

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



## Mémoire de Master

Présenté à l'Université 08 Mai 1945 de Guelma

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de : Génie Civil & Hydraulique

Spécialité : Génie Civil

Option : STRUCTURES

Présenté par : BOUHAROUD Souheyla

---

# Formulation d'un élément fini triangulaire pour la modélisation des structures en état de déformation plane

---

Sous la direction de : Docteur HIMEUR Mohammed

Juin 2023

---

# DEDICACES

*Je dédie ce travail*

- à mon cher **papa** Mouhamed Taher,
- à ma chère **maman** Wahiba,
- à mon **frère** Mohamed Rida,
- à mes **sœurs** Boutheina et Sirine,
- à ma **tente** Hakima,
- à toute la **famille** BOUHAROUUD,
- à tous les **proches** et **amis**,
- et à toute personne ayant contribué de près ou de loin à ce travail.

# REMERCIEMENTS

*Je remercie d'abord ALLAH le tout puissant qui m'a guidé et qui m'a donné la force et la volonté de réaliser ce travail.*

*Je remercie mon Directeur de mémoire, Monsieur **HIMEUR Mohammed** docteur au département de génie civil et hydraulique à l'université du 08 mai 1945 de Guelma, d'avoir accepté à diriger ce travail avec beaucoup de disponibilité et d'efficacité, pour m'avoir fait partager son expérience et pour ses conseils et encouragements pendant toute la durée de ce travail.*

*De simples remerciements sont insuffisants pour exprimer toute ma reconnaissance envers lui.*

*Je tiens à adresser mes remerciements aux membres du jury pour avoir accepté à évaluer ce travail.*

*Je tiens à remercier tout le personnel de l'organisme national de contrôle technique et de la construction (CTC) Guelma :*

*Le directeur de l'agence Monsieur **BENDJABALLAH Kheir Eddine** pour son accueil et son accord.*

*Le tuteur du stage Monsieur **BOUCHAHED Rabeh** qui m'a suivi et m'a permis d'accomplir dans de meilleures conditions ma période de stage.*

*Les ingénieurs du département 'projet logement' (**M. LOUCIF Kamel, BENCHEIKH Raouf, SAHKI Hichem**).*

*Je dirige tous mes compliments et mes respects aux enseignants, qui ont été à la hauteur, et qui m'ont fait une bonne formation au sein de ce département.*

*Sans oublier de remercier mes chers parents pour leur affection, leur soutien et pour tous les sacrifices qu'ils ont consenti à mes côtés afin d'assurer notre éducation. Trouvez-en ce mémoire l'expression de ma haute reconnaissance.*

*Enfin je souhaite une bonne chance à tous mes camarades de la promotion Matser 2022/2023.*

## ملخص

الهدف من هذا العمل هو صياغة عنصر غشائي ثلاثي محدود مصمم لنمذجة الهياكل في حالة تشوه المستوى. يعتمد هذا العنصر ، المسمى MDP ، على نهج التشوه ولديه ثلاث درجات من الحرية لكل عقدة: الإزاحتان والدوران ( $U$  و  $V$  و  $\theta_z$ ).

تم تحويل الخوارزمية التي توضح النهج المنهجي لتطويره إلى برنامج حسابي مكتوب بلغة فورتران. لهذا استخدمنا برنامج حساب العناصر المحدودة المكتوبة بلغة فورتران الموجود في مختبر الهندسة المدنية والهيدروليكية بجامعة 8 مايو 1945 في قالمة. ثم قمنا بتنفيذ عناصر البناء لمصفوفة الصلابة الأولية المتعلقة بالعنصر المحدود وكذلك الحسابات الضرورية التي تسمح بتحديد الإزاحة والضغط في الهياكل في حالة تشوه المستوى. يتعلق هذا العمل فقط بالتحليل الثابت للهياكل.

تم التحقق من صحة هذا العنصر من خلال أربعة اختبارات موجودة في الأدبيات بهدف تقييم أدائه للتمثيل لأنماط الأجسام الصلبة والضغط المستمرة ، وسرعة تقاربها تجاه الحلول النظرية وسلوكها تجاه الضغط المنحنية. تقديرية الهياكل عن طريق شبكات مشوهة.

النتائج التي تم الحصول عليها ، مقارنة بتلك المتعلقة بعناصر أخرى من الأدبيات والحلول النظرية لمقاومة المواد ، كانت قاطعة. يتميز عنصرنا بالمتانة القوية والأداء الجيد للغاية. حيث يمكنه المناقسة على الرغم من بساطته في صياغة العناصر المحدودة الأخرى في نمذجة الهياكل.

**الكلمات المفتاحية:** العنصر المحدود ، التشوه ، السد ، الأنفاق ، الضغط

## Abstract

*The objective of this work is the formulation of a membrane triangular finite element intended for the modeling of structures in a state of plane deformation. This element, called MDP, is based on the deformation approach and has three degrees of freedom per node: the two translations and the rotation ( $U$ ,  $V$  and  $\theta_z$ ).*

*The algorithm articulating the methodological approach for its development has been converted into a calculation program written in Fortran language. For this we used a finite element calculation code written in Fortran existing at the Laboratory of Civil and Hydraulic Engineering of the University May 8, 1945 of Guelma. Then we implemented the construction elements of the elementary stiffness matrix relating to our finite element as well as the necessary calculations allowing to determine the displacements and the stresses in the structures in a state of plane deformation. This work concerned only the static analysis of structures.*

*This element is validated through four existing tests in the literature with the objective of evaluating its performances of representativeness of the modes of rigid bodies and constant stresses, its speed of convergence towards the theoretical solutions and its behavior towards bending stresses. pure as well as towards the discretization of structures by distorted meshes.*

*The results obtained, compared to those relating to other elements of the literature and to the theoretical solutions of the resistance of materials, were conclusive. Our element is characterized by strong robustness and very good performance. As it can compete despite its simplicity of formulation of other finite elements in the modeling of structures.*

*Keywords: Finite element, Deformation, Dam, tunnels, Stresses*

## Résumé

*L'objectif de ce travail est la formulation d'un élément fini triangulaire membranaire destiné à la modélisation des structures en état de déformation plane. Cet élément, baptisé MDP, est basé sur l'approche en déformation et possède trois degrés de liberté par nœud : les deux translations et la rotation ( $U$ ,  $V$  et  $\theta_z$ ).*

*L'algorithme articulant l'approche méthodologique pour son développement a été reconverti en un programme de calcul écrit en langage Fortran. Pour cela on a utilisé un code de calcul élément fini écrit en Fortran existant au Laboratoire de Génie Civil et Hydraulique de l'université 8 Mai 1945 de Guelma. Puis on y a implémenté les éléments de construction de la matrice de rigidité élémentaire relative à notre élément fini ainsi que les calculs nécessaires permettant de déterminer les déplacements et les contraintes dans les structures en état de déformation plane. Ce travail a concerné uniquement l'analyse statique des structures.*

*Cet élément est validé à travers quatre tests existants dans la littérature avec pour objectif d'évaluer ses performances de représentativité des modes de corps rigides et de contraintes constantes, de sa vitesse de convergence vers les solutions théoriques et de son comportement envers des sollicitations de flexion pure ainsi qu'envers la discrétisation des structures par des maillages distordus.*

*Les résultats obtenus, comparés à ceux relatifs à d'autres éléments de la littérature et aux solutions théoriques de la résistance des matériaux, ont été concluants. Notre élément s'est caractérisé par une forte robustesse et de très bonnes performances. Comme il peut rivaliser malgré sa simplicité de formulation d'autres éléments finis dans la modélisation des structures.*

*Mots Clés : Élément fini, Déformation, Barrage, tunnels, Contraintes*

# SOMMAIRE

## INTRODUCTION GENERALE

### Chapitre 01 - NOTIONS GENERALES

1.1 - Introduction .....	03
1.2 - Définition de la méthode des éléments finis .....	03
1.3 - Evolution de la méthode des éléments finis .....	03
1.4 - Avantage de la méthode des éléments finis .....	04
1.5 - Domaine d'application de la MEF .....	05
1.6 - Les principes de la méthode des éléments finis .....	06
1.7 - La discrétisation fonctionnelle .....	06
1.8 - Les grandes lignes de la méthode .....	07

### Chapitre 02 - SYNTHÈSE DE LA THÉORIE DES ÉTATS PLANS D'ÉLASTICITÉ

2.1 - Introduction .....	08
2.2 - Hypothèses de base de l'élasticité .....	08
2.3 - Les lois des comportements élastiques linéaires .....	09
2.3.1 Loi de Hooke Généralisée .....	09
2.3.2 Loi de Hooke pour un matériau élastique homogène isotrope	09
2.3.3 Loi de Hooke pour un matériau élastique homogène orthotrope .....	10
2.4 - Les états des contraintes .....	11
2.4.1 Etat de contraintes planes .....	11
2.4.2 Etat de déformations planes .....	13
2.5 - Conclusion .....	14

### Chapitre 03 - APPROCHE ET DEMARCHE DES ANALYSES PAR ÉLÉMENTS FINIS

3.1 - Introduction .....	15
3.2 - Principe de la méthode des éléments finis .....	15
3.3 - Les modèles de formulation utilisés .....	21
3.3.1 Modèle en déplacement .....	21
3.3.2 Modèle d'équilibre .....	21

3.3.3	Modèle mixte .....	21
3.3.4	Modèle en déformation .....	22
3.4	Critères de convergence .....	23
3.5	Conclusion .....	23

## Chapitre 04 - FORMULATION D'UN ELEMENT FINI TRIANGULAIRE EN ETAT PLAN DE DEFORMATION

4.1	Introduction .....	24
4.2	Formulation de l'élément .....	24
4.2.1	Caractéristiques de l'élément .....	24
4.2.2	Champs de déformation et de déplacement .....	25
4.2.3	Fonctions de forme .....	28
4.2.4	Evaluation de la matrice de rigidité .....	29
4.3	Intégration analytique .....	30
4.4	Conclusion .....	32

## Chapitre 05 - TESTS DE VALIDATION

5.1	Introduction .....	33
5.2	Test de comportement uni axial .....	33
5.3	Test de convergence _ poutre cantilever .....	35
5.4	Test de comportement à la flexion pure .....	37
5.5	Étude du panneau fuselé de Cook .....	38
5.6	Conclusion .....	40

## CONCLUSION GENERALE

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

## ANNEXES

## Liste des figures

Figure 1.1	Étapes générales de la méthode des éléments finis .....	<b>07</b>
Figure 2.1	Etat de contraintes planes .....	<b>12</b>
Figure 3.1	Discrétisation en éléments finis .....	<b>16</b>
Figure 3.2	Degrés de liberté dans un repère cartésien .....	<b>18</b>
Figure 3.3	Comportement d'un élément à quatre nœuds lors de la flexion dans le plan	<b>22</b>
Figure 4.1	Élément triangulaire de plaque avec trois degrés de liberté par nœud .....	<b>25</b>
Figure 4.2	Intégration analytique - Exemple d'un élément fini triangulaire .....	<b>30</b>
Figure 5.1	Etat de dilatation .....	<b>34</b>
Figure 5.2	Discrétisation physique de l'élément .....	<b>34</b>
Figure 5.3	Poutre Console de J.L. Batoz et G. Dhatt [BAT90] .....	<b>35</b>
Figure 5.4	La discrétisation physique – Maillage .....	<b>36</b>
Figure 5.5	Evolution du déplacement vertical au point A de la poutre console .....	<b>37</b>
Figure 5.6	Flexion Pure .....	<b>37</b>
Figure 5.7	Flexion pure – Maillage .....	<b>38</b>
Figure 5.8	Panneau fuselé de Cook-géométrie (dimensions en mm) – maillage .....	<b>39</b>

## Liste des tableaux

Tableau 1.1	résumé des types d'application .....	<b>05</b>
Tableau 4.1	Valeur des coefficients $C(k)$ en fonction de $\beta$ .....	<b>31</b>
Tableau 5.1	Déplacement vertical au point A de la poutre console .....	<b>36</b>
Tableau 5.2	Déplacement vertical et rotation au nœud 5 de la poutre console .....	<b>38</b>
Tableau 5.3	Panneau fuselé de Cook-déplacement vertical du point A .....	<b>39</b>

# INTRODUCTION GENERALE

## Cadre de la recherche

Ce travail constitue une initiation à la recherche scientifique élaborée dans le cadre des études en vue de l'obtention du diplôme de master en génie civile.

Notre sujet de recherche intitulé « FORMULATION D'UN ELEMENT FINI TRIANGULAIRE POUR LA MODELISATION DES STRUCTURES EN ETAT DE DEFORMATION PLANE. »

Ce travail est mené sous la direction du monsieur HIMEUR Mohammed docteur au de département de Génie Civil et Hydraulique - Université 08 mai 1945 de Guelma.

## Position du problème et objectifs

L'objectif de ce travail est la formulation d'un élément fini triangulaire membranaire pour la formulation des structures caractérisées en état plan de déformation. Ce travail vise une meilleure compréhension et la formalisation avec la méthode des éléments finis comme une méthode de résolution des problèmes de mécanique (Génie Civil en particulier).

En ces dernières années, des recherches sont réalisées autour des éléments finis en considérant différentes approches et principes variationnels dans la formulation.

L'utilisation de l'approche en déplacement, nous a données des résultats satisfaisants qu'après minimisation de la taille des mailles. La réponse à cette problématique réside en l'utilisation de l'approche en déformation qui permet de donner des degrés plus élevés aux polynômes d'interpolation et par conséquent de réduire les tailles des maillages pour une même performance.

## Plan du mémoire

Ce mémoire est composé :

- de la présente introduction,
- de Cinq chapitres,
- une conclusion
- et d'un bloc d'annexes.

Ce mémoire est structuré autour d'une introduction générale, de Cinq chapitres et une conclusion générale.

-Au niveau de cette introduction, nous avons positionné le problème sujet de notre recherche, en précisant la problématique d'analyse.

- Dans le chapitre 01, nous donnons d'abord sommairement une présentation de la méthode des éléments finis et un bref aperçu de l'évolution de cette méthode.

- Le chapitre 02, nous exposons les notions théoriques générales de l'élasticité.
  - Le Chapitre 03, explique l'approche et la démarche de développements par éléments finis et les principaux modèles d'éléments finis existants, particulièrement les formulations « en déplacement », « en équilibre », « mixtes », « hybrides » et « en déformation » ainsi que les principes de l'approche variationnelle.
  - Le chapitre 04, quant à lui, réservé à la formulation et au développement de notre élément
  - Le chapitre 05, présente uniquement les tests effectués sur des exemples tirés de la littérature et utilisés par plusieurs auteurs, pour évaluer la performance de notre élément par utilisation de l'outil Fortran. Comme il est fait état d'une analyse comparative de ses performances à des éléments développés par d'autres auteurs.
- Nous terminons, enfin, par quelques conclusions.

# Chapitre 01 : NOTIONS GENERALES

## 1.1 Introduction

Des problèmes, qui dans un passé récent ont été considérés comme insolubles par les méthodes analytiques classiques, sont maintenant aisément résolus par les méthodes numériques dont la plus utilisée est la **méthode des éléments finis** ou **MEF**. De ce fait, la complexité des calculs n'est plus d'actualité scientifique, surtout avec le développement de la machine et de l'outil informatique, les ingénieurs numériciens commencèrent à mettre des méthodes numériques pour le calcul des structures, et c'est là que la méthode des éléments finis a vu le jour.

La MEF avec l'apparition des ordinateurs, est devenue pour la première fois en 1956, une formulation générale d'approximation de la mécanique des structures lorsqu'elle fut utilisée chez Boeing par Turner, Clough, Martin et Topp, pour calculer des parties de la structure d'un avion, ces travaux marquèrent la naissance de la méthode des éléments Finis.

## 1.2 Définition de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis (MEF) est une technique d'analyse numérique permettant s'obtenir des solutions approximatives à une large variété des sciences de l'ingénieur.

La méthode des éléments finis est une méthode approchée de calcul numérique, permettant de déterminer l'équilibre élastique des structures continues à deux ou trois dimensions : structures planes, solides élastiques, plaques minces, membranes et coques.

Elle s'applique aux problèmes de mécanique des milieux continus (MMC).

La vaste utilisation de la MEF dans tous les domaines est due à la similarité des différents problèmes de l'ingénieur (équations différentielles, système d'équations d'équilibre...etc.).

## 1.3 Evolution de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est le fruit de deux domaines de recherche : Les mathématiques et les sciences de l'ingénieur.

Mathématique : Outils qui remontent jusqu'aux résidus pondérés de Gauss (1775), Galerkin (1915) et Biezenokoch (1923), ainsi qu'aux méthodes variationnelles de Rayleigh (1870) et Ritz (1909).

Sciences de l'ingénieur : Dont la contribution a débuté dans les années quarante avec Hrenikoff (1941), Henry (1943) et Newmark (1949) qui touchèrent pour la première fois aux Structures continues, en faisant une approximation sur des portions de petites dimensions dans un problème continue d'une barre longue. D'où l'idée de base des éléments finis.

Le concept d'éléments finis est né vers 1940, avec des chercheurs comme Newmark, Hrennikoff (1941), Mc Henry, Courant (1942) ...

Dans l'année 1950 Le développement de la méthode des éléments finis a véritablement commencé au milieu de cette année pour l'analyse structurale et aéronautique. Et prit de l'ampleur à l'Université de Stuttgart grâce au travail de John Argyris et à Berkeley grâce au travail de Ray W. Clough.

Turner (1956), Glough (1956) et Martin (1956) ont fait une analogie directe en adoptant un comportement simplifié pour des petites portions : ils représentent un milieu continu élastique à deux dimensions par un assemblage de panneaux triangulaires.

Au début des années 60, avec le développement du calcul numérique sur ordinateur pût être utilisé. Les premiers travaux, de pionnier dans ce domaine, sont dus à John H. Argyris et Olgierd C. Zienkiewicz. L'ouvrage de Zienkiewicz est considéré comme la première monographie ingénieur dans le domaine du calcul par éléments finis et se répandit rapidement dans les applications des sciences de l'ingénieur.

L'ingénieur américain Ray William Clough qui, semble-t-il, a utilisé le terme de méthode des éléments finis le premier dans un article de 1960. Intitulé The Finite Element Method in Plane Stress Analysis. Le mot rigidité (Stiffness) apparaissait dans le titre de son article Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures datant de 1956 (et coécrit avec M. Turner, H. C. Martin et L. J. Topp). Il y a un développement rapide de la méthode.

En 1969 la MEF est reconnue comme un outil général utilisée pour résoudre des problèmes non linéaires et non stationnaires dans plusieurs domaines.

Dans les années 70, les calculs FEM n'étaient présents dans les centres de calcul et les grandes entreprises, et n'étaient maîtrisés que par des spécialistes.

Dans les années 80, application de la méthode des éléments finis sur les micro-ordinateurs.

Dans les années 90, possibilité d'analyse de gros systèmes de structures.

#### **1.4 Avantage de la méthode des éléments finis**

- Elle est applicable à tout type de problème dit de champs, d'analyse de contraintes, de transfert thermique, ect.
- La faculté de définir des maillages très irréguliers et depuis l'origine est l'un des grands avantages de la méthode des éléments finis.
- Les éléments possédant différents comportements (modèles mathématiques) peuvent être combinées (ex : voile-portique dans une structure 3D), donc un seul modèle d'élément fini peut contenir des barres, des poutres, des plaques, ect.
- On peut accepter des lois complexes de propriétés intrinsèques des matériaux si on compare aux possibilités des méthodes classiques de résolution, et offrent plus vastes perspectives en analyse non linéaire.
- Elle n'impose aucune restriction géométrique, le corps ou le domaine à modéliser peut avoir une forme quelconque.

- Elle n'impose aucune restriction sur les conditions aux limites et le type de chargement.
- Elle n'impose aucune restriction sur les propriétés du matériau. Ces propriétés ne sont donc pas réduites à l'isotropie et peuvent changer d'un élément à un autre.
- La structure modélisée par les éléments finis peut être considérée similaire à la structure réelle ou domaine à analyser.
- L'approximation peut être facilement améliorée en développant la taille du maillage à l'augmentant le nombre d'éléments.

## 1.5 Domaine d'application de la MEF

Les principaux domaines d'application de la MEF sont au nombre de trois :

- Problèmes d'équilibre et statique : dans lequel le comportement du système ne varie pas avec le temps.
- Problèmes de dynamique et de stabilité (valeurs propres) : ce sont des extensions des problèmes d'équilibre pour lesquelles des valeurs spécifiques ou critiques de certains paramètres sont déterminés.
- Problèmes de propagation : ils concernent les problèmes ou les phénomènes dont le comportement est dépendant du facteur temps.

Tableau1.1 : résumé des types d'application

Spécialité	Problèmes d'équilibre	Problèmes de valeurs propres	Problèmes de propagation
Génie civil – structure	Analyse statique des structures : treillis, portique, plaque, coques, voiles, ponts, béton précontraint	Fréquences et modes propres et stabilité des structures	Réponse des structures à des charges accidentelles (séisme, incendie)
Géotechnique	Analyse des excavations, stabilité des talus, murs de soutènement, interaction sol-structure, analyse des contraintes dans les sols	Fréquence et modes propres des ouvrages enterrés, et problèmes d'interaction sol-structure	Problèmes de sol-structure dépendant du temps. Propagation des contraintes dans les sols et les roches
Hydraulique	Analyse d'écoulements, potentiels, d'écoulements à surface libre, écoulement visqueux.	Périodes et modes propres des bassins superficiels, digues, mouvements des liquides dans des	Analyse des problèmes d'écoulement

	Analyse des structures hydraulique et barrages, etc.	bacs (conteneur) rigides ou flexibles	
Génie Mécanique	Problèmes de concentration des contraintes. Analyse de contrainte des pistons .de matériaux composites, ect.	Fréquences propres des vibrations et stabilité des machines	Problèmes des fissures et des fractures sous charges dynamiques
Biomédical	Analyse des contraintes dans les os, les dents, capacité portante des systèmes des implants et prothèses Mécanique des valves du cœur artificiel		Analyse d'impact sur le crane Dynamiques des structures anatomiques

## 1.6 Les principes de la méthode des éléments finis

Le principe de base de la MEF consiste à remplacer le domaine réel par un domaine discrétisé composé d'un ensemble d'éléments finis élémentaires connectés entre eux à travers des nœuds, et donc les employer pour représenter les formes les plus complexes.

La base conceptuelle de la MEF est de trouver la solution d'un problème complexe en le remplaçant par plusieurs d'autres plus simples. Transformer un problème physique en un modèle numérique en le discrétisant en des éléments dits **finis**.

## 1.7 La discrétisation fonctionnelle

La simulation par éléments finis repose sur une théorie :

- Un ensemble de lois,
- Des hypothèses,
- Des théorèmes... Etc.



La théorie retenue est issue de la **mécanique des milieux continus** par une transformation nommée **discrétisation fonctionnelle**.

Cette discrétisation repose sur :

- La définition des **hypothèses cinématiques et de comportement** en relation avec la nature de la structure et des problèmes à traiter.
- Le choix des **fonctions de formes** décrivant les champs de la cinématique, des déformations et des contraintes à l'intérieur de l'élément fini en fonction du type d'élément fini utilisé et de la nature des connectivités entre ces éléments finis au niveau élémentaire.
- La **transformation des équations différentielles régissant** la cinématique et les conditions d'équilibre en des équations « intégrales », faciles à résoudre mathématiquement.

Les solutions obtenues à travers cette démarche **ne sont pas exactes** mais plutôt approchées. Le niveau d'approche à la solution exacte dépend de deux éléments essentiels :

- La finesse du maillage utilisé (nombre de mailles) pour la **discrétisation physique**.
- Le degré élevé des polynômes d'interpolation des champs de la cinématique et des contraintes. C'est ce qu'on appelle la finesse de la **discrétisation fonctionnelle** qui est liée au nombre des nœuds de connectivité de l'élément fini et de l'approche utilisée (Déplacement, déformation, contrainte et hybride).



## 1.8 Les grandes lignes de la méthode

Dans ce paragraphe, nous essayerons de présenter d'une manière simplifiée, les étapes d'application de la méthode des éléments finis et les outils nécessaires à sa mise en œuvre.

La résolution d'un problème physique par éléments finis suit grosso modo les étapes suivantes (Figure 1.1).

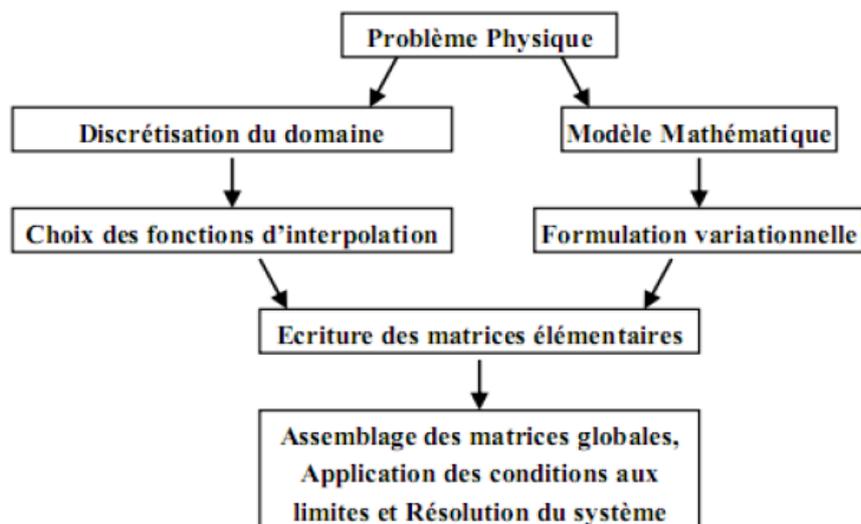


Figure 1.1 : Étapes générales de la méthode des éléments finis

## Chapitre 02 : SYNTHÈSE DE LA THÉORIE DES ÉTATS PLANS D'ÉLASTICITÉ

### 2.1 Introduction

La théorie de l'élasticité ou mécanique des solides déformables est une science de la mécanique des milieux continus (MMC), qui étudie les déplacements, les déformations et les contraintes dans un solide soumise à des forces extérieures, et concerne les états élastiques des solides, c'est à-dire les déformations réversibles quand on retire les contraintes, et la linéarité de comportement. Cette discipline, née au XVIIIe siècle possède aujourd'hui une base mathématique bien établie.

Dans ce chapitre un bref exposé des aspects de base de la théorie de l'élasticité et des relations entre contraintes et déformations, est présentée. On parle en particulier de l'élasticité plane (État plan de déformation et état plan de contrainte).

### 2.2 Hypothèses de base de l'élasticité

En élasticité, le flux de calculs est relativement facile au moment que les champs de déformations et des contraintes se déduisent directement du champ de déplacements.

➤ Déplacement → 
$$U = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

➤ Déformations → 
$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

➤ Contraintes → 
$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix}$$

➤ Loi de comportement → 
$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} = [D] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix}$$

## 2.3 Les lois des comportements élastiques linéaires

### 2.3.1 Loi de Hooke Généralisée

La loi de Hooke a été généralisée par Cauchy (1789-1857). Celle-ci exprime les composantes de tenseur des contraintes comme une fonction linéaire des composantes du tenseur des déformations.

$$\bar{\sigma} = \bar{\bar{C}} : \bar{\varepsilon}$$

Dans ces relations,  $\bar{\bar{C}}$  est un tenseur de quatrième ordre, dont les composantes sont les coefficients d'élasticité du matériau.

En utilisant les propriétés de symétrie des tenseurs des contraintes et des déformations, c'est-à-dire  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  et  $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$ , le tenseur,  $\bar{\bar{C}}$  est se réduit à 81 composantes avec seulement 21 paramètres indépendants.

### 2.3.2 Loi de Hooke pour un matériau élastique homogène isotrope

Pour un matériau élastique homogène isotrope, toutes les directions ont les mêmes propriétés. Ce modèle s'applique à la plupart des matériaux, tel l'acier, le béton etc... Dans ce cas et pour une température constante, la loi de Hooke prend deux types de formes :

#### a. La loi de Gabriel Lamé

$$\bar{\sigma} = \lambda \cdot \text{Trace}(\bar{\varepsilon}) \cdot \bar{I} + 2\mu \cdot \bar{\varepsilon}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \varepsilon_{kk} \cdot \delta_{ij} + 2\mu \cdot \varepsilon_{ij}$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

Avec :

- $\{\sigma\}$  et  $\{\varepsilon\}$  les composantes indépendantes des tenseurs des contraintes et des déformations présentées sous forme vectorielle (Notations de Voigt) comme suit :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} ; \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \\ \gamma_{13} = 2\varepsilon_{13} \\ \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix}$$

[D] appelée la matrice des coefficients élastiques est égale à :

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

-  $\lambda$  et  $\mu$  sont appelés les coefficients de Lamé qui dépendent de la particule considérée. Leurs expressions en fonction du module d'Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$  sont données comme suit

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad ; \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad ; \quad 2\mu + \lambda = \frac{E \cdot (1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

#### b. La loi de Hooke-Duhamel

Cette forme est réciproque de la précédente : On exprime les déformations en fonction de contraintes :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{(1+\nu)}{E} \bar{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{Trace}(\bar{\sigma}) \cdot \bar{I}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

$$\{\varepsilon\} = [S] \{\sigma\}$$

Avec :

-  $\{\sigma\}$  et  $\{\varepsilon\}$  les composantes indépendantes des tenseurs des contraintes et des déformations présentées sous forme vectorielle (Notations de Voigt) comme suit :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} \quad ; \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \\ \gamma_{13} = 2\varepsilon_{13} \\ \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix}$$

-  $[S]$  appelée la matrice inverse des coefficients élastiques est égale à :

$$[S] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

### 2.3.3 Loi de Hooke pour un matériau élastique homogène orthotrope

Pour un matériau élastique homogène orthotrope, ce matériau possède trois directions privilégiées deux à deux orthogonales. Ce modèle s'applique aux tôles laminées, aux composites tissés, au bois et certains bétons structurés, etc.

Pour ces cas, la matrice de comportement est définie par neuf (09) composantes indépendantes. Dans un repère principal d'orthotropie cette loi s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12}=2\varepsilon_{12} \\ \gamma_{13}=2\varepsilon_{13} \\ \gamma_{23}=2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{31}}{E_3} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}$$

Avec les conditions de symétrie :

$$\frac{-\nu_{12}}{E_1} = \frac{-\nu_{21}}{E_2} \quad ; \quad \frac{-\nu_{13}}{E_1} = \frac{-\nu_{31}}{E_3} \quad ; \quad \frac{-\nu_{23}}{E_2} = \frac{-\nu_{32}}{E_3}$$

## 2.4 Les états des contraintes

### 2.4.1 Etat de contraintes planes

Un état de contraintes planes est généralement admis pour le calcul des structures qui n'admettent de charges que dans son plan. De ce fait, les composantes du tenseur des contraintes  $\sigma_{13}$  ;  $\sigma_{23}$  ;  $\sigma_{33}$  et les composantes du tenseur des déformations  $\varepsilon_{13}$  ;  $\varepsilon_{23}$  sont nulles. Ainsi, les tenseurs des contraintes et des déformations se réduisent à :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Notation de Voigt :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ 0 \\ \sigma_{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12}=2\varepsilon_{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En utilisant la loi de souplesse :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12}=2\varepsilon_{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ 0 \\ \sigma_{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

On obtient :

$$\varepsilon_{33} = \frac{-\nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{E}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1+\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12}=2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

- Contraintes et directions principales

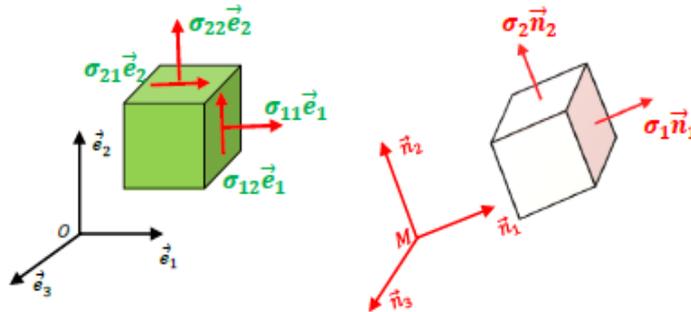


Figure 2.1 : Etat de contraintes planes

**Le tenseur des contraintes de Cauchy** par rapport à une surface de normale sortante  $\vec{n}$  est donné par la relation :

$$\{T(M, \vec{n})\} = [\sigma(M)] \cdot \{\vec{n}\}$$

On peut écrire cette équation dans le cas d'un état de contraintes planes comme suit :

$$\{T(M, \vec{n})\} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{n}_1 \\ \vec{n}_2 \\ \vec{n}_3 \end{Bmatrix}$$

La direction principale est  $\vec{n}_3 = \vec{e}_3$ , cLes deux autres directions sont les solutions de l'équation

$$\{T(M, \vec{n})\} \cdot \vec{n} = \sigma_n \cdot \vec{n}$$

Qui représente la projection du tenseur des contraintes sur le repère principal  $(M, \vec{n}_1, \vec{n}_2)$  avec  $\vec{n} = \begin{Bmatrix} \vec{n}_1 \\ \vec{n}_2 \end{Bmatrix}$  et  $n_1^2 + n_2^2 = 1$ .

Etant donné que le tenseur des contraintes de Cauchy est symétrique, donc diagonalisable, il existe au moins un repère  $(M, \vec{n}_1, \vec{n}_2)$  où la matrice des contraintes associée est diagonale :

$$[\sigma_n(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$

Les solutions de ce système d'équations sont celles du polynôme caractéristique

$$P(\sigma_n) = -\sigma_n^2 + I_1\sigma_n + I_2 = 0$$

Les deux contraintes principales sont les racines de cette équation. Donc :

$$P(\sigma_n) = \det([\sigma(M)] - [\sigma_n] \vec{I}) = \det \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_n & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_n \end{bmatrix} = 0$$

$I_1$  et  $I_2$  sont des invariants indépendants du repère.

Après développement de l'équation précédente, Ces invariants sont donnés comme suit :

$$\begin{cases} I_1 = \text{tr}[\sigma] = \sigma_{11} + \sigma_{22} = \sigma_1 + \sigma_2 \\ I_2 = \frac{1}{2}(\text{tr}[\sigma])^2 - \text{tr}[\sigma^2] = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 = \sigma_1\sigma_2 \end{cases}$$

Donc, les solutions de ce polynôme sont :

En termes de contraintes principales :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4 \sigma_{12}^2} \\ \sigma_2 = \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4 \sigma_{12}^2} \end{cases}$$

En termes de directions principales :

$$\text{Tang}(\theta_1) = \frac{(\sigma_{11} - \sigma_1)}{\sigma_{12}} = \frac{\sigma_{12}}{(\sigma_1 - \sigma_{22})}$$

$\theta_1$  Représente la position angulaire de  $\vec{n}_1$  par rapport à  $\vec{e}_1$ .

Les composantes des directions principales seraient :

$$\begin{cases} \vec{n}_1 = (\cos(\theta_1) \quad \sin(\theta_1)) \cdot \begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{Bmatrix} \\ \vec{n}_2 = (-\sin(\theta_1) \quad \cos(\theta_1)) \cdot \begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

## 2.4.2 Etat de déformations planes

Un état de déformations planes est généralement admis pour le calcul des structures de longueur importante suivant l'axe ( $O ; x_3$ ), supposées bloquées dans cette direction. De ce fait, les composantes du tenseur des déformations  $\varepsilon_{33}$  ;  $\varepsilon_{13}$  ;  $\varepsilon_{23}$  et les composantes du tenseur des contraintes  $\sigma_{13}$  ;  $\sigma_{23}$  sont nulles.

Ainsi, les tenseurs des contraintes et des déformations se réduisent à :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} ; \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Notation de Voigt :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 0 \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En utilisant la loi de Hook, on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12}=2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

et :

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé la mise en évidence les hypothèses, les principes et les méthodes nécessaires pour notre développement, notamment la loi de comportement, la détermination des contraintes et déformations dans le cadre de l'état plan de déformation, qui est la base de formulation de l'élément fini en question.

## **Chapitre 03 : APPROCHE ET DEMARCHE DES ANALYSES PAR ELEMENTS FINIS**

### **3.1 Introduction**

Pour analyser un phénomène naturel en générale ou un problème d'ingénierie en particulier, on est Souvent amené à développer un modèle mathématique pouvant décrire d'une manière aussi fiable que possible le problème en question. La résolution des équations différentielles est possible analytiquement pour des géométries et des cas simples. Mais elle pose parfois des difficultés insurmontables, et une solution exacte écrivant bien le problème étudié n'est pas toujours facile à trouver.

Avec les progrès remarquables dans le domaine de l'informatique et les performances des ordinateurs de plus en plus grandes, il est devenu possible de résoudre des systèmes d'équations différentielles très complexes. Plusieurs techniques de résolution numérique ont été ainsi développées et appliquées avec succès pour avoir des solutions satisfaisantes à des problèmes d'ingénierie très variés.

Parmi les techniques numériques les plus puissantes qui conduisent à des solutions approchées du problème, celle des éléments finis.

### **3.2 Principe de la méthode des éléments finis**

#### **3.2.1 Démarche**

Dans le domaine du génie civil le calcul des structures complexes nécessite de mettre en place des outils de modélisation du comportement mécanique de plus en plus sophistiqués, et prenant en compte les spécifications de ses matériaux. Du point de vue pratique, les méthodes numériques, notamment le calcul par la méthode des éléments finis est indispensable pour le dimensionnement et la vérification des structures complexes. Le principe de base de la MEF consiste à remplacer le domaine réel par un ensemble d'éléments discrets, qui peuvent être réunis de plusieurs manières, et donc les employer pour représenter les formes les plus complexes. La démarche de modélisation par éléments finis est schématisée comme suit :

a – Discrétisation physique de la géométrie :

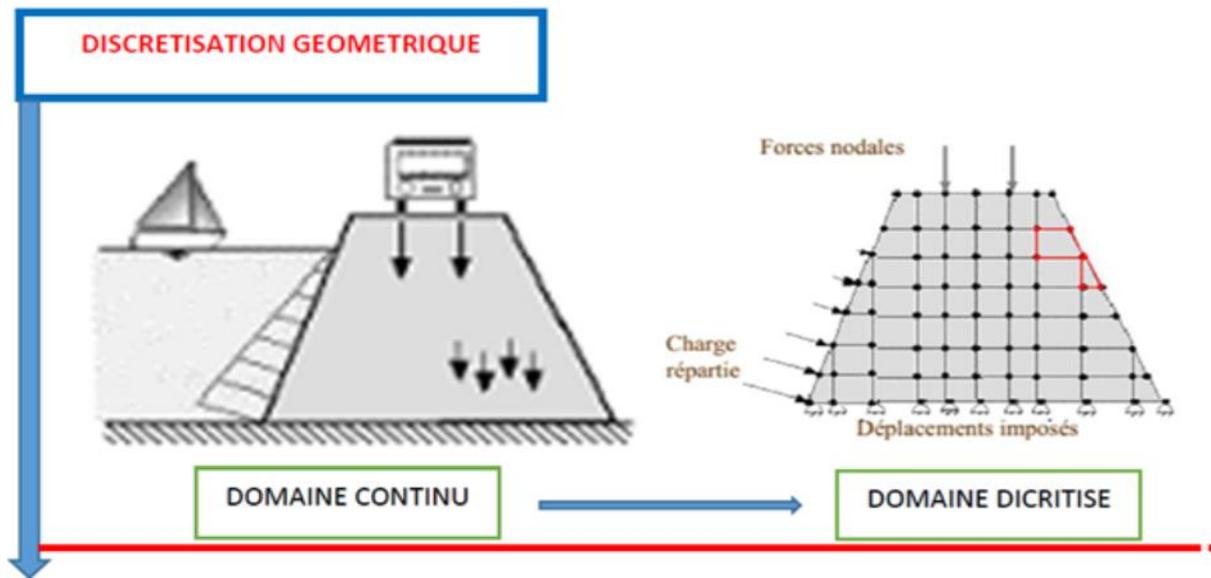


Figure 3.1 : Discrétisation en éléments finis

b – Choix de l'élément fini :

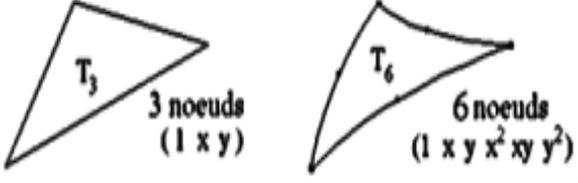
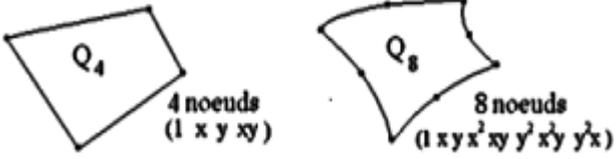
L'élément à choisir doit permettre une meilleure représentation de la forme réelle de la structure à modéliser. Comme il doit être compatible avec son mode de comportement mécanique.

Les différents types d'éléments finis existants dans la bibliothèque sont :

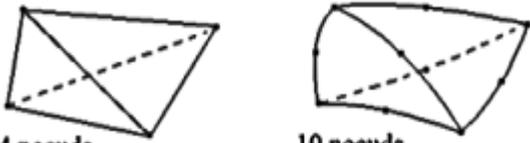
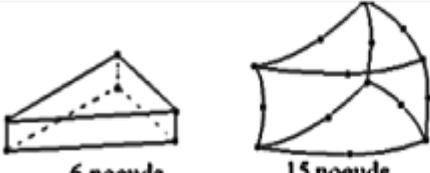
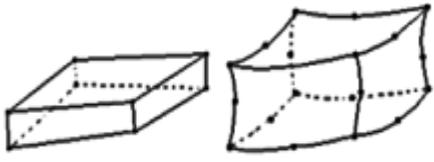
*Les éléments à une dimension :*

Type d'élément	Barre			Poutre
Élément				
Nombre de nœuds	02	03	04	02
Nombre de paramètres du polynôme d'approximation	$01 \times 02 = 02$	$01 \times 03 = 03$	$01 \times 04 = 04$	$02 \times 02 = 04$
Type D'approximation	Lagrange			Hermite

Les éléments à deux dimensions :

Élément Triangulaire	 <p>3 noeuds (1 x y)</p> <p>6 noeuds (1 x y x<sup>2</sup> xy y<sup>2</sup>)</p> <p>Les bases polynomiales sont complètes</p>
Élément Quadrilatère	 <p>4 noeuds (1 x y xy)</p> <p>8 noeuds (1 x y x<sup>2</sup> xy y<sup>2</sup> x<sup>2</sup>y y<sup>2</sup>x)</p> <p>Les bases polynomiales sont incomplètes</p>

Les éléments à trois dimensions :

Élément Tétraédrique	 <p>4 noeuds (1 x y z)</p> <p>10 noeuds (1 x y z x<sup>2</sup> y<sup>2</sup> z<sup>2</sup> xy xz yz)</p> <p>Les bases polynomiales sont complètes</p>
Éléments Prismatiques	 <p>6 noeuds</p> <p>15 noeuds</p> <p>bases incomplètes</p>
Éléments Hexaédriques	 <p>8 noeuds</p> <p>20 noeuds</p> <p>bases incomplètes</p>

c - Construction de l'approximation nodale sur un élément ou la discrétisation fonctionnelle :

\* Définition des degrés de liberté:

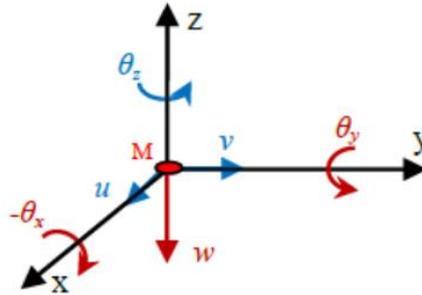


Figure 3.2 : Degrés de liberté dans un repère cartésien

\* Déplacements :

$$q = \langle \vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k} \rangle \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

\* Rotations infinitésimales :

$$\theta_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) ; \quad \theta_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) ; \quad \theta_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (3.2)$$

\* Déformations infinitésimales :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} ; \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} ; \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = 2 \epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} = 2 \epsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = 2 \epsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

d - Approximation nodale à l'intérieur d'un élément:

Il s'agit de donner une fonction d'interpolation des champs (de déplacements, de déformations et des contraintes) à l'intérieur d'un élément simple (élément fini) en fonction des types de variables aux nœuds. Cette fonction est de forme polynomiale :

Champs des déplacements :

$$\{q\} = [N_i] \{q_i\} \quad (3.4)$$

Champs des Déformations :

$$\{\epsilon\} = [N_i]' \{q_i\} \quad (3.5)$$

Champs des Contraintes :

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} = [D] [N_i]' \{q_i\} \quad (3.6)$$

=>  $\{q\}$  ;  $\{\varepsilon\}$  ;  $\{\sigma\}$ : champs respectivement des déplacements ; des déformations et des Contraintes.

=>  $\{q_i\}$ : Valeurs des déplacements nodaux.

=>  $[N_i]$  ;  $[N_i]'$  : Matrices des fonctions de formes (poids nodaux) associées respectivement aux champs des déplacement et aux champs des déformations.

=>  $[D]$  : Matrice des paramètres du matériau pour un matériau élastique, homogène et isotrope.

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

-  $\lambda$  et  $\mu$  sont appelés les coefficients de Lamé qui dépendent de la particule considérée. Leurs expressions en fonction du module d'Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$  sont données comme suit :

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad ; \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad ; \quad 2\mu + \lambda = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.8)$$

En état plan de contraintes cette matrice devient :

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Et en état plan de déformations cette matrice devient :

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

### e – Formulation variationnelle – Application du principe des travaux virtuels :

Un solide déformable est en équilibre statique, lorsque pour tout champ de déplacements virtuels cinématiquement compatibles, le travail virtuel des forces extérieures est égal au travail virtuel intérieur. Cet équilibre s'exprime par la relation :  $\delta W_{int} = \delta W_{ext}$

C'est-à-dire :

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V f_{Vi} \delta q_i dV + \int_A f_{Si} \delta q_i dA \quad (3.11)$$

Où :

Le premier terme représente la variation du travail virtuel intérieur (variation de l'énergie de déformation) :

$$\delta W_{int} = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (3.12)$$

Et le deuxième terme représente la variation du travail virtuel des forces extérieures (variation de l'énergie de déformation), dans laquelle  $\mathbf{F}$  est le vecteur des forces de volume et  $\mathbf{f}$  est le vecteur des forces de surface.

$$\delta W_{ext} = \int_V f_{Vi} \delta q_i dV + \int_A f_{Si} \delta q_i dA \quad (3.13)$$

En fonction des variables de la cinématique et des contraintes la variation du travail virtuel intérieur s'écrit :

$$\Rightarrow \delta W_{int} = \int_V [B]^T \{\delta q_i\}^T [D][B] \{q_i\} dV = \{\delta q_i\}^T \left( \int_V [B]^T [D][B] dV \right) \{q_i\} \quad (3.14)$$

**L'expression :  $[K^e] = \int [B]^T [D][B] dV$  représente la matrice de rigidité élémentaire de l'élément fini.**

Et la variation du travail des forces extérieures s'écrit :

$$\delta W_{ext} = \delta q_i \left( \int_V f_{Vi} [N_i] dV + \int_A f_{si} \delta q_i dA \right) \quad (3.15)$$

**L'expression :  $[F^e] = \left( \int_V f_{Vi} [N_i] dV + \int_A f_{si} \delta q_i dA \right)$  représente le vecteur des forces nodales équivalentes appliquées aux nœuds de l'élément fini.**

f- Evaluation de la rigidité élémentaire – Application du principe des travaux virtuels :

La rigidité élémentaire est donnée comme suit :

$$[K^e] = \int [B]^T [D][B] dV \quad (3.16)$$

L'évaluation de la matrice de rigidité est établie par intégration sur l'élément fini de cette 'expression :

Pour cela deux méthodes sont utilisables :

- Intégration numérique utilisant des méthodes approchées
- Intégration analytique utilisant les aspects théoriques des mathématiques.

g - Assemblage :

Il s'agit de la mise en équation de l'équilibre statique de la structure :

La structure (domaine **D**) est constituée de l'ensemble des sous domaines  $D_e$  qui sont représentés par les éléments finis.

$$\rightarrow D = \cup D_e$$

Il s'agit d'assembler les variables :  $[K] = \sum_e [K^e]$  et  $[F] = \sum_e [F^e]$  en un système d'équilibre global de la structure donné par :

$$[K]\{Q\} = \{F\}_s \quad (3.17)$$

h - Prise en compte des conditions aux limites :

- Blocages des degrés de liberté aux Nœuds considérés comme appuis.
- Définitions des nœuds sollicités et de leur chargement (Charges équivalentes aux nœuds).

i - Résolution :

- Déterminations du vecteur des déplacements  $Q$ .
- Déterminations des réactions d'appuis.

j – Calcul des autres grandeurs :

Le vecteur de déplacement  $\{Q\}$  étant connu, il s'agit de déterminer au niveau des nœuds ou au centre de l'élément fini.

→ Le champ des déformations.

→ Le champ des contraintes.

### 3.3 Les modèles de formulation utilisés :

#### 3.3.1 Modèle en déplacement

Dans cette approche, l'approximation est faite sur **le champ de déplacement** en considérant l'élément cinématiquement admissible ; c'est-à-dire l'intégrabilité du champ de déformation à l'intérieur de l'élément.

#### 3.3.2 Modèle d'équilibre

Il s'agit, dans ce modèle, de choisir une forme paramétrique simple du champ de contraintes à l'intérieur des éléments.

Le principe de ce modèle consiste dans un premier temps à choisir une forme paramétrique simple du champ de contraintes vérifiant les équations d'équilibre. On définit ainsi un ensemble de solutions admissibles.

Le modèle en équilibre n'a pas connu le même succès que le modèle en déplacement, en partie à cause de sa grande complexité. Les éléments du modèle pur sont statiquement admissibles et assurent la continuité de contraintes à l'intérieur de l'élément et d'un élément à un autre. Le champ de déplacement est déduit du champ de contrainte, où les conditions de compatibilité ne sont vérifiées qu'en moyenne et non localement.

#### 3.3.3 Modèle mixte

Dans cette approche, l'approximation est faite, indépendamment, sur divers champs d'inconnues (déplacements, déformation, contraintes) sont considérés ici, ce qui rend la formulation, ou la mise au point longue et coûteuse ; mais en contrepartie les éléments qui en découlent sont d'excellente qualité. On utilise parfois ce modèle pour corriger certains défauts du modèle de déplacement.

#### 3.3.4 Modèle en déformation

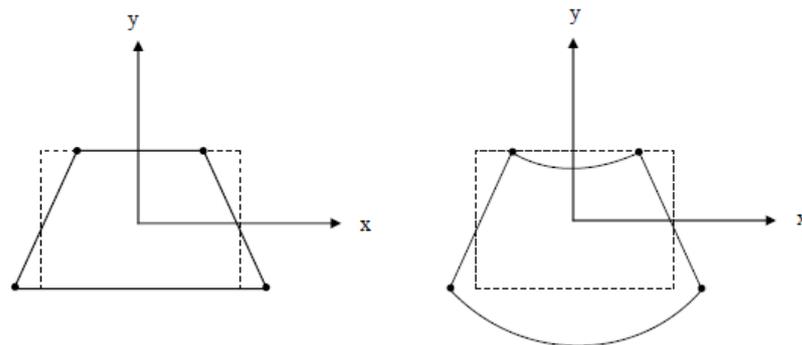
La démarche à ce niveau consiste à choisir, en premier lieu, une forme paramétrique simple du **champ de déformations** à l'intérieur des éléments. Le champ des déplacements, continu et différentiable, est déduit par intégration du champ des déformations. Cette approche permet la représentation du champ de déplacement par un ordre élevé des termes des polynômes sans besoin d'introduire des degrés de liberté supplémentaires ni de nœuds intermédiaires. Les éléments produits conduisent à des résultats très

encourageants. En plus, la convergence obtenue est rapide, lorsque les résultats sont comparés avec ceux donnés par des éléments basés sur le modèle en déplacement ayant le même nombre de degré de liberté.

Les éléments basés sur la déformation ont de très nombreuses applications, à commencer par les structures courbes, telles que : coques cylindriques, arcs hémisphères, etc. Comme on peut les retrouver dans les structures planes minces et épaisses, plaques, murs, etc. Et de manière générale, dans tous les types de structures. Le but recherché le plus souvent en choisissant un élément basé sur la déformation parmi d'autres est le gain appréciable en matière du nombre d'éléments et ce, pour un même nombre de nœuds.

L'utilisation du modèle en déformation apporte de nombreux avantages en termes de comportement des structures. En effet, on tire profit des bonnes adaptations pour la description exacte des mouvements : corps rigides et déformations constantes. Ainsi, les éléments développés permettront d'augmenter la performance des résultats, avec seulement un nombre limité d'éléments. Les avantages des éléments à modèle en déformation sont :

- Satisfaction plus facile des deux principaux critères de convergence liés directement aux déformations (mode de déformation constante et mode de corps rigide).
- Découplage plus facile des différentes composantes des déformations (un champ de déplacements découplés engendre des déformations couplées).
- Possibilité d'enrichir le champ des déplacements par des termes d'ordre élevé sans l'introduction des nœuds intermédiaires ni de degrés de liberté supplémentaires.



(a) linéarité à la flexion pour le modèle      (b) Rapprochement du comportement réel pour modèle

Modèle en déplacement

Modèle en déformation

Figure 3.3 : Comportement d'un élément à quatre nœuds lors de la flexion dans le plan

### **3.4 Critères de convergence**

Un des critères principaux pour qu'un élément fini soit validé, pour une application générale dans la mécanique des structures, est qu'il soit en mesure de représenter les modes de corps rigides et ceux des déformations constantes. La représentation adéquate de ces modes est une condition nécessaire pour qu'on ait une bonne précision et des propriétés de convergence. Donc, lorsqu'une théorie imprudente est employée pour le développement d'un élément fini, de faux modes de corps rigides et de déformation peuvent apparaître.

### **3.5 Conclusion**

La méthode des éléments finis est un outil principal dans la modélisation numérique extrêmement puissante, car elle nous permet par la suite de déterminer la matrice de rigidité spécifique à notre élément fini triangulaire de plaque.

Cette méthode consiste à diviser le domaine physique à traiter en plusieurs sous domaines appelés éléments finis à dimensions non infinitésimales. La solution recherchée est remplacée dans chaque élément par une approximation avec des polynômes simples et le domaine peut ensuite être reconstitué avec l'assemblage ou sommation de tous les éléments.

# Chapitre 04 : FORMULATION D'UN ELEMENT FINI TRIANGULAIRE EN ETAT PLAN DE DEFORMATION

## 4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous traitons du développement d'un élément membranaire nouveau d'élasticité plane destiné pour la modélisation des structures ayant des comportements en plan de déformation.

Comme on utilise le modèle en déformation qui permet l'enrichissement des polynômes d'approximation des champs de la cinématique.

Les fonctions d'interpolation sont tirées à partir des termes du triangle de pascal.

La matrice de rigidité est construite par application du principe des travaux virtuels et en adoptant l'intégration analytique pour son évaluation.

## 4.2 Formulation de l'élément

### 4.2.1 Caractéristiques de l'élément

Cet élément est un élément fini de membrane de plaque triangulaire d'élasticité plane, baptisé « **MDP** », sa formulation se base sur l'approche en déformation. Il est constitué de trois nœuds avec trois Degrés De Liberté par nœud.

Les polynômes d'interpolation sont construits au niveau des champs de déformation en utilisant le triangle de pascal. Les déplacements sont obtenus par intégration de ces champs.

L'intégration analytique dans l'évaluation de la matrice de rigidité, est fortement intéressante pour éviter la perte de convergence ; phénomène observé chez les éléments iso paramétrique (utilisant l'intégration numérique) qui sont très sensibles (leur convergence est conditionnée par un maillage régulier – non distordu).

Chacun des nœuds de cet élément possède trois degrés de liberté : les deux translations U et V et la rotation autour de la normale (« *drilling rotation* »)  $\theta_z$ . Donc les champs de déplacement, formulés par l'utilisation du modèle en déformation, possèdent 09 constantes indépendantes ( $a_1, \dots, a_9$ ).

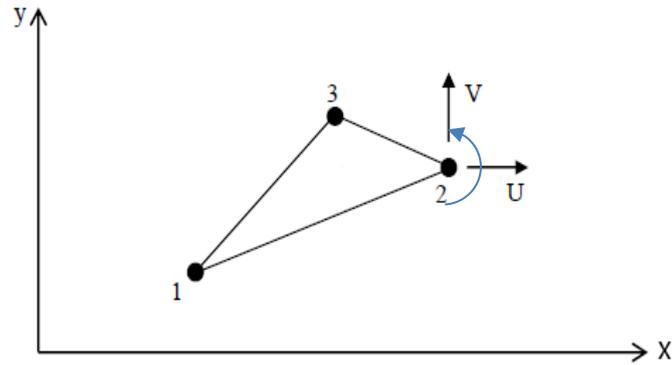


Figure 4.1: Élément triangulaire de plaque avec trois degrés de liberté par nœud

#### 4.2.2 Champs de déformation et de déplacement

Pour un élément membranaire similaire, les relations entre les déformations et les déplacements sont établies comme suit :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \quad (4.1)$$

La rotation autour de la normale est donnée par la relation :

$$\theta_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad (4.2)$$

##### \* Modes de corps rigide MCR :

Pour les mouvements de corps rigide (MCR), les déformations sont nulles :

$$\varepsilon_x = 0 \quad \varepsilon_y = 0 \quad \gamma_{xy} = 0 \quad (4.3)$$

L'intégration des équations (4.3) nous donnent les champs des déplacements représentant les mouvements de corps rigide qui se présentent comme suit :

$$U_R = a_1 + f_1(y) \quad V_R = a_2 + g_2(x) \quad (4.4)$$

Sachant que  $\gamma_{xy} = \frac{\partial U_R}{\partial y} + \frac{\partial V_R}{\partial x} = 0$  on obtient :

$$g_1'(x) + f_1'(y) = 0 \quad (4.5)$$

Donc on peut poser :

$$g_1'(x) = a_3 \quad \text{et} \quad f_1'(y) = -a_3 \quad (4.6)$$

En fait ce sont des constantes et leur intégration nous donne :

$$f_1(y) = -a_3 \cdot y \quad g_1(x) = a_3 \cdot x \quad (4.7)$$

En remplaçant  $f_1(y)$  et  $g_1(x)$  des équations (4.4) par leurs valeurs respectives données dans les équations (4.7), les champs des déplacements représentant les mouvements de corps rigide deviennent :

$$U_R = a_1 - a_3 \cdot y \qquad V_R = a_2 + a_3 \cdot x \qquad (4.8)$$

Avec  $a_1$  et  $a_2$ , des paramètres représentant les translations U et V du corps rigide respectivement le long des axes X et Y et  $a_3$  représentant la rotation du corps rigide autour de la normale (*drilling rotation*)  $\theta_{zR}$ .

La rotation  $\theta_{zR}$  est donnée par l'équation (4.2) en dérivant les équations (4.7)

$$\theta_{zR} = -a_3 \qquad (4.9)$$

En résumé, les champs des déplacements représentant les mouvements de corps rigide donnés par les équations (4.8) et (4.9) sont comme suit :

$$U_R = a_1 - a_3 \cdot y \qquad V_R = a_2 + a_3 \cdot x \qquad \theta_{zR} = -a_3 \qquad (4.10)$$

**\* Modes supérieurs :**

Notre élément est constitué de trois Nœuds. Chacun de ses nœuds possède trois degrés de liberté.

Donc les champs de déplacement, formulés par l'utilisation du modèle en déformation, possèdent 9 constantes indépendantes ( $a_1, \dots, a_9$ ).

Les trois premières ( $a_1, a_2, a_3$ ) sont utilisées dans les équations (4.10) pour représenter les mouvements de corps rigide.

Les six autres ( $a_4, \dots, a_9$ ) sont utilisés dans le modèle de déformation de l'élément. Ils sont répartis dans les fonctions d'interpolation des déformations de manière à :

- satisfaire l'équation générale de compatibilité des déformations pour l'élasticité plane.
- et éviter la singularité de la matrice des coordonnées nodales de l'élément.

Les fonctions d'interpolation souhaitables, sont choisies à partir du triangle de Pascal. Celles-ci se présentent comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = a_4 + a_6 y + \frac{1}{2} a_9 y^2 \\ \varepsilon_y = a_7 + a_8 x + \frac{1}{2} a_9 x^2 \\ \gamma_{xy} = a_5 + 2a_9 xy \end{cases} \qquad (4.11)$$

Ce champ se caractérise par :

- l'existence d'états de déformations constantes qui assurent la convergence lorsqu'on raffine le maillage, représentés par les constantes  $a_4, a_7, a_5$ .
- l'existence d'états de déformation linéaires au niveau des dilatations ( $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ ), représentés par les paramètres  $a_6$  et  $a_8$ .
- Un état de déformation bilinéaire des distorsions ( $x, y$ ), représenté par les paramètres  $a_9$ , qui met en dépendance les distorsions avec les dilatations.
- Des états de déformation non linéaires (en y pour  $\varepsilon_x$ , et en x pour  $\varepsilon_y$ ) permettant la satisfaction.

du critère de complétude des champs des déplacements et le changement de courbure des déformées.

- La satisfaction de l'équation générale de compatibilité des déformations :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (4.12)$$

L'intégration des équations (4.11) nous donne les champs des déplacements suivants :

$$\begin{cases} U_S = a_4 x + a_6 x y + \frac{1}{2} a_9 x y^2 + f_2(y) \\ V_S = a_7 y + a_8 x y + \frac{1}{2} a_9 x^2 y + g_2(x) \end{cases} \quad (4.13)$$

Sachant que  $\gamma_{xy} = \frac{\partial U_S}{\partial y} + \frac{\partial V_S}{\partial x} = 0$  on obtient :

$$f_2'(y) + g_2'(x) = a_5 - a_6 x - a_8 y \quad (4.14)$$

D'où :

$$f_2'(y) = \frac{1}{2} a_5 - a_8 y \quad g_2'(x) = \frac{1}{2} a_5 - a_6 x \quad (4.15)$$

L'intégration des équations (4.15) nous donne :

$$f_2(y) = \frac{1}{2} a_5 y - \frac{1}{2} a_8 y^2 \quad g_2(x) = \frac{1}{2} a_5 x - \frac{1}{2} a_6 x^2 \quad (4.16)$$

En remplaçant  $f_2(y)$  et  $g_2(x)$  des équations (4.13) par leurs valeurs respectives données dans les équations (4.16), les champs des déplacements deviennent :

$$\begin{cases} U_S = a_4 x + a_6 x y + \frac{1}{2} a_9 x y^2 + \frac{1}{2} a_5 y - \frac{1}{2} a_8 y^2 \\ V_S = a_7 y + a_8 x y + \frac{1}{2} a_9 x^2 y + \frac{1}{2} a_5 x - \frac{1}{2} a_6 x^2 \end{cases} \quad (4.17)$$

La rotation  $\theta_{zS}$  est donnée par l'équation (4.2) à partir de la dérivée des équations (4.17), ainsi

$$\theta_{zS} = a_6 x - a_8 y \quad (4.18)$$

En résumé, les champs des déplacements en dehors des modes de corps rigide se présentent comme suit :

$$\begin{cases} U_S = a_4 x + a_6 x y + \frac{1}{2} a_9 x y^2 + \frac{1}{2} a_5 y - \frac{1}{2} a_8 y^2 \\ V_S = a_7 y + a_8 x y + \frac{1}{2} a_9 x^2 y + \frac{1}{2} a_5 x - \frac{1}{2} a_6 x^2 \\ \theta_{zS} = a_6 x - a_8 y \end{cases} \quad (4.19)$$

Le **champ de déplacement final** est obtenu en additionnant les relations (4.10) et (4.19) :

$$\begin{cases} U = a_1 - a_3 \cdot y + a_4 x + \frac{1}{2} a_5 y + a_6 x y - \frac{1}{2} a_8 y^2 + \frac{1}{2} a_9 x y^2 \\ V = a_2 + a_3 \cdot x + \frac{1}{2} a_5 x - \frac{1}{2} a_6 x^2 + a_7 y + a_8 x y + \frac{1}{2} a_9 x^2 y \\ \theta_z = -a_3 + a_6 x - a_8 y \end{cases} \quad (4.20)$$

Sous forme matricielle le champ des déplacements donné par les équations (4.20) s'écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ \theta_z(x, y) \end{pmatrix} = [F(x, y)] \cdot \{a_i\} \quad (4.21)$$

$$\{a_i\}^T = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9 \rangle$$

$$[F(x, y)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & \frac{y}{2} & xy & 0 & \frac{-y^2}{2} & \frac{xy^2}{2} \\ 0 & 1 & x & 0 & \frac{x}{2} & \frac{-x^2}{2} & y & xy & \frac{x^2y}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & x & 0 & -y & 0 \end{bmatrix}$$

### \*Matrice de déformation

Dans le plan de l'élément, la relation déformation - déplacement est donnée comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

Le développement de cette équation donne :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & \frac{y^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & xy \end{bmatrix} \cdot \{a_i\} \quad (4.23)$$

Avec :

$$\{a_i\}^T = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9 \rangle$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & \frac{y^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & xy \end{bmatrix} \text{représente la } \mathbf{matrice \ des \ déformations} \text{ notée également [B]}$$

### 4.2.3 Fonctions de forme

Connaissant les coordonnées nodales  $(x_i, y_i)$  correspondant aux nœuds  $i$  ( $i=1, \dots, 3$ ) et en application de la relation (4.21) le vecteur des déplacements des nœuds, au niveau élémentaire, est donné comme suit :

$$\{q^e\} = \begin{bmatrix} [f(x_1, y_1)] \\ [f(x_2, y_2)] \\ [f(x_3, y_3)] \end{bmatrix} \cdot \{a_i\} \quad (4.24)$$

$$\{q^e\}^T = \langle u_1, v_1, \theta z_1, u_2, v_2, \theta z_2, u_3, v_3, \theta z_3 \rangle$$

$$\{a_i\}^T = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9 \rangle$$

$$\begin{bmatrix} [F(x_1, y_1)] \\ [F(x_2, y_2)] \\ [F(x_3, y_3)] \end{bmatrix} \text{ Représente la } \mathbf{matrice \ des \ coordonnées \ nodales} \text{ de l'élément que nous désignons par la}$$

notation **[A]**. Le détail de cette matrice est donné en annexe 01.

De l'équation (4.24), on en déduit la valeur des paramètres  $a_i$  qui sont données comme suit :

$$\{a_i\} = [A]^{-1} \{q^e\} \quad (4.25)$$

En remplaçant les valeurs des paramètres  $a_i$  données par la relation (4.24) dans le système d'équation, on obtient la relation :

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ \theta_z(x, y) \end{Bmatrix} = [F(x, y)] \cdot [A]^{-1} \{q^e\} \quad (4.26)$$

Dans laquelle,  $[N] = [F(x, y)] \cdot [A]^{-1}$  Représente la **matrice des fonctions de forme  $N_i$** .

#### 4.2.4 Evaluation de la matrice de rigidité

Le travail virtuel intérieur, élémentaire discrétisé est donné par l'expression :

$$(\delta W_{int})^e = \int_{V^e} \delta \{\varepsilon\}^T \cdot \{\sigma\} \cdot dV \quad (4.27)$$

En remplaçant dans l'équation (4.27)  $\{\varepsilon\} = [N'] \cdot \{q^e\} = [Q(x, y)] \cdot [A]^{-1} \{q^e\}$  et  $\{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\}$  par leurs valeurs, respectives, on obtient :

$$(\delta W_{int})^e = \delta \{q^e\}^T \int_V [Q(x, y)]^T \cdot [A^{-1}]^T \cdot [D] \cdot [Q(x, y)] \cdot [A]^{-1} \{q^e\} dV \quad (4.28)$$

Pour un élément d'épaisseur  $t$  constante, la matrice de rigidité élémentaire tirée de l'expression (4.28) est la suivante :

$$[K^e] = t \cdot \int_S [Q(x, y)]^T \cdot [A^{-1}]^T \cdot [D] \cdot [Q(x, y)] \cdot [A]^{-1} dS \quad (4.29)$$

L'expression (4.29) peut, s'écrire :

$$[K^e] = t \cdot [A^{-1}]^T \int_S [Q(x, y)]^T [D] \cdot [Q(x, y)] \cdot dS \cdot [A]^{-1} = t \cdot [A^{-1}]^T [K_0] \cdot [A]^{-1} \quad (4.30)$$

L'évaluation de l'expression  $[K_0] = \int_S [Q(x, y)]^T [D] \cdot [Q(x, y)] \cdot dS$  est établie par intégration analytique des différents éléments du résultat du produit matriciel  $[Q(x, y)]^T [D] \cdot [Q(x, y)]$  dont les composantes se présentent généralement sous la forme  $H_{\alpha\beta} = C \cdot x^\alpha \cdot y^\beta$ .

Donc la matrice  $[K_0]$  est évaluée par intégration analytique des valeurs  $\int_x \int_y H_{\alpha\beta} = \int_x \int_y C \cdot x^\alpha \cdot y^\beta$ .

Notre élément étant destinée à la modélisation des structures ayant des comportements en état de plan de déformation, la matrice des paramètres mécaniques du matériau est comme suit :

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Les matrices  $[K_0]$  évaluées avant et après intégration sont détaillées respectivement dans les annexes 02 et 03.

### 4.3 Intégration analytique

Une formulation classique par l'utilisation de l'intégration numérique (éléments iso paramétriques) peut engendrer un problème lié à la perte de précision pour les distorsions géométriques, surtout lorsque les champs d'approximation sont constitués de polynômes de degré élevé. L'utilisation de l'intégration analytique dans l'évaluation de la matrice de rigidité permet d'éviter ces problèmes.

Pour ce faire, une démarche fut adoptée par D.J. Hamadi et M.T Belarbi [HAM06], qui consiste en la formulation d'une expression générale facile à mettre en œuvre et permettant une évaluation automatique de la matrice  $[K_0]$ , ceci quel que soit le degré du polynôme résultant du produit et quelque soit la distorsion de l'élément. Cette démarche se présente comme suit :

Soit un élément fini (triangulaire par exemple) (Figure 4.2).

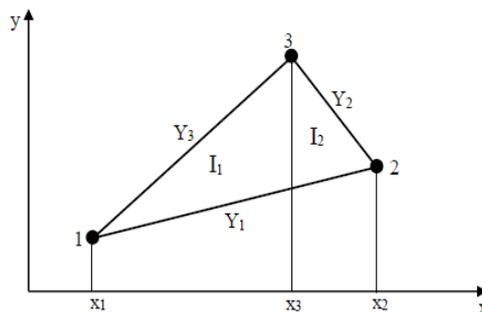


Figure 4.2: Intégration analytique - Exemple d'un élément fini triangulaire

Les termes de la matrice résultant du produit  $[K_0] = \int_S [Q(x, y)]^T [D] \cdot [Q(x, y)]$  sont sous la forme  $C \cdot x^\alpha \cdot y^\beta$ .

Donc l'intégration de l'expression  $[K_0] = \int_S [Q(x, y)]^T [D] \cdot [Q(x, y)] \cdot dS$  revient à intégrer chacun des termes de la matrice  $[Q_0]$ .

$$[Q_0] \rightarrow I = \int_x \int_y C \cdot x^\alpha \cdot y^\beta \cdot dx \cdot dy$$

Avec

$$- I = I_1 + I_2$$

-  $I_1$  représente l'intégrale entre les droites  $Y_1$  et  $Y_2$  dans le sens des  $y$  et entre  $X_1$  et  $X_3$  dans le sens des  $x$ .

-  $I_2$  représente l'intégrale entre les droites  $Y_1$  et  $Y_2$  dans le sens des  $y$  et entre  $X_3$  et  $X_2$  dans le sens des  $x$ .

Les valeurs de  $I_1$  et  $I_2$  sont données comme suit :

$$I_1 = \int_{x_1}^{x_3} \int_{Y_1}^{Y_3} C \cdot x^\alpha \cdot y^\beta \cdot dx \cdot dy$$

$$I_2 = I_1 = \int_{x_3}^{x_2} \int_{Y_1}^{Y_2} C \cdot x^\alpha \cdot y^\beta \cdot dx \cdot dy$$

y : représente l'ordonnée de la droite d'équation  $y = a.x + b$ .

donc : pour  $\beta = 2$ , nous aurons  $y^2 = (a.x + b)^2 = 1.a^2.x^2 + 2.a.b.x + 1.b^2$ ,

pour  $\beta = 3$ , nous aurons  $y^3 = (a.x + b)^3 = 1.a^3.x^3 + 3.a^2.b.x^2 + 3.a.b^2.x + 1.b^3$ ,

Ainsi, selon la valeur de  $\beta$ , on aboutit à la forme générale suivante :

$$y^\beta = (a.x + b)^\beta = \sum_{k=1}^{k=\beta+1} C(k). a^{\beta+1-k}. b^{k-1}. x^{\beta+1-k} = \sum_{k=1}^{k=\beta+1} C(k). a^{k-1}. b^{\beta+1-k}. x^{k-1}$$

Avec  $C(k)$  des coefficients dont le nombre et la valeur sont fonction de la valeur de  $\beta$  (voir tableau 4.1). A titre d'exemple, pour :

Tableau 4.1 : Valeur des coefficients  $C(k)$  en fonction de  $\beta$

	$C(k), k=1,6$					
	C(1)	C(2)	C(3)	C(4)	C(5)	C(6)
$\beta=1$	1	-	-	-	-	-
$\beta=2$	1	1	-	-	-	-
$\beta=3$	1	2	1	-	-	-
$\beta=4$	1	3	3	1	-	-
$\beta=5$	1	4	6	4	1	-
$\beta=6$	1	5	10	10	5	1

L'intégrale  $\int y^\beta dy$  devient :

$$\int y^\beta dy = \frac{1}{\beta+1} y^{\beta+1} = \frac{1}{\beta+1} (a.x + b)^{\beta+1} = \frac{1}{\beta+1} \sum_{k=1}^{k=\beta+2} C(k). a^{k-1}. b^{\beta+2-k}. x^{k-1}$$

Pour des bornes constituées des d'équations :  $Y_i = a_i.x + b_i$  et  $Y_j = a_j.x + b_j$  cette équation prend la forme:

$$\int_{Y_i}^{Y_j} y^\beta dy = \frac{1}{\beta+1} \sum_{k=1}^{k=\beta+2} C(k). (a_j^{k-1}. b_j^{\beta+2-k} - a_i^{k-1}. b_i^{\beta+2-k}). x^{k-1}$$

L'intégration de cette dernière équation par rapport aux bornes  $x_m$  et  $x_n$  nous donne :

$$\int_{x_m}^{x_n} x^\alpha (\int_{Y_i}^{Y_j} y^\beta dy) . dx = \int_{x_m}^{x_n} \frac{1}{\beta+1} \sum_{k=1}^{k=\beta+2} C(k). (a_j^{k-1}. b_j^{\beta+2-k} - a_i^{k-1}. b_i^{\beta+2-k}). x^{k+\alpha-1}. dx$$

L'expression finale de l'intégrale est enfin :

$$I_p = C. \frac{1}{\beta+1} \sum_{k=1}^{k=\beta+2} \frac{1}{k+\alpha} C(k). (a_j^{k-1}. b_j^{\beta+2-k} - a_i^{k-1}. b_i^{\beta+2-k}). (x_n^{k+\alpha} - x_m^{k+\alpha})$$

Pour le cas d'un triangle  $I = \sum_{p=1}^1 I_p$

#### **4.4 - Conclusion**

L'utilisation de l'approche en déformation a été adoptée par plusieurs chercheurs pour développer des éléments finis efficaces et robustes. L'utilisation de cette approche permet d'obtenir des éléments efficaces ayant des fonctions d'interpolation d'ordre élevé dans le champ des déplacements sans la nécessité d'introduire des degrés de liberté non essentiels, ce qui conduit généralement à une meilleure précision des contraintes, des déformations et des déplacements.

Cette programmation, réalisée en langage « Fortran », en implémentant la matrice de rigidité de notre élément dans le programme « Eléments finis » disponible au niveau du Laboratoire de Génie Civil et d'Hydraulique de l'université de Guelma.

## Chapitre 05 – TESTS DE VALIDATION

### 5.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la validation de notre élément fini « **MDP** », à travers des tests cités dans la littérature et utilisés par plusieurs auteurs, pour estimer la performance de l'élément vis-à-vis de la convergence vers la solution exacte, de sa robustesse et dans la représentation des modes de corps rigides et de contraintes constantes.

Comme il est procédé à la comparaison des résultats obtenus avec les solutions analytiques et les résultats donnés par d'autres éléments existants dans la littérature.

L'outil utilisé pour ces calculs est un programme de modélisation par éléments fini existant au niveau du Laboratoire de Génie Civil et Hydraulique de l'université 08 Mai 1945 de Guelma, auquel on a implémenté la sous-routine (ou sous-programme) relative à la construction de la matrice de rigidité qui concerne notre élément ainsi que les aspects pour le calcul des contraintes.

L'annexe 04 présente les sous-programmes écrits en Fortran concernant la construction de la matrice de rigidité élémentaire de notre élément fini.

Ce programme est écrit en langage FORTRAN.

Schématiquement ce programme est structuré autour de grands axes suivants :

- Lecture des données (soit à travers un dialogue sur console ou à travers un fichier de données),
- Construction des matrices de rigidité élémentaires et par assemblage la matrice globale de la structure,
- Introduction des conditions aux limites et des chargements,
- Résolution du système d'équations régissant l'équilibre de la structure  $[K].\{U\} = \{F\}$  dont les variables inconnues sont les vecteurs des déplacements et les réactions aux nœuds,
- Calcul des contraintes au milieu des éléments finis,
- Sortie sur fichier des données introduits et des résultats,

Les annexes 05 et 06 présentent respectivement des exemples de fichier de données et de fichier de résultats.

### 5.2 Test de comportement uni axial

Les buts de ce test sont :

- Valider l'approche pour le comportement uni axial des structures.
- La vérification de la performance de notre élément dans la représentation des comportements en modes de corps rigide.
- Vérifier la cohérence des résultats et la logique de la programmation.

**\* Données du problème :**

Pour cela nous avons pris la poutre d'éclatement  $L/B=100$  (Figure 5.1), utilisée par J.L. Batoz et G. Dhatt [BAT90], que nous avons sollicité à la traction. Pour être cohérent dans la comparaison des résultats avec la solution théorique donnée par la théorie de la résistance des matériaux, nous avons pris  $\nu=0$ . Le module d'élasticité est pris égal à  $E=10^7$ . La poutre est sollicitée par une charge  $P = 10^4$  distribuée uniformément suivant l'axe  $x$  le long de l'extrémité libre de la console est encastrée sur l'autre extrémité.

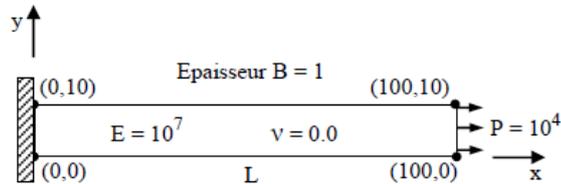


Figure 5.1 : Etat de dilatation

Le déplacement  $U$  à l'extrémité (au point de coordonnée  $x=100$  ;  $y=5$ ) est, selon la théorie de la résistance des matériaux :

$$U = \frac{PL}{ES} = 0.01$$

**\* Discrétisation physique de l'élément :**

- Nombre de nœuds = 09
- Nombre d'éléments = 08
- Nombre de blocages = 03 ( $u_1, u_2, u_3$ )
- Nombre de charges = 03 ( $P_7, P_8, P_9$ )

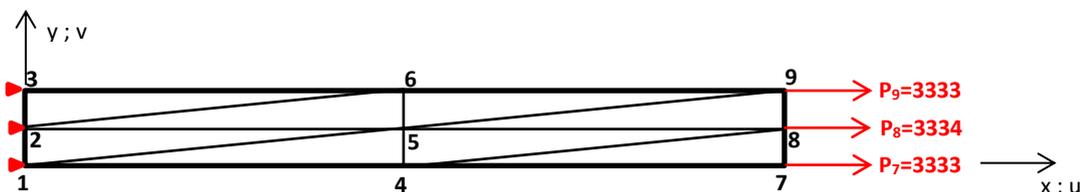


Figure 5.2 : Discrétisation physique de l'élément

**\* Résultats et commentaires :**

- ✓ Les déplacements dans le sens  $x$  au niveau de l'extrémité de la structure ( $u_7, u_8, u_9$ ) sont conformes à la solution de référence donnée par la RDM :

$$u_7 = u_8 = u_9 = 0.01$$

- ✓ En raison de la symétrie de la structure ( $u_4 = \frac{u_7}{2}$  ;  $u_5 = \frac{u_8}{2}$  ;  $u_6 = \frac{u_9}{2}$ ), Les déplacements obtenus sont conformes :

$$u_4 = u_5 = u_6 = 0.005$$

- ✓ L'équilibre statique (somme des forces aux nœuds) de la structure est respecté. Les résultats obtenus donnent :

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

- ✓ Le respect de la continuité des champs à l'intérieur de la structure et de la représentativité des modes de contraintes constantes. Les résultats obtenus dénotent une contrainte de traction dans toute la structure :

$$S_x = 1000 ; \text{résultats obtenus}$$

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{10000}{10 \times 1} = 1000 ; \text{Référence de la RDM}$$

- ✓ Les caractéristiques géométriques et mécaniques du modèle dénotent que l'axe x est une direction principale. Ceci est validé par les résultats obtenus ; à savoir la superposition des axes (x et y) aux axes principaux ( $n_1$  et  $n_2$ ) : L'angle d'orientation donné par le modèle est égal à zéro partout dans la structure

$$\theta \approx 0$$

- ✓ S'agissant d'un comportement en état plan de déformation on doit avoir  $\sigma_z \neq 0$  et  $\varepsilon_z = 0$ ) et  $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ . Les résultats obtenus donnent  $\sigma_z = 0$ , en raison de la valeur de  $\nu = 0$

Les résultats obtenus montrent la robustesse et l'excellente performance de cet élément dans la représentation des modes de corps rigide et des contraintes constantes. Comme les résultats donnés sont conformes aux solutions théoriques. Par ailleurs, la cohérence et la compatibilité des résultats dénotent l'exactitude de l'approche méthodologique utilisée et de la programmation réalisée en Fortran.

A partir de ces résultats, on peut affirmer que notre élément fini est très performant.

### 5.3 Test de convergence \_ poutre cantilever

Les buts de ce test sont :

- L'étude de l'influence du maillage pour le cas des déformations planes.
- L'évaluation de la vitesse de convergence de notre élément fini.

#### \* Données du problème :

Le problème d'une poutre console d'élanement  $L/B=100$  soumise à une charge verticale uniforme (Figure 5.3), utilisée par J.L. Batoz et G. Dhatt [BAT90]. Il s'agit de calculer le déplacement vertical à l'extrémité libre de la poutre en fonction de la taille du maillage (tableau 5.4).

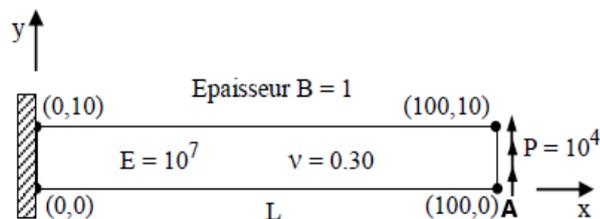


Figure 5.3: Poutre Console de J.L. Batoz et G. Dhatt [BAT90]

Les caractéristiques mécaniques adoptées sont :  $E = 10^7$  ;  $\nu = 0,30$ . La poutre encastée dans une extrémité et est sollicitée à l'autre extrémité libre de la console, par une charge  $P = 10^4$  distribuée uniformément suivant  $y$ . La solution de référence (déplacement  $V_A$  à l'extrémité libre au point de coordonnées  $x=100$  ;  $y=0$ ) est, selon la théorie des poutres (avec prise en charge du cisailment transversal), donnée par la théorie des poutres de Timoshenko comme suit :

$$v = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{6PL}{5GA} = 4 + 0.03 = 4.03$$

**\* Discrétisation physique de l'élément :**

- Nombre de nœuds = Variables.
- Nombre d'éléments = Variables.
- Nombre de blocages = 06 ( $u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2$ ).
- Nombre de charges = 02 ( $P_{n-1}, P_n$ ).

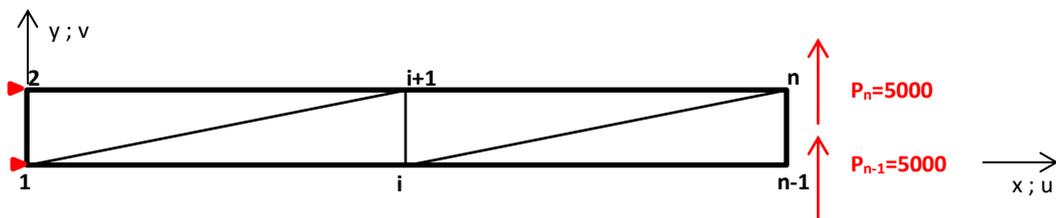


Figure 5.4 : La discrétisation physique - Maillage

**\* Résultats et commentaires :**

**Résultats :**

Tableau 5.1 : Déplacement vertical au point A de la poutre console.

Maillage	4	8	16	20	22	24
$V_A$	1.0748	1.1979	2.9074	3.6639	3.9250	4.1339
Référence	4.03					

Ces résultats sont comparés dans le graphe de la figure 5.5 avec ceux d'autres éléments existants dans la littérature.

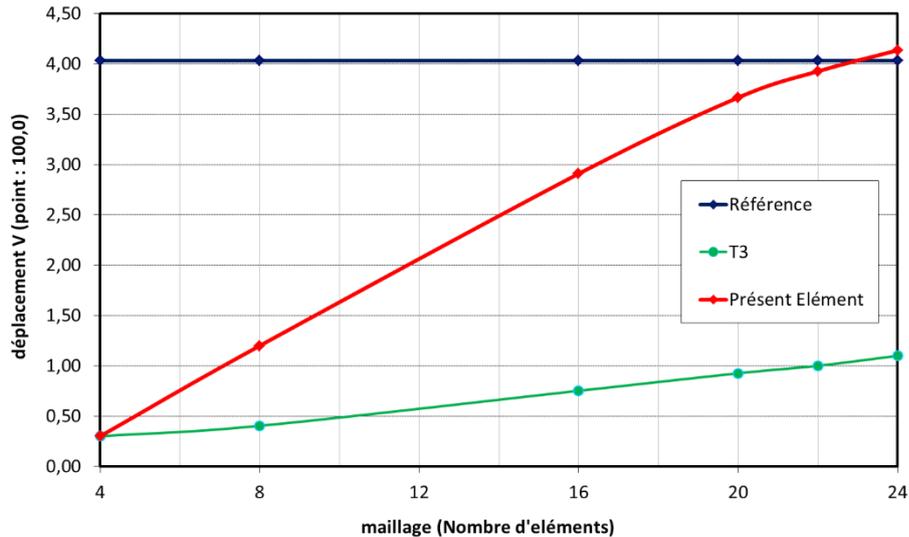


Figure 5.5 : Evolution du déplacement vertical au point A de la poutre console

**Commentaires :**

- ✓ Notre élément présente un comportement assez intéressant de robustesse. L'erreur avec la solution de référence se situe autour de 2,5 %.
- ✓ On observe une convergence rapide de l'élément : Approche de la solution de référence avec une discrétisation physique avec des tailles de maillage se situant en 22 et 24 mailles.
- ✓ Notre élément est plus performant que l'élément T3, connu dans la littérature et par ses caractéristiques spécifiques (Deux degrés de liberté U et V, Modèle en déplacement).

**5.4 Test de comportement à la flexion pure**

Les but de ce test est :

- Valider les performances de notre élément dans le cas d'une flexion pure.

**\* Données du problème :**

L'exemple utilisé (Figure 5.7) est celui traité par Ibrahimégovic, Frey et Reborra dans leur article de synthèse [IBR93].

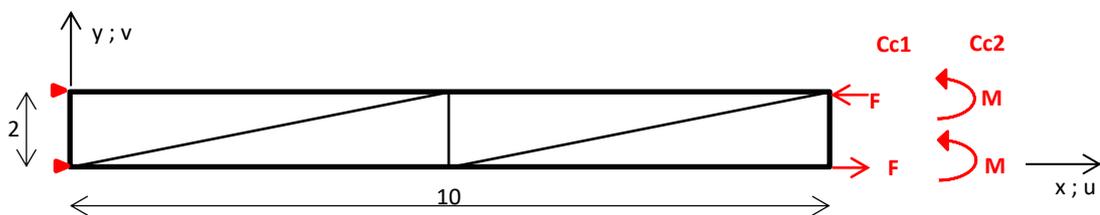


Figure 5.6 : Flexion Pure

Les caractéristiques mécaniques adoptées sont :  $E = 1500 \text{ Mpa}$  ;  $\nu = 0,00$ . La poutre est encadrée dans une extrémité et est sollicitée à l'autre extrémité libre de la console, selon deux cas de chargement :

- Cc1 désigne le cas de chargement 1, lorsque la poutre est sollicitée par le couple de force  $F=10$  Tonnes.

- Cc2 désigne le cas de chargement, lorsque la poutre est sollicitée par le moment  $M=10$  N.m.

Les caractéristiques géométriques de la poutre sont  $L = 10$  ;  $H = 2$  ; épaisseur = 1.

La solution de référence est donnée par Ibrahimbégovic, Frey et Reboria dans leur article de synthèse [IBR93].

**\* Discrétisation physique de l'élément :**

- Nombre de nœuds = 06
- Nombre d'éléments = 04
- Nombre de blocages = 06 ( $u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2$ )
- Nombre de charges = 02

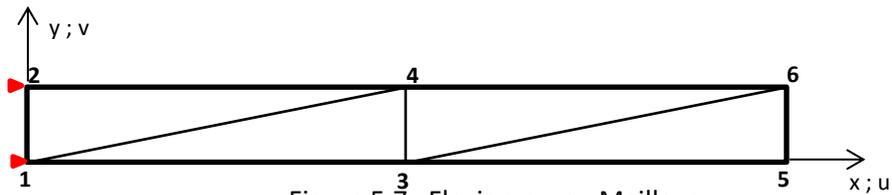


Figure 5.7 : Flexion pure - Maillage

**\* Résultats et commentaires :**

Les résultats donnés par notre élément sont illustrés par le tableau n°5.2.

Tableau 5.2 : Déplacement vertical et rotation au nœud 5 de la poutre console

Déplacement	Cas de Charge	Réf	IBR	SAB	SBT2	SBT2V	SBT3	SBT3V	SBQ4	Présent Elément
$V_5$	Cas 01	1.0000	1.0000	1.0003	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	1.0030	<b>1.0033</b>
$\theta_5$	Cas 02	0.2000	0.2000	0.2025	0.2023	0.2043	0.2037	0.2020	0.2025	<b>0.2021</b>

Pour la flexion pure, les résultats obtenus par notre élément, sont similaires à la solution de référence et se situent au même niveau que ceux donnés par d'autres éléments existants dans la littérature. Donc on peut affirmer que notre élément finis montre un comportement performant.

### 5.5 Étude du panneau fuselé de Cook

Les but de ce test est :

- Valider les performances de notre élément pour des maillages distordus.

**\* Données du problème :**

L'exemple utilisé (Figure 5.9) pour l'analyse est un panneau fixé sur le bord gauche et soumis à un chargement de cisaillement uniforme le long du bord libre. Ce test a été proposé initialement par Cook [COO 74], puis ensuite par Bergan et Felippa [BER 85]. Il s'agit de calculer le déplacement vertical au point A.

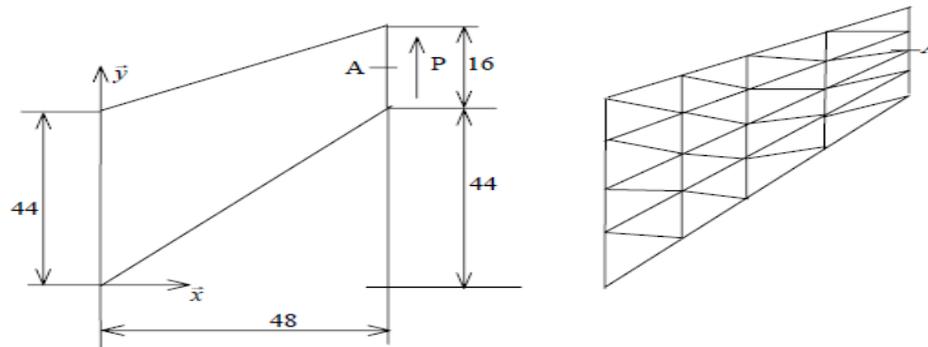


Figure 5.8 : *Panneau fuselé de Cook-géométrie (dimensions en mm) - maillage*

Le panneau est encastré dans la section  $x=0$ , et est soumis à un effort vertical  $P=1$  N dans la section  $x=48$ . Les caractéristiques du matériau sont  $E=10\,000$  MPa,  $\nu=0.25$  et l'épaisseur du panneau est  $e=1$  mm.

La solution de référence est celle donnée par Bergan et Filippa [BER 85], elle correspond aux résultats obtenus avec un maillage  $100 \times 100$ .

**\* Résultats et commentaires :**

Les résultats donnés par notre élément sont illustrés par le tableau n°5.3.

Tableau 5.3 : Panneau fuselé de Cook-déplacement vertical du point A

Maillage	2x2	4x4
CST	12.09	18.35
T3D	17.49	21.53
Allman	21.52	23.17
Bergan & Filippa	20.36	22.42
Ibrahimbegovic	20.68	22.98
Yunus et al (AT)	20.93	22.94
Yunus et al (AQ)	21.85	23.26
Ayad [AYA 95a]	21.10	22.88
Cook (E1)	18.89	22.47
Cook (E5)	21.76	23.19
Solution de Référence.	23.91	
Présent	<b>18.92</b>	<b>23.89</b>

Avec un maillage 2x2 notre élément donne des résultats meilleurs que les éléments CST, T3D et Cook (E1). Par ailleurs, il est le plus performant parmi les résultats des éléments existants dans la littérature avec un maillage de 4x4. L'erreur entre le déplacement calculé et la référence n'est que 0.08%.

De ces résultats on peut conclure que notre élément est très robuste même lorsqu'il s'agit de maillages distordus. Ceci est le fruit de l'intégration analytique utilisée dans l'évaluation de la matrice de rigidité.

## 5.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré la validation de l'élément fini membranaire traitant des cas de comportement à déformation plane. Les conclusions tirées des tests effectués, dénotent le comportement très performant de cet élément et sa robustesse du point de vue vitesse de convergence et représentation du mouvement de corps rigide et de contraintes constantes, grâce aux approches et techniques utilisées dans son développement. La comparaison avec d'autres éléments de la littérature a montré que l'élément peut rivaliser malgré sa simplicité de formulation par rapport à d'autres éléments. L'adoption de l'approche en déformation qui a contribué dans l'enrichissement de champ de déplacement, plus l'utilisation de l'intégration analytique dans l'évaluation de la matrice de rigidité, ont augmenté à la fois la rapidité de convergence vers la solution et la performance de notre élément même pour des maillages distordus.

## CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail nous avons présenté un élément fini membranaire triangulaire d'élasticité plane. Cet élément est basé sur l'approche en déformation. L'approche adoptée, les concepts et les techniques de développement utilisés, ont permis d'aboutir à un élément fini concurrentiel qui combine entre la performance, l'efficacité et la simplicité de sa formulation.

Les résultats obtenus à partir de ce travail nous a permis de mettre en évidence certains points, à savoir :

- L'utilisation du modèle basé sur l'approche en déformation a confirmé son efficacité dans la modélisation par élément fini.
- Une rapidité dans la convergence vers la solution théorique sans avoir recours à raffiner les maillages.
- L'intégration analytique dans l'évaluation de la matrice de rigidité, est fortement intéressante pour éviter la perte de convergence, surtout lorsqu'il s'agit de maillage distordu.
- La fiabilité du présent élément a été démontrée à travers diverses applications et tests de validations.
- Malgré sa simplicité de formulation, notre élément a donné des résultats très satisfaisants en concurrence avec d'autres éléments se basant sur d'autres approches et formulations.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[BAT90] Batoz J. L., Dhatt G., Modélisation des structures par éléments finis, vol. 1, Solides Elastiques, Hermes, Paris, 1990.

[BER 85] P. G. Bergan and C. A. Felippa, A triangular membrane element with rotational degrees of Freedom, Comput Meth Appl Mech Eng, vol. 50, pp. 25–69, 1985.

[IBR93] Ibrahimbegovic A., et Frey et Rehora B., Une approche unifiée de la modélisation des structures complexes : les éléments finis avec degré de liberté de rotation, LSC, Rapport Interne 93/10, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (Suisse), Juin 1993.

[CLO65] : Clough R.W., Tocher J.L., Finite element stiffness matrixes for analysis of plate bending, Proceeding of first conference Matrix methods in structural mechanics, Wright-Pattersonm Qir force basem Ohiom, 1965, p 515-812.

[COO 74] R. D. Cook, Improved two-dimensional finite element, Journal of the Structural Division, vol. 100, pp. 1851–1863, 1974.

[HIM08] : M. HIMEUR., Développement d' éléments membranaires nouveaux d' élasticité plane basés sur la formulation en déformation, P104, Mémoire de magister université de Guelma 2008.

[HIM11] :M. HIMEUR, M. GUENFOUD., Bending triangular finite element with a fictitious fourth node based on the strain approach, European Journal of Computational Mechanics Volume 20 2011 - Issue 7-8.

[HIM18] : M. HIMEUR., Mécanique des milieux continus, P121, cours de master université de Guelma, 2018.

[HIM14] : M. HIMEUR., Contribution à la formulation de quelques éléments de coques basés sur la formulation en déformation, P42, Thèse de doctorat université de Guelma, 2014

## ANNEXES

### Annexe 01 : Matrice des coordonnées nodales

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_1 & x_1 & \frac{y_1}{2} & x_1 y_1 & 0 & \frac{-y_1^2}{2} & \frac{x_1 y_1^2}{2} \\ 0 & 1 & x_1 & 0 & \frac{x_1}{2} & \frac{-x_1^2}{2} & y_1 & x_1 y_1 & \frac{x_1^2 y_1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & x_1 & 0 & -y_1 & 0 \\ 1 & 0 & -y_2 & x_2 & \frac{y_2}{2} & x_2 y_2 & 0 & \frac{-y_2^2}{2} & \frac{x_2 y_2^2}{2} \\ 0 & 1 & x_2 & 0 & \frac{x_2}{2} & \frac{-x_2^2}{2} & y_2 & x_2 y_2 & \frac{x_2^2 y_2}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & x_2 & 0 & -y_2 & 0 \\ 1 & 0 & -y_3 & x_3 & \frac{y_3}{2} & x_3 y_3 & 0 & \frac{-y_3^2}{2} & \frac{x_3 y_3^2}{2} \\ 0 & 1 & x_3 & 0 & \frac{x_3}{2} & \frac{-x_3^2}{2} & y_3 & x_3 y_3 & \frac{x_3^2 y_3}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & x_3 & 0 & -y_3 & 0 \end{bmatrix}$$

**Annexe 02 : Matrice de rigidité élémentaire  $K_o$  avant intégration**

$$K_o = \frac{E.t}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ \frac{1}{2} \cdot y^2 & \frac{1}{2} \cdot x^2 & x \cdot y \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2 \cdot \nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & \frac{y^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x \cdot y \end{pmatrix}$$

$$K_o = \frac{E.t}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\nu & 0 & -y \cdot (-1+\nu) & \nu & x \cdot \nu & \frac{1}{2} \cdot y^2 - \frac{1}{2} \cdot y^2 \cdot \nu + \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \nu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} - \nu & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \cdot x \cdot y \cdot (-1+2 \cdot \nu) \\ 0 & 0 & 0 & -y \cdot (-1+\nu) & 0 & -y^2 \cdot (-1+\nu) & y \cdot \nu & y \cdot \nu \cdot x & \frac{1}{2} \cdot y \cdot (y^2 - y^2 \cdot \nu + x^2 \cdot \nu) \\ 0 & 0 & 0 & \nu & 0 & y \cdot \nu & 1-\nu & -x \cdot (-1+\nu) & \frac{1}{2} \cdot y^2 \cdot \nu + \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \nu \\ 0 & 0 & 0 & x \cdot \nu & 0 & y \cdot \nu \cdot x & -x \cdot (-1+\nu) & -x^2 \cdot (-1+\nu) & \frac{-1}{2} \cdot (-y^2 \cdot \nu - x^2 + x^2 \cdot \nu) \cdot x \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \cdot y^2 - \frac{1}{2} \cdot y^2 \cdot \nu + \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \nu & \frac{-1}{2} \cdot x \cdot y \cdot (-1+2 \cdot \nu) & \frac{1}{2} \cdot y \cdot (y^2 - y^2 \cdot \nu + x^2 \cdot \nu) & \frac{1}{2} \cdot y^2 \cdot \nu + \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \nu & \frac{-1}{2} \cdot (-y^2 \cdot \nu - x^2 + x^2 \cdot \nu) \cdot x & \frac{-1}{4} \cdot (y^2 + x^2)^2 \cdot (-1+\nu) \end{bmatrix}$$

**Annexe 03 : Matrice de rigidité élémentaire après intégration**

$$K_o = \frac{E \cdot t}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \times$$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		$H(1,1)(1 - \nu)$	0	$H(2,1)(1 - \nu)$	$H(1,1)v$	$H(2,1)v$	$0.5H(1,3)(1 - \nu) + 0.5H(3,1)v$			
			$H(1,1)(0.5 - \nu)$	0	0	0	$H(2,2)(0.5 - \nu)$			
		<i>Symétrie</i>		$H(1,3)(1 - \nu)$	$H(1,2)v$	$H(2,2)v$	$0.5H(1,4)(1 - \nu) + 0.5H(3,2)v$			
					$H(1,1)(1 - \nu)$	$H(2,1)(1 - \nu)$	$0.5H(3,1)(1 - \nu) + 0.5H(1,3)v$			
						$H(3,1)(1 - \nu)$	$0.5H(4,1)(1 - \nu) + 0.5H(2,3)v$			
							$0.25(1 - \nu)(H(5,1) + 2H(3,3) + H(1,5))$			

## Annexe 04 : Matrice de rigidité élémentaire – Les sous-programmes écrits en Fortran

```
SUBROUTINE TRIAMICONE,COOR,RIGID,IND,IDA,IDB,IDC,IDD,NUEX,INTER)
```

```
=====
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
  CHARACTER*40 FMT,TITRE
  DIMENSION ICONE(IDC,3),COOR(IDD,2),RIGID(IDB),IND(IDA),ELAS(3,3)
  DIMENSION NN(3),XE(3,2),SK(6,6),X(3),Y(3),A(9,9),EKO(9,9)
  DIMENSION EKM(9,9),XINVA(9,9),C(9),EK(9,9),EKT(9,9)
  COMMON EX,EY,GXY,PXY,PYX,T,NTE,NNO,NBC,NLN,LIB,N1,N2,NTY,NEL(10), imp
  COMMON /LECT/ M1,M2,I,VO,IF15,IF16,IF17,IF18,IF19,IF20
C .....
  DO 11 I=1,NTE

  CALL GEOM_M(I,IDC,IDD,ICONE,COOR,NN,X,Y)

  CALL GTTM(X,Y,EKM)
  IF(NUEX .EQ. 0) CALL ASSER(EKM,NN,3,9,3,SK,RIGID,IDA,IDB,IND)
  IF(NUEX .EQ. 1) CALL ASSERB(EKM,NN,N2,3,9,3,SK,RIGID,IDA)
  IF(INTER .EQ. 1 .OR. INTER .EQ. 3) THEN
    WRITE(M2,*) ' ... ELEMENT ',I
    TITRE=' MATRICE EKM'
    CALL MPRINT(TITRE,EKM,9,9,M2,0,FMT)

  ENDIF
11 CONTINUE
  RETURN
  END
*****
```

```
  SUBROUTINE GTTM(X,Y,EKT)
```

```
=====
C   FORMATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE DE L'ELEMENT MEMBRANAIRE
C *****
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
  CHARACTER*40 FMT,TITRE
  DIMENSION X(3),Y(3),A(9,9),EKO(9,9)
  DIMENSION EKN(9,9),C(6),EK(9,9),EKT(9,9)
  COMMON EX,EY,GXY,PXY,PYX,T,NTE,NNO,NBC,NLN,LIB,N1,N2,NTY,NEL(10),imp
  CALL ZERO(A,81)
    CALL FORMAM(X,Y,A)
    CALL MINV(A,9,D)

    CALL FORMKOM(X,Y,EKO)
    CALL CALCULKM(A,EKO,EKT)
  RETURN
  END
*****
```

SUBROUTINE FORMAM(X,Y,A)

```

=====
C  FORMULATION DE LA MATRICE "A" DES COORDONNEES NODALES DE L'ELEMENT TRIANGULAIRE A
    TROIS NOEUDS ET DEUX DEGRES DE LIBERTE ( U et V) PAR NOEUD
C  *****
    IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
    CHARACTER*40 FMT,TITRE
    DIMENSION X(3),Y(3),A(9,9)
C
    CALL ZERO(A,81)
    M=1
    DO 100 I=1,3
    A(M,1)=1.D0
    A(M,3)=-Y(I)
    A(M,4)=X(I)
    A(M,5)=Y(I)/2
    A(M,6)=X(I)*Y(I)
    A(M,8)=-Y(I)**2/2
    A(M,9)=X(I)*Y(I)**2/2

    M=M+1
    A(M,2)=1.D0
    A(M,3)=X(I)
    A(M,5)=X(I)/2
    A(M,6)=X(I)**2/2
    A(M,7)=Y(I)
    A(M,8)=X(I)*Y(I)
    A(M,9)=X(I)**2*Y(I)

    M=M+1
    A(M,3)=-1.D0
    A(M,6)=-X(I)
    A(M,8)=-Y(I)
    M=M+1
100 CONTINUE

    RETURN
    END

```

\*\*\*\*\*

SUBROUTINE FORMKOM(X,Y,EKO)

```

=====
C  FORMULATION DE LA MATRICE "[Ko]" DE L'ELEMENT TRIANGULAIRE A TROIS NOEUDS ET TROIS
    DEGRES DE LIBERTE ( U et V et Teta) PAR NOEUD
C
C  *****
    IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
    CHARACTER*40 FMT,TITRE
    COMMON EX,EY,GXY,PXY,PYX,T,NTE,NNO,NBC,NLN,LIB,N1,N2,NTY,NEL(10)
    COMMON /COEFFICIENT/ A1,B1,A2,B2,A3,B3

```

```

DIMENSION X(3),Y(3),EKO(9,9),H(9,9)
C
C   PARAMETRES RESULTANT DE L'INTEGRATION ANALYTIQUE

CALL INTEGRATIONS5(X,Y,H)

C
C   FORMULATON DE Ko
CALL ZERO(EKO,81)
C
E=T*EX/((1.D0+PXY)*(1.D0-2*PXY))
c
EKO(4,4)=E*H(1,1)*(1-PXY)
EKO(4,6)=E*H(1,2)*(1-PXY)
EKO(4,7)=E*H(1,1)*PXY
EKO(4,8)=E*H(2,1)*PXY
EKO(4,9)=E*(0.5*H(1,3)-0.5*PXY*H(1,3)+0.5*PXY*H(3,1))

EKO(5,5)=E*(0.5-PXY)*H(1,1)
EKO(5,9)=E*(0.5-PXY)*(H(2,1)+H(1,2))

EKO(6,6)=E*H(1,3)*(1-PXY)
EKO(6,7)=E*H(1,2)*PXY
EKO(6,8)=E*H(2,2)*PXY
EKO(6,9)=E*(0.5*H(1,4)-0.5*PXY*H(1,4)+0.5*PXY*H(3,2))

EKO(7,7)=E*H(1,1)*(1-PXY)
EKO(7,8)=E*H(2,1)*(1-PXY)
EKO(7,9)=E*(0.5*PXY*H(1,3)+0.5*H(3,1)-0.5*PXY*H(3,1))

EKO(8,8)=E*H(3,1)*(1-PXY)
EKO(8,9)=E*(0.5*H(2,3)*PXY+0.5*H(4,1)-0.5*H(4,1)*PXY)

EKO(9,9)=0.25*H(1,5)-0.25*PXY*H(1,5)+0.5*H(3,3)*PXY
EKO(9,9)=EKO(9,9)+0.25*H(5,1)-0.25*PXY*H(5,1)+0.5*H(3,1)+H(2,2)
EKO(9,9)=EKO(9,9)-H(3,1)*PXY-2*PXY*H(2,2)+0.5*PXY*H(1,3)
EKO(9,9)=EKO(9,9)-PXY*H(1,3)
EKO(9,9)=EKO(9,9)*E
DO 150 I=1,9
DO 160 K=1,9
EKO(K,I)=EKO(I,K)

160 CONTINUE
150 CONTINUE
C
RETURN
END

```

\*\*\*\*\*

SUBROUTINE CALCULKM(XINVA,EKO,EK)

```
=====
C  CALCUL DE LA MATRICE DE RIGIDITE ELEMENTAIRE "[Ke]" DE L'ELEMENT TRIANGULAIRE A TROIS
  NOEUDS ET TROIS DEGRES DE LIBERTE ( U et V et Teta) PAR NOEUD
C  *****
    IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
    CHARACTER*40 FMT,TITRE
    DIMENSION A(9,9),EK(9,9),EKO(9,9),EKNP(9,9),AIT(9,9),XINVA(9,9)
    COMMON EX,EY,GXY,PXY,PYX,T,NTE,NNO,NBC,NLN,LIB,N1,N2,NTY,NEL(10)
C
    CALL TRANSPM(XINVA,AIT)
c
    CALL PRODM1M(AIT,EKO,EKNP)
c
    CALL PRODM1M(EKNP,XINVA,EK)
c
    RETURN
    END
C
```

## Annexe 05 : Exemple de fichiers de données

COMPORTEMENT A LA DILATATION

C Données générales : NNO,NTE,NBC,NLN,NTY,NCLI,INTER  
9 8 3 3 6 0 0

C Coordonnées des nœuds: X Y ( Z )  
.00000E+00 .00000E+00 .00000E+00 .50000E+01 .00000E+00 .10000E+02  
.50000E+02 .00000E+00 .50000E+02 .50000E+01 .50000E+02 .10000E+02  
.10000E+03 .00000E+00 .10000E+03 .50000E+01 .10000E+03 .10000E+02

C Connexions des éléments  
S 1 4 5 1 5 2 "  
1  
"  
3  
"

C Charges nodales: nœud direction intensité  
C Charges nodales  
7 1 .3333E+04 8 1 .3334E+04 9 1 .3333E+04

C Conditions aux limites : nœud direction bloquée  
1 1 2 1 3 1

C Module d'élasticité, Poisson, épaisseur  
.10000E+08 .00000E+00 .10000E+01

**Annexe 06 : Exemple de fichiers de résultats**

```

FFFFF IIIII NN N IIIII TTTTT EEEEE
F I N N N I T E
FFF I N N N I T EEE
F I N N N I T E
F IIIII N NN IIIII T EEEEE

```

Version JUN 2023

\*\*\* UNIVERSITE 08 MAI 1945 GUELMA \*\*\*

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL ET HYDRAULIQUE

\*\* P F E \*\*

TITRE : FORMULATION D UN ELEMENT FINI TRIANGULAIRE POUR LA  
MODELISATION DES STRUCTURES EN ETAT DE DEFORMATION PLANE

Encadreur : Docteur H I M E U R Med

Etudiante : Melle B O U H A R O U D Souheyla

\*\*\*\*\* DONNEES \*\*\*\*\*

-----

COMPORTEMENT A LA DILATATION

C Données générales : NNO,NTE,NBC,NLN,NTY,NCLI,INTER

9 8 3 3 6 0 0

C Coordonnées des nœuds: X Y ( Z )

```

.00000E+00 .00000E+00 .00000E+00 .50000E+01 .00000E+00 .10000E+02
.50000E+02 .00000E+00 .50000E+02 .50000E+01 .50000E+02 .10000E+02
.10000E+03 .00000E+00 .10000E+03 .50000E+01 .10000E+03 .10000E+02

```

C Connexions des éléments

S 1 4 5 1 5 2 "

1

"

3

"

C Charges nodales: nœud direction intensité

C Charges nodales

7 1 .3333E+04 8 1 .3334E+04 9 1 .3333E+04

C Conditions aux limites : nœud direction bloquée

1 1 2 1 3 1

C Module d'élasticité, Poisson, épaisseur

.10000E+08 .00000E+00 .10000E+01

\*\*\*\*\*

Titre COMPORTEMENT A LA DILATATION

---

```

ELEMENTS TRIAM plaque de membrane   NTE=    8
NOMBRE DE NOEUDS                     NNO=    9
NOMBRE DES BLOCAGES                   NBC=    3
NOMBRE DES CHARGES                     NLN=    3
NOMBRE DE DEGRES DE LIBERTE           LIB=    3
NOMBRE DE CL INTERNES POUR POUTRE     NCLI=   0
CAS D'ECRITURE NO.                     INTER=   0
    
```

.....COORDONNEES DES NOEUDS, nø, X, Y

```

*   1 *   .000000000 *   .000000000 *
*   2 *   .000000000 *   5.000000000 *
*   3 *   .000000000 *  10.000000000 *
*   4 *  50.000000000 *   .000000000 *
*   5 *  50.000000000 *   5.000000000 *
*   6 *  50.000000000 *  10.000000000 *
*   7 * 100.000000000 *   .000000000 *
*   8 * 100.000000000 *   5.000000000 *
*   9 * 100.000000000 *  10.000000000 *
    
```

```

** ATTENTION ** DIRECTION 1 X MAX=100.000000000 X MIN= .000000000
** ATTENTION ** DIRECTION 2 Y MAX= 10.000000000 Y MIN= .000000000
    
```

.....CONNEXIONS DES ELEMENTS, nø, I, J, M

```

*   1 *   1 *   4 *   5 *
*   2 *   1 *   5 *   2 *
*   3 *   2 *   5 *   6 *
*   4 *   2 *   6 *   3 *
*   5 *   4 *   7 *   8 *
*   6 *   4 *   8 *   5 *
*   7 *   5 *   8 *   9 *
*   8 *   5 *   9 *   6 *
    
```

.....CHARGES APPLIQUEES DIRECTEMENT AUX NOEUDS

```

*   NOEUD * DIRECTION *   INTENSITE *
*   7 *   1 * 3333.000000000 *
*   8 *   1 * 3334.000000000 *
*   9 *   1 * 3333.000000000 *
    
```

\*\* ATTENTION \*\* SOMMES DES FORCES AUX NOEUDS

DIRECTION	SOMME
1	.10000E+05
2	.00000E+00
3	.00000E+00

.....CONDITIONS AUX LIMITES, (Nœud, Direction)

\* 1, 1\*  
 \* 2, 1\*  
 \* 3, 1\*

.....MODULE D'ELASTICITE ..... 10000000.000000000  
 COEFFICIENT DE POISSON .. .000000000

.....EPAISSEUR ..... 1.000000000

.....CALCUL DU DEMI-PROFIL

MATRICE DE RIGIDITE : DEMI-PROFIL = 270

-----

\*\* CALCUL DE L'EQUILIBRE ELASTIQUE \*\*

.....DEPLACEMENTS AUX NOEUDS

NOEUD	*1*	*2*	*3*
1	.0000	.0089	.0000
2	.0000	.0090	.0000
3	.0000	.0090	.0000
4	.0050	.0090	.0000
5	.0050	.0090	.0000
6	.0050	.0090	.0000
7	.0100	.0090	.0000
8	.0100	.0090	.0000
9	.0100	.0090	.0000

.....EQUILIBRE DES NOEUDS ET REACTIONS

NOEUD	1	2	3	4	5	6
1 appui	-2578.3699	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2 appui	-4843.2603	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
3 appui	-2578.3699	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
5	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
7	3333.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
8	3334.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
9	3333.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

\*\* ATTENTION \*\*      SOMMES DES FORCES AUX NOEUDS      DIRECTION      SOMME

	1	.00000
	2	.00000
	3	.00000

\*\*\*\*\*  
\*  
\*            CONTRAINTES DE MEMBRANE DANS LES ELEMENTS TRIANGULAIRES            \*  
\*  
\*\*\*\*\*

ELEM	SX	SY	SZ	SXY	S1	S2	TETA (°)
1	.9999E+03	.1229E+02	.0000E+00	.5399E+01	.9999E+03	.1226E+02	.31
2	.1000E+04	.6399E+02	.0000E+00	.1177E+01	.1000E+04	.6399E+02	.07
3	.1000E+04	.1760E+02	.0000E+00	.3264E+01	.1000E+04	.1759E+02	.19
4	.1001E+04	.7525E+02	.0000E+00	-.1706E+01	.1001E+04	.7525E+02	-.11
5	.1001E+04	.1062E+03	.0000E+00	-.5460E+01	.1001E+04	.1061E+03	-.35
6	.1000E+04	.1229E+02	.0000E+00	.3886E+01	.1000E+04	.1227E+02	.23
7	.1000E+04	.3119E+02	.0000E+00	.3997E+01	.1000E+04	.3117E+02	.24
8	.9999E+03	.1760E+02	.0000E+00	.5016E+01	.1000E+04	.1757E+02	.29

+++++  
.....Fin du travail sur STOP