer dimension par dimension :

1) construction de l'image  $G = \{g(i, j)\}$  par un traitement indépendant des lignes, où pour une colonne  $j$  nous avons :

$$g(i, j) = \min_x \{ |i - x| : 0 \leq x < n \text{ et } (x, j) \in \overline{X} \} \dots\dots\dots(2.7)$$

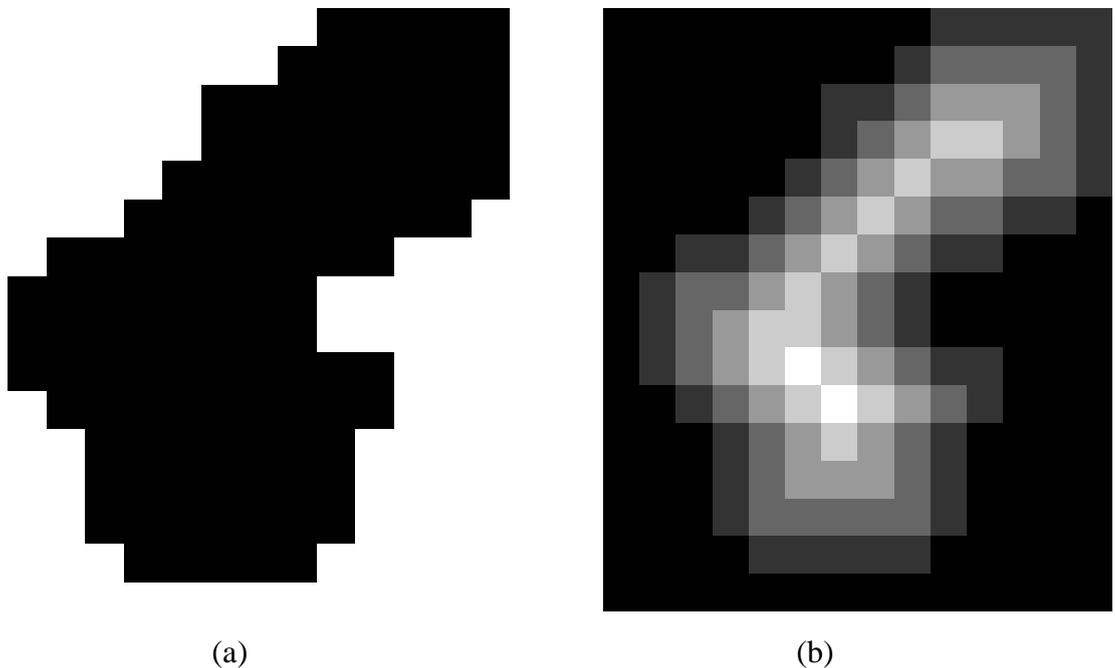
2) enfin,  $H$  s'obtient par le processus suivant sur les colonnes :

$$h(i, j) = \min_y \{ g(i, y)^2 + (j - y)^2 : 0 \leq y < n \} \dots\dots\dots(2.8)$$

L'algorithme issu de cette décomposition engendre une complexité linéaire en le nombre de points de l'image [26].

### 2.2.2. Exemple de transformée de distance (euclidienne)

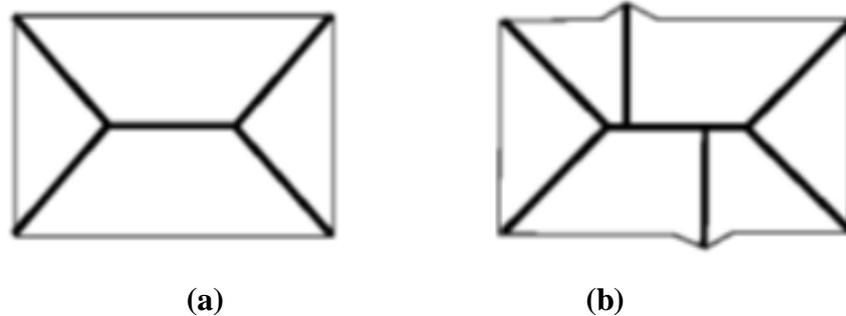
La figure 2.1. présente un exemple d'une forme 2D (image binaire) de taille 14x16 (a) et sa carte de distance DT (b) qui est une image de niveau de gris de même taille et cela pour stocker les valeurs distance de chaque pixel objet en noir avec fond de l'image en blanc.



**Fig 2.1.** (a) Forme 2D (image binaire) de taille 14x16, (b) Carte de distance DT de même taille.

### 2.3. Axe médian (MA)

L'axe médian d'un objet a été défini par Blum en 1967 comme étant l'ensemble des centres des disques maximaux inclus dans l'objet [2]. Un disque est maximal s'il n'est inclus dans aucun autre disque dans l'objet. On obtient donc un graphe linéaire en 2D, la figure 2.2 représente une transformation par axe médian [7, 46].



**Fig. 2.2.** Transformation par axe médian produit (a) axe médian linéaire, (b) axe médian linéaire avec des artéfacts.

Chaque arête du graphe est un médian, c'est-à-dire qu'il est situé au milieu d'une certaine partie de la forme et agit comme un axe de symétrie. Il existe différentes techniques pour obtenir un axe médian :

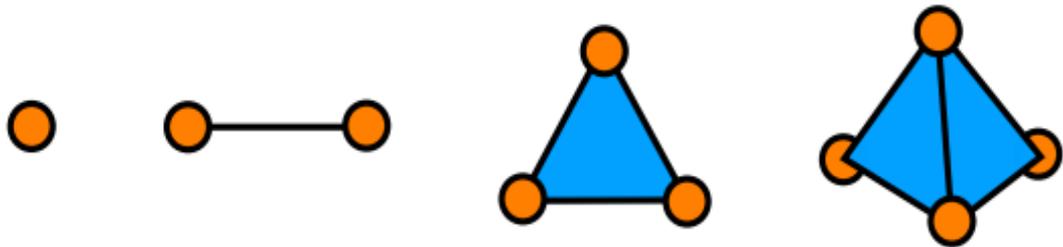
- La propagation du feu de prairie qui produit un squelette analogue à celui par disques maximaux.
- La squelettisation homotopique.
- Le diagramme de voronoi.
- La carte des distances.
- Transformation par axe médian 3D.

### 3. Concepts algébriques liés au complexe simplicial

La topologie algébrique est une branche des mathématiques qui utilise des outils de l'algèbre abstraite pour étudier les espaces topologiques. L'objectif fondamental est de trouver des invariants algébriques qui classent les espaces topologiques jusqu'à l'homéomorphisme, bien que généralement la plupart classent jusqu'à l'équivalence d'homotopie. Bien que la topologie algébrique utilise principalement l'algèbre pour étudier des problèmes topologiques, l'utilisation de la topologie pour résoudre des problèmes algébriques est parfois également possible. La topologie algébrique, par exemple, permet une preuve pratique que tout sous-groupe d'un groupe libre est à nouveau un groupe libre [39].

### 3.1. Complexes simpliciaux

Les complexes simpliciaux sont des hypergraphes. L'unité de base de ces structures s'appelle un simplexe. À l'origine, un simplexe est une construction géométrique qui permet de construire des polyèdres. En bref, un  $r$ -simplexe est la généralisation d'un triangle en  $r$  dimensions. Par exemple, un 0-simplexe est un point, un 1-simplexe est une ligne qui rejoint deux points, un 2-simplexe est un triangle plein et un 3-simplexe est un tétraèdre solide. Une représentation graphique de ces simplexes se trouve à la figure 2.3.



**Fig 2.3.** De gauche à droite, un 0-simplexe (point), un 1-simplexe (ligne), un 2--simplexe (triangle plein) et un 3-simplexe (tétraèdre solide) [39].

On note un simplexe par la lettre  $\sigma$  et le représentons par un tuple de points. Par exemple, si  $\sigma$  est un  $r$ -simplexe, nous écrivons

$$\sigma = ( p_0 p_1 p_2 \dots p_r ), \quad \dots\dots\dots (2.9)$$

où  $p_i$  sont les points qui le composent pour  $i = 0, 1, \dots, r$ . Au sein d'un simplexe, chaque point ou groupe de points est aussi un simplexe. On parle alors des faces de  $\sigma$ . Dans l'exemple précédent, les faces  $(p_0)$  jusqu'à  $p_r$  sont des 0-simplexes, tandis que les faces  $(p_0 p_1 p_2)$  et  $(p_0 p_1 p_r)$  sont des 2-simplexes [39].

Nous pouvons également donner une orientation aux simplexes. Un simplexe orienté signifie que l'ordre des points spécifié est important et que pour se « déplacer » sur le simplexe d'un point à l'autre, nous devons suivre cet ordre. Par exemple, une face  $(p_0 p_1 p_2)$  signifie que pour passer de  $p_0$  à  $p_2$ , il faut d'abord passer par  $p_1$ . A noter que, les permutations cycliques des points sont équivalentes entre elles.

En effet,

$$(p_0 p_1 p_2) = (p_2 p_0 p_1) = (p_1 p_2 p_0). \quad \dots\dots\dots (2.10)$$

Nous pouvons aussi inverser l'orientation d'un simplexe avec un signe négatif

$$-(p_0 p_1 p_2) = (p_1 p_2 p_0). \quad \dots\dots\dots (2.11)$$

Le déplacement sur le simplexe  $(p_0 p_1 p_2)$  est illustré par les flèches dans la partie

de gauche de la figure 2.4.



**Fig 2.4.** A gauche, le 2-simplexe  $(p_0 p_1 p_2)$  et, à droite, sa frontière donnée par  $\partial_2(p_0 p_1 p_2) = (p_1 p_2) + (p_0 p_2) + (p_0 p_1)$ .

Un complexe simplicial  $K$  est alors un ensemble fini de simplexes qui répond aux deux conditions suivantes :

1. Les faces d'un simplexe  $\sigma \in K$  appartiennent aussi à  $K$ ,
2. Si  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont deux simplexes appartenant à  $K$ , alors  $\sigma \cap \sigma' = \emptyset$  ou  $\sigma \cap \sigma' = \sigma_i$ , où  $\sigma_i$  est une face commune à  $\sigma$  et  $\sigma'$ .

De plus, si les simplexes du complexe simplicial sont orientés, on dit que  $K$  est orienté. La dimension d'un complexe simplicial est donnée par la dimension du plus grand simplexe qu'il contient. Ainsi, si nous construisons un complexe simplicial à partir de 0-simplexes et de 1-simplexes, la dimension du complexe simplicial est 1 [39].

### 3.1.1. Chaînes, cycles et frontières

Les chaînes, les cycles et les frontières sont des concepts clés de l'algèbre topologique et de l'étude des complexes simpliciaux. Une  $k$ -chaîne est une combinaison formelle de  $k$ -simplices avec des coefficients en entiers. Les frontières d'un  $k$ -simplexe sont les  $(k-1)$ -simplices qui composent ses faces. L'opérateur de frontière  $\partial_k$  permet de calculer les  $(k-1)$ -chaînes correspondantes.

Le noyau (ou kernel) de l'opérateur de frontière est l'ensemble des  $k$ -chaînes dont la frontière est vide, et un  $k$ -cycle est une  $k$ -chaîne dans ce noyau. Formellement, on peut exprimer ce noyau par :  $\partial_k(c) = c'$ , sachant que  $c$  et  $c'$  sont respectivement deux chaînes de dimension  $k$  et  $(k-1)$ ;

L'image de l'opérateur de frontière est l'ensemble des  $(k-1)$ -chaînes qui sont les frontières de  $k$ -chaînes. Les  $k$ -cycles et les  $k$ -frontières forment des sous-groupes des  $k$ -chaînes. Le groupe d'homologie  $H_k$  est défini comme le quotient des  $k$ -cycles par les  $k$ -frontières, représentant les classes d'équivalence des  $k$ -cycles modulo les  $k$ -frontières, c.-à-d., les des  $k$ -cycles qui ne sont pas des  $k$ -frontières.

Le rang de  $H_k$ , appelé le  $k^{\text{ème}}$  nombre de Betti ( $\beta_k$ ), mesure la dimension de l'espace des classes d'homologie de dimension  $k$ . En d'autres termes,  $\beta_k$  est égal au nombre de trous de dimension  $k$  dans le complexe simplicial [38].

### 3.1.2. Groups d'homologie

Le  $k^{\text{ème}}$  groupe d'homologie, noté  $H_k$ , est défini comme le quotient de l'ensemble des  $k$ -cycles par l'ensemble des  $k$ -frontières. En d'autres termes,  $H_k$  représente les classes d'équivalence des  $k$ -cycles qui ne sont pas des frontières de  $(k+1)$ -chaînes. Si la différence de deux  $k$ -cycles  $\mathbf{z}_1$  et  $\mathbf{z}_2$  est seulement une  $k$ -frontière, alors ils sont considérés comme homologues.

Le nombre de Betti, noté  $\beta_k$ , est le rang du  $k^{\text{ème}}$  groupe d'homologie, c'est-à-dire le nombre de classes d'équivalence distinctes de  $k$ -cycles. Il peut également être interprété comme la dimension de l'espace des  $k$ -cycles modélisant les trous de dimension  $k$  dans un complexe simplicial.

L'homologie algébrique permet d'identifier les structures topologiques importantes d'un complexe simplicial, telles que les composantes connexes, les tunnels et les vides. Les nombres de Betti  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ , et  $\beta_2$ , correspondent respectivement au nombre de composantes connexes, de tunnels et de vides présents dans le complexe. Ils fournissent des informations sur les propriétés topologiques du complexe simplicial et permettent de caractériser sa structure en termes de trous de différentes dimensions [53].

### 3.2. Construction du complexe simplicial à partir de graphe

Les complexes simpliciaux peuvent être construits à partir de graphes (non orientés ou orientés) de différentes manières. Deux modèles de complexe sont à considérer selon la construction: complexe de voisinage et complexe de clique. Pour le complexe de voisinage, chaque sommet du graphe est représenté par un simplexe qui inclut le sommet lui-même ainsi que tous les sommets voisins reliés par des arêtes dirigées. On peut obtenir le complexe de voisinage en incluant tous les faces de ces simplexes. Une autre construction possible du complexe de voisinage diffère en ne comprenant pas le sommet lui-même, mais uniquement les sommets voisins. On distingue alors le complexe de voisinage de premier type (incluant le sommet) et le complexe de voisinage de second type (excluant le sommet). Le complexe de clique, quant à lui, utilise les sous-graphes complets du graphe comme simplexes, avec les sommets du graphe comme sommets du complexe. Les simplexes maximaux sont

formés par les ensembles de sommets qui constituent les cliques du graphe. Il est également possible d'utiliser d'autres propriétés préservées lors de la suppression de sommets ou d'arêtes pour construire des complexes simpliciaux à partir de graphes. Pour plus de détails sur ces méthodes et la relation entre les graphes et les complexes simpliciaux, vous pouvez vous référer à [53].

### 3.3. Autres structures topologiques

Les invariants topologiques sont extrêmement utiles dans de nombreuses applications liées à l'imagerie numérique et à la modélisation géométrique. L'homologie et l'homotopie avec ses groupes forment un exemple de ces invariants, qui n'ont pas encore été pleinement exploré dans l'imagerie numérique. En topologie algébrique, pour extraire ces invariants topologiques, des structures de complexe sont nécessaires. Les plus utilisées sont les structures simpliciales, cubiques et cellulaires. Pour les structures cellulaires, l'élément de base qui forme le complexe cellulaire est la cellule qui est morphique à une boule topologique de géométrie différente. Un complexe cellulaire est une suite de collections ou chaque collection regroupe des cellules de même dimension. Pour les structures cubiques, le complexe cubique est constitué de cube élémentaire qui prend la forme cubique. Géométriquement, un cube est volume avec huit parois ou faces rectangulaires, ou un carré, ou une arête ou un sommet respectivement en dimensions 3, 2, 1 ou 0. Beaucoup d'approches liées à la structure de complexe cubique sont proposées en littérature.

## 4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les concepts principaux de la topologie algébrique et plus spécifiquement le complexe simplicial et l'homologie simpliciale. et aussi des concepts liés à la géométrie. Nous avons vu comment les complexes simpliciaux permettent de représenter les relations topologiques entre les éléments d'un ensemble de données à l'aide de simplexes et de leurs faces. Nous avons vu aussi comment construire un complexe simplicial à partir du graphe. Ces structures topologiques sont utilisées pour étudier les propriétés topologiques et quantifier les trous et les cavités dans un espace donné. Dans le prochain chapitre, nous nous concentrerons sur la conception de l'algorithme utilisé pour extraire un squelette topologique.

## Chapitre 3

# **Modélisation squelettique**

## 1. Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode ou algorithme basé sur un concept de la topologie algébrique qui est la réduction des primitives d'un complexe topologique (simplicial, cubique, cellulaire ou autres). Notre approche qui se base sur le concept de réduction des primitives modélise les données de triangulation sous forme de complexe simplicial initial 2D composé de primitives ou cellules 2d (triangles), 1d (arêtes) et 0d (sommets). Un processus d'étiquetage est appliqué sur ces primitives (fonction de distance ou distance map) pour guider après le processus de réduction. L'algorithme se termine par réduire itérativement les primitives simples du complexe selon le schéma d'étiquetage appliqué. Le nouveau modèle ainsi conçu se caractérise par la fusion de la topologie et de la géométrie. Dans ce qui suit, nous présenterons notre modèle topologique en définissant les différentes étapes de modélisation.

## 2. Modèle topologique

Comme est mentionné précédemment, le modèle proposé est basé sur une méthode qui emploie une complexe simplicial (représentation des données de triangulation) et génère à la fin une structure topologique qui est un squelette composé uniquement de primitives 1d (où arêtes) à partir d'un complexe simplicial initial (représentation des données de triangulation). Le choix de cette structure est due à leur capacité de :

- être un descripteur de formes de haut niveau, performant et discriminant ;
- assurer la reconnaissance des formes avec robustesse et efficacité ;
- maintenir les propriétés géométriques des objets discrets inclus dans la forme;
- préserver la topologie durant les petits changements (dilatation, ...) et aussi en cas de transformations affines (translation, rotation où mise à l'échelle).

Pour manipuler les deux représentations liées à ce nouveau modèle (complexe simplicial et squelette), notre méthode proposée adopte les axes suivants :

### 2.1. Préparation les données de triangulation

Une triangulation des objets 2D peut varier en fonction du contexte dans lequel elle est utilisée, généralement elle est donnée dans des fichiers de formats standard (.gts, .mesh, .ply, ....) . Le fichier de données d'une triangulation 2D est organisé par :

- une entête qui définit la taille des données (nombre triangles, arêtes, et sommets).
- séquence de où sommets points en coordonnées  $(x, y)$ .
- séquence d'arêtes où chaque arête est définie par le pair (*indice du sommet1*, *indice du sommet2*).

- séquence de triangles où chaque triangle est défini par le triplet (*indice du sommet1*, *indice du sommet2*, *indice du sommet3*).

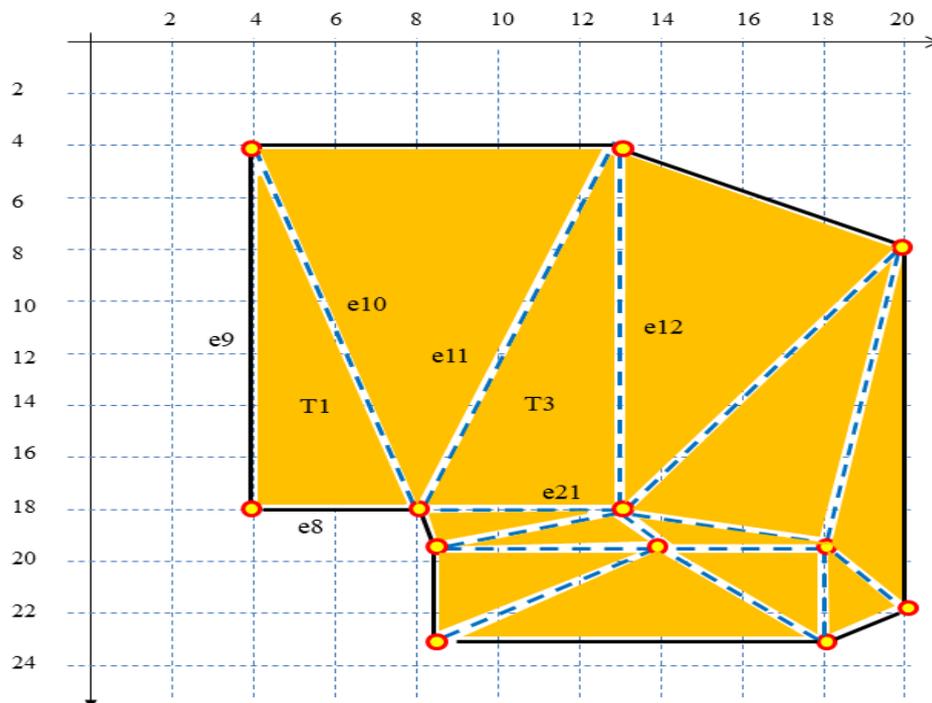
Dans notre travail, nous avons utilisé les formats de fichier .mesh et .gts).

Lecture des données : Parcourez le fichier en extrayant toutes les données de la triangulation. Ces données servent après à créer le complexe simplicial initial avec ces structures de données correspondantes (listPoints, listVertices, listAretes et listTriangles), sachant que

- listPoints : liste de tous les points de la triangulation avec les coordonnées cartésiennes.
- listVertices : liste pour les indices des points.
- listAretes : liste de pairs (*indice du sommet1*, *indice du sommet2*).
- listTriangles : liste de triplets (*indice de l'arete1*, *indice de l'arete2*, *indice de l'arete3*).

Dans la figure 3.1 un exemple d'un objet 2D qui montre une triangulation avec :

- **12** Sommets (P1, P2, ....., P12), dont 9 de frontière et 3 internes.
- **24** Arêtes, dont 9 de frontière et 15 internes.
- **13** Triangles, dont 8 de frontière et 5 internes.



**Fig. 3.1.** Exemple de triangulation d'un objet 2D.

Dans l'exemple, le premier triangle T1 de triplet (8, 9, 10) est un triangle de frontière composé des arêtes e8, e9 et e10. Par contre, le triangle T3 de triplet (11, 12, 21) est un triangle interne composé des arêtes e11, e12 et e21.

## 2.2. Processus d'étiquetage

La méthode de l'étiquetage des primitives du complexe consiste à attribuer des étiquettes ou labels aux primitives du complexe (triangles, arêtes et sommets). C.-à-d., qu'on applique une fonction de distance (ou distance map) sur toutes les primitives du complexe. Voici comment appliquer l'étiquetage:

*Étiquetage initial :*

A l'étape initiale, on initialise de toutes les primitives par l'étiquette zéro. Après, on applique l'étiquetage itérativement en débutant par l'étiquette de valeur 1.

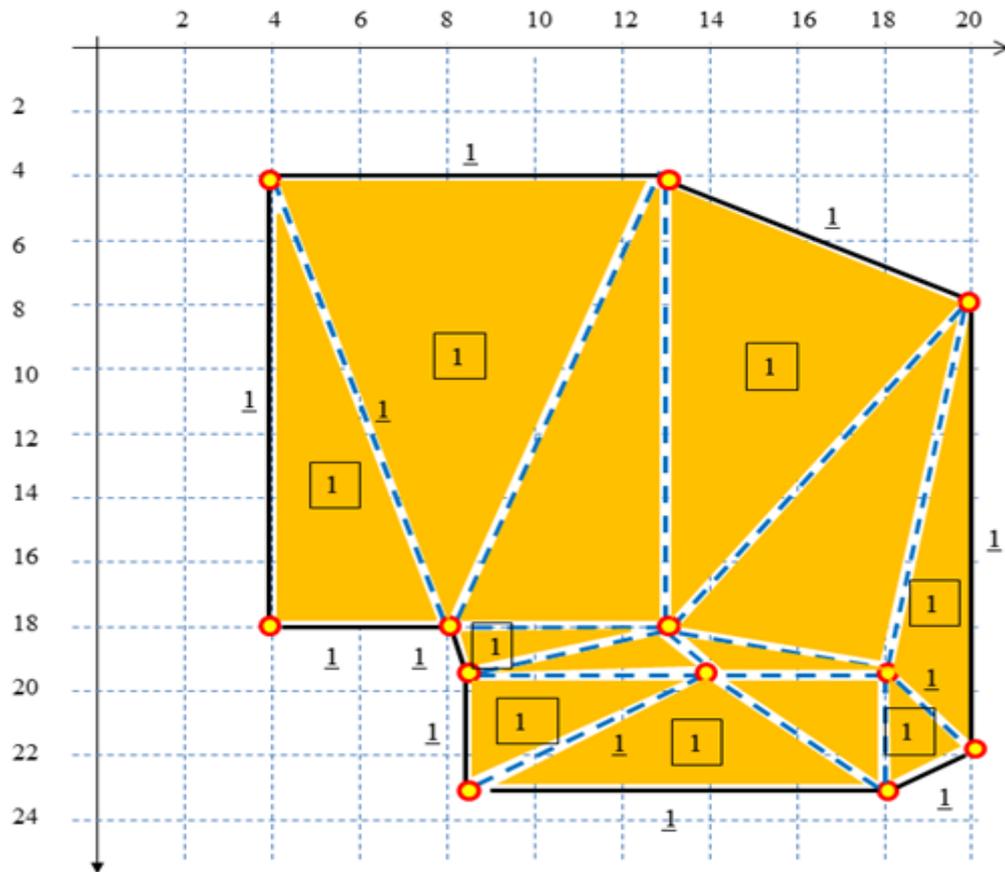
*Étiquetage 1ère itération:* Pendant cette itération, on attribue la valeur 1 aux primitives de frontière.

*Étiquetage kième itération :* Pour étiqueter les triangles à l'itération k, on attribue la valeur k aux triangles qui sont adjacents aux triangles d'étiquette k-1.

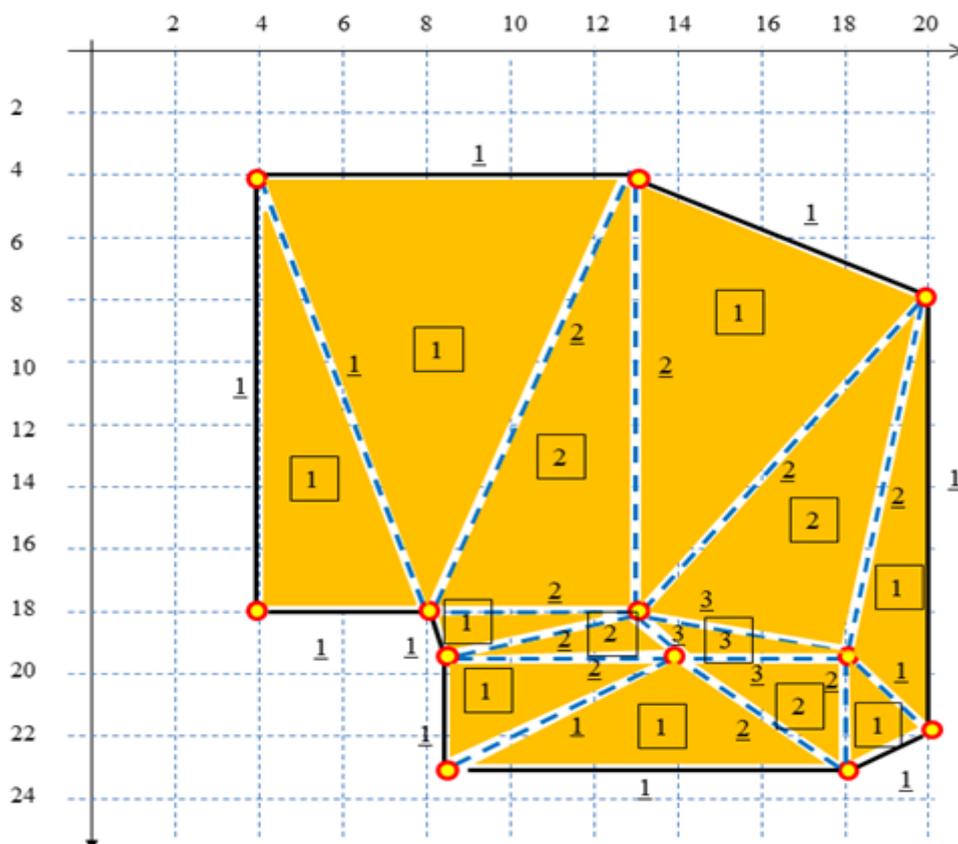
Pour étiqueter les arêtes, on applique l'étiquetage sur les trois arêtes qui sont des faces d'un triangle  $T_i$  d'étiquette k. Pour étiqueter les sommets, on applique l'étiquetage sur les deux sommets qui sont des faces d'une  $e_j$  d'étiquette k.

La figure 3.2 montre l'étiquetage initial des primitives de frontière (label de valeur 1). Par contre, la figure 3.3 montre l'étiquetage final c.-à-d. après la dernière itération ( $k=2$ ).

Aussi, pour la clarté des deux figures, uniquement les étiquettes qui concernent les triangles sont illustrées.



**Fig. 3.2.** l'étiquetage initial des primitives de frontière



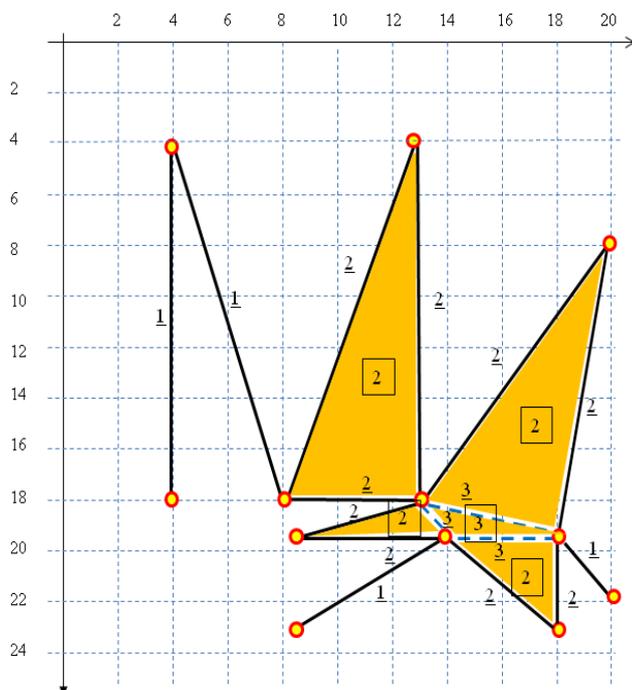
**Fig. 3.3.** Etiquetage final de toutes les primitives

### 2.3. Réduction du complexe

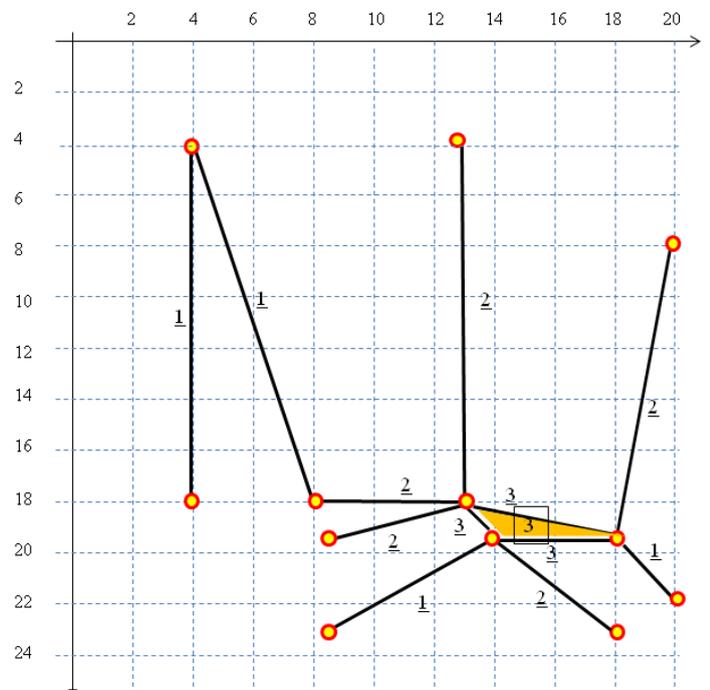
La réduction du complexe simplicial initial représentant les données de la triangulation. Pour un complexe de dimension 2, deux niveaux de réduction sont possibles. Une réduction de premier niveau  $R(T_i, e_j)$  est l'écrasement de la primitive triangle  $T_i$  (d'indice  $i$ ) par une de ces faces  $e_j$  (arête d'indice  $j$ ). Cet écrasement provoque l'élimination des deux primitives des deux listes correspondantes ( $T_i$  de `listTriangles` et  $e_j$  de `listAretes`). La réduction de premier niveau est répété jusqu'à ce qu'il n'y aura aucune triangle à réduire, c.-à-d. la liste `listTriangles` soit vide.

Une réduction de deuxième niveau  $R(e_i, s_j)$  est l'écrasement de la primitive arête  $e_i$  (d'indice  $i$ ) par une de ces faces  $s_j$  (sommet d'indice  $j$ ). Cet écrasement provoque l'élimination des deux primitives des deux listes correspondantes ( $e_i$  de `listAretes` et  $s_j$  de `listVertices`). La réduction de deuxième niveau est répété jusqu'à un critère d'arrêt (les arêtes et les sommets restants respectivement dans les listes `listAretes` et `listVertices` représentent ensemble le squelette topologique à extraire).

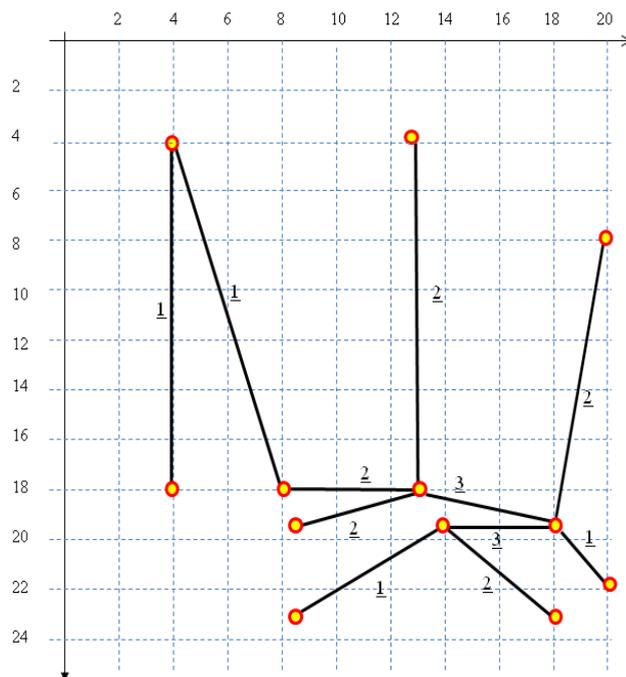
Après l'application de processus de réduction sur l'exemple de la figure 3.1, un squelette topologique final composé uniquement des arêtes est généré. Les figures 3.4, 3.5 et 3.6 montrent respectivement toutes les réductions de premier niveau pour les étiquettes 1, 2 et 3. Alors que la figure 3.7 illustre la réduction du complexe de deuxième niveau avec `label=1` (critère d'arrêt `label <=1`).



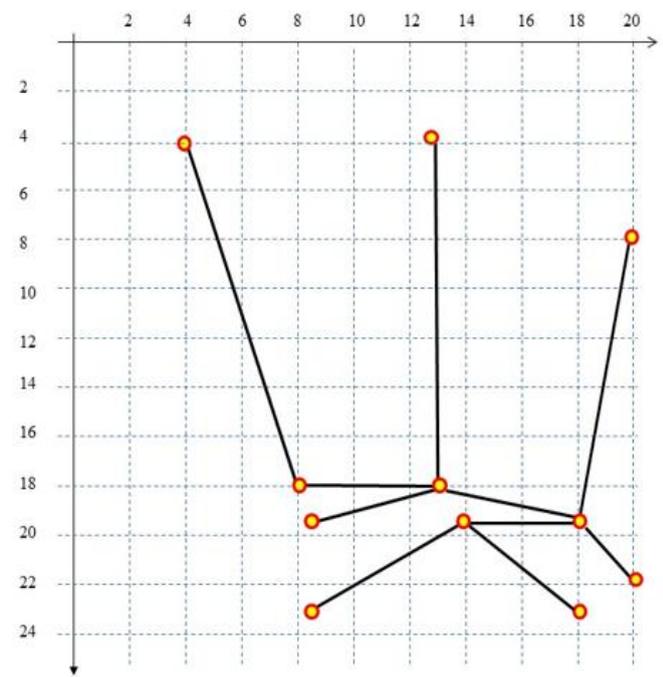
**Fig. 3.4.** Réduction du complexe de premier niveau et `label=1`



**Fig. 3.5.** Réduction du complexe de premier niveau et `label=2`



**Fig. 3.6.** Réduction du complexe de premier niveau et label=3



**Fig. 3.7.** Réduction du complexe de deuxième niveau et uniquement label=1 (squelette topologique final)

Maintenant, nous présentons l'algorithme principal pour construire le squelette topologique qui est illustré comme suit :

### Construction du squelette topologique

Entrée : forme 2D représentée en maillage triangulée.

1. Entrée de la triangulation de la forme 2D :
  - lecture des fichiers de données de maillage. mesh et .gts
  - création de structures ou primitives :
    - listPoints
    - listVertices
    - listAretes
    - listTriangles
2. Construction du complexe simplicial.
3. Etiquetage des primitives du complexe :
  - application d'une fonction de distance (distance map).
4. Réduction du complexe.
5. Sortie : squelette topologique.

### 3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un modèle topologique pour des objets 2D. Nous avons présenté un algorithme pour représenter les données de triangulation par des primitives topogéométriques, étiqueter ces primitives et enfin réduire ou amincir ce complexe pour donner une représentation plus réduite et plus discriminante. Cet algorithme modélise les données de triangulation sous forme de complexe simplicial 2D composé de primitives ou cellules  $2d$ ,  $1d$  et  $0d$ . Le processus de réduction réduit itérativement les primitives simples du complexe selon l'étiquetage appliqué. Le chapitre suivant est consacré à l'implémentation du modèle et les résultats expérimentaux sur des formes 2D.

## Chapitre 4

# **Implémentation et résultats expérimentaux**

## 1. Introduction

Dans ce chapitre, nous détaillons l'implémentation de notre modèle basé sur quelques concepts de la topologie algébrique. Nous nous concentrons principalement sur la représentation de complexe simplicial des données de maillage triangulé pour la caractérisation d'objets 2D. Notre algorithme adopte trois étapes: représentation des données de triangulation, (par un complexe simplicial initial), application consécutivement les deux processus d'étiquetage et de réduction. L'algorithme conduit à générer le squelette topologique où un complexe réduit. Ce chapitre est composé de deux parties: l'implémentation du système et les résultats expérimentaux.

## 2. Environnements matériels et logiciels

Cette section est consacrée à l'implémentation de notre modèle topologique par le graphe squelettique conçu dans le chapitre précédent. Cette section d'implémentation qui est réalisée en java est débutée par décrire les environnements matériels et logiciel. L'environnement logiciel englobe le développement sous Eclipse et le langage Java.

### 2.1. Environnements matériels

Au niveau du matériels, nous avons utilisé un ordinateur qui possède les caractéristiques suivantes :

- ✚ Processeur : AMD E2-7110 APU 1.80 GHz
- ✚ Disque dur : 500 Go
- ✚ RAM : 4.00 Go
- ✚ Carte graphique : AMD Radeon R2.

### 2.2. Environnements logiciels

Dans le contexte de l'informatique, l'Eclipse est un environnement de développement intégré (IDE) pour le développement d'applications en utilisant le langage de programmation Java et autres langages de programmation tels que C/C++ , Python, PERL, Ruby, etc. La plate-forme Eclipse qui fournit la base de l'IDE Eclipse est composée de plug-ins et est conçu pour être extensible à l'aide de plug-ins supplémentaires. Développé à l'aide de Java, la plate-forme Eclipse peut être utilisée pour développer des applications client riche, environnements de développement intégrés, et d'autres outils. Eclipse peut être utilisé comme un IDE pour n'importe quel langage de programmation pour lequel un plug-in est disponible [40], la figure 4.1 représente la fenêtre de démarrage d'Eclipse.



**Fig. 4.1.** : Fenêtre de démarrage d'Eclipse IDE (nouvelle version).

### 2.3. Langage de programmation

Java est un langage de programmation à usage général, évolué et orienté objet dont la syntaxe est proche du C. Ses caractéristiques ainsi que la richesse de son écosystème et de sa communauté lui ont permis d'être très largement utilisé pour le développement d'applications d'entreprises et mobiles [40, 41].

## 3. Implémentation

Cette partie décrit l'implémentation de notre approche de modélisation qui conduit à générer un modèle en utilisant un structures topologiques mentionnées précédemment. Nous avons suivi en détail les étapes décrites dans le chapitre de conception. Cette implémentation a été réalisée en utilisant des classes Java développées avec les API appropriées dans l'environnement Eclipse. L'objectif principal de cette implémentation est de valider notre approche en effectuant des tests et des expérimentations ultérieures.

### 3.1. Implémentation de l'algorithme principal

L'algorithme principal du modèle est traduit en code java par l'implémentation d'un projet java avec des classes spécifiques qu'on cite ici les plus importantes.

### 3.2. Les principales classes

Le programme pour notre approche implémenté est décrit par un package composé de plusieurs classes Java. Chaque classe est caractérisée par ses propres attributs et méthodes. Les principales classes sont illustrées comme suit :

```

Class Principal {
    // cette classe contient l'interface graphique du programme, et pilotée par la
    // méthode main()

    public static void main(String[] args) {
        // creation de l'instance de la classe Skeletonization
        Skeletonization ske = new Skeletonization();
        // appliquer la squelettisation
        ske.applySkeletonization();
        :
        :
    }

    public void applySkeletonization() {
        // permet de définir une interface graphique pour afficher le squelette
        // topologique d'un maillage triangulé en 2D avec à l'aide de primitives graphiques
        // des API Swing.
        :
    } // fin de la classe
}

Class Skeletonization{
    // attributs publics
    ArrayList<Point.Double> listPoints = null;
    ArrayList<int[]> listVertices = null;
    ArrayList<int[]> listAretes = null;
    ArrayList<int[]> listTriangles = null;
    :
    :

    public void applySkeletonization() {
        // 1. Entrée maillage de triangulation de la forme 2D:
        // lecture les données de maillage (fichiers .mesh et .gts)
        // création de structures ou primitives (listPoints, listVertices, listAretes
        // et listTriangles)
        this.readTriangulation();
        // affichage la structure du complexe
        this.displayingComplex();

        // 2. Construction du complexe simplicial.
        // compléter la création de structures précédentes
        this.constructionComplex();
        // affichage la structure du complexe
        this.displayingComplex();

        // 3. Etiquetage des primitives du complexe:
        this.labelingComplex();
        // 4. Réduction du complexe:
        // triangles par edges R(Ti, ej)) en utilisant l'incidence vecteur i_vec1d
        // edges par vertices R(ei, j)) en utilisant l'incidence vecteur i_vec0d
    }
}

```

```
    this.reductionComplex(); // permet de réduire le complexe simplicial initial  
}  
  
:  
  
} // fin de la classe
```

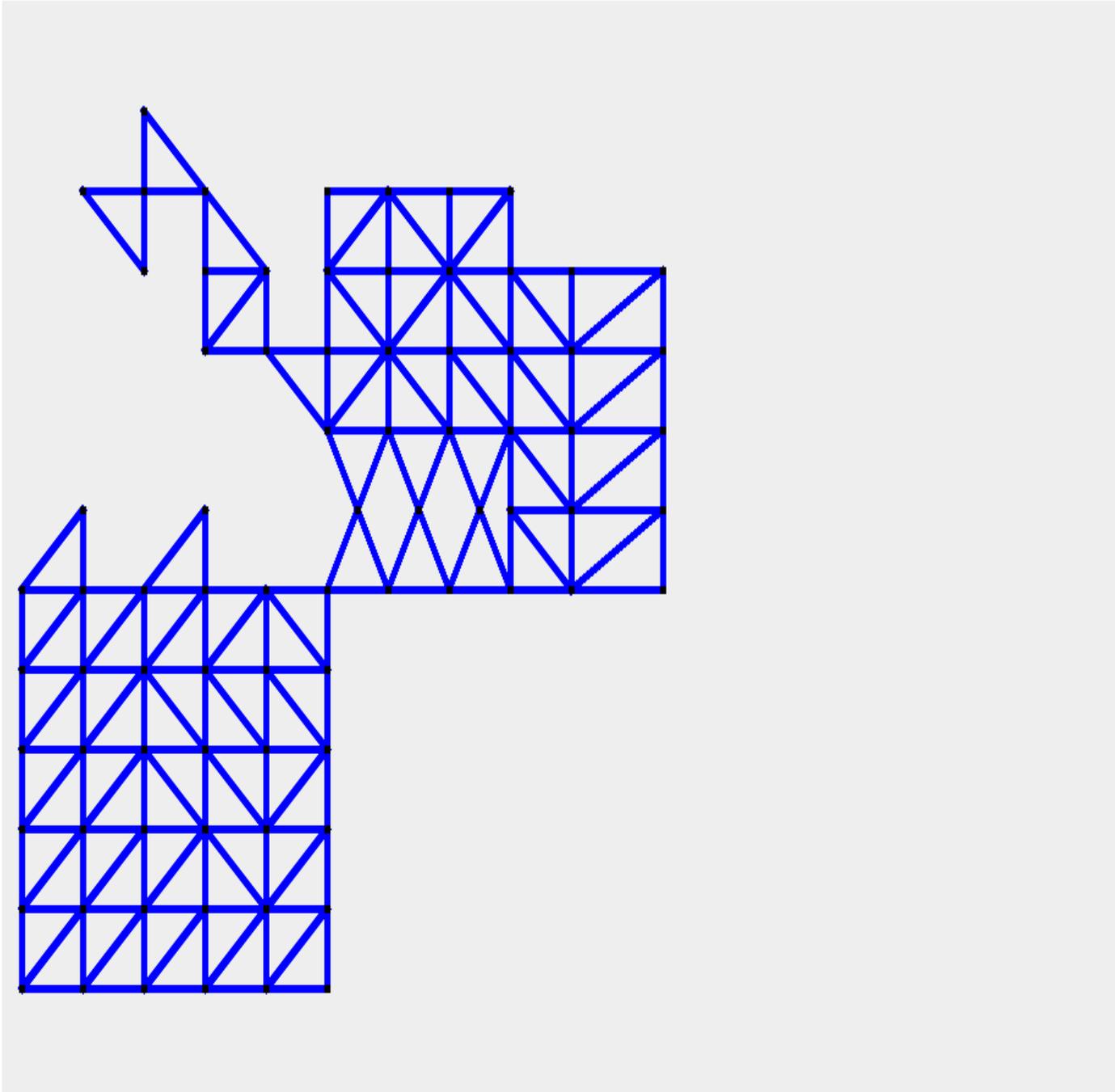
#### 4. Résultats expérimentaux

Cette partie est consacrée à présenter les résultats expérimentaux pour valider le modèle topologique de squelettisation sur des formes 2D. Les tests sont réalisés sur des exemples de formes 2D du site **MESH** [42], afin d'évaluer la performance et l'exactitude de notre modèle. **MESH** est un répertoire de données qui contient des exemples de fichiers de maillage, qui définissent un maillage d'éléments finis.

##### Test 01 :

Le premier test illustre un exemple de forme 2D synthétique avec des données de triangulation qui comprend 80 points, 180 arêtes et 98 triangles (voir la figure 4.2).

la fenêtre de visualisation claire du maillage triangulé



**Fig. 4.2.** Forme 2D synthétique

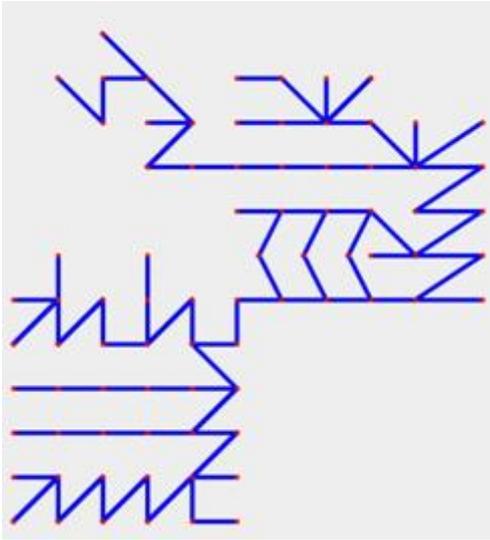
Après la réduction du complexe simplicial correspondant, on obtient les résultats suivants:

Nombre de vertices ou sommets non réduits: 80

Nombre d'arêtes non réduites : 82

Nombre de triangles non réduits: 0

Ces résultats reflètent la visualisation graphique suivante, dont les lignes en bleu et les points en noir représentent respectivement les arêtes non réduites et les sommets non réduits.



**Fig. 4.3.** Visualisation du squelette topologique de la forme 2D synthétique .

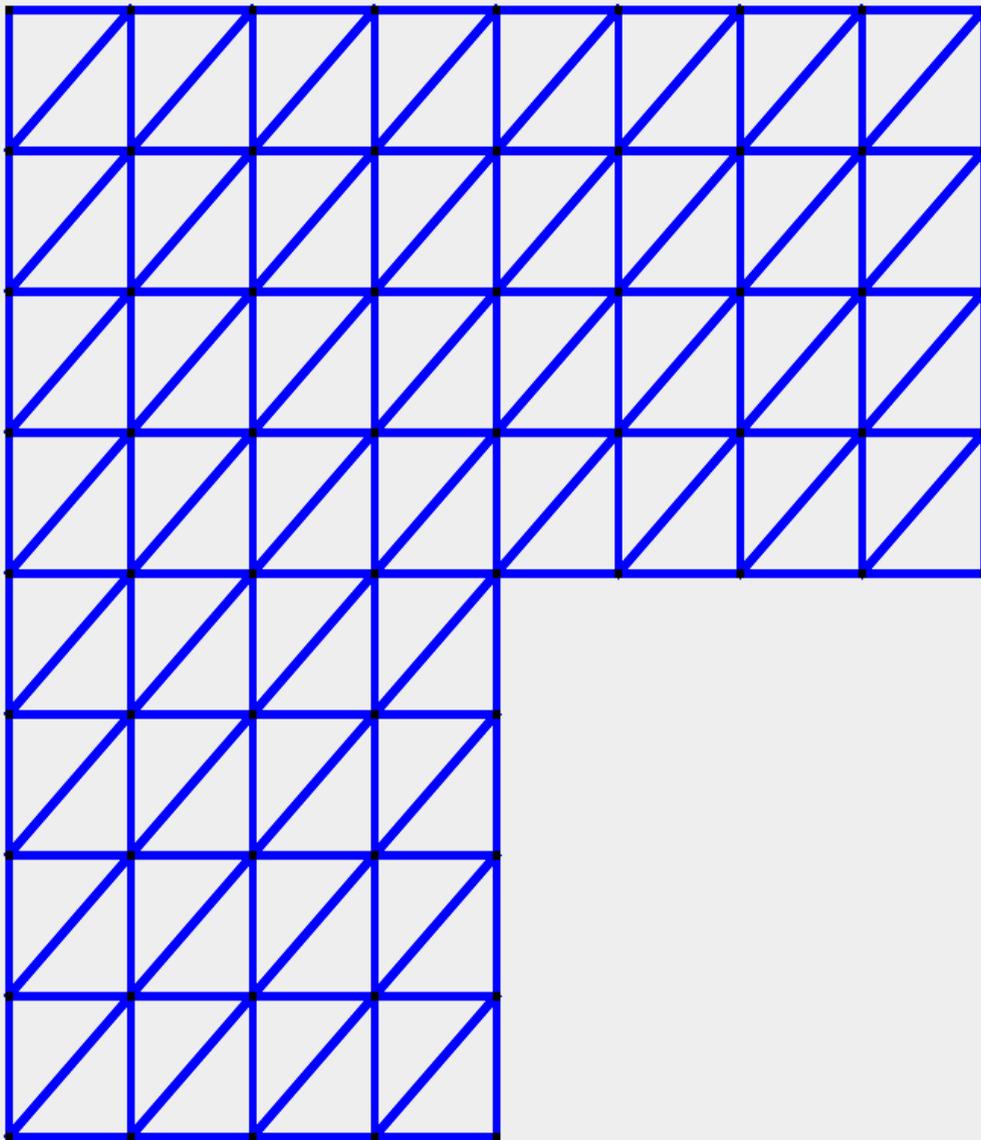
### Test 02 :

Le deuxième test est réalisé sur la triangulation de l'image *ELL* du site MESH [62]. *ELL* est la forme 2D L, avec 65 points, 160 arêtes et 96 triangles (voir la figure 4.4).

- *ell.mesh*, fichier des données de triangulation.
- *ell.png*, image PNG.

la fenêtre de visualisation claire du maillage triangulé

— □



**Fig. 4.4.** Forme 2D L de l'image *ELL* du site MESH [42]

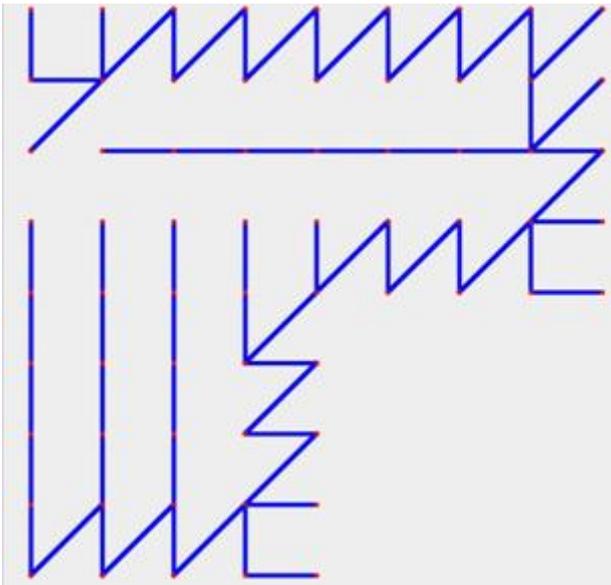
Après la réduction du complexe simplicial correspondant, on obtient les résultats suivants:

Nombre de vertices ou sommets non réduits: 65

Nombre d'arêtes non réduites : 64

Nombre de triangles non réduits: 0

Ces résultats reflètent la visualisation graphique suivante, dont les lignes en bleu et les points en noir représentent respectivement les arêtes non réduites et les sommets non réduits.



**Fig. 4.5.** Visualisation du squelette topologique de la forme 2D *ELL*.

### Test 03 :

Le troisième test est réalisé sur la triangulation de l'image *GREENLAND\_OLD* du site MESH [42]. *GREENLAND\_OLD* est une carte géographique, avec 66425 points, 197616 arêtes et 131189 triangles (voir la figure 4.4).

- *greenland\_old.mesh*, fichier des données de triangulation.
- *greenland\_old.png*, image PNG d'une partie de triangulation.

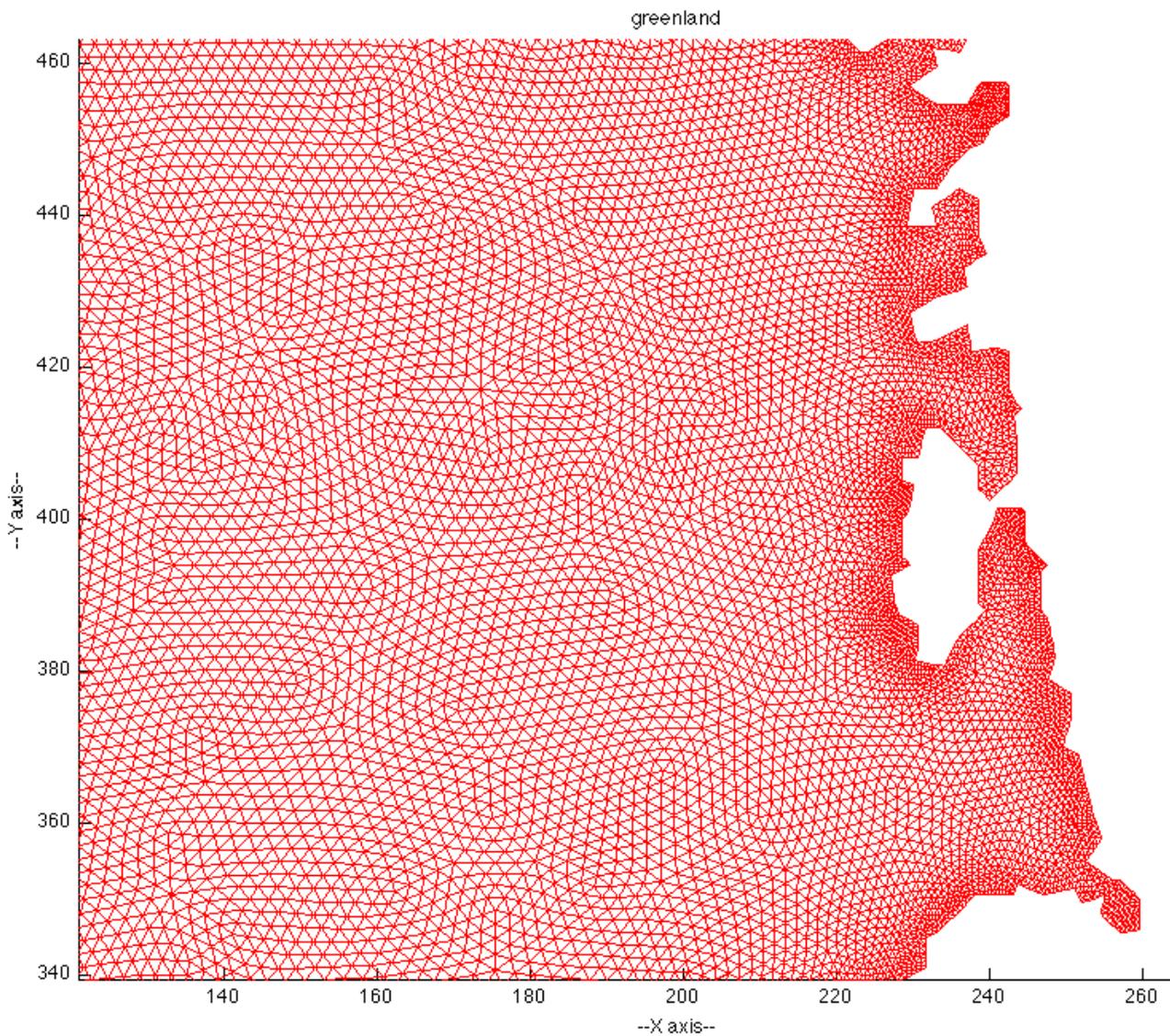
Après la réduction du complexe simplicial correspondant, on obtient les résultats suivants:

Nombre de vertices ou sommets non réduits: 66425

Nombre d'arêtes non réduites : 66427

Nombre de triangles non réduits: 0

Ces résultats reflètent la visualisation graphique suivante, dont les lignes en bleu et les points en noir représentent respectivement les arêtes non réduites et les sommets non réduits.



**Fig. 4.6.** Carte géographique *GREENLAND\_OLD* du site MESH [42]

### 3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'implémentation et les résultats expérimentaux de notre modèle de squelettisation. Nous avons étudié principalement la représentation de complexe simplicial des données de maillage triangulé pour la caractérisation d'objets 2D. L'algorithme conçu a conduit à générer efficacement le squelette topologique 2D.

Nos tests sont réalisés principalement sur des exemples de forme 2D du site MESH [42]. Les tests effectués prouvent la réussite et l'efficacité du modèle topologique de squelettisation conçu à la base des données de triangulation.

---

## Conclusion Générale

Dans ce mémoire, nous avons développé une approche qui conduit à concevoir un modèle topologique destiné à la représentation et caractérisation des objets 2D. Ce modèle a concevoir est caractérisé par l'association des propriétés géométriques et topologiques des objets.

Nous avons présenté un algorithme composé de trois étapes: représenter les données de triangulation par des primitives topologiques dans un complexe simplicial 2D (ce complexe est composé de primitives ou cellules 2d, 1d et 0d dont sont générées à partir les données de maillage triangulé de la forme), étiqueter ces primitives et enfin réduire ou amincir ce complexe pour donner une représentation plus réduite et plus discriminante. Le processus de réduction réduit itérativement les primitives simples du complexe selon l'étiquetage appliqué. En détails, ce modèle est réalisé par l'emploi des concepts liés à la topologie algébrique et aussi aux concepts liés à la géométrie pour avoir des résultats sous forme de squelette topologique. Les concepts algébriques s'appliquent sur un complexe simplicial en employant le processus de réduction sur ces primitives. Ce modèle est bénéfique en matière de données de maillage triangulé. Cela permet de réduire considérablement le volume d'informations à traiter, ce qui est particulièrement bénéfique dans la représentation et caractérisation des objets 2D.

En résumé, on peut dire que l'objectif du travail est atteint avec ce modèle conçu doté d'un algorithme robuste, efficace et invariant aux transformations affines et aux petits changements. Ce modèle topo-géométrique combine les caractéristiques géométriques et topologiques de la forme pour obtenir des squelettes topologiques bien précis. Aussi, il a été testé sur des exemples de formes 2D et a prouvé sa performance, alors qu'on peut l'appliquer sur des données triangulation de grande taille et même sur des données triangulation d'objets 3D..

---

## Bibliographie

- [1] Le Bourgeois, F., & Emptoz, H. (2007, September). Skeletonization by gradient regularization and diffusion. In *Ninth International Conference on Document Analysis and Recognition (ICDAR 2007)* (Vol. 2, pp. 1118-1122). IEEE.
- [2] H. Blum, « A transformation for extracting new descriptors of shape », Whaten-Dunn (ed) *Models for the perception of speech and visual forms*, pp. 362–380, MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1967.
- [3] Bouix, K. Siddiqi, « Divergence-based medial surfaces », *European conference on computer vision*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, pp. 603-618, 2003.
- [4] N. Amenta, S. Choi, R. Kolluri, « The power crust, unions of balls and the medial axis transform », *International Journal of Computational Geometry and its Applications*, vol. 19, no. 2–3, pp. 127-153, Jul. 2001.
- [5] S. Prohaska, « Skeleton-based visualization of massive voxel objects with network-like architecture », *Phd Thesis*, University of Potsdam, 16 Apr. 2007.
- [6] T. Tung, « Indexation 3D de bases de données d'objets par graphes de Reeb améliorés », *Thèse Phd*, Laboratoire de l'informatique, Télécom ParisTech, France, 10 Juin 2005.
- [7] S. H. Baloch, H. Karim, « 2D shape modeling using skeletal graphs in a Morse theoretic framework », *Statistics and Analysis of Shapes*, Part of the series *Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology*, Birkhäuser Boston, DOI 10.1007/0-8176-4481-4\_3 pp. 61-80, 2006.
- [8] N. Hirasakolwong, K. Vu, K. Hua KA, S. Lang, « Shape recognition based on the medial axis approach », *Proceedings of ICME'04*, Taipei, Taiwan, 27–30 Jun., 2004.
- [9] S. Zhu, A. Yuille, « FORMS: A flexible object recognition and modeling systems », *International Journal of Computer Vision*, vol. 20, no. 3, pp. 187–212, 1996. 57
- [10] K. Siddiqi, J. Zhang, D. Macrini, A. Shokoufandeh, S. Bouix, and S. Dickinson, «Retrieving articulated 3-D models using medial surfaces». *Machine Vision and Applications*, vol.19, no. 4, pp. 261–275, Jul. 2008
- [11] H. Sundar, D. Silver, N. Gagvani, S. Dickinson, «Skeleton based shape matching and retrieval», *Shape Modeling International*, Washington, USA, pp. 130, 12-15 May 2003.
- [12] A. Verroust, F. Lazarus, « Extracting skeletal curves from 3D scattered data », *International Journal of Computer Graphics*, vol. 16, no. 1, pp. 15–25, Feb. 2000.
- [13] F. Leymarie, B. Kimia « The Shock Scaffold for Representing 3D Shape » 4<sup>th</sup>

---

International Workshop on Visual Form, Italy, vol 2059, pp 216-227, May 28–30, 2001.

[14] S. Biasotti, « Computational topology methods for shape modeling applications», Phd Thesis, Genova University, Italy, May 2004.

[15] K. Siddiqi, A. Shokoufandeh, S.J. Dickinson, and S.W. Zucker, « Shock graphs and shape matching», *International Journal of Computer Vision*, vol. 35, no. 1, pp. 13–32, 1999.

[16] M. Pelillo, K. Siddiqi, S. Zucker, « Matching hierarchical structures using association graphs », *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 21, no. 11, pp. 1105–1120, 1999.

[17] T.B. Sebastian, P.N. Klein, B.B. Kimia, « Recognition of shapes by editing their shock graphs», *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 26, pp. 550–571, 2004.

[18] R. Gonzalez–Díaz, M. J. Jimenez, B. Medrano and P. Real. Chain Homotopies for Object Topological Representations. *Discrete Applied Mathematics*, vol.157, no.03, pp. 490-499. 2009.

[19] D. Boltcheva, D. Canino, S. Merino Aceituno, J. C. Leon, L. De Floriani, and F. Hetroy. An Iterative Algorithm for Homology Computation on Simplicial Shapes. *ComputerAided Design*, 43(11): 1457–1467, 2011.

[20] I. Karaka and O. Ege. Some Results On Simplicial Homology Groups of 2D Digital Images. *International Journal of Information and Computer Science*, 1(8) :198–203, 2012

[21] S. Peltier, S. Alayrangues, L. Fuchs, and J. O. Lachaud. Computation of Homology Groups and Generators. *Computers & Graphics*, 30(1) :62–69, 2006.

[22] G. Damiand, S. Peltier, and L. Fuchs. Computing Homology For Surfaces With Generalized Maps: Application to 3d Images. In *Proceedings of 2nd International Symposium on Visual Computing*, vol. 4292, pp. 1151–1160, Lake Tahoe, Nevada, USA, 2006.

[23] L. Liu, E. W. Chambers, D. Letscher, and T. Ju. A Simple and Robust Thinning Algorithm on Cell Complexes. *Pacific Graphics*, P. Alliez, K. Bala, and K. Zhou Editors, 29(7), 2010.

[24] G. Damiand, S. Peltier, and L. Fuchs. Computing Homology For Surfaces With Generalized Maps: Application to 3d Images. In *Proceedings of 2nd International Symposium on Visual Computing*, vol. 4292, pp. 235-244, Lake Tahoe, Nevada, USA, LNCS, Springer-verlag. 2006

[25] G. Damiand, S. Peltier, and L. Fuchs. Computing Homology Generators for Volumes Using Minimal Generalized Maps. *International Workshop on Combinatorial Image Analysis IWCI*A. Part of the *Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 4958:63–74, 2008.

[26] D. Coeurjolly, A. Montanvert, J-M. Chassery, "Géométrie discrète et images numériques",

- chapitre 5: Distances discrète , Collection Traité IC2 - Traitement du signal et de l'image.
- [27] S. Derdar. Extraction des Invariants et Mise en Correspondance entre Images en Utilisant la Théorie de L'homologie Cubique de L'approche Topologique, Thèse Doctorat en Sciences. Université de Badji Mokhtar-Annaba. 2018.
- [28] R. Gonzalez-Diaz, M. J. Jimenez, and B. Medrano. 3D Well-Composed Polyhedral Complexes. *Discrete Applied Mathematics*, 183:59–77, 2015.
- [29] D. Ziou and M. Allili. Generating Cubical Complexes from Image Data and Computation of the Euler Number. *Pattern Recognition*, 35(12):2833–2839, 2002.
- [30] M. Allili, K. Mischaikow, A. Tannenbaum. Cubical Homology and the Topological Classification of 2d and 3d Imagery. In *IEEE International Conference on Image Processing*, pp 173–176, 2001.
- [31] J. Chaussard, M. Couprie, Surface Thinning in 3D Cubical Complexes. In : P. Wiederhold, R.P. Barneva (eds) *Combinatorial Image Analysis. IWCIA. Lecture Notes in Computer Science*, vol 5852. Springer, Berlin, Heidelberg, 2009.
- [32] A. Gonzalez-Lorenzo, A. Bac, J. L. Mari, Real. Cellular Skeletons: A New Approach to Topological Skeletons with Geometric Features. *International Conference on Computer Analysis of Images and Patterns CAIP. Part of the Lecture Notes in Computer Science*, SpringerVerlag, Berlin, Heidelberg, 9257:616–627, 2015.
- [33] P. Dlotko and R. Specogna, 'Topology Preserving Thinning of Cell Complexes', *IEEE Transactions on Image Processing*, 23(10), pp. 4486–4495, Oct, 2014.
- [34] A. Gonzalez-Lorenzo, A. Bac, J.-L. Mari, P. Real, 'Cellular Skeletons: A New Approach to Topological Skeletons with Geometric Features', *Computer Analysis of Images and Patterns*, 9257, 616-627.
- [35] M. Couprie, 'Topological maps and robust hierarchical Euclidean skeletons in cubical complexes'. *Computer Vision and Image Understanding*, 117(4): 355-369, 2013.
- [36] Q. Y. Zhou and T. Ju and S. M. Hu, 'Topology Repair of Solid Models Using Skeletons', *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 13(4), pp. 675–685, Jul, 2007.
- [37] P. Wiederhold, S. Morales, 'Thinning on Cell Complexes From Polygonal Tiling', *Discrete Applied Mathematics*, 157(16):3424-3434, August 2009.
- [38] D. Horak, S. Maletic, M. Rajkovic, 'Persistent homology of complex networks'. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2009(03), P03034.
- [39] X. Roy-Pomerleau, 'Inférence d'interactions d'ordre supérieur et de complexes simpliciaux à partir de données de présence/absence', Université de Laval, Maîtrise en physique, Québec, Canada, 2020.

## Webographie

[40] Eclipse integrated development environment, Tutorials Point, 2015 disponible sur : "[https://www.tutorialspoint.com/eclipse/eclipse\\_tutorial.pdf](https://www.tutorialspoint.com/eclipse/eclipse_tutorial.pdf)", dernière consultation : Le 10/06/2023.

[41] J. M. Doudoux, « Développons en Java avec Eclipse » disponible sur : "[http://mmontantin.free.fr/\\_docs/cpp\\_cs/Java/eclipse\\_V0\\_30.pdf](http://mmontantin.free.fr/_docs/cpp_cs/Java/eclipse_V0_30.pdf)"

[42] MESH, "<https://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/data/mesh/mesh.html> ", dernière consultation : Le 15/09/2023.